Curs 3

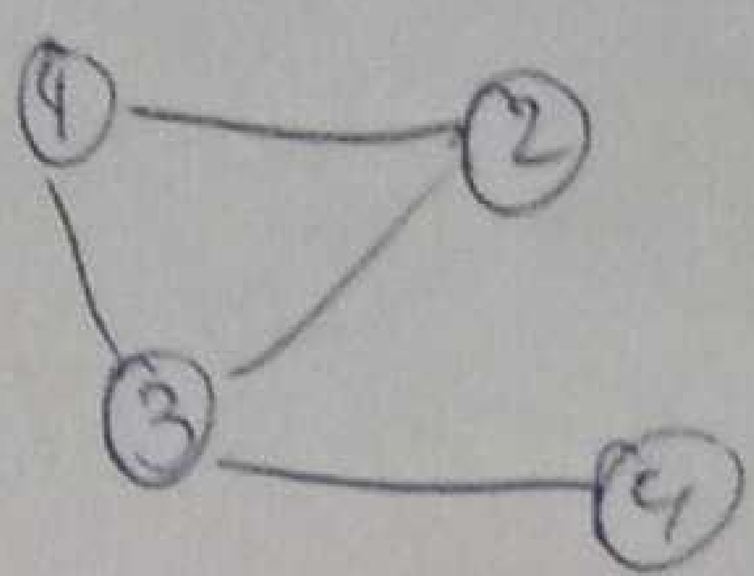
Vertex ~~Conta~~ Cover

Se dă un graf ~~ne-o~~ neorientat $G=(V,E)$ și un ~~nr.~~ număr K

Să se vadă dacă $\exists\, V' \subseteq V$, $|V'|=K$

a.î. $\forall (a,b) \in E$ avem $a \in V'$ sau $b \in V'$

Exemplu



$K=1$ NU

$K=2$ DA

Teoremă

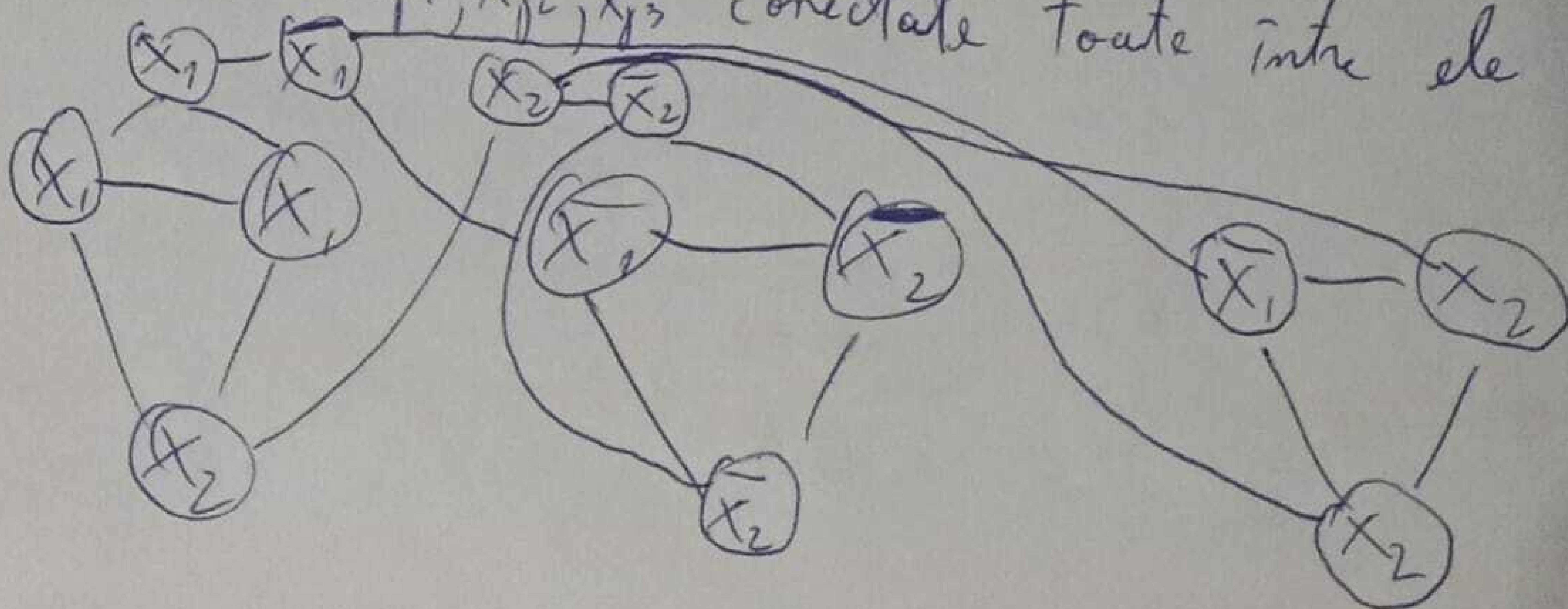
3-SAT $\leq_p$ Vertex Cover

~~Ex~~ $(x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_2)$

- Pentru fiecare variabilă x_i din formula Φ construim două noduri x_i, $\bar{x}_i$ legate printr-o muchie

Se dă o formulă Φ cu n variabile și m clauze
pornind de la Φ construim lui (G_*, K)

Pentru fiecare clauză $C_j = (x_{j1} \vee x_{j2} \vee x_{j3})$ construim
nodurile x_{j1}, x_{j2}, x_{j3} conectate toate între ele (în triunghi)



Construim oricare ~~2~~ două noduri care au aceeași
etichetă iar V_1 corespunde unei V_1, V_2 variabile și V_1
face dintr-un triunghi corespunzător unei clauze
$K = n + 2m$

Vrem să demonstrăm că Φ este satisfiabilă $\Longleftrightarrow$
G are n valori care au cel mult $K = n + 2m$ valori

Φ satisfiabilă dacă x_i este setată True pentru vertex cover

1) nodul corespunzător din perechea $x_i - \bar{x}_i$

2) Din clauza C_j pun în Vertex-Cover cele 2 noduri din triunghi care nu satisface clauza

De ce este un V.C. valid?

Fie V' un V.C. cu K noduri și construim un assignment care satisface Φ astfel

În V.C. am cel puțin un nod din $x_i - \bar{x}_i$

Dacă x_i este în V.C., atunci x_i = True în V.C.
altfel x_i = False

(Carte - Sipser)

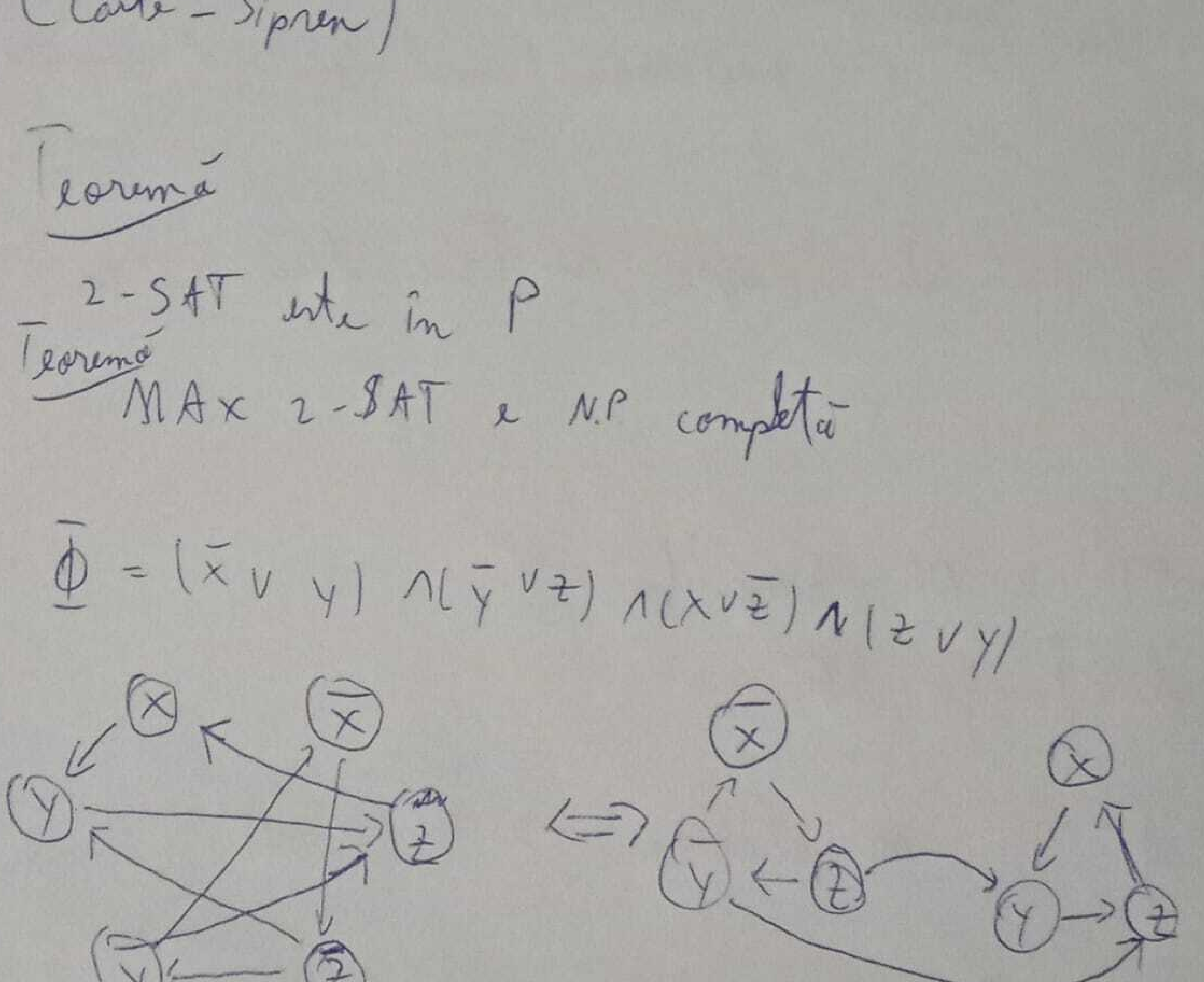
Teoremă

2-SAT este în P

Teoremă

MAX 2-SAT e N.P completă

$$\Phi = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge (z \vee y)$$



3.3

Dându-se o formulă Φ instanțată la 2-SAT pentru fiecare variabilă x_i construiesc 2 noduri x_i și $\bar{x}_i$ pentru fiecare clauză x_i sau x_j, adaug muchiile

$\bar{x}_i \to x_j$ și $\bar{x}_j \to x_i$.

Dacă graful rez. are o componentă tare conexă care conține x și $\bar{x}$ implică Φ nu este satisfiabilă, ~~Form~~ Altfel, formula este satisfiabilă.

Construim un nou graf G' în care fiecare nod este asociat unei componente tare conexe. Facem sortare topologică în G' și procesăm nod. în ord. inversă sortării.

Asignam variabilele corespz. cu True dacă nu ~~au~~ assignment.

MAX 2-SAT e NP-completă

Reducție de la 3-SAT

(2-SAT) $\in \Phi$ cu m clauze $\to \Phi'$ (2-SAT) cu $10m$ clauze

$k = 7m$

3.4

$c_i = (l_1 \vee l_2 \vee l_3) \Rightarrow$

$(l_1)\ (l_2)\ (l_3)\ (d_i)\ (\bar{l}_1 \vee \bar{l}_2)\ (\bar{l}_2 \vee \bar{l}_3)\ (\bar{l}_3 \vee \bar{l}_1)\ (l_1 \vee \bar{d}_i)\ (l_2 \vee \bar{d}_i)\ (l_3 \vee \bar{d}_i)$

$l_1 = F$

$l_2 = F$

$l_3 = F$

Dându-se o formulă 3-SAT Φ am construit cu m clauze, o formulă 2-SAT Φ' cu $10m$ clauze a.î. Φ este satisfiabilă $\Leftrightarrow$ Φ' are un assignment care satisface $7m$ clauze

3,5