

ME414 - Estatística para Experimentalistas

Probabilidade Condicional

Prof. Carlos Trucíos
ctrucios@unicamp.br
ctruciosm.github.io

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica,
Universidade Estadual de Campinas

Aula 8

Motivação

Probabilidade Condicional: Definição

Regra da Multiplicação

Teorema da Probabilidade Total

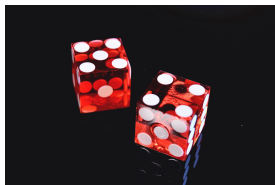
Teorema de Bayes

Independência

Motivação

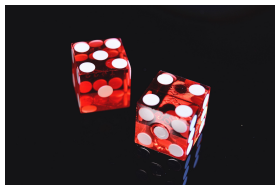
Motivação

Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obtermos um 8?



Motivação

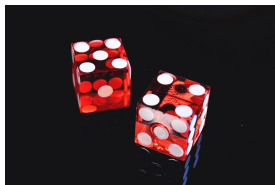
Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obtermos um 8?



► $S = \{(i, j) : i, j = 1, \dots, 6\}, N = 36$

Motivação

Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obtermos um 8?

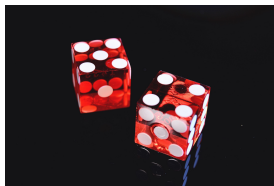


- ▶ $S = \{(i, j) : i, j = 1, \dots, 6\}, N = 36$
- ▶ Seja o evento A : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\},$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{36}$$

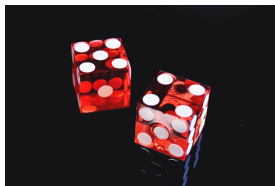
Motivação

Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probabilidade de obter um 8?



Motivação

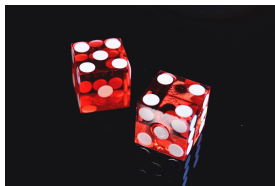
Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probabilidade de obter um 8?



► $S = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}, N = 6$

Motivação

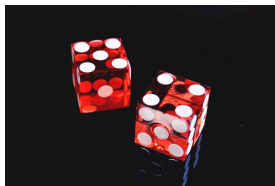
Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probabilidade de obter um 8?



- ▶ $S = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}, N = 6$
- ▶ B : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $B = \{(3, 5)\}$

Motivação

Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probabilidade de obter um 8?



- ▶ $S = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}, N = 6$
- ▶ B : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $B = \{(3, 5)\}$
- ▶

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{1}{6}$$

Motivação

Frequentemente, a probabilidade de um evento é influenciada pelo fato de um evento relacionado já ter ocorrido ou não.

Motivação

Frequentemente, a probabilidade de um evento é influenciada pelo fato de um evento relacionado já ter ocorrido ou não.

Por exemplo, sejam A e B dois eventos tais que:

- ▶ A : A soma da face superior em ambos os dados é 8,
- ▶ B : A face do primeiro dado é 3.

Motivação

Frequentemente, a probabilidade de um evento é influenciada pelo fato de um evento relacionado já ter ocorrido ou não.

Por exemplo, sejam A e B dois eventos tais que:

- ▶ A : A soma da face superior em ambos os dados é 8,
- ▶ B : A face do primeiro dado é 3.

Queremos a probabilidade de A acontecer, dado que B acontece. Denotamos esta probabilidade por,

$$P(A|B) \quad (\text{leia-se probabilidade de } A \text{ dado } B)$$

Motivação

Frequentemente, a probabilidade de um evento é influenciada pelo fato de um evento relacionado já ter ocorrido ou não.

Por exemplo, sejam A e B dois eventos tais que:

- ▶ A : A soma da face superior em ambos os dados é 8,
- ▶ B : A face do primeiro dado é 3.

Queremos a probabilidade de A acontecer, dado que B acontece.

Denotamos esta probabilidade por,

$$P(A|B) \quad (\text{leia-se probabilidade de } A \text{ dado } B)$$

Nosso conhecimento sobre A é atualizado dado nosso conhecimento sobre B .

Probabilidade Condicional: Definição

Probabilidade Condicional: Definição

Probabilidade Condicional

Sejam $A, B \subset S$, com $P(B) > 0$. Então a probabilidade condicional do evento A *dado* o evento B é dado por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

se $P(B) = 0$, $P(A|B) = P(A)$ ¹

¹Se $P(B) = 0$, alguns livros definem $P(A|B) = 0$

Probabilidade Condicional: Definição

Probabilidade Condicional

Sejam $A, B \subset S$, com $P(B) > 0$. Então a probabilidade condicional do evento A *dado* o evento B é dado por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

se $P(B) = 0$, $P(A|B) = P(A)$ ¹

Intuição: A ocorrência do evento B modifica o probabilidade de A acontecer (pois teremos em S apenas os casos onde B acontece).

¹Se $P(B) = 0$, alguns livros definem $P(A|B) = 0$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

$$\blacktriangleright P(A|B) = \frac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

$$\blacktriangleright P(A|B) = \frac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$$

$$\blacktriangleright P(S|B) = \frac{\overbrace{P(SB)}^{>0}}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

$$\blacktriangleright P(A|B) = \frac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$$

$$\blacktriangleright P(S|B) = \frac{\overbrace{P(SB)}^{>0}}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$\blacktriangleright P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i B)\right)}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

$$\blacktriangleright P(A|B) = \frac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$$

$$\blacktriangleright P(S|B) = \frac{\overbrace{P(SB)}^{>0}}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$\blacktriangleright P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i B)\right)}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

$$\blacktriangleright P(A|B) = \frac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$$

$$\blacktriangleright P(S|B) = \frac{\overbrace{P(SB)}^{>0}}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$\blacktriangleright P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i B)\right)}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

Probabilidade condicional satisfaz os 3 axiomas de Kolmogorov.

Exemplos

Suponha que, de todos os indivíduos que compram um celular pela internet:

- ▶ 60% incluem uma capinha protetora no carrinho de compras,
- ▶ 40% incluem um fone de ouvido e
- ▶ 30% incluem ambos (capinha e fone).

Se selecionarmos um indivíduo (que comprou celular) aleatoriamente

- a. Qual é a probabilidade do indivíduo ter comprado um fone de ouvido se soubermos que comprou uma capinha?
- b. Qual é a probabilidade do indivíduo ter comprado uma capinha se soubermos que comprou um fone de ouvido?

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- ▶ A : comprar fone
- ▶ B : comprar capinha

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- ▶ A : comprar fone
- ▶ B : comprar capinha

a. Queremos $P(A|B)$,

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- ▶ A : comprar fone
- ▶ B : comprar capinha

a. Queremos $P(A|B)$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = 1/2$$

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- ▶ A : comprar fone
- ▶ B : comprar capinha

a. Queremos $P(A|B)$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = 1/2$$

b. De forma analoga, $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. João extrai duas cartas aleatoriamente (sem reposição). Qual é a probabilidade da segunda carta ser vermelha se, a primeira carta foi vermelha?

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. João extrai duas cartas aleatoriamente (sem reposição). Qual é a probabilidade da segunda carta ser vermelha se, a primeira carta foi vermelha?

- ▶ Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. João extrai duas cartas aleatoriamente (sem reposição). Qual é a probabilidade da segunda carta ser vermelha se, a primeira carta foi vermelha?

- ▶ Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$
- ▶ Seja B : extrair uma carta vermelha na segunda extração

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. João extrai duas cartas aleatoriamente (sem reposição). Qual é a probabilidade da segunda carta ser vermelha se, a primeira carta foi vermelha?

- ▶ Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$
- ▶ Seja B : extrair uma carta vermelha na segunda extração
- ▶ De forma intuitiva: $P(B|A) = \frac{3}{4}$

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. João extrai duas cartas aleatoriamente (sem reposição). Qual é a probabilidade da segunda carta ser vermelha se, a primeira carta foi vermelha?

- ▶ Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$
- ▶ Seja B : extrair uma carta vermelha na segunda extração
- ▶ De forma intuitiva: $P(B|A) = \frac{3}{4}$
- ▶ Usando a definição:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4 \times 3}{5 \times 4}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- ▶ $0 \leq P(A|B) \leq 1$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- ▶ $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- ▶ $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- ▶ $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- ▶ $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
- ▶ $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- ▶ $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- ▶ $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
- ▶ $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$
- ▶ ...

Regra da Multiplicação

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

- ▶ (a) Sejam os eventos A e B . Então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

- ▶ (a) Sejam os eventos A e B . Então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

- ▶ (a) Sejam os eventos A e B . Então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

- ▶ (b) Sejam os eventos A_1, A_2, \dots, A_n . Então

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$$

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- ▶ Para 2 eventos é válida (parte a)

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- ▶ Para 2 eventos é válida (parte a)
- ▶ Supomos que vale para n ,

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- ▶ Para 2 eventos é válida (parte a)
- ▶ Supomos que vale para n ,

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- ▶ Para 2 eventos é válida (parte a)
- ▶ Supomos que vale para n ,

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$$

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- ▶ Para 2 eventos é válida (parte a)
- ▶ Supomos que vale para n ,

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$$

- ▶ Vamos provar para $n + 1$,

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- ▶ Para 2 eventos é válida (parte a)
- ▶ Supomos que vale para n ,

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$$

- ▶ Vamos provar para $n + 1$,

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- ▶ Para 2 eventos é válida (parte a)
- ▶ Supomos que vale para n ,

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$$

- ▶ Vamos provar para $n + 1$,

$$\begin{aligned} P(\underbrace{A_1 \dots A_n}_A \underbrace{A_{n+1}}_B) &= P(\underbrace{A_{n+1}}_B | \underbrace{A_1 \dots A_n}_A) P(\underbrace{A_1 \dots A_n}_A) \\ &= P(A_{n+1}|A_n \dots A_1)P(A_n|A_{n-1} \dots A_1) \dots P(A_1) \end{aligned}$$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro da UNICAMP precisam de sangue tipo O+. Quatro indivíduos (que não conhecem seu tipo sanguíneo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionados aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três indivíduos tenham que ser testados para a obtenção do tipo de sangue desejado?

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro da UNICAMP precisam de sangue tipo O+. Quatro indivíduos (que não conhecem seu tipo sanguíneo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três indivíduos tenham que ser testador para a obtenção do tipo de sangue desejado?

- ▶ Sejam os eventos A_i : o i -ésimo indivíduo não é O+.

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro da UNICAMP precisam de sangue tipo O+. Quatro indivíduos (que não conhecem seu tipo sanguíneo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três indivíduos tenham que ser testador para a obtenção do tipo de sangue desejado?

- ▶ Sejam os eventos A_i : o i -ésimo indivíduo não é O+.
- ▶ $P(A_1) = \frac{3}{4}$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro da UNICAMP precisam de sangue tipo O+. Quatro indivíduos (que não conhecem seu tipo sanguíneo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três indivíduos tenham que ser testador para a obtenção do tipo de sangue desejado?

- ▶ Sejam os eventos A_i : o i -ésimo indivíduo não é O+.
- ▶ $P(A_1) = \frac{3}{4}$
- ▶ $P(A_2|A_1) = \frac{2}{3}$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro da UNICAMP precisam de sangue tipo O+. Quatro indivíduos (que não conhecem seu tipo sanguíneo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três indivíduos tenham que ser testador para a obtenção do tipo de sangue desejado?

► Sejam os eventos A_i : o i -ésimo indivíduo não é O+.

► $P(A_1) = \frac{3}{4}$

► $P(A_2|A_1) = \frac{2}{3}$

► $P(\text{Testar pelo menos 3 indivíduos}) = P(A_1 \cap A_2) =$

$$P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = 0.5$$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- ▶ Seja o evento B : O terceiro individuo é O+

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- ▶ Seja o evento B : O terceiro individuo é O+



$$\begin{aligned}P(B) &= P(B \cap A_2 \cap A_1) \\&= P(B|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1) \\&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- ▶ Seja o evento B : O terceiro individuo é O+
- ▶

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B \cap A_2 \cap A_1) \\&= P(B|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1) \\&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- ▶ Seja o evento B : O terceiro individuo é O+
- ▶

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B \cap A_2 \cap A_1) \\&= P(B|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1) \\&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Dica

Quando o experimento consistir em uma sequência de diversas etapas, pode ser útil apresentá-lo em um diagrama de árvore.

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- ▶ Sejam os eventos A_i : a i -ésima extração é vermelha

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- ▶ Sejam os eventos A_i : a i -ésima extração é vermelha
- ▶ $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- ▶ Sejam os eventos A_i : a i -ésima extração é vermelha
- ▶ $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$
- ▶ $P(A_1) = \frac{3}{10} = 0.3$

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

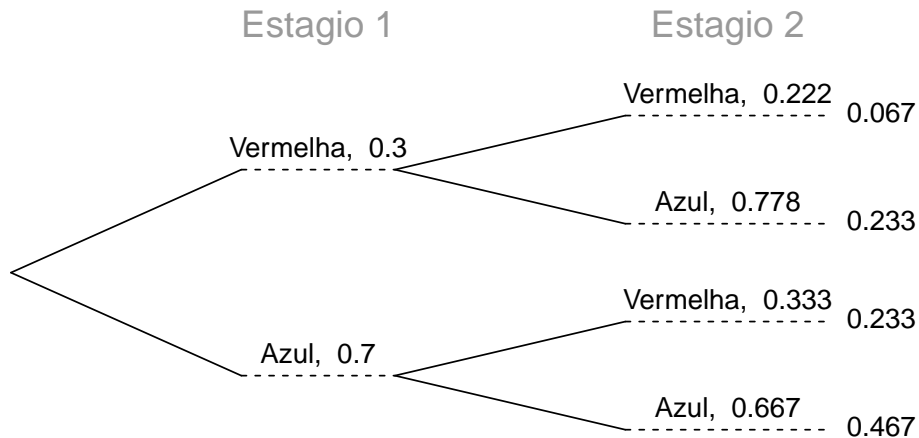
- ▶ Sejam os eventos A_i : a i -ésima extração é vermelha
- ▶ $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$
- ▶ $P(A_1) = \frac{3}{10} = 0.3$
- ▶ $P(A_2^c|A_1) = \frac{7}{9} = 0.778$

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- ▶ Sejam os eventos A_i : a i -ésima extração é vermelha
- ▶ $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$
- ▶ $P(A_1) = \frac{3}{10} = 0.3$
- ▶ $P(A_2^c|A_1) = \frac{7}{9} = 0.778$
- ▶ $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = 0.233$

Regra da Multiplicação: Exemplo



Teorema da Probabilidade Total

Teorema da Probabilidade Total

Teorema 2: Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos A_1, A_2, \dots, A_n que formam uma partição² de S . Então, para qualquer evento B ,

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n) = \sum_i^n P(B|A_i)P(A_i)$$

²Os eventos formam uma partição se são disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset$) e exaustivos ($\bigcup_i^n A_i = S$) simultaneamente.

Teorema da Probabilidade Total

Teorema 2: Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos A_1, A_2, \dots, A_n que formam uma partição² de S . Então, para qualquer evento B ,

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n) = \sum_i^n P(B|A_i)P(A_i)$$



²Os eventos formam uma partição se são disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset$) e exaustivos ($\bigcup_i^n A_i = S$) simultaneamente.

Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos C_1, \dots, C_9 que formam uma partição de S , e seja $A \subset S$.

Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos C_1, \dots, C_9 que formam uma partição de S , e seja $A \subset S$.

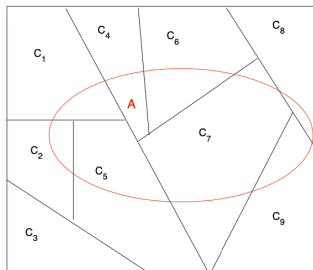


Figura 1: Source: An Introduction to the Science of Statistics (Joseph C. Watkins)

Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos C_1, \dots, C_9 que formam uma partição de S , e seja $A \subset S$.

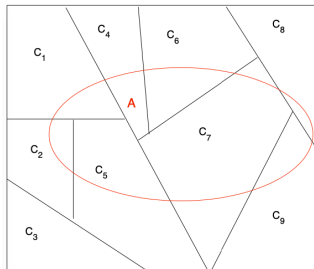


Figura 1: Source: An Introduction to the Science of Statistics (Joseph C. Watkins)

$$P(A) = \underbrace{P(A \cap C_1)}_{P(C_1)P(A/C_1)} + \underbrace{P(A \cap C_2)}_{P(C_2)P(A/C_2)} + \dots + \underbrace{P(A \cap C_9)}_{P(C_9)P(A/C_9)}$$

Teorema da Probabilidade Total: Demonstração

- ▶ Os eventos A_1, A_2, \dots, A_n formam uma partição de S

Teorema da Probabilidade Total: Demonstração

- ▶ Os eventos A_1, A_2, \dots, A_n formam uma partição de S
- ▶ $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots (B \cap A_n)}_{\text{Disjuntos}}$

Teorema da Probabilidade Total: Demonstração

- ▶ Os eventos A_1, A_2, \dots, A_n formam uma partição de S
- ▶ $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)}_{\text{Disjuntos}}$
- ▶ (Pelo A3) $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$

Teorema da Probabilidade Total: Demonstração

- ▶ Os eventos A_1, A_2, \dots, A_n formam uma partição de S
- ▶ $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)}_{\text{Disjuntos}}$
- ▶ (Pelo A3) $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$
- ▶ (Pelo T1) $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$

Teorema da Probabilidade Total: Demonstração

- ▶ Os eventos A_1, A_2, \dots, A_n formam uma partição de S
- ▶ $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)}_{\text{Disjuntos}}$
- ▶ (Pelo A3) $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$
- ▶ (Pelo T1) $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$
- ▶ $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- ▶ A_1 : a bola da primeira extração é vermelha

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- ▶ A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- ▶ A_2 : a bola da primeira extração é Azul

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- ▶ A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- ▶ A_2 : a bola da primeira extração é Azul
- ▶ B : a bola da segunda extração é azul

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- ▶ A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- ▶ A_2 : a bola da primeira extração é Azul
- ▶ B : a bola da segunda extração é azul
- ▶ $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- ▶ A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- ▶ A_2 : a bola da primeira extração é Azul
- ▶ B : a bola da segunda extração é azul
- ▶ $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

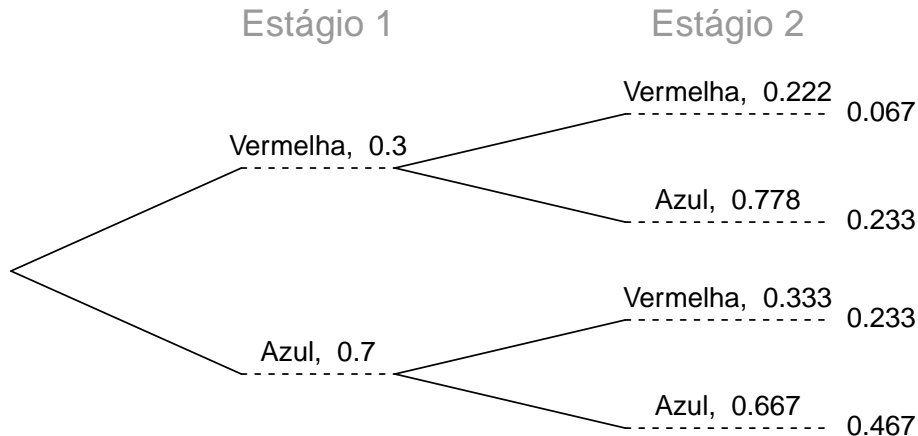
Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

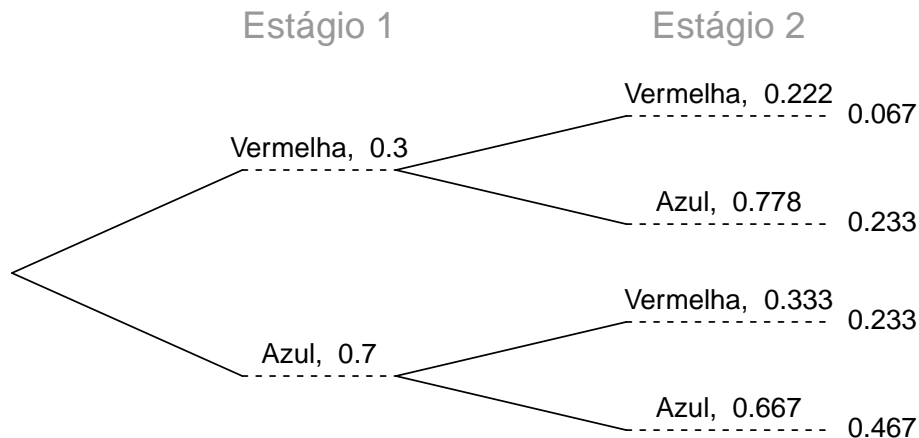
- ▶ A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- ▶ A_2 : a bola da primeira extração é Azul
- ▶ B : a bola da segunda extração é azul
- ▶ $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$

$$P(B) = \underbrace{P(A_1)}_{3/10} \underbrace{P(B|A_1)}_{7/9} + \underbrace{P(A_2)}_{7/10} \underbrace{P(B|A_2)}_{6/9} = \frac{3}{10} \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \frac{6}{9} = \frac{63}{90} = 0.7$$

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo



Teorema da Probabilidade Total: Exemplo



$$P(B) = 0.233 + 0.467 = 0.7$$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Teorema 3: Teorema de Bayes

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos que formam uma partição de S (i.e. são disjuntos e exaustivos) e seja B um evento qualquer com $P(B) > 0$. Então, $\forall i, i = 1, \dots, n$.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

Teorema de Bayes: Demonstração

► (Def): $P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: Demonstração

- ▶ (Def): $P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$
- ▶ (T1): $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$

Teorema de Bayes: Demonstração

- ▶ (Def): $P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$
- ▶ (T1): $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$
- ▶ (T2): $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$

Teorema de Bayes: Demonstração

- ▶ (Def): $P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$
- ▶ (T1): $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$
- ▶ (T2): $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$
- ▶ Logo,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

Teorema de Bayes: Exemplos

1. Suponha que o primeiro lote das telas da Mi Band 6 (smartwatch) são produzidas por três máquinas diferentes (M_1 , M_2 e M_3), sendo que 20% das telas são fabricadas pela M_1 , 30% pela M_2 e 50% pela M_3 . Suponha também que 1% das telas fabricadas pela M_1 , 2% das fabricadas pela M_2 e 3% das telas fabricas pela M_3 vem com defeito. Se selecionarmos aleatoriamente uma tela desse lote e está com defeito, qual é a probabilidade da tela ter sido produzida pela M_2

Teorema de Bayes: Exemplos

1. Suponha que o primeiro lote das telas da Mi Band 6 (smartwatch) são produzidas por três máquinas diferentes (M_1 , M_2 e M_3), sendo que 20% das telas são fabricadas pela M_1 , 30% pela M_2 e 50% pela M_3 . Suponha também que 1% das telas fabricadas pela M_1 , 2% das fabricadas pela M_2 e 3% das telas fabricadas pela M_3 vem com defeito. Se selecionarmos aleatoriamente uma tela desse lote e está com defeito, qual é a probabilidade da tela ter sido produzida pela M_2

Sejam os eventos

- A_i : A tela foi produzida pela máquina M_i

Teorema de Bayes: Exemplos

1. Suponha que o primeiro lote das telas da Mi Band 6 (smartwatch) são produzidas por três máquinas diferentes (M_1 , M_2 e M_3), sendo que 20% das telas são fabricadas pela M_1 , 30% pela M_2 e 50% pela M_3 . Suponha também que 1% das telas fabricadas pela M_1 , 2% das fabricadas pela M_2 e 3% das telas fabricadas pela M_3 vem com defeito. Se selecionarmos aleatoriamente uma tela desse lote e está com defeito, qual é a probabilidade da tela ter sido produzida pela M_2

Sejam os eventos

- ▶ A_i : A tela foi produzida pela máquina M_i
- ▶ B : A tela é defeituosa

Teorema de Bayes: Exemplos

1. Suponha que o primeiro lote das telas da Mi Band 6 (smartwatch) são produzidas por três máquinas diferentes (M_1 , M_2 e M_3), sendo que 20% das telas são fabricadas pela M_1 , 30% pela M_2 e 50% pela M_3 . Suponha também que 1% das telas fabricadas pela M_1 , 2% das fabricadas pela M_2 e 3% das telas fabricadas pela M_3 vem com defeito. Se selecionarmos aleatoriamente uma tela desse lote e está com defeito, qual é a probabilidade da tela ter sido produzida pela M_2

Sejam os eventos

- ▶ A_i : A tela foi produzida pela máquina M_i
- ▶ B : A tela é defeituosa
- ▶ Queremos $P(A_2|B)$

Teorema de Bayes: Exemplos

20% das Telas são da M_1 (1% são defeituosas), 30% das Telas são da M_2 (2% são defeituosas) e 50% das Telas são da M_3 (3% são defeituosas).

Teorema de Bayes: Exemplos

20% das Telas são da M_1 (1% são defeituosas), 30% das Telas são da M_2 (2% são defeituosas) e 50% das Telas são da M_3 (3% são defeituosas).

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

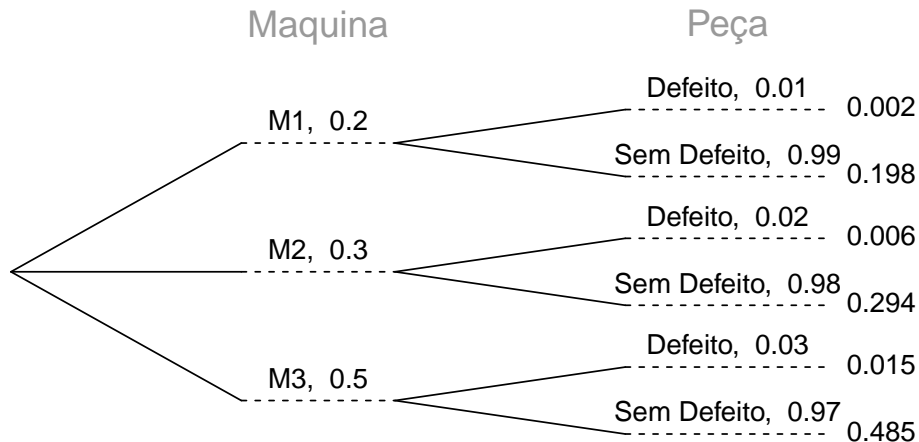
Teorema de Bayes: Exemplos

20% das Telas são da M_1 (1% são defeituosas), 30% das Telas são da M_2 (2% são defeituosas) e 50% das Telas são da M_3 (3% são defeituosas).

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$P(A_2|B) = \frac{0.3 \times 0.02}{0.2 \times 0.01 + 0.3 \times 0.02 + 0.5 \times 0.03} = 0.26$$

Teorema de Bayes: Exemplos



Independência

Independência

- ▶ Em geral, temos que $P(A|B) \neq P(A)$ (o conhecimento de B muda as chances de ocorrência do evento A)

Independência

- ▶ Em geral, temos que $P(A|B) \neq P(A)$ (o conhecimento de B muda as chances de ocorrência do evento A)
- ▶ Contudo, existe uma classe de eventos onde $P(A|B) = P(A)$, neste caso os eventos A e B são ditos independentes.

Independência

- ▶ Em geral, temos que $P(A|B) \neq P(A)$ (o conhecimento de B muda as chances de ocorrência do evento A)
- ▶ Contudo, existe uma classe de eventos onde $P(A|B) = P(A)$, neste caso os eventos A e B são ditos independentes.

Independência

- ▶ Em geral, temos que $P(A|B) \neq P(A)$ (o conhecimento de B muda as chances de ocorrência do evento A)
- ▶ Contudo, existe uma classe de eventos onde $P(A|B) = P(A)$, neste caso os eventos A e B são ditos independentes.

Definição: Independência

Os eventos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- ▶ Se A e B não são independentes, são chamados de dependentes.

Independência

- ▶ Em geral, temos que $P(A|B) \neq P(A)$ (o conhecimento de B muda as chances de ocorrência do evento A)
- ▶ Contudo, existe uma classe de eventos onde $P(A|B) = P(A)$, neste caso os eventos A e B são ditos independentes.

Definição: Independência

Os eventos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- ▶ Se A e B não são independentes, são chamados de dependentes.

Teorema

Se $P(B) > 0$, uma condição necessária e suficiente para que os eventos A e B sejam independentes é $P(A|B) = P(A)$

Independência: Exemplo

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos

- ▶ A : a carta selecionada é um As
- ▶ B : a carta selecionada é do naipe de espadas.

A e B são independentes?

Independência: Exemplo

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos

- ▶ A : a carta selecionada é um As
- ▶ B : a carta selecionada é do naipe de espadas.

A e B são independentes? $P(AB) = P(A)P(B)$?

- ▶ $P(AB) = \frac{1}{52}$

Independência: Exemplo

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos

- ▶ A : a carta selecionada é um As
- ▶ B : a carta selecionada é do naipe de espadas.

A e B são independentes? $P(AB) = P(A)P(B)$?

- ▶ $P(AB) = \frac{1}{52}$
- ▶ $P(A) = \frac{4}{52}, P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Independência: Exemplo

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos

- ▶ A : a carta selecionada é um As
- ▶ B : a carta selecionada é do naipe de espadas.

A e B são independentes? $P(AB) = P(A)P(B)$?

- ▶ $P(AB) = \frac{1}{52}$
- ▶ $P(A) = \frac{4}{52}, P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- ▶ $P(AB) = \frac{1}{52} = \frac{4}{52} \frac{1}{4} = P(A)P(B)$

Independência: Exemplo

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos

- ▶ A : a carta selecionada é um As
- ▶ B : a carta selecionada é do naipe de espadas.

A e B são independentes? $P(AB) = P(A)P(B)$?

- ▶ $P(AB) = \frac{1}{52}$
- ▶ $P(A) = \frac{4}{52}, P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- ▶ $P(AB) = \frac{1}{52} = \frac{4}{52} \frac{1}{4} = P(A)P(B)$
- ▶ Logo, A e B são independentes.

Independência: Exemplo

Duas máquinas M_1 e M_2 funcionam independentemente. Sejam os eventos:

- ▶ A : M_1 falha durante o período de 8 horas
- ▶ B : M_2 falha durante o período de 8 horas.

Qual é a probabilidade que pelo menos uma das máquinas falhe durante o período de 8 horas? (assuma que $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 1/4$)

Independência: Exemplo

Duas máquinas M_1 e M_2 funcionam independentemente. Sejam os eventos:

- ▶ A : M_1 falha durante o período de 8 horas
- ▶ B : M_2 falha durante o período de 8 horas.

Qual é a probabilidade que pelo menos uma das máquinas falhe durante o período de 8 horas? (assuma que $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 1/4$)

- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Independência: Exemplo

Duas máquinas M_1 e M_2 funcionam independentemente. Sejam os eventos:

- ▶ A : M_1 falha durante o período de 8 horas
- ▶ B : M_2 falha durante o período de 8 horas.

Qual é a probabilidade que pelo menos uma das máquinas falhe durante o período de 8 horas? (assuma que $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 1/4$)

- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- ▶ $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Independência: Exemplo

Duas máquinas M_1 e M_2 funcionam independentemente. Sejam os eventos:

- ▶ A : M_1 falha durante o período de 8 horas
- ▶ B : M_2 falha durante o período de 8 horas.

Qual é a probabilidade que pelo menos uma das máquinas falhe durante o período de 8 horas? (assuma que $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 1/4$)

- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- ▶ $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

Independência

Propriedades

Se A e B são independentes, então são também independentes:

- ▶ A e B^c
- ▶ A^c e B
- ▶ A^c e B^c

Independência

Propriedades

Se A e B são independentes, então são também independentes:

- ▶ A e B^c
- ▶ A^c e B
- ▶ A^c e B^c

Definição: Mutuamente independentes

Três eventos A , B e C são independentes se

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \text{ e}$$

- ▶ $P(AB) = P(A)P(B)$
- ▶ $P(BC) = P(B)P(C)$
- ▶ $P(AC) = P(A)P(C)$

Independência

Definição: Mutuamente independentes

Os eventos A_1, \dots, A_n são independentes (mutuamente independentes) se para cada $k = 2, \dots, n$ e cada subconjunto de índices $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$,

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) P(A_{i_k})$$

Cuidado!

Se $A \cap B = \emptyset$, não significa que A e B são independentes (são independentes se um deles tiver probabilidade zero.)

Leituras recomendadas

- ▶ Anderson, D. R; Sweeney, D. J.; e Williams, T. A. (2008). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*. 2ed. Cengage Learning. **Cap 4.4–Cap 4.5**
- ▶ Morettin, P.A; e Bussab, W. de O. (2004). *Estatística Básica*. 5ed, Saraiva. **Cap 5.3–Cap 5.4**