

ME414 - Estatística para Experimentalistas

Introdução à Probabilidade

Prof. Carlos Trucíos
ctrucios@unicamp.br
ctruciosm.github.io

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica,
Universidade Estadual de Campinas

Aula 7



UNICAMP

Definições básicas

Probabilidade

Propriedades

Revisitando os Axiomas

Espaço amostral com resultados equiprováveis

Exemplos

Definições básicas

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- ▶ Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- ▶ Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- ▶ Seja A um conjunto de possíveis resultados de E

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- ▶ Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- ▶ Seja A um conjunto de possíveis resultados de E
- ▶ Seja S (ou Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de E .

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- ▶ Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- ▶ Seja A um conjunto de possíveis resultados de E
- ▶ Seja S (ou Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de E .

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- ▶ Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- ▶ Seja A um conjunto de possíveis resultados de E
- ▶ Seja S (ou Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de E .

Definição

O conjunto de todos os possíveis resultados de E , S , é chamado espaço amostral (do experimento E) e todo subconjunto $A \subset S$ será chamado de evento.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

► $S = \{Cara, Coroa\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- ▶ $S = \{Cara, Coroa\}$
- ▶ Seja o evento A : o resultado é Cara.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- ▶ $S = \{Cara, Coroa\}$
- ▶ Seja o evento A : o resultado é Cara.
- ▶ $A = \{Cara\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- ▶ $S = \{Cara, Coroa\}$
- ▶ Seja o evento A : o resultado é Cara.
- ▶ $A = \{Cara\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- ▶ $S = \{Cara, Coroa\}$
- ▶ Seja o evento A : o resultado é Cara.
- ▶ $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- ▶ $S = \{Cara, Coroa\}$
- ▶ Seja o evento A : o resultado é Cara.
- ▶ $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

- ▶ $S = \{\text{todas as } 5! \text{ permutações de } (8,9,10,11,12)\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- ▶ $S = \{Cara, Coroa\}$
- ▶ Seja o evento A : o resultado é Cara.
- ▶ $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

- ▶ $S = \{\text{todas as } 5! \text{ permutações de } (8,9,10,11,12)\}$
- ▶ Seja o evento A : os últimos 2 chutes são dado pelos camisa 11 e 10 (nessa ordem)

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- ▶ $S = \{Cara, Coroa\}$
- ▶ Seja o evento A: o resultado é Cara.
- ▶ $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

- ▶ $S = \{\text{todas as } 5! \text{ permutações de } (8,9,10,11,12)\}$
- ▶ Seja o evento A: os últimos 2 chutes são dado pelos camisa 11 e 10 (nessa ordem)
- ▶ $A = \{(a, b, c, 11, 10) \text{ onde } a,b,c \text{ são as } 3! \text{ permutações de } (8,9,12)\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

► $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- ▶ $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Seja o evento A: a soma das faces é 7

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- ▶ $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Seja o evento A: a soma das faces é 7
- ▶ $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- ▶ $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Seja o evento A: a soma das faces é 7
- ▶ $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- ▶ $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Seja o evento A: a soma das faces é 7
- ▶ $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no círculo de raio 1 centrado na origem, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- ▶ $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Seja o evento A: a soma das faces é 7
- ▶ $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no círculo de raio 1 centrado na origem, então

- ▶ $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- ▶ $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Seja o evento A: a soma das faces é 7
- ▶ $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no círculo de raio 1 centrado na origem, então

- ▶ $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- ▶ Seja o evento A: a distância entre o ponto e a origem é $\leq 1/3$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- ▶ $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Seja o evento A: a soma das faces é 7
- ▶ $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no círculo de raio 1 centrado na origem, então

- ▶ $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- ▶ Seja o evento A: a distância entre o ponto e a origem é $\leq 1/3$
- ▶ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/3\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

► $S = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq \infty\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

- ▶ $S = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq \infty\}$
- ▶ Seja o evento A: o transistor não funciona mais que 5 horas

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

- ▶ $S = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq \infty\}$
- ▶ Seja o evento A: o transistor não funciona mais que 5 horas
- ▶ $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq 5\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

Eventos

Um evento A é qualquer subconjunto de S ($A \subset S$). Um evento é dito **simples** se consistir exatamente de um único resultado e é dito **composto** se consistir em mais de um resultado

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

Eventos

Um evento A é qualquer subconjunto de S ($A \subset S$). Um evento é dito **simples** se consistir exatamente de um único resultado e é dito **composto** se consistir em mais de um resultado

6- Seja o experimento em que cada um de três carros que trafegam em uma estrada siga pela direita (D) ou pela esquerda (E) em uma bifurcação. Então, $S = \{EEE, DEE, EDE, EED, EDD, DED, DDE, DDD\}$. Sejam os eventos

- ▶ A : os 3 carros seguem pela direita
- ▶ B : um dos 3 carros vira à direita
- ▶ C : os 3 carros viram na mesma direção

Quais eventos são simples e quais compostos?

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria de conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria de conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

1. Seja o evento $A \subset S$, o **complemento** de A (A^c , A' ou \bar{A}), é o evento que consiste em todos os resultados em S que não estão contidos em A .

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria de conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

1. Seja o evento $A \subset S$, o **complemento** de A (A^c , A' ou \bar{A}), é o evento que consiste em todos os resultados em S que não estão contidos em A .
2. Sejam A e B dois eventos, a **união** $A \cup B$ é o evento que consiste em todos os resultados que estão em A ou em B ou em ambos.

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria de conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

1. Seja o evento $A \subset S$, o **complemento** de A (A^c , A' ou \bar{A}), é o evento que consiste em todos os resultados em S que não estão contidos em A .
2. Sejam A e B dois eventos, a **união** $A \cup B$ é o evento que consiste em todos os resultados que estão em A **ou** em B ou em ambos.
3. a **intersecção** $A \cap B$ (ou simplesmente AB) é o evento que consiste em todos os resultados que estão em A **e** também em B simultaneamente

Teoria de conjuntos

Lei

Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$(A \cup B) \cap C =$ $(A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C =$ $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

Leis de DeMorgan

- ▶ $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$
- ▶ $\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então

$$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- ▶ Seja o evento A: o primeiro dado é ímpar

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então

$$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- ▶ Seja o evento A: o primeiro dado é ímpar
- ▶ Seja o evento B: o primeiro dado é par

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então

$$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- ▶ Seja o evento A: o primeiro dado é ímpar
- ▶ Seja o evento B: o primeiro dado é par
- ▶ $A \cap B$?, $A \cup B$?

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então

$$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- ▶ Seja o evento A: o primeiro dado é ímpar
- ▶ Seja o evento B: o primeiro dado é par
- ▶ $A \cap B$?, $A \cup B$?
- ▶ $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então

$$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- ▶ Seja o evento A: o primeiro dado é ímpar
- ▶ Seja o evento B: o primeiro dado é par
- ▶ $A \cap B$?, $A \cup B$?
- ▶ $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então

$$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- ▶ Seja o evento A: o primeiro dado é ímpar
- ▶ Seja o evento B: o primeiro dado é par
- ▶ $A \cap B$?, $A \cup B$?
- ▶ $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$

Evento certo e evento impossível

S é o evento certo e \emptyset é o evento nulo (ou impossível). Quando $A \cap B = \emptyset$, A e B são eventos mutuamente exclusivos (ou disjuntos)

Probabilidade

Definições

- ▶ Seja $A \subset S$ um evento quaisquer e S finito enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em } A}{\text{Número de elementos em } S}$$

(definição clássica de probabilidade)

Definições

- ▶ Seja $A \subset S$ um evento quaisquer e S finito enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em } A}{\text{Número de elementos em } S}$$

(definição clássica de probabilidade)

- ▶ se S não for enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } S}$$

(probabilidade geométrica)

Definições

- ▶ Seja $A \subset S$ um evento quaisquer e S finito enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em } A}{\text{Número de elementos em } S}$$

(definição clássica de probabilidade)

- ▶ se S não for enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } S}$$

(probabilidade geométrica)

- ▶ se S for infinito,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n},$$

onde n_A é o número de ocorrências de A em n repetições independentes **(definição frequentista ou estatística)**

Definições

- ▶ Não vamos nos preocupar com o problema de como definir probabilidades para cada experimento.

Definições

- ▶ Não vamos nos preocupar com o problema de como definir probabilidades para cada experimento.
- ▶ As definições previamente apresentadas têm o apelo da intuição, contudo, não são suficientes para uma formulação rigorosa da probabilidade.

Definições

- ▶ Não vamos nos preocupar com o problema de como definir probabilidades para cada experimento.
- ▶ As definições previamente apresentadas têm o apelo da intuição, contudo, não são suficientes para uma formulação rigorosa da probabilidade.
- ▶ Kolmogorov apresentou um conjunto de axiomas para definir probabilidade, permitindo incluir as definições anteriores como casos particulares.

Axiomas

Axiomas de Kolmogorov

Seja um experimento cujo espaço amostral é S . Uma função P definida nos subconjuntos de S é uma probabilidade se satisfaz os seguintes axiomas:

- ▶ **(A1)** Seja $A \subset S$, $0 \leq P(A)$,
- ▶ **(A2)** $P(S) = 1$,
- ▶ **(A3)** Sejam A_1, A_2, \dots eventos **disjuntos** ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Axiomas

Axiomas de Kolmogorov

Seja um experimento cujo espaço amostral é S . Uma função P definida nos subconjuntos de S é uma probabilidade se satisfaz os seguintes axiomas:

- ▶ **(A1)** Seja $A \subset S$, $0 \leq P(A)$,
- ▶ **(A2)** $P(S) = 1$,
- ▶ **(A3)** Sejam A_1, A_2, \dots eventos **disjuntos** ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- ▶ Note que (A3) não se restringe ao caso de S ser finito

Propiedades

Propriedades

Propriedades

- ▶ **(P0)**: $0 \leq P(A) \leq 1$
- ▶ **(P1)**: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- ▶ **(P2)**: $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$
- ▶ **(P3)**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ▶ **(P4)**:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$
- ▶ **(P5)**: Para quaisquer eventos A_1, A_2, \dots ,
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- ▶ Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- ▶ Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- ▶ Pelo (A1), $P(A) \geq 0$

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- ▶ Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- ▶ Pelo (A1), $P(A) \geq 0$
- ▶ Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3) $P(S) = P(A) + P(A^c)$

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- ▶ Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- ▶ Pelo (A1), $P(A) \geq 0$
- ▶ Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3) $P(S) = P(A) + P(A^c)$
- ▶ $P(A) = P(S) - \underbrace{P(A^c)}_{\geq 0} \leq P(S) = 1$

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- ▶ Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- ▶ Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- ▶ Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- ▶ Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- ▶ Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$
- ▶ Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3), $P(\underbrace{A \cup A^c}_S) = P(A) + P(A^c)$

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- ▶ Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- ▶ Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$
- ▶ Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3), $P(\underbrace{A \cup A^c}_S) = P(A) + P(A^c)$
- ▶ $\underbrace{P(S)}_1 = P(A) + P(A^c)$

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- ▶ Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- ▶ Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$
- ▶ Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3), $P(\underbrace{A \cup A^c}_S) = P(A) + P(A^c)$
- ▶ $\underbrace{P(S)}_1 = P(A) + P(A^c)$
- ▶ $P(A^c) = 1 - P(A)$

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- ▶ Seja $A \subset B$

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- ▶ Seja $A \subset B$
- ▶ $B = A \cup (A^c \cap B)$

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- ▶ Seja $A \subset B$
- ▶ $B = A \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- ▶ Seja $A \subset B$
- ▶ $B = A \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- ▶ Pelo (A1), $P(A^c \cap B) \geq 0$

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- ▶ Seja $A \subset B$
- ▶ $B = A \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- ▶ Pelo (A1), $P(A^c \cap B) \geq 0$
- ▶ Então, $P(A) \leq P(B)$

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

► $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ▶ $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ▶ $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- ▶ Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ▶ $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- ▶ Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ▶ $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- ▶ Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$
- ▶ $P(B) - P(A \cap B) = \underbrace{P(A^c \cap B)}_{P(A \cup B) - P(A)}$

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ▶ $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- ▶ Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- ▶ $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$
- ▶ $P(B) - P(A \cap B) = \underbrace{P(A^c \cap B)}_{P(A \cup B) - P(A)}$
- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Prova (P4)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r})$$

Por indução ($n = 2$, supomos que funciona para n e provar para $n + 1$)

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

► $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \dots$

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- ▶ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \dots$
- ▶ Pelo (A3), $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \dots$

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- ▶ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \dots$
- ▶ Pelo (A3), $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \dots$
- ▶ Note que, $A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \subset A_j$

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- ▶ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \dots$
- ▶ Pelo (A3), $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \dots$
- ▶ Note que, $A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \subset A_j$
- ▶ Pela (P3), $P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{j-1}^c \cap A_j) \leq P(A_j)$

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- ▶ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \dots$
- ▶ Pelo (A3), $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \dots$
- ▶ Note que, $A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \subset A_j$
- ▶ Pela (P3), $P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{j-1}^c \cap A_j) \leq P(A_j)$
- ▶ $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \dots \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Revisitando os Axiomas

Revisitando os Axiomas

Fora do horário de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passageiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- ▶ O passageiro pode subir em apenas 1 vagão

Revisitando os Axiomas

Fora do horário de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passageiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- ▶ O passageiro pode subir em apenas 1 vagão
- ▶ Sejam os eventos E_i : o passageiro pega o vagão i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passageiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- ▶ O passageiro pode subir em apenas 1 vagão
- ▶ Sejam os eventos E_i : o passageiro pega o vagão i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)
- ▶ $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passageiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- ▶ O passageiro pode subir em apenas 1 vagão
- ▶ Sejam os eventos E_i : o passageiro pega o vagão i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)
- ▶ $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$
- ▶ $P(E_3) = 2P(E_2)$, e $P(E_3) = 2P(E_4)$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passageiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- ▶ O passageiro pode subir em apenas 1 vagão
- ▶ Sejam os eventos E_i : o passageiro pega o vagão i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)
- ▶ $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$
- ▶ $P(E_3) = 2P(E_2)$, e $P(E_3) = 2P(E_4)$
- ▶ $P(E_2) = 2P(E_1)$, $P(E_2) = 2P(E_5)$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passageiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- ▶ O passageiro pode subir em apenas 1 vagão
- ▶ Sejam os eventos E_i : o passageiro pega o vagão i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)
- ▶ $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$
- ▶ $P(E_3) = 2P(E_2)$, e $P(E_3) = 2P(E_4)$
- ▶ $P(E_2) = 2P(E_1)$, $P(E_2) = 2P(E_5)$
- ▶ $P(E_4) = 2P(E_1)$, $P(E_4) = 2P(E_5)$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passageiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P\left(\bigcup_{i=1}^5 E_i\right) &= \sum_{i=1}^5 P(E_i) = \\ &P(E_1) + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_2)} + \underbrace{4P(E_1)}_{2P(E_2)} + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_4)} + \underbrace{P(E_1)}_{P(E_5)} = 1 \end{aligned}$$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passageiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- ▶ $P\left(\bigcup_{i=1}^5 E_i\right) = \sum_{i=1}^5 P(E_i) =$
$$P(E_1) + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_2)} + \underbrace{4P(E_1)}_{2P(E_2)} + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_4)} + \underbrace{P(E_1)}_{P(E_5)} = 1$$
- ▶ $P(E_1) = 0.1 = P(E_5); P(E_2) = P(E_4) = 0.2; P(E_3) = 0.4$

Revisitando os Axiomas

Fora do horário de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passageiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- ▶ $P\left(\bigcup_{i=1}^5 E_i\right) = \sum_{i=1}^5 P(E_i) =$
$$P(E_1) + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_2)} + \underbrace{4P(E_1)}_{2P(E_2)} + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_4)} + \underbrace{P(E_1)}_{P(E_5)} = 1$$
- ▶ $P(E_1) = 0.1 = P(E_5); P(E_2) = P(E_4) = 0.2; P(E_3) = 0.4$
- ▶ Probabilidade de pegar um dos vagões dos extremos é
 $P(E_1 \cup E_5) = P(E_1) + P(E_5) = 0.2$

Espaço amostral com resultados equiprováveis

Espaço amostral com resultados equiprováveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente prováveis:

Espaço amostral com resultados equiprováveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente prováveis:

- ▶ Lançamento de uma moeda

Espaço amostral com resultados equiprováveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente prováveis:

- ▶ Lançamento de uma moeda
- ▶ Lançamento de r dados não viciados

Espaço amostral com resultados equiprováveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente prováveis:

- ▶ Lançamento de uma moeda
- ▶ Lançamento de r dados não viciados
- ▶ Selecionar r cartas de um baralho de 52 cartas

Espaço amostral com resultados equiprováveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente prováveis:

- ▶ Lançamento de uma moeda
- ▶ Lançamento de r dados não viciados
- ▶ Selecionar r cartas de um baralho de 52 cartas
- ▶ ...

Espaço amostral com resultados equiprováveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente prováveis:

- ▶ Lançamento de uma moeda
- ▶ Lançamento de r dados não viciados
- ▶ Selecionar r cartas de um baralho de 52 cartas
- ▶ ...

Espaço amostral com resultados equiprováveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente prováveis:

- ▶ Lançamento de uma moeda
- ▶ Lançamento de r dados não viciados
- ▶ Selecionar r cartas de um baralho de 52 cartas
- ▶ ...

Considere um evento $A \subset S$, então

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em } A}{\text{Número de elementos em } S}$$

Espaço amostral com resultados equiprováveis

Tudo é contagem

Quando os resultados são igualmente prováveis, calcular a probabilidade é basicamente:

- ▶ **contar** o número de resultados em A ,
- ▶ **contar** o número de todos os resultados possíveis em S ,
- ▶ formar a razão.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

onde $N(A)$ é o número de elementos em A e N é o número de elementos em S .

Exemplos

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?

► $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, \dots, 6\}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^4$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^4$
- ▶ A: Os quatro números são distintos

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^4$
- ▶ A : Os quatro números são distintos
- ▶ $N(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^4$
- ▶ A : Os quatro números são distintos
- ▶ $N(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3$
- ▶

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^4$
- ▶ A : Os quatro números são distintos
- ▶ $N(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3$
- ▶

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^4$
- ▶ A: Os quatro números são distintos
- ▶ $N(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3$
- ▶

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4} =$$

`(6*5*4*3)/(6^4)`

`## [1] 0.2777778`

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?

► $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, \dots, 6\}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^6$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^6$
- ▶ A : Cada um dos 6 números aparece apenas 1 vez. $N(A)$?

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^6$
- ▶ A : Cada um dos 6 números aparece apenas 1 vez. $N(A)$?
- ▶ Se não considerarmos a ordem, $N(A) = 1$, mas no nosso caso precisamos considerar a ordem, então $N(A) = 6!$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^6$
- ▶ A : Cada um dos 6 números aparece apenas 1 vez. $N(A)$?
- ▶ Se não considerarmos a ordem, $N(A) = 1$, mas no nosso caso precisamos considerar a ordem, então $N(A) = 6!$
- ▶

$$P(A) = \frac{6!}{6^6}$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^6$
- ▶ A : Cada um dos 6 números aparece apenas 1 vez. $N(A)$?
- ▶ Se não considerarmos a ordem, $N(A) = 1$, mas no nosso caso precisamos considerar a ordem, então $N(A) = 6!$
- ▶

$$P(A) = \frac{6!}{6^6}$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?

- ▶ $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, \dots, 6\}$
- ▶ $N = 6^6$
- ▶ A : Cada um dos 6 números aparece apenas 1 vez. $N(A)$?
- ▶ Se não considerarmos a ordem, $N(A) = 1$, mas no nosso caso precisamos considerar a ordem, então $N(A) = 6!$
- ▶

$$P(A) = \frac{6!}{6^6}$$

```
factorial(6)/(6^6)
```

```
## [1] 0.0154321
```

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**
- ▶ S : Todas as formas em que podemos seleccionar 10 peças de um total de 24

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**
- ▶ S : Todas as formas em que podemos seleccionar 10 peças de um total de 24
 - ▶ $N = \binom{24}{10}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**
- ▶ S : Todas as formas em que podemos seleccionar 10 peças de um total de 24
 - ▶ $N = \binom{24}{10}$
 - ▶ A : seleccionar as 2 peças defeituosas

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**
- ▶ S : Todas as formas em que podemos seleccionar 10 peças de um total de 24
 - ▶ $N = \binom{24}{10}$
 - ▶ A : seleccionar as 2 peças defeituosas
 - ▶ $N(A) = \binom{2}{2} \binom{22}{8}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?
- ▶ S : Todas as formas em que podemos seleccionar 10 peças de um total de 24
 - ▶ $N = \binom{24}{10}$
 - ▶ A : seleccionar as 2 peças defeituosas
 - ▶ $N(A) = \binom{2}{2} \binom{22}{8}$
 - ▶

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2} \binom{22}{8}}{\binom{24}{10}} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?
- ▶ S : Todas as formas em que podemos seleccionar 10 peças de um total de 24
 - ▶ $N = \binom{24}{10}$
 - ▶ A : seleccionar as 2 peças defeituosas
 - ▶ $N(A) = \binom{2}{2} \binom{22}{8}$
 - ▶

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2} \binom{22}{8}}{\binom{24}{10}} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?
- ▶ S: Todas as formas em que podemos seleccionar 10 peças de um total de 24
 - ▶ $N = \binom{24}{10}$
 - ▶ A: seleccionar as 2 peças defeituosas
 - ▶ $N(A) = \binom{2}{2} \binom{22}{8}$
 - ▶

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2} \binom{22}{8}}{\binom{24}{10}} =$$

```
(choose(2,2)*choose(22,8))/choose(24,10)
```

```
## [1] 0.1630435
```

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?
- ▶ S : Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?
- ▶ S : Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100
 - ▶ $N = \binom{100}{12}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?
- ▶ S : Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100
 - ▶ $N = \binom{100}{12}$
 - ▶ A : As pessoas A e B estão no comitê.

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?
- ▶ S : Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100
 - ▶ $N = \binom{100}{12}$
 - ▶ A : As pessoas A e B estão no comitê.
 - ▶ $N(A) = \binom{2}{2} \binom{98}{10}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?

► S : Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100

► $N = \binom{100}{12}$

► A : As pessoas A e B estão no comitê.

► $N(A) = \binom{2}{2} \binom{98}{10}$

►

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2} \binom{98}{10}}{\binom{100}{12}} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?

► S : Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100

► $N = \binom{100}{12}$

► A : As pessoas A e B estão no comitê.

► $N(A) = \binom{2}{2} \binom{98}{10}$

►

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2} \binom{98}{10}}{\binom{100}{12}} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?

► S : Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100

► $N = \binom{100}{12}$

► A : As pessoas A e B estão no comitê.

► $N(A) = \binom{2}{2} \binom{98}{10}$

►

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2} \binom{98}{10}}{\binom{100}{12}} =$$

```
(choose(2,2)*choose(98,10))/choose(100,12)
```

```
## [1] 0.01333333
```

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. 35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. **35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?**
- ▶ S: Todas as formas possíveis de dividir 35 pessoas nos 2 grupos.

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. 35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?
- ▶ S : Todas as formas possíveis de dividir 35 pessoas nos 2 grupos.
 - ▶ $N = \binom{35}{10} \times \binom{25}{25} = \binom{35}{10}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. **35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?**
- ▶ S : Todas as formas possíveis de dividir 35 pessoas nos 2 grupos.
 - ▶ $N = \binom{35}{10} \times \binom{25}{25} = \binom{35}{10}$
 - ▶ A : As pessoas A e B estão no mesmo grupo (pode ser no grupo de 10 ou no grupo de 25 pessoas)

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. **35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?**
- ▶ S : Todas as formas possíveis de dividir 35 pessoas nos 2 grupos.
 - ▶ $N = \binom{35}{10} \times \binom{25}{25} = \binom{35}{10}$
 - ▶ A : As pessoas A e B estão no mesmo grupo (pode ser no grupo de 10 ou no grupo de 25 pessoas)
 - ▶ $N(A) = \binom{2}{2} \binom{33}{8} + \binom{2}{2} \binom{33}{23}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. 35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?

- ▶ S : Todas as formas possíveis de dividir 35 pessoas nos 2 grupos.
- ▶ $N = \binom{35}{10} \times \binom{25}{25} = \binom{35}{10}$
- ▶ A : As pessoas A e B estão no mesmo grupo (pode ser no grupo de 10 ou no grupo de 25 pessoas)
- ▶ $N(A) = \binom{2}{2} \binom{33}{8} + \binom{2}{2} \binom{33}{23}$
- ▶

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2} \binom{33}{8} + \binom{2}{2} \binom{33}{23}}{\binom{35}{10}}$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

6. Se as letras $A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S$ forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade de formar a palavra *ESTATISTICA*?

6. Se as letras $A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S$ forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade de formar a palavra *ESTATISTICA*?
- Seja E : ordenar aleatoriamente as letras $L = \{A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S\}$ e observar a palavra resultante

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

6. Se as letras $A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S$ forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade de formar a palavra *ESTATISTICA*?
- ▶ Seja E : ordenar aleatoriamente as letras $L = \{A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S\}$ e observar a palavra resultante
 - ▶ $S = \{\text{Todas as palavras} \neq s \text{ formadas com as letras em } L\}$

6. Se as letras $A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S$ forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade de formar a palavra *ESTATISTICA*?
- ▶ Seja E : ordenar aleatoriamente as letras $L = \{A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S\}$ e observar a palavra resultante
 - ▶ $S = \{\text{Todas as palavras} \neq s \text{ formadas com as letras em } L\}$
 - ▶ Seja N o número de elemento em S

6. Se as letras $A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S$ forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade de formar a palavra *ESTATISTICA*?

- ▶ Seja E : ordenar aleatoriamente as letras $L = \{A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S\}$ e observar a palavra resultante
- ▶ $S = \{\text{Todas as palavras} \neq s \text{ formadas com as letras em } L\}$
- ▶ Seja N o número de elemento em S
- ▶ Seja o evento A : a palavra formada é *ESTATISTICA*

Combinatoria e probabilidades

```
# N: Permutação com repetição  
# na = 2; ne = 1, ni = 2, nc = 1, nt = 3, ns= 2  
N = factorial(11)/(factorial(2)^3*factorial(3))  
# P(A)=  
1/N
```

```
## [1] 1.202501e-06
```


Combinatoria e probabilidades

Outra forma:

```
# N: todas as permutações
N = factorial(11)
# A: ESTATISTICA
Na = 1*2*3*2*2*2*1*1*1*1*1
# P(A)=
Na/N
```

```
## [1] 1.202501e-06
```

```
# na = 2; ni = 2, nt = 3, ns= 2
Na = factorial(2)*factorial(2)*factorial(3)*factorial(2)
Na/N
```

```
## [1] 1.202501e-06
```

Combinatoria e probabilidades

- 7. Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**

Combinatoria e probabilidades

- 7. Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**
- $S = \{(i_1, i_2, \dots, i_7) : i_1, i_2, \dots, i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$

- 7. Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**
- ▶ $S = \{(i_1, i_2, \dots, i_7) : i_1, i_2, \dots, i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
 - ▶ A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?

- 7. Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**
- ▶ $S = \{(i_1, i_2, \dots, i_7) : i_1, i_2, \dots, i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
 - ▶ A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?
 - ▶ Para que cada número apareça pelo menos 1 vez, um número precisa aparecer 2 vezes (suponhamos n_1)

7. Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?

- ▶ $S = \{(i_1, i_2, \dots, i_7) : i_1, i_2, \dots, i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
- ▶ A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?
- ▶ Para que cada número apareça pelo menos 1 vez, um número precisa aparecer 2 vezes (suponhamos n_1)
- ▶ $\binom{7}{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!}$

7. Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?

- ▶ $S = \{(i_1, i_2, \dots, i_7) : i_1, i_2, \dots, i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
- ▶ A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?
- ▶ Para que cada número apareça pelo menos 1 vez, um número precisa aparecer 2 vezes (suponhamos n_1)
- ▶ $\binom{7}{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!}$
- ▶ Quantas escolhas do número que repete duas vezes temos?

7. Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?

- ▶ $S = \{(i_1, i_2, \dots, i_7) : i_1, i_2, \dots, i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
- ▶ A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?
- ▶ Para que cada número apareça pelo menos 1 vez, um número precisa aparecer 2 vezes (suponhamos n_1)
- ▶ $\binom{7}{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!}$
- ▶ Quantas escolhas do número que repete duas vezes temos?
- ▶ Então, $N(A) = 6 \times \frac{7!}{2!}$

7. Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?

- ▶ $S = \{(i_1, i_2, \dots, i_7) : i_1, i_2, \dots, i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
- ▶ A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?
- ▶ Para que cada número apareça pelo menos 1 vez, um número precisa aparecer 2 vezes (suponhamos n_1)
- ▶ $\binom{7}{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!}$
- ▶ Quantas escolhas do número que repete duas vezes temos?
- ▶ Então, $N(A) = 6 \times \frac{7!}{2!}$
- ▶ $P(A) = \frac{6 \times \frac{7!}{2!}}{6^7} = \frac{7!}{2 \times 6^6}$

Combinatoria e probabilidades

8. Um baralho com 52 cartas possui 12 figuras. Se as 52 cartas são distribuídas aleatoriamente entre 4 jogadores de forma que cada um deles receba 13 cartas, qual a probabilidade de que cada jogador receba 3 figuras?

8. Um baralho com 52 cartas possui 12 figuras. Se as 52 cartas são distribuídas aleatoriamente entre 4 jogadores de forma que cada um deles receba 13 cartas, qual a probabilidade de que cada jogador receba 3 figuras?
- S: Todas as possíveis formas de distribuir 52 cartas em 4 jogadores com 13 cartas cada

8. Um baralho com 52 cartas possui 12 figuras. Se as 52 cartas são distribuídas aleatoriamente entre 4 jogadores de forma que cada um deles receba 13 cartas, qual a probabilidade de que cada jogador receba 3 figuras?
- ▶ S : Todas as possíveis formas de distribuir 52 cartas em 4 jogadores com 13 cartas cada
 - ▶ **Reinterpretando:** De quantas formas podemos distribuir 52 cartas em 4 grupos de tamanho 13 cada? De N formas

8. Um baralho com 52 cartas possui 12 figuras. Se as 52 cartas são distribuídas aleatoriamente entre 4 jogadores de forma que cada um deles receba 13 cartas, qual a probabilidade de que cada jogador receba 3 figuras?

- ▶ S : Todas as possíveis formas de distribuir 52 cartas em 4 jogadores com 13 cartas cada
- ▶ **Reinterpretando:** De quantas formas podemos distribuir 52 cartas em 4 grupos de tamanho 13 cada? De N formas
- ▶

$$N = \binom{52}{13, 13, 13, 13}$$

8. Um baralho com 52 cartas possui 12 figuras. Se as 52 cartas são distribuídas aleatoriamente entre 4 jogadores de forma que cada um deles receba 13 cartas, qual a probabilidade de que cada jogador receba 3 figuras?

- ▶ S : Todas as possíveis formas de distribuir 52 cartas em 4 jogadores com 13 cartas cada
- ▶ **Reinterpretando:** De quantas formas podemos distribuir 52 cartas em 4 grupos de tamanho 13 cada? De N formas

▶

$$N = \binom{52}{13, 13, 13, 13}$$

- ▶ A : cada jogador recebe 3 figuras. $N(A)$?

Combinatoria e probabilidades

Primeira forma

Combinatoria e probabilidades

Primeira forma

$$N(A) = \binom{12}{3} \binom{40}{10} \times \binom{9}{3} \binom{30}{10} \times \binom{6}{3} \binom{20}{10} \times \binom{3}{3} \binom{10}{10}$$

Combinatoria e probabilidades

Primeira forma

$$N(A) = \binom{12}{3} \binom{40}{10} \times \binom{9}{3} \binom{30}{10} \times \binom{6}{3} \binom{20}{10} \times \binom{3}{3} \binom{10}{10}$$

$$N(A) = \frac{12!}{3!9!} \frac{40!}{10!30!} \times \frac{9!}{3!6!} \frac{30!}{10!20!} \times \frac{6!}{3!3!} \frac{20!}{10!10!} \times \frac{3!}{3!0!} \frac{10!}{10!0!} = \frac{12!40!}{(3!)^4(10!)^4}$$

Combinatoria e probabilidades

Primeira forma

$$N(A) = \binom{12}{3} \binom{40}{10} \times \binom{9}{3} \binom{30}{10} \times \binom{6}{3} \binom{20}{10} \times \binom{3}{3} \binom{10}{10}$$

$$N(A) = \frac{12!}{3!9!} \frac{40!}{10!30!} \times \frac{9!}{3!6!} \frac{30!}{10!20!} \times \frac{6!}{3!3!} \frac{20!}{10!10!} \times \frac{3!}{3!0!} \frac{10!}{10!0!} = \frac{12!40!}{(3!)^4(10!)^4}$$

Segunda forma

$$N(A) = \binom{12}{3, 3, 3, 3} \binom{40}{10, 10, 10, 10} = \frac{12!}{3!3!3!3!} \frac{40!}{10!10!10!10!} = \frac{12!40!}{(3!)^4(10!)^4}$$

Combinatoria e probabilidades

Então,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\frac{12!40!}{(3!)^4(10!)^4}}{\frac{52!}{(13!)^4}}$$

#Na

```
numNa = factorial(12)*factorial(40)
```

```
denNa = (factorial(3)^4)*(factorial(10)^4)
```

```
Na = numNa/denNa
```

#N

```
N = factorial(52)/(factorial(13)^4)
```

P(A)

```
Na/N
```

```
## [1] 0.03241886
```

Combinatoria e probabilidades

9. Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?

Combinatoria e probabilidades

9. Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?
- S : Todas as possíveis que as 9 crianças podem se sentar

Combinatoria e probabilidades

9. Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?
- ▶ S : Todas as possíveis que as 9 crianças podem se sentar
 - ▶ $N = 9!$

Combinatoria e probabilidades

9. **Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?**
- ▶ S : Todas as possíveis que as 9 crianças podem se sentar
 - ▶ $N = 9!$
 - ▶ A : As Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos

Combinatoria e probabilidades

9. Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?
- ▶ S : Todas as possíveis que as 9 crianças podem se sentar
 - ▶ $N = 9!$
 - ▶ A : As Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos
 - ▶ $N(A) = 2!3!4!$

Combinatoria e probabilidades

9. Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?

- ▶ S : Todas as possíveis que as 9 crianças podem se sentar
- ▶ $N = 9!$
- ▶ A : As Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos
- ▶ $N(A) = 2!3!4!$
- ▶

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2!3!4!}{9!}$$

10. João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?

10. João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?

- ▶ S : Todas as possíveis escolhas de 2 em 2 entre os $2n$ tênis.

10. João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?

- ▶ S : Todas as possíveis escolhas de 2 em 2 entre os $2n$ tênis.
- ▶ $N = \binom{2n}{2}$

10. João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?

- ▶ S : Todas as possíveis escolhas de 2 em 2 entre os $2n$ tênis.
- ▶ $N = \binom{2n}{2}$
- ▶ A : escolher um par correto

10. João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?

- ▶ S : Todas as possíveis escolhas de 2 em 2 entre os $2n$ tênis.
- ▶ $N = \binom{2n}{2}$
- ▶ A : escolher um par correto
- ▶ $N(A) = n$

10. João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?

- ▶ S : Todas as possíveis escolhas de 2 em 2 entre os $2n$ tênis.
- ▶ $N = \binom{2n}{2}$
- ▶ A : escolher um par correto
- ▶ $N(A) = n$
- ▶

$$P(A) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} = \frac{1}{2n-1}$$

Combinatoria e probabilidades

```
# Caso particular n = 10
```

```
N = choose(20,2)
```

```
Na = 10
```

```
Na/N
```

```
## [1] 0.05263158
```

```
1/19
```

```
## [1] 0.05263158
```


Leituras recomendadas

- ▶ Anderson, D. R; Sweeney, D. J.; e Williams, T. A. (2008). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*. 2ed. Cengage Learning. **Cap 4.1–Cap 4.3**
- ▶ Degroot, M. H; e Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics*. 4ed, Pearson. **Chapter 1.5, 1.10**