

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

CRISTHIAN GRUNDMANN

GEODESIC TRACING: VISUALIZAÇÃO DE CURVAS E
SUPERFÍCIES ATRAVÉS DE GEODÉSICAS

Rio de Janeiro
2022

CRISTHIAN GRUNDMANN

**GEODESIC TRACING: VISUALIZAÇÃO DE CURVAS E
SUPERFÍCIES ATRAVÉS DE GEODÉSICAS**

Trabalho de conclusão de curso apresentada
para a Escola de Matemática Aplicada
(FGV/EMAp) como requisito para o grau de
bacharel em Matemática Aplicada.

Área de estudo: curvas e superfícies.

Orientador: Asla Medeiros e Sá

Rio de Janeiro

2022

Lista de códigos

2.1	Exemplo de objetos	4
2.2	Extrutura do Lexer	6
2.3	Tabela de símbolos	8
2.4	Gramática livre de contexto	9
2.5	Estrutura parcial do parser	11

1 Introdução

Desenhos de superfícies costumam ser feitos a partir de um ponto de vista do espaço ambiente 3D. Esse projeto implementa uma visualização de superfícies que não depende de um espaço ambiente.

A visualização pode ser comparada ao que um ser bidimensional interno à superfície observaria: simula-se raios de luz partindo da posição do ser, e os pontos iluminados são observados. Os raios de luz devem seguir caminhos em ‘linha reta’, que minimizam distância. Para uma superfície qualquer, esses caminhos são chamados de geodésicos, e são estudados na geometria diferencial. A visualização, chamada de *geodesic tracing*, obtém uma transformação de uma imagem original sobre a superfície.

A implementação feita nesse projeto é feita em três partes: compilador, método numérico e interface gráfica.

O compilador fornece uma maneira do usuário definir as superfícies e outros objetos. O usuário escreve um texto, seguindo algumas regras gramaticais, que então é processado. A teoria de compiladores é essencial para essa etapa, principalmente a análise léxica e a análise sintática ([AHO, 1986](#)). O compilador está descrito no capítulo 2.

O método numérico se refere à simulação dos raios de luz na superfície. Um raio de luz é determinado pela posição e direção inicial, que são as condições iniciais. Um sistema de equações diferenciais ordinárias (equação geodésica ([PRESSLEY, 2012](#))) determina a curva que a luz traça. Uma solução aproximada da equação é calculada pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 ([BURDEN, 2001](#)). O método está descrito no capítulo 3.

A interface gráfica é simples e é construída usando *ImGui* ([CORNUT, s.d.](#)), uma ferramenta de interface gráfica fácil de usar. A linguagem de programação escolhida para a implementação desse projeto é *C++*, e para desenhar a interface e os objetos, *OpenGL* é usado.

2 Linguagem

O usuário se comunica com a interface através de um texto, chamado de programa, que contém os objetos de interesse. O código 2.1 é um exemplo.

Código 2.1 – Exemplo de objetos

```

1 #circle and tangents
2 param r : [/2, 1];
3 param o : [0, 2pi];
4 curve c(t) = r(cost, sint, 0), t : [0, 2pi];
5 grid k : [0, 2pi, 8];
6 define k2 = k + o;
7 point p = ck2;
8 vector v = c'k2 @ p;
9
10 #function and surface
11 #function f(x, y) = x^2+y^2;
12 #surface s(u,v) = (u,v,f(u,v)), u : [-1, 1], v : [-1, 1];

```

A linguagem permite comentários no estilo da linguagem Python, usando #.

O programa declara os seguintes objetos:

r e o	parâmetros que podem ser alterados na interface. Seus valores devem estar nos intervalos indicados.
c	uma curva parametrizada por t . O domínio da parametrização é o intervalo indicado. A curva depende do parâmetro r , que foi definido anteriormente.
k	uma grade de 8 pontos igualmente espaçados no intervalo indicado. Uma grade é tratada como uma constante, assim como um parâmetro. Se um objeto desenhável depende de uma grade, uma instância é desenhada para cada valor da grade. Um objeto pode depender de mais de uma grade.
k2	uma constante, e não pode ser alterada na interface como os parâmetros. Esse tipo de objeto pode ser usado para deixar o programa mais legível.
p	o ponto da curva c de parâmetro t = k2 . Esse objeto depende indiretamente de k , então é instanciado 8 vezes.
v	o vetor tangente da curva c no ponto p e desenhado a partir do mesmo ponto. O vetor também depende indiretamente de k , então é desenhado 8 vezes.

Os objetos **f** e **s** estão comentados, então não são considerados. Estão presentes apenas para o exemplo ter todos os tipos de objeto.

A linguagem de descrição de objetos não é trivial, nem sua sintaxe matemática, que possui elementos inventados para esse projeto. A seguir, uma breve lista de observações:

- Os objetos desenháveis são pontos, vetores, curvas e superfícies. Pontos e vetores podem ser usados em outros objetos, sendo tratados como tuplas. Por exemplo, `v` usa o ponto `p`. Curvas e superfícies podem ser usadas como funções, mas sem a restrição no domínio. Por exemplo, `p` usa `c` como função. Um objeto só pode se referir aos objetos definidos anteriormente.
- Há duas constantes pré-definidas: `pi` e `e`; e diversas funções pré-definidas: `sin`, `cos`, `tan`, `exp`, `log`, `sqrt` e `id`. A função `id` é a identidade é útil apenas no funcionamento interno do sistema.
- Parâmetros e grades podem ser multidimensionais: `param T : [0, 1], [0, 1];`. Assim, o objeto `T` é uma tupla, e seus elementos podem ser obtidos com `T_1` e `T_2`.
- As grades das curvas e superfícies são por padrão 100 e 100x100, respectivamente. É possível alterar esse valor informando um intervalo do tipo `grade: [0, 2pi, 250]`.
- Há 4 operadores unários. Os operadores `+` e `-` são os usuais. A operação `*x` representa `xx`, e `/x` é igual a `1/x`. Para números reais, multiplicação com `*` e por justaposição são equivalentes. Porém, para tuplas, `a*b` representa o produto vetorial e `ab` representa o produto escalar. Assim, `*x` calcula o quadrado do módulo do vetor `x`. Uma função que normaliza vetores pode ser definida assim: `function N(x) = x/sqrt*x;`.
- Numa aplicação de função de uma variável, o argumento não precisa de parênteses: `sin x`. O argumento pode ter operadores unários e até expoentes: `sin -x^2 = sin(-x^2)`. Deve-se tomar cuidado com expoentes: `sin(x)^y = sin(x^y)`. Para a exponenciação de uma aplicação, deve-se usar a sintaxe: `sin^2 x`.
- Não é sempre necessário uma separação entre identificadores. Por exemplo, considere `sinx`. Caso haja um termo chamado `sinx` definido, esse seria o identificador reconhecido. Caso contrário, `sin x` será reconhecido, mesmo que `sinx` seja definido posteriormente (`sinx` seria reconhecido apenas depois de sua definição). Em geral, o maior identificador definido será reconhecido.

2.1 Compilador

O processo de compilação não é trivial, e é dividido em 3 estágios:

- análise léxica: reconhece as “palavras” que compõem um programa, ignorando espaços em branco. É capaz de identificar números, constantes, nomes de objetos e pontuação. Os termos são usados no estágio seguinte.
- análise sintática: parser reconhece a estrutura do programa: as declarações dos objetos e as expressões matemáticas. A gramática 2.4 é usada como base.

- análise semântica e síntese: gera todas as estruturas de dados necessárias para a visualização dos objetos. Verifica também a semântica do programa, detectando erros que não podem ser verificados com noções gramaticais.

2.1.1 Análise léxica

A análise léxica tem a função de ler o código-fonte que descreve um programa e abstrair as palavras e símbolos presentes. Dessa forma, os estágios seguintes se beneficiam dessa abstração. O analisador léxico é chamado de *lexer*.

As palavras-chave, números, constantes, símbolos, etc. são chamados de *lexemas*. Todo *lexema* deve pertencer a uma classe gramatical. Por exemplo, o texto "1024" forma um *lexema* de 4 caracteres e sua classe gramatical é **NUMBER**. Conforme a classe, um *lexema* pode ter atributos. No caso de **NUMBER**, o próprio número em forma de ponto flutuante é um atributo. No caso de um símbolo como ";", não há atributos.

Um *lexema*, sua classe gramatical e seus atributos juntos formam um **token**. Diz-se que a classe gramatical de um *token* é o tipo do *token*.

Os tipos de *token* são:

COMMENT	texto livre, começando com "#" e terminando com uma quebra de linha ou o fim do código-fonte.
FUNCTION	identificador de função definida ou pré-definida.
NUMBER	número de ponto flutuante.
VARIABLE	identificador de variável de função.
CONSTANT	identificador de constante definida ou pré-definida.
DECLARE	identificador de tipo de objeto.
UNDEFINED	identificador não definido ou a ser definido.
EOI	fim do código-fonte, caractere nulo(0).
Caso final	o <i>lexema</i> é um símbolo e seu tipo é o próprio símbolo.

A estrutura `Lexer`(2.2) define o analisador léxico.

Código 2.2 – Estrutura do `Lexer`

```

1 struct Lexer
2 {
3     const char *source{};
4     const char *lexeme{};
5     int length = 0;
6     int lineno = 0;
7     int column = 0;
8     TokenType type = TokenType::UNDEFINED;
9     float number{};
10    Table *node{};

```

```

11     Table *table{};
12
13     void advance(bool match = true);
14 };

```

O lexer lê os tokens um de cada vez, da esquerda para a direita. Essa estrutura guarda as seguintes informações sobre o token atual:

source	string do código-fonte inteiro.
lexeme	aponta para o primeiro caractere do lexema atual (dentro da string source)
length	comprimento do token.
lineno e column	o número da linha e coluna do lexema.
type	tipo do token.
number e node	atributos do token. No caso de um número, number é o atributo. No caso de um identificador, node é sua posição na tabela de símbolos(2.3), contendo o tipo de token(type) e argumentos de função(argIndex), no caso de uma função definida.
table	tabela de símbolos compartilhada pelos estágios da compilação.

O lexer tem apenas o método **advance**, que serve para avançar para o próximo token. O método também é usado para inicializar o lexer e obter o primeiro token do código-fonte, invocando-o com **lexeme = source** e **length = 0**.

O método começa avançando a posição do **lexeme** a quantidade de **length** caracteres à direita. Em seguida, espaços em branco são ignorados: espaços, tabulações e quebras de linha.

Se o caractere em **lexeme** for "#", então o token é um comentário(tipo **COMMENT**), que se estende até uma quebra de linha ou até o EOI, sem incluí-los.

Se o caractere for nulo(0), então o tipo do token é **EOI** e **length = 0**. Isso faz com que o lexer trave nesse token e nunca mais avance.

Se o caractere for um dígito ou ".", então o token é número(**NUMBER**), e é lido pela função **sscanf** da linguagem C, juntamente com seu comprimento. O atributo **number** também é atualizado.

Se o caractere pertencer ao alfabeto dos identificadores, então o lexer o procura na tabela de símbolos obtendo o **node**. Com esse valor, o tipo de token e comprimento são obtidos.

Caso contrário, o token é um símbolo, seu tipo é o próprio símbolo e seu comprimento é 1.

2.1.2 Tabela de símbolos

Os estágios da compilação compartilham uma tabela de símbolos, que é inicializada com palavras-chave, funções e constantes pré-definidas. A tabela de símbolos define os atributos dos identificadores, que são o tipo do token, os argumentos da função e o índice do objeto.

A estrutura `Table`(2.3) define a tabela de símbolos.

Código 2.3 – Tabela de símbolos

```
1 struct Table
2 {
3     Table *parent{};
4     std::unique_ptr<Table> children[62];
5     int argIndex = -1;
6     int objIndex = -1;
7     int length = 0;
8     TokenType type = TokenType::UNDEFINED;
9     char character{};
10    std::string str{};
11
12    Table *next(char c);
13    Table *procString(const char *str, bool match);
14    Table *initString(const char *str, TokenType type);
15 };
```

Essa estrutura é uma árvore de prefixos(trie): cada nó representa um identificador. Para encontrar um nó a partir de um identificador, basta traçar um caminho a partir da raiz. Os filhos de um nó correspondem a um caractere do alfabeto a-zA-Z0-9. Os 26 primeiros filhos são a-z, os próximos 26 são A-Z, e os 10 últimos são 0-9. Assim, cada letra do alfabeto indica qual filho seguir.

O membro `character` representa a letra conforme o pai do nó. Por exemplo, se o nó é o primeiro filho, então a letra é `a`. Para a raiz, o caractere é nulo(0). O membro `parent` é o pai do nó, ou nulo para a raiz. Os nós `children[62]` são os 26 + 26 + 10 filhos. O tamanho do identificador é `length`, e seus atributos são `type`, `argIndex` e `objIndex`. O atributo `argIndex` representa os argumentos de uma função definida. `type` sempre indica o tipo do token. `objType` representa o índice de um objeto.

O método `next` encontra o filho correspondente ao caractere `c`, e caso seja nulo, um novo filho é criado. O método `procString` busca o identificador em `str` na árvore, usando `next` para traçar o caminho correto. O ponteiro `str` indica o início do identificador, dentro do código-fonte. Isso significa que pode haver mais caracteres à direita do identificador. O método avança no máximo até o primeiro caractere fora do alfabeto dos identificadores. Se o indicador `match` estiver ativo, o método buscará o maior identificador definido, se

existir, ou o identificador todo, caso contrário. Por exemplo(`match=true`) para `"sinx"`, o método encontra o identificador `"sin"`, que é uma função. Ou seja, os identificadores não precisam estar separados por um espaço em branco, caso não haja ambiguidade. Se um objeto de nome `"sinx"` estivesse definido, o método encontraria o identificador `"sinx"`, pois é maior. Nesse caso, um espaço em branco faz diferença.

O método `initString` usa `procString` para criar o identificador em `str`, inicializando seu tipo de token com `type`.

2.1.3 Análise sintática

A análise sintática tem a função de identificar as estruturas sintáticas presentes nos tokens gerados pelo lexer. O gerador, no estágio seguinte, atribui um significado para as estruturas sintáticas reconhecidas, gerando as estruturas de dados desejadas. O analisador sintático é chamado de parser.

A gramática livre de contexto (2.4) define as regras gramaticais da linguagem.

Código 2.4 – Gramática livre de contexto

```

1  PROG      = DECL PROG | ;
2
3  DECL      = "param"      id ":" INTS ";" ;
4  DECL      = "grid"       id ":" GRIDS ";" ;
5  DECL      = "define"     id "=" EXPR ";" ;
6  DECL      = "curve"      FDECL "," TINTS ";" ;
7  DECL      = "surface"    FDECL "," TINTS ";" ;
8  DECL      = "function"   FDECL ";" ;
9  DECL      = "point"      id "=" EXPR ";" ;
10 DECL      = "vector"     id "=" EXPR "@" EXPR ";" ;
11
12 FDECL      = id "(" IDS ")" "=" EXPR ;
13 IDS        = IDS "," id | id ;
14 INT        = "[" EXPR "," EXPR "]" ;
15 GRID       = "[" EXPR "," EXPR "," EXPR "]" ;
16 TINT       = id ":" INT | id ":" GRID ;
17 INTS       = INTS "," INT | INT ;
18 TINTS      = TINTS "," TINT | TINT ;
19 GRIDS      = GRIDS "," GRID | GRID ;
20
21 EXPR       = ADD ;
22 ADD        = ADD "+" JUX | ADD "-" JUX | JUX ;
23 JUX        = JUX MULT2 | MULT ;
24 MULT       = MULT "*" UNARY | MULT "/" UNARY | UNARY ;
25 MULT2      = MULT2 "*" UNARY | MULT2 "/" UNARY | APP ;
26 UNARY      = "+" UNARY | "-" UNARY | "*" UNARY | "/" UNARY | APP ;
27 APP        = FUNC UNARY | POW ;
28 FUNC       = FUNC2 "^" UNARY | FUNC2 ;

```

```

29 FUNC2    = FUNC2 "_" var | FUNC2 "'" | func ;
30
31 POW      = COMP "^" UNARY | COMP ;
32 COMP     = COMP "_" num | FACT ;
33 FACT     = const | num | var
34           | "(" TUPLE ")" | "[" TUPLE "]" | "{" TUPLE "}" ;
35 TUPLE    = ADD "," TUPLE | ADD ;

```

A gramática consiste em diversas igualdades. Os termos que aparecem no lado esquerdo de alguma igualdade são chamados de não-terminais, e representam um conjunto de sentenças (uma sentença é uma sequência de terminais). Os outros termos, como `;` e `id`, são terminais, e correspondem a tokens. Os termos `id`, `var`, `const` e `num` representam qualquer token do tipo indicado: `UNDEFINED`, `VARIABLE`, `CONSTANT` e `NUMBER`, respectivamente. Os termos `"param"`, `"grid"`, `"define"`, etc. representam os tokens do tipo `DECLARE`, que são os tipos de objeto.

Uma igualdade na gramática é dita uma produção para o não-terminal à esquerda. O símbolo `"|"` abrevia uma produção alternativa. Por exemplo: `ADD = ADD + JUX | ADD - JUX | JUX` é uma abreviação de `ADD = ADD + JUX`, `ADD = ADD - JUX` e `ADD = JUX`. Uma produção pode ser a string vazia, por exemplo: `PROG = DECL PROG | ;` (o ponto e vírgula no final das igualdades pertence à meta-linguagem).

Uma produção significa que o não-terminal à esquerda pode ser substituído pela forma sentencial à direita. Uma forma sentencial é uma sequência de terminais e não-terminais. Por exemplo, `ADD` pode ser substituído por `ADD + JUX`. Nesse caso, `ADD` deriva `ADD + JUX`. Para se obter uma sentença gramaticalmente válida, o não-terminal inicial `PROG` deve ser derivado até se obter somente terminais. Uma gramática é dita ambígua quando existe uma sentença com mais de uma forma de obtê-la a partir do não-terminal inicial.

A gramática (2.4) não é ambígua. A verificação foi feita em (CALGARY, s.d.). Algumas transformações na gramática a fizeram ser uma gramática LL(1). Uma consequência disso é a não ambiguidade. Em uma iteração anterior da gramática, a potenciação de funções era associativa à esquerda, enquanto a potenciação de números era à direita. Isso causou uma ambiguidade que não foi detectada no momento. Ela só foi descoberta ao tentar verificar a propriedade LL1, que falhou.

O trabalho do parser, então, é achar uma forma de derivar uma sentença a partir de `PROG`. O método mais simples de parsing se aplica a gramáticas LL(1).

Num parser LL(1), cada não-terminal possui sua própria subrotina. As subrotinas simulam a substituição de seu não-terminal por uma de suas formas sentenciais possíveis. Ou seja, uma subrotina simula uma produção de seu não-terminal. Para decidir qual produção aplicar, as subrotinas devem consultar o token atual. O fato da gramática ser

LL(1) garante que o token atual fornece informação suficiente para determinar qual é a produção correta e, na falta de produção adequada, detectar um erro gramatical. Após decidir a produção, a subrotina começa sua simulação. Os termos da forma sentencial da produção são tratados da esquerda para a direita. Terminais são comparados com o token atual e um erro é detectado quando diferem. Quando são iguais, o lexer avança para o próximo token. Os não-terminais são substituídos imediatamente, através de suas subrotinas.

Por exemplo, considere a produção $\text{FUNC} = \text{FUNC2} \sim \text{UNARY}$. Para simulá-la, deve-se derivar FUNC2 , chamando sua subrotina. Após a subrotina terminar, o token atual é comparado com \sim , e caso seja igual, o lexer avança para o próximo token. Em seguida, a subrotina UNARY é chamada. No final de uma subrotina, seu não-terminal derivou uma sub-sentença, e o token atual ficou imediatamente à direita dessa sub-sentença. Assim, indutivamente, a rotina para FUNC2 avançou o token para \sim na produção examinada.

A estrutura `Parser` (2.5) define o parser.

Código 2.5 – Estrutura parcial do parser

```

1 struct Parser
2 {
3     Lexer lexer;
4     std::unique_ptr<Table> table = std::make_unique<Table>();
5     std::vector<std::vector<Table*>> argList;
6     Table *objType{};
7     Table *objName{};
8     Table *tag{};
9     int tupleSize = 0;
10
11     #define INIT(x, y) Table *x = table->initString(#x, TokenType::y);
12         INIT(param, DECLARE)
13         INIT(pi, CONSTANT)
14         INIT(sqrt, FUNCTION)
15         /*.....*/
16     #undef INIT
17
18     Parser();
19     void advance(bool match = true);
20
21     typedef void Parse();
22
23     void parseProgram(const char *source);
24
25     Parse
26         parseFDecl, parseParam, parseGrid, parseDefine /*.....*/;
27
28     void parseInt(ExprType type);

```

```
29     void parseInts(ExprType type);
30
31     void parseMult(bool unary);
32
33     virtual void actSyntaxError(TokenType type);
34     virtual void actAdvance();
35     virtual void actInt(ExprType type);
36     virtual void actOp(ExprType type);
37     virtual void actDecl();
38
39     virtual ~Parser() = 0;
40 };
```

O membro `lexer` é o analisador léxico. O parser controla o avanço dos tokens diretamente. O membro `table` é a tabela de símbolos compartilhada pelos estágios da compilação. O membro `argList` é uma lista de listas de argumentos de função. O atributo `argIndex` de um token de função é o índice da lista de seus parâmetros nesse membro. Os membros `objType` e `objName` auxiliam o estágio da geração, e correspondem ao tipo de objeto e seu nome. O membro `tag` é o nome do argumento marcado em um intervalo do tipo `tag`. Os membros `param`, `pi`, `sqrt`, etc. são as palavras-chave, funções e constantes pré-definidas.

Os métodos com prefixo `parse` são as subrotinas dos não-terminais. A lógica do código foi simplificada, então não há uma correspondência exata. Os métodos com prefixo `act`, marcados com `virtual`, são implementados no estágio seguinte. Esses métodos são chamados de ações semânticas, e são invocados pelo parser quando uma estrutura sintática é detectada.

O método `advance` chama `actAdvance` e avança o token. Isso possibilita uma reação a um comentário ou a um token qualquer, mesmo que estes sejam ignorados pelo parser em questões gramaticais.

Quando uma função está sendo definida, os identificadores de seus argumentos passam a ser do tipo `VARIABLE`. Após a definição, são redefinidos para `UNDEFINED`, pelo método `removeArgs`

A tabela 1 descreve as operações e suas ordens de precedência, com base na gramática.

Tabela 1 – Ordem das operações

Operações	Aridade	Associatividade	Exemplo	Descrição
() [] {}	Unário		(<i>expr</i>)	Isola a expressão interna
,	Binário	Esquerda	(<i>a</i> , <i>b</i> , <i>c</i>)	Adiciona uma elemento à tupla (dentro de parênteses)
+ -	Binário	Esquerda	<i>a</i> + <i>b</i>	Soma e subtração
<i>juxtaposição</i>	Binário	Esquerda	<i>ab</i>	Multiplicação
* /	Binário	Esquerda	<i>a</i> * <i>b</i>	Multiplicação e Divisão
+ - * /	Unário		- <i>x</i> , * <i>v</i>	Positivo, Negativo, Quadrado e Recíproco
<i>aplicação</i>	Binário	Esquerda	<i>sin x</i>	Aplicação de função
^	Binário	Direita	<i>a</i> ^ <i>b</i>	Potenciação
_	Unário		(1, 2, 3)_2	Elemento de tupla
' _	Unário		<i>sin</i> ' <i>x</i> + <i>f_z</i> (3)	Derivada Total e Parcial

3 Curvas e Superfícies

O objetivo primário do projeto é visualizar curvas e superfícies. As curvas são visualizadas apenas em espaço 3D. As superfícies são visualizadas em espaço 3D e em *geodesic tracing*.

3.1 Curvas

Há duas principais maneiras de se definir uma curva na geometria analítica: por parametrização e por equação. Esse trabalho apenas considera curvas paramétricas.

Uma curva pode ser parametrizada por um número real. Formalmente, uma parametrização é uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo real. Nesse trabalho, o intervalo é fechado, e $n = 3$.

As curvas são desenhadas através de vários segmentos. Dada uma partição de I de k pontos, pode-se aproximar a curva pelos segmentos de extremidade $\gamma(t_i)$ e $\gamma(t_{i-1})$ para $i < k$, onde t_i é o i -ésimo ponto da partição. Nesse trabalho, a partição depende apenas de k e é uniforme.

O vetor tangente pode ser calculado com $\gamma'(t)$.

3.2 Superfícies

Assim como as curvas, apenas superfícies parametrizadas serão consideradas nesse trabalho: $\sigma : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde I_1 e I_2 são intervalos fechados reais.

As superfícies são desenhadas através de vários triângulos, a partir de partições dos intervalos I_1 e I_2 . Juntas, as partições formam uma grade de retângulos, e cada retângulo pode ser dividido em 2 triângulos. Esses são os triângulos desenhados.

Os vetores tangentes nas direções coordenadas são as derivadas parciais $\sigma_u(u, v)$ e $\sigma_v(u, v)$, onde os parâmetros são u e v . Nesse projeto, os parâmetros podem ter nomes quaisquer.

3.2.1 Primeira forma fundamental

Supondo que a superfície seja diferenciável e com vetores tangentes linearmente independentes, a primeira forma fundamental no ponto paramétrico (u, v) é definida como

$$\begin{bmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_v \cdot \sigma_u & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

onde as funções são todas aplicadas no ponto (u, v) .

Os vetores σ_u e σ_v formam uma base do espaço tangente. O produto escalar de dois vetores tangentes $x = x_1\sigma_u + x_2\sigma_v$ e $y = y_1\sigma_u + y_2\sigma_v$ pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x_1\sigma_u + x_2\sigma_v) \cdot (y_1\sigma_u + y_2\sigma_v) \\ x \cdot y &= x_1y_1E + x_1y_2F + x_2y_1F + x_2y_2G \end{aligned}$$

O produto depende apenas dos coeficientes e da primeira forma fundamental. Isso significa que distâncias e ângulos podem ser calculados sem se referir ao espaço ambiente da parametrização, ou seja, de forma intrínseca.

3.2.2 Rotação

Para a aplicação, é necessário rotacionar vetores no espaço tangente. É possível rotacionar um vetor apenas usando seus componentes e a primeira forma fundamental.

Seja $w = u\sigma_u + v\sigma_v$, e γ o ângulo da rotação. A base $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ do espaço tangente pode ser ortogonalizada e normalizada. Assim, basta aplicar uma matriz de rotação.

A nova base pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \sigma'_u &= \frac{\sigma_u}{E} \\ \sigma'_v &= \frac{\sigma_u - \frac{F\sigma_v}{E}}{R} \\ R &= \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

Para achar os componentes de w na nova base, basta observar: $w = u'\sigma'_u + v'\sigma'_v = u'\frac{\sigma_u}{E} + v'\frac{\sigma_u - \frac{F\sigma_v}{E}}{R}$

Então

$$\begin{aligned} u' &= uE + vF \\ v' &= vR \end{aligned}$$

O vetor rotacionado é

$$\begin{aligned} w' &= (u'\cos\gamma - v'\sin\gamma)\sigma'_u + (u'\sin\gamma + v'\cos\gamma)\sigma'_v \\ w' &= (u\cos\gamma - \frac{uF + vG}{R}\sin\gamma)\sigma_u + (\frac{uE + vF}{R}\sin\gamma + v\cos\gamma)\sigma_v \end{aligned}$$

Como esperado, esse vetor só depende da primeira forma fundamental, dos componentes originais e do ângulo de rotação.

3.2.3 Equação geodésica

...Apenas definir o sistema de EDOs e citar...

3.2.4 Solução Numérica

...Definir o método de Runge-Kutta de ordem 4...

3.2.5 Geodesic Tracing

...Definir o geodesic tracing...

Referências

- AHO, Alfred V. **Compilers: Principles, Techniques, & Tools**. [S.l.]: Pearson, 1986. Syntax Analysis.
- BURDEN, Richard L. **Numerical Analysis**. [S.l.]: Cengage, 2001. Initial-Value Problems for Ordinary Differential Equations.
- CALGARY, University of. **The Context Free Grammar Checker**. [S.l.: s.n.]. <http://smlweb.cpsc.ucalgary.ca/>. Acessado em 2022-09-28.
- CORNUT, Omar. **ImGui**. [S.l.: s.n.]. <https://github.com/ocornut/imgui>. Acessado em 2022-10-04.
- PRESSLEY, Andrew. **Elementary Differential Geometry**. [S.l.]: Springer, 2012. Geodesics.