

**FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS**  
**ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA**

**CRISTHIAN GRUNDMANN**

**GEODESIC TRACING: VISUALIZAÇÃO DE CURVAS E**  
**SUPERFÍCIES ATRAVÉS DE GEODÉSICAS**

Rio de Janeiro  
2022

**CRISTHIAN GRUNDMANN**

**GEODESIC TRACING: VISUALIZAÇÃO DE CURVAS E  
SUPERFÍCIES ATRAVÉS DE GEODÉSICAS**

Trabalho de conclusão de curso apresentada  
para a Escola de Matemática Aplicada  
(FGV/EMAp) como requisito para o grau de  
bacharel em Matemática Aplicada.

Área de estudo: curvas e superfícies.

Orientador: Asla Medeiros e Sá

Rio de Janeiro

2022

# Lista de códigos

<b>1.1</b>	<b>Exemplo de objetos</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Ordem das operações</b>	<b>5</b>
<b>1.3</b>	<b>Gramática livre de contexto</b>	<b>6</b>

# 1 Programas

O usuário se comunica com a interface através de um texto, chamado de programa, que contém os objetos de interesse. Por exemplo:

Código 1.1 – Exemplo de objetos

```

1 #circle and tangents
2 param r : [/2, 1];
3 param o : [0, 2pi];
4 curve c(t) = r(cost, sint, 0), t : [0, 2pi];
5 grid k : [0, 2pi, 8];
6 define k2 = k + o;
7 point p = ck2;
8 vector v = c'k2 @ p;
9
10 #function and surface
11 #function f(x, y) = x^2+y^2;
12 #surface s(u,v) = (u,v,f(u,v)), u : [-1, 1], v : [-1, 1];

```

O programa começa com uma linha de comentário, no estilo da linguagem Python. Os objetos **r** e **o** são parâmetros que podem ser alterados na interface. Seus valores devem estar nos intervalos indicados.

O objeto **c** é uma curva parametrizada por **t**. O domínio da parametrização é o intervalo indicado. A curva depende do parâmetro **r**, que foi definido anteriormente.

O objeto **k** é uma grade de 8 pontos igualmente espaçados no intervalo indicado. Uma grade é tratada como uma constante, assim como um parâmetro. Se um objeto desenhável depende de uma grade, uma instância é desenhada para cada valor da grade. Um objeto pode depender de mais de uma grade.

O objeto **k2** é uma constante, e não pode ser alterada na interface. Esse tipo de objeto pode ser usado para deixar o programa mais legível.

O objeto **p** é o ponto da curva **c** de parâmetro  $t = k2$ . Esse objeto depende indiretamente de **k**, então é instanciado 8 vezes.

O objeto **v** é o vetor tangente da curva **c** no ponto **p** e desenhado a partir do mesmo ponto. O vetor também depende indiretamente de **k**, então é desenhado 8 vezes.

Os objetos **f** e **s** estão comentados, então não são considerados. Estão presentes apenas para o exemplo ter todos os tipos de objeto.

Os objetos desenháveis são pontos, vetores, curvas e superfícies. Pontos e vetores podem ser usados como valores em outros objetos. Pontos representam suas posições e

vetores seus deslocamentos. Curvas e superfícies podem ser usadas como funções, sem a restrição no domínio.

Há duas constantes pré-definidas: `pi` e `e`; e diversas funções pré-definidas: `sin`, `cos`, `tan`, `exp`, `log`, `sqrt` e `id`. A função `id` é a identidade é útil apenas no funcionamento interno do sistema.

As operações matemáticas e suas precedências estão descritas no código [1.2](#).

## Código 1.2 – Ordem das operações

```
1      0) (), [] e {}
2      1) , (construção de tupla)
3      2) + e - (associativas à esquerda)
4      3) multiplicação por justaposição (associativa à esquerda)
5      4) * e / (associativas à esquerda)
6      5) +, -, * e / (unárias)
7      6) aplicação de função
8      7) ^ (associativa à direita)
9      8) _ (elemento de tupla) (associativa à esquerda)
10     9) ' e _ (derivada total e parcial) (associativas à esquerda)
```

Parâmetros e grades podem ser multidimensionais: `param T : [0, 1], [0, 1];`. Assim, o objeto `T` é uma tupla, e seus elementos podem ser obtidos com `T_1` e `T_2`.

Há 4 operadores unários: `+` e `-` são os usuais. A operação `*x` representa  $xx$ , e `/x` é igual a  $1/x$ .

Para números reais, multiplicação com `*` e por justaposição são equivalentes. Porém, para tuplas, `a*b` representa o produto vetorial e `ab` representa o produto escalar. Assim, `*x` calcula o quadrado do módulo do vetor `x`.

## 1.1 Gramática formal

O programa deve seguir uma gramática formal, que especifica a sintaxe das declarações dos objetos e das expressões matemáticas. As expressões matemáticas podem seguir uma notação mais natural que as de várias linguagens de programação. Por exemplo, há multiplicação por justaposição: `3x = 3*x`; e a aplicação de funções não exige parênteses: `sin-x = sin(-x)`.

A gramática é definida pelo código [1.3](#).

Código 1.3 – Gramática livre de contexto

```

1  PROG      = DECL PROG | ;
2
3  DECL      = "param"      id ":" INTS ";" ;
4  DECL      = "grid"       id ":" GRIDS ";" ;
5  DECL      = "define"     id "="  Expr ";" ;
6  DECL      = "curve"      FDECL "," TINTS ";" ;
7  DECL      = "surface"    FDECL "," TINTS ";" ;
8  DECL      = "function"   FDECL ";" ;
9  DECL      = "point"      id "="  Expr ";" ;
10 DECL      = "vector"     id "="  Expr "@" Expr ";" ;
11
12 FDECL      = id "(" IDS ")" "=" Expr ;
13 IDS        = IDS "," id | id ;
14 INT        = "[" Expr "," Expr "]" ;
15 GRID       = "[" Expr "," Expr "," Expr "]" ;
16 TINT       = id ":" INT ;
17 INTS       = INTS "," INT | INT ;
18 TINTS      = TINTS "," TINT | TINT ;
19 GRIDS      = GRIDS "," GRID | GRID ;
20
21 Expr       = ADD ;
22 ADD        = ADD "+" JUX | ADD "-" JUX | JUX ;
23 JUX        = JUX MULT2 | MULT ;
24 MULT       = MULT "*" UNARY | MULT "/" UNARY | UNARY ;
25 MULT2      = MULT2 "*" UNARY | MULT2 "/" UNARY | APP ;
26 UNARY      = "+" UNARY ;
27 UNARY      = "-" UNARY ;
28 UNARY      = "*" UNARY ;
29 UNARY      = "/" UNARY ;
30 UNARY      = APP ;
31 APP        = FUNC UNARY | POW ;
32 FUNC       = FUNC2 "^" UNARY | FUNC2 ;
33 FUNC2      = FUNC2 "_" var | FUNC2 "'" | func ;
34
35 POW        = COMP "^" UNARY | COMP ;
36 COMP       = COMP "_" num | FACT ;
37 FACT       = const | num | var | "(" TUPLE ")" | "[" TUPLE "]" | "{" TUPLE
    "}" ;
38 TUPLE      = ADD "," TUPLE | ADD ;

```

Os termos em maiúsculo(não-terminais) representam variáveis gramaticais. O lado direito de uma igualdade especifica as possíveis formas sentencias que um não-terminal pode assumir, separadas por uma barra vertical ou em diferentes equações. Por exemplo, `MULT` possui 3 formas: `MULT * UNARY`, `MULT / UNARY` e `UNARY`. Cada forma tem um significado diferente. Uma forma pode ser vazia, como ocorre para `PROG`.

Os símbolos entre aspas representam textos literais, e os termos em minúsculo (terminais) representam uma classe de “palavras”: Por exemplo, `num` representa um número e `var` um nome de uma variável.

O termo `PRG` representa um programa completo, que é uma sequência de declarações (`DECL`). O termo `EXPR` representa uma expressão matemática. Os símbolos abaixo de `EXPR` definem a sintaxe das operações, suas ordens de precedência e associatividades.

Um programa coeso é formado a partir de `PRG`. Enquando houver não-terminais, deve-se substituí-los por uma de suas formas.

Para extrair o significado de um programa, o processo contrário deve ser feito. É necessário encontrar uma maneira de se obter o programa a partir de `PRG`. Para um programa coeso, sempre há uma maneira e essa é única. Algumas transformações nessa gramática a torna LL1, uma propriedade que garante que o *parsing* pode ser feito de forma fácil e rápida. Além disso, LL1 garante que a gramática não é ambígua. ([CALGARY](#), s.d.)

Implementação de sintaxe que considera a estética natural da escrita matemática que precisa ser traduzida para sintaxe de linguagem computacional. Isso é feito pelo parser. A justificativa para essa abordagem é motivada pela experiência de especificar desenhos de objetos gráficos em bibliotecas de uso corrente, tais como `sagemath`, `manin` etc. Isso justifica a especificação de uma gramática livre de contexto. Explicitada a seguir. Trabalhos futuros: grade variável Sobre o texto que descreve a gramática Fazer referência à calculadora C++ Fazer referência ao site que valida a não ambiguidade da gramática Por ter influenciado na sintaxe proposta (como?) Tentar lembrar um exemplo de ambiguidade que foi resolvido para a versão atual da gramática. Descrever o LL1 como certificado de não ambiguidade.



# Referências

CALGARY, University of. **The Context Free Grammar Checker**. [S.l.: s.n.].  
<http://smlweb.cpsc.ucalgary.ca/>. Acessado em 2022-09-28.