

# Содержание

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Множества и отношения</b>                                | <b>3</b> |
| 1.1      | Основные понятия . . . . .                                  | 3        |
| 1.2      | Сравнение множеств . . . . .                                | 4        |
| 1.3      | Свойства включения множеств . . . . .                       | 4        |
| 1.4      | Мощность множества . . . . .                                | 5        |
| 1.5      | Операции над множествами . . . . .                          | 5        |
| 1.6      | Свойства операций над множествами . . . . .                 | 8        |
| 1.7      | Обобщенные тождества алгебры множеств . . . . .             | 9        |
| 1.8      | Булеан . . . . .  | 9        |
| 1.9      | Методы доказательств теоретико-множественных тождеств . . . | 10       |
| 1.9.1    | Метод двух включений . . . . .                              | 10       |
| 1.9.2    | Метод эквивалентных преобразований . . . . .                | 10       |
| 1.9.3    | Метод характеристических функций . . . . .                  | 11       |
| 1.10     | Упорядоченные пары и наборы . . . . .                       | 12       |
| 1.11     | Прямое произведение множеств . . . . .                      | 12       |
| 1.12     | Бинарные отношения . . . . .                                | 13       |
| 1.13     | Многоместные отношения . . . . .                            | 14       |
| 1.14     | Композиция отношений . . . . .                              | 14       |
| 1.15     | Способы задания бинарных отношений . . . . .                | 15       |
| 1.15.1   | Матричный способ . . . . .                                  | 15       |
| 1.15.2   | С помощью ориентированного графа . . . . .                  | 16       |
| 1.16     | Способы задания композиции отношений . . . . .              | 16       |
| 1.16.1   | Матричный способ . . . . .                                  | 16       |
| 1.16.2   | С помощью ориентированного графа . . . . .                  | 17       |
| 1.17     | Свойства бинарных отношений . . . . .                       | 18       |
| 1.18     | Ядро отношения . . . . .                                    | 19       |
| 1.19     | Замыкание отношений . . . . .                               | 19       |
| 1.20     | Функциональные отношения . . . . .                          | 20       |
| 1.21     | Тотальные и частичные функции . . . . .                     | 20       |
| 1.22     | Инъекция, сюръекция и биекция . . . . .                     | 20       |
| 1.23     | Отношения эквивалентности . . . . .                         | 21       |
| 1.24     | Классы эквивалентности . . . . .                            | 21       |
| 1.25     | Фактормножества . . . . .                                   | 21       |
| 1.26     | Отношения порядка . . . . .                                 | 21       |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>2</b> | <b>Элементы математической логики</b>                  | <b>22</b> |
| 2.1      | Основные понятия . . . . .                             | 22        |
| 2.2      | Логические связи . . . . .                             | 23        |
| 2.2.1    | Простейшие логические связи . . . . .                  | 23        |
| 2.2.2    | Порядок выполнения логических операций . . . . .       | 23        |
| 2.2.3    | Доказательство тождественной истинности . . . . .      | 24        |
| 2.2.4    | Другие логические связи . . . . .                      | 24        |
| 2.3      | Логические отношения . . . . .                         | 25        |
| 2.4      | Варианты импликации . . . . .                          | 26        |
| 2.5      | Необходимое и достаточное условия . . . . .            | 27        |
| 2.6      | Основные логические эквивалентности . . . . .          | 27        |
| 2.7      | Булевы функции . . . . .                               | 28        |
| 2.8      | Множество булевых функций. Булев куб . . . . .         | 29        |
| 2.9      | Булев порядок . . . . .                                | 29        |
| 2.10     | Мощность множества булевых функций . . . . .           | 30        |
| 2.11     | Существенные и несущественные переменные . . . . .     | 30        |
| 2.12     | Булевы функции одной и нескольких переменных . . . . . | 31        |
| 2.13     | Мажоритарная функция . . . . .                         | 32        |
| 2.14     | Реализация функций формулами . . . . .                 | 32        |
| 2.15     | Равносильные формулы . . . . .                         | 33        |
| 2.16     | Законы булевой алгебры . . . . .                       | 33        |
| 2.17     | Двойственная функция . . . . .                         | 35        |
| 2.18     | Инволютивность двойственности . . . . .                | 35        |
| 2.19     | Самодвойственная функция . . . . .                     | 35        |
| 2.20     | Принцип двойственности . . . . .                       | 35        |
| 2.21     | Нормальные формы . . . . .                             | 36        |
| 2.22     | ДНФ и КНФ . . . . .                                    | 36        |
| 2.23     | Совершенные нормальные формы . . . . .                 | 37        |
| 2.23.1   | СДНФ . . . . .   | 37        |
| 2.23.2   | СКНФ . . . . .   | 37        |
| 2.24     | Нахождение СДНФ . . . . .                              | 38        |
| 2.25     | Нахождение СКНФ . . . . .                              | 38        |

# 1 Множества и отношения

## 1.1 Основные понятия

**Множество** – любая определенная совокупность объектов. Элементы множества различны и отличными друг от друга.

Под **множеством** понимают любой набор определенных и различимых между собой объектов, мыслимый как единое целое. Объекты, из которых составлено множество, называются его **элементами**.

Множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами:  $A, B, C, \dots$ . Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами:  $a, b, c, \dots$ .

Для обозначения того, что объект  $x$  является, либо не является элементом множества  $A$ , используют символику:

- $x \in A$  – объект  $x$  является элементом множества  $A$ .
- $x \notin A$  – объект  $x$  не является элементом множества  $A$ .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом  $\emptyset$ .

Множество, из элементов которого составляют конкретное множество, называют **универсальным** и обозначают символом  $U$ .

Множество  $U$  называется **универсальным** для данной задачи, если все рассматриваемые в этой задаче множества являются его подмножествами.

Множества можно изображать с помощью кругов, которые называются **кругами Эйлера** или **диаграммами Венна**. Универсальное множество принято обозначать прямоугольником.

Способы задания множества:

1. перечислением всех элементов множества (в фигурных скобках через запятую):

$$A = \{1, 2, 3, 4\};$$

2. характеристическим предикатом, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество. Характеристический предикат записывается после двоеточия или символа «|»:

$$A = \{x : P(x)\} \quad \vee \quad A = \{x \mid P(x)\}$$

где  $P(x)$  – характеристический предикат.

Обозначения числовых множеств:

- $\mathbb{N}$  – множества натуральных чисел,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ;
- $\mathbb{Z}$  – множества целых чисел,  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ;

- $\mathbb{Q}$  – множество рациональных чисел,  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \right\}$ ;
- $\mathbb{R}$  – множество действительных (вещественных) чисел;
- $\mathbb{C}$  – множество комплексных чисел.

## 1.2 Сравнение множеств

Множество  $A$  называется **подмножеством** множества  $B$  (множество  $A$  содержится в  $B$ , множество  $B$  включает множество  $A$ ), если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ :

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A \implies x \in B.$$

$B$  называется **надмножеством** множества  $A$ .

Под определению пустое множество является подмножеством всех множеств:

$$\forall M \implies \emptyset \subseteq M.$$

Универсальное множество содержит все множества:

$$\forall M \implies M \subseteq U.$$

Два множества называют **равными**, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Если  $A \subseteq B$  и  $A \neq B$ , то множество  $A$  называется **собственным** подмножеством множества  $B$ , а  $B$  – **собственным** надмножеством  $A$ .

Множества  $A$  и  $B$  **сравнимые**, если  $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ . Иначе множества называются **несравнимыми**.

## 1.3 Свойства включения множеств

**Свойство 1.**

$$\forall A \implies A \subseteq A.$$

**Свойство 2.**

$$\forall A, B : A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B.$$

**Свойство 3.**

$$\forall A, B, C : A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

## 1.4 Мощность множества

Говорят, что между множествами  $A$  и  $B$  установлено **взаимно-однозначное соответствие**, если каждому элементу множества  $A$  поставлен в соответствие один и только один элемент множества  $B$ , и каждому элементу множества  $B$  поставлен в соответствие один и только один элемент множества  $A$ :

$$A \sim B \iff \begin{cases} \forall a \in A \mapsto !b \in B \\ \forall b \in B \mapsto !a \in A \end{cases}$$

Два множества (конечных или бесконечных) имеют **одинаковую мощность**, если между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие. В этом случае говорят, что множества  $A$  и  $B$  **изоморфны**, имеют одинаковую **мощность**, или что они **равномощны**, и обозначают  $|A| = |B|$ .

Множество  $A$  называется **конечным**, если у него нет равномощного собственного подмножества:

$$\forall B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \implies B = A.$$

Для конечного множества используется запись  $|A| < \infty$ .

Множество **бесконечно** тогда и только тогда, когда оно имеет одинаковую мощность с некоторым своим подмножеством, не совпадающим с самим этим множеством:

$$\exists B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \wedge B \neq A.$$

То есть бесконечное множество равномощно некоторому своему собственному подмножеству. Для бесконечного множества используется запись  $|A| = \infty$ .

Множество  $X$  называется **счетным**, если его мощность равна мощности множества натуральных чисел, т. е.  $|X| = |\mathbb{N}|$ .

Говорят, что множество  $X$  – множество **мощности континуума**, если его мощность равна мощности множества точек на отрезке  $[0, 1]$ .

**Теорема** (Теорема Кантора о несчетности). Отрезок  $[0, 1]$  несчетен, т. е.

$$|[0, 1]| > |\mathbb{N}|.$$

## 1.5 Операции над множествами

**Объединением** двух множеств называется множество, содержащее все элементы обоих множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

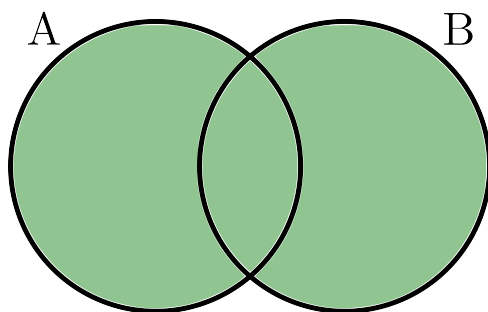


Рис. 1.1: Объединение двух множеств

**Пересечением** двух множеств называется множество, состоящее из элементов, входящих в каждое из множеств  $A$  и  $B$ :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

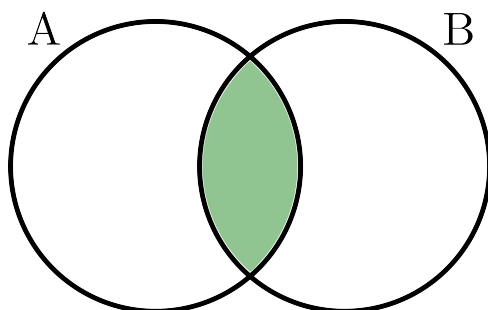


Рис. 1.2: Пересечение двух множеств

**Разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех элементов множества  $A$ , не содержащихся в множестве  $B$ :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

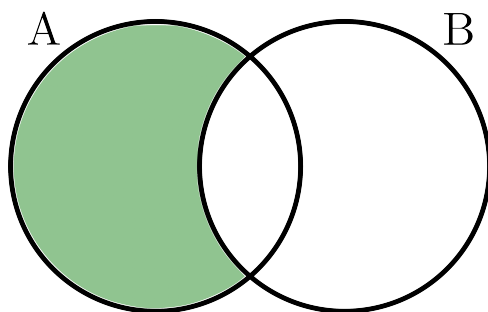


Рис. 1.3: Разность двух множеств

**Симметрической разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех элементов множества  $A$ , не содержащихся в множестве  $B$ , и всех элементов множества  $B$ , не содержащихся в множестве  $A$ :

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

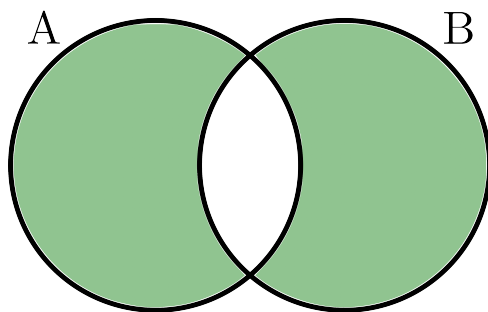


Рис. 1.4: Симметрическая разность двух множеств

**Дополнением** (дополнением до универсального множества  $U$ ) множества  $A$  называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не содержащихся в множестве  $A$ :

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

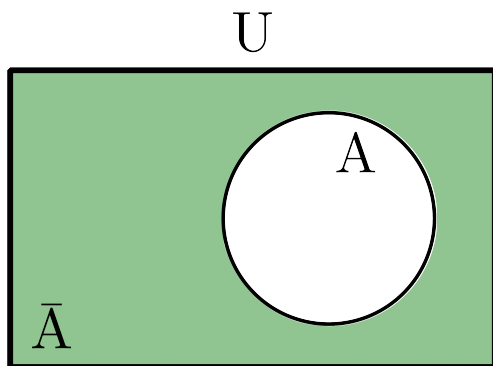


Рис. 1.5: Дополнение множества

## 1.6 Свойства операций над множествами

**Свойство 1** (Идемпотентность).

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

**Свойство 2** (Коммутативность).

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

**Свойство 3** (Ассоциативность).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

**Свойство 4** (Дистрибутивность).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**Свойство 5** (Поглощение).

$$(A \cap B) \cup A = A, \quad (A \cup B) \cap A = A.$$

**Свойство 6** (Свойства нуля).

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

**Свойство 7** (Свойства единицы).

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$$



**Свойство 8** (Инволютивность).

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

**Свойство 9** (Законы де Моргана).

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

**Свойство 10** (Свойства дополнения).

$$A \cup \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

**Свойство 11** (Свойство разности).

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

**Свойство 12** (Свойство симметрической разности).

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

## 1.7 Обобщенные тождества алгебры множеств

**Свойство 1** (Обобщенная дистрибутивность).

$$A \cap \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i); \quad A \cup \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i).$$

**Свойство 2** (Обобщенный закон де Моргана).

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

## 1.8 Булеан

Множество всех подмножеств  $A$  называется **булеаном** множества  $A$  и обозначается  $2^A$ :

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

**Теорема.** Если множество  $A$  конечно, то  $|2^A| = 2^{|A|}$ .

## 1.9 Методы доказательств теоретико-множественных тождеств

### 1.9.1 Метод двух включений

Пусть левая часть теоретико-множественного тождества определяет множество  $X$ , а правая часть – множество  $Y$ . Чтобы доказать равенство множеств  $X$  и  $Y$ , достаточно доказать два включения  $X \subseteq Y$  и  $Y \subseteq X$ , т. е. доказать, что

$$\forall x \in X \Rightarrow x \in Y \quad \wedge \quad \forall x \in Y \Rightarrow x \in X.$$

Докажем этим методом тождество

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пусть  $x \in A \Delta B$ . Тогда, согласно определению симметрической разности

$$\begin{aligned} x \in (A \Delta B) &\Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) &\vee (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) &\Rightarrow x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)). \end{aligned}$$

Таким образом доказано, что  $A \Delta B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Докажем обратное включение  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \Delta B$ :

$$\begin{aligned} x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) &\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) &\Rightarrow x \in (A \Delta B). \end{aligned}$$

Оба включения имеют место и тождество доказано.

### 1.9.2 Метод эквивалентных преобразований

Теоретико-множественные тождества можно доказывать, используя свойства операций над множествами. Для этого нужно преобразовать левую часть в правую, или правую – в левую, или правую и левую часть в некоторое третье выражение.

Докажем этим методом тождество:

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C).$$

Преобразуем левую часть к правой:

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) \Delta (A \cap C) = \\
 & = ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{C}) = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = \\
 & = ((A \cap (B \cup C)) \cap \bar{A}) \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
 & = (B \cup C) \cap (A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap \overline{(B \cap C)}) = \\
 & = A \cap ((B \cup C) \cap \overline{(B \cap C)}) = \\
 & = A \cap (B \Delta C).
 \end{aligned}$$

### 1.9.3 Метод характеристических функций

Характеристическая функция  $\chi_A$  множества  $A$  для  $x \in U$  определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \chi_A(x) = 1, & x \in A \\ \chi_A(x) = 0, & x \notin A \end{cases}$$

Для характеристической функции справедливы следующие тождества:

1.  $\chi_A^2(x) = \chi_A(x)$ ;
2.  $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
3.  $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
4.  $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A(x)$ ;
5.  $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
6.  $\chi_{A \Delta B} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2 \cdot \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ .

Докажем этим методом тождество

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned}\chi_{(A \Delta B) \cap C}(x) &= \chi_{(A \Delta B)}(x) \chi_C(x) = \\ &= (\chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x))\chi_C(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\chi_{(A \cap C) \Delta (B \cap C)}(x) &= \chi_{(A \cap C)}(x) + \chi_{(B \cap C)}(x) - 2\chi_{(A \cap C)}(x)\chi_{(B \cap C)}(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_C(x)\chi_B(x)\chi_C(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).\end{aligned}$$

Так как  $\chi_{(A \Delta B) \cap C}(x) = \chi_{(A \cap C) \Delta (B \cap C)}(x)$ , тождество доказано.

## 1.10 Упорядоченные пары и наборы

$(a, b)$  – упорядоченная пара объектов  $a$  и  $b$ .

Равенство упорядоченных пар определяется следующим образом:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

Вообще говоря,  $(a, b) \neq (b, a)$ .

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$  – упорядоченный набор из  $n$  элементов ( $n$ -ка, кортеж или (конечная) последовательность).

$|(a_1, a_2, \dots, a_n)|$  – длина набора, т. е. количество элементов в наборе.

**Теорема.** Два набора одной длины равны, если равны их соответствующие элементы

$$\forall n (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n.$$

## 1.11 Прямое произведение множеств

Прямым (декартовым) произведением двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит  $A$ , а второй принадлежит  $B$ :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

$$A \times B \neq B \times A.$$

**Теорема.** Для конечных множества  $A$  и  $B$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Понятие прямого произведения допускает обобщение. Прямое произведение множеств  $A_1, \dots, A_n$  – это множество наборов (кортежей):

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Множества  $A_i$  необязательно различны.

Степенью множества  $A$  называется его  $n$ -кратное произведение самого на себя:

$$A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-раз}}; \quad |A^n| = |A|^n.$$

## 1.12 Бинарные отношения

Бинарным отношением между множествами  $A$  и  $B$  называется такая тройка  $\langle A, B, R \rangle$ , где  $R$  – подмножество прямого произведения  $A$  и  $B$ :

$$R \subset A \times B,$$

Эти множества именуют следующим образом:

- $R$  – график отношения;
- $A$  – область отправления;
- $B$  – область прибытия.

Область определения отношения:

$$\text{Dom}R = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\}.$$

Область значений:

$$\text{Im}R = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\}.$$

Если  $A = B$  (т. е.  $R \subset A^2$ ), то говорят, что  $R$  есть отношение на множестве  $A$ .

Для бинарных отношений обычно используется **инфиксная** форма записи:

$$aRb \iff (a, b) \in R \subset A \times B.$$

Инфиксная форма позволяет более кратко записывать некоторые формы утверждений относительно отношений:

$$aRbRc \iff (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$$

Обратное отношение:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subset B \times A.$$

Дополнение отношения:

$$\bar{R} = \{(a, b) \mid (a, b) \notin R\} \subset A \times B.$$

Тождественное отношение:

$$I = \{(a, a) \mid a \in A\} \subset A^2.$$

Универсальное отношение:

$$U = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = A \times B.$$

### 1.13 Многочестные отношения

$n$ -местное ( $n$ -арное) отношение  $R$  – это подмножество прямого произведения  $n$  множеств, т. е. множество упорядоченных наборов (кортежей):

$$R \subset A_1 \times \dots \times A_n \iff \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\},$$

где  $n$  – вместимость (длина кортежей отношения).

### 1.14 Композиция отношений

Пусть  $R_1 \subset A \times B$  – отношение между множествами  $A$  и  $B$ , а  $R_2 \subset B \times C$  – отношение между множествами  $B$  и  $C$ . **Композицией** двух отношений  $R_1$  и  $R_2$  называется отношение  $R \subset A \times C$  между множествами  $A$  и  $C$ , определяется следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b \in B : aR_1b \wedge bR_2c\}.$$

Композиция отношений ассоциативна, т. е.

$$\begin{aligned} \forall R_1 \subset A \times B, R_2 \subset B \times C, R_3 \subset C \times D \implies \\ \implies (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3). \end{aligned}$$

Композиция отношений на множестве  $A$  является отношением на множестве  $A$ .

Степенью отношения  $R$  на множестве  $A$  называется его  $n$ -кратная композиция с самим собой:

$$R^n = \underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n\text{-раз}}.$$

## 1.15 Способы задания бинарных отношений

### 1.15.1 Матричный способ

Отношение  $R \subset A \times B$  задается с помощью прямоугольной таблицы (матрицы), состоящей из нулей и единиц, в которой строки – первые координаты, а столбцы – вторые, причем на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца будет стоять 1, если имеется отношение  $a_i R b_j$ , и 0 в противном случае.

Рассмотрим пример. Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (3, 6)\}.$$

Отношение можно записать в виде матрицы:

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица **универсального** (полного) отношения – это квадратная матрица, состоящая только из единиц.

Матрица **тождественного** (диагонального) отношения – это квадратная матрица, элементами главной диагонали которой являются единицы, а остальные элементы равны нулю.

Матрица **пустого** отношения – это квадратная матрица, состоящая только из нулей.

Матрица **обратного** отношения  $R^{-1}$  для отношения  $R$  – это транспонированная матрица отношения  $R$ .

### 1.15.2 С помощью ориентированного графа

Элементы множеств  $A$  и  $B$  изображаются в виде точек на плоскости (вершины двудольного графа), а упорядоченные пары – линией со стрелкой (дуги ориентированного графа), которая направлена от  $a$  к  $b$ , если  $aRb$ .

Рассмотрим пример. Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 3), (3, 6)\}.$$

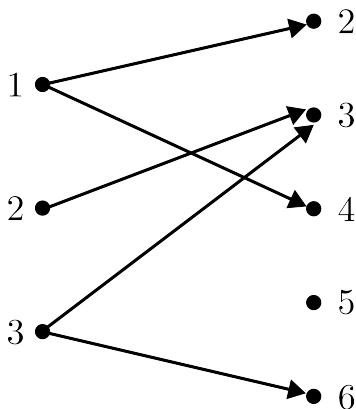


Рис. 1.6: Отношение в виде ориентированного графа

## 1.16 Способы задания композиции отношений

### 1.16.1 Матричный способ

Матрица композиции отношений  $R \circ S$  получается как произведение матриц отношений  $R$  и  $S$  с дальнейшей заменой отличных от нуля элементов единицами.

Рассмотрим пример. Пусть

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\},$$
$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}.$$



Тогда композиция равна

$$\begin{aligned}
 [R \circ S] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$R \circ S = \{(1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

### 1.16.2 С помощью ориентированного графа

Пусть  $R \subset A \times B$  и  $S \subset B \times C$ . Чтобы получить граф  $T = R \circ S$ , надо к графу отношения  $R$  добавить граф отношения  $S$ . Граф композиции отношений получим, если исключим вершины, которые являются элементами множества  $B$ .

Рассмотрим пример. Пусть

$$\begin{aligned}
 R &= \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\}, \\
 S &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}.
 \end{aligned}$$

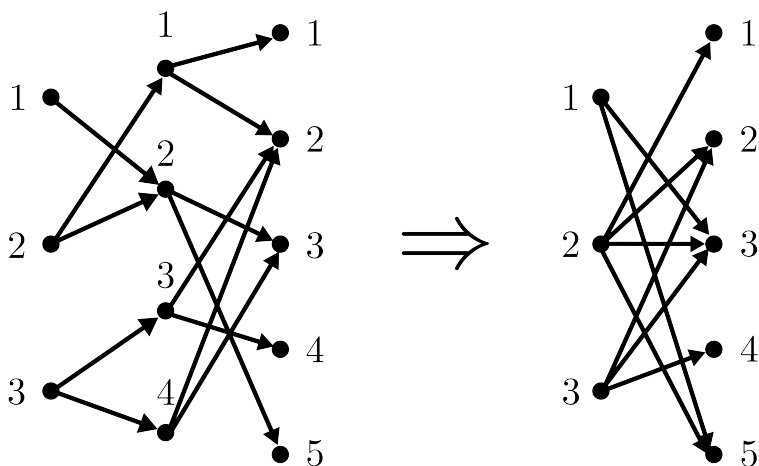


Рис. 1.7: Композиция в виде ориентированного графа

$$R \circ S = \{(1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

### 1.17 Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется

- **рефлексивным**, если

$$\forall x \in A : (x, x) \in R;$$

- **антирефлексивным**, если

$$\forall x \in A : (x, x) \notin R;$$

- **симметричным**, если

$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \implies (y, x) \in R;$$

- **антисимметричным**, если

$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies x = y;$$

- **транзитивным**, если

$$\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R;$$

- **линейным** (полным), если

$$\forall x, y \in A : x = y \vee (x, y) \in R \vee (y, x) \in R.$$

**Теорема.** Пусть  $R \subset A \times A$  – отношение на  $A$ . Тогда

- $R$  рефлексивно  $\iff I \subset R$ ;
- $R$  антирефлексивно  $\iff R \cap I = \emptyset$ ;
- $R$  симметрично  $\iff R = R^{-1}$ ;
- $R$  антисимметрично  $\iff R \cap R^{-1} = I$ ;
- $R$  транзитивно  $\iff R \circ R \subset R$ ;
- $R$  линейно  $\iff R \cup I \cup R^{-1} = U$ .

## 1.18 Ядро отношения

Если  $R \subset A \times B$  – отношение между множествами  $A$  и  $B$ , то композиция  $R \circ R^{-1}$  называется **ядром** отношения  $R$  и обозначается  $\ker R$ :

$$\ker R = R \circ R^{-1}.$$

Ядро отношения  $R$  между  $A$  и  $B$  является отношением на  $A$ :

$$R \subset A \times B \implies \ker R \subset A^2.$$

**Теорема.** Ядро любого отношения рефлексивно и симметрично на области определения.

## 1.19 Замыкание отношений

Пусть  $R$  и  $R^\times$  – отношения на множестве  $M$ . Отношение  $R^\times$  называется замыканием  $R$  относительно свойства  $C$ , если

1.  $R^\times$  обладает свойством  $C$ :  $C(R^\times)$ ;
2.  $R^\times$  является надмножеством  $R$ :  $R \subset R^\times$ ;
3.  $R^\times$  является наименьшим таким объектом:

$$C(R^{\times\times}) \wedge R \subset R^\times \implies R^\times \subset R^{\times\times}.$$

**Теорема.** Пусть  $R$  – отношение на множестве  $M$ . Тогда

- $R \cup I$  есть рефлексивное замыкание  $R$ ;
- $R \cup R^{-1}$  есть симметричное замыкание  $R$ ;
- если  $M$  – конечное множество, содержащее  $n$  элементов, то отношение

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$$

есть транзитивное замыкание  $R$ .

## 1.20 Функциональные отношения

Пусть  $f$  – отношение между  $A$  и  $B$  такое, что

$$\forall a : (a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \implies b = c.$$

Такое свойство отношений называется **однозначностью** или **функциональным**, а само отношение называется **функцией** из  $A$  в  $B$ .

$$f : A \rightarrow B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

$$b = f(a) \iff (a, b) \in f.$$

## 1.21 Тотальные и частичные функции

$$\text{Dom} f \subset A; \quad \text{Im} f \subset B$$

Если  $\text{Dom} f = A$ , то функция называется **тотальной**, а если  $\text{Dom} f \neq A$ , то **частичной**.

## 1.22 Инъекция, сюръекция и биекция

Пусть  $f : A \rightarrow B$ , тогда функция  $f$  называется

- **инъективной** (или инъекцией), если

$$b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \implies a_1 = a_2;$$

- **сюръективной** (или сюръекцией), если

$$\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a);$$

- **биективной** (или биекцией), если она инъективная и сюръективная.

## 1.23 Отношения эквивалентности

Отношение называется отношением **эквивалентности** (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эквивалентности обозначают символами  $E$ ,  $\sim$  (тильда) и  $\equiv$ :

$$xEy, \quad x \sim y, \quad x = y.$$

Рассмотрим пример. Отношение равенства  $x = y$  является эквивалентностью на любом множестве  $A$ , так как оно

- рефлексивно ( $x = x$ );
- симметрично ( $x = y \implies y = x$ );
- транзитивно ( $x = y, y = z \implies x = z$ ).

## 1.24 Классы эквивалентности

Пусть  $E$  – отношение эквивалентности на множестве  $A$ . **Классом эквивалентности** элемента  $x \in A$  называется подмножество элементов множества  $A$ , эквивалентных  $x$ :

$$E(x) = \{y \in A \mid xEy\}$$

или

$$[x]_E = \{y \in A \mid y \equiv x\}.$$

## 1.25 Фактормножества

Если  $E$  – отношение эквивалентности на множестве  $A$ , то множество классов эквивалентности называется **фактормножеством** множества  $A$  относительно эквивалентности  $E$  и обозначается  $A/E$ :

$$A/E = \{E(x) \mid x \in A\} \quad \text{или} \quad A/E = \{[x]_E\}_{x \in A}.$$

## 1.26 Отношения порядка

Антисимметричное транзитивное отношение называется **отношением порядка**. Отношение порядка в общем случае обозначается символом  $\prec$ . Отношение порядка может обладать также дополнительными свойствами, которые сведены в следующую таблицу:

| Дополнительное свойство,<br>которым обладает отношением<br>порядка | Название отношения порядка,<br>обладающего дополнительным<br>свойством |
|--|--|
| рефлексивность   | отношение нестрогого порядка $\leq$                                    |
| антирефлексивность   | отношение строгого порядка $<$   |
| линейность   | отношение линейного порядка  |
| не обладает свойством линейности                                   | отношение частичного порядка   |

Множества, на котором задано отношение частичного порядка, называется **частично упорядоченным**.

Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется **линейно упорядоченным**.

## 2 Элементы математической логики

### 2.1 Основные понятия

**Математическая логика** – это анализ методом рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т. е. математическая логика исследует соотношения между основными понятиями математики, на базе которых доказываются математические утверждения.

Простейшую из формальных логических теорий называют **алгеброй высказываний**.

**Высказыванием** называется утверждение (повествовательное предложение), о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Высказыванию ставят в соответствие логическую переменную, которая принимает значение 1, если высказывание истинно, и 0, если высказывание ложно.

Из простых высказываний с помощью **логических связей** могут быть построены **составные высказывания**.

## 2.2 Логические связи

### 2.2.1 Простейшие логические связи

В таблице 2.1 представлены простейшие логические связи.

| Название        | Прочтение                   | Обозначение       |
|-----------------|-----------------------------|-------------------|
| отрицание       | не                          | $\neg$            |
| конъюнкция      | и                           | $\wedge$          |
| дизъюнкция      | или                         | $\vee$            |
| импликация      | если, то                    | $\rightarrow$     |
| эквивалентность | тогда и только тогда, когда | $\leftrightarrow$ |

Таблица 2.1: Простейшие логические связи

Таблица 2.2 представляет собой таблицу истинности простейших логических связей.

| $A$ | $B$ | $\bar{A}$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \rightarrow B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|-----|-----|-----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| 0   | 0   | 1         | 0            | 0          | 1                 | 1                     |
| 0   | 1   | 1         | 0            | 1          | 1                 | 0                     |
| 1   | 0   | 0         | 0            | 1          | 0                 | 0                     |
| 1   | 1   | 0         | 1            | 1          | 1                 | 1                     |

Таблица 2.2: Таблица истинности простейших логических связей

### 2.2.2 Порядок выполнения логических операций

Если скобок нет, то операции выполняются в следующем порядке:

1. отрицание;
2. конъюнкция;
3. дизъюнкция;

4. импликация;
5. эквивалентность.

### 2.2.3 Доказательство тождественной истинности

С помощью таблиц можно доказывать тождества. Рассмотрим пример. Необходимо доказать тождественную истинность формулы

$$\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B).$$

| $A$ | $B$ | $\bar{A}$ | $A \rightarrow B$ | $\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$ |
|-----|-----|-----------|-------------------|---|
| 0   | 0   | 1         | 1                 | 1                                       |
| 0   | 1   | 1         | 1                 | 1                                       |
| 1   | 0   | 0         | 0                 | 1                                       |
| 1   | 1   | 0         | 1                 | 1                                       |

Таблица 2.3: Пример доказательства тождественной истинности

### 2.2.4 Другие логические связи

В таблице 2.4 представлены другие логические связи, которые мы в дальнейшем будем использовать.

| Название            | Прочтение           | Обозначение  |
|---------------------|---------------------|--------------|
| Штрих Шеффера       | антиконъюнкция      | $ $          |
| Стрелка Пирса       | антидизъюнкция      | $\downarrow$ |
| Сумма по модулю два | антиэквивалентность | $\oplus$     |

Таблица 2.4: Другие логические связи



Эти логические связки можно представить следующим образом:

$$A \mid B = \overline{A \wedge B}; \quad A \downarrow B = \overline{A \vee B}; \quad A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}.$$

Таблица 2.5 представляет собой таблицу истинности других логических связок.

| $A$ | $B$ | $A \mid B$ | $A \downarrow B$ | $A \oplus B$ |
|-----|-----|------------|------------------|--------------|
| 0   | 0   | 1          | 1                | 0            |
| 0   | 1   | 1          | 0                | 1            |
| 1   | 0   | 1          | 0                | 1            |
| 1   | 1   | 0          | 0                | 0            |

Таблица 2.5: Таблица истинности других логических связок

**Замечание.** Таблицы истинности содержат  $2^n$  строк, где  $n$  – число простых логических высказываний.

## 2.3 Логические отношения

Отношение следствия: из  $A$  следует  $B$ , если  $B$  истинно всякий раз, когда истинно  $A$ . Рассмотрим высказывания  $A \leftrightarrow B$ ,  $A \rightarrow B$ ,  $A \vee B$ :

| $A$ | $B$ | $A \leftrightarrow B$ | $A \rightarrow B$ | $A \vee B$ |
|-----|-----|-----------------------|-------------------|------------|
| 0   | 0   | 1                     | 1                 | 0          |
| 0   | 1   | 0                     | 1                 | 1          |
| 1   | 0   | 0                     | 0                 | 1          |
| 1   | 1   | 1                     | 1                 | 1          |

Два составных высказывания **эквивалентны**, если они имеют одинаковые истинностные значения на одинаковых наборах, т. е. последние столбцы их таблиц истинности должны совпадать.

Рассмотрим пример. Проверим, являются ли высказывания  $A \rightarrow B$  и  $\bar{A} \vee B$  эквивалентными:

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0   | 0   | 1                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 1   | 1   | 1                 |

| $A$ | $B$ | $\bar{A}$ | $\bar{A} \vee B$ |
|-----|-----|-----------|------------------|
| 0   | 0   | 1         | 1                |
| 0   | 1   | 1         | 1                |
| 1   | 0   | 0         | 0                |
| 1   | 1   | 0         | 1                |

Итого получим, что

$$A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B.$$

## 2.4 Варианты импликации

**Импликация** двух высказываний отличается от эквивалентности, а также от дизъюнкции и конъюнкции тем, что она **несимметрична** (т. е.  $A \rightarrow B$  не эквивалентно  $B \rightarrow A$ ).

Для высказывания  $A \rightarrow B$ :

- высказывание  $B \rightarrow A$  называется **конверсией**;
- высказывание  $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$  называется **конверсией контрапозиции**;
- высказывание  $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$  называется **контрапозицией**.

Таблица 2.9 представляет собой таблицу истинности этих вариантов импликации.

| $A$ | $B$ | $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | $A \rightarrow B$ | $B \rightarrow A$ | $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$ | $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ |
|-----|-----|-----------|-----------|-------------------|-------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 0   | 0   | 1         | 1         | 1                 | 1                 | 1                             | 1                             |
| 0   | 1   | 1         | 0         | 1                 | 0                 | 0                             | 1                             |
| 1   | 0   | 0         | 1         | 0                 | 1                 | 1                             | 0                             |
| 1   | 1   | 0         | 0         | 1                 | 1                 | 1                             | 1                             |

Таблица 2.9: Таблица истинности вариантов импликации

## 2.5 Необходимое и достаточное условия

| Условие   | Описание  | Операция  |
|---|---|---|
| $A$ является достаточным условием для $B$               | Если имеет место $A$ , то $B$ также будет иметь место       | Импликация $A \rightarrow B$                                    |
| $A$ является необходимым условием для $B$               | Если имеет место $B$ , то $A$ также будет иметь место       | Конверсия достаточного условия $B \rightarrow A$                |
| $A$ является необходимым и достаточным условием для $B$ | $A$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место $B$ | Двойная импликация, т. е. эквивалентность $A \leftrightarrow B$ |

## 2.6 Основные логические эквивалентности

**Свойство 1** (Идемпотентность).

$$A \vee A = A, \quad A \wedge A = A.$$

**Свойство 2** (Коммутативность).

$$A \vee B = B \vee A, \quad A \wedge B = B \wedge A.$$

**Свойство 3** (Ассоциативность).

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, \quad A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C.$$

**Свойство 4** (Дистрибутивность).

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

**Свойство 5** (Поглощение).

$$(A \wedge B) \vee A = A, \quad (A \vee B) \wedge A = A.$$

**Свойство 6** (Свойства нуля).

$$A \vee 0 = A, \quad A \wedge 0 = 0.$$

**Свойство 7** (Свойства единицы).

$$A \vee 1 = 1, \quad A \wedge 1 = A.$$

**Свойство 8** (Инволютивность).

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

**Свойство 9** (Законы де Моргана).

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}, \quad \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}.$$

**Свойство 10** (Свойства дополнения).

$$A \vee \bar{A} = 1, \quad A \wedge \bar{A} = 0.$$

**Свойство 11** (Свойство импликации).

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B.$$

**Свойство 12** (Свойство эквивалентности).

$$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

## 2.7 Булевы функции

**Булевы функции** находят применение в конструировании и упрощении логических схем.

Обозначим  $E_2 = \{0, 1\}$ , тогда

$$E_2^n = \underbrace{E_2 \times E_2 \times \dots \times E_2}_n.$$

Функции  $f : E_2^n \rightarrow E_2$  называются **функции алгебры логики** или **булевыми функциями** от  $n$  переменных. Множество булевых функций от  $n$  переменных обозначают  $P_n$ :

$$P_n = \{f \mid f : E_2^n \rightarrow E_2\}.$$

## 2.8 Множество булевых функций. Булев куб

$P_2$  – множество всех булевых функций.

$P_{2,n}$  – множество всех булевых функций от  $n$  переменных:

$$P_{2,n} = \{f \mid f : E_2^n \rightarrow E_2\}, \quad P_2 = \bigcup_{n \geq 0} P_{2,n}.$$

$\{0, 1\}^n$  – **булев куб** размерности  $n$ . Число всех элементов булева куба  $\{0, 1\}^n$  составляет  $2^n$ .

## 2.9 Булев порядок

Для произвольных наборов  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  и  $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  имеет место

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \iff \alpha_i \leq \beta_i, \forall i = \overline{1, n}$$

то есть

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \iff \alpha_i = \beta_i \text{ или } \alpha_i, \beta_i = 1, \forall i = \overline{1, n}.$$

Если существует хотя бы одно  $i$ , для которого  $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$ , то имеет место строгое неравенство  $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ .

Если существует ровно одно  $i$ , для которого  $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$ , то набор  $\bar{\beta}$  **доминирует** над набором  $\bar{\alpha}$ .

Рассмотренное отношение порядка на  $B^n$ , где  $B^n$  –  $n$ -я декартова степень

$$B = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$$

будем называть **булевым порядком**.

Булев куб как упорядоченное множество можно изобразить в виде диаграммы Хассе

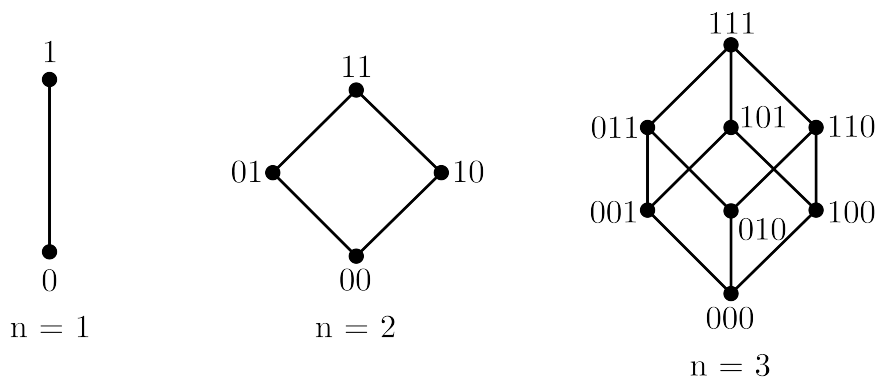


Рис. 2.1: Примеры булевых кубов в виде диаграммы Хассе

## 2.10 Мощность множества булевых функций

**Число булевых функций** от  $n$  переменных находится по формуле

$$|P_{2,n}| = 2^{2^n}.$$

| $x_1$   | $\dots$ | $x_{n-1}$ | $x_n$   | $f(x_1, \dots, x_n)$ |
|---------|---------|-----------|---------|----------------------|
| 0       | $\dots$ | 0         | 0       | $f(0, \dots, 0, 0)$  |
| 0       | $\dots$ | 0         | 1       | $f(0, \dots, 0, 1)$  |
| 0       | $\dots$ | 1         | 0       | $f(0, \dots, 1, 0)$  |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$   | $\dots$ | $\dots$              |
| 1       | $\dots$ | 1         | 1       | $f(1, \dots, 1, 1)$  |

Таблица 2.11: Таблица булевых функций

## 2.11 Существенные и несущественные переменные

Булева функция  $f \in P_n$  **существенно зависит** от переменной  $x_i$ , если существует такой набор значений

$$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$$

что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

В этом случае  $x_i$  называют **существенной** переменной, в противном случае  $x_i$  называют **несущественной** (фиктивной) переменной.

Рассмотрим пример.

| $x_1$ | $x_2$ | $f_1$ | $f_2$ |
|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | 0     | 1     |
| 0     | 1     | 0     | 1     |
| 1     | 0     | 1     | 0     |
| 1     | 1     | 1     | 0     |

В данном случае  $x_1$  – существенная переменная, а  $x_2$  – несущественная, поскольку

$$f_1(0, 0) = f_1(0, 1), \quad f_1(1, 0) = f_1(1, 1).$$

$$f_2(0, 0) = f_2(0, 1), \quad f_2(1, 0) = f_2(1, 1).$$

## 2.12 Булевы функции одной и нескольких переменных

| $x$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| 0   | 0     | 0     | 1     | 1     |
| 1   | 0     | 1     | 0     | 1     |

Таблица 2.13: Булевы функции одной переменной

| $x_1$ | $x_2$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ | $f_{16}$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        |
| 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0        | 0        | 0        | 1        | 1        | 1        | 1        |
| 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0        | 1        | 1        | 0        | 0        | 1        | 1        |
| 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1        | 0        | 1        | 0        | 1        | 0        | 1        |

Таблица 2.14: Булевы функции двух переменных

## 2.13 Мажоритарная функция

|   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|-------|-------|-------|--------------------|
| 0 | 0     | 0     | 0     | 0                  |
| 1 | 0     | 0     | 1     | 0                  |
| 2 | 0     | 1     | 0     | 0                  |
| 3 | 0     | 1     | 1     | 1                  |
| 4 | 1     | 0     | 0     | 0                  |
| 5 | 1     | 0     | 1     | 1                  |
| 6 | 1     | 1     | 0     | 1                  |
| 7 | 1     | 1     | 1     | 1                  |

Таблица 2.15: Мажоритарная функция (функция голосования)

## 2.14 Реализация функций формулами

Так же, как составные высказывания строятся из более простых, с помощью логических операций, можно комбинировать булевы переменные с помощью булевых операций, получая булевы выражения, которые называются **формулами**. Всякой формуле однозначно соответствует некоторая функция, при этом говорят, что **формула реализует функцию**.



Рассмотрим пример. Построим таблицу истинности для формулы

$$((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2.$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \wedge x_2$ | $(x_1 \wedge x_2) \oplus x_1$ | $((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$ |
|-------|-------|------------------|-------------------------------|--|
| 0     | 0     | 0                | 0                             | 0  |
| 0     | 1     | 0                | 0                             | 1  |
| 1     | 0     | 0                | 1                             | 1  |
| 1     | 1     | 1                | 0                             | 1  |

Формула  $((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$  реализует функцию  $f_8(x_1, x_2) = 0111$ .

## 2.15 Равносильные формулы

Одна функция может иметь множество реализаций. Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются **равносильными**:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \iff \exists f : \text{func } \mathcal{F}_1 = f \wedge \text{func } \mathcal{F}_2 = f.$$

Другими словами, булевы функции  $f$  и  $g$  называют равносильными, если их существенные переменные соответственно равны и на каждом наборе значений этих переменных функции  $f$  и  $g$  принимают равные значения.

Рассмотрим пример. Пусть

$$f(x, y) = x \vee y, \quad g(x, y, z) = xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee y\bar{z}.$$

Упростим функцию  $g(x, y, z)$ :

$$g(x, y, z) = xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee y\bar{z} = x(z \vee \bar{z}) \vee y(z \vee \bar{z}) = x \vee y.$$

Получили, что функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y, z)$  равносильны.

## 2.16 Законы булевой алгебры

**Свойство 1** (Идемпотентность).

$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$$

**Свойство 2 (Коммутативность).**

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a.$$

**Свойство 3 (Ассоциативность).**

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

**Свойство 4 (Дистрибутивность).**

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

**Свойство 5 (Поглощение).**

$$(a \wedge b) \vee a = a, \quad (a \vee b) \wedge a = a.$$

**Свойство 6 (Свойства нуля).**

$$a \vee 0 = a, \quad a \wedge 0 = 0.$$

**Свойство 7 (Свойства единицы).**

$$a \vee 1 = 1, \quad a \wedge 1 = a.$$

**Свойство 8 (Инволютивность).**

$$\bar{\bar{a}} = a.$$

**Свойство 9 (Законы де Моргана).**

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}, \quad \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}.$$

**Свойство 10 (Свойства дополнения).**

$$a \vee \bar{a} = 1, \quad a \wedge \bar{a} = 0.$$

**Свойство 11 (Свойство импликации).**

$$a \rightarrow b = \bar{a} \vee b.$$

**Свойство 12 (Свойство эквивалентности).**

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a).$$

## 2.17 Двойственная функция

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$  – булева функция. Тогда функция

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$$

называется **двойственной** к функции  $f$ .

Рассмотрим примеры:

1.  $0^* = \bar{0} = 1$ ;
2.  $1^* = \bar{1} = 0$ ;
3.  $x^* = \bar{\bar{x}} = x$  (т. к.  $x$  и функция, и переменная в данном случае);
4.  $(x \wedge y)^* = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = x \vee y$ ;
5.  $(x \vee y)^* = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = x \wedge y$ .

## 2.18 Инволютивность двойственности

Из определения видно, что двойственность инволютивна:  $f^{**} = f$ , поэтому отношение «быть двойственной к» на множестве булевых функций симметрично, то есть, если  $f^* = g$ , то  $g^* = f$ .

Если в таблице истинности булевой функции  $f$  инвертировать все значения, то получим таблицу истинности двойственной функции  $f^*$ .

## 2.19 Самодвойственная функция

Функция называется **самодвойственной**, если  $f^* = f$ . Примером такой функции может служить функция  $f(x) = x$ :

$$x^* = \bar{\bar{x}} = x.$$

## 2.20 Принцип двойственности

**Теорема.** Пусть  $F = \{f_1, \dots, f_m\}$  – система булевых функций, а  $F^* = \{f_1^*, \dots, f_m^*\}$  – система двойственных функций. Тогда если формула  $\mathcal{F}$  над базисом  $F$  реализует функцию  $f$ , то формула  $\mathcal{F}^*$  над базисом  $F^*$ , полученная заменой функций  $f_i$ , двойственными функциями  $f_i^*$ , реализует функцию  $f^*$ :

$$\text{func } \mathcal{F}|F| = f \implies \text{func } \mathcal{F}^*|F^*| = f^*.$$

**Следствие.** Если две равносильные формулы заменить двойственными, то равносильность сохранится:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \implies \mathcal{F}_1^* = \mathcal{F}_2^*.$$

**Замечание.** Формула, двойственная к булевой формуле, может быть получена заменой констант 0 на 1, 1 на 0, операций  $\wedge$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\wedge$  и сохранением структуры формулы.

## 2.21 Нормальные формы

Если  $x$  – логическая переменная,  $\sigma \in \{0, 1\}$ , то выражение

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

называется литерой. Литеры  $x$  и  $\bar{x}$  называются **контрарными**. **Элементарной конъюнкцией** называется конъюнкция литер. **Элементарной дизъюнкцией** называется дизъюнкция литер.

## 2.22 ДНФ и КНФ

Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**.

Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ)**.

Примеры:

- $(x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z)$  – ДНФ;
- $(x \vee z \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y) \wedge z$  – КНФ;
- $x \wedge \bar{y}$  – одновременно и КНФ, и ДНФ.

**Теорема.**

1. Любая формула эквивалентна некоторой ДНФ.
2. Любая формула эквивалентна некоторой КНФ.

**Алгоритм приведения формулы к ДНФ:**

1. выразить все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2. используя законы де Моргана, перенести все отрицания к переменным;

3. убрать двойные отрицания;
4. используя закон дистрибутивности, преобразовать формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций.

### Алгоритм приведения формулы к КНФ:

1. выразить все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2. используя законы де Моргана, перенести все отрицания к переменным;
3. убрать двойные отрицания;
4. используя закон дистрибутивности, преобразовать формулу так, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше, чем конъюнкции.

## 2.23 Совершенные нормальные формы

### 2.23.1 СДНФ

Реализация булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  в виде формулы

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)**. Таким образом, СДНФ есть ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций, и в каждой элементарной конъюнкции каждая переменная  $x_i$ , из набора  $\{x_1, \dots, x_n\}$  входит ровно один раз, причем входит либо сама  $x_i$ , либо ее отрицание  $\bar{x}_i$ .

**Теорема.** Каждая булева функция, отличная от константы 0, имеет единственную СДНФ.

### 2.23.2 СКНФ

Реализация булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  в виде формулы

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$$

называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)**. Таким образом, СКНФ есть КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций, и в каждой элементарной дизъюнкции каждая переменная  $x_i$  из набора  $\{x_1, \dots, x_n\}$  входит ровно один раз, причем входит либо сама  $x_i$ , либо ее отрицание  $\bar{x}_i$ .

**Теорема.** Всякая булева функция, отличная от константы 1, имеет единственную СКНФ.

## 2.24 Нахождение СДНФ

При нахождении СДНФ пользуются следующим правилом:

1. каждый набор аргументов определяет элементарную конъюнкцию, в которой значению 0 соответствует отрицание переменной, а значению 1 – сама переменная.
2. СДНФ функции образуют те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам аргументов, дающим 1.

Каждый набор аргументов, на котором функция принимает значение 1, называется **конституентой единицы** функции.

Рассмотрим пример нахождения СДНФ для  $x_1 \rightarrow x_2$ :

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \rightarrow x_2$ | элемент. конъюнкции          |
|-------|-------|-----------------------|------------------------------|
| 0     | 0     | 1                     | $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$ |
| 0     | 1     | 1                     | $\bar{x}_1 \wedge x_2$       |
| 1     | 0     | 0                     | $x_1 \wedge \bar{x}_2$       |
| 1     | 1     | 1                     | $x_1 \wedge x_2$             |

СДНФ:  $(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)$ .

## 2.25 Нахождение СКНФ

При нахождении СКНФ пользуются следующим правилом:

1. каждый набор аргументов определяет элементарную дизъюнкцию, в которой значению 1 соответствует инверсия переменной, а значению 0 – сама переменная;
2. СКНФ функции образуют те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам аргументов, дающим 0.

Каждый набор аргументов, на котором функция принимает значение 0, называется **конституентой нуля** функции.

Рассмотрим пример нахождения СКНФ для  $x_1 \rightarrow x_2$ :

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \rightarrow x_2$ | элемент. дизъюнкция        |
|-------|-------|-----------------------|----------------------------|
| 0     | 0     | 1                     | $x_1 \vee x_2$             |
| 0     | 1     | 1                     | $x_1 \vee \bar{x}_2$       |
| 1     | 0     | 0                     | $\bar{x}_1 \vee x_2$       |
| 1     | 1     | 1                     | $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ |

СКНФ:  $\bar{x}_1 \vee x_2$ .