

PRML 演習問題 1.34

@americiumian

平成 24 年 9 月 26 日

1 問題

変分法を使って, (1.108) 式の上にある汎関数の停留点が (1.108) で与えられることを示せ. また, 制約 (1.105), (1.106), (1.107) を使ってラグランジュ乗数を消去し, 最大エントロピー解がガウス分布 (1.109) で与えられることを示せ.

2 解答

$$-\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx + \lambda_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx - 1 \right) + \lambda_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx - \mu \right) + \lambda_3 \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx - \sigma^2 \right) \quad (1)$$

を $p(x)$ について最大化する.

$$\begin{aligned} (1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{-p(x) \log p(x) + \lambda_1 p(x) + \lambda_2 xp(x) + \lambda_3 (x - \mu)^2 p(x)\} dx + (-\lambda_1 - \mu\lambda_2 - \sigma^2\lambda_3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{-p(x) \log p(x) + \lambda_1 p(x) + \lambda_2 xp(x) + \lambda_3 (x - \mu)^2 p(x) + (-\lambda_1 - \mu\lambda_2 - \sigma^2\lambda_3)q(x)\} dx \\ &\quad \left(\text{ただし, } q(x) \text{ は } \int_{-\infty}^{\infty} q(x) dx = 1 \text{ を満たす関数} \right) \end{aligned}$$

この式を $F[p]$ と置く. F の被積分関数に p' は含まれていないため, 停留条件は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial p} = 0 \\ \Leftrightarrow &-(\log p(x) + 1) + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 (x - \mu)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &p(x) = \exp\{-1 + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 (x - \mu)^2\} \\ \Leftrightarrow &p(x) = \exp\left\{-1 + \lambda_1 + \lambda_3 \left(x^2 - 2\left(\mu - \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\right)x\right) + \lambda_3 \mu^2\right\} \\ \Leftrightarrow &p(x) = \exp\left\{-1 + \lambda_1 + \lambda_3 \mu^2 + \lambda_3 \left(x - \left(\mu - \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\right)\right)^2 - \left(\mu - \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\right)^2\right\} \\ &\text{ここで, } \mu - \frac{\lambda_2}{2\lambda_3} = m, \lambda_3 = -\frac{1}{2s^2} \text{ とおくと,} \\ \Leftrightarrow &p(x) = \exp\{-1 + \lambda_1 + \lambda_3 \mu^2 - m^2\} \exp\left\{-\frac{(x - m)^2}{2s^2}\right\} \end{aligned}$$

式 (1.105) より,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \\ \Leftrightarrow & \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-1 + \lambda_1 + \lambda_3 \mu^2 - m^2\} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2s^2} \right\} dx = 1 \\ \Leftrightarrow & \exp \{-1 + \lambda_1 + \lambda_3 \mu^2 - m^2\} \sqrt{2\pi s^2} = 1 \\ \Leftrightarrow & \exp \{-1 + \lambda_1 + \lambda_3 \mu^2 - m^2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2s^2} \right\}$$

式 (1.106) より,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \mu \\ \Leftrightarrow & m = \mu \end{aligned}$$

式 (1.107) より,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x) dx = \sigma^2 \\ \Leftrightarrow & s^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\therefore p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

従って, 制約 (1.105),(1.106),(1.107) の下での, 微分エントロピーの最大値はガウス分布となる.