PRML 演習 1.18

@daimatz

D 次元の単位球の表面積 S_D、体積 V_D を導くのに (1.126) を使うことができる。これにはまず、直交座標から極座標への変換から導かれる

$$\prod_{i=1}^{D}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2}dx_i = S_D \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{D-1} dr \tag{1.142}$$

という事実を考える。ガンマ関数の定義 (1.141) と (1.126) から、この式の両辺を評価し、

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \tag{1.143}$$

を示せ。次に半径 0 から 1 まで積分し、 D 次元単位球の体積が

$$V_D = \frac{S_D}{D} \tag{1.144}$$

で与えられることを示せ。最後に $\Gamma(1) = 1$ および $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ から、(1.143) と (1.144) が $D = 2$ および $D = 3$ の通常の表現に帰着されることを示せ。

(1.126) は

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right) dx \\ &= (2\pi\sigma^2)^{1/2} \end{aligned}$$

で、 $\sigma = 1/\sqrt{2}$ とすると

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \\ &= \pi^{1/2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (1.142)\ \text{の左辺} &= \prod_{i=1}^{D} I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \pi^{D/2} \end{aligned}$$

また (1.142) の右辺の積分は、変数変換 $r^2 = t$ とすると $2rdr = dt$ なので

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{D-1} dr &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{D}{2}-1} \cdot \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \end{aligned}$$

これらを (1.142) に代入して

$$\pi^{D/2} = S_D \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$$

よって

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$$

また、半径 1 の D 次元球の表面積が S_D なのだから、半径 r の D 次元球の表面積は $r^{D-1}S_D$ となる。よってこの r を 0 から 1 まで積分することによって半径 1 の D 次元球の体積 V_D が求められて、

$$V_D = \int_0^1 r^{D-1} S_D dr = \frac{S_D}{D}$$

となる。

$D = 2$ の場合「2 次元単位球の表面積＝単位円の周長」「2 次元単位球の体積＝単位円の面積」である。

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi \\ V_2 &= \frac{S_2}{2} = \pi \end{aligned}$$

$D = 3$ の場合

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 4\pi \\ V_3 &= \frac{S_3}{3} = \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$