$termvar, x, y, z, f, r, ys$
$typevar, X, Y, Z$
$index, i, j, k$

$$
\begin{array}{llll}
t,\ c,\ s & ::= & & \\
& | & x & \\
& | & \mathsf{triv} & \\
& | & \mathsf{box} & \\
& | & \mathsf{unbox} & \\
& | & \mathsf{error}_A & \\
& | & \mathsf{error} & \\
& | & \Lambda(X <: A).t & \\
& | & [A]t & \\
& | & \lambda(x : A).t & \\
& | & t_1\ t_2 & \\
& | & (t_1, t_2) & \\
& | & \mathsf{fst}\ t & \\
& | & \mathsf{snd}\ t & \\
& | & \mathsf{inj}_1\ t & \\
& | & \mathsf{inj}_2\ t & \\
& | & \mathsf{succ}\ t & \\
& | & 0 & \\
& | & \mathsf{case}\ t : A\ \mathsf{of}\ t_3 \to t_1, t_4 \to t_2 & \\
& | & \mathsf{case}\ t : A\ \mathsf{of}\ t_3 : B \to t1, t_4 : C \to t_2 & \\
& | & [] & \\
& | & t :: t' & \\
& | & (t) & \mathsf{S} \\
& | & \mathsf{squash} & \\
& | & \mathsf{split} & \\
\\
n,\ m & ::= & & \\
& | & 0 & \\
& | & \mathsf{succ}\ n & \\
\\
v & ::= & & \\
& | & \mathsf{triv} & \\
& | & [] & \\
& | & \mathsf{unbox}_A & \\
& | & \Lambda(X <: A).t & \\
& | & \lambda(x : A).t & \\
& | & n & \\
& | & \mathsf{case}\ t : A\ \mathsf{of}\ t_3 \to t_1, t_4 \to t_2 & \\
\\
\mathcal{E} & ::= & & \\
& | & \square & \\
& | & \mathcal{E}\ t_2 & \\
& | & \mathsf{unbox}_A\ \mathcal{E} & \\
& | & \mathsf{succ}\ \mathcal{E} & \\
& | & \mathsf{fst}\ \mathcal{E} & \\
& | & \mathsf{snd}\ \mathcal{E} & \\
& | & (\mathcal{E}, t) &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcll}
 & | & (t, \mathcal{E}) & \\
 & | & \mathsf{case}\, \mathcal{E} : A\, \mathsf{of}\ t_3 \rightarrow t_1, t_4 \rightarrow t_2 & \\
 & | & \mathcal{E} :: t_2 & \\
 & | & t_1 :: \mathcal{E} & \\
 & | & [A]\mathcal{E} & \\
\\
A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ S,\ U,\ K,\ T & ::= & & \\
 & | & X & \\
 & | & \top & \\
 & | & \mathsf{List}\, A & \\
 & | & \forall (X <: A).B & \\
 & | & \mathbb{S} & \\
 & | & \mathsf{Unit} & \\
 & | & \mathsf{Nat} & \\
 & | & ? & \\
 & | & 1 & \\
 & | & A_1 \rightarrow A_2 & \\
 & | & A_1 \times A_2 & \\
 & | & A_1 + A_2 & \\
 & | & (A) & \mathsf{S} \\
\\
\Gamma & ::= & & \\
 & | & . & \\
 & | & \Gamma, x : A & \\
 & | & x : A & \\
 & | & X <: A &
\end{array}
$$

$\boxed{\Gamma \vdash A <: B}$

$$\frac{}{\Gamma \vdash A <: A}\ \textsc{S\_Refl}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash A <: \top}\ \textsc{S\_Top}$$

$$\frac{X <: A \in \Gamma}{\Gamma \vdash X <: A}\ \textsc{S\_Var}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top <: \mathbb{S}}\ \textsc{S\_TopSL}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{Nat} <: \mathbb{S}}\ \textsc{S\_NatSL}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{Unit} <: \mathbb{S}}\ \textsc{S\_UnitSL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A <: \mathbb{S}}{\Gamma \vdash \mathsf{List}\, A <: \mathbb{S}}\ \textsc{S\_ListSL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A <: \mathbb{S} \quad \Gamma \vdash B <: \mathbb{S}}{\Gamma \vdash A \rightarrow B <: \mathbb{S}}\ \textsc{S\_ArrowSL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A <: \mathbb{S} \quad \Gamma \vdash B <: \mathbb{S}}{\Gamma \vdash A \times B <: \mathbb{S}}\ \textsc{S\_ProdSL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A <: \mathbb{S} \quad \Gamma \vdash B <: \mathbb{S}}{\Gamma \vdash A + B <: \mathbb{S}}\ \textsc{S\_SumSL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A <: B}{\Gamma \vdash \mathsf{List}\, A <: \mathsf{List}\, B}\ \textsc{S\_List}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 <: A_2 \quad \Gamma \vdash B_1 <: B_2}{\Gamma \vdash A_1 \times B_1 <: A_2 \times B_2} \quad \text{S\_Prod}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 <: A_2 \quad \Gamma \vdash B_1 <: B_2}{\Gamma \vdash A_1 + B_2 <: A_2 + B_2} \quad \text{S\_Sum}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_2 <: A_1 \quad \Gamma \vdash B_1 <: B_2}{\Gamma \vdash A_1 \to B_1 <: A_2 \to B_2} \quad \text{S\_Arrow}$$

$$\frac{\Gamma, X <: A \vdash B_1 <: B_2}{\Gamma \vdash \forall (X <: A).B_1 <: \forall (X <: A).B_2} \quad \text{S\_Forall}$$

$\boxed{\Gamma_1 \sqsubseteq \Gamma_2}$

$$\frac{}{\Gamma \sqsubseteq \Gamma} \quad \text{CtxP\_refl}$$

$$\frac{\Gamma_1 \sqsubseteq \Gamma_2 \quad A \sqsubseteq A' \quad \Gamma_3 \sqsubseteq \Gamma_4}{\Gamma_1, x : A, \Gamma_3 \sqsubseteq \Gamma_2, x : A', \Gamma_4} \quad \text{CtxP\_ext}$$

$\boxed{A \sqsubseteq B}$

$$\frac{\Gamma \vdash A <: \mathbb{S}}{A \sqsubseteq ?} \quad \text{P\_U}$$

$$\frac{}{A \sqsubseteq A} \quad \text{P\_refl}$$

$$\frac{A \sqsubseteq C \quad B \sqsubseteq D}{(A \to B) \sqsubseteq (C \to D)} \quad \text{P\_arrow}$$

$$\frac{A \sqsubseteq C \quad B \sqsubseteq D}{(A \times B) \sqsubseteq (C \times D)} \quad \text{P\_prod}$$

$$\frac{A \sqsubseteq C \quad B \sqsubseteq D}{(A + B) \sqsubseteq (C + D)} \quad \text{P\_sum}$$

$$\frac{A \sqsubseteq B}{(\mathsf{List}\ A) \sqsubseteq (\mathsf{List}\ B)} \quad \text{P\_list}$$

$$\frac{B_1 \sqsubseteq B_2}{(\forall (X <: A).B_1) \sqsubseteq (\forall (X <: A).B_2)} \quad \text{P\_forall}$$

$\boxed{\Gamma \vdash t \sqsubseteq t'}$

$$\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x \sqsubseteq x} \quad \text{TP\_var}$$

$$\frac{S_1 \sqsubseteq S_2}{\Gamma \vdash \mathsf{split}_{S_1} \sqsubseteq \mathsf{split}_{S_2}} \quad \text{TP\_split}$$

$$\frac{S_1 \sqsubseteq S_2}{\Gamma \vdash \mathsf{squash}_{S_1} \sqsubseteq \mathsf{squash}_{S_2}} \quad \text{TP\_squash}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{box} \sqsubseteq \mathsf{box}} \quad \text{TP\_box}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{unbox} \sqsubseteq \mathsf{unbox}} \quad \text{TP\_unbox}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash 0 \sqsubseteq 0} \quad \text{TP\_nat}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{triv} \sqsubseteq \mathsf{triv}} \quad \text{TP\_TRIV}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash [] \sqsubseteq []} \quad \text{TP\_EMPTY}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_2}{\Gamma \vdash (\mathsf{succ}\ t_1) \sqsubseteq (\mathsf{succ}\ t_2)} \quad \text{TP\_SUCC}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_4 \quad \Gamma \vdash t_2 \sqsubseteq t_5 \quad \Gamma, x : \mathsf{Nat} \vdash t_3 \sqsubseteq t_6}{\Gamma \vdash (\mathsf{case}\ t_1 : \mathsf{Nat}\ \mathsf{of}\ 0 \to t_2, (\mathsf{succ}\ x) \to t_3) \sqsubseteq (\mathsf{case}\ t_4 : \mathsf{Nat}\ \mathsf{of}\ 0 \to t_5, (\mathsf{succ}\ x) \to t_6)} \quad \text{TP\_NATE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_3 \quad \Gamma \vdash t_2 \sqsubseteq t_4}{\Gamma \vdash (t_1, t_2) \sqsubseteq (t_3, t_4)} \quad \text{TP\_PAIR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_2}{\Gamma \vdash (\mathsf{fst}\ t_1) \sqsubseteq (\mathsf{fst}\ t_2)} \quad \text{TP\_FST}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_2}{\Gamma \vdash (\mathsf{snd}\ t_1) \sqsubseteq (\mathsf{snd}\ t_2)} \quad \text{TP\_SND}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_2}{\Gamma \vdash (\mathsf{inj}_1 t_2) \sqsubseteq (\mathsf{inj}_1 t_2)} \quad \text{TP\_INJ1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_2}{\Gamma \vdash (\mathsf{inj}_2 t_2) \sqsubseteq (\mathsf{inj}_2 t_2)} \quad \text{TP\_INJ2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_3 \quad \Gamma \vdash t_2 \sqsubseteq t_4}{\Gamma \vdash (t_1 :: t_2) \sqsubseteq (t_3 :: t_4)} \quad \text{TP\_CONS}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_4 \quad \Gamma \vdash t_2 \sqsubseteq t_5 \quad \Gamma, x : A_2, y : \mathsf{List}\ A_2 \vdash t_3 \sqsubseteq t_6 \quad A_1 \sqsubseteq A_2}{\Gamma \vdash (\mathsf{case}\ t_1 : \mathsf{List}\ A_1\ \mathsf{of}\ [] \to t_2, (x :: y) \to t_3) \sqsubseteq (\mathsf{case}\ t_4 : \mathsf{List}\ A_2\ \mathsf{of}\ 0 \to t_5, (x :: y) \to t_6)} \quad \text{TP\_LISTE}$$

$$\frac{\Gamma, x : A_2 \vdash t_1 \sqsubseteq t_2 \quad A_1 \sqsubseteq A_2}{\Gamma \vdash (\lambda(x : A_1).t) \sqsubseteq (\lambda(x : A_2).t_2)} \quad \text{TP\_FUN}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_3 \quad \Gamma \vdash t_2 \sqsubseteq t_4}{\Gamma \vdash (t_1\ t_2) \sqsubseteq (t_3\ t_4)} \quad \text{TP\_APP}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : ?}{\Gamma \vdash (\mathsf{unbox}_A\ t) \sqsubseteq t} \quad \text{TP\_UNBOXING}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : A}{\Gamma \vdash t \sqsubseteq (\mathsf{box}_A\ t)} \quad \text{TP\_BOXING}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : ?}{\Gamma \vdash (\mathsf{split}_S\ t) \sqsubseteq t} \quad \text{TP\_SPLITING}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : S}{\Gamma \vdash t \sqsubseteq (\mathsf{squash}_S\ t)} \quad \text{TP\_SQUASHING}$$

$$\frac{\Gamma, X <: A \vdash t_1 \sqsubseteq t_2}{\Gamma \vdash (\Lambda(X <: A).t_1) \sqsubseteq (\Lambda(X <: A).t_2)} \quad \text{TP\_TFUN}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 \sqsubseteq t_2 \quad A \sqsubseteq B}{\Gamma \vdash [A]t_1 \sqsubseteq [B]t_2} \quad \text{TP\_TAPP}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : B \quad A \sqsubseteq B}{\Gamma \vdash \mathsf{error}_A \sqsubseteq t} \quad \text{TP\_ERROR}$$

$\boxed{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : A}$

$$\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} x : A}\ \text{T\_varP}$$

$$\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} x : A}\ \text{T\_var}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{box}_A : A \to ?}\ \text{T\_Box}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{unbox}_A : ? \to A}\ \text{T\_Unbox}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{box} : \forall (X <: \mathbb{S}).(X \to ?)}\ \text{T\_BoxP}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{unbox} : \forall (X <: \mathbb{S}).(? \to X)}\ \text{T\_UnboxP}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{squash}_S : S \to ?}\ \text{T\_squash}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{split}_S : ? \to S}\ \text{T\_split}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}}\ \text{T\_unitP}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} 0 : \mathsf{Nat}}\ \text{T\_zeroP}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{succ}\, t : \mathsf{Nat}}\ \text{T\_succ}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : \mathsf{Nat} \\ \Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t_1 : A \quad \Gamma, x : \mathsf{Nat} \vdash_{\mathsf{CG}} t_2 : A\end{array}}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{case}\, t \colon \mathsf{Nat}\, \mathsf{of}\, 0 \to t_1, (\mathsf{succ}\, x) \to t_2 : A}\ \text{T\_ncase}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : A + B \\ \Gamma, x : A \vdash_{\mathsf{CG}} t_1 : C \quad \Gamma, y : B \vdash_{\mathsf{CG}} t_2 : C\end{array}}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{case}\, t \colon A + B\, \mathsf{of}\, x \colon A \to t1, y \colon B \to t_2 : C}\ \text{T\_sumcase}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} [] : \forall (X <: \top).\mathsf{List}\, X}\ \text{T\_empty}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t_1 : A \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t_2 : \mathsf{List}\, A}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t_1 :: t_2 : \mathsf{List}\, A}\ \text{T\_cons}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t_1 : B \\ \Gamma, x : A, y : \mathsf{List}\, A \vdash_{\mathsf{CG}} t_2 : B \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : \mathsf{List}\, A\end{array}}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{case}\, t \colon \mathsf{List}\, A\, \mathsf{of}\, [] \to t_1, (x :: y) \to t_2 : B}\ \text{T\_lcase}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t_1 : A_1 \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t_2 : A_2}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} (t_1, t_2) : A_1 \times A_2}\ \text{T\_pair}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{fst}\, t : A_1}\ \text{T\_fst}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{snd}\, t : A_2}\ \text{T\_snd}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : A}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{inj}_1 t : A + B}\ \text{T\_inj1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : B}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{inj}_2 t : A + B}\ \text{T\_inj2}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathsf{CG}} t : B}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \lambda(x : A).t : A \to B} \quad \textsc{T\_lam}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t_1 : A \to B \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t_2 : A}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t_1\, t_2 : B} \quad \textsc{T\_app}$$

$$\frac{\Gamma, X <: A \vdash_{\mathsf{CG}} t : B}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \Lambda(X <: A).t : \forall(X <: A).B} \quad \textsc{T\_Lam}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : \forall(X <: B).C \quad \Gamma \vdash A <: B}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} [A]t : [A/X]C} \quad \textsc{T\_typeApp}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : A \quad \Gamma \vdash A <: B}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} t : B} \quad \textsc{T\_Sub}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{CG}} \mathsf{error}_A : A} \quad \textsc{T\_error}$$

$\boxed{t_1 \rightsquigarrow t_2}$ call by name

$$\frac{}{\mathsf{unbox}_A\,(\mathsf{box}_A\; t) \rightsquigarrow t} \quad \textsc{rd\_retracT}$$

$$\frac{A \neq B}{\mathsf{unbox}_A\,(\mathsf{box}_B\; t) \rightsquigarrow \mathsf{error}_A} \quad \textsc{rd\_retracTE}$$

$$\frac{}{\mathsf{split}_S\,(\mathsf{squash}_S\; t) \rightsquigarrow t} \quad \textsc{rd\_retractU}$$

$$\frac{x : B \vdash_{\mathsf{CG}} \mathcal{E}[x] : A}{\mathcal{E}[\mathsf{error}_B] \rightsquigarrow \mathsf{error}_A} \quad \textsc{rd\_error}$$

$$\frac{}{\mathsf{case}\, 0 \colon \mathsf{Nat}\, \mathsf{of}\; 0 \to t_1, (\mathsf{succ}\, x) \to t_2 \rightsquigarrow t_1} \quad \textsc{rd\_ncase0}$$

$$\frac{}{\mathsf{case}\,(\mathsf{succ}\, t) \colon \mathsf{Nat}\, \mathsf{of}\; 0 \to t_1, (\mathsf{succ}\, x) \to t_2 \rightsquigarrow [t/x]t_2} \quad \textsc{rd\_ncaseSucc}$$

$$\frac{}{\mathsf{case}\, \mathsf{inj}_1\, t \colon A + B\; \mathsf{of}\; x \colon A \to t1, y \colon B \to t_2 \rightsquigarrow [t/x]t_1} \quad \textsc{rd\_sumcase1}$$

$$\frac{}{\mathsf{case}\, \mathsf{inj}_2\, t \colon A + B\; \mathsf{of}\; x \colon A \to t1, y \colon B \to t_2 \rightsquigarrow [t/y]t_2} \quad \textsc{rd\_sumcase2}$$

$$\frac{}{\mathsf{case}\, [] \colon \mathsf{List}\, A\; \mathsf{of}\; [] \to t_1, (x :: y) \to t_2 \rightsquigarrow t_1} \quad \textsc{rd\_lcaseEmpty}$$

$$\frac{}{\mathsf{case}\,(t_1 :: t_2) \colon \mathsf{List}\, A\; \mathsf{of}\; [] \to t_3, (x :: y) \to t_4 \rightsquigarrow [t_1/x][t_2/y]t_4} \quad \textsc{rd\_lcaseCons}$$

$$\frac{}{(\lambda(x : A_1).t_2)\; t_1 \rightsquigarrow [t_1/x]t_2} \quad \textsc{rd\_beta}$$

$$\frac{}{\mathsf{fst}\,(t_1, t_2) \rightsquigarrow t_1} \quad \textsc{rd\_proj1}$$

$$\frac{}{\mathsf{snd}\,(t_1, t_2) \rightsquigarrow t_2} \quad \textsc{rd\_proj2}$$

$$\frac{}{[A](\Lambda(X <: B).t) \rightsquigarrow [A/X]t} \quad \textsc{rd\_typeBeta}$$

$$\frac{t_1 \rightsquigarrow t_2}{[A]t_1 \rightsquigarrow [A]t_2} \quad \textsc{rd\_typeApp}$$

$$\frac{t_1 \rightsquigarrow t_2}{\mathcal{E}[t_1] \rightsquigarrow \mathcal{E}[t_2]} \quad \textsc{rd\_Cong}$$

```
Definition rules:        93 good    0 bad
Definition rule clauses: 155 good    0 bad
```