Curs 6

November 14, 2022

Câteva funcții recursive

1. Funcția sumă $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.
2. Funcția produs $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.
3. Funcția factorial $f(x) = x!$.
4. $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$.

Câteva funcții recursive

1. Funcția sumă $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.
2. Funcția produs $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.
3. Funcția factorial $f(x) = x!$.
4. $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$.
$$x_1^0 = 1 \text{ (Atenție: convenim ca } 0^0 = 1)$$
$$x_1^{x_2+1} = x_1^{x_2} \cdot x_1.$$
5. Funcția predecesor $p(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Câteva funcții recursive

1. Funcția sumă $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.
2. Funcția produs $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.
3. Funcția factorial $f(x) = x!$.
4. $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$.

$$x_1^0 = 1 \text{ (Atenție: convenim ca } 0^0 = 1)$$
$$x_1^{x_2+1} = x_1^{x_2} \cdot x_1.$$

5. Funcția predecesor $p(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0. \end{cases}$

$$p(0) = 0$$
$$p(x+1) = x.$$

6. $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \dot{-} x_2, x_1 \geq x_2, \\ 0, x_1 < x_2. \end{cases}$

Câteva funcții recursive

1. Funcția sumă $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.
2. Funcția produs $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.
3. Funcția factorial $f(x) = x!$.
4. $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$.

$$x_1^0 = 1 \text{ (Atenție: convenim ca } 0^0 = 1)$$
$$x_1^{x_2+1} = x_1^{x_2} \cdot x_1.$$

5. Funcția predecesor $p(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0. \end{cases}$

$$p(0) = 0$$
$$p(x+1) = x.$$

6. $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \dot{-} x_2, x_1 \geq x_2, \\ 0, x_1 < x_2. \end{cases}$

$$x_1 \dot{-} 0 = 0$$
$$x_1 \dot{-} (x_2 + 1) = p(x_1 \dot{-} x_2).$$

Continuare funcții recursive

7. $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.

Continuare funcții recursive

7. $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.
$$|x_1 - x_2| = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1)$$
8. $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$

Continuare funcții recursive

7. $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.
$$|x_1 - x_2| = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1)$$
8. $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$
$$\alpha(x) = 1 \dot{-} x.$$
9. $f(x_1, x_2) \equiv (x_1 = x_2)$.

Continuare funcții recursive

7. $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.
$$|x_1 - x_2| = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1)$$
8. $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$
$$\alpha(x) = 1 \dot{-} x.$$
9. $f(x_1, x_2) \equiv (x_1 = x_2)$.
$$(x_1 = x_2) \equiv \alpha(|x_1 - x_2|).$$
10. $f(x_1, x_2) \equiv (x_1 \leq x_2)$.

Continuare funcții recursive

7. $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.
$$|x_1 - x_2| = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1)$$
8. $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$
$$\alpha(x) = 1 \dot{-} x.$$
9. $f(x_1, x_2) \equiv (x_1 = x_2)$.
$$(x_1 = x_2) \equiv \alpha(|x_1 - x_2|).$$
10. $f(x_1, x_2) \equiv (x_1 \leq x_2)$.
$$(x_1 \leq x_2) \equiv \alpha(x_1 \dot{-} x_2).$$
11. Dacă f și g sunt predicate recursive, atunci $\bar{f}$, $f \vee g$, $f \wedge g$ sunt recursive.

Continuare funcții recursive

7. $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.
$$|x_1 - x_2| = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1)$$
8. $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$
$$\alpha(x) = 1 \dot{-} x.$$
9. $f(x_1, x_2) \equiv (x_1 = x_2)$.
$$(x_1 = x_2) \equiv \alpha(|x_1 - x_2|).$$
10. $f(x_1, x_2) \equiv (x_1 \leq x_2)$.
$$(x_1 \leq x_2) \equiv \alpha(x_1 \dot{-} x_2).$$
11. Dacă f și g sunt predicate recursive, atunci $\bar{f}$, $f \vee g$, $f \wedge g$ sunt recursive.
$$\bar{f} \equiv \alpha(f),\ f \wedge g \equiv f \cdot g,\ f \vee g \equiv \overline{\bar{f} \wedge \bar{g}}$$
.

Continuare funcții recursive

12. Dacaă h, g, P sunt funcții recursive de n variabile, atunci
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ dacă } P(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{altfel} \end{cases}$$
este recursivă.

Continuare funcții recursive

12. Dacaă h, g, P sunt funcții recursive de n variabile, atunci
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{dacă } P(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{altfel} \end{cases}$$
este recursivă.
$$f \equiv g \cdot P + h \cdot \alpha(P).$$

13. Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ este recursivă, atunci funcțiile:
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = \sum_{t=0}^{m} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = \prod_{t=0}^{m} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
sunt recursive.

Continuare funcții recursive

12. Dacaă h, g, P sunt funcții recursive de n variabile, atunci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{dacă } P(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{altfel} \end{cases}$ este recursivă.

$$f \equiv g \cdot P + h \cdot \alpha(P).$$

13. Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ este recursivă, atunci funcțiile:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = \sum_{t=0}^{m} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = \prod_{t=0}^{m} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$

sunt recursive.

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0),$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, m+1) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) + f(x_1, x_2, \ldots, x_n, m+1).$$

Continuare funcții recursive

14. Dacă predicatul $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ este recursiv, atunci:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = (\forall t)_{t \leq m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = (\exists t)_{t \leq m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$

sunt recursive.

Continuare funcții recursive

14. Dacă predicatul $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ este recursiv, atunci:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = (\forall t)_{t \leq m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = (\exists t)_{t \leq m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$

sunt recursive.

$$(\forall t)_{t \leq m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \equiv \left[\prod_{t=0}^{m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\right] = 1,$$
$$(\exists t)_{t \leq m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \equiv \left[\sum_{t=0}^{m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\right] \neq 0.$$

15. Funcția $f(x_1, x_2) \equiv x_2 | x_1$ este recursivă.

Continuare funcții recursive

14. Dacă predicatul $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ este recursiv, atunci:
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = (\forall t)_{t \le m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = (\exists t)_{t \le m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
sunt recursive.
$$(\forall t)_{t \le m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \equiv \left[\prod_{t=0}^{m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\right] = 1,$$
$$(\exists t)_{t \le m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \equiv \left[\sum_{t=0}^{m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\right] \neq 0.$$
15. Funcția $f(x_1, x_2) \equiv x_2 | x_1$ este recursivă.
$$x_2 | x_1 \equiv (\exists t)_{t \le x_1} (x_2 \cdot t = x_1).$$
16. Predicatul $Prime(x) \equiv$ "este x număr prim?", este recursiv.

Continuare funcții recursive

14. Dacă predicatul $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ este recursiv, atunci:
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = (\forall t)_{t \le m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = (\exists t)_{t \le m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
sunt recursive.
$$(\forall t)_{t \le m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \equiv \left[\prod_{t=0}^{m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\right] = 1,$$
$$(\exists t)_{t \le m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \equiv \left[\sum_{t=0}^{m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\right] \neq 0.$$
15. Funcția $f(x_1, x_2) \equiv x_2 | x_1$ este recursivă.
$$x_2 | x_1 \equiv (\exists t)_{t \le x_1} (x_2 \cdot t = x_1).$$
16. Predicatul $Prime(x) \equiv$ "este x număr prim?", este recursiv.
$$Prime(x) \equiv (x > 1) \wedge (\forall t)_{t \le x} ((t = 1) \vee (t = x) \vee \overline{(t | x)}).$$

Continuare funcții recursive

17. Funcția "parte întreagă", $f(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$ este recursivă.

Continuare funcții recursive

17. Funcția "parte întreagă", $f(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$ este recursivă.
$$[x_1/x_2] = min_t[(t+1) \cdot x_2 > x_1].$$
18. Funcția $R(x_1, x_2)$, restul împărțirii întregi a lui x_1 la x_2, este recursivă.

Continuare funcții recursive

17. Funcția "parte întreagă", $f(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$ este recursivă.
$$[x_1/x_2] = min_t[(t+1) \cdot x_2 > x_1].$$
18. Funcția $R(x_1, x_2)$, restul împărțirii întregi a lui x_1 la x_2, este recursivă.
$$R(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} (x_2 \cdot [x_1/x_2]).$$
19. Funcția p_n definită ca al n-lea număr prim, cu $p_0 = 0$, este recursivă.

Continuare funcții recursive

17. Funcția "parte întreagă", $f(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$ este recursivă.
$$[x_1/x_2] = min_t[(t+1) \cdot x_2 > x_1].$$
18. Funcția $R(x_1, x_2)$, restul împărțirii întregi a lui x_1 la x_2, este recursivă.
$$R(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} (x_2 \cdot [x_1/x_2]).$$
19. Funcția p_n definită ca al n-lea număr prim, cu $p_0 = 0$, este recursivă.
$$p_{n+1} = min_t[Prime(t) \wedge (t > p_n)].$$
20. Funțiile:
    - $< x_1, x_2 >= 2^{x_1}(2x_2 + 1) \dot{-} 1$,
    - $l(x) = z$, a.i. există t, $< z, t >= x$,
    - $r(x) = z$, a.i. există t, $< t, z >= x$,

    sunt funcții recursive.
21. Definim numărul lui Gödel atașat unei secvențe $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ca fiind:
$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \prod p_i^{a_i}.$$
Exemplu: $[3, 0, 1, 8] = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^8$.

Continuare funcții recursive

22. Funcția $(x)_i$ definită astfel: dacă $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ atunci $(x)_i = a_i$. Această funcție este recursivă.

Continuare funcții recursive

22. Funcția $(x)_i$ definită astfel: dacă $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ atunci $(x)_i = a_i$. Această funcție este recursivă.
$$(x)_0 = 0,$$
$$(x)_i = min_t[\overline{p_i^{t+1}|x}].$$
23. Funcția $Lt(x)$ definită astfel: dacă $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ atunci $Lt(x) = n$. Această funcție este recursivă.

Continuare funcții recursive

22. Funcția $(x)_i$ definită astfel: dacă $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ atunci $(x)_i = a_i$. Această funcție este recursivă.

$$(x)_0 = 0,$$
$$(x)_i = min_t[\overline{p_i^{t+1}|x}].$$

23. Funcția $Lt(x)$ definită astfel: dacă $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ atunci $Lt(x) = n$. Această funcție este recursivă.

$$Lt(x) = min_t[((x_t) \neq 0) \wedge (\forall j)_{j \leq x}((j \leq y) \vee ((x)_j = 0))].$$

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Demonstratie. Fie M o masina Turing determinista si fie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ functia calculata de M. Fara a restrictiona generalitatea, vom presupune ca $n = 1$ deci masina calculeaza functia $f(x)$.
Fie $\{s_0 = 0, s_1 = 1, \dots\}$ o enumerare a tuturor simbolurilo ce pot aparea pe banda unei masini Turing. Identificam simbolul s_i prin indicele sau i.
Numerotam celulele benzii cu $0, 1, \dots$ astfel incat fiecare celula se identifica prin numarul sau.
Fie $\{q_0, q_1, \dots\}$ o enumerare a tuturor starilor ce pot aparea in definitia unei masini Turing. Identificam fiecare stare cu pozitia sa in aceasta enumerare.
La un pas oarecare, atasam urmatorul numar configuratiei curente:
$< a, < b, c >>$, unde a este identificatorul starii curente, b este pozitia capului de citire/scriere pe banda masinii, iar c este numarul Gödel asociat continutului benzii.

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Exemplu: starea curenta este q_2, pozitia capului pe banda este 3 iar continutu benzii este: $s_1 s_1 s_0 s_3 B$, atunci numarul asociat acestei configuratii este

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Exemplu: starea curenta este q_2, pozitia capului pe banda este 3 iar continutu benzii este: $s_1 s_1 s_0 s_3 B$, atunci numarul asociat acestei configuratii este
$< 2, < 3, 2 \cdot 3 \cdot 7^3 >> = < 2, 2^3 \cdot 2(2 \cdot 3 \cdot 7^3 + 1) - 1 > =$
$2^2 \cdot 2(2^3 \cdot 2(2 \cdot 3 \cdot 7^3 + 1) - 1) - 1.$
Configuratia initiala are numarul:

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Exemplu: starea curenta este q_2, pozitia capului pe banda este 3 iar continutu benzii este: $s_1 s_1 s_0 s_3 B$, atunci numarul asociat acestei configuratii este
$< 2, < 3, 2 \cdot 3 \cdot 7^3 >>=< 2, 2^3 \cdot 2(2 \cdot 3 \cdot 7^3 + 1) - 1 >=$
$2^2 \cdot 2(2^3 \cdot 2(2 \cdot 3 \cdot 7^3 + 1) - 1) - 1.$
Configuratia initiala are numarul:

$$< 0, < 0, \prod_{i=1}^{x+1} p_i >> .$$

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Exemplu: starea curenta este q_2, pozitia capului pe banda este 3 iar continutu benzii este: $s_1 s_1 s_0 s_3 B$, atunci numarul asociat acestei configuratii este
$< 2, < 3, 2 \cdot 3 \cdot 7^3 >> = < 2, 2^3 \cdot 2(2 \cdot 3 \cdot 7^3 + 1) - 1 > =$
$2^2 \cdot 2(2^3 \cdot 2(2 \cdot 3 \cdot 7^3 + 1) - 1) - 1.$
Configuratia initiala are numarul:

$$< 0, < 0, \prod_{i=1}^{x+1} p_i >> .$$

Definim functia $C_M(x, n)$= numarul atasat configuratiei masinii la pasul n pe intrarea x. Evident, $C_M(x, 0) = < 0, < 0, \prod_{i=1}^{x+1} p_i >>$. Daca masina se opreste dupa n_0 pasi, atunci definim $C_M(x, n) = C_M(x, n_0)$, pentru orice $n \geq n_0$.

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Definim functiile auxiliare:

- $h_1(z) =$
$$\begin{cases} \text{numarul starii in care trece } M \text{ din configuratia cu numarul } z, \\ \text{daca acest numar codifica o configuratie valida in } M \\ 0, \ \text{altfel} \end{cases}$$
- $h_2(z) =$
$$\begin{cases} \text{numarul celulei de pe banda unde se pozitioneaza} \\ \text{capul I/O dupa configuratia cu numarul } z, \text{ daca acest numar} \\ \text{codifica o configuratie valida in } M \\ 0, \ \text{altfel} \end{cases}$$
- $h_3(z) =$
$$\begin{cases} \text{numarul configuratiei benzii dupa configuratia cu numarul } z, \\ \text{daca acest numar codifica o configuratie valida in } M \\ 0, \ \text{altfel} \end{cases}$$

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Definim functiile auxiliare:

- $h_1(z) =$
  $\begin{cases} \text{numarul starii in care trece } M \text{ din configuratia cu numarul } z, \\ \text{daca acest numar codifica o configuratie valida in } M \\ 0, \ \text{altfel} \end{cases}$
- $h_2(z) =$
  $\begin{cases} \text{numarul celulei de pe banda unde se pozitioneaza} \\ \text{capul I/O dupa configuratia cu numarul } z\text{, daca acest numar} \\ \text{codifica o configuratie valida in } M \\ 0, \ \text{altfel} \end{cases}$
- $h_3(z) =$
  $\begin{cases} \text{numarul configuratiei benzii dupa configuratia cu numarul } z, \\ \text{daca acest numar codifica o configuratie valida in } M \\ 0, \ \text{altfel} \end{cases}$

$$C_M(x, n+1) =< h_1(C_M(x, n), < h_2(C_M(x, n)), h_3(C_M(x, n))) >> .$$

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Fie a numarul unei stari si b numarul unui simbol. Definim

- $g_1(a, b) = \begin{cases} \text{numarul starii in care trece } M \text{ din starea } a, \\ \text{citind } b \text{, daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$
- $g_2(a, b) = \begin{cases} \text{numarul simbolului scris pe banda de } M \text{ din starea } a, \\ \text{citind } b \text{, daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$
- $g_3(a, b) = \begin{cases} 0 \text{ sau } 2 \text{, daca } M \text{ se deplaseaza la stanga sau dreapta} \\ \text{din starea } a \text{ citind } b \text{, daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Fie a numarul unei stari si b numarul unui simbol. Definim

- $g_1(a,b) = \begin{cases} \text{numarul starii in care trece } M \text{ din starea } a, \\ \text{citind } b, \text{ daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$
- $g_2(a,b) = \begin{cases} \text{numarul simbolului scris pe banda de } M \text{ din starea } a, \\ \text{citind } b, \text{ daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$
- $g_3(a,b) = \begin{cases} 0 \text{ sau } 2, \text{ daca } M \text{ se deplaseaza la stanga sau dreapta} \\ \text{din starea } a \text{ citind } b, \text{ daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$

$$h_1(z) = g_1(l(z), (r(r(z)))_{l(r(z))})$$

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Fie a numarul unei stari si b numarul unui simbol. Definim

- $g_1(a,b) = \begin{cases} \text{numarul starii in care trece } M \text{ din starea } a, \\ \text{citind } b, \text{ daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$
- $g_2(a,b) = \begin{cases} \text{numarul simbolului scris pe banda de } M \text{ din starea } a, \\ \text{citind } b, \text{ daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$
- $g_3(a,b) = \begin{cases} 0 \text{ sau } 2, \text{ daca } M \text{ se deplaseaza la stanga sau dreapta} \\ \text{din starea } a \text{ citind } b, \text{ daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$

$$h_1(z) = g_1(l(z), (r(r(z)))_{l(r(z))})$$
$$h_2(z) = l(r(z)) + g_3(l(z), (r(r(z)))_{l(r(z))}) \dot{-} 1$$

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Fie a numarul unei stari si b numarul unui simbol. Definim

- $g_1(a,b) = \begin{cases} \text{numarul starii in care trece } M \text{ din starea } a, \\ \text{citind } b, \text{ daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$
- $g_2(a,b) = \begin{cases} \text{numarul simbolului scris pe banda de } M \text{ din starea } a, \\ \text{citind } b, \text{ daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$
- $g_3(a,b) = \begin{cases} 0 \text{ sau } 2, \text{ daca } M \text{ se deplaseaza la stanga sau dreapta} \\ \text{din starea } a \text{ citind } b, \text{ daca } a \text{ si } b \text{ sunt valide} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$

$$h_1(z) = g_1(l(z), (r(r(z)))_{l(r(z))})$$
$$h_2(z) = l(r(z)) + g_3(l(z), (r(r(z)))_{l(r(z))}) \dot{-} 1$$
$$h_3(z) = r(r(z)) / p_{l(r(z))}^{(r(r(z)))_{l(r(z))}} * p_{l(r(z))}^{g_2(l(z), (r(r(z)))_{l(r(z))})}$$

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Afirmatii:

- Functiile g_1, g_2, g_3 sunt recursive.
- Functiile h_1, h_2, h_3 sunt recursive.
- Functia C_M este recursiva.

Definim $nr_M(x)$ ca fiind numarul de pasi pe care ii face M pentru a calcula $f(x)$, daca $f(x)$ este definita.

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Afirmatii:

- Functiile g_1, g_2, g_3 sunt recursive.
- Functiile h_1, h_2, h_3 sunt recursive.
- Functia C_M este recursiva.

Definim $nr_M(x)$ ca fiind numarul de pasi pe care ii face M pentru a calcula $f(x)$, daca $f(x)$ este definita.

$$nr_M(x) = min_t[C_M(x,t) = C_M(x,t+1)].$$

Deci nr_M este recursiva.
Atunci f se poate scrie:

Funcțiile Turing calculabile sunt recursive.

Afirmatii:

- Functiile g_1, g_2, g_3 sunt recursive.
- Functiile h_1, h_2, h_3 sunt recursive.
- Functia C_M este recursiva.

Definim $nr_M(x)$ ca fiind numarul de pasi pe care ii face M pentru a calcula $f(x)$, daca $f(x)$ este definita.

$$nr_M(x) = min_t[C_M(x,t) = C_M(x,t+1)].$$

Deci nr_M este recursiva.
Atunci f se poate scrie:

$$f(x) = Lt(r(r(C_M(x, nr_M(x))))) - 1.$$

In concluzie, f este recursiva.