Examen: Programarea Algoritmilor Eficienti

2 septembrie 2024

Alexandru Popa

In primul rand, va rog sa va scrieti NUMELE si GRUPA pe foaia de examen. Timpul de lucru este de 120 de minute. Aveti 1 punct din oficiu.

1 Probleme eliminatorii

Daca nu rezolvati corect toate exercitiile din aceasta sectiune, nu veti promova examenul, indiferent de ce scrieti in restul lucrarii.

1.1

$0,2 \times 0,5 = ?$

1.2

$\log_4 1 = ?$

1.3

Intr-un lac este un palc de nuferi. In fiecare zi, palcul își dubleaza suprafata. Dacă palcului ii trebuie 48 de zile ca sa acopere tot lacul, cat timp i-a trebuit ca sa acopere jumatate din lac?

1.4

Cate noduri are in total un arbore binar complet cu n frunze ?

2 Demonstratii de NP-Completitudine: 2 puncte

Problema 1. *Se da o multime de elemente $\mathcal{U}$, n submultimi ale lui $\mathcal{U}$, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ si un numar k. Sa determine daca exista o submultime $\mathcal{U}'$ a lui $\mathcal{U}$ de cardinalitate cel mult k astfel incat, $\forall 1 \leq i \leq n$, exista un element $a \in \mathcal{U}'$ cu $a \in S_i$. Altfel spus, vrem sa gasim o submultime a lui $\mathcal{U}$ de cardinalitate cel mult k, care contine cel putin un element din fiecare multime $S_1, \ldots, S_n$.*

Demonstrati ca Problema 1 este NP-completa printr-o reductie de la una din problemele studiate la curs (de exemplu, 3-SAT, Vertex Cover, Set Cover, Hamiltonian Path, Traveling Salesman Problem).

3 Algoritmi de aproximare: 4 puncte

3.1 2 puncte

Problema 2. *Se instanta set cover* $U = \{1,2,3,4,5\}$ *si* $S_1 = \{1,2\}, S_2 = \{1,3,5\}, S_3 = \{2,3,4\}, S_4 = \{4,5,6\}, S_5 = \{6\}$

Cerinte:

1. (1 punct). Sa se scrie instata de set cover data ca o problema de programare liniara pe intregi.
2. (1 punct). Gasiti o solutie la relaxarea programului liniar formulat la punctul anterior care este strict mai mica decat set cover-ul optim pe instanta data.

3.2 2 puncte

Problema 3. *Se da un graf neorientat* $G = (V,E)$*. O colorare a nodurilor lui* G *cu* k *culori este o functie* $c : V \to \{1,2,\ldots,k\}$ *such that for any two adjacent vertices* a*,* b*, we have* $c(a) \neq c(b)$*.*

Cerinte:

1. (1 punct) Construiti un algoritm care primeste ca input un graf G si returneaza o colorare cu $\Delta + 1$ culori unde Δ este gradul maxim al lui G.
2. (1 punct) Se da un graf care admite o 3 colorare (vi se da doar graful, fara sa stiti si colorarea). Sa se gaseasca o colorare a acestui graf cu $O(\sqrt{|V|})$ culori.

4 Algoritmi fixed parameter: 3 puncte

Problema 4. *Se da o secventa de pietre, fiecare avand o greutate (un numar intreg pozitiv) si o culoare. Se pot elimina pietre de greutate totala cel mult* k*, astfel incat toate pietrele de aceeasi culoare sa fie consecutive?*

Gasiti un algoritm fixed parameter pentru Problema 4 (si, evident, demonstrati corectitudinea si timpul de rulare).