# Содержание

# 1 Множества и отношения

## 1.1 Основные понятия

**Множество** – любая определенная совокупность объектов. Элементы множества различны и отличными друг от друга.

Под **множеством** понимают любой набор определенных и различимых между собой объектов, мыслимый как единое целое. Объекты, из которых составлено множество, называются его **элементами**.

Множества обычно обозначатся заглавными латинскими буквами: $A, B, C, \ldots$. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами: $a, b, c, \ldots$.

Для обозначения того, что объект $x$ является, либо не является элементом множества $A$, используют символику:

- $x \in A$ – объект $x$ является элементом множества $A$.
- $x \notin A$ – объект $x$ не является элементом множества $A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\varnothing$.

Множество, из элементов которого составляют конкретное множество, называют **универсальным** и обозначается символом $U$.

Множество $U$ называется **универсальным** для данной задачи, если все рассматриваемые в этой задаче множества являются его подмножествами.

Множества можно изображать с помощью кругов, которые называются **кругами Эйлера** или **диаграммами Венна**. Универсальное множество принято обозначать прямоугольником.

Способы задания множества:

1. перечислением всех элементов множества (в фигурных скобках через запятую):
$$A = \{1, 2, 3, 4\};$$
2. характеристическим предикатом, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество. Характеристический предикат записывается после двоеточия или символа «|»:
$$A = \{x : P(x)\} \quad \text{или} \quad A = \{x \mid P(x)\}$$
где $P(x)$ – характеристический предикат.

Обозначения числовых множеств:

- $\mathbb{N}$ – множества натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z}$ – множества целых чисел, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;

- $\mathbb{Q}$ – множество рациональных числе, $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \right\}$;
- $\mathbb{R}$ – множество действительных (вещественных) чисел;
- $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

## 1.2 Сравнение множеств

Множество $A$ называется **подмножеством** множества $B$ (множество $A$ содержится в $B$, множество $B$ включает множество $A$), если каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$:

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A \implies x \in B.$$

$B$ называется **надмножеством** множества $A$.

Под определению пустое множество является подмножеств всех множеств:

$$\forall M \implies \varnothing \subseteq M.$$

Универсальное множество содержит все множества:

$$\forall M \implies M \subseteq U.$$

Два множества называют **равными**, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A.$$

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то множество $A$ называется **собственным** подмножеством множества $B$, а $B$ – **собственным** надмножеством $A$.

Множества $A$ и $B$ **сравнимые**, если $A \subseteq B \lor B \subseteq A$. Иначе множества называются **несравнимыми**.

## 1.3 Свойства включения множеств

**Свойство 1.**

$$\forall A \implies A \subseteq A.$$

**Свойство 2.**

$$\forall A, B : A \subseteq B \land B \subseteq A \implies A = B.$$

**Свойство 3.**

$$\forall A, B, C : A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

## 1.4 Мощность множества

Говорят, что между множествами $A$ и $B$ установлено **взаимно-однозначное соответствие**, если каждому элементу множества $A$ поставлен в соответствие один и только один элемент множества $B$, и каждому элементу множества $B$ поставлен в соответствие один и только один элемент множества $A$:

$$A\tilde{B} \iff \begin{cases} \forall a \in A \rightarrowtail !b \in B \\ \forall b \in B \rightarrowtail !a \in A \end{cases}$$

Два множества (конечных или бесконечных) имеют **одинаковую мощность**, если между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие. В этом случае говорят, что множества $A$ и $B$ **изоморфны**, имеют одинаковую **мощность**, или что они **равномощны**, и обозначают $|A| = |B|$.

Множество $A$ называется **конечным**, если у него нет равномощного собственного подмножества:

$$\forall B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \implies B = A.$$

Для конечного множества используется запись $|A| < \infty$.

Множество **бесконечно** тогда и только тогда, когда оно имеет одинаковую мощность с некоторым своим подмножеством, не совпадающим с самим этим множеством:

$$\exists B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \wedge B = A.$$

То есть бесконечное множество равномощно некоторому своему собственному подмножеству. Для бесконечного множества используется запись $|A| = \infty$.

Множество $X$ называется **счетным**, если его мощность равна мощности множества натуральных чисел, т. е. $|X| = |\mathbb{N}|$.

Говорят, что множество $X$ – множество **мощности континуума**, если его мощность равна мощности множества точек на отрезке $[0, 1]$.

Теорема Кантора о несчетности:

Отрезок $[0, 1]$ несчетен, т. е. $|[0, 1]| > |\mathbb{N}|$.

## 1.5 Операции над множествами

**Объединением** двух множеств называется множество, содержащее все элементы обоих множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

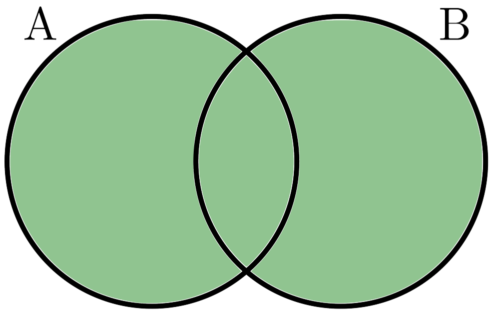


Рис. 1.1: Объединение двух множеств

**Пересечение** двух множеств называется множество, состоящее из элементов входящих в каждое из множеств $A$ и $B$:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

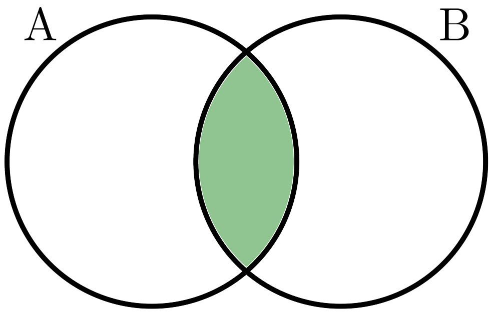


Рис. 1.2: Пересечение двух множеств

**Разностью** множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из всех элементов множества $A$, не содержащихся в множестве $B$:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

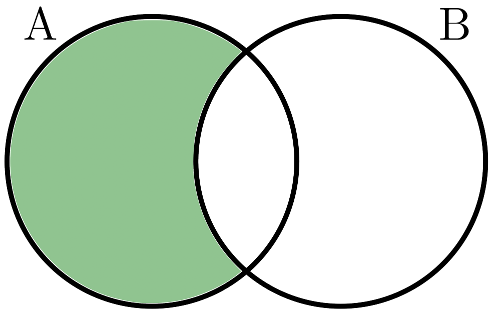


Рис. 1.3: Разность двух множеств

**Симметрической разностью** множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из всех элементов множества $A$, не содержащихся в множестве $B$, и всех элементов множества $B$, не содержащихся в множестве $A$:

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

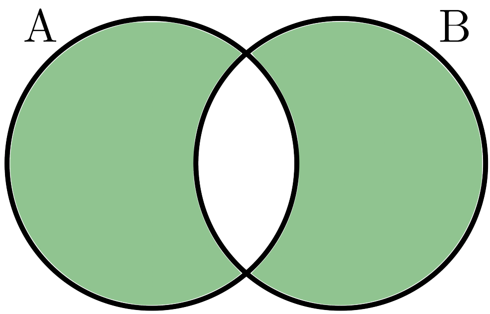


Рис. 1.4: Симметрическая разность двух множеств

**Дополнением** (дополнением до универсального множества $U$) множества $A$ называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не содержащихся в множестве $A$:

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

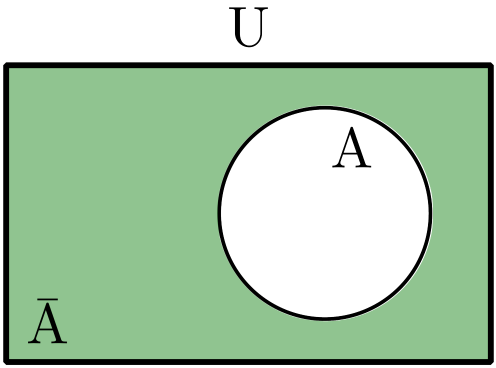


Рис. 1.5: Дополнение множества

## 1.6 Свойства операций над множествами

**Свойство 1** (Идемпотентность)**.**

$$A \cup A = A; \qquad A \cap A = A.$$

**Свойство 2** (Коммутативность)**.**

$$A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A.$$

**Свойство 3** (Ассоциативность)**.**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

**Свойство 4** (Дистрибутивность)**.**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**Свойство 5** (Поглощение)**.**

$$(A \cap B) \cup A = A; \qquad (A \cup B) \cap A = A.$$

**Свойство 6** (Свойства нуля)**.**

$$A \cup \varnothing = A; \qquad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

**Свойство 7** (Свойства единицы)**.**

$$A \cup U = U; \qquad A \cap U = A.$$

**Свойство 8** (Инволютивность)**.**

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

**Свойство 9** (Законы де Моргана)**.**

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}; \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

**Свойство 10** (Свойства дополнения)**.**

$$A \cup \bar{A} = U; \qquad A \cap \bar{A} = \varnothing.$$

**Свойство 11** (Свойство разности)**.**

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

**Свойство 12** (Свойство симметрической разности)**.**

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A).$$

## 1.7 Обобщенные тождества алгебры множеств

**Свойство 1** (Обобщенная дистрибутивность)**.**

$$A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i); \qquad A \cup \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i).$$

**Свойство 2** (Обобщенный закон де Моргана)**.**

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}; \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

## 1.8 Булеан

Множество всех подмножеств $A$ называется **булеаном** множества $A$ и обозначается $2^A$:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

**Теорема.** Если множество $A$ конечно, то $|2^A| = 2^{|A|}$.

## 1.9 Методы доказательств теоретико-множественных тождеств

### 1.9.1 Метод двух включений

Пусть левая часть теоретико-множественного тождества определяет множество $X$, а правая часть – множество $Y$. Чтобы доказать равенство множеств $X$ и $Y$, достаточно доказать два включения $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, т. е. доказать, что

$$\forall x \in X \implies x \in Y \quad \wedge \quad \forall x \in Y \implies x \in X.$$

Докажем этим методом тождество

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пусть $x \in A \vartriangle B$. Тогда, согласно определению симметрической разности

$$\begin{gathered} x \in (A \vartriangle B) \implies x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \implies \\ \implies (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \implies \\ \implies (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \vee (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \implies \\ \implies x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \implies x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)). \end{gathered}$$

Таким образом доказано, что $A \vartriangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Докажем обратное включение $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \vartriangle B$:

$$\begin{gathered} x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \implies x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \implies \\ \implies (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \implies \\ \implies x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \implies x \in (A \vartriangle B). \end{gathered}$$

Оба включения имеют место и тождество доказано.

### 1.9.2 Метод эквивалентных преобразований

Теоретико-множественные тождества можно доказывать, используя свойства операций над множествами. Для этого нужно преобразовать левую часть в правую, или правую – в левую, или правую и левую часть в некоторое третье выражение.

Докажем этим методом тождество:

$$(A \cap B) \vartriangle (A \cap C) = A \cap (B \vartriangle C).$$

Преобразуем левую часть к правой:

$$
\begin{gathered}
(A \cap B) \vartriangle (A \cap C) = \\
= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{A \cap B} \cup \overline{A \cap C}) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{C}) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = \\
= ((A \cap (B \cup C)) \cap \bar{A}) \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
= (B \cup C) \cap (A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap (\overline{B \cap C})) = \\
= A \cap ((B \cup C) \cap (\overline{B \cap C})) = \\
= A \cap (B \vartriangle C).
\end{gathered}
$$

### 1.9.3 Метод характеристических функций

Характеристическая функция $\chi_A$ множества $A$ для $x \in U$ определяется следующим образом:

$$
\begin{cases}
\chi_A(x) = 1, & x \in A \\
\chi_A(x) = 0, & x \notin A
\end{cases}
$$

Для характеристической функции справедливы следующие тождества:

1. $\chi_A^2(x) = \chi_A(x)$;
2. $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
3. $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
4. $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A(x)$;
5. $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
6. $\chi_{A \vartriangle B} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2 \cdot \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Докажем этим методом тождество

$$
(A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C).
$$

С одной стороны,

$$\begin{gathered}\chi_{(A\triangle B)\cap C}(x)=\chi_{(A\triangle B)}(x)\chi_C(x)=\\=\big(\chi_A(x)+\chi_B(x)-2\chi_A(x)\chi_B(x)\big)\chi_C(x)=\\=\chi_A(x)\chi_C(x)+\chi_B(x)\chi_C(x)-2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).\end{gathered}$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered}\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}(x)=\chi_{(A\cap C)}(x)+\chi_{(B\cap C)}(x)-2\chi_{(A\cap C)}(x)\chi_{(B\cap C)}(x)=\\=\chi_A(x)\chi_C(x)+\chi_B(x)\chi_C(x)-2\chi_A(x)\chi_C(x)\chi_B(x)\chi_C(x)=\\=\chi_A(x)\chi_C(x)+\chi_B(x)\chi_C(x)-2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).\end{gathered}$$

Так как $\chi_{(A\triangle B)\cap C}(x)=\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}(x)$, тождество доказано.