ME414 - Estatística para Experimentalistas

Distribuições Discretas

Prof. Carlos Trucíos
ctrucios@unicamp.br
ctruciosm.github.io

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
Universidade Estadual de Campinas

Aula 09

Variáveis Aleatórias

Função de probabilidade

Esperança e Variância

Distribuições discretas de probabilidade

Variáveis Aleatórias

Variaveis Aleatorias

Variável Aleatória (v.a)

Una variable aleatoria X é uma função que associa um número real a cada resutado de um experimento aleatório.

$$X : S \rightarrow \mathbb{R}$$

Variaveis Aleatorias

Variável Aleatória (v.a)

Una variable aleatoria X é uma função que associa um número real a cada resutado de um experimento aleatório.

$$X : S \to \mathbb{R}$$

Variável aleatória discreta

Uma v.a. que pode assumir um número finito (ou infinito sempre que pudermos contar os elementos) de valores.

Variaveis Aleatorias

Variável Aleatória (v.a)

Una variable aleatoria X é uma função que associa um número real a cada resutado de um experimento aleatório.

$$X : S \to \mathbb{R}$$

Variável aleatória discreta

Uma v.a. que pode assumir um número finito (ou infinito sempre que pudermos contar os elementos) de valores.

Variável aleatória contínua

Uma v.a. que pode assumir qualquer valor numérico em um intervalo (ou coleção de intervalos)

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am.

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am.

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana Discreta!

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana Discreta!
- Retorno financeiro de um investimento

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana Discreta!
- Retorno financeiro de um investimento

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana Discreta!
- Retorno financeiro de um investimento Contínua!

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana Discreta!
- Retorno financeiro de um investimento Contínua!
- Salário dos professores da UFRJ

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana Discreta!
- Retorno financeiro de um investimento Contínua!
- Salário dos professores da UFRJ

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana Discreta!
- Retorno financeiro de um investimento Contínua!
- Salário dos professores da UFRJ Contínua!

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana Discreta!
- Retorno financeiro de um investimento Contínua!
- Salário dos professores da UFRJ Contínua!
- Tempo (em minutos) da sua casa até a universidade

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana Discreta!
- Retorno financeiro de um investimento Contínua!
- Salário dos professores da UFRJ Contínua!
- Tempo (em minutos) da sua casa até a universidade

Variaveis Aleatorias

Exemplos: Contínua ou Discreta?

- Número de clientes que realizam uma compra na *amazon.com.br* entre as 00:01 e 04:59 am. Discreta!
- Temperatura do paciente Contínua!
- Número de sinistros de auto aos finais de semana Discreta!
- Retorno financeiro de um investimento Contínua!
- Salário dos professores da UFRJ Contínua!
- Tempo (em minutos) da sua casa até a universidade Contínua!

Função de probabilidade

Função de probabilidade

Se X é uma v.a discreta, a função de probabilidade (f.p.) de X é uma função $f(\cdot)$ tal que:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

Função de probabilidade

Se X é uma v.a discreta, a função de probabilidade (f.p.) de X é uma função $f(\cdot)$ tal que:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$
- $f(x) = P(X = x)$

Função de probabilidade

Se X é uma v.a discreta, a função de probabilidade (f.p.) de X é uma função $f(\cdot)$ tal que:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$
- $f(x) = P(X = x)$
- $\sum_i f(x_i) = 1$

Função de probabilidade

Se X é uma v.a discreta, a função de probabilidade (f.p.) de X é uma função $f(\cdot)$ tal que:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$
- $f(x) = P(X = x)$
- $\sum_i f(x_i) = 1$

Função de probabilidade

Se X é uma v.a discreta, a função de probabilidade (f.p.) de X é uma função $f(\cdot)$ tal que:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$
- $f(x) = P(X = x)$
- $\sum_i f(x_i) = 1$

É comum denotar a função de probabilidade $f(x)$ por $p(x)$

Podemos calcular a probabilidade de qualquer subconjunto A,

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$$

Esperança e Variância

Esperança e Variância

Seja X uma v.a. discreta (com valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$) com f.p $p(\cdot)$.

Esperança

O valor esperado de X é definido como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

Esperança e Variância

Seja X uma v.a. discreta (com valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$) com f.p $p(\cdot)$.

Esperança

O valor esperado de X é definido como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

Variância

A Variância de X, denotada por $\mathbb{V}(X)$ é definida como

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i),$$

em que $\mu = E(X)$

Esperança e Variância

A **função de probabilidade** do número de pessoas vivendo na mesma casa (X) em uma determinada região do RJ é apresentada a seguir

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

Esperança e Variância

A **função de probabilidade** do número de pessoas vivendo na mesma casa (X) em uma determinada região do RJ é apresentada a seguir

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

- $\mathbb{E}(X) = \sum_x xp(x) = 1 \times 0.140 + 2 \times 0.175 + \cdots + 9 \times 0.005 = 3.305$

Esperança e Variância

A **função de probabilidade** do número de pessoas vivendo na mesma casa (X) em uma determinada região do RJ é apresentada a seguir

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

- $\mathbb{E}(X) = \sum_x xp(x) = 1 \times 0.140 + 2 \times 0.175 + \cdots + 9 \times 0.005 = 3.305$
- $\mathbb{V}(X) = \sum_x (x - \mu)^2 p(x) =$

Esperança e Variância

A **função de probabilidade** do número de pessoas vivendo na mesma casa (X) em uma determinada região do RJ é apresentada a seguir

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

- $\mathbb{E}(X) = \sum_x xp(x) = 1 \times 0.140 + 2 \times 0.175 + \cdots + 9 \times 0.005 = 3.305$
- $\mathbb{V}(X) = \sum_x (x - \mu)^2 p(x) =$

Esperança e Variância

A **função de probabilidade** do número de pessoas vivendo na mesma casa (X) em uma determinada região do RJ é apresentada a seguir

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

- $\mathbb{E}(X) = \sum_x xp(x) = 1 \times 0.140 + 2 \times 0.175 + \cdots + 9 \times 0.005 = 3.305$
- $\mathbb{V}(X) = \sum_x (x - \mu)^2 p(x) =$

$$\mathbb{V}(X) = (1 - 3.305)^2 \times 0.140 + \cdots + (9 - 3.305)^2 \times 0.005 = 2.291975$$

Esperança e Variância

Propriedades

Seja X uma variável aleatória

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ (onde a e b são constantes)

Esperança e Variância

Propriedades

Seja X uma variável aleatória

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ (onde a e b são constantes)
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$

Esperança e Variância

Propriedades

Seja X uma variável aleatória

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ (onde a e b são constantes)
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

Esperança e Variância

Propriedades

Seja X uma variável aleatória

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ (onde a e b são constantes)
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$
- Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ v.a. com $\mathbb{E}(X_i) < \infty$, então,

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)$$

Esperança e Variância

Propriedades

Seja X uma variável aleatória

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ (onde a e b são constantes)
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$
- Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ v.a. com $\mathbb{E}(X_i) < \infty$, então,

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)$$

- Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ v.a. **independentes** com $V(X_i) < \infty$. Então,

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)$$

Distribuições discretas de probabilidade

Distribuição Bernoulli

Considere os experimentos onde os possíveis resultados são:

- Cara ou Coroa
- Sucesso ou Fracasso
- Defeituoso ou Não defeituodo
- Sim ou não

Distribuição Bernoulli

Considere os experimentos onde os possíveis resultados são:

- Cara ou Coroa
- Sucesso ou Fracasso
- Defeituoso ou Não defeituodo
- Sim ou não

Todos são experimentos onde temos unicamente duas opções (1: sucesso ou 0: fracasso).

Distribuição Bernoulli

Considere os experimentos onde os possíveis resultados são:

- Cara ou Coroa
- Sucesso ou Fracasso
- Defeituoso ou Não defeituodo
- Sim ou não

Todos são experimentos onde temos unicamente duas opções (1: sucesso ou 0: fracasso).

Distribuição Bernoulli

Uma v.a. discreta X tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p $(0 \leq p \leq 1)$, denotada por $bernoulli(p)$, se X pode assumir unicamente os valores 0 ou 1 com respectivas probabilidades

$$P(X = 1) = p \text{ e } P(X = 0) = 1 - p$$

Distribuição Bernoulli

Sua função de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Distribuição Bernoulli

Sua função de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $E(X) = \sum_x xp(x) = 0 \times p(0) + 1 \times p(1) = p(1) = p$

Distribuição Bernoulli

Sua função de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $E(X) = \sum_x xp(x) = 0 \times p(0) + 1 \times p(1) = p(1) = p$
- $V(X) = pq$

Distribuição Bernoulli

Sua função de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $E(X) = \sum_x xp(x) = 0 \times p(0) + 1 \times p(1) = p(1) = p$
- $V(X) = pq$

Distribuição Bernoulli

Sua função de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $E(X) = \sum_x xp(x) = 0 \times p(0) + 1 \times p(1) = p(1) = p$
- $V(X) = pq$

$$V(X) = \underbrace{E(X^2)}_{\sum_x x^2 p(x)} - \underbrace{E^2(X)}_{p^2} = \underbrace{[0^2 p(0) + 1^2 p(1)]}_{\sum_x x^2 p(x)} - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Distribuição Binomial

Suponha um experimento com as seguintes caracteristicas:

1. O experimentos consiste de n experimentos menores (ensaios)
2. Cada ensaio pode resultar em dois únicos valores (1: Sucesso, 0: Fracasso)
3. Os ensaios são independentes
4. A probabilidade de sucesso, p, é constante entre os ensaios.

Experimento Binomial

Um experimento onde 1-4 acontece, é chamado de experimento Binomial.

Distribuição Binomial

Um experimento Binomial é então formado por n ensaios Bernoulli independentes.

Distribuição Binomial

Uma v.a. discreta X tem distribuição de Binomial com parâmetros n, p $(0 \leq p \leq 1)$, denotada por $binom(n, p)$, se X pode assumir os valores $0, 1, \ldots, n$ e se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots, n \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Distribuição Binomial

- X é o número total de sucessos em n ensaios

Distribuição Binomial

- X é o número total de sucessos em n ensaios
- $E(X) = np$

Distribuição Binomial

- X é o número total de sucessos em n ensaios
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

Distribuição Binomial

- X é o número total de sucessos em n ensaios
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

Distribuição Binomial

- X é o número total de sucessos em n ensaios
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

Teorema

Se $X_1, \ldots X_n$ são v.as. *iid* $X_i \sim bernoulli(p)$, então $X = X_1 + \ldots + X_n \sim binom(n, p)$

Distribuição Binomial

Demostração $E(X)$

Distribuição Binomial

Demostração $E(X)$

Pelo Teorema anterior $X = X_1 + \ldots + X_n \sim binom(n, p)$, em que $X_i \sim bernoulli(p)$. Então

Distribuição Binomial

Demostração $E(X)$

Pelo Teorema anterior $X = X_1 + \ldots + X_n \sim binom(n, p)$, em que $X_i \sim bernoulli(p)$. Então

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Distribuição Binomial

Demostração $V(X)$

Pelo Teorema anterior $X = X_1 + \ldots + X_n \sim binom(n, p)$, em que $X_i \sim bernoulli(p)$. Então

Distribuição Binomial

Demostração $V(X)$

Pelo Teorema anterior $X = X_1 + \ldots + X_n \sim binom(n, p)$, em que $X_i \sim bernoulli(p)$. Então

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

Como os X_i's são independentes

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$
- X : número de sucessos obtidos em $n = 15$ realizações **independentes**

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$
- X : número de sucessos obtidos em $n = 15$ realizações **independentes**

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$
- X : número de sucessos obtidos em $n = 15$ realizações **independentes**

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 15, p = 0.4)$

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$
- X : número de sucessos obtidos em $n = 15$ realizações **independentes**

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 15, p = 0.4)$
- $P(6 \leq X \leq 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$
- X : número de sucessos obtidos em $n = 15$ realizações **independentes**

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 15, p = 0.4)$
- $P(6 \leq X \leq 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$
- $P(6 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X < 6) = P(X \leq 9) - P(X \leq 5)$

Distribuição Binomial: Exemplos

Manualmente

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots, n \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$P(6 \leq X \leq 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$$

Distribuição Binomial: Exemplos

Manualmente

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots, n \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$P(6 \leq X \leq 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$$

$$\underbrace{\binom{15}{6} 0.4^6 (1-0.4)^{15-6}}_{P(X=6)} + \underbrace{\binom{15}{7} 0.4^7 (1-0.4)^{15-7}}_{P(X=7)} +$$

$$\underbrace{\binom{15}{8} 0.4^8 (1-0.4)^{15-8}}_{P(X=8)} + \underbrace{\binom{15}{9} 0.4^9 (1-0.4)^{15-9}}_{P(X=9)}$$

Distribuição Binomial: Exemplos

R

```r
n = 15
p = 0.4
#Primeira forma: p(6) + p(7) + p(8) + p(9)
dbinom(6,n,p) + dbinom(7,n,p) + dbinom(8,n,p) + dbinom(9,n,p)
```

```
## [1] 0.5629511
```

```r
# Segunda forma: F(9)- F(5)
pbinom(9,n,p) - pbinom(5,n,p)
```

```
## [1] 0.5629511
```

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$
- X : número de caras obtidas em $n = 9$ lancamentos.

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$
- X : número de caras obtidas em $n = 9$ lancamentos.

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$
- X : número de caras obtidas em $n = 9$ lancamentos.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 9, p = 0.6)$

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$
- X : número de caras obtidas em $n = 9$ lancamentos.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 9, p = 0.6)$
- A: número de caras obtidas nos $n = 9$ lancamentos é um número par

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$
- X : número de caras obtidas em $n = 9$ lancamentos.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 9, p = 0.6)$
- A: número de caras obtidas nos $n = 9$ lancamentos é um número par
- $P(A) = P(\underbrace{\{X = 2\} \cup \{X = 4\} \cup \{X = 6\} \cup \{X = 8\}}_{\text{Eventos disjuntos}})$

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$
- X : número de caras obtidas em $n = 9$ lancamentos.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 9, p = 0.6)$
- A: número de caras obtidas nos $n = 9$ lancamentos é um número par
- $P(A) = P(\underbrace{\{X = 2\} \cup \{X = 4\} \cup \{X = 6\} \cup \{X = 8\}}_{\text{Eventos disjuntos}})$
- $P(A) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8)$

Distribuição Binomial: Exemplos

Manualmente

$$P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8)$$

Distribuição Binomial: Exemplos

Manualmente

$$P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)+P(X=8)$$

$$\underbrace{\binom{9}{2}0.6^2(1-0.6)^{9-2}}_{P(X=2)}+\underbrace{\binom{9}{4}0.6^4(1-0.6)^{9-4}}_{P(X=4)}+$$
$$\underbrace{\binom{9}{6}0.6^6(1-0.6)^{9-6}}_{P(X=6)}+\underbrace{\binom{9}{8}0.6^8(1-0.6)^{9-8}}_{P(X=8)}$$

Distribuição Binomial: Exemplos

R

```
n = 9
p = 0.6
# Queremos: p(2) + p(4) + p(6) + p(8)
dbinom(2,n,p) + dbinom(4,n,p) + dbinom(6,n,p) + dbinom(8,n,p)
```

```
## [1] 0.4997376
```

Distribuição Binomial: Exemplos

R

```
n = 9
p = 0.6
# Queremos: p(2) + p(4) + p(6) + p(8)
dbinom(2,n,p) + dbinom(4,n,p) + dbinom(6,n,p) + dbinom(8,n,p)
```

```
## [1] 0.4997376
```

Qual o número esperado de caras (em $n = 9$ lancamentos da moeda)?

Distribuição Binomial: Exemplos

R

```
n = 9
p = 0.6
# Queremos: p(2) + p(4) + p(6) + p(8)
dbinom(2,n,p) + dbinom(4,n,p) + dbinom(6,n,p) + dbinom(8,n,p)
```

```
## [1] 0.4997376
```

Qual o número esperado de caras (em $n = 9$ lancamentos da moeda)?

$$E(X) = np = 9 \times 0.6 = 5.4$$

Distribuição Binomial

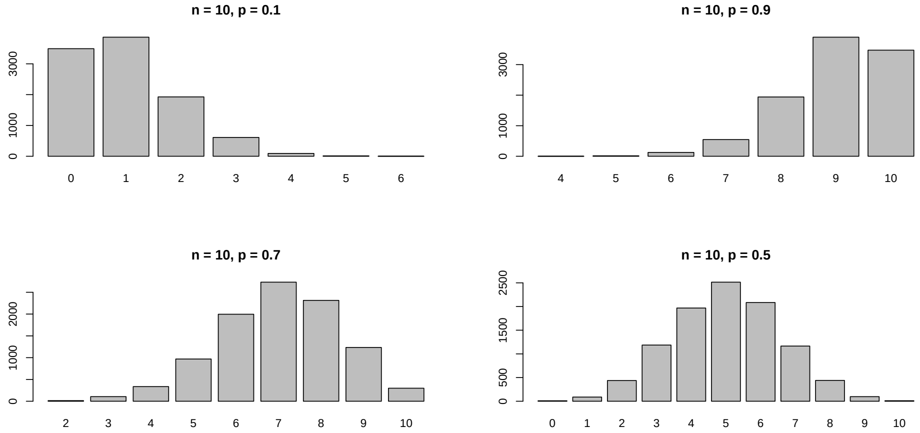


Figura 1: Exemplos: Distribuição Binomial

Distribuição Poisson

Suponha que estamos interessados nas seguintes variáveis aleatórias:

- Número de erros de impressão em uma página (ou em um grupo de páginas).
- Número de pessoas que vivem mais de 105 anos em uma determinada comunidade.
- Número de refrigerantes vendidos em uma determinada loja.
- Número de clientes que entram numa agencia do banco em um dia.
- Número de ciclistas que transitam numa ciclovia em um dia.

Distribuição Poisson

Suponha que estamos interessados nas seguintes variáveis aleatórias:

- Número de erros de impressão em uma página (ou em um grupo de páginas).
- Número de pessoas que vivem mais de 105 anos em uma determinada comunidade.
- Número de refrigerantes vendidos em uma determinada loja.
- Número de clientes que entram numa agencia do banco em um dia.
- Número de ciclistas que transitam numa ciclovia em um dia.

Estas v.a. têm todas a forma:

- X : número de ____________ em um intervalo fixo de **tempo/espaço**

Distribuição Poisson

Distribuição Poisson

A v.a. discreta X (com valores inteiros não negativos) têm distribuição Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, denotada $Pois(\lambda)$, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Distribuição Poisson

Distribuição Poisson

A v.a. discreta X (com valores inteiros não negativos) têm distribuição Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, denotada $Pois(\lambda)$, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- λ : média de ______

Distribuição Poisson

Distribuição Poisson

A v.a. discreta X (com valores inteiros não negativos) têm distribuição Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, denotada $Pois(\lambda)$, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- λ : média de ________
- $E(X) = \lambda$

Distribuição Poisson

Distribuição Poisson

A v.a. discreta X (com valores inteiros não negativos) têm distribuição Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, denotada $Pois(\lambda)$, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- λ : média de ________
- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Distribuição Poisson

Teorema:

Se as v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são independentes e $X_i \sim Pois(\lambda_i)$, então

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$$

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos em uma determinado página livro.

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos em uma determinado página livro.

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos em uma determinado página livro.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 4)$

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos em uma determinado página livro.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 4)$
- $P(X = 0) = \dfrac{e^{-4}4^0}{0!} = 0.01831564$

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos em uma determinado página livro.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 4)$
- $P(X = 0) = \dfrac{e^{-4}4^0}{0!} = 0.01831564$

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos em uma determinado página livro.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 4)$
- $P(X = 0) = \dfrac{e^{-4}4^0}{0!} = 0.01831564$

```
dpois(0,4) #dpois(x,lambda)
```

```
## [1] 0.01831564
```

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus \$ \$ \$. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus \$ \$ \$. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 15$

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus \$ \$ \$. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 15$
- X : número de clientes atendidos por um caixa de supermecado por hora (no horario de pico)

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus $ $ $. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 15$
- X : número de clientes atendidos por um caixa de supermecado por hora (no horario de pico)

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus \$ \$ \$. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 15$
- X : número de clientes atendidos por um caixa de supermecado por hora (no horario de pico)

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 15)$

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus \$ \$ \$. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 15$
- X : número de clientes atendidos por um caixa de supermecado por hora (no horario de pico)

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 15)$
- $P(X \geq 22) = 1 - P(X < 22) = 1 - P(X \leq 21)$

Distribuição Poisson: Exemplo

Manualmente

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Distribuição Poisson: Exemplo

Manualmente

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$P(X \geq 22) = 1 - P(X < 22) = 1 - P(X \leq 21)$$

Distribuição Poisson: Exemplo

Manualmente

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$P(X \geq 22) = 1 - P(X < 22) = 1 - P(X \leq 21)$$

Como $\lambda = 15$, pela função de probabilidade da distribuição Poisson temos:

$$P(X \geq 22) = 1 - \sum_{x=0}^{21} \frac{e^{-15}15^x}{x!}$$

Distribuição Poisson: Exemplo

R

```
lambda = 15
# Queremos 1-P(X <= 21)
1-ppois(21,lambda)
```

```
## [1] 0.05310641
```

```
# Outra forma
x = 0:21
1-sum(dpois(x, lambda))
```

```
## [1] 0.05310641
```

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas no RJ é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos do RJ, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas no RJ é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos do RJ, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.005$

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas no RJ é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos do RJ, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.005$
- X : número de pessoas Daltonicas em uma amostra de $n = 600$ pessoas de SP

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas no RJ é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos do RJ, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.005$
- X : número de pessoas Daltonicas em uma amostra de $n = 600$ pessoas de SP

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas no RJ é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos do RJ, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.005$
- X : número de pessoas Daltonicas em uma amostra de $n = 600$ pessoas de SP

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(600, 0.005)$

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas no RJ é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos do RJ, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.005$
- X : número de pessoas Daltonicas em uma amostra de $n = 600$ pessoas de SP

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(600, 0.005)$
- $P(X \leq 2) =$
$$\underbrace{\binom{600}{0}p^0(1-p)^{600}}_{P(X=0)} + \underbrace{\binom{600}{1}p^1(1-p)^{599}}_{P(X=1)} + \underbrace{\binom{600}{2}p^2(1-p)^{598}}_{P(X=2)}$$

Distribuição Poisson: Exemplo

Quando n é grande é p pequeno, podemos utilizar a **Aproximação Poisson à Binomial**

Aproximação Poisson à Binomial

Seja $X \sim binom(n, p)$ com $n \longrightarrow \infty$ e $p \longrightarrow 0$. Então

$$binom(n, p) \longrightarrow Pois(\lambda = np)$$

Distribuição Poisson: Exemplo

- $\lambda = np = 600 \times 0.005 = 3$

```r
# Aproximação
lambda = 3
ppois(2,lambda)
```

```
## [1] 0.4231901
```

```r
# Valor exato
n = 600
p = 0.005
pbinom(2,n,p)
```

```
## [1] 0.4226285
```

Regra de bolso: $n > 50$ e $np < 5$

Distribuição Poisson: Exemplo

4. Na cidade de Niteroi acontecem, em média 5 acidentes de carro por dia. Qual é a probabilidade de termos mais de 50 accidentes em uma determinada semana?

Distribuição Poisson: Exemplo

4. Na cidade de Niteroi acontecem, em média 5 acidentes de carro por dia. Qual é a probabilidade de termos mais de 50 accidentes em uma determinada semana?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 5$ (accidentes por dia)

Distribuição Poisson: Exemplo

4. Na cidade de Niteroi acontecem, em média 5 acidentes de carro por dia. Qual é a probabilidade de termos mais de 50 accidentes em uma determinada semana?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 5$ (accidentes por dia)
- X : número de accidentes em uma semana.

Distribuição Poisson: Exemplo

4. Na cidade de Niteroi acontecem, em média 5 acidentes de carro por dia. Qual é a probabilidade de termos mais de 50 accidentes em uma determinada semana?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 5$ (accidentes por dia)
- X : número de accidentes em uma semana.

Distribuição Poisson: Exemplo

4. Na cidade de Niteroi acontecem, em média 5 acidentes de carro por dia. Qual é a probabilidade de termos mais de 50 accidentes em uma determinada semana?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 5$ (accidentes por dia)
- X : número de accidentes em uma semana.

λ e X devem estar **sempre** no mesmo intervalo de tempo/espaço.

- $\lambda * = 5 \times 7$ (accidentes por semana)

Distribuição Poisson: Exemplo

4. Na cidade de Niteroi acontecem, em média 5 acidentes de carro por dia. Qual é a probabilidade de termos mais de 50 accidentes em uma determinada semana?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 5$ (accidentes por dia)
- X : número de accidentes em uma semana.

λ e X devem estar **sempre** no mesmo intervalo de tempo/espaço.

- $\lambda * = 5 \times 7$ (accidentes por semana)
- X : número de accidentes em uma semana.

Distribuição Poisson: Exemplo

Segunda passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 35)$

Distribuição Poisson: Exemplo

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 35)$
- $P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - \sum_{x=0}^{50} \frac{35^x e^{-35}}{x!}$

Distribuição Poisson: Exemplo

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 35)$
- $P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - \sum_{x=0}^{50} \frac{35^x e^{-35}}{x!}$

Distribuição Poisson: Exemplo

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 35)$
- $P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - \sum_{x=0}^{50} \frac{35^x e^{-35}}{x!}$

R

```r
1-ppois(50, lambda = 35)
```

```
## [1] 0.006534035
```

Distribuição Poisson: Exemplo

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(\lambda = 35)$
- $P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - \sum_{x=0}^{50} \frac{35^x e^{-35}}{x!}$

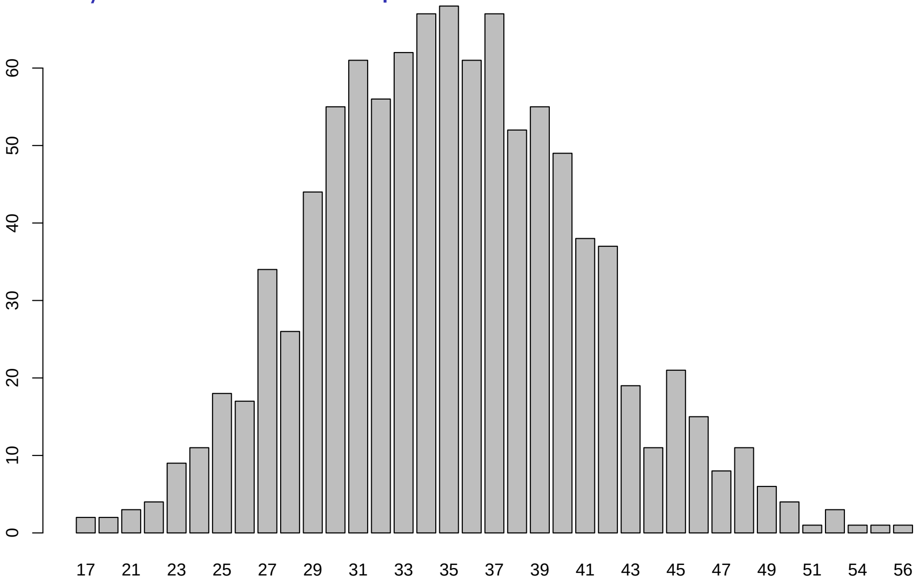
R

```
1-ppois(50, lambda = 35)
```

```
## [1] 0.006534035
```

Vejamos um gráfico de barras para 1000 valores simulados de uma distribuição Poisson$(\lambda = 35)$.

Distribuição Poisson: Exemplo



Distribuição Poisson

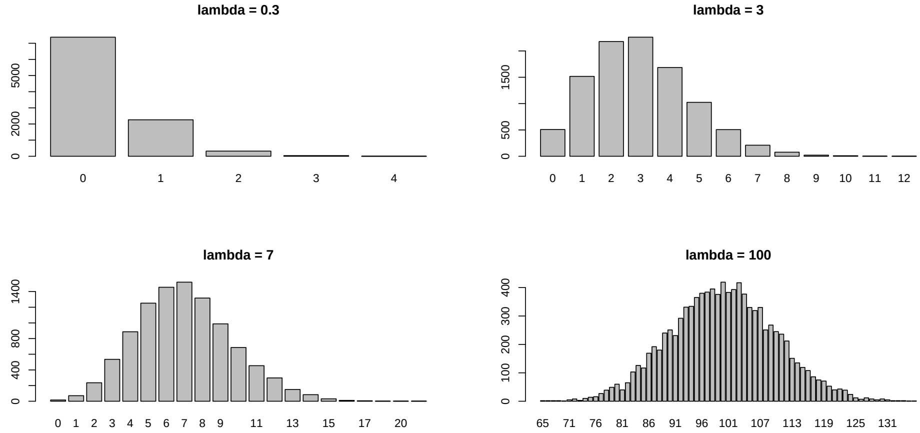


Figura 2: Exemplos: Distribuição Poisson

Distribuição Hipergeométrica

Uma urna contém A bolas vermelhas e B bols azuis, suponha que selecionames **sem reposição** n bolas e seja X o número de bolas vermelhas obtidas.

Distribução Hipergeométrica

Uma urna contém A bolas vermelhas e B bols azuis, suponha que selecionames **sem reposição** n bolas e seja X o número de bolas vermelhas obtidas.

Neste experimento os ensaios não são mais independentes, pois depois selecionar a primeira bola, a probabilidade de obter uma bola, digamos, vermelha, muda.

Distribuição Hipergeométrica

Uma urna contém A bolas vermelhas e B bols azuis, suponha que selecionames **sem reposição** n bolas e seja X o número de bolas vermelhas obtidas.

Neste experimento os ensaios não são mais independentes, pois depois selecionar a primeira bola, a probabilidade de obter uma bola, digamos, vermelha, muda.

Este tipo de problemas, é resolvido utilizando a distribuição Hipergeométrica.

Distribuição Hipergeométrica

Distribuição Hipergeométrica

A v.a. discreta X têm distribuição Hipergeométrica com parâmetros N, n e r, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots, r \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases},$$

em que N é o numero total de elementos na população, n é o tamanho da amostra e r é número de *sucessos* (ex: bolas vermelhas).

Distribuição Hipergeométrica

Distribuição Hipergeométrica

A v.a. discreta X têm distribuição Hipergeométrica com parâmetros N, n e r, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots, r \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases},$$

em que N é o numero total de elementos na população, n é o tamanho da amostra e r é número de *sucessos* (ex: bolas vermelhas).

- X : número de sucessos na amostra de n elementos.
- $\mathbb{E}(X) = \frac{n \times r}{N}$, $\quad \mathbb{V}(X) = \frac{n \times r}{N} \times \frac{N - r}{N} \times \frac{N - n}{N - 1}$

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

1. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 10 bolas azuis. Se selecionarmos 7 bolas ao acaso e sem substituição. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 3 bolas vermelhas?

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

1. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 10 bolas azuis. Se selecionarmos 7 bolas ao acaso e sem substituição. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 3 bolas vermelhas?

Primeiro passo: Informações

- $r = 5$ (caracteristica de interesse: bolas vermelhas).

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

1. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 10 bolas azuis. Se selecionarmos 7 bolas ao acaso e sem substituição. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 3 bolas vermelhas?

Primeiro passo: Informações

- $r = 5$ (caracteristica de interesse: bolas vermelhas).
- $N = 5 + 10 = 15$ (número total de bolas na urna).

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

1. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 10 bolas azuis. Se selecionarmos 7 bolas ao acaso e sem substituição. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 3 bolas vermelhas?

Primeiro passo: Informações

- $r = 5$ (caracteristica de interesse: bolas vermelhas).
- $N = 5 + 10 = 15$ (número total de bolas na urna).
- $n = 7$ (número de bolas selecionadas).

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

1. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 10 bolas azuis. Se selecionarmos 7 bolas ao acaso e sem substituição. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 3 bolas vermelhas?

Primeiro passo: Informações

- $r = 5$ (caracteristica de interesse: bolas vermelhas).
- $N = 5 + 10 = 15$ (número total de bolas na urna).
- $n = 7$ (número de bolas selecionadas).
- X : número de bolas vermelhas na amostra

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

1. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 10 bolas azuis. Se selecionarmos 7 bolas ao acaso e sem substituição. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 3 bolas vermelhas?

Primeiro passo: Informações

- $r = 5$ (caracteristica de interesse: bolas vermelhas).
- $N = 5 + 10 = 15$ (número total de bolas na urna).
- $n = 7$ (número de bolas selecionadas).
- X : número de bolas vermelhas na amostra

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

1. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 10 bolas azuis. Se selecionarmos 7 bolas ao acaso e sem substituição. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 3 bolas vermelhas?

Primeiro passo: Informações

- $r = 5$ (caracteristica de interesse: bolas vermelhas).
- $N = 5 + 10 = 15$ (número total de bolas na urna).
- $n = 7$ (número de bolas selecionadas).
- X : número de bolas vermelhas na amostra

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Hiper(N = 15, n = 7, r = 5)$

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

1. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 10 bolas azuis. Se selecionarmos 7 bolas ao acaso e sem substituição. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 3 bolas vermelhas?

Primeiro passo: Informações

- $r = 5$ (caracteristica de interesse: bolas vermelhas).
- $N = 5 + 10 = 15$ (número total de bolas na urna).
- $n = 7$ (número de bolas selecionadas).
- X : número de bolas vermelhas na amostra

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Hiper(N = 15, n = 7, r = 5)$
- $P(X \geq 3) = \underbrace{\frac{\binom{5}{3}\binom{10}{2}}{\binom{15}{5}}}_{P(X=3)} + \underbrace{\frac{\binom{5}{4}\binom{10}{1}}{\binom{15}{5}}}_{P(X=4)} + \underbrace{\frac{\binom{5}{5}\binom{10}{0}}{\binom{15}{5}}}_{P(X=5)}$

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

R

```r
r = 5
N = 15
n = 7
# Queremos P(X >= 3)
sum(dhyper(3:r, m = r, n = N-r, k = n))
```

```
## [1] 0.4265734
```

```r
# Outra forma: P(X >= 3) = 1-P(X<3) = 1-P(X <= 2)
1-phyper(2, m = r, n = N-r, k = n)
```

```
## [1] 0.4265734
```

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

2. A turma de ACA228 (Reg. Prev.) possui 18 alunos, dos quais 12 gostam do R e 6 não gostam tanto assim. Se selecionarmos 5 alunos:

a. Qual é a probabilidade de 3 deles gostarem do R?
b. Qual é a probabilidade da maioria (3 ou mais) gostarem do R?

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

2. A turma de ACA228 (Reg. Prev.) possui 18 alunos, dos quais 12 gostam do R e 6 não gostam tanto assim. Se selecionarmos 5 alunos:

a. Qual é a probabilidade de 3 deles gostarem do R?
b. Qual é a probabilidade da maioria (3 ou mais) gostarem do R?

Primeiro passo: Informações

- $N = 18$, $r = 12$ e $n = 5$

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

2. A turma de ACA228 (Reg. Prev.) possui 18 alunos, dos quais 12 gostam do R e 6 não gostam tanto assim. Se selecionarmos 5 alunos:

a. Qual é a probabilidade de 3 deles gostarem do R?
b. Qual é a probabilidade da maioria (3 ou mais) gostarem do R?

Primeiro passo: Informações

- $N = 18$, $r = 12$ e $n = 5$
- X : número de alunos na amostra que gostam do R.

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

2. A turma de ACA228 (Reg. Prev.) possui 18 alunos, dos quais 12 gostam do R e 6 não gostam tanto assim. Se selecionarmos 5 alunos:

a. Qual é a probabilidade de 3 deles gostarem do R?
b. Qual é a probabilidade da maioria (3 ou mais) gostarem do R?

Primeiro passo: Informações

- $N = 18$, $r = 12$ e $n = 5$
- X : número de alunos na amostra que gostam do R.

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

2. A turma de ACA228 (Reg. Prev.) possui 18 alunos, dos quais 12 gostam do R e 6 não gostam tanto assim. Se selecionarmos 5 alunos:

a. Qual é a probabilidade de 3 deles gostarem do R?
b. Qual é a probabilidade da maioria (3 ou mais) gostarem do R?

Primeiro passo: Informações

- $N = 18$, $r = 12$ e $n = 5$
- X : número de alunos na amostra que gostam do R.

Segundo passo: Análise e Cálculo

$$X \sim Hiper(N = 18, n = 5, r = 12)$$

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

$$X \sim Hiper(N = 18, n = 5, r = 12)$$

a. $P(X = 3) = \dfrac{\binom{12}{3}\binom{6}{2}}{\binom{18}{5}}$

b. $P(X \geq 3) = \underbrace{\dfrac{\binom{12}{3}\binom{6}{2}}{\binom{18}{5}}}_{P(X=3)} + \underbrace{\dfrac{\binom{12}{4}\binom{6}{1}}{\binom{18}{5}}}_{P(X=4)} + \underbrace{\dfrac{\binom{12}{5}\binom{6}{0}}{\binom{18}{5}}}_{P(X=5)}$

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

R

```r
r = 12
N = 18
n = 5
# a. P(X=3)
dhyper(3, m = r, n = N-r, k = n)
```

```
## [1] 0.3851541
```

```r
# b. P(X>=3)  = 1-P(X<3) = 1- P(X <= 2)
1-phyper(2, m = r, n = N-r, k = n)
```

```
## [1] 0.8242297
```

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

3. O grupo de estudos CIA (Causal Inference and Analytics)[1] têm 30 alunos, dos quais 25 são da FACC e 5 são externos. Se selecionarmos 6 alunos aleatoriamente, qual é a probablidade de que todos os alunos sejam da FACC?

[1] ctruciosm.github.io/CIA

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

3. O grupo de estudos CIA (Causal Inference and Analytics)[1] têm 30 alunos, dos quais 25 são da FACC e 5 são externos. Se selecionarmos 6 alunos aleatoriamente, qual é a probablidade de que todos os alunos sejam da FACC?

Primeiro passo: Informações

- $N = 30$, $r = 25$ e $n = 6$

[1] ctruciosm.github.io/CIA

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

3. O grupo de estudos CIA (Causal Inference and Analytics)[1] têm 30 alunos, dos quais 25 são da FACC e 5 são externos. Se selecionarmos 6 alunos aleatoriamente, qual é a probablidade de que todos os alunos sejam da FACC?

Primeiro passo: Informações

- $N = 30$, $r = 25$ e $n = 6$
- X : número de alunos na amostra que são da FACC.

[1] ctruciosm.github.io/CIA

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

3. O grupo de estudos CIA (Causal Inference and Analytics)[1] têm 30 alunos, dos quais 25 são da FACC e 5 são externos. Se selecionarmos 6 alunos aleatoriamente, qual é a probablidade de que todos os alunos sejam da FACC?

Primeiro passo: Informações

- $N = 30$, $r = 25$ e $n = 6$
- X : número de alunos na amostra que são da FACC.

[1] ctruciosm.github.io/CIA

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

3. O grupo de estudos CIA (Causal Inference and Analytics)[1] têm 30 alunos, dos quais 25 são da FACC e 5 são externos. Se selecionarmos 6 alunos aleatoriamente, qual é a probablidade de que todos os alunos sejam da FACC?

Primeiro passo: Informações

- $N = 30$, $r = 25$ e $n = 6$
- X : número de alunos na amostra que são da FACC.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Hiper(N = 18, n = 5, r = 12)$

[1] ctruciosm.github.io/CIA

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

3. O grupo de estudos CIA (Causal Inference and Analytics)[1] têm 30 alunos, dos quais 25 são da FACC e 5 são externos. Se selecionarmos 6 alunos aleatoriamente, qual é a probablidade de que todos os alunos sejam da FACC?

Primeiro passo: Informações

- $N = 30$, $r = 25$ e $n = 6$
- X : número de alunos na amostra que são da FACC.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Hiper(N = 18, n = 5, r = 12)$
- $P(X = 6) = \frac{\binom{25}{6}\binom{5}{0}}{\binom{30}{6}}$

[1] ctruciosm.github.io/CIA

Distribuição Hipergeométrica: Exemplo

R

```r
r = 25
N = 30
n = 6
# Queremos P(X = 6)
dhyper(6, m = r, n = N-r, k = n)
```

```
## [1] 0.2982611
```

Distribuição Hipergeométrica

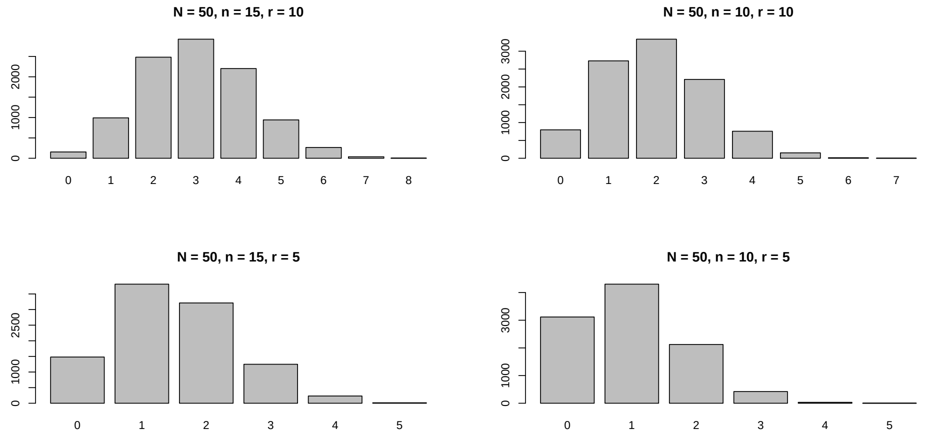


Figura 3: Exemplos: Distribuição Hipergeométrica

Resumo

Distr.	Parâm.	$P(X = x)$	R: $P(X = x)$
Binom.	$n,\ p$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	`dbinom(x,n,p)`
Pois.	λ	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	`dpois(x,`λ`)`
Hiper.	$N,\ n,\ r$	$\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	`dhyper(x,r,N-r,n)`

Resumo

Distr.	Parâm.	$P(X = x)$	R: $P(X = x)$
Binom.	$n,\ p$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	`dbinom(x,n,p)`
Pois.	λ	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	dpois(x,λ)
Hiper.	$N,\ n,\ r$	$\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	`dhyper(x,r,N-r,n)`

Se quisermos $P(X \leq x)$ substituimos a letra `d` pela letra `p` nas funções do R: `pbinom()`, `ppois()`, `phyper()`.

Resumo

Distr.	Parâm.	$P(X = x)$	R: $P(X = x)$
Binom.	n, p	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	`dbinom(x,n,p)`
Pois.	λ	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	dpois(x,λ)
Hiper.	N, n, r	$\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	`dhyper(x,r,N-r,n)`

Se quisermos $P(X \leq x)$ substituimos a letra `d` pela letra `p` nas funções do R: `pbinom()`, `ppois()`, `phyper()`.

Binomial ou Hipergeometrica? Se conhecermos N e a amostra é sem reposição, então é Hipergeométrica.

Leituras recomendadas

- Anderson, D. R; Sweeney, D. J.; e Williams, T. A. (2008). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*. 2ed. Cengage Learning. **Cap 5**
- Morettin, P.A; e Bussab, W. de O. (2004). *Estatística Básica*. 5ed, Saraiva. **Cap 6**