Serii de numere

Fie x_n un şir de numere complexe şi fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ şirul sumelor parţiale asociat. Seria $\sum_n x_n$ se numeşte convergentă dacă şirul s_n este şir convergent; în caz contrar seria se numeşte divergentă. Dacă seria este convergentă, atunci limita şirului s_n este suma seriei, notată $\sum_n x_n$.

Seria $\sum_n x_n$ se numeşte absolut convergentă dacă seria $\sum_n |x_n|$ este serie convergentă. Orice serie absolut convergentă este convergentă, reciproca fiind falsă.

Dacă $x_n = u_n + iv_n, u_n \in R, v_n \in R$, atunci seria $\sum_n x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seriile $\sum_n u_n$ şi $\sum_n v_n$ sunt ambele convergente.

Dăm în continuare două exemple remarcabile de serii.

Seria geometrică

Fie $z \in C$ (numit raţie) şi fie seria geometrică $\sum_{n \geq 0} z^n$. Atunci seria este convergentă dacă şi numai dacă $|z| < 1$. In acest caz suma seriei este:

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}.}$$

Evident, dacă $z = 1$ seria este divergentă; pentru orice $z \in C$, $z \neq 1$ şirul sumelor parţiale este:

$$\boxed{s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \forall\, z \neq 1.}$$

De aici rezultă că s_n este convergent dacă şi numai dacă $|z| < 1$.

Seria lui Riemann (seria armonică generalizată)

Fie $\alpha \in R$ şi fie seria $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}.}$

Seria dată este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$; în particular, seria armonică $\sum_n \frac{1}{n}$ este divergentă.

Fie $\alpha \leq 1$. Vom demonstra că şirul sumelor parţiale s_n este nemărginit, deci divergent; pentru orice $n \in N$, avem inegalităţile:

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{2^{n\alpha}} \geq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n} \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(+\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ...$$

$$... + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + ... + \frac{1}{2^n}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + ... + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \to \infty.$$

Fie acum $\alpha > 1$; este suficient să arătăm că şirul sumelor parţiale este mărginit (fiind crescător, rezultă convergent). Pentru orice $n \in N$ avem inegalităţile:

$$s_{2^n-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + ...+$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{(n-1)\alpha}} + \frac{1}{2^{(n-1)\alpha}+1} + ... + \frac{1}{2^{n\alpha}-1}\right) \leq$$

$$\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + 8 \cdot \frac{1}{8^\alpha} + ... + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{(n-1)\alpha}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}} + ... + \frac{1}{2^{(n-1)(\alpha-1)}} \leq \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

De aici rezultă că şirul s_n este mărginit.

Criterii de convergenţă pentru serii de numere

1. Criteriul general al lui Cauchy.
Fie $z_n \in C$ un şir de numere complexe; atunci seria $\sum_n z_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in N$ cu proprietatea

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in N.$$

2. Criteriul comparaţiei
Fie $u_n \geq v_n \geq 0$.
a. Dacă seria $\sum_n u_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum_n v_n$ este convergentă.
b. Dacă seria $\sum_n v_n$ este divergentă, atunci şi seria $\sum_n u_n$ este divergentă.

3. Criteriul de comparaţie la limită
Fie $u_n > 0$ şi $v_n > 0$.
a. Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ există şi este un număr real nenul, atunci cele două serii au aceeaşi natură.
b. În particular, dacă $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, atunci obţinem criteriul de comparaţie la limită cu seria lui Riemann:
Fie $\ell = \lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n$.
i. Dacă $\alpha > 1$ şi $\ell \in R$, (ℓ poate fi şi 0), atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.
ii. Dacă $\alpha \leq 1$ şi $\ell > 0$,(ℓ poate fi şi ∞) atunci seria $\sum_n u_n$ este divergentă.

4. Criteriul raportului (al lui D'Alembert)
Fie $u_n > 0$; presupunem că există $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$
a. Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.
b. Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este divergentă.
O variantă (mai generală) a acestui criteriu este:
Dacă există $c \in (0,1)$ şi $n_0 \in N$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < c, \forall n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

5. Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy)
Fie $u_n > 0$; presupunem că există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
a. Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

b. Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum\limits_n u_n$ este divergentă.

O variantă (mai generală) a acestui criteriu este:
Dacă există $c \in (0,1)$ şi $n_0 \in N$ astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} < c, \forall n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

6. Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $u_n > 0$; presupunem că există
$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \ell.$

a. Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum\limits_n u_n$ este convergentă.

b. Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum\limits_n u_n$ este divergentă.

7. Criteriul logaritmic

Fie $u_n > 0$; presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \ell.$

a. Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum\limits_n u_n$ este convergentă.

b. Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum\limits_n u_n$ este divergentă.

8. Criteriul condensării

Fie $u_n \geq u_{n+1} \geq 0$, $\forall n \in N$. Atunci seriile

$$\sum_n u_n \text{ şi } \sum_n 2^n u_{2^n}$$

au aceeaşi natură.

9. Criteriul integral

Fie $f : (0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ o funcţie descrescătoare şi fie şirul

$$a_n = \int_1^n f(t)dt.$$

Atunci seria $\sum\limits_n f(n)$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul a_n este convergent.

10. Criteriul lui Leibniz

Fie $u_n \geq 0$ şi fie seria alternată $\sum\limits_n (-1)^n u_n$. Dacă şirul u_n este descrescător şi are limita zero, atunci seria este convergentă.

11. Criteriul Abel-Dirichlet

Fie a_n un şir descrescător cu $a_n \to 0$ şi fie u_n un şir de numere complexe astfel încât şirul sumelor parţiale $\sum_{k=1}^{n} u_k$ este mărginit. Atunci seria $\sum_n a_n u_n$ este convergentă.

Convergenţă condiţionată

O serie convergentă $\sum_n u_n$ se numeşte necondiţionat convergentă dacă pentru orice permutare (funcţie bijectivă) $\sigma : N \mapsto N$, seria $\sum_n u_{\sigma(n)}$ este de asemenea convergentă; altfel, seria se numeşte condiţionat convergentă.

Dăm în continuare două rezultate remarcabile cu privire la convergenţa condiţionată:

Teorema lui Dirichlet

Orice serie absolut convergentă este necondiţionat convergentă.

Teorema lui Riemann

Fiind date o serie convergentă, dar nu absolut convergentă şi $S \in R \cup \{\pm\infty\}$, atunci există o permutare a termenilor seriei iniţiale astfel încât suma noii serii să fie S.

Aproximarea sumelor seriilor convergente

Evident, suma unei serii convergente se poate aproxima cu termenii şirului sumelor parţiale. Dăm mai jos două rezultate în acest sens.

Aproximarea sumelor seriilor cu termeni pozitivi

Fie $u_n \geq 0$ şi fie $k \geq 0$ astfel încât $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1, \forall n \in N$. Dacă S este suma seriei convergente $\sum_{n \in N} u_n$, iar $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ este suma primilor $n+1$ termeni, atunci:

$$|S - s_n| < \frac{k}{1-k} u_n.$$

Aproximarea sumelor seriilor alternate

Fie $\sum_{n \in N} (-1)^n u_n$ o serie alternată convergentă, şi fie S suma sa.

Dacă $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ este suma primilor $n+1$ termeni, atunci

$$|S - S_n| \leq u_{n+1}.$$