Numerical Analysis

established about 4'000 years ago

- 1. Аналіз похибок заокруглення
  - 1.1. Види похибок
  - 1.2. Підрахунок похибок в ЕОМ
  - 1.3. Підрахунок похибок обчислення значення функції

1. Аналіз похибок заокруглення

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 16–25: djvu, pdf;
- Березин, Жидков, том I, стор. 16–35: djvu, pdf.

1.1. Види похибок

Нехай необхідно розв’язати рівняння

$$Au = f. \tag{1}$$

За рахунок неточно заданих вхідних даних насправді ми маємо рівняння

$$\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f}\,. \tag{2}$$

Означення: Назвемо $\delta_1 = u - \tilde{u}$ *неусувною похибкою*.

Застосування методу розв'язання (2) приводить до рівняння

$$\tilde{A}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h, \tag{3}$$

де $h > 0$ — малий параметр.

Означення: Назвемо $\delta_2 = \tilde{u} - \tilde{u}_h$ *похибкою методу*.

Реалізація методу на ЕОМ приводить до рівняння

$$\tilde{A}_h^\star \tilde{u}_h^\star = \tilde{f}_h^\star. \tag{4}$$

Означення: Назвемо $\delta_3 = \tilde{u}_h - \tilde{u}_h^\star$ *похибкою заокруглення*.

Означення: Тоді *повна похибка* $\delta = u - \tilde{u}_h^\star = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$.

Означення: кажуть, що задача (1) *коректна*, якщо

- $\forall f \in F$: $\exists! u \in U$;
- Задача (1) *стійка*, тобто $\forall \varepsilon > 0$: $\exists \delta > 0$:

$$|A - \tilde{A}| < \delta, |f - \tilde{f}| < \delta \implies |u - \tilde{u}| < \varepsilon. \tag{5}$$

Якщо задача (1) некоректна, то або розв'язок її не існує, або він неєдиний, або він нестійкий, тобто $\exists \varepsilon > 0 \colon \forall \delta > 0$:

$$|A - \tilde{A}| < \delta, |f - \tilde{f}| < \delta \implies |u - \tilde{u}| > \varepsilon. \qquad (6)$$

Означення: *Абсолютна похибка* $\Delta x \leq |x - x^\star|$.

Означення: *Відносна похибка* $\delta x \leq \Delta x / |x|$, або $\Delta x / |x^\star|$.

Означення: *Значущими цифрами* називаються всі цифри, починаючи з першої ненульової зліва.

Означення: *Вірна цифра* — це значуща, якщо абсолютна похибка за рахунок відкидання всіх молодших розрядів не перевищує одиниці розряду цієї цифри.

Тобто, якщо $x^\star = \alpha_n \ldots \alpha_0 . \alpha_{-1} \ldots \alpha_{-p} \ldots$, то α_{-p} вірна, якщо $\Delta x \leq 10^{-p}$ (інколи $\Delta x \leq w \cdot 10^{-p}$, де $1/2 \leq w < 1$ наприклад, $w = 0.55$).

1.2. Підрахунок похибок в ЕОМ

Підрахуємо відносну похибку заокруглення числа x на ЕОМ з плаваючою комою. В β-ічній системі числення число представляється у вигляді

$$x = \pm(\alpha_1 \beta^{-1} + \alpha_2 \beta^{-2} + \ldots + \alpha_t \beta^{-t} + \ldots) \cdot \beta^p, \qquad (7)$$

де $0 \le \alpha_k < \beta$, $\alpha_1 \ne 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Якщо в ЕОМ t розрядів, то при відкиданні молодших розрядів ми оперуємо з наближеним значенням

$$x^\star = \pm(\alpha_1\beta^{-1} + \alpha_2\beta^{-2} + \ldots + \alpha_t\beta^{-t}) \cdot \beta^p \tag{8}$$

і відповідно похибка заокруглення

$$x - x^\star = \pm\beta^p \cdot (\alpha_{t+1}\beta^{-t-1} + \ldots). \tag{9}$$

Тоді її можна оцінити так

$$\begin{aligned} |x - x^\star| &\le \beta^{p-t-1} \cdot (\beta - 1) \cdot (1 + \beta^{-1} + \ldots) \le \\ &\le \beta^{p-t-1} \cdot (\beta - 1) \cdot \frac{1}{1 - \beta^{-1}} = \beta^{p-t}. \end{aligned} \tag{10}$$

Якщо в представлені (7) взяти $\alpha_1 = 1$, то $|x| \ge \beta^p \cdot \beta^{-1}$. Звідси остаточно

$$\delta x \le \frac{\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \beta^{-t+1}. \tag{11}$$

При більш точних способах заокруглення можна отримати оцінку $\delta x \le \frac{1}{2} \cdot \beta^{-t+1} = \varepsilon$. Число ε називається «машинним іпсилон». Наприклад, для $\beta = 2$, $t = 24$, $\varepsilon = 2^{-24} \approx 10^{-7}$.

1.3. Підрахунок похибок обчислення значення функції

Нехай задана функція $y = f(x_1, \ldots, x_n) \in C^1(\Omega)$. Необхідно обчислити її значення при наближеному значенні аргументів

$\vec{x}^\star = (x_1^\star, \ldots, x_n^\star)$, де $|x_i - x_i^\star| \leq \Delta x_i$ та оцінити похибку обчислення значення функції $y^\star = f(x_1^\star, \ldots, x_n^\star)$. Маємо

$$\begin{aligned} |y - y^\star| &= \left| f\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{x}^\star\right) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\vec{\xi}\right) \cdot (x_i - x_i^\star) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot \Delta x_i, \end{aligned} \tag{12}$$

де $B_u = \max\limits_{\vec{x} \in U} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \right|$.

Тут

$$U = \left\{ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \left| x_i - x_i^\star \right| \leq \Delta x_i \right\} \subset \Omega, \tag{13}$$

для $i = \overline{1, n}$. Отже з точністю до величин першого порядку малості по

$$\Delta x = \max_i \Delta x_i, \tag{14}$$

$$\Delta y = |y - y^\star| \prec \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \Delta x_i, \tag{15}$$

де $b_i = \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\vec{x}^\star\right) \right|$ та «$\prec$» означає приблизно менше.

Розглянемо похибки арифметичних операцій.

- Сума: $y = x_1 + x_2$, $x_1, x_2 > 0$:

$$\Delta y \leq \Delta x_1 + \Delta x_2, \tag{16}$$

$$\delta y \leq \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 + x_2} \leq \max(\delta x_1, \delta x_2). \tag{17}$$

- Різниця: $y = x_1 - x_2$, $x_1 > x_2 > 0$:

$$\Delta y \leq \Delta x_1 + \Delta x_2, \tag{18}$$

$$\delta y \leq \frac{x_2 \delta x_1 + x_1 \delta x_2}{x_1 - x_2}. \tag{19}$$

  При близьких x_1, x_2 зростає відносна похибка (за рахунок втрати вірних цифр).

- Добуток: $y = x_1 \cdot x_2$, $x_1, x_2 > 0$:

$$\Delta y \prec x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2, \tag{20}$$

$$\delta y \leq \delta x_1 + \delta x_2. \tag{21}$$

- Частка $y = x_1 / x_2$, $x_1, x_2 > 0$:

$$\Delta y \prec \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{x_2^2}, \tag{22}$$

$$\delta y \leq \delta x_1 + \delta x_2. \tag{23}$$

  При малих x_2 зростає абсолютна похибка (за рахунок зростання результату ділення).

> **Означення**: *Пряма задача* аналізу похибок: обчислення Δy, δy по заданих Δx_i, $i = \overline{1, n}$.

Означення: *Обернена задача*: знаходження Δx_i, $i = \overline{1, n}$ по заданих Δy, δy. Якщо $n > 1$, маємо одну умову

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon \tag{24}$$

для багатьох невідомих Δx_i.

Вибирають їх із однієї з умов:

$$\forall i : b_i \cdot \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{n} \tag{25}$$

або

$$\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} b_i}. \tag{26}$$

Назад до лекцій

Назад на головну

---

numerical-analysis is maintained by csc-knu.

© 2019 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Андрій Риженко, Скибицький Нікіта

Numerical Analysis

established about 4'000 years ago

- 2. Методи розв'язання нелінійних рівнянь
  - 2.1. Метод ділення навпіл
  - 2.2. Метод простої ітерації
  - 2.3. Метод релаксації
  - 2.4. Метод Ньютона (метод дотичних)
  - 2.5. Збіжність методу Ньютона

2. Методи розв'язання нелінійних рівнянь

Постановка задачі. Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$, $\bar{x}$ — його розв'язок, тобто $f(\bar{x}) = 0$.

Задача розв'язання цього рівняння розпадається на етапи:

- Існування та кількість коренів.
- Відділення коренів, тобто розбиття числової вісі на інтервали, де знаходиться один корінь.
- Обчислення кореня із заданою точністю ε.

Для розв'язання перших двох задач використовуються методи математичного аналізу та алгебри, а також графічний метод. Далі розглядаються методи розв'язання третього етапу.

2.1. Метод ділення навпіл

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 191: djvu, pdf;
- Волков, стор. 189–190: djvu, pdf.

Припустимо на $[a, b]$ знаходиться лише один корінь рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

для $f(x) \in C[a, b]$, який необхідно визначити. Нехай $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Припустимо, що $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Покладемо $x_1 = \frac{a+b}{2}$ і підрахуємо $f(x_1)$. Якщо $f(x_1) < 0$, тоді шуканий корінь $\bar{x}$ знаходиться на інтервалі (a, x_1). Якщо ж $f(x_1) > 0$, то $\bar{x} \in (x_1, b)$. Далі з двох інтервалів (a, x_1) і (x_1, b) вибираємо той, на границях якого функція $f(x)$ має різні знаки, знаходимо точку x_2 — середину вибраного інтервалу, підраховуємо $f(x_2)$ і повторюємо вказаний процес.

В результаті отримаємо послідовність інтервалів, що містять шуканий корінь $\bar{x}$, причому довжина кожного послідуючого інтервалу вдвічі менше попереднього.

Цей процес продовжується до тих пір, поки довжина отриманого інтервалу (a_n, b_n) не стане меншою за $b_n - a_n < 2\varepsilon$. Тоді x_{n+1}, як середина інтервалу (a_n, b_n), пов'язане з $\bar{x}$ нерівністю

$$|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon. \tag{2}$$

Ця умова для деякого n буде виконуватись за теоремою Больцано-Коші. Оскільки

$$|b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{|b_k - a_k|}{2}, \tag{3}$$

то

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon. \tag{4}$$

Звідси отримаємо нерівність для обчислення кількості ітерацій n для виконання умови (2):

$$n = n(\varepsilon) \geq \left[\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right] + 1. \tag{5}$$

Степінь збіжності — лінійна, тобто геометричної прогресії з знаменником $q = 1/2$.

- **Переваги методу:** простота, надійність.
- **Недоліки методу:** низька швидкість збіжності; метод не узагальнюється на системи.

2.2. Метод простої ітерації

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 191–193: djvu, pdf;
- Волков, стор. 172–184: djvu, pdf.

Спочатку рівняння

$$f(x) = 0 \tag{6}$$

замінюється еквівалентним

$$x = \varphi(x). \tag{7}$$

Ітераційний процес має вигляд

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Початкове наближення x_0 задається.

Для збіжності велике значення має вибір функції $\varphi(x)$. Перший спосіб заміни рівняння полягає в відділенні змінної з якогось члена рівняння. Більш продуктивним є перехід від рівняння (6) до (7) з функцією $\varphi(x) = x + \tau(x) \cdot f(x)$, де $\tau(x)$ — знакостала функція на тому відрізку, де шукаємо корінь.

Означення: Кажуть, що ітераційний метод збігається, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$.

Далі $U_r = \{x : |x - a| \le r\}$ відрізок довжини $2r$ з серединою в точці a.

З'ясуємо умови, при яких збігається метод простої ітерації.

Теорема 1: Якщо

$$\max_{x\in[a,b]=U_r} |\varphi'(x)| \le q < 1 \tag{9}$$

то метод простої ітерації збігається і має місце оцінка

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{q_n}{1-q} \cdot |x_0 - x_1| \le \frac{q^n}{1-q} \cdot (b-a). \tag{10}$$

Доведення: Нехай $x_{k+1}, x_k \in U_r$. Тоді

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k-1}| &= |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = \\ &= |\varphi'(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})| \le \\ &\le |\varphi'(\xi_k)| \cdot |x_k - x_{k-1}| \le \\ &\le q \cdot |x_k - x_{k-1}| = \ldots \\ &= q^k \cdot |x_1 - x_0|, \end{aligned} \tag{11}$$

де $\xi_k = x_k + \theta_k \cdot (x_{k+1} - x_k)$, а у свою чергу $0 < \theta_k < 1$. Далі

$$\begin{aligned} |x_{k+p} - x_k| &= |x_{k+p} - x_{k+p-1} + \ldots + x_{k+1} - x_k| = \\ &= |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + \ldots + |x_{k+1} - x_k| \le \\ &\le \left(q^{k+p-1} + q^{k+p-2} + \ldots + q^k\right) \cdot |x_1 - x_0| = \\ &= \frac{q^k - q^{k+p-1}}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Бачимо що $\{x_k\}$ — фундаментальна послідовність. Значить вона збіжна. При $p \to \infty$ в (12) отримуємо (10). $\square$

Визначимо кількість ітерацій для досягнення точності ε. З оцінки в теоремі 1 отримаємо

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{q^n}{1-q} \cdot (b-a) < \varepsilon, \tag{13}$$

звідки безпосередньо маємо

$$n(\varepsilon) = n \geq \left[\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-q)}{b-a}\right)}{\ln q} \right] + 1. \tag{14}$$

Практично ітераційний процес зупиняємо при: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$. Але ця умова не завжди гарантує, що $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$.

> **Зауваження**: Умова збіжності методу може бути замінена на умову Ліпшиця
>
> $$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|, \quad 0 < q < 1. \tag{15}$$

- **Переваги методу:** простота; при $q < 1/2$ — швидше збігається ніж метод ділення навпіл; метод узагальнюється на системи.
- **Недоліки методу:** при $q > 1/2$ збігається повільніше ніж метод ділення навпіл; виникають труднощі при зведенні $f(x) = 0$ до $x = \varphi(x)$.

2.3. Метод релаксації

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 192–193: djvu, pdf.

Якщо в методі простої ітерації для рівняння $x = x + \tau \cdot f(x) \equiv \varphi(x)$ вибрати $\tau(x) = \tau = \mathrm{const}$, то ітераційний процес приймає вигляд

$$x_{n+1} = x_n + \tau \cdot f(x_n), \tag{16}$$

де $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$, а x_0 — задано. Метод можна записати у вигляді

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

Оскільки $\varphi'(x) = 1 + \tau \cdot f'(x)$, то метод збігається при умові

$$|\varphi'(x)| = |1 + \tau \cdot f'(x)| \leq q < 1. \tag{18}$$

Нехай $f'(x) < 0$, тоді (8) запишеться у вигляді: $-q \leq 1 + \tau \cdot f'(x) \leq q < 1$. Звідси

$$f'(x) \leq 1 + q < 2k\tau, \tag{19}$$

і

$$0 < \tau < \frac{2}{|f'(x)|}. \tag{20}$$

Поставимо задачу знаходження τ, для якого $q = q(\tau) \to \min$. Для того, щоб вибрати оптимальний параметр τ, розглянемо рівняння для похибки $z_k = x_k - \bar{x}$.

Підставивши $x_k = x + z_k$ в (16), отримаємо

$$z_{k+1} = z_k + \tau \cdot f(x + z_k). \tag{21}$$

В припущені $f(x) \in C^1([a,b])$ з теореми про середнє маємо

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + z_k) &= f(\bar{x}) + z_k \cdot f'(\bar{x} + \theta \cdot z_k) = \\ &= z_k \cdot f'(\bar{x} + \theta \cdot z_k) = z_k \cdot f'(\xi_k), \end{aligned} \tag{22}$$

тобто

$$z_{k+1} = z_k + \tau \cdot f'(\xi_k) \cdot z_k. \tag{23}$$

Звідси

$$|z_{k+1}| \le |1 + \tau \cdot f'(\xi_k)| \cdot |z_k| \le \max_U |1 + \tau \cdot f'(\xi_k)| \cdot |z_k|. \tag{24}$$

А тому

$$|z_{k+1}| \le \max\{|1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1|\} \cdot |z_k|, \tag{25}$$

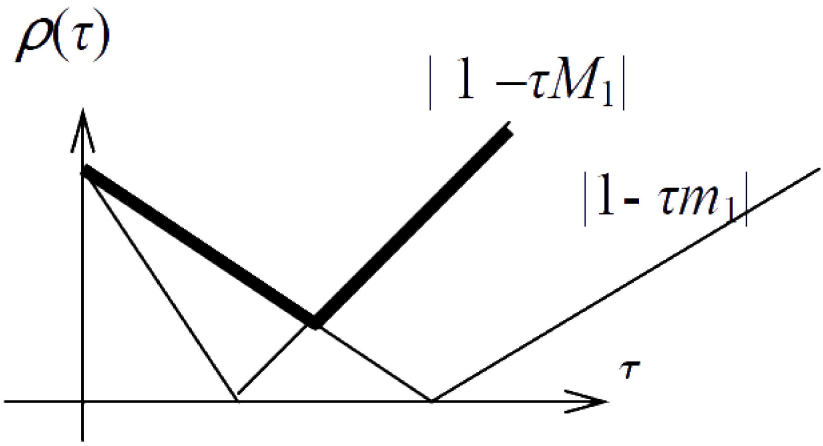
де

$$m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|, \quad M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)| \tag{26}$$

Таким чином, задача вибору оптимального параметра зводиться до знаходження τ, для якого функція

$$q(\tau) = \max\{|1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1|\} \tag{27}$$

приймає мінімальне значення: $q(\tau) \to \min$.



З графіка видно, що точка мінімуму визначається умовою $|1 - \tau M_1| = |1 - \tau m_1|$. Тому

$$1 - \tau_0 m_1 = \tau_0 M_1 - 1 \implies \tau_0 = \frac{2}{M_1 - m_1} < \frac{2}{|f'(x)|}. \tag{28}$$

При цьому значенні τ маємо

$$q(\tau_0) = \rho_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}. \tag{29}$$

Тоді для похибки вірна оцінка

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{\rho_0^n}{1 - \rho_0} \cdot (b - a) < \varepsilon. \tag{30}$$

Кількість ітерацій

$$n = n(\varepsilon) \ge \left[\frac{\frac{\ln(\varepsilon(1-\rho_0))}{b-a}}{\ln \rho_0} \right] + 1. \tag{31}$$

Задача 1: Дати геометричну інтерпретацію методу простої ітерації для випадків:

$$0 < \varphi'(x) < 1; \quad -1 < \varphi'(x) < 0; \quad \varphi'(x) < -1; \quad \varphi'(x) > 1. \tag{32}$$

Задача 2: Знайти оптимальне $\tau = \tau_0$ для методу релаксації при $f'(x) > 0$.

2.4. Метод Ньютона (метод дотичних)

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 193–194: djvu, pdf.
- Березин, Жидков, том. II, стор. 135–140: djvu, pdf.

Припустимо, що рівняння $f(x) = 0$ має простий дійсний корінь $\bar{x}$, тобто $f(\bar{x}) = 0$, $f'(x) \ne 0$. Нехай виконуються умови: $f(x) \in C^1([a, b])$, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тоді

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k + \bar{x} - x_k) = f(x_k) + f'(\xi_k) \cdot (x - x_k), \tag{33}$$

де $\xi_k = x_k + \theta_k \cdot (\bar{x} - x_k)$, $0 < \theta_k < 1$, $\xi_k \approx x_k$. Тому наступне наближення виберемо з рівняння

$$f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0. \tag{34}$$

Звідси маємо ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{35}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$; x_0 — задане.

Метод Ньютона ще називають методом лінеаризації або методом дотичних.

> **Задача 3**: Дати геометричну інтерпретацію методу Ньютона.

Метод Ньютона можна інтерпретувати як метод простої ітерації з

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{36}$$

тобто

$$\tau(x) = -\frac{1}{f'(x)}. \tag{37}$$

Тому

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}. \tag{38}$$

Якщо $\bar{x}$ — корінь $f(x)$, то $\varphi'(x) = 1$. знайдеться окіл кореня, \end{equation}

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1. \tag{39}$$

Це означає, що збіжність методу Ньютона залежить від вибору x_0.

Недолік методу Ньютона: необхідність обчислювати на кожній ітерації не тільки значення функції, а й похідної.

Модифікований метод Ньютона позбавлений цього недоліку і має вигляд:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{40}$$

Цей метод має лише лінійну збіжність: $|x_{k+1} - x = O(|x_k - \bar{x}|)$.

> **Задача 4**: Дати геометричну інтерпретацію модифікованого методу Ньютона.

В методі Ньютона, для якого $f'(x_k)$ замінюється на

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \tag{41}$$

дає метод січних:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k), \tag{42}$$

де $k = 1, 2, \ldots$, x_0, x_1 — задані.

> **Задача 5**: Дати геометричну інтерпретацію методу січних.

2.5. Збіжність методу Ньютона

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 199–202: djvu, pdf.

> **Теорема 1**: Нехай $f(x) \in C^2([a, b])$; $\bar{x}$ простий дійсний корінь рівняння
> $$f(x) = 0. \tag{43}$$
> і $f'(x) \neq 0$ при $x \in U_r = \{x : |x - \bar{x}| < r\}$. Якщо
> $$q = \frac{M_2 \cdot |x_0 - \bar{x}|}{2m_1} < 1, \tag{44}$$
> де
> $$m_1 = \min_{U_r} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{U_r} |f''(x)|, \tag{45}$$
> то для $x_0 \in U_r$ метод Ньютона
> $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{46}$$
> збігається і має місце оцінка
> $$|x_n - \bar{x}| \leq q^{2^n - 1} \cdot |x_0 - \bar{x}|. \tag{47}$$

З (46) маємо

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \bar{x} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \bar{x} = \\ &= \frac{(x_k - \bar{x}) \cdot f'(x_k) - f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{F(x_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \tag{48}$$

де $F(x) = (x - \bar{x}) f'(x) - f(x)$, така, що

- $F(\bar{x}) = 0$;
- $F'(x) = (x - \bar{x}) \cdot f''(x)$.

Тоді

$$F(x_k) = F(\bar{x}) + \int\limits_{x}^{x_k} F'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{x}^{x_k} (t - \bar{x}) \cdot f''(t)\,\mathrm{d}t. \tag{49}$$

Так як $(t - \bar{x})$ не міняє знак на відрізку інтегрування, то скористаємося теоремою про середнє значення:

$$F(x_k) = f''(\xi_k) \int\limits_{x}^{x_k} (t - \bar{x})\,\mathrm{d}t = \frac{(x_k - x)^2}{2} \cdot f''(\xi_k), \tag{50}$$

де $\xi_k = \bar{x} + \theta_k \cdot (x_k - \bar{x})$, де $0 < \theta_k < 1$. З (48), (50) маємо

$$x_{k+1} - \bar{x} = \frac{(x_k - \bar{x})^2}{2f'(x_k)} \cdot f''(\xi_k). \tag{51}$$

Доведемо оцінку (46) за індукцією. Так як $x_0 \in U_r$, то

$$|\xi_0 - \bar{x}| = |\theta_0 \cdot (x_0 - \bar{x})| < |\theta_0| \cdot |x_0 - \bar{x}| < r \tag{52}$$

звідси випливає $\xi_0 \in U_r$.

Тоді $f''(\xi_0) \leq M_2$, тому

$$|x_1 - \bar{x}| \leq \frac{(x_0 - \bar{x})^2 \cdot M_2}{2m_1} = \qquad = \frac{M_2 \cdot |x_0 - \bar{x}|}{2m_1} \cdot |x_0 - \bar{x}| = = q \cdot |x_0 - \bar{x}| < r,$$

тобто $x_1 \in U_r$.

Ми довели твердження (47) при $n = 1$. Нехай воно справджується при $n = k$

$$\begin{aligned} |x_k - \bar{x}| &\leq q^{2^k - 1} \cdot |x_0 - \bar{x}| < r, \\ |\xi_k - \bar{x}| &= |\theta_k \cdot (x_k - \bar{x})| < r. \end{aligned} \tag{54}$$

Тоді $x_k, \xi_k \in U_r$.

Доведемо (47) для $n = k + 1$. З (51) маємо

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - \bar{x}| &\leq \frac{|x_k - \bar{x}|^2 \cdot M_2}{2m_1} \leq \\ &\leq \left(q^{2^k - 1}\right)^2 \cdot \frac{|x_0 - \bar{x}|^2 \cdot M_2}{2m_1} = \\ &= q^{2^{k+1} - 2} \cdot \frac{|x_0 - \bar{x}| \cdot M_2}{2m_1} \cdot |x_0 - \bar{x}| = \\ &= q^{2^{k+1} - 1} \cdot |x_0 - \bar{x}|. \end{aligned}$$

Таким чином (47) справджується для $n = k + 1$. Значить (47) виконується і для довільного n. Таким чином $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$. $\square$

З (47) маємо оцінку кількості ітерацій для досягнення точності ε

$$n \geq \left[\log_2\left(1 + \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)}{\ln q}\right)\right] + 1. \tag{55}$$

Кажуть, що ітераційний метод має *степінь збіжності* m, якщо

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = O\left(|x_k - \bar{x}|^m\right). \tag{56}$$

Для методу Ньютона

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = \frac{|x_k - \bar{x}|^2 \cdot f''(\xi_k)|}{2|f'(x_k)|}. \tag{57}$$

Звідси випливає, що

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = O\left(|x_k - \bar{x}|^2\right). \tag{58}$$

Значить степінь збіжності методу Ньютона $m = 2$. Для методу простої ітерації і ділення навпіл $m = 1$.

Теорема 2: Нехай $f(x) \in C^2([a,b])$ та x простий корінь рівняння $f(x) = 0$ ($f'(x) \neq 0$). Якщо $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ ($f'(x) \cdot f''(x) < 0$) то для методу Ньютона при $x_0 = b$ послідовність наближень $\{x_k\}$ монотонно спадає (монотонно зростає при $x_0 = a$).

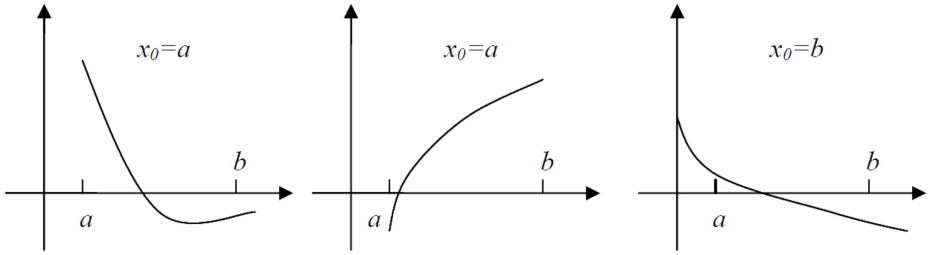
Задача 6: Довести теорему 2 при

- $f'(x) \cdot f''(x) > 0$;
- $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

Задача 7: Знайти степінь збіжності методу січних [Калиткин Н.Н., Численные методы, с. 145–146]

Якщо $f(a) \cdot f''(a) > 0$ та $f''(x)$ не міняє знак, то потрібно вибирати $x_0 = a$; при цьому $\{x_k\} \uparrow \bar{x}$.

Якщо $f(b) \cdot f''(b) > 0$, то $x_0 = b$; маємо $\{x_k\} \downarrow \bar{x}$. Пояснення на рисунку 2:



Зауваження 1: Якщо $\bar{x}$ — p-кратний корінь тобто

$$f^{(m)}(\bar{x}) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, p-1; \quad f^{(p)}(x) \neq 0, \tag{59}$$

то в методі Ньютона необхідна наступна модифікація

$$x_{k+1} - x_k - p \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{60}$$

і

$$q = \frac{M_{p+1} \cdot |x_0 - \bar{x}|}{m_p \cdot p \cdot (p+1)} < 1. \tag{61}$$

Зауваження 2: Метод Ньютона можна застосовувати і для обчислення комплексного кореня

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \tag{62}$$

В теоремі про збіжність

$$q = \frac{|x_0 - \bar{x}| M_2}{2m_1}, \tag{63}$$

де

$$m_1 = \min_{U_r} |f'(z)|, \quad M_2 = \max_{U_r} f''(z)|. \tag{64}$$

Тут $|z|$ — модуль комплексного числа.

Переваги методу Ньютона:

- висока швидкість збіжності;
- узагальнюється на системи рівнянь;

- узагальнюється на комплексні корені.

Недоліки методу Ньютона:

- на кожній ітерації обчислюється не тільки $f(x_k)$, а і похідна $f'(x_k)$;
- збіжність залежить від початкового наближення x_0, оскільки від нього залежить умова збіжності

$$q = \frac{M_2|x_0 - \bar{x}|}{2m_1} < 1; \tag{65}$$

- потрібно, щоб $f(x) \in C^2([a, b])$.

Назад до лекцій

Назад на головну

---

numerical-analysis is maintained by csc-knu.
© 2019 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Андрій Риженко, Скибицький Нікіта

Numerical Analysis

established about 4'000 years ago

- 3. Методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)
  - 3.1. Метод Гаусса
  - 3.2. Метод квадратних коренів
  - 3.3. Обчислення визначника та оберненої матриці
  - 3.4. Метод прогонки
  - 3.5. Обумовленість систем лінійних алгебраїчних рівнянь

3. Методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Методи розв’язування СЛАР поділяються на *прямі* та *ітераційні*. При умові точного виконання обчислень прямі методи за скінчену кількість операцій в результаті дають точний розв’язок. Використовуються вони для невеликих та середніх СЛАР $n = 10^2 - 10^4$. Ітераційні методи використовуються для великих СЛАР $n > 10^5$, як правило розріджених. В результаті отримуємо послідовність наближень, яка збігається до розв’язку.

3.1. Метод Гаусса

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 49–67: djvu, pdf;
- Березин, Жидков, том II, стор. 10–17: djvu, pdf.

Розглянемо задачу розв'язання СЛАР

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{1}$$

причому $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $\det A \neq 0$, $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^n$, $\vec{b} = (b_j)_{j=1}^n$. Метод Крамера з обчисленням визначників для такої системи має складність $Q = O(n! \cdot n)$.

Запишемо СЛАР у вигляді

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \equiv a_{1,n+1}, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \equiv a_{2,n+1}, \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \equiv a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{2}$$

Якщо $a_{1,1} \neq 0$, то ділимо перше рівняння на нього і виключаємо x_1 з інших рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1,n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \\ a_{2,2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2,n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)}, \\ \ldots \\ a_{n,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{n,n}^{(1)}x_n = a_{n,n+1}^{(1)}. \end{cases} \tag{3}$$

Процес повторюємо для $x_2, \ldots, x_n$. В результаті отримуємо систему з трикутною матрицею

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1,n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \\ x_2 + \ldots + a_{2,n}^{(2)}x_n = a_{2,n+1}^{(2)}, \\ \ldots \\ x_n = a_{n,n+1}^{(n)}. \end{cases} \tag{4}$$

Тобто

$$A^{(n)}\vec{x} = \vec{a}^{(n)}. \tag{5}$$

Це прямий хід методу Гаусса. Формули прямого ходу

```
for k in range(1, n):
  for j in range(k + 1, n + 2):
    a[k, j][k] = a[k, j][k - 1] / a[k, k][k - 1]
    for i in range(k + 1, n + 1):
      a[i, j][k] = a[i, j][k - 1] - \
        a[i, j][k - 1] * a[k, j][k]
```

Звідси

$$x_n = a^{(n)}_{n,n+1}, \quad x_i = a^{(i)}_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a^{(n)}_{i,j} x_j, \tag{6}$$

для $i = \overline{n-1, 1}$. Це формули оберненого ходу.

Складність, тобто кількість операцій, яку необхідно виконати для реалізації методу: $Q_f = 2/3n^2 + O(n^2)$ для прямого ходу, $Q_b = n^2 + O(n)$ для оберненого ходу.

Умова

$$a^{(k-1)}_{k,k} \neq 0 \tag{7}$$

не суттєва, оскільки знайдеться m, для якого

$$\left|a^{(k-1)}_{m,k}\right| = \max_i \left|a^{(k-1)}_{i,k}\right| \neq 0 \tag{8}$$

(оскільки $\det A \neq 0$). Тоді міняємо місцями рядки номерів k і m.

> **Означення**: Елемент

$$a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0 \tag{9}$$

називається *ведучим*.

Введемо матриці

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{k,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{n,k} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

елементи якої обчислюється так:

$$m_{k,k} = \frac{1}{a_{k,k}^{(k-1)}}, \quad m_{k,k} = -\frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}. \tag{11}$$

Нехай на k-му кроці $A_{k-1}\vec{x} = \vec{b}_{k-1}$. Множимо цю СЛАР зліва на M_k: $M_k A_{k-1}\vec{x} = M_K \vec{b}_{k-1}$. Позначимо $A_k = M_k A_{k-1}$; $A_0 = A$. Тоді прямий хід методу Гаусса можна записати у вигляді

$$M_n M_{n-1} \dots M_1 A\vec{x} = M_n M_{n-1} \dots M_1 \vec{b}. \tag{12}$$

Позначимо останню систему, яка співпадає з (5), так

$$U\vec{x} = \vec{c}, \quad U = (u_{i,j})_{i,j=1}^{n}, \tag{13}$$

причому

$$\begin{cases} u_{i,i} = 1, \\ u_{i,j} = 0, \quad i > j. \end{cases} \tag{14}$$

Таким чином $U = M_n M_{n-1} \dots M_1 A$. Введемо матриці

$$L_k = M_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{k,k}^{(k-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,k}^{(k-1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Тоді

$$A = L_1 \dots L_n U = LU; \quad L = L_1 \dots L_n, \tag{16}$$

де L — нижня трикутня матриця, U — верхня трикутня матриця. Таким чином метод Гаусса можна трактувати, як розклад матриці A в добуток двох трикутних матриць — LU-розклад.

Введемо матрицю перестановок на k-му кроці (це матриця, отримана з одиничної матриці перестановкою k-того і m-того рядка). Тоді при множені на неї матриці A_{k-1} робимо ведучим елементом максимальний за модулем.

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

За допомогою цих матриць перехід до трикутної системи (13) тепер має вигляд:

$$M_n M_{n-1} P_{n-1} \dots M_1 P_1 A\vec{x} = M_n M_{n-1} P_{n-1} \dots M_1 P_1 \vec{b}. \quad (18)$$

> **Твердження**: Знайдеться така матриця P перестановок, що $PA = LU$ — розклад матриці на нижню трикутну з ненульовими діагональними елементами і верхню трикутну матрицю з одиницями на діагоналі.

Висновки про **переваги** трикутного розкладу:

- Розділення прямого і оберненого ходів дає змогу економно розв'язувати декілька систем з одноковою матрицею та різними правими частинами.
- Зберігання M, або L та U на місці A.
- Обчислюючи ℓ — кількість перестановок, можна встановити знак визначника.

3.2. Метод квадратних коренів

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 69–73: djvu, pdf;
- Березин, Жидков, том II, стор. 23–25: djvu, pdf.

Цей метод призначений для розв'язання систем рівнянь із симетричною матрицею

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad A^{\mathsf{T}} = A. \quad (19)$$

Він оснований на розкладі матриці A в добуток:

$$A = S^{\mathsf{T}} D S, \quad (20)$$

де S — верхня трикутна матриця, $S^\intercal$ — нижня трикутна матриця, D — діагональна матриця.

Виникає питання: як обчислити S, D по матриці A? Маємо

$$DS_{i,j} = \begin{cases} d_{i,i}s_{i,j}, & i \le j, \\ 0, & i > j. \end{cases} \tag{21}$$

Далі

$$\begin{aligned} S^\intercal DS_{i,j} &= \sum_{l=1}^{n} s_{i,l}^\intercal d_{l,l} s_{l,j} = \\ &= \sum_{l=1}^{i-1} s_{l,i}^\intercal s_{l,j} d_{l,l} + s_{i,i}s_{i,j}d_{i,i} + \\ &\quad + \underbrace{s_{l,i}^\intercal \sum_{l=i+1}^{n} s_{l,i}^\intercal s_{l,j} d_{l,l}}_{=0} = a_{i,j}, \end{aligned} \tag{22}$$

для $i, j = \overline{1, n}$.

Якщо $i = j$, то

$$|s_{i,i}^2| d_{i,i} = a_{i,i} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{l,i}^2| d_{l,l} \equiv p_i. \tag{23}$$

Тому

$$d_{i,i} = \operatorname{sign}(p_i), \quad s_{i,i} = \sqrt{|p_i|}. \tag{24}$$

Якщо $i < j$, то

$$s_{i,j} = \left(a_{i,j} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{l,i}^\intercal d_{l,l} s_{l,j} \right) / (s_{i,i} d_{i,i}), \tag{25}$$

де $i = \overline{1, n}$, а $j = \overline{i+1, n}$.

Якщо $A > 0$ (тобто головні мінори матриці A додатні), то всі $d_{i,i} = +1$.

Знайдемо розв'язок рівняння (19). Враховуючи (20), маємо:

$$S^{\intercal} D \vec{y} = \vec{b} \tag{26}$$

і

$$S \vec{x} = \vec{y} \tag{27}$$

Оскільки S — верхня трикутна матриця, а $S^{\intercal} D$ — нижня трикутна матриця, то

$$y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} s_{j,i} d_{j,j} y_j}{s_{i,i} d_{i,i}}, \tag{28}$$

для $i = \overline{1, n}$ і

$$x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} s_{i,j} x_j}{s_{i,i}}, \tag{29}$$

для $i = \overline{n-1, 1}$, де $x_n = y_n / s_{n,n}$.

Метод застосовується лише для симетричних матриць. Його складність $Q = n^3/3 + O(n^2)$.

Переваги цього методу:

- він витрачає в 2 рази менше пам'яті ніж метод Гаусса для зберігання $A^{\intercal} = A$ (необхідний об'єм пам'яті

$n(n+1)/2 \sim n^2/2$;

- метод однорідний, без перестановок;
- якщо матриця A має багато нульових елементів, то і матриця S також.

Остання властивість дає економію в пам'яті та кількості арифметичних операцій. Наприклад, якщо A має m ненульових стрічок по діагоналі (m-діагональна), то $Q = O(m^2 n)$.

3.3. Обчислення визначника та оберненої матриці

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 67–69: djvu, pdf;
- Березин, Жидков, том II, стор. 17–19: djvu, pdf.

Кількість операцій обчислення детермінанту за означенням — $Q_{\det} = n!$. В методі Гаусса — $PA = LU$. Тому

$$\det P \det A = \det L \det U \tag{30}$$

звідки

$$\det A = (-1)^{\ell} \det L \det U = (-1)^{\ell} \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}^{(k)}, \tag{31}$$

де ℓ — кількість перестановок. Ясно, що за методом Гаусса

$$Q_{\det} = \frac{2}{3} \cdot n^3 + O(n^2) \tag{32}$$

В методі квадратного кореня $A = S^{\mathsf{T}} D S$. Тому

$$\det A = \det S^{\mathsf{T}} \det D \det S = \prod_{k=1}^{n} d_{k,k} \prod_{k=1}^{n} s_{k,k}^2. \tag{33}$$

Тепер $Q_{\det} = n^3/3 + O(n^2)$.

За означенням

$$AA^{-1} = E, \tag{34}$$

де A^{-1} обернена до матриці A. Позначимо

$$A^{-1} = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{n}. \tag{35}$$

Тоді $\vec{\alpha}_j = (\alpha_{i,j})_{i=1}^{n}$ — вектор-стовпчик оберненої матриці. З (34) маємо

$$A\vec{\alpha}_j = \vec{e}_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{36}$$

де $\vec{e}_j$ — стовпчики одиничної матриці: $\vec{e}_j = (\delta_{i,j})_{i=1}^{n}$,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{37}$$

Для знаходження A^{-1} необхідно розв'язати n систем. Для знаходження A^{-1} методом Гаусса необхідна кількість операцій $Q = 2n^3 + O(n^2)$.

3.4. Метод прогонки

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 45–47: djvu, pdf;

Це економний метод для розв'язання СЛАР з три діагональною матрицею:

$$\begin{cases} -c_0 y_0 + b_0 y_1 = -f_0, \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N = -f_N. \end{cases} \tag{38}$$

Матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} -c_0 & b_1 & & 0 \\ a_0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_N \\ 0 & & a_N & -c_N \end{pmatrix} \tag{39}$$

тридіагональна.

Розв'язок представимо у вигляді

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}. \tag{40}$$

Замінимо в (40) і $i \mapsto i-1$ і підставимо в (33), тоді

$$(a_i \alpha_i - c_i) \cdot y_i + b_i y_{i+1} = -f_i - a_i \beta_i \tag{41}$$

Звідси

$$y_i = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i} \cdot y_{i+1} + \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}. \tag{42}$$

Тому з (36)

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad i = \overline{1, N-1}. \tag{43}$$

Умова розв'язності (38) — $c_i - a_i \alpha_i \neq 0$.

Щоб знайти всі α_i, β_i, треба задати перші значення. З (38):

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}. \tag{44}$$

Після знаходження всіх α_i, β_i обчислюємо y_N з системи

$$\begin{cases} a_N y_N - c_N y_N = -f_N, \\ y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N. \end{cases} \tag{45}$$

Звідси

$$y_N = \frac{f_N + a_N \beta_N}{c_N - a_N \alpha_N}. \tag{46}$$

Алгоритм:

```
alpha[1], beta[1] = b[0] / c[0], f[0] / c[0]

for i in range(1, N):
  z[i] = c[i] - a[i] * alpha[i]
  alpha[i + 1], beta[i + 1] = b[i] / z[i], \
    (f[i] + a[i] * beta[i]) / z[i]

y[N] = (f[N] + a[N] * beta[N]) / \
  (c[N] - a[N] * alpha[N])

for i in range(N - 1, -1, -1):
  y[i] = alpha[i + 1] * y[i + 1] + beta[i + 1]
```

Складність алгоритму $Q = 8N - 2$.

Метод можна застосовувати, коли $c_i - a_i \alpha_i \neq 0, \forall i : |\alpha_i| \leq 1$. Якщо $|\alpha_i| \geq q > 1$ то $\Delta y_0 \geq q^N \Delta y_N$ (тут Δy_i абсолютна похибка обчислення y_i), а це приводить до експоненціального накопичення похибок заокруглення, тобто нестійкості алгоритму прогонки.

Теорема (*про достатні умови стійкості метода прогонки*): Нехай $a_i, b_i \neq 0$, та

$$|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad \forall i, \quad a_0 = b_N = 0, \tag{47}$$

та хоча би одна нерівність строга. Тоді $|\alpha_i| \leq 1$ та

$$z_i = c_i - a_i \alpha_i \neq 0, \quad i = \overline{1, N}. \tag{48}$$

Задача 8: Довести теорему про стійкість методу прогонки.

3.5. Обумовленість систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 74–81: djvu, pdf;

Нехай задано СЛАР

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{49}$$

Припустимо, що матриця і права частина системи задані неточно і фактично розв'язуємо систему

$$B\vec{y} = \vec{h}, \tag{50}$$

де $B = A + C$, $\vec{h} = \vec{b} + \vec{\eta}$, $\vec{y} = \vec{x} + \vec{z}$.

Малість детермінанту $\det A \ll 1$ не є необхідною умовою різкого збільшення похибки. Це ілюструє наступний приклад:

$$A = \mathrm{diag}(\varepsilon), \quad a_{i,j} = \varepsilon \delta_{i,j}. \tag{51}$$

Тоді $\det A = \varepsilon^n \ll 1$, але $x_i = b_i/\varepsilon$. Тому $\Delta x_i = \Delta b_i/\varepsilon \gg 1$.

Оцінимо похибку розв'язку. Підставивши значення B, $\vec{h}$, та $\vec{z} = \vec{y} - \vec{x}$, отримаємо:

$$(A + C)(\vec{x} + \vec{z}) = \vec{b} + \vec{\eta}. \tag{52}$$

Віднімемо від цієї рівності (49) у вигляді $A\vec{z} + C\vec{x} + C\vec{z} = \vec{\eta}$. Тоді

$$A\vec{z} = \vec{\eta} - C\vec{x} - C\vec{z}, \quad \vec{z} = A^{-1}(\vec{\eta} - C\vec{x} - C\vec{z}). \tag{53}$$

Означення: Введемо *норми векторів*: $\|\vec{z}\|$:

$$|\vec{z}|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|, \tag{54}$$

$$|\vec{z}|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{1/2}, \tag{55}$$

$$|\vec{z}|_\infty = \max_i |z_i|. \tag{56}$$

Означення:_ Норми матриці_, що відповідають нормам вектора, тобто

$$|A|_m = \sup_{|\vec{x}|_m \neq 0} \frac{|A\vec{x}|_m}{|\vec{x}|_m}, \quad m = 1, 2, \infty. \tag{57}$$

такі:

$$|A|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|, \tag{58}$$

$$|A|_2 = \max_i \sqrt{\lambda_i(A^\intercal A)}, \tag{59}$$

$$|A|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|, \tag{60}$$

де $\lambda_i(B)$ — власні значення матриці B.

Позначимо $\delta(\vec{x}) = \|\vec{z}\|/\|\vec{x}\|$, $\delta(\vec{b}) = \|\vec{\eta}\|/\|\vec{b}\|$, $\delta(A) = \|C\|/\|A\|$ — відносні похибки $\vec{x}$, $\vec{b}$, A, де $\|\cdot\|_k$ — одна з введених вище норм.

Для характеристики зв'язку між похибками правої частини та розв'язку вводять поняття обумовленості матриці системи.

Означення: *Число обумовленості матриці A —* $\operatorname{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Теорема: Якщо $\exists A^{-1}$ та $\|A^{-1}\| \cdot \|C\| < 1$, то

$$\delta(\vec{x}) \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \operatorname{cond}(A) \cdot \delta(A)} (\delta(A) + \delta(\vec{b})), \tag{61}$$

де $\operatorname{cond}(A)$ — число обумовленості.

Доведення:

$$A\vec{z} = \vec{\eta} - C\vec{x} - C\vec{z}, \quad \vec{z} = A^{-1}\vec{\eta} - A^{-1}C\vec{x} - A^{-1}C\vec{z} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} |\vec{z}| &\leq |A^{-1}\vec{\eta}| + |A^{-1}C\vec{x}| + |A^{-1}C\vec{z}| \leq \\ &\leq |A^{-1}| \cdot |\vec{\eta}| + |A^{-1}| \cdot |C| \cdot |\vec{x}| + |A^{-1}| \cdot |C| \cdot |\vec{z}|. \end{aligned} \tag{63}$$

$$|\vec{z}| \leq \frac{|A^{-1}| \cdot (|\vec{\eta}| + |C| \cdot |\vec{x}|)}{1 - |A^{-1}| \cdot |C|} \tag{64}$$

Оцінка похибки

$$\begin{aligned} \delta(\vec{x}) &\leq \frac{|A^{-1}|}{1 - |A^{-1}| \cdot |C|} \left(\frac{|\vec{\eta}|}{|\vec{x}|} + |C| \right) = \\ &= \frac{|A^{-1}| \cdot |A|}{1 - |A^{-1}| \cdot |A| \cdot \dfrac{|C|}{|A|}} \left(\frac{|\vec{\eta}|}{|A| \cdot |\vec{x}|} + \delta(A) \right) \leq \\ &\leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \operatorname{cond}(A) \cdot \delta(A)} \left(\frac{|\vec{\eta}|}{|\vec{x}|} + \delta(A) \right). \quad \square \end{aligned} \tag{65}$$

Наслідок: Якщо $C \equiv 0$, то $\delta(\vec{x}) \leq \operatorname{cond}(A) \cdot \delta(\vec{b})$.

Властивості $\operatorname{cond}(A)$:

- $\operatorname{cond}(A) \geq 1$;
- $\operatorname{cond}(A) \geq \max_i |\lambda_i(A)| / \min_i |\lambda_i(A)|$;
- $\operatorname{cond}(AB) \leq \operatorname{cond}(A) \cdot \operatorname{cond}(B)$;
- $A^{\intercal} = A^{-1} \implies \operatorname{cond}(A) = 1$.

Друга властивість має місце оскільки довільна норма матриці не менше її найбільшого за модулем власного значення. Значить $\|A\| \geq \max |\lambda_A|$. Оскільки власні значення матриць A^{-1} та A взаємно обернені, то

$$|A^{-1}| \geq \max \frac{1}{|\lambda_A|} = \frac{1}{\min |\lambda_A|}. \tag{66}$$

> Якщо $1 \ll \operatorname{cond}(A)$, то система називається *погано обумовленою*.

Оцінка впливу похибок заокруглення при обчисленні розв'язку СЛАР така (Дж. Уілкінсон): $\delta(A) = O(n\beta^{-t})$, $\delta(\vec{b}) = O(\beta^{-t})$, де β — розрядність ЕОМ, t — кількість розрядів, що відводиться під мантису числа. З оцінки (61) витікає: $\delta(\vec{x}) = \operatorname{cond}(A) \cdot O(n\beta^{-t})$. Висновок: найпростіший спосіб підвищити точність обчислення розв'язку погано обумовленої СЛАР — збільшити розрядність ЕОМ при обчисленнях. Інші способи пов'язані з розглядом цієї СЛАР як некоректної задачі із застосуванням відповідних методів її розв'язання.

> **Приклад** погано обумовленої системи — системи з матрицею Гільберта
>
> $$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{n}, \tag{67}$$
>
> наприклад $\operatorname{cond}(H_8) \approx 10^9$.

Назад до лекцій

Назад на головну

---

numerical-analysis is maintained by csc-knu.
© 2019 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Андрій Риженко, Скибицький Нікіта

Numerical Analysis

established about 4'000 years ago

- 4. Ітераційні методи для систем
  - 4.1. Ітераційні методи розв’язання СЛАР
    - 4.1.1. Метод простої ітерації
    - 4.1.2. Метод Якобі
    - 4.1.3. Метод Зейделя
    - 4.1.4. Матрична інтерпретація методів Якобі і Зейделя
    - 4.1.5. Однокрокові (двошарові) ітераційні методи
    - 4.1.6. Збіжності стаціонарних ітераційних процесів у випадку симетричних матриць
    - 4.1.7. Метод верхньої релаксації
    - 4.1.8. Методи варіаційного типу
  - 4.2. Методи розв’язання нелінійних систем
    - 4.2.1. Метод простої ітерації
    - 4.2.2. Метод Ньютона
    - 4.2.3. Модифікований метод Ньютона

4. Ітераційні методи для систем

4.1. Ітераційні методи розв’язання СЛАР

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 82–102: djvu, pdf;
- Березин, Жидков, том II, стор. 54–67: djvu, pdf.

Систему

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

зводимо до вигляду

$$\vec{x} = B\vec{x} + \vec{f}\,. \tag{2}$$

Будь яка система

$$\vec{x} = \vec{x} - C \cdot (A\vec{x} - \vec{b}) \tag{3}$$

має вигляд (2) і при $\det C \neq 0$ еквівалентна системі (1).
Наприклад, для $C = \tau \cdot E$:

$$\vec{x} = \vec{x} - \tau \cdot (A\vec{x} - \vec{b}). \tag{3'}$$

4.1.1. Метод простої ітерації

Цей метод застосовується до рівняння (2)

$$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{f}\,, \tag{4}$$

де $\vec{x}^{(0)}$ — початкове наближення, задано.

Теорема: Ітераційний процес збігається, тобто

$$\left|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \tag{5}$$

якщо

$$|B| \leq q < 1. \tag{6}$$

При цьому має місце оцінка

$$\left|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}\right| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \left|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\right|. \tag{7}$$

4.1.2. Метод Якобі

Припустимо $\forall i$: $a_{i,i} \neq 0$. Зведемо систему (1) до вигляду

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \tag{8}$$

де $i = \overline{1, n}$.

Ітераційний процес запишемо у вигляді

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \tag{9}$$

де $k = 0, 1, \ldots$, а $i = \overline{1, n}$.

Теорема: Ітераційний процес збігається до розв'язку, якщо виконується умова

$$\forall i: \sum_{j=1\ i \neq j}^{n} |a_{i,j}| \leq |a_{i,i}|. \tag{10}$$

Це умова діагональної переваги матриці A.

Теорема: Якщо ж

$$\forall i: \sum_{j=1\ i\neq j}^{n} |a_{i,j}| \leq q \cdot |a_{i,i}|, \quad 0 \leq q < 1. \tag{11}$$

то має місце оцінка точності:

$$\left|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}\right| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \left|\vec{x}^{(0)} - \vec{x}\right|. \tag{12}$$

4.1.3. Метод Зейделя

В компонентному вигляді ітераційний метод Зейделя записується так:

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \tag{13}$$

де $k = 0, 1, \ldots$, а $i = \overline{1, n}$.

На відміну від методу Якобі на k-му-кроці попередні компоненти розв'язку беруться з $(k+1)$-ої ітерації.

Теорема: Достатня умова збіжності методу Зейделя — $A^{\intercal} = A > 0$.

4.1.4. Матрична інтерпретація методів Якобі і Зейделя

Подамо матрицю A у вигляді

$$A = A_1 + D + A_2, \tag{14}$$

де A_1 — нижній трикутник матриці A, A_2 — верхній трикутник матриці A, D — її діагональ. Тоді систему (1) запишемо у вигляді

$$D\vec{x} = A_1\vec{x} + A_2\vec{x} + \vec{b}, \tag{15}$$

або

$$\vec{x} = D^{-1}A_1\vec{x} + D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{b}, \tag{16}$$

Матричний запис методу Якобі:

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}A_1\vec{x}^{(k)} + D^{-1}A_2\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}, \tag{17}$$

методу Зейделя:

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}A_1\vec{x}^{(k+1)} + D^{-1}A_2\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}, \tag{18}$$

Теорема: Необхідна і достатня умова збіжності методу Якобі: всі корені рівняння

$$\det(D + \lambda(A_1 + A_2)) = 0 \tag{19}$$

по модулю більше 1.

Теорема: Необхідна і достатня умова збіжності методу Зейделя: всі корені рівняння

$$\det(A_1 + D + \lambda A_2) = 0 \tag{20}$$

по модулю більше 1.

4.1.5. Однокрокові (двошарові) ітераційні методи

Канонічною формою однокрокового ітераційного методу розв'язку СЛАР є його запис у вигляді

$$B_k \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\tau_{k+1}} + A\vec{x}^{(k)} = \vec{b}, \tag{21}$$

Тут $\{B_k\}$ — послідовність матриць (пере-обумовлюючі матриці), що задають ітераційний метод на кожному кроці; $\{\tau_{k+1}\}$ — ітераційні параметри.

Означення: Якщо $B_k = E$, то ітераційний процес називається *явним*

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \tau_{k+1}\left(A\vec{x}^{(k)} + \vec{b}\right). \tag{22}$$

Означення: Якщо $B_k \neq E$, то ітераційний процес називається *неявним*

$$B_k\vec{x}^{(k+1)} = F^k. \tag{23}$$

У цьому випадку на кожній ітерації необхідно розв'язувати СЛАР.

Означення: Якщо $\tau_{k+1} \equiv \tau$, $B_k \equiv B$, то ітераційний процес називається *стаціонарним*; інакше — *нестаціонарним*.

Методам, що розглянуті вище відповідають:

- методу простої ітерації: $B_k = E$, $\tau_{k+1} = \tau$;
- методу Якобі: $B_k = D$, $\tau_{k+1} = 1$;

- методу Зейделя: $B_k = D + A_1$, $\tau_{k+1} = 1$.

4.1.6. Збіжності стаціонарних ітераційних процесів у випадку симетричних матриць

Розглянемо випадок симетричних матриць $A^{\mathsf{T}} = A$ і стаціонарний ітераційний процес $B_k \equiv E$, $\tau_{k+1} \equiv \tau$.

Нехай для A справедливі нерівності

$$\gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0. \tag{24}$$

Тоді при виборі $\tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ ітераційний процес збігається. Найбільш точним значенням γ_1, γ_2 при яких виконуються обмеження (24) є $\gamma_1 = \min \lambda_i(A)$, $\gamma_2 = \max \lambda_i(A)$. Тоді

$$q = q_0 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \tag{25}$$

і справедлива оцінка

$$\left| \vec{x}^{(n)} - \vec{x} \right| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot \left| \vec{x}^{(0)} - \vec{x} \right|. \tag{26}$$

> **Зауваження**: аналогічно обчислюється q і для методу релаксації розв'язання нелінійних рівнянь, де $\gamma_1 = m = \min |f'(x)|$, $\gamma_2 = M_1 = \max |f'(x)|$.

Явний метод з багатьма параметрами $\{\tau_k\}$:

$$B \equiv E, \quad \tau_k : \min_{\tau} q(\tau), \quad n = n(\epsilon) \to \min, \tag{27}$$

які обчислюються за допомогою нулів багаточлена Чебишова, називаються ітераційним методом з чебишевським набором

параметрів.

4.1.7. Метод верхньої релаксації

Узагальненням методу Зейделя є метод верхньої релаксації:

$$(D + \omega A_1) \cdot \frac{\vec{x}^{(k+1)} + \vec{x}^{(k)}}{\omega} + A\vec{x}^{(k)} = \vec{b}, \tag{28}$$

де D — діагональна матриця з елементами $a_{i,i}$ по діагоналі. $\omega > 0$ — заданий числовий параметр.

Тепер $B = D + \omega A_1$, $\tau = \omega$. Якщо $A^{\mathsf{T}} = A > 0$, то метод верхньої релаксації збігається при умові $0 < \omega < 2$. Параметр підбирається експериментально з умови мінімальної кількості ітерацій.

4.1.8. Методи варіаційного типу

До цих методів відносяться: метод мінімальних нев'язок, метод мінімальних поправок, метод найшвидшого спуску, метод спряжених градієнтів. Вони дозволяють обчислювати наближення без використання апріорної інформації про γ_1, γ_2 в (24).

Нехай $B = E$. Для методу мінімальних нев'язок параметри τ_{k+1} обчислюються з умови

$$\begin{gathered} \left|\vec{r}^{(k+1)}\right|^2 = \left|\vec{r}^{(k)}\right|^2 - 2\tau_{k+1} \cdot \left\langle \vec{r}^{(k)}, A\vec{r}^{(k)} \right\rangle + \\ + \tau_{k+1}^2 \cdot \left|A\vec{r}^{(k)}\right|^2 \to \min. \end{gathered} \tag{29}$$

Тому

$$\tau_{k+1} = \frac{\left\langle A\vec{r}^{(k)}, \vec{r}^{(k)} \right\rangle}{\left|\vec{r}^{(k)}\right|^2}, \tag{30}$$

де $\vec{r}^{(k)} = A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}$ — нев'язка.

Умова для завершення ітераційного процесу:

$$\left|\vec{r}^{(n)}\right| < \epsilon. \tag{31}$$

Швидкість збіжності цього методу співпадає із швидкістю методу простої ітерації з одним оптимальним параметром $\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$.

Аналогічно будуються методи з $B \neq E$. Матриця B називається переобумовлювачем і дозволяє підвищити швидкість збіжності ітераційного процесу. Його вибирають з умов

- легко розв'язувати СЛАР $B\vec{x}^{(k)} = F_k$ (діагональний, трикутній, добуток трикутніх та інше);
- зменшення числа обумовленості матриці $B^{-1}A$ у порівнянні з A.

4.2. Методи розв'язання нелінійних систем

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 209–213: djvu, pdf;

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Перепишемо її у векторному вигляді:

$$\vec{f}\,(\vec{x}) = 0. \tag{33}$$

4.2.1. Метод простої ітерації

В цьому методі рівняння (33) зводиться до еквівалентного вигляду

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x}). \tag{34}$$

Ітераційний процес представимо у вигляді:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{\Phi}\left(\vec{x}^{(k)}\right). \tag{35}$$

початкове наближення $\vec{x}^{(0)}$ — задано.

Нехай оператор $\vec{\Phi}$ визначений на множині H. За теоремою про стискуючі відображення ітераційний процес (35) сходиться, якщо виконується умова

$$\left|\vec{\Phi}(\vec{x}) - \vec{\Phi}(\vec{y})\right| \leq q \cdot |\vec{x} - \vec{y}|, \quad 0 < q < 1, \tag{36}$$

або

$$\left|\vec{\Phi}'(\vec{x})\right| \leq q < 1, \tag{37}$$

де $\vec{x} \in U_r$, $\vec{\Phi}'(\vec{x}) = \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$. Для похибки справедлива оцінка

$$\left|\vec{x}^{(m)} - \vec{x}\right| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \left|\vec{x}^{(0)} - \vec{x}\right|. \tag{38}$$

Частинним випадком методу простої ітерації є метод релаксації для рівняння (33):

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \tau \cdot \vec{F}\left(\vec{x}^{(k)}\right), \tag{39}$$

де $\tau < 2/\left\|\vec{F}'(\vec{x})\right\|$.

4.2.2. Метод Ньютона

Розглянемо рівняння

$$\vec{F}(\vec{x}) = 0. \tag{40}$$

Представимо його у вигляді

$$\vec{F}\left(\vec{x}^{(k)}\right) + \vec{F}'\left(\vec{\xi}^{(k)}\right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\right) = 0, \tag{41}$$

де

$$\vec{\xi}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} + \theta_k \cdot \left(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right), \tag{42}$$

де $0 < \theta_k < 1$. Тут $\vec{F}'(\vec{x}) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ — матриця Якобі для $\vec{F}(\vec{x})$. Можемо наближено вважати $\vec{\xi}^{(k)} \approx \vec{x}^{(k)}$. Тоді з (41)

матимемо

$$\vec{F}\left(\vec{x}^{(k)}\right) + \vec{F}'\left(\vec{x}^{(k)}\right) \cdot \left(\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\right) = 0. \tag{43}$$

Ітераційний процес представимо у вигляді:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{F}'\left(\vec{x}^{(k)}\right)^{-1} \cdot \vec{F}\left(\vec{x}^{(k)}\right). \tag{44}$$

Для реалізації методу Ньютона потрібно, щоб існувала обернена матриця

$$\vec{F}'\left(\vec{x}^{(k)}\right)^{-1}. \tag{45}$$

Можна не шукати обернену матрицю, а розв'язувати на кожній ітерації СЛАР

$$\begin{aligned} A_k \vec{z}^{(k)} &= \vec{F}\left(\vec{x}^{(k)}\right), \\ \vec{x}^{(k+1)} &= \vec{x}^{(k)} - \vec{z}^{(k)}, \end{aligned} \tag{46}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$, і $\vec{x}^{(0)}$ — задано, а матриця $A_k = \vec{F}'\left(\vec{x}^{(k)}\right)$.

Метод має квадратичну збіжність, якщо добре вибрано початкове наближення. Складність методу (при умові використання методу Гаусса розв'язання СЛАР (46) на кожній ітерації $Q_n = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$, де n — розмірність системи (33).

4.2.3. Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес має вигляд:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{F}'\left(\vec{x}^{(0)}\right)^{-1} \cdot \vec{F}\left(\vec{x}^{(k)}\right). \tag{47}$$

Тепер обернена матриця обчислюється тільки на нульовій ітерації. На інших — обчислення нового наближення зводиться до множення матриці $A_0 = \vec{F}'\left(\vec{x}^{(0)}\right)^{-1}$ на вектор $\vec{F}\left(\vec{x}^{(k)}\right)$ та додавання до $\vec{x}^{(k)}$.

Запишемо метод у вигляді системи лінійних рівнянь (аналог (46))

$$\begin{aligned} A_0\vec{z}^{(k)} &= \vec{F}\left(\vec{x}^{(k)}\right), \\ \vec{x}^{(k+1)} &= \vec{x}^{(k)} - \vec{z}^{(k)}, \end{aligned} \tag{48}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Оскільки матиця A_0 розкладається на трикутні (або обертається) один раз, то складність цього методу на одній ітерації (окрім нульової) $Q_n = O(n^2)$. Але цей метод має лінійну швидкість збіжності.

Можливе циклічне застосування модифікованого методу Ньютона, тобто коли обернену матрицю похідних шукаємо та обертаємо через певне число кроків ітераційного процесу.

> **Задача 9**: Побудувати аналог методу січних для систем нелінійних рівнянь.

Назад до лекцій

Назад на головну

numerical-analysis is maintained by csc-knu.
© 2019 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Андрій Риженко, Скибицький Нікіта