

# Pregătire pentru prima parte a examenului: TEMA INDIVIDUALĂ

Claudia MUREȘAN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro

2020–2021, Semestrul I

Amintesc că o latice mărginită  $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$  se zice *netrivială* ddacă  $0 \neq 1$ .

Următoarele denumiri și notații sunt ad-hoc.

Pentru orice mulțimi  $A, B$ , orice relație binară  $\rho \subseteq A^2$  și orice funcție  $f : A \rightarrow B$ , notăm cu:

$$f(\rho) = \{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in \rho\} \subseteq B^2.$$

Dacă  $\mathcal{P} = (P, \leq, 0, 1)$  și  $\mathcal{Q} = (Q, \sqsubseteq, \perp, \top)$  sunt poseturi mărginite, iar  $g : P \rightarrow Q$ , spunem că  $g$  este *morfism de poseturi mărginite* de la  $\mathcal{P}$  la  $\mathcal{Q}$  ddacă  $f$  este izotonă și satisface  $g(0) = \perp$  și  $g(1) = \top$ .

Pentru orice latici mărginite  $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$  și  $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, 0, 1)$  și orice funcție  $h : L \rightarrow M$ , notăm cu:

$$\gamma(\mathcal{L}) = \{(x, y) \in L^2 \mid x \text{ și } y \text{ sunt complemente unul altuia în } \mathcal{L}\},$$

și spunem că:

- $h$  păstrează  $\gamma$  ddacă  $h(\gamma(\mathcal{L})) \subseteq \gamma(\mathcal{M})$ ;
- $h$  e compatibil cu  $\gamma$  ddacă  $h(\gamma(\mathcal{L})) = \gamma(\mathcal{M})$ .

**Exercițiul 1.** ① Să se demonstreze că:

- orice morfism de latici mărginite păstrează  $\gamma$ ;
  - orice morfism surjectiv de latici mărginite e compatibil cu  $\gamma$ .
- ② Să se demonstreze că, pentru orice latice mărginită  $\mathcal{L}$ :
- $\gamma(\mathcal{L})$  este simetrică;
  - $\gamma(\mathcal{L})$  este ireflexivă ddacă  $\mathcal{L}$  este netrivială ddacă  $\gamma(\mathcal{L})$  este netranzitivă;
  - dacă  $\mathcal{L}$  e distributivă, atunci, pentru orice element  $x$  al lui  $\mathcal{L}$ ,  $|x/\mathcal{E}(\gamma(\mathcal{L}))| \leq 2$ ;
  - dacă  $\mathcal{L}$  e latice booleană, atunci, pentru orice element  $x$  al lui  $\mathcal{L}$ ,  $|x/\mathcal{E}(\gamma(\mathcal{L}))| \in \{1, 2\}$ ;
  - dacă  $\mathcal{L}$  e latice booleană netrivială, atunci, pentru orice element  $x$  al lui  $\mathcal{L}$ ,  $|x/\mathcal{E}(\gamma(\mathcal{L}))| = 2$ .

**Exercițiul 2.** Considerăm cele mai mici latici nedistributive:  $\mathcal{M}_3$  (diamantul) și  $\mathcal{N}_5$  (pentagonul).

① Să se determine:

- morfismele de latici mărginite de la  $\mathcal{M}_3$  la  $\mathcal{N}_5$ ;
- morfismele de latici mărginite de la  $\mathcal{N}_5$  la  $\mathcal{M}_3$ ;
- morfismele de poseturi mărginite de la  $\mathcal{M}_3$  la  $\mathcal{N}_5$ ;
- morfismele de poseturi mărginite de la  $\mathcal{N}_5$  la  $\mathcal{M}_3$ ;
- morfismele de poseturi mărginite compatibile cu  $\gamma$  de la  $\mathcal{N}_5$  la  $\mathcal{M}_3$ .

② Să se demonstreze că:

- $(\gamma(\mathcal{M}_3) \circ \gamma(\mathcal{M}_3)) \setminus \Delta_{\mathcal{M}_3} = \gamma(\mathcal{M}_3)$ ;
- $(\gamma(\mathcal{N}_5) \circ \gamma(\mathcal{N}_5)) \cap \gamma(\mathcal{N}_5) = \emptyset$ ;
- $|\mathcal{M}_3/\mathcal{E}(\gamma(\mathcal{M}_3))| = |\mathcal{N}_5/\mathcal{E}(\gamma(\mathcal{N}_5))| = 2$ .