

## PRML 演習問題 2.3, 2.4

@americiumian

平成 24 年 10 月 12 日

### 2.3

この演習問題では、二項分布 (2.9) が正規化されていることを証明する。まず、全部で  $N$  個ある対象から  $m$  個の同じものを選ぶ組み合わせの数の定義 (2.10) を用いて、

$$\binom{N}{m} + \binom{N}{m-1} = \binom{N+1}{m} \quad (1)$$

を示せ。この結果を用い、帰納法で次の結果を証明せよ。

$$(1+x)^N = \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} x^m \quad (2)$$

これは**二項定理** (binomial theorem) として知られ、全ての実数値について成り立つ。最後に、二項分布が次のように正規化されていることを、 $(1-\mu)^N$  を和の外に出してから、二項定理を使うことで示せ。

$$\sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \mu^m (1-\mu)^{N-m} = 1 \quad (3)$$

---

#### 2.3.1

式 (1) を証明する。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \binom{N}{m} + \binom{N}{m-1} \\ &= \frac{N!}{m!(N-m)!} + \frac{N!}{(m-1)!(N-m+1)!} \\ &= N! \left( \frac{N-m+1}{m!(N-m+1)!} + \frac{m}{m!(N-m+1)!} \right) \\ &= \frac{(N+1)!}{m!(N+1-m)!} \\ &= \binom{N+1}{m} \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

より、成立。

### 2.3.2

式 (2) を，数学的帰納法を用いて証明する．

1.  $N = 0$  の時

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (1+x)^0 = 1 \\(\text{右辺}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^0 = 1\end{aligned}$$

より，成立

2.  $N = k$  の時成立すると仮定し， $N = k+1$  の時に成立することを示す．

$N = k$  の時に成立すると仮定したため，

$$(1+x)^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} x^m \quad (4)$$

式 (4) の両辺に  $(1+x)$  をかけて，

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= \sum_{m=0}^k \left\{ \binom{k}{m} x^m + \binom{k}{m} x^{m+1} \right\} \\&= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} x^m + \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} x^{m+1} \\&= \left( 1 + \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} x^m \right) + \left( \sum_{m=1}^k \binom{k}{m-1} x^m + x^{k+1} \right) \\&= 1 + x^{k+1} + \sum_{m=1}^k \left\{ \binom{k}{m} + \binom{k}{m-1} \right\} x^m \\&= 1 + x^{k+1} + \sum_{m=1}^k \binom{k+1}{m} x^m \\&= \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} x^m\end{aligned}$$

より成立．

従って，任意の自然数  $N$  について，

$$(1+x)^N = \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} x^m \quad (5)$$

が成立する．

### 2.3.3

式 (3) を証明する．

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \mu^m (1-\mu)^{N-m} \\
&= (1-\mu)^N \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^m \\
&= (1-\mu)^N \left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right)^N \\
&= (1-\mu)^N \left(\frac{1}{1-\mu}\right)^N \\
&= 1
\end{aligned}$$

より, 成立.

## 2.4

二項分布の平均が (2.11) であることを示せ. これには, 正規化条件 (2.64) の両辺を  $\mu$  で微分し, 変形して  $n$  の平均を求めよ. 同様に, (2.264) の両辺を  $\mu$  について 2 階微分し, 二項分布の平均 (2.11) も用いて, 二項分布の分散の結果 (2.12) を証明せよ.

### 2.4.1

二項分布の平均が式 (2.11) で表されることを示す.

式 (3) の両辺を  $\mu$  で偏微分して,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \{m\mu^{m-1}(1-\mu)^{N-m} - (N-m)\mu^N(1-\mu)^{N-m-1}\} = 0 \quad (6) \\
\Leftrightarrow \quad &\frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} m\mu^{m-1}(1-\mu)^{N-m} = \frac{1}{1-\mu} \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} (N-m)\mu^N(1-\mu)^{N-m}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^N \binom{N}{m} m\mu^{m-1}(1-\mu)^{N-m} &= E[m] \\
\sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \mu^{m-1}(1-\mu)^{N-m} &= 1
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} E[m] &= \frac{1}{1-\mu} (N - E[m]) \\
\frac{1}{\mu(1-\mu)} E[m] &= \frac{1}{1-\mu} N \\
E[m] &= N\mu
\end{aligned}$$

### 2.4.2

二項分布の分散が式 (2.12) で表されることを示す.

式 (6) の両辺を  $\mu$  で偏微分して,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \{m(m-1)\mu^{m-2}(1-\mu)^{N-m} - 2m(N-m)\mu^{m-1}(1-\mu)^{N-m-1} \\ & + (N-m)(N-m-1)\mu^m(1-\mu)^{N-m-2}\} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\mu^2}(E[m^2] - E[m]) - \frac{2}{\mu(1-\mu)}(NE[m] - E[m^2]) + \frac{1}{(1-\mu)^2}\{N(N-1) + E[m^2] - N(2N-1)\} = 0 \end{aligned}$$

式 (2.11) より,  $E[m] = N\mu$  なので,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (1-\mu)^2 E[m^2] - N\mu(1-\mu)^2 - 2N^2\mu^2(1-\mu) + 2\mu(1-\mu)E[m^2] \\ & + N(N-1)\mu^2 + \mu^2 E[m^2] - N(2N-1)\mu^3 = 0 \\ \Leftrightarrow & (1-2\mu+\mu^2+2\mu-2\mu^2+\mu^2)E[m^2] = N\mu(1-\mu)^2 + 2N^2\mu^2(1-\mu) - N(N-1)\mu^2 + N(2N-1)\mu^3 \\ \Leftrightarrow & E[m^2] = \mu N(-\mu + \mu N + 1) \\ \Leftrightarrow & E[m^2] = N\mu(\mu - 1) + N^2\mu^2 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N (x - E[x])^2 \text{Bin}(x|m, N) &= \sum_{m=0}^N x^2 \text{Bin}(x|m, N) - 2E[x] \sum_{m=0}^N x \text{Bin}(x|m, N) + E[x]^2 \sum_{m=0}^N \text{Bin}(x|m, N) \\ &= E[x^2] - 2E[x]^2 + E[x]^2 \\ &= E[x^2] - E[x]^2 \\ &= \{N\mu(\mu - 1) + N^2\mu^2\} - N^2\mu^2 \\ &= N\mu(1 - \mu) \end{aligned}$$