Serii de funcţii

Fie $u_n : X \mapsto R(C)$ un şir de funcţii şi fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$ şirul sumelor parţiale.

Se spune că seria $\sum_n u_n$ este punctual (simplu) convergentă dacă s_n este punctual convergent. Seria este uniform convergentă dacă s_n converge uniform. Suma seriei este limita (punctuală sau uniformă) a şirului sumelor parţiale.

Criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă

Dacă există un şir cu termeni pozitivi a_n astfel încât $|u_n(x)| \le a_n, \forall x \in X$ şi seria $\sum_n a_n$ converge, atunci seria $\sum_n u_n$ converge uniform.

Transfer de continuitate

Dacă u_n sunt funcţii continue şi seria $\sum_n u_n$ converge uniform la f, atunci funcţia f este continuă.

Integrare şi derivare termen cu termen

Se spune că o serie de funcţii $\sum_n f_n$ are proprietatea de integrare termen cu termen pe intervalul $[a,b]$ dacă $\int_a^b \left(\sum_n f_n(x)\right) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)dx$.

Se spune că o serie de funcţii $\sum_n f_n$ are proprietatea de derivare termen cu termen pe mulţimea D dacă $\left(\sum_n f_n(x)\right)' = \sum_n f_n'(x), \forall x \in D$.

Are loc următorul rezultat:

Fie $u_n : [a,b] \mapsto R$ un şir de funcţii continue.

a. Dacă seria $\sum_n u_n$ converge uniform la f , atunci f este integrabila şi $\int_a^b \sum_n u_n(x)dx = \sum_n \int_a^b u_n(x)dx$.

b. Presupunem că funcţiile u_n sunt derivabile. Dacă seria $\sum_n u_n$ converge punctual la f şi dacă există $g : [a,b] \mapsto R$ astfel încât $\sum_n u_n'$ converge uniform la g, atunci f este derivabilă şi $f' = g$.

Trebuie menţionat că ipotezele teoremei de mai sus sunt condiţii suficiente (nu şi necesare) pentru ca o serie să se poată integra (respectiv deriva) termen cu termen.

Formula lui Taylor

Fie $I \subseteq R$ un interval deschis şi fie $f : I \mapsto R$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^m$ pe I. Pentru orice $a \in I$ definim polinomul Taylor de gradul $n \leq m$ asociat funcţiei f în punctul a:

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul de ordin n este, prin definiţie,

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Polinoamele Taylor de gradul întâi (respectiv de gradul al doilea) se numesc aproximarea liniară (respectiv pătratică) ale funcţiei în jurul punctului a.

Teoremă (Formula lui Taylor cu restul Lagrange)

Fie $f : I \mapsto R$ de clasă $\mathcal{C}^{n+1}$ şi $a \in I$. Atunci, pentru orice $x \in I$, există

$\xi \in (a, x)$ (sau (x, a)) astfel încât

$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Observaţii

1. Restul de ordin n poate fi scris sub forma Peano :
$\exists \omega : I \mapsto R$ astfel încât $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ şi
$R_{n,f,a}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\omega(x)$.

2. $\lim\limits_{x \to a} \frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

3. Restul de ordin n poate fi scris sub forma integrală:

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Seria Taylor

Fie $I \subseteq R$ un interval deschis şi fie $f : I \mapsto R$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe I. Pentru orice $x_0 \in I$ definim seria Taylor asociată funcţiei f în punctul x_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Observaţii

1. Seria Taylor asociată funcţiei f în punctul x_0 este o serie de puteri.

2. Seria Taylor asociată lui f în $x_0 = 0$ se mai numeşte şi serie Mc Laurin.

Teorema de reprezentare a funcţiilor prin serii Taylor

Fie $a < b$ şi fie $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$ astfel încât există $M > 0$ cu proprietatea că $\forall n \in N, \forall x \in [a, b]$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Atunci pentru orice $x_0 \in (a, b)$, seria Taylor a lui f în jurul lui x_0 este uniform convergentă pe $[a, b]$ şi suma ei este funcţia f, adică $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, $\forall x \in [a, b]$.

Serii de puteri

Fie $(a_n)_{n \in N}$ un şir de numere complexe şi $a \in C$. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ se numeşte seria de puteri centrată în a definită de şirul a_n.

Formula razei de convergenţă

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ şi fie $\alpha = \limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}$.

Raza de convergenţă a seriei date, (notată R), se defineşte astfel:

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad \alpha = \infty \\ \infty & \text{dacă} \quad \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{dacă} \quad \alpha \in (0, \infty) \end{cases}$$

Teorema lui Abel

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ o serie de puteri şi fie R raza sa de convergenţă.

1. Dacă $R = 0$, atunci seria converge numai pentru $z = a$.

2. Dacă $R = \infty$, atunci seria converge absolut pentru orice $z \in C$.

3. Dacă $R \in (0, \infty)$, atunci seria este absolut convergentă pentru $|z-a| < R$ şi divergentă pentru $|z-a| > R$.

4. Seria este uniform convergentă pe orice disc închis $|z-a| \leq r$, $\forall r \in (0, R)$.

Derivare şi integrare termen cu termen

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ o serie de puteri şi fie $S(z)$ suma sa.

1. Seria derivatelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$ are aceeasi rază de convergenţă cu seria iniţială şi suma sa este $S'(z)$.

2. Seria primitivelor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ are aceeasi rază de convergenţă cu seria iniţială şi suma sa este o primitivă a lui S.

Functii elementare

1. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \cdot z^n, \ \forall z \in C.$

2. $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n, \ \forall |z| < 1.$

3. $\dfrac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \ \forall |z| < 1.$

4. $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n}, \ \forall z \in C.$

5. $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}, \ \forall z \in C.$

6. $(1+z)^\alpha = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \ \forall |z| < 1, \alpha \in R.$