

PRML 演習問題 1.17

@daimatz

ガンマ関数は

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du \quad (1.141)$$

で定義される。部分積分を使って関係式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を証明せよ。また、 $\Gamma(1) = 1$ を示し、 x が整数なら $\Gamma(x+1) = x!$ となることを示せ。

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} u^x e^{-u} du \\ &= [-ue^{-u}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} xu^{x-1} \cdot (-e^{-u}) du \\ &= x \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du = x\Gamma(x) \end{aligned}$$

また

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-u} du = [-e^{-u}]_0^{\infty} = 1$$

より

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\ &= x \times (x-1)\Gamma(x-1) \\ &= \dots \\ &= x \times (x-1) \times \dots \times 2 \times 1 \cdot \Gamma(1) \\ &= x! \end{aligned}$$