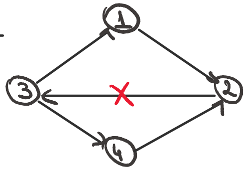
EXERCITII

① ALG. APROXIMATIVI

Exc 1: Se da un graf orientat. Să se det. nr. maxim de muchii care poate fi păstrat aî graful să fie aciclic.

Exemplu:



OPT = 4

Vrem să găsim un alg. aprox pt pb 1.

Sol: Fie $G = (V, A)$ graful dat.

Considerăm mulțimea $A' = \{(a,b) \in A \mid a < b\}$

$$A'' = A \setminus A'$$

Dacă $|A'| \leq |A''| \Rightarrow ALG = A''$

Altfel $\Rightarrow ALG = A'$

Trebuie arătat că ALG e o sol. validă și că $|OPT| \leq 2|ALG|$

- ALG e validă

WLOG, putem pp. că $ALG = A'$.

Pp prin absurd că $\exists \{(a_1, a_2), (a_2, a_3) \dots (a_m, a_1)\}$ un ciclu $\in ALG$

$(a_1, a_2) \in A' \Rightarrow a_1 < a_2$

$(a_2, a_3) \in A' \Rightarrow a_2 < a_3$

$\vdots$

$$\left.\begin{aligned} (a_{m-1}, a_m) \in A' &\Rightarrow a_{m-1} < a_m \\ (a_m, a_1) \in A' &\Rightarrow a_m < a_1 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow a_1 < a_1$ ↯

- $|OPT| \leq 2|ALG|$

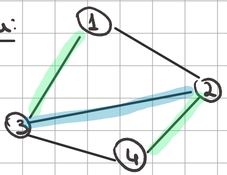
$|A'| + |A''| = |A| \geq |OPT|$

$|ALG| = \max\{|A'|, |A''|\} \geq \dfrac{|OPT|}{2}$ $\blacksquare$

Exc 2: Să se găsească un cuplaj maximal de card. minimă

Vrem un alg 2-aprox.

Exemplu:

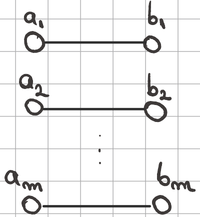


⇝ cuplaj maximal 2-3

⇝ 1-3, 2-4 alt cuplaj maximal

Sol: Claim: pot lua orice cuplaj maximal. Dacă notez cu $|C|$ cardinalul unui cuplaj maximal, atunci $|C| \leq 2|OPT|$

Dem claim: Fie $C = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2) \dots (a_m, b_m)\}$



Fie OPT = un cuplaj max. de card. minimă.

$\Rightarrow \exists\, v \in V$ aî $(v, a_1) \in OPT$ sau $(v, b_1) \in OPT$

(în OPT va fi o muchie cu capăt a_1 sau capăt b_1)

Intr-adevăr, dacă pp prin absurd că nu e așa, am putea adauga în OPT muchia (a_i, b_i), ceea ce contrazice maximalitatea lui OPT.

$\Rightarrow$ In nodurile care sunt în OPT va fi cel puțin unul din a_i și b_i, $\forall i = \overline{1,m}$

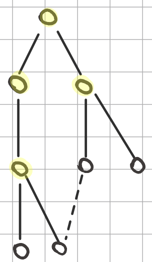
$\Rightarrow 2|OPT| \geq m = |C|$

$\blacksquare$

<u>Exc 3:</u> Să se arate ca urm. e un alg. 2-aprox. pt VC:

$\boxed{\text{Realizăm o parcurgere DFS și adaugăm în VC toate nodurile din arborele DFS care nu sunt frunze.}}$

<u>Sol:</u> Prima data vom arăta ca alg. generează o sol. corectă



Fie $e \in E$.

Vom nota cu $\{v_1, \dots v_\ell\}$ nodurile din DFS care nu sunt frunze

$\{v_{\ell+1}, \dots v_n\}$ — // — care sunt frunze

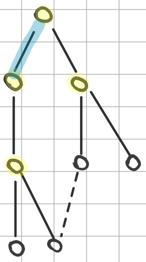
Fie $e = (v_i, v_j)$. Dacă $i \leq \ell$ sau $j \leq \ell \Rightarrow$ unul din ele nu e frunză $\Rightarrow v_i \in ALG$ sau $v_j \in ALG$.

Dacă $i > \ell$ și $j > \ell \Rightarrow \exists$ o muchie între 2 frunze din DFS, ceea ce contrazice modul în care se parcurg nodurile în DFS.

Arătăm acum că $|ALG| \le 2|OPT|$

Claim: orice cuplaj e un LB pt VC.

E deci suficient să arătăm că $|ALG| \le 2|C|$, pt un cuplaj C



Împart nodurile în 2 categorii: cele de pe nivele pare și cele de pe nivele impare.

Fie P = mult. nodurilor nivel par

I = — " — impar

$\Rightarrow |P| + |I| = |ALG|$

$\Rightarrow |P| \ge |ALG|/2$ sau $|I| > |ALG|/2$

WLOG, pot pp. că $|P| \ge |ALG|/2$.

Un cuplaj valid e pt fiecare nod de pe nivel par. să aleg câte o muchie aleator care pleacă din el

$\Rightarrow |C| = |P| \ge |ALG|/2 \Rightarrow |ALG| \le 2|C| \le 2|OPT|$. ∎