2 Demonstratii de NP-Completitudine: 2 puncte

Problema 1. *Se da o multime de elemente $\mathcal{U}$, n submultimi ale lui $\mathcal{U}$, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ si un numar k. Sa determine daca exista o submultime $\mathcal{U}'$ a lui $\mathcal{U}$ de cardinalitate cel mult k astfel incat, $\forall 1 \leq i \leq n$, exista un element $a \in \mathcal{U}'$ cu $a \in S_i$. Altfel spus, vrem sa gasim o submultime a lui $\mathcal{U}$ de cardinalitate cel mult k, care contine cel putin un element din fiecare multime $S_1, \ldots, S_n$.*

Demonstrati ca Problema 1 este NP-completa printr-o reductie de la una din problemele studiate la curs (de exemplu, 3-SAT, Vertex Cover, Set Cover, Hamiltonian Path, Traveling Salesman Problem).

E pb 1 din poze trimise mai devreme

3 Algoritmi de aproximare: 4,5 puncte

3.1 2,5 puncte

Se da graful $G = (V, E)$, cu $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1,2); (1,3); (2,3); (3,4), (2,4); (4,5)\}$

Problema 2.

Cerinte:

1. (0,5 puncte). Sa se gaseasca un vertex cover minim pe graful dat
2. (1 punct). Sa se scrie instanta de vertex cover data ca o problema de programare liniara pe intregi.
3. (1 punct). Gasiti o solutie la relaxarea programului liniar formulat la punctul anterior care este strict mai mica decat vertex cover-ul optim pe instanta data.

← Pb 2 trimisă

3.2 2 puncte

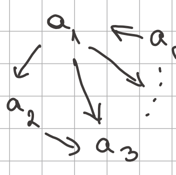
Problema 3. *Un turneu este un graf orientat $G = (V, E)$, astfel incat pentru fiecare pereche de noduri $u, v \in V$, exact unul din arcele (u, v) si (v, u) este in E.* Un feedback vertex set *pentru G este o submultime de noduri din G a carei eliminare produce un graf fara cicluri.*

Sa se gaseasca un algoritm polinomial de 3 aproximare pentru problema gasirii unui feedback vertex set *de cardinalitate minima.*

Indiciu: concentrati-va pe ciclurile de lungime 3!

Pas 1: Observăm că dacă $\exists$ un ciclu în G atunci $\exists$ un ciclu de lg 3.

↳ Dem: Fie $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ un ciclu în G, $m > 3$.



Pp prin absurd că $\nexists$ ciclu de lg 3. G e graf turneu $\Rightarrow (a_1, a_i) \in E$ sau $(a_i, a_1) \in E$.

Dacă $(a_3, a_1) \in E \Rightarrow (a_1, a_2, a_3)$ ciclu ↯

Rămâne că $(a_3, a_1) \in E$.

Similar arat că $(a_i, a_1) \in E$, $\forall\, i > 1$.

$\Rightarrow (a_{m-1}, a_1) \in E \Rightarrow$ am ciclul (a_{m-1}, a_m, a_1) X

$\Rightarrow \exists$ un ciclu de lg 3.

PAS 2: Cu obs. de la PAS 1, e suficient să elimin ciclii de lg 3.

↳ ① Găsesc în timp poli toți ciclii de lg 3.

② Construiesc urm. instanța a pb. set cover

Fie $c_1, \dots c_\ell$ toți ciclii de lg 3.

Iau $U = \{c_1 \dots c_\ell\}$

Pt $i = \overline{1,n}$, $S_i = \{c_j \mid c_j$ cont. nodul $i\}$

Obs că c_i apare în exact 3 mult $\Rightarrow$ am făcut (la seminar)

$\Rightarrow \exists$ o 3-aprox pt această instanță set cover.

Obs: Soluție din seminar pt pb. mai generală.

Am o instanță a set cover unde $\forall x \in S$, apare în cel mult f mulțimi. O să arăt că am o f-aprox la asta.

Scriu pb set cover ca ILP: $\forall S_i \in S \rightsquigarrow$ am o variabila x_{S_i}

Condiții : pt $\forall x \in U$, Vreau $\sum_{x \in S} x_S \geq 1$

Fct. de minimizat : $\boxed{\sum_{S_i \in S} x_{S_i}}$

Alg f-aprox: dacă Rezolv relaxarea ILP. Dacă

sol pt relax. $\rightarrow$ $x_S^* > \frac{1}{f} \Rightarrow$ iau iau $x_s = 1$, altfel 0

Trebuie să arăt că e f-aprox.

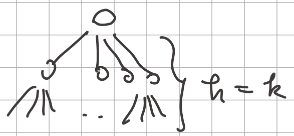
$$Sol = \sum x_s < \sum f \cdot x_s^* = f \underbrace{\sum x_s^*}_{\leq OPT} = f \cdot OPT$$ ☑

E mai greu o adaug mai târziu :)

Problema 5. *Se da un graf neorientat G si un numar k. Este posibil sa eliminam cel mult k muchii din G astfel incat graful sa nu aiba cicluri de lungime 4?*

Sol: Iau aleator un ciclu de lg 4. Fie (u_1, u_2, u_3, u_4).

Elimin pe rând fiecare muchie și repet. Arborele de decizie va arăta:



$\Rightarrow$ complexitate $O^*(4^k)$