Model de Examen: Programarea Algoritmilor Eficienti
Atentie! Subiectele de la examen nu vor fi identice cu acestea

31 Ianuarie 2020

Alexandru Popa

In primul rand, va rog sa va scrieti NUMELE si GRUPA pe foaia de examen! Timpul de lucru este de 2 ore. Nu aveti voie sa aveti asupra dumneavoastra decat instrumentul de scris si foile oferite de supraveghetori. Daca vom gasi asupra dumneavoastra telefoane mobile, laptopuri, tablete, fituici sau alte materiale ce contin informatii ajutatoare, veti fi scosi din sala de examinare si raportati conducerii facultatii. Daca aveti intrebari, ridicati mana si unul dintre instructori va veni la dumneavoastra in cel mai scurt timp. Daca mai aveti nevoie de hartie, adresati-va unui instructor.

1 2 puncte

Aratati ca daca exista un algoritm de α-approximare pentru problema Travelling Salesman, atunci $P = NP$.

2 1 punct

Dati un exemplu care sa arate ca algoritmul de 2 aproximare pentru problema vertex cover este *strans* (eng. "tight"). Adica sa aratati ca exista o instanta pentru care factorul de aproximare este precis 2.

3 2 puncte

Dati un exemplu care sa arate ca algoritmul de $O(\log n)$ aproximare pentru problema set cover este *strans* (eng. "tight"). Adica sa aratati ca exista o instanta pentru care factorul de aproximare este $\log n$.

4 2 puncte

Formulati urmatoarea problema ca o problema de programare pe numere intregi. Se da un graf neorientat $G = (V, E)$. Sa se gaseasca un subset de cardinalitate maxima $V' \subseteq V$ astfel incat $\forall u, v \in V', (u, v) \notin E$.

5 3 puncte

In problema urmatoare aveti un robot care se poate misca pe o linie infinita. Initial robotul se afla in punctul 0. Intr-un pas robotul se poate misca o unitate la stanga sau la dreapta. Pe linie se afla un obiect a carui pozitie nu o stim. Robotul gaseste obiectul doar atunci cand se afla pe aceeasi coordonata cu obiectul. Scopul este sa se determine un algoritm care sa gaseasca pozitia obiectului.

5.1 1 punct

Gasiti un algoritm 3 competitiv in cazul in care distanta d la care se afla obiectul este stiuta in avans.

5.2 2 puncte

Gasiti un algoritm 9 competitiv in cazul in care distanta d la care se afla obiectul nu se stie.

Examen: Programarea Algoritmilor Eficienti

4 iunie 2022

Alexandru Popa

In primul rand, va rog sa va scrieti NUMELE si GRUPA pe foaia de examen, la fiecare subiect! Timpul de lucru este de 120 de minute. Link-ul de upload il veti primi pe Gmeet.

1 Demonstratii de NP-Completitudine: 3 puncte

Se dau urmatoarele probleme.

Problema 1 (Problema 1)**.** *Se da un graf neorientat $G = (V, E)$ si un intreg k. Sa se determine daca exista o submultime $X \subseteq V$, cu $|X| \leq k$ astfel incat pentru orice $(a, b) \in E$ sa avem fie $a \in X$, $b \in X$ sau $a, b \in X$.*

Problema 2 (Problema 2)**.** *Se da un graf neorientat $G = (V, E)$ si un intreg k. Sa se determine daca exista o submultime $X \subseteq V$, cu $|X| \geq k$ astfel incat pentru orice $a, b \in X$ sa* NU *avem $(a, b) \in E$.*

Cerinte:

1. Construiti o reductie polinomiala de la Problema 1 la Problema 2.
2. Construiti o reductie polinomiala de la Problema 2 la Problema 1.

2 Algoritmi de aproximare: 4 puncte

Problema 3. *Se da un graf neorientat $G = (V, E)$. O colorare a nodurilor lui G cu k culori este o functie $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ such that for any two adjacent vertices a, b, we have $c(a) \neq c(b)$.*

Cerinte:

1. Construiti un algoritm care primeste ca input un graf G si returneaza o colorare cu $\Delta + 1$ culori unde Δ este gradul maxim al lui G.
2. Se da un graf care admite o 3 colorare (vi se da doar graful, fara sa stiti si colorarea). Sa se gaseasca o colorare a acestui graf cu $O(\sqrt{|V|})$ culori.

3 Algoritmi fixed parameter: 3 puncte

Problema 4. *Se dau n puncte in plan si un numar k. Sa se determine daca pot trasa k linii drepte astfel incat fiecare din cele n puncte sa se afle pe cel putin o dreapta.*

Sa se gaseasca un algoritm fixed parameter pentru problema de mai sus. Demonstrati corectitudinea algoritmului si timpul de rulare al acestuia.

Examen: Programarea Algoritmilor Eficienti

1 februarie 2023

Alexandru Popa

In primul rand, va rog sa va scrieti NUMELE si GRUPA pe foaia de examen. Timpul de lucru este de 120 de minute. Aveti 1 punct din oficiu...

1 Demonstratii de NP-Completitudine: 2 puncte

Problema 1. *Se da o multime de elemente $\mathcal{U}$, n submultimi ale lui $\mathcal{U}$, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ si un numar k. Sa determine daca exista o submultime $\mathcal{U}'$ a lui $\mathcal{U}$ de cardinalitate cel mult k astfel incat, $\forall 1 \le i \le n$, exista un element $a \in \mathcal{U}'$ cu $a \in S_i$. Altfel spus, vrem sa gasim o submultime a lui $\mathcal{U}$ de cardinalitate cel mult k, care contine cel putin un element din fiecare multime $S_1, \ldots, S_n$.*

Demonstrati ca Problema 1 este NP-completa printr-o reductie de la una din problemele studiate la curs (de exemplu, 3-SAT, Vertex Cover, Set Cover, Hamiltonian Path, Traveling Salesman Problem).

2 Algoritmi de aproximare: 4 puncte

2.1 1 punct

Problema 2. *Se da un graf neorientat $G = (V, E)$. Sa se gaseasca o submultime de noduri $V' \subseteq V$ de cardinalitate minima astfel incat pentru orice nod $a \in V$ avem: $a \in V'$ sau exista un nod $b \in V'$ cu $(a, b) \in E$. Adica se cere sa gasim o multime de noduri de cardinalitate minima V', astfel incat orice nod din graf este in V' sau are un vecin in V'*

Sa se gascasca un algoritm polinomial cu un factor de $O(\log n)$ aproximare pentru Problema 2. Demonstrati corectitudinea algoritmului, timpul de rulare si faptul ca atinge factorul de aproximare cerut.

2.2 3 puncte

Problema 3. *Se da un graf G de forma unui grid de dimensiune $n \times n$. Fiecare nod are exact 4 vecini, cu exceptia nodurilor de pe margine (nodurile din colt au doi vecini, iar celelalte noduri de pe margine, au cate trei vecini). Fiecare nod v are o greutate pozitiva $w(v)$. Sa se gaseasca o multime independenta de noduri (i.e., in multimea aleasa nu exista doua noduri vecine intre ele) de greutate maxima.*

Fie urmatorul algoritm greedy pentru aceasta problema. La fiecare pas, alegem nodul de greutate maxima care nu este vecin cu niciunul dintre nodurile alese la pasul anterior.

Cerinte:

1. Fie S multimea de noduri returnata de algoritmul greedy si fie T o multime independenta arbitrara. Se se demonstreze ca pentru orice nod $v \in T$ avem fie $v \in S$ sau exista un vecin v' al lui v cu $v' \in S$ si $w(v') \geq w(v)$.
2. Bazandu-va pe rezultatul de la punctul anterior, aratati ca algoritmul greedy este o 1/4 aproximare pentru Problema 3.

3 Algoritmi fixed parameter: 3 puncte

3.1 2 puncte

Problema 4. *Se da o formula booleana ϕ cu n variabile si m clauze si un numar k. Sa se decida daca exista o asignare a variabilelor lui ϕ care satisface* **cel mult** *k clauze.*

Gasiti un algoritm fixed parameter pentru Problema 4 (si, evident, demonstrati corectitudinea si timpul de rulare).

3.2 1 punct

Problema 5. *Se da un graf neorientat G si un numar k. Este posibil sa eliminam cel mult k muchii din G astfel incat graful sa nu aiba cicluri de lungime 3?*

Gasiti un algoritm fixed parameter pentru Problema 5 (si, evident, demonstrati corectitudinea si timpul de rulare).

Examen: Programarea Algoritmilor Eficienti

7 iunie 2023

Alexandru Popa

In primul rand, va rog sa va scrieti NUMELE si GRUPA pe foaia de examen. Timpul de lucru este de 120 de minute. Aveti 1 punct din oficiu...

1 Demonstratii de NP-Completitudine: 2 puncte

Problema 1. *Se da un graf neorientat G si un numar $k \geq 2$. Sa se decida daca exista un arbore partial al lui G in care gradul maxim este k.*

Demonstrati ca Problema 1 este NP-completa printr-o reductie de la una din problemele studiate la curs (de exemplu, 3-SAT, Vertex Cover, Set Cover, Hamiltonian Path, Traveling Salesman Problem).

2 Algoritmi de aproximare: 4,5 puncte

2.1 2 puncte

Problema 2. *Se dau n taskuri cu timp de procesare $p_1, \ldots, p_n$ si m masini identice. Sa se asigneze joburile pe masini astfel incat momentul de timp la care termina ultima masina sa fie minim.*

Sa se gaseasca un algoritm polinomial cu un factor de 2 aproximare pentru Problema 2. Demonstrati corectitudinea algoritmului, timpul de rulare si faptul ca atinge factorul de aproximare cerut.

2.2 2,5 puncte

Se da graful $G = (V, E)$, cu $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 2); (1, 3); (2, 3); (3, 4), (2, 4); (4, 5)\}$

Problema 3.

Cerinte:

1. (0,5 puncte). Sa se gaseasca un vertex cover minim pe graful dat
2. (1 punct). Sa se scrie instata de vertex cover data ca o problema de programare liniara pe intregi.
3. (1 punct). Gasiti o solutie la relaxarea programului liniar formulat la punctul anterior care este strict mai mica decat vertex cover-ul optim pe instanta data.

3 Algoritmi fixed parameter: 2,5 puncte

3.1 1 puncte

Problema 4. *Se da un graf G si un numar k. Sa se determine daca exista un subgraf complet cu cel putin $n - k$ noduri.*

Gasiti un algoritm fixed parameter pentru Problema 4 (si, evident, demonstrati corectitudinea si timpul de rulare).

3.2 1,5 punct

Problema 5. *Se dau n puncte in plan si un numar k. Sa se determine daca pot trasa k linii drepte astfel incat fiecare din cele n puncte sa se afle pe cel putin o dreapta.*

Sa se gaseasca un algoritm fixed parameter pentru problema de mai sus. Demonstrati corectitudinea algoritmului si timpul de rulare al acestuia.

Examen: Programarea Algoritmilor Eficienti

4 Septembrie 2023

Alexandru Popa

In primul rand, va rog sa va scrieti NUMELE si GRUPA pe foaia de examen. Timpul de lucru este de 120 de minute. Aveti 1 punct din oficiu...

1 Demonstratii de NP-Completitudine: 2 puncte

Problema 1. *Se da un graf neorientat G si un numar $k \geq 2$. Sa se decida daca exista un drum in G de lungime mai mare decat k.*

Demonstrati ca Problema 1 este NP-completa printr-o reductie de la una din problemele studiate la curs (de exemplu, 3-SAT, Vertex Cover, Set Cover, Hamiltonian Path, Traveling Salesman Problem).

2 Algoritmi de aproximare: 4,5 puncte

2.1 2 puncte

Problema 2. *Se da un graf orientat G. Sa se gaseasca un subgraf aciclic al lui G cu un numar maxim de muchii.*

Sa se gaseasca un algoritm polinomial cu un factor de 2 aproximare pentru Problema 2. Demonstrati corectitudinea algoritmului, timpul de rulare si faptul ca atinge factorul de aproximare cerut.

2.2 2,5 puncte

1 1

Se instanta set cover $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ si $S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{1, 3, 5\}, S_3 = \{2, 3, 4\}, S_4 = \{4, 5, 6\}, S_5 = \{6\}$.

2 3 2 3 2

1 3

Problema 3.

Cerinte:

1. (0,5 puncte). Sa se gaseasca un set cover minim pe graful dat
2. (1 punct). Sa se scrie instata de set cover data ca o problema de programare liniara pe intregi.
3. (1 punct). Gasiti o solutie la relaxarea programului liniar formulat la punctul anterior care este strict mai mica decat set cover-ul optim pe instanta data.

3 Algoritmi fixed parameter: 2,5 puncte

3.1 2 puncte

Problema 4. *Se da un graf G si un numar k. Sa se determine daca exista un subgraf complet cu cel putin $n - k$ noduri.*

Gasiti un algoritm fixed parameter pentru Problema 4 (si, evident, demonstrati corectitudinea si timpul de rulare).

3.2 0,5 puncte

Problema 5. *Se da un graf neorientat G si un numar k. Este posibil sa eliminam cel mult k muchii din G astfel incat graful sa nu aiba cicluri de lungime 5?*

Gasiti un algoritm fixed parameter pentru Problema 5 (si, evident, demonstrati corectitudinea si timpul de rulare).