Содержание

1 Введение

В этой работе рассмотрена качающаяся машина Атвуда, в которой один из грузов может совершать движения в двумерной плоскости (рис. 1). Блоки не имеют массы и трения, веревка не растяжима и также не имеет массы. Предполагается, что веревка достаточно длинная, чтобы противовес M не касался блока, с другой стороны мы даем качающемуся грузу m подниматься над горизонтальной линией и делать полные обороты вокруг блока, полагая, что веревка всегда остается в натяжении.

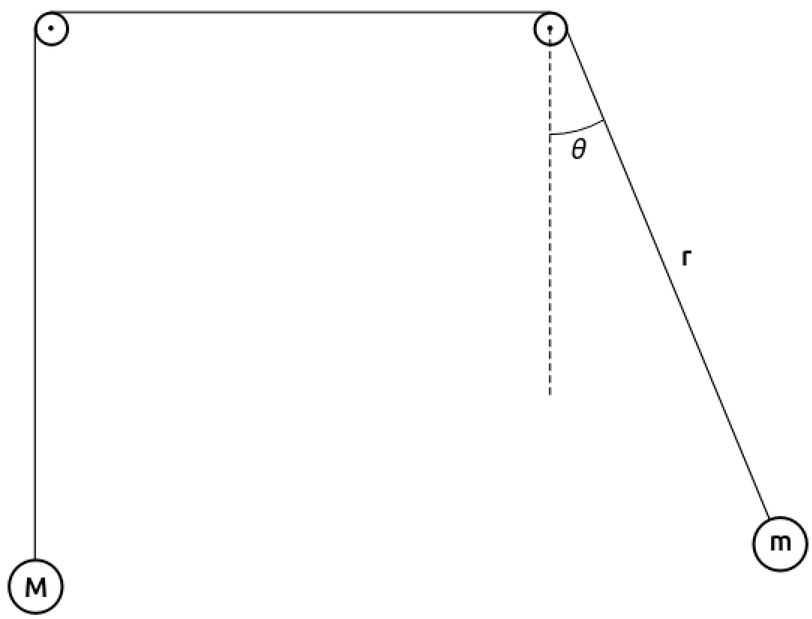

Рис. 1: Качающаяся машина Атвуда.

2 Теория

2.1 Уравнения движения

Качающаяся машина Атвуда имеет две степени свободы. В качестве координат возьмем r и θ, которые обозначены на рис. 1. Кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \tag{2.1}$$

потенциальная энергия системы (без произвольной постоянной):

$$V = gr(M - m\cos\theta), \tag{2.2}$$

где g – ускорение свободного падения. Функция Лагранжа системы ($L = T - V$), в таком случае, имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + gr(m\cos\theta - M). \tag{2.3}$$

Получим уравнения Эйлера-Лагранжа ($\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$):

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + g(m\cos\theta - M), \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -mgr\sin\theta. \end{cases} \tag{2.4}$$

Первое уравнение системы 2.4 — закон Ньютона в радиальном направлении. Второе уравнение говорит о том, что скорость изменения углового момента равна моменту силы тяжести.

Для упрощения определим:

$$\mu = \frac{M}{m}. \tag{2.5}$$

Тогда система 2.4 примет окончательный вид:

$$\begin{cases} (1+\mu)\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + g(\cos\theta - \mu); \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Движение качающейся машины Атвуда полностью описывается системой 2.6 и начальными условиями:

$$\begin{cases} r(0) = r_0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{r}(0) = \dot{r}_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

2.2 Закон сохранения энергии

Поскольку диссипативные силы отсутствуют, энергия системы

$$E = T + V = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + gr(M - m\cos\theta) \tag{2.8}$$

сохраняется.

Это можно также понять из функции Лагранжа системы, поскольку $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

2.3 Поведение системы

В зависимости от начальных условий и отношения масс μ, качающаяся масса описывает различные виды траекторий. Классифицируем их (с иллюстрациями из программы):

1. **Ограниченная траектория** (рис. 2): $r(t) < r_{max}\ \forall\, t \geqslant 0$. Траектория ограничена, если $M > m$. Доказательство этого факта приведено в статье [1]

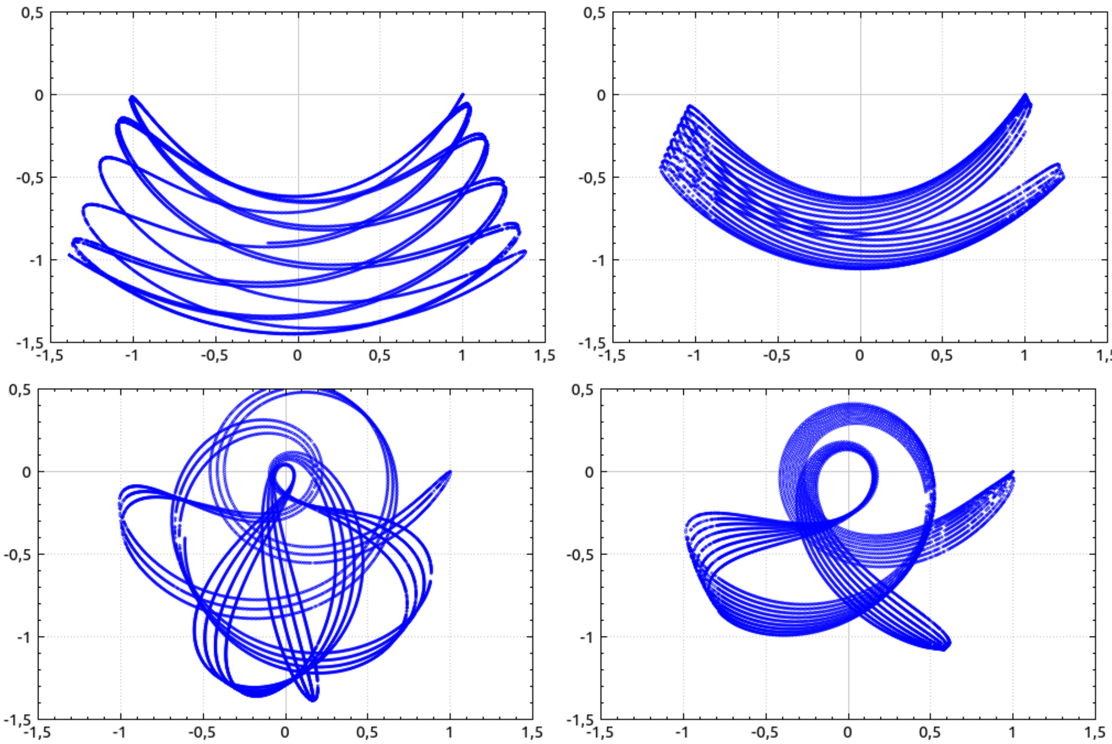

Рис. 2: Ограниченные (и несингулярные) траектории при $\mu = 1.4;\ 1.5;\ 3.5;\ 4.8$ и $\theta_0 = \pi/2$

2. **Периодическая траектория** (рис. 3):
$\exists \tau : \quad r(t+\tau) = r(t), \quad \theta(t+\tau) = \theta(t) \quad \forall\, t \geqslant 0.$

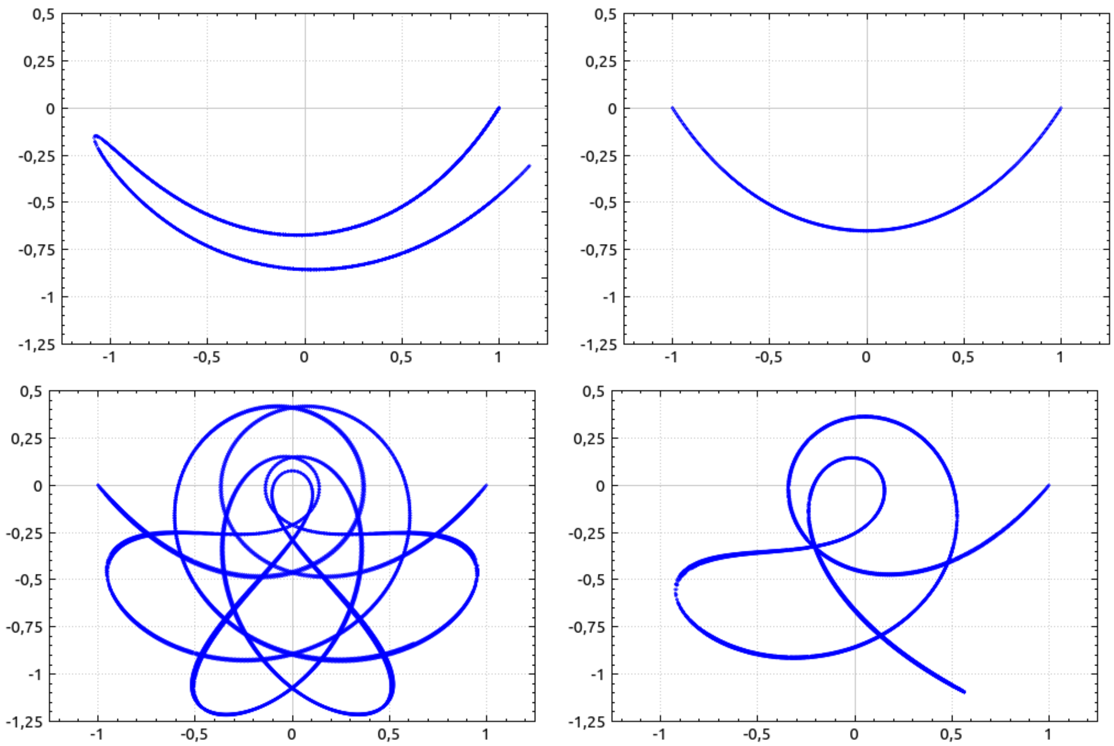

Рис. 3: Периодические траектории при $\mu = 1.555;\ 1.665;\ 4.175;\ 4.745$ и $\theta_0 = \pi/2$

3. **Сингулярная траектория** (рис. 4): $r(0) = 0$.
Будем называть траекторию сингулярной, если в какой-либо точке r обнуляется. Чтобы получить такую траекторию можно просто установить начальное значение $r(0) = 0$. Но поскольку система инвариантна относительно трансляций во времени мы всегда можем организовать всё так, что любая сингулярная траектория начинается в точке $r(0) = 0$.

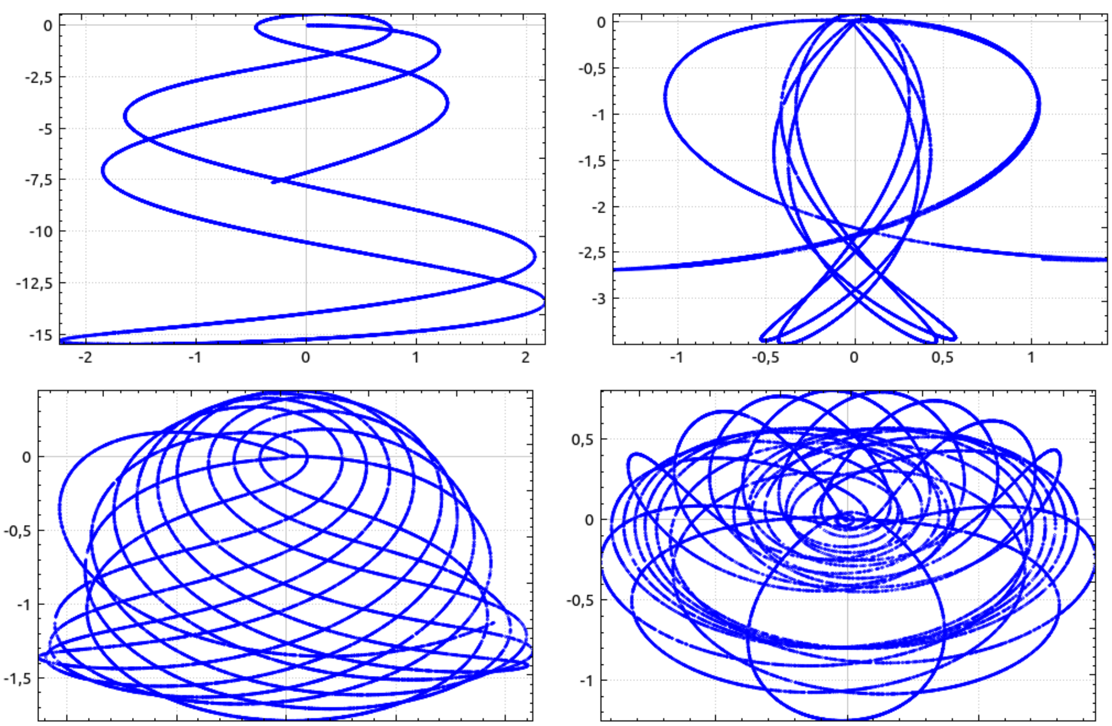

Рис. 4: Сингулярные траектории при $\mu = 1.1;\ \ 1.6;\ \ 2.3;\ \ 4.6$, $\theta_0 = \pi/2,\ \ \dot{r}(0) = 4$.

4. **Прекращающаяся сингулярная траектория** (рис. 5):
   $\exists \tau > 0: \quad r(\tau) = r(0) = 0$

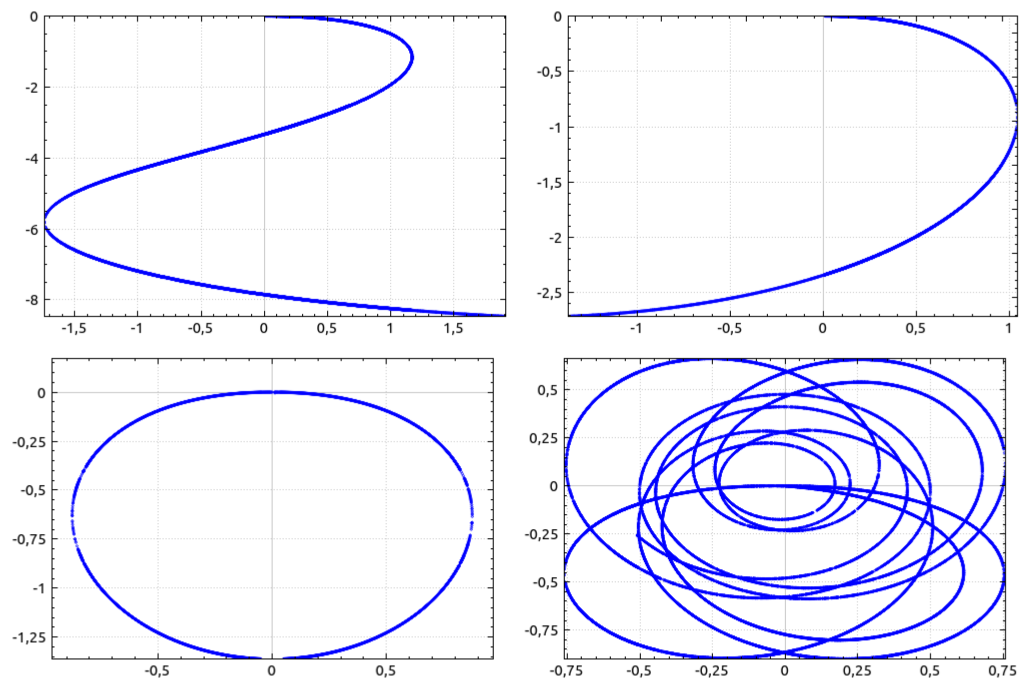

Рис. 5: Прекращающиеся сингулярные траектории при $\mu = 1.182;\ 1.594;\ 3;\ 8.120, \quad \theta_0 = \pi/2, \quad \dot{r}(0) = 4.$

3 Описание программы

В процессе работы программы происходит численное интегрирование предложенной системы дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутты четвертого порядка. В интерфейсе программы можно задавать значения параметров и наблюдать построение траектории, фазовых плоскостей и график относительной энергии системы.

3.1 Метод решения

Преобразуем уравнения 2.6, введя новые переменные: $p(t) = \dot{r}(t)$, $q(t) = \dot{\theta}(t)$. Тем самым мы придем к системе из четырех уравнений, разрешенных относительно производной:

$$\begin{cases} \dot{r} = p \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{p} = \frac{1}{(1+\mu)}(r\,q^2 + g(\cos\theta - \mu)) \\ \dot{q} = \dfrac{1}{r}(2\,p\,q - gsin\theta). \end{cases} \tag{3.1}$$

С начальными условиями:

$$\begin{cases} r(0) = r_0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ p(0) = \dot{r}_0 \\ q(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Для численного решения этой системы был применен метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

3.2 Интерфейс программы

Параметры, которые можно задавать в меню программы (рис. 6):

1. число шагов;
2. время движения;
3. отношение масс грузов;
4. начальный угол;

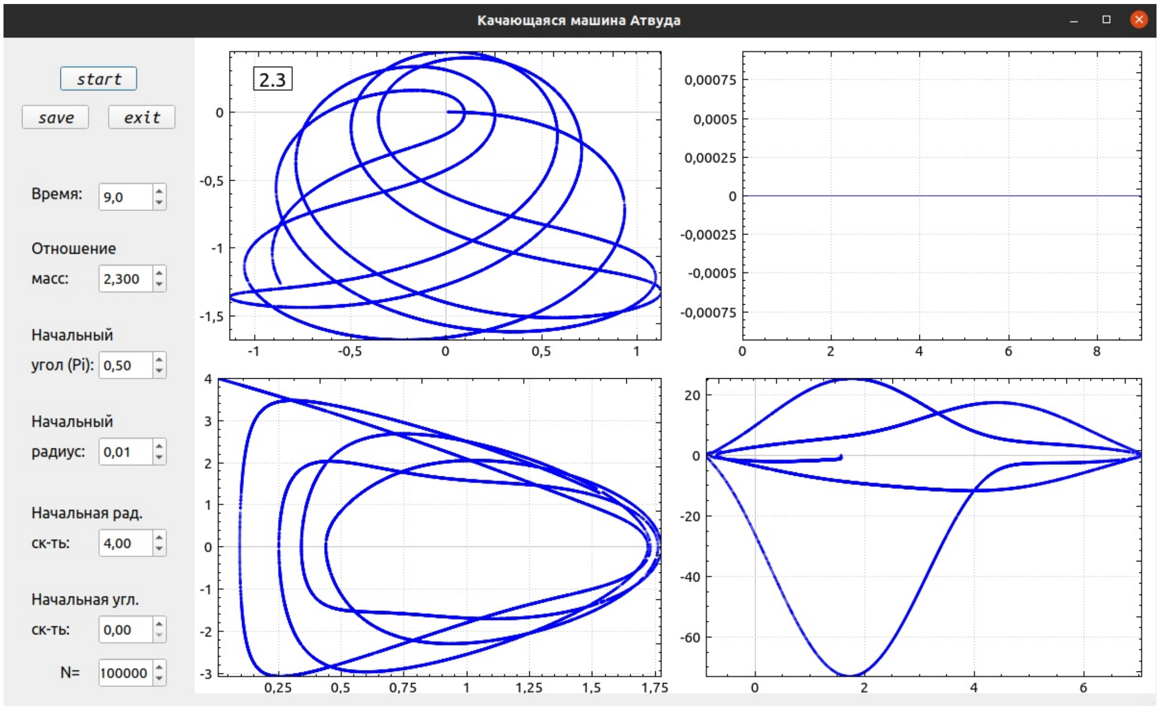

Рис. 6: Окно программы.

5. начальная длина нити;

6. начальная радиальная скорость;

7. начальная угловая скорость;

Графики, строящиеся в результате выполнения программы:

1. график траектории движения груза (слева сверху)

2. график зависимости относительного изменения энергии $\epsilon(t) = |100 * \frac{E(t)-E(0)}{E(0)}|$ от времени t (справа сверху)

3. фазовый портрет №1: зависимость $\dot{r}(t)$ от $r(t)$ (слева внизу)

4. фазовый портрет №2: зависимость $\dot{\theta}(t)$ от $\theta(t)$ (справа внизу)

Помимо этого в программе есть возможность сохранить полученные графики в формате PNG по нажатию кнопки "save".

4 Итоги работы

В ходе выполнения проекта:

1. Написана программа выполняющая численное решение системы дифференциальных уравнений, описывающих качающуюся машину Атвуда, методом Рунге–Кутты 4-го порядка.

2. Исследованы различные типы траекторий движения груза. Получены графики этих траекторий и фазовые портреты.

3. Достоверность полученных решений подтверждают графики относительной энергии, которые также строятся в программе.

Список литературы

[1] B. Tuffilaro, A. Abbot, and J. Griffits. Atwood's machine. American Journal of Physics, doi: 10.1119/1.13791, 1984.

[2] Л. Д. Ландау и Е. М Лифшиц. Теоретическая физика: Т.I Механика. Издательство Наука. 1988. — 216 с.

[3] Нефедов Н.Н., Попов В.Ю., Волков В.Т. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Курс лекций — М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2016. — 200 с.