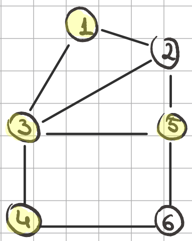
REZUMAT CURS

① ALG APROXIMATIVI

↳ 1.1 VERTEX COVER

Def: Se dă un graf neorientat $G = (V, E)$. Să se găsească o submulț de noduri $V' \subseteq V$ de cardinalitate minimă aî $\forall (a, b) \in E$, avem că $a \in V'$ sau $b \in V'$.

Exemplu:



$V' = \{1, 3, 4, 5\}$

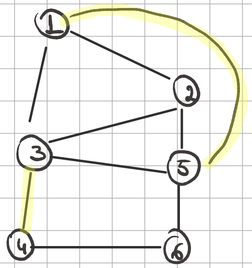
Def: Cuplaj (Matching)

Un cuplaj într-un graf neorientat $G = (V, E)$ este o submulț. de muchii $M \subseteq E$ aî oricare 2 muchii nu se intersectează.

Def: Cuplaj maximal (maximal matching) este un cuplaj M aî $\forall a \in E \setminus M$, $M \cup \{a\}$ nu e cuplaj.

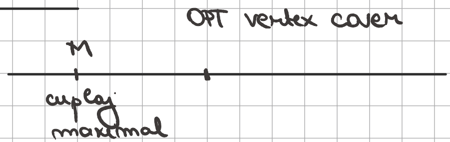
Def: Cuplaj maxim (maximum matching) este un cuplaj M cu prop că $\forall$ cuplaj M' avem că $|M| \geq |M'|$.

Exemplu:



$\rightsquigarrow$ maximal, dar NU maxim.

Teoremă: Dându-se un graf neorient $G = (V, E)$, fie V' un Vertex-Cover minim și M un cuplaj maximal. Atunci $|M| \leq |V'|$.



Dem th: $\forall (a,b) \in M$, avem $a \in V'$ sau $b \in V'$. Cum $\forall (a,b) \in M$, $\forall (c,d) \in M$, $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset \Rightarrow |M| \leq |V'|$. $\blacksquare$

ALG 2-APROX

Pas 1: Găsesc un cuplaj maximal M.

Pas 2: Construiesc un VC care conține capete tuturor muchiilor din M.

Teoremă: $|ALG| \leq 2 \cdot OPT$ și V' este un VC.

Dem: $\left.\begin{array}{l} |M| \leq OPT \\ |ALG| = 2|M| \end{array}\right\} \Rightarrow |ALG| \leq 2\, OPT.$

Pres. prin absurd că $\exists (a,b) \in E$ aî $a,b \notin V'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow M \cup \{(a,b)\}$ este un cuplaj $\Rightarrow M$ nu e maximal ↯

$\square$

<u>Rmk:</u> Dacă M e maxim, am avea un factor de aprox mai bun? NU.

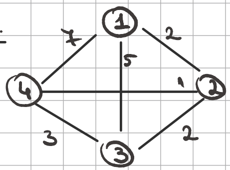
↳  $M = \{(1,2)\} \Rightarrow ALG = 2$ noduri

$OPT = 1$ nod.

→ 1.2. TSP

<u>Def:</u> (TSP) Să dă un graf neorientat complet $G = (V, E)$, cu muchii cu cost pozitiv. Vrem să facem un tur complet (ciclu hamiltonian) de cost minim.

<u>Exemplu:</u>



$cost(1\,2\,3\,4\,1) = 14$

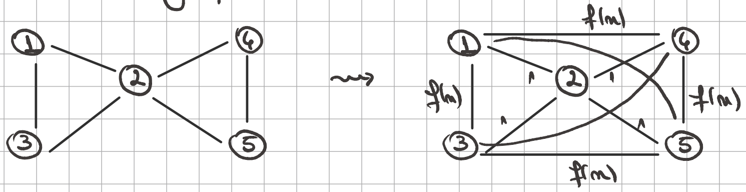
$cost(1\,3\,4\,2\,1) = 11$ ← asta e optim

<u>Teoremă:</u> Pt $\forall f$ calculabilă în timp polinomial, pb. TSP nu se poate aproxima la un factor $f(n)$, cu pres. că $P \neq NP$.

<u>Dem:</u> Reducție la pb. ciclului hamiltonian.

Arătăm că dacă avem un alg. de $f(n)$-aproximare pt TSP, atunci putem rezolva HC în timp polinomial.

Plecăm cu graful G.



Construim G' complet astfel:

→ dacă $(a,b) \in E \Rightarrow cost(a,b) = 1$

→ altfel, $cost(a,b) = f(n)$

Avem 2 cazuri:

CI: G are ciclu hamiltonian $\Rightarrow OPT_G = n$

CII: G nu are $\Rightarrow OPT_G > f(n) + n - 1$

$\boxed{4}$

O metrică pe X este o funcție $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ a.î.:

(i) $d(x,x) = 0, \forall x \in X$

(ii) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$

(iii) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z), \forall x, y, z \in X$

ALG 2-APROX PT TSP PE SPAȚII METRICE

Lemă: În orice graf complet $G = (V, E)$ în care fct. distanță e metrică, avem MST în $G \leq OPT$.

Vom folosim noțiunea de tur eulerian.

Suma muchiilor dintr-un tur eulerian $= 2\,MST \leq 2\,OPT$.

"Scurtcircuităm" turul + ineg $\triangle$

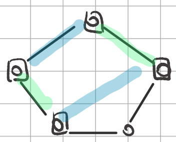
$\blacksquare$

ALG DE $\frac{3}{2}$ - APROX PT TSP

Lema: $\forall V' \subseteq V$, un cuplaj perfect de cost minim V' are
$|V'| = par$

$$\text{cost} \leq \frac{OPT}{2}$$

Dem:



$\left.\begin{array}{l} V' \subseteq V \\ d \text{ metrică} \end{array}\right\} \Rightarrow$ cost tur optim $V' \leq$ cost tur optim V

$|V'| = 2m \Rightarrow$ putem costrui 2 cuplaje perfecte M_1, și M_2

a.î. $\text{cost}(M_1) + \text{cost}(M_2) = \text{cost}(V') \leq OPT$

$\Rightarrow$ cuplaj perf. cost min $\leq \min(\text{cost}(M_1), \text{cost}(M_2))$

$$\leq \frac{\text{cost}(V')}{2} \leq \frac{OPT}{2}$$

$\blacksquare$

Alg $\frac{3}{2}$ - aprox:

→ Găsim un MST, să îl numim T

→ Fie $V' \subseteq V$ mulț. nodurilor de grad impar în MST

→ Pe V' găsim un cuplaj perfect de cost minim M

→ În graful $M \cup T$ vom avea toate nodurile de grad par.

→ Calculez un ciclu eulerian pe care îl "scurtcircuitez"

$$\text{Cost C. Euler} \leq \text{cost}(M) + \text{cost}(T) \leq \frac{OPT}{2} + OPT = \frac{3\,OPT}{2}$$

$\blacksquare$

→ 1.3. Minimum Steiner Tree

Def: Se da un graf neorientat $G = (V, E)$

$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ in care fiecare muchie are un cost asociat

Nodurile sunt partitionate în:

R = noduri obligatorii

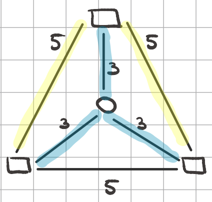
S = noduri Steiner (optionale)

$V = R \cup S$

Vrem să găsim un APM care să includă toate nodurile R

și posibil un subset din S.

Exemplu:



□ = required

○ = steiner

OPT = 9

MST doar pe □ = 10

Lemă: Fie G un graf neorientat și $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ARBITRARĂ.

Putem construi în timp polinomial un graf $G' = (V, E')$ și o metrică

pe V' aî $OPT_{ST(G)} = OPT_{ST(G')}$

Idee: În G' voi construi (x, y) cu cost = cost drum min în G de la x la y.

Alg 2-aprox:

Calculăm MST pt mulț. R.

Înlocuim cu "shortest path-ul" din G care a generat muchia în G'.

2 ILP

↳ 2.1 Vertex cover folosind ILP

Fie $G=(V,E)$ o instanță a VC

Variabile: $x_i \in \{0,1\}$, $i=\overline{1,n}$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{dacă nodul } v_i \text{ în VC} \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

Constrângeri: $x_i + x_j \geq 1, \forall (x_i, x_j) \in E$

Obiectiv: minimizează $\sum_{i=1}^{n} x_i$

Vom rezolva (în timp polinomial) relaxarea probl. de prog. liniară. Fie x_i' sol. obț.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \leq OPT_{ILP} = OPT_{VC}$$

Vrem să căutăm o sol. fezabilă (care satisface ineg ILP) x_i^* a.î. $\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i'$

Construim x_i^* în felul următor:

$$x_i^* = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x_i' \geq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$\Rightarrow x_i^* \leq 2 \cdot x_i', \forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow \sum x_i^* \leq 2 \cdot \sum x_i'$

Verificăm că e fezabilă, i.e $x_i^* + x_j^* \geq 1, \forall (x_i, x_j) \in E$

$\hookrightarrow x_i' + x_j' \geq 1 \Rightarrow x_i' \geq \frac{1}{2}$ sau $x_j' \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_i^* = 1$ sau $x_j^* = 1 \Rightarrow$ OK!

→ 2.2. SET COVER

$\boxed{4}$

Def: Se dă o mulț. de elem $\mathcal{U}$ (s.n. univers). $\mathcal{S}$ = mulț. de submulț. ale lui $\mathcal{U}$.

→ Varianta fără cost: i.e au toate cost 1

→ Varianta cu costuri: $\forall S \in \mathcal{S}$, $c(S)$ = costul lui S, $c(S) > 0$

Vrem o mulț. de submulț. din $\mathcal{S}$, de cost minim, a căror reuniune $= \mathcal{U}$.

ALG $O(\log n)$ aprox

Greedy:

$C = \emptyset$

while $C \neq \mathcal{U}$

Aleg $S \in \mathcal{S}$ aî $\frac{cost(S)}{|S \setminus C|}$ sa fie minim

$C = C \cup S$

Dem: Fie $e \in \mathcal{U}$. Notăm cu $preț(e) = \frac{cost(S)}{|S \setminus C|}$, unde S e mulț. care îl acoperă prima date pe e. (în alg. Greedy).

$$\sum_{e \in \mathcal{U}} preț(e) = ALG$$

Fie $e_1, e_2, \dots, e_n$ ordinea în care sunt acop. elem. de alg.

Arat că $preț(e) \le \frac{OPT}{n-i+1}$ (*)

$$\Rightarrow ALG = \sum_{e \in \mathcal{U}} pret(e) \le OPT \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}_{\Theta(\ln n)}$$

Altă var: Iau $preț(e) = \frac{cost(S)}{|S \setminus C|}$

$$preț(S) = \sum_{e \in S} pret(e)$$

$$pret(S) \le cost(S) \cdot \ln n$$

$$ALG = \sum pret(e) \le \sum_{i=1}^{m} pret(O_i) = OPT \cdot \ln n$$

mulț din sol optimă

SET COVER CU ILP

$$x_S = \begin{cases} 1, & \text{dacă } S \text{ e în sol} \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

Vrem să minimizăm $\sum_{S \in \mathcal{S}} x_S \, c(S)$ aî

$$\sum_{S \ni e} x_S \geq 1, \forall e \in \mathcal{U}$$

Relaxare pt. problemă: $x_S \in [0, 1]$

Rezolvăm relaxarea și obt $x'_S \in [0, 1]$

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} x'_S \cdot c(S) \leq OPT$$

Algoritm:

→ Repetăm de $c \cdot \log n$ ori (unde c e o const. ce va fi aleasă mai târziu)

→ Cu probabilitate x'_S adaugăm S la soluție

Arătăm că:

1. Sol returnată are cost $\leq O(\log n) \cdot OPT$
2. Sol ret. e un set cover valid.

Fie $a \in U$ și pp. că $a \in S_1, \dots S_k$

$\mathbb{P}$(nu acoperim a) $= \mathbb{P}$(nu selectăm nici S_1, nici S_2 ... nici S_k)

$$= \prod_{S \ni a} (1 - x'_S) \leq \prod e^{-x'_S} = \prod e^{-(\sum x_S)}$$

$$\leq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\mathbb{P}$(să nu fie acoperit la niciun pas) $\leq \frac{1}{e^{c \log n}} \leq \frac{1}{4n}$

Alegem c a.î. $\left(\frac{1}{e}\right)^{c \log n} \leq \frac{1}{4n}$

$\mathbb{P}$(un elem să nu fie acop) $\leq \sum_{a \in \mathcal{U}} \mathbb{P}$(a nu e acop)

$\leq n \cdot \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{E}[\text{soluție}] \leq (c \log n) \underbrace{\left(\sum_{S \in \mathcal{S}} x_S'\right)}_{\leq OPT}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\text{soluție}] \leq c \log n \; OPT$