EXAMEN PAE

(1) (P) Se dă o mulțime $\mathcal{U}$.
$S_1, \ldots S_m$ submulțimi ale lui $\mathcal{U}$.
$k \in \mathbb{N}$
Să se determine dacă $\exists\, \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, cu $|\mathcal{U}'| \leq k$ a.î.
$\forall i \in \overline{1,m}$, $\exists\, a \in \mathcal{U}'$, cu $a \in S_i$.

Cerință: Să se arate că (P) e NP-completă.

Sol: Vom arăta că Set Cover $\leq$ P.
Fie $\mathcal{U}, S_1, \ldots S_m$ o instanță a pb. set cover.
Construim $\tilde{\mathcal{U}}$ în felul următor:
$\tilde{\mathcal{U}} = \{1, 2, \ldots n\}$.
$\tilde{S}_i = \{ j \in \{1, \ldots n\} \mid u_i \in S_j \}$, unde $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots u_n\}$.
$\llcorner$ sunt acei indici a mulțimilor care conțin elem. u_i.

(*) Rezolvăm acum problema (P), i.e. ~~găsim~~ verificăm dacă $\exists\, \tilde{\mathcal{U}}' \subseteq \tilde{\mathcal{U}}$, cu $|\tilde{\mathcal{U}}'| \leq k$ a.î. $\forall i \in \overline{1,n}$, $\exists\, a \in \tilde{S}_i$, $a \in \tilde{\mathcal{U}}'$.
Claim: Răspunsul la Set Cover = Răspunsul la această instanță a (P).
Într-adevăr, dacă răspunsul la (*) e da $\Rightarrow \exists\, \tilde{\mathcal{U}}' \ldots$
$\forall i \in \overline{1,n}$, $\exists\, a \in \tilde{S}_i$, $a \in \tilde{\mathcal{U}}'$

$$a \in \tilde{S}_i \Rightarrow u_i \in S_a$$

~~Ioa~~ ~~A~~ Soluția la set cover va fi mulț. formată din $\{S_{u_i'}\}_{u_i' \in \mathcal{U}'}$

Se arată similar că dacă răspunsul la (*) e nu $\Rightarrow$ și la set cover e nu

(2) Se dă instanța de set cover $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_1 = \{1, 2\}$

$S_2 = \{1, 3, 5\}$

$S_3 = \{2, 3, 4\}$

$S_4 = \{4, 5, 6\}$

$S_5 = \{6\}$

a) Să se scrie instanța de set cover ca pb de ILP.

Sol: Variabile: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$

↳ una pt fiecare mulț. S_i

Constrângeri: $x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 + x_3 \geq 1$

$x_2 + x_3 \geq 1$ ← pt fiecare $u \in U$ $\sum$ mulț. care cont. $u \geq 1$

$x_3 + x_4 \geq 1$

$x_2 + x_4 \geq 1$

$x_4 + x_5 \geq 1$

Obiectiv: minimizează $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

b) Soluție relaxare < set coverul optim

Sol: Set cover optim = 3 (de exemplu S_1, S_2, S_3)

Iau pt. relaxarea pb: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{1}{2}$.

$\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{5}{2} < 3$.

▨

③ $G=(V,E)$ graf neorientat

a) Alg. care primește ca input G și returnează o colorare cu $\Delta+1$ culori, Δ = grad maxim G.

Sol: Pentru fiecare nod v, colorez fiecare vecin, cu câte o culoare diferită (cea mai mică culoare nefolosită)

PSEUDOCOD

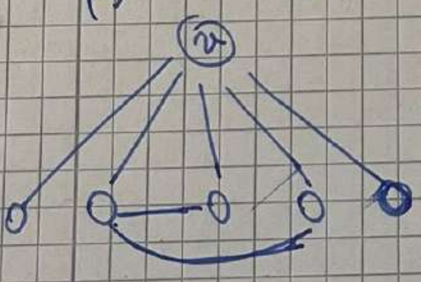
```
DFS(node) {
   culoare[1 ... Δ+1] = true
   vis[node] = 1

   for(vecinii v[node]) {
      if (vis[vecin] == 0) {
         DFS(vecin) }
         culoare[c[vecin]] = false
   }
   for ( i = 1, Δ+1) {
      if(culoare[i] == true) {
         c[nod] = i
   } }
}
```

b) Știu că graful e 3-colorabil. Să se găsească o colorare cu $O(\sqrt{n})$ culori.

Sol: • dacă $deg(v) > \sqrt{n}$ ⇒ mă uit la vecinii lui v.

(1)



cum graful e 3-colorabil, subgraful format doar din vec. lui v e 2-colorabil ⇒ colorez toți vecinii cu 2 culori (DFS, de ex), apoi colorez nodul v cu a 3-a culoare

Fac acest lucru pt. toate nodurile necolorate încă, cu $deg(v) > \sqrt{n}$ (folosesc 3 perechi de culori diferite de fiecare dată)

Când rămân cu toate nodurile cu $deg(v) \leq \sqrt{n}$ ⇒ folosesc

~~Mai rămâne de arătat că sunt~~ $\cancel{O(\sqrt{n})}$ ~~noduri cu~~
$\cancel{deg(v) > \sqrt{n}}$

$$\cancel{\sum_{v \in V} deg(v) = 2m}$$

Mai trebuie arătat că pasul (1) se repetă de cel mult $O(\sqrt{n})$ ori.

Observăm că la fiecare iterație de la pasul (1) "eliminăm" cel puțin $\sqrt{n}$ noduri $\Rightarrow$ Se va repeta de cel mult $\sqrt{n}$ ori. $\blacksquare$