

# Содержание

<b>1</b>	<b>Множества и отношения</b>	<b>4</b>
1.1	Основные понятия . . . . .	4
1.2	Сравнение множеств . . . . .	5
1.3	Свойства включения множеств . . . . .	5
1.4	Мощность множества . . . . .	6
1.5	Операции над множествами . . . . .	6
1.6	Свойства операций над множествами . . . . .	9
1.7	Обобщенные тождества алгебры множеств . . . . .	10
1.8	Булеан . . . . .	10
1.9	Методы доказательств теоретико-множественных тождеств . . .	11
1.9.1	Метод двух включений . . . . .	11
1.9.2	Метод эквивалентных преобразований . . . . .	11
1.9.3	Метод характеристических функций . . . . .	12
1.10	Упорядоченные пары и наборы . . . . .	13
1.11	Прямое произведение множеств . . . . .	13
1.12	Бинарные отношения . . . . .	14
1.13	Многоместные отношения . . . . .	15
1.14	Композиция отношений . . . . .	15
1.15	Способы задания бинарных отношений . . . . .	16
1.15.1	Матричный способ . . . . .	16
1.15.2	С помощью ориентированного графа . . . . .	16
1.16	Способы задания композиции отношений . . . . .	17
1.16.1	Матричный способ . . . . .	17
1.16.2	С помощью ориентированного графа . . . . .	18
1.17	Свойства бинарных отношений . . . . .	19
1.18	Ядро отношения . . . . .	20
1.19	Замыкание отношений . . . . .	20
1.20	Функциональные отношения . . . . .	20
1.21	Тотальные и частичные функции . . . . .	21
1.22	Инъекция, сюръекция и биекция . . . . .	21
1.23	Отношения эквивалентности . . . . .	21
1.24	Классы эквивалентности . . . . .	22
1.25	Фактормножества . . . . .	22
1.26	Отношения порядка . . . . .	22

<b>2</b>	<b>Элементы математической логики</b>	<b>23</b>
2.1	Основные понятия . . . . .	23
2.2	Логические связки . . . . .	23
2.2.1	Простейшие логические связки . . . . .	23
2.2.2	Порядок выполнения логических операций . . . . .	24
2.2.3	Доказательство тождественной истинности . . . . .	24
2.2.4	Другие логические связки . . . . .	25
2.3	Логические отношения . . . . .	26
2.4	Варианты импликации . . . . .	27
2.5	Необходимое и достаточное условия . . . . .	27
2.6	Основные логические эквивалентности . . . . .	28
2.7	Булевы функции . . . . .	29
2.8	Множество булевых функций. Булев куб . . . . .	30
2.9	Булев порядок . . . . .	30
2.10	Мощность множества булевых функций . . . . .	31
2.11	Существенные и несущественные переменные . . . . .	31
2.12	Булевы функции одной и нескольких переменных . . . . .	32
2.13	Мажоритарная функция . . . . .	33
2.14	Реализация функций формулами . . . . .	33
2.15	Равносильные формулы . . . . .	34
2.16	Законы булевой алгебры . . . . .	34
2.17	Двойственная функция . . . . .	36
2.18	Инволютивность двойственности . . . . .	36
2.19	Самодвойственная функция . . . . .	36
2.20	Принцип двойственности . . . . .	37
2.21	Нормальные формы . . . . .	37
2.22	ДНФ и КНФ . . . . .	37
2.23	Совершенные нормальные формы . . . . .	38
2.23.1	СДНФ . . . . .	38
2.23.2	СКНФ . . . . .	39
2.24	Нахождение СДНФ . . . . .	39
2.25	Нахождение СКНФ . . . . .	39
2.26	Замкнутые классы . . . . .	40
2.27	Свойства замыкания . . . . .	41
2.28	Полные системы функций . . . . .	42
2.29	Полнота двойственной системы . . . . .	43
2.30	Теорема Поста . . . . .	43

2.31	Одноместный предикат . . . . .	44
2.32	n-местный предикат . . . . .	45
2.33	Кванторные операции . . . . .	45
2.34	Алфавит логики предикатов . . . . .	45
2.35	Формулы логики предикатов . . . . .	46
2.36	Равносильные формулы . . . . .	47
2.37	Предваренная нормальная форма . . . . .	48
2.38	Общезначимость и выполнимость . . . . .	48
2.39	Проблема разрешимости в логике предикатов . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Комбинаторика</b>	<b>49</b>
3.1	Комбинаторные задачи . . . . .	49
3.2	Правила суммы и произведения . . . . .	50
3.3	Схема выбора без возвращения . . . . .	51
3.3.1	Перестановки . . . . .	51
3.3.2	Размещения . . . . .	51
3.3.3	Сочетания . . . . .	52
3.4	Схема выбора с возвращением (с повторениями) . . . . .	52
3.4.1	Перестановки с повторениями . . . . .	52
3.4.2	Размещения с повторениями . . . . .	53
3.4.3	Сочетания с повторениями . . . . .	53
3.5	Бином Ньютона . . . . .	54
3.6	Свойства биномиальных коэффициентов . . . . .	54
3.7	Треугольник Паскаля . . . . .	56
3.8	Полиномиальная формула . . . . .	57
3.9	Схема упорядоченных разбиений . . . . .	59

# 1 Множества и отношения

## 1.1 Основные понятия

**Множество** – любая определенная совокупность объектов. Элементы множества различны и отличными друг от друга.

Под **множеством** понимают любой набор определенных и различимых между собой объектов, мыслимый как единое целое. Объекты, из которых составлено множество, называются его **элементами**.

Множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами:  $A, B, C, \dots$ . Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами:  $a, b, c, \dots$ .

Для обозначения того, что объект  $x$  является, либо не является элементом множества  $A$ , используют символику:

- $x \in A$  – объект  $x$  является элементом множества  $A$ .
- $x \notin A$  – объект  $x$  не является элементом множества  $A$ .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом  $\emptyset$ .

Множество, из элементов которого составляют конкретное множество, называют **универсальным** и обозначают символом  $U$ .

Множество  $U$  называется **универсальным** для данной задачи, если все рассматриваемые в этой задаче множества являются его подмножествами.

Множества можно изображать с помощью кругов, которые называются **кругами Эйлера** или **диаграммами Венна**. Универсальное множество принято обозначать прямоугольником.

Способы задания множества:

1. перечислением всех элементов множества (в фигурных скобках через запятую):

$$A = \{1, 2, 3, 4\};$$

2. характеристическим предикатом, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество. Характеристический предикат записывается после двоеточия или символа «|»:

$$A = \{x : P(x)\} \quad \vee \quad A = \{x \mid P(x)\}$$

где  $P(x)$  – характеристический предикат.

Обозначения числовых множеств:

- $\mathbb{N}$  – множества натуральных чисел,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ;
- $\mathbb{Z}$  – множества целых чисел,  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ;

- $\mathbb{Q}$  – множество рациональных чисел,  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \right\}$ ;
- $\mathbb{R}$  – множество действительных (вещественных) чисел;
- $\mathbb{C}$  – множество комплексных чисел.

## 1.2 Сравнение множеств

Множество  $A$  называется **подмножеством** множества  $B$  (множество  $A$  содержится в  $B$ , множество  $B$  включает множество  $A$ ), если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ :

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A \implies x \in B.$$

$B$  называется **надмножеством** множества  $A$ .

Под определению пустое множество является подмножеством всех множеств:

$$\forall M \implies \emptyset \subseteq M.$$

Универсальное множество содержит все множества:

$$\forall M \implies M \subseteq U.$$

Два множества называют **равными**, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Если  $A \subseteq B$  и  $A \neq B$ , то множество  $A$  называется **собственным** подмножеством множества  $B$ , а  $B$  – **собственным** надмножеством  $A$ .

Множества  $A$  и  $B$  **сравнимые**, если  $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ . Иначе множества называются **несравнимыми**.

## 1.3 Свойства включения множеств

**Свойство 1.**

$$\forall A \implies A \subseteq A.$$

**Свойство 2.**

$$\forall A, B : A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B.$$

**Свойство 3.**

$$\forall A, B, C : A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

## 1.4 Мощность множества

Говорят, что между множествами  $A$  и  $B$  установлено **взаимно-однозначное соответствие**, если каждому элементу множества  $A$  поставлен в соответствие один и только один элемент множества  $B$ , и каждому элементу множества  $B$  поставлен в соответствие один и только один элемент множества  $A$ :

$$A \sim B \iff \begin{cases} \forall a \in A \mapsto !b \in B \\ \forall b \in B \mapsto !a \in A \end{cases}$$

Два множества (конечных или бесконечных) имеют **одинаковую мощность**, если между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие. В этом случае говорят, что множества  $A$  и  $B$  **изоморфны**, имеют одинаковую **мощность**, или что они **равномощны**, и обозначают  $|A| = |B|$ .

Множество  $A$  называется **конечным**, если у него нет равномощного собственного подмножества:

$$\forall B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \implies B = A.$$

Для конечного множества используется запись  $|A| < \infty$ .

Множество **бесконечно** тогда и только тогда, когда оно имеет одинаковую мощность с некоторым своим подмножеством, не совпадающим с самим этим множеством:

$$\exists B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \wedge B \neq A.$$

То есть бесконечное множество равномощно некоторому своему собственному подмножеству. Для бесконечного множества используется запись  $|A| = \infty$ .

Множество  $X$  называется **счетным**, если его мощность равна мощности множества натуральных чисел, т. е.  $|X| = |\mathbb{N}|$ .

Говорят, что множество  $X$  – множество **мощности континуума**, если его мощность равна мощности множества точек на отрезке  $[0, 1]$ .

**Теорема** (Теорема Кантора о несчетности). Отрезок  $[0, 1]$  несчетен, т. е.

$$|[0, 1]| > |\mathbb{N}|.$$

## 1.5 Операции над множествами

**Объединением** двух множеств называется множество, содержащее все элементы обоих множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

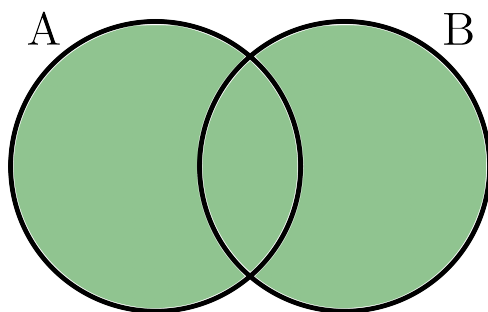


Рис. 1.1: Объединение двух множеств

**Пересечением** двух множеств называется множество, состоящее из элементов, входящих в каждое из множеств  $A$  и  $B$ :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

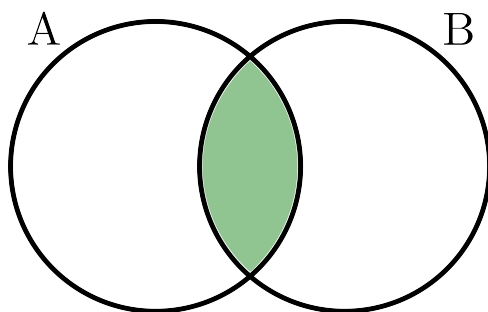


Рис. 1.2: Пересечение двух множеств

**Разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех элементов множества  $A$ , не содержащихся в множестве  $B$ :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

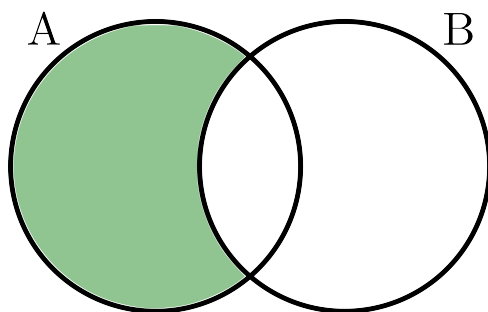


Рис. 1.3: Разность двух множеств

**Симметрической разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех элементов множества  $A$ , не содержащихся в множестве  $B$ , и всех элементов множества  $B$ , не содержащихся в множестве  $A$ :

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

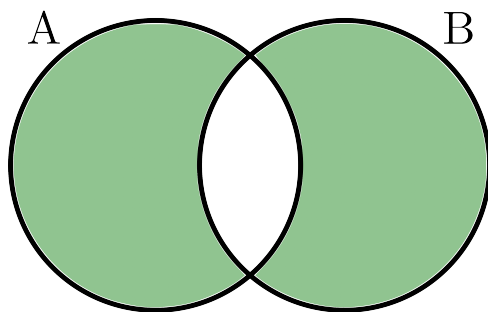


Рис. 1.4: Симметрическая разность двух множеств

**Дополнением** (дополнением до универсального множества  $U$ ) множества  $A$  называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не содержащихся в множестве  $A$ :

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$



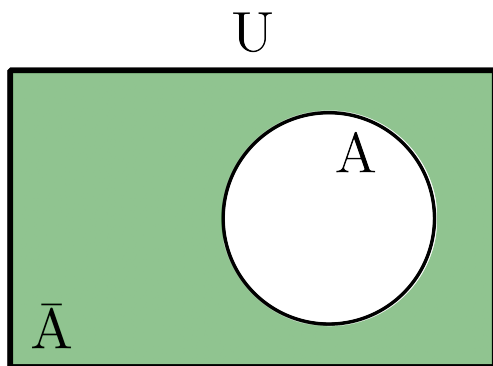


Рис. 1.5: Дополнение множества

## 1.6 Свойства операций над множествами

**Свойство 1** (Идемпотентность).

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

**Свойство 2** (Коммутативность).

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

**Свойство 3** (Ассоциативность).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

**Свойство 4** (Дистрибутивность).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**Свойство 5** (Поглощение).

$$(A \cap B) \cup A = A, \quad (A \cup B) \cap A = A.$$

**Свойство 6** (Свойства нуля).

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

**Свойство 7** (Свойства единицы).

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$$

**Свойство 8** (Инволютивность).

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

**Свойство 9** (Законы де Моргана).

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

**Свойство 10** (Свойства дополнения).

$$A \cup \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

**Свойство 11** (Свойство разности).

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

**Свойство 12** (Свойство симметрической разности).

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

## 1.7 Обобщенные тождества алгебры множеств

**Свойство 1** (Обобщенная дистрибутивность).

$$A \cap \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i); \quad A \cup \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i).$$

**Свойство 2** (Обобщенный закон де Моргана).

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

## 1.8 Булеан

Множество всех подмножеств  $A$  называется **булеаном** множества  $A$  и обозначается  $2^A$ :

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

**Теорема.** Если множество  $A$  конечно, то  $|2^A| = 2^{|A|}$ .

## 1.9 Методы доказательств теоретико-множественных тождеств

### 1.9.1 Метод двух включений

Пусть левая часть теоретико-множественного тождества определяет множество  $X$ , а правая часть – множество  $Y$ . Чтобы доказать равенство множеств  $X$  и  $Y$ , достаточно доказать два включения  $X \subseteq Y$  и  $Y \subseteq X$ , т. е. доказать, что

$$\forall x \in X \Rightarrow x \in Y \quad \wedge \quad \forall x \in Y \Rightarrow x \in X.$$

Докажем этим методом тождество

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пусть  $x \in A \Delta B$ . Тогда, согласно определению симметрической разности

$$\begin{aligned} x \in (A \Delta B) &\Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) &\vee (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) &\Rightarrow x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)). \end{aligned}$$

Таким образом доказано, что  $A \Delta B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Докажем обратное включение  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \Delta B$ :

$$\begin{aligned} x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) &\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) &\Rightarrow x \in (A \Delta B). \end{aligned}$$

Оба включения имеют место и тождество доказано.

### 1.9.2 Метод эквивалентных преобразований

Теоретико-множественные тождества можно доказывать, используя свойства операций над множествами. Для этого нужно преобразовать левую часть в правую, или правую – в левую, или правую и левую часть в некоторое третье выражение.

Докажем этим методом тождество:

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C).$$

Преобразуем левую часть к правой:

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) \Delta (A \cap C) = \\
 & = ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{C}) = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = \\
 & = ((A \cap (B \cup C)) \cap \bar{A}) \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
 & = (B \cup C) \cap (A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap \overline{(B \cap C)}) = \\
 & = A \cap ((B \cup C) \cap \overline{(B \cap C)}) = \\
 & = A \cap (B \Delta C).
 \end{aligned}$$

### 1.9.3 Метод характеристических функций

Характеристическая функция  $\chi_A$  множества  $A$  для  $x \in U$  определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \chi_A(x) = 1, & x \in A \\ \chi_A(x) = 0, & x \notin A \end{cases}$$

Для характеристической функции справедливы следующие тождества:

1.  $\chi_A^2(x) = \chi_A(x)$ ;
2.  $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
3.  $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
4.  $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A(x)$ ;
5.  $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
6.  $\chi_{A \Delta B} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2 \cdot \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ .

Докажем этим методом тождество

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned}\chi_{(A \Delta B) \cap C}(x) &= \chi_{(A \Delta B)}(x) \chi_C(x) = \\ &= (\chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x))\chi_C(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\chi_{(A \cap C) \Delta (B \cap C)}(x) &= \chi_{(A \cap C)}(x) + \chi_{(B \cap C)}(x) - 2\chi_{(A \cap C)}(x)\chi_{(B \cap C)}(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_C(x)\chi_B(x)\chi_C(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).\end{aligned}$$

Так как  $\chi_{(A \Delta B) \cap C}(x) = \chi_{(A \cap C) \Delta (B \cap C)}(x)$ , тождество доказано.

## 1.10 Упорядоченные пары и наборы

$(a, b)$  – упорядоченная пара объектов  $a$  и  $b$ .

Равенство упорядоченных пар определяется следующим образом:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

Вообще говоря,  $(a, b) \neq (b, a)$ .

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$  – упорядоченный набор из  $n$  элементов ( $n$ -ка, кортеж или (конечная) последовательность).

$|(a_1, a_2, \dots, a_n)|$  – длина набора, т. е. количество элементов в наборе.

**Теорема.** Два набора одной длины равны, если равны их соответствующие элементы

$$\forall n (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n.$$

## 1.11 Прямое произведение множеств

Прямым (декартовым) произведением двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит  $A$ , а второй принадлежит  $B$ :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

$$A \times B \neq B \times A.$$

**Теорема.** Для конечных множества  $A$  и  $B$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Понятие прямого произведения допускает обобщение. Прямое произведение множеств  $A_1, \dots, A_n$  – это множество наборов (кортежей):

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Множества  $A_i$  необязательно различны.

Степенью множества  $A$  называется его  $n$ -кратное произведение самого на себя:

$$A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-раз}}; \quad |A^n| = |A|^n.$$

## 1.12 Бинарные отношения

Бинарным отношением между множествами  $A$  и  $B$  называется такая тройка  $\langle A, B, R \rangle$ , где  $R$  – подмножество прямого произведения  $A$  и  $B$ :

$$R \subset A \times B,$$

Эти множества именуют следующим образом:

- $R$  – график отношения;
- $A$  – область отправления;
- $B$  – область прибытия.

Область определения отношения:

$$\text{Dom} R = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\}.$$

Область значений:

$$\text{Im} R = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\}.$$

Если  $A = B$  (т. е.  $R \subset A^2$ ), то говорят, что  $R$  есть отношение на множестве  $A$ .

Для бинарных отношений обычно используется **инфиксная** форма записи:

$$aRb \iff (a, b) \in R \subset A \times B.$$

Инфиксная форма позволяет более кратко записывать некоторые формы утверждений относительно отношений:

$$aRbRc \iff (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$$

Обратное отношение:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subset B \times A.$$

Дополнение отношения:

$$\bar{R} = \{(a, b) \mid (a, b) \notin R\} \subset A \times B.$$

Тождественное отношение:

$$I = \{(a, a) \mid a \in A\} \subset A^2.$$

Универсальное отношение:

$$U = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = A \times B.$$

### 1.13 Многместные отношения

$n$ -местное ( $n$ -арное) отношение  $R$  – это подмножество прямого произведения  $n$  множеств, т. е. множество упорядоченных наборов (кортежей):

$$R \subset A_1 \times \dots \times A_n \iff \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\},$$

где  $n$  – вместимость (длина кортежей отношения).

### 1.14 Композиция отношений

Пусть  $R_1 \subset A \times B$  – отношение между множествами  $A$  и  $B$ , а  $R_2 \subset B \times C$  – отношение между множествами  $B$  и  $C$ . **Композицией** двух отношений  $R_1$  и  $R_2$  называется отношение  $R \subset A \times C$  между множествами  $A$  и  $C$ , определяется следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b \in B : aR_1b \wedge bR_2c\}.$$

Композиция отношений ассоциативна, т. е.

$$\begin{aligned} \forall R_1 \subset A \times B, R_2 \subset B \times C, R_3 \subset C \times D \implies \\ \implies (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3). \end{aligned}$$

Композиция отношений на множестве  $A$  является отношением на множестве  $A$ .

Степенью отношения  $R$  на множестве  $A$  называется его  $n$ -кратная композиция с самим собой:

$$R^n = \underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n\text{-раз}}.$$

## 1.15 Способы задания бинарных отношений

### 1.15.1 Матричный способ

Отношение  $R \subset A \times B$  задается с помощью прямоугольной таблицы (матрицы), состоящей из нулей и единиц, в которой строки – первые координаты, а столбцы – вторые, причем на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца будет стоять 1, если имеется отношение  $a_i R b_j$ , и 0 в противном случае.

**Пример.** Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (3, 6)\}.$$

Отношение можно записать в виде матрицы:

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица **универсального** (полного) отношения – это квадратная матрица, состоящая только из единиц.

Матрица **тождественного** (диагонального) отношения – это квадратная матрица, элементами главной диагонали которой являются единицы, а остальные элементы равны нулю.

Матрица **пустого** отношения – это квадратная матрица, состоящая только из нулей.

Матрица **обратного** отношения  $R^{-1}$  для отношения  $R$  – это транспонированная матрица отношения  $R$ .

### 1.15.2 С помощью ориентированного графа

Элементы множеств  $A$  и  $B$  изображаются в виде точек на плоскости (вершины двудольного графа), а упорядоченные пары – линией со стрелкой (дуги ориентированного графа), которая направлена от  $a$  к  $b$ , если  $a R b$ .



**Пример.** Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 3), (3, 6)\}.$$

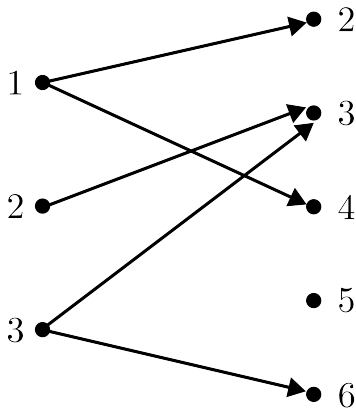


Рис. 1.6: Отношение в виде ориентированного графа

## 1.16 Способы задания композиции отношений

### 1.16.1 Матричный способ

Матрица композиции отношений  $R \circ S$  получается как произведение матриц отношений  $R$  и  $S$  с дальнейшей заменой отличных от нуля элементов единицами.

**Пример.** Пусть

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\},$$
$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Тогда композиция равна

$$\begin{aligned}
 [R \circ S] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$R \circ S = \{(1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

### 1.16.2 С помощью ориентированного графа

Пусть  $R \subset A \times B$  и  $S \subset B \times C$ . Чтобы получить граф  $T = R \circ S$ , надо к графу отношения  $R$  добавить граф отношения  $S$ . Граф композиции отношений получим, если исключим вершины, которые являются элементами множества  $B$ .

**Пример.** Пусть

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\},$$

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}.$$

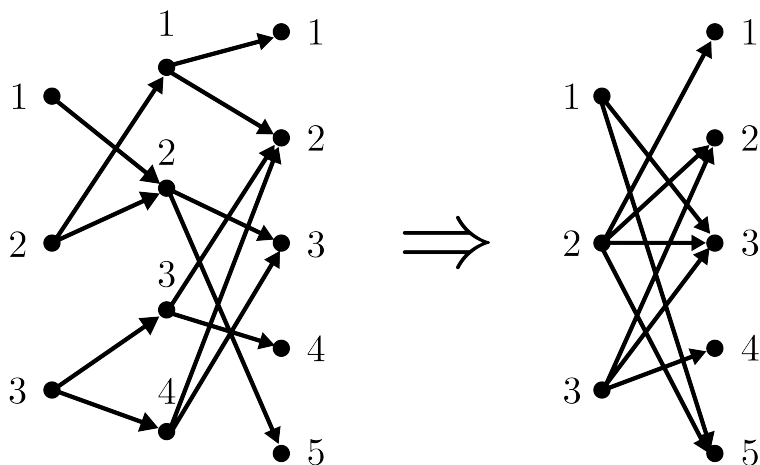


Рис. 1.7: Композиция в виде ориентированного графа

$$R \circ S = \{(1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

## 1.17 Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется

- **рефлексивным**, если

$$\forall x \in A : (x, x) \in R;$$

- **антирефлексивным**, если

$$\forall x \in A : (x, x) \notin R;$$

- **симметричным**, если

$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \implies (y, x) \in R;$$

- **антисимметричным**, если

$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies x = y;$$

- **транзитивным**, если

$$\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R;$$

- **линейным** (полным), если

$$\forall x, y \in A : x = y \vee (x, y) \in R \vee (y, x) \in R.$$

**Теорема.** Пусть  $R \subset A \times A$  – отношение на  $A$ . Тогда

- $R$  рефлексивно  $\iff I \subset R$ ;
- $R$  антирефлексивно  $\iff R \cap I = \emptyset$ ;
- $R$  симметрично  $\iff R = R^{-1}$ ;
- $R$  антисимметрично  $\iff R \cap R^{-1} = I$ ;
- $R$  транзитивно  $\iff R \circ R \subset R$ ;
- $R$  линейно  $\iff R \cup I \cup R^{-1} = U$ .

## 1.18 Ядро отношения

Если  $R \subset A \times B$  – отношение между множествами  $A$  и  $B$ , то композиция  $R \circ R^{-1}$  называется **ядром** отношения  $R$  и обозначается  $\ker R$ :

$$\ker R = R \circ R^{-1}.$$

Ядро отношения  $R$  между  $A$  и  $B$  является отношением на  $A$ :

$$R \subset A \times B \implies \ker R \subset A^2.$$

**Теорема.** Ядро любого отношения рефлексивно и симметрично на области определения.

## 1.19 Замыкание отношений

Пусть  $R$  и  $R^\times$  – отношения на множестве  $M$ . Отношение  $R^\times$  называется замыканием  $R$  относительно свойства  $C$ , если

1.  $R^\times$  обладает свойством  $C$ :  $C(R^\times)$ ;
2.  $R^\times$  является надмножеством  $R$ :  $R \subset R^\times$ ;
3.  $R^\times$  является наименьшим таким объектом:

$$C(R^{\times\times}) \wedge R \subset R^\times \implies R^\times \subset R^{\times\times}.$$

**Теорема.** Пусть  $R$  – отношение на множестве  $M$ . Тогда

- $R \cup I$  есть рефлексивное замыкание  $R$ ;
- $R \cup R^{-1}$  есть симметричное замыкание  $R$ ;
- если  $M$  – конечное множество, содержащее  $n$  элементов, то отношение

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$$

есть транзитивное замыкание  $R$ .

## 1.20 Функциональные отношения

Пусть  $f$  – отношение между  $A$  и  $B$  такое, что

$$\forall a : (a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \implies b = c.$$

Такое свойство отношений называется **однозначностью** или **функциональ-ным**, а само отношение называется **функцией** из  $A$  в  $B$ .

$$f : A \rightarrow B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

$$b = f(a) \iff (a, b) \in f.$$

## 1.21 Тотальные и частичные функции

$$\text{Dom } f \subset A; \quad \text{Im } f \subset B$$

Если  $\text{Dom } f = A$ , то функция называется **тотальной**, а если  $\text{Dom } f \neq A$ , то **частичной**.

## 1.22 Инъекция, сюръекция и биекция

Пусть  $f : A \rightarrow B$ , тогда функция  $f$  называется

- **инъективной** (или инъекцией), если

$$b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \implies a_1 = a_2;$$

- **сюръективной** (или сюръекцией), если

$$\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a);$$

- **биективной** (или биекцией), если она инъективная и сюръективная.

## 1.23 Отношения эквивалентности

Отношение называется отношением **эквивалентности** (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эквивалентности обозначают символами  $E$ ,  $\sim$  (тильда) и  $=$ :

$$xEy, \quad x \sim y, \quad x = y.$$

**Пример.** Отношение равенства  $x = y$  является эквивалентностью на любом множестве  $A$ , так как оно

- рефлексивно ( $x = x$ );
- симметрично ( $x = y \implies y = x$ );
- транзитивно ( $x = y, y = z \implies x = z$ ).

## 1.24 Классы эквивалентности

Пусть  $E$  – отношение эквивалентности на множестве  $A$ . **Классом эквивалентности** элемента  $x \in A$  называется подмножество элементов множества  $A$ , эквивалентных  $x$ :

$$E(x) = \{y \in A \mid xEy\}$$

или

$$[x]_E = \{y \in A \mid y \equiv x\}.$$

## 1.25 Фактормножества

Если  $E$  – отношение эквивалентности на множестве  $A$ , то множество классов эквивалентности называется **фактормножеством** множества  $A$  относительно эквивалентности  $E$  и обозначается  $A/E$ :

$$A/E = \{E(x) \mid x \in A\} \quad \text{или} \quad A/E = \{[x]_E\}_{x \in A}.$$

## 1.26 Отношения порядка

Антисимметричное транзитивное отношение называется **отношением порядка**. Отношение порядка в общем случае обозначается символом  $\prec$ . Отношение порядка может обладать также дополнительными свойствами, которые сведены в следующую таблицу:

Дополнительное свойство, которым обладает отношением порядка	Название отношения порядка, обладающего дополнительным свойством
рефлексивность	отношение нестрогого порядка $\leq$
антирефлексивность	отношение строгого порядка $<$
линейность	отношение линейного порядка
не обладает свойством линейности	отношение частичного порядка

Множества, на котором задано отношение частичного порядка, называется **частично упорядоченным**.

Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется **линейно упорядоченным**.

## 2 Элементы математической логики

### 2.1 Основные понятия

**Математическая логика** – это анализ методом рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т. е. математическая логика исследует соотношения между основными понятиями математики, на базе которых доказываются математические утверждения.

Простейшую из формальных логических теорий называют **алгеброй высказываний**.

**Высказыванием** называется утверждение (повествовательное предложение), о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Высказыванию ставят в соответствие логическую переменную, которая принимает значение 1, если высказывание истинно, и 0, если высказывание ложно.

Из простых высказываний с помощью **логических связок** могут быть построены **составные высказывания**.

### 2.2 Логические связки

#### 2.2.1 Простейшие логические связки

В таблице 2.1 представлены простейшие логические связки.

Название	Прочтение	Обозначение
отрицание	не	$\neg$
конъюнкция	и	$\wedge$
дизъюнкция	или	$\vee$
импликация	если, то	$\rightarrow$
эквивалентность	тогда и только тогда, когда	$\leftrightarrow$

Таблица 2.1: Простейшие логические связи

Таблица 2.2 представляет собой таблицу истинности простейших логических связей.

$A$	$B$	$\bar{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Таблица 2.2: Таблица истинности простейших логических связей

## 2.2.2 Порядок выполнения логических операций

Если скобок нет, то операции выполняются в следующем порядке:

1. отрицание;
2. конъюнкция;
3. дизъюнкция;
4. импликация;
5. эквивалентность.

## 2.2.3 Доказательство тождественной истинности

**Пример.** Необходимо доказать тождественную истинность формулы

$$\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B).$$

$A$	$B$	$\bar{A}$	$A \rightarrow B$	$\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$
0	0	1	1	1



0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Таблица 2.3: Пример доказательства тождественной истинности

## 2.2.4 Другие логические связи

В таблице 2.4 представлены другие логические связи, которые мы в дальнейшем будем использовать.

Название	Прочтение	Обозначение
Штрих Шеффера	антиконъюнкция	$ $
Стрелка Пирса	антидизъюнкция	$\downarrow$
Сумма по модулю два	антиэквивалентность	$\oplus$

Таблица 2.4: Другие логические связи

Эти логические связи можно представить следующим образом:

$$A | B = \overline{A \wedge B}; \quad A \downarrow B = \overline{A \vee B}; \quad A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}.$$

Таблица 2.5 представляет собой таблицу истинности других логических связей.

$A$	$B$	$A   B$	$A \downarrow B$	$A \oplus B$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

---

Таблица 2.5: Таблица истинности других логических связей

**Замечание.** Таблицы истинности содержат  $2^n$  строк, где  $n$  – число простых логических высказываний.

## 2.3 Логические отношения

Отношение следствия: из  $A$  следует  $B$ , если  $B$  истинно всякий раз, когда истинно  $A$ .

**Пример.** Рассмотрим высказывания  $A \leftrightarrow B$ ,  $A \rightarrow B$ ,  $A \vee B$ :

$A$	$B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$A \vee B$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Из  $A \leftrightarrow B$  следует  $A \rightarrow B$ , однако из  $A \leftrightarrow B$  не следует  $A \vee B$ .

Два составных высказывания **эквивалентны**, если они имеют одинаковые истинностные значения на одинаковых наборах, т. е. последние столбцы их таблиц истинности должны совпадать.

**Пример.** Проверим, являются ли высказывания  $A \rightarrow B$  и  $\bar{A} \vee B$  эквивалентными:

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Итого получим, что

$$A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B.$$

## 2.4 Варианты импликации

**Импликация** двух высказываний отличается от эквивалентности, а также от дизъюнкции и конъюнкции тем, что она **несимметрична** (т. е.  $A \rightarrow B$  не эквивалентно  $B \rightarrow A$ ).

Для высказывания  $A \rightarrow B$ :

- высказывание  $B \rightarrow A$  называется **конверсией**;
- высказывание  $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$  называется **конверсией контрапозиции**;
- высказывание  $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$  называется **контрапозицией**.

Таблица 2.9 представляет собой таблицу истинности этих вариантов импликации.

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$\bar{A} \rightarrow \bar{B}$	$\bar{B} \rightarrow \bar{A}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Таблица 2.9: Таблица истинности вариантов импликации

## 2.5 Необходимое и достаточное условия

Условие	Описание	Операция
$A$ является достаточным условием для $B$	Если имеет место $A$ , то $B$ также будет иметь место	Импликация $A \rightarrow B$
$A$ является необходимым условием для $B$	Если имеет место $B$ , то $A$ также будет иметь место	Конверсия достаточного условия $B \rightarrow A$
$A$ является необходимым и достаточным условием для $B$	$A$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место $B$	Двойная импликация, т. е. эквивалентность $A \leftrightarrow B$

## 2.6 Основные логические эквивалентности

**Свойство 1** (Идемпотентность).

$$A \vee A = A, \quad A \wedge A = A.$$

**Свойство 2** (Коммутативность).

$$A \vee B = B \vee A, \quad A \wedge B = B \wedge A.$$

**Свойство 3** (Ассоциативность).

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, \quad A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C.$$

**Свойство 4** (Дистрибутивность).

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

**Свойство 5** (Поглощение).

$$(A \wedge B) \vee A = A, \quad (A \vee B) \wedge A = A.$$

**Свойство 6** (Свойства нуля).

$$A \vee 0 = A, \quad A \wedge 0 = 0.$$

**Свойство 7** (Свойства единицы).

$$A \vee 1 = 1, \quad A \wedge 1 = A.$$

**Свойство 8** (Инволютивность).

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

**Свойство 9** (Законы де Моргана).

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}, \quad \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}.$$

**Свойство 10** (Свойства дополнения).

$$A \vee \bar{A} = 1, \quad A \wedge \bar{A} = 0.$$

**Свойство 11** (Свойство импликации).

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B.$$

**Свойство 12** (Свойство эквивалентности).

$$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

## 2.7 Булевы функции

**Булевы функции** находят применение в конструировании и упрощении логических схем.

Обозначим  $E_2 = \{0, 1\}$ , тогда

$$E_2^n = \underbrace{E_2 \times E_2 \times \dots \times E_2}_n.$$

Функции  $f : E_2^n \rightarrow E_2$  называются **функции алгебры логики** или **булевыми функциями** от  $n$  переменных. Множество булевых функций от  $n$  переменных обозначают  $P_n$ :

$$P_n = \{f \mid f : E_2^n \rightarrow E_2\}.$$

## 2.8 Множество булевых функций. Булев куб

$P_2$  – множество всех булевых функций.

$P_{2,n}$  – множество всех булевых функций от  $n$  переменных:

$$P_{2,n} = \{f \mid f : E_2^n \rightarrow E_2\}, \quad P_2 = \bigcup_{n \geq 0} P_{2,n}.$$

$\{0, 1\}^n$  – **булев куб** размерности  $n$ . Число всех элементов булева куба  $\{0, 1\}^n$  составляет  $2^n$ .

## 2.9 Булев порядок

Для произвольных наборов  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  и  $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  имеет место

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \iff \alpha_i \leq \beta_i, \forall i = \overline{1, n}$$

то есть

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \iff \alpha_i = \beta_i \text{ или } \alpha_i, \beta_i = 1, \forall i = \overline{1, n}.$$

Если существует хотя бы одно  $i$ , для которого  $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$ , то имеет место строгое неравенство  $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ .

Если существует ровно одно  $i$ , для которого  $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$ , то набор  $\bar{\beta}$  **доминирует** над набором  $\bar{\alpha}$ .

Рассмотренное отношение порядка на  $B^n$ , где  $B^n$  –  $n$ -я декартова степень

$$B = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$$

будем называть **булевым порядком**.

Булев куб как упорядоченное множество можно изобразить в виде диаграммы Хассе

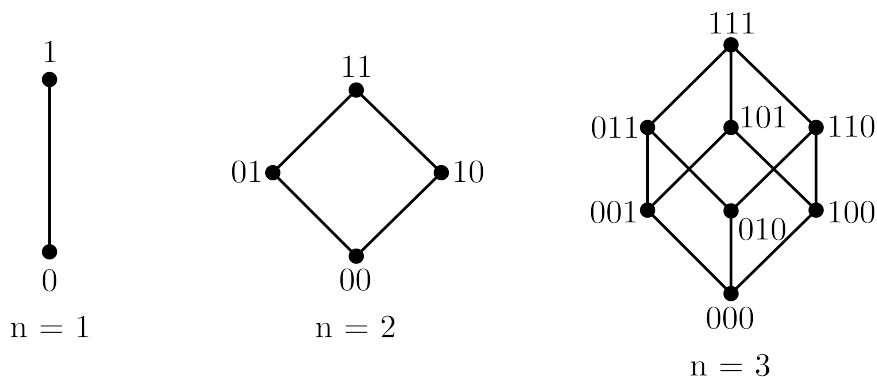


Рис. 2.1: Примеры булевых кубов в виде диаграммы Хассе

## 2.10 Мощность множества булевых функций

**Число булевых функций** от  $n$  переменных находится по формуле

$$|P_{2,n}| = 2^{2^n}.$$

$x_1$	...	$x_{n-1}$	$x_n$	$f(x_1, \dots, x_n)$
0	...	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	...	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
0	...	1	0	$f(0, \dots, 1, 0)$
...	...	...	...	...
1	...	1	1	$f(1, \dots, 1, 1)$

Таблица 2.11: Таблица булевых функций

## 2.11 Существенные и несущественные переменные

Булева функция  $f \in P_n$  **существенно зависит** от переменной  $x_i$ , если существует такой набор значений

$$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$$

что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

В этом случае  $x_i$  называют **существенной** переменной, в противном случае  $x_i$  называют **несущественной** (фиктивной) переменной.

**Пример.** Рассмотрим следующую таблицу истинности:

$x_1$	$x_2$	$f_1$	$f_2$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

В данном случае  $x_1$  – существенная переменная, а  $x_2$  – несущественная, поскольку

$$\begin{aligned} f_1(0,0) &= f_1(0,1), & f_1(1,0) &= f_1(1,1). \\ f_2(0,0) &= f_2(0,1), & f_2(1,0) &= f_2(1,1). \end{aligned}$$

## 2.12 Булевы функции одной и нескольких переменных

$x$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 2.13: Булевы функции одной переменной

$x_1$	$x_2$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1



0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 2.14: Булевы функции двух переменных

## 2.13 Мажоритарная функция

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Таблица 2.15: Мажоритарная функция (функция голосования)

## 2.14 Реализация функций формулами

Так же, как составные высказывания строятся из более простых, с помощью логических операций, можно комбинировать булевы переменные с помощью булевых операций, получая булевы выражения, которые называются **формулами**. Всякой формуле однозначно соответствует некоторая функция, при этом говорят, что **формула реализует функцию**.

**Пример.** Построим таблицу истинности для формулы

$$((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2.$$

$x_1$	$x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$(x_1 \wedge x_2) \oplus x_1$	$((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Формула  $((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$  реализует функцию  $f_8(x_1, x_2) = 0111$ .

## 2.15 Равносильные формулы

Одна функция может иметь множество реализаций. Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются **равносильными**:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \iff \exists f : \text{func } \mathcal{F}_1 = f \wedge \text{func } \mathcal{F}_2 = f.$$

Другими словами, булевы функции  $f$  и  $g$  называют равносильными, если их существенные переменные соответственно равны и на каждом наборе значений этих переменных функции  $f$  и  $g$  принимают равные значения.

**Пример.** Пусть

$$f(x, y) = x \vee y, \quad g(x, y, z) = xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee y\bar{z}.$$

Упростим функцию  $g(x, y, z)$ :

$$g(x, y, z) = xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee y\bar{z} = x(z \vee \bar{z}) \vee y(z \vee \bar{z}) = x \vee y.$$

Получили, что функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y, z)$  равносильны.

## 2.16 Законы булевой алгебры

**Свойство 1** (Идемпотентность).

$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$$

**Свойство 2** (Коммутативность).

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a.$$

**Свойство 3 (Ассоциативность).**

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

**Свойство 4 (Дистрибутивность).**

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

**Свойство 5 (Поглощение).**

$$(a \wedge b) \vee a = a, \quad (a \vee b) \wedge a = a.$$

**Свойство 6 (Свойства нуля).**

$$a \vee 0 = a, \quad a \wedge 0 = 0.$$

**Свойство 7 (Свойства единицы).**

$$a \vee 1 = 1, \quad a \wedge 1 = a.$$

**Свойство 8 (Инволютивность).**

$$\bar{\bar{a}} = a.$$

**Свойство 9 (Законы де Моргана).**

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}, \quad \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}.$$

**Свойство 10 (Свойства дополнения).**

$$a \vee \bar{a} = 1, \quad a \wedge \bar{a} = 0.$$

**Свойство 11 (Свойство импликации).**

$$a \rightarrow b = \bar{a} \vee b.$$

**Свойство 12 (Свойство эквивалентности).**

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a).$$

## 2.17 Двойственная функция

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$  – булева функция. Тогда функция

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$$

называется **двойственной** к функции  $f$ .

**Пример 1.**

$$0^* = \bar{0} = 1.$$

**Пример 2.**

$$1^* = \bar{1} = 0.$$

**Пример 3.**

$$x^* = \bar{\bar{x}} = x.$$

Т. к.  $x$  в данном случае и функция, и переменная, мы применяем двойное отрицание.

**Пример 4.**

$$(x \wedge y)^* = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = x \vee y.$$

**Пример 5.**

$$(x \vee y)^* = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = x \wedge y.$$

## 2.18 Инволютивность двойственности

Из определения видно, что двойственность инволютивна:  $f^{**} = f$ , поэтому отношение «быть двойственной к» на множестве булевых функций симметрично, то есть, если  $f^* = g$ , то  $g^* = f$ .

Если в таблице истинности булевой функции  $f$  инвертировать все значения, то получим таблицу истинности двойственной функции  $f^*$ .

## 2.19 Самодвойственная функция

Функция называется **самодвойственной**, если  $f^* = f$ . Примером такой функции может служить функция  $f(x) = x$ :

$$x^* = \bar{\bar{x}} = x.$$

## 2.20 Принцип двойственности

**Теорема.** Пусть  $F = \{f_1, \dots, f_m\}$  – система булевых функций, а  $F^* = \{f_1^*, \dots, f_n^*\}$  – система двойственных функций. Тогда если формула  $\mathcal{F}$  над базисом  $F$  реализует функцию  $f$ , то формула  $\mathcal{F}^*$  над базисом  $F^*$ , полученная заменой функций  $f_i$ , двойственными функциями  $f_i^*$ , реализует функцию  $f^*$ :

$$\text{func } \mathcal{F} | F| = f \implies \text{func } \mathcal{F}^* | F^*| = f^*.$$

**Следствие.** Если две равносильные формулы заменить двойственными, то равносильность сохранится:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \implies \mathcal{F}_1^* = \mathcal{F}_2^*.$$

**Замечание.** Формула, двойственная к булевой формуле, может быть получена заменой констант 0 на 1, 1 на 0, операций  $\wedge$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\wedge$  и сохранением структуры формулы.

## 2.21 Нормальные формы

Если  $x$  – логическая переменная,  $\sigma \in \{0, 1\}$ , то выражение

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

называется литерой. Литеры  $x$  и  $\bar{x}$  называются **контрарными**. **Элементарной конъюнкцией** называется конъюнкция литер. **Элементарной дизъюнкцией** называется дизъюнкция литер.

## 2.22 ДНФ и КНФ

Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**.

Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ)**.

**Пример 1.** ДНФ:

$$(x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z).$$

**Пример 2.** КНФ:

$$(x \vee z \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y) \wedge z.$$

**Пример 3.** Одновременно и КНФ, и ДНФ:

$$x \wedge \bar{y}.$$

**Теорема.**

1. Любая формула эквивалентна некоторой ДНФ.
2. Любая формула эквивалентна некоторой КНФ.

**Алгоритм приведения формулы к ДНФ:**

1. выразить все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2. используя законы де Моргана, перенести все отрицания к переменным;
3. убрать двойные отрицания;
4. используя закон дистрибутивности, преобразовать формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций.

**Алгоритм приведения формулы к КНФ:**

1. выразить все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2. используя законы де Моргана, перенести все отрицания к переменным;
3. убрать двойные отрицания;
4. используя закон дистрибутивности, преобразовать формулу так, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше, чем конъюнкции.

## 2.23 Совершенные нормальные формы

### 2.23.1 СДНФ

Реализация булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  в виде формулы

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)**. Таким образом, СДНФ есть ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций, и в каждой элементарной конъюнкции каждая переменная  $x_i$ , из набора  $\{x_1, \dots, x_n\}$  входит ровно один раз, причем входит либо сама  $x_i$ , либо ее отрицание  $\bar{x}_i$ .

**Теорема.** Каждая булева функция, отличная от константы 0, имеет единственную СДНФ.

### 2.23.2 СКНФ

Реализация булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  в виде формулы

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$$

называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)**. Таким образом, СКНФ есть КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций, и в каждой элементарной дизъюнкции каждая переменная  $x_i$  из набора  $\{x_1, \dots, x_n\}$  входит ровно один раз, причем входит либо сама  $x_i$ , либо ее отрицание  $\bar{x}_i$ .

**Теорема.** Всякая булева функция, отличная от константы 1, имеет единственную СКНФ.

### 2.24 Нахождение СДНФ

При нахождении СДНФ пользуются следующим правилом:

1. каждый набор аргументов определяет элементарную конъюнкцию, в которой значению 0 соответствует отрицание переменной, а значению 1 – сама переменная.
2. СДНФ функции образуют те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам аргументов, дающим 1.

Каждый набор аргументов, на котором функция принимает значение 1, называется **конституентой единицы** функции.

**Пример.** Найдем СДНФ для  $x_1 \rightarrow x_2$ .

$x_1$	$x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	элемент. конъюнкции
0	0	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$
0	1	1	$\bar{x}_1 \wedge x_2$
1	0	0	$x_1 \wedge \bar{x}_2$
1	1	1	$x_1 \wedge x_2$

СДНФ:  $(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)$ .

### 2.25 Нахождение СКНФ

При нахождении СКНФ пользуются следующим правилом:

1. каждый набор аргументов определяет элементарную дизъюнкцию, в которой значению 1 соответствует инверсия переменной, а значению 0 – сама переменная;
2. СКНФ функции образуют те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам аргументов, дающим 0.

Каждый набор аргументов, на котором функция принимает значение 0, называется **конституентой нуля** функции.

**Пример 1.** Найдем СКНФ для  $x_1 \rightarrow x_2$ .

$x_1$	$x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	ЭЛЕМ. ДИЗЪЮНКЦИИ
0	0	1	$x_1 \vee x_2$
0	1	1	$x_1 \vee \bar{x}_2$
1	0	0	$\bar{x}_1 \vee x_2$
1	1	1	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

СКНФ:  $\bar{x}_1 \vee x_2$ .

## 2.26 Замкнутые классы

Пусть

$$F = \{f_1, \dots, f_m\}, f_i \in P_2 \quad \forall i \in \overline{1, m}.$$

Замыканием  $F$  называется множество всех булевых функций, реализуемых формулами над  $F$ :

$$[F] = \{f \in P_2 \mid f = \text{func } F[F]\}.$$

Класс функций, сохраняющих 0:

$$T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0, \dots, 0) = 0\}.$$

Класс функций, сохраняющих 1:

$$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1, \dots, 1) = 1\}.$$

Класс самодвойственных функций:

$$S = \{f \in P_2 \mid f = f^*\}.$$



Класс монотонных функций:

$$M = \{f \in P_2 \mid \forall \alpha, \beta : \alpha \leq \beta \implies f(\alpha) \leq f(\beta)\}.$$

Класс линейных функций:

$$L = \{f \in P_2 \mid f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n\}.$$

**Теорема.** Классы  $T_0, T_1, S, M, L$  – замкнуты.

**Пример.** Рассмотрим конъюнкцию и введем обозначение  $\psi(x, y) = x \wedge y$ . Построим таблицу истинности:

$x$	$y$	$\psi(x, y) = x \wedge y$	треугольник
0	0	0	0001
0	1	0	001
1	0	0	01
1	1	1	1

Тогда:

- $\psi \in T_0$ , т. к.  $0 \wedge 0 = 0$ ;
- $\psi \in T_1$ , т. к.  $1 \wedge 1 = 1$ ;
- $\psi \notin S$ , т. к.  $\psi^*(x, y) = \overline{x \wedge y} = x \vee y \neq \psi(x, y)$ ;
- $\psi \in M$ , можно убедиться, посмотрев на таблицу истинности;
- $\psi \notin L$ , можно убедиться, построив полином Жегалкина:

$$\psi(x, y) = xyz.$$

## 2.27 Свойства замыкания

**Свойство 1.**

$$F \subset [F]$$

**Свойство 2 (Идемпотентность).**

$$[[F]] = [F]$$

**Свойство 3 (Монотонность).**

$$F_1 \subset F_2 \implies [F_1] \subset [F_2]$$

**Свойство 4.**

$$([F_1] \cup [F_2]) \subset [F_1 \cup F_2].$$

Класс (множество) функций  $F$  называется **замкнутым**, если  $[F] = F$ .

## 2.28 Полные системы функций

Класс функций  $F$  называется **полным**, если его замыкание совпадает с  $P_2$ :

$$[F] = P_2.$$

Другими словами, множество функции  $F$  образует полную систему, если любая булева функция реализуема в виде формулы над  $F$ .

**Теорема.** Пусть заданы две системы функций

$$F = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad G = \{g_1, \dots, g_k\}$$

Тогда, если система  $F$  полна и все функции из  $F$  реализуемы формулами над  $G$ , то система  $G$  также полна.

**Пример.** Система  $\{\vee, \wedge, \neg\}$  полная, т. к. всякая булева функция (в силу того, что она имеет единственную СДНФ) может быть выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. Тогда

- система  $\{\neg, \wedge\}$  полная, т. к.

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2};$$

- система  $\{\neg, \vee\}$  полная, т. к.

$$x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2};$$

- система  $\{|\}$  полная, т. к.

$$\bar{x} = x \mid x, \quad x_1 \wedge x_2 = \overline{x_1 \mid x_2} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2);$$

- система  $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$  полная, т. к.

$$\bar{x} = x \oplus 1.$$

## 2.29 Полнота двойственной системы

**Теорема.** Если система  $F = \{f_1, \dots, f_m\}$  полна, то система  $F^* = \{f_1^*, \dots, f_m^*\}$  также полна.

**Пример.** Система  $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$  полна, следовательно, система  $\{1, 0, \vee, \leftrightarrow\}$  также полна.

## 2.30 Теорема Поста

**Теорема.** Система булевых функций  $F$  полна тогда и только тогда, когда она содержит:

- хотя бы одну функцию, не сохраняющую ноль;
- хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу;
- хотя бы одну несамоудовлетворяющую функцию;
- хотя бы одну немонотонную функцию;
- хотя бы одну нелинейную функцию.

$$[F] = P_2 \iff \overline{F \subset T_0 \vee F \subset T_1 \vee F \subset S \vee F \subset M \vee F \subset L}.$$

**Пример 1.** Рассмотрим систему  $\{\vee, \wedge, \neg\}$ :

	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
$\bar{x}$	—	—	+	—	+
$x_1 \wedge x_2$	+	+	—	+	—
$x_1 \vee x_2$	+	+	—	+	—

Так как в каждом столбике есть —, система  $\{\vee, \wedge, \neg\}$  — полная. Также очевидно, что  $\{\wedge, \neg\}$  и  $\{\vee, \neg\}$  являются полными, а значит являются базисами для исходной системы.

**Пример 2.** Рассмотрим систему  $\{|\}$ :

$x$	$y$	$f(x, y) = x   y$	треугольник
0	0	1	1110

0	1	1	001
1	0	1	01
1	1	0	1

1.  $f(0, 0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0$ ;
2.  $f(1, 1) = 0 \Rightarrow f \notin T_1$ ;
3.  $f(0, 1) = 1, f(1, 0) = 1 \Rightarrow f \notin S$ ;
4.  $(0, 0) < (1, 1), f(0, 0) > f(1, 1) \Rightarrow f \notin M$ ;
5.  $f(x, y) = 1 \oplus xy \Rightarrow f \notin L$ .

	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
$x \mid y$	—	—	—	—	—

Следовательно, система  $\{|\}$  является полной по критерию Поста. Таким же образом можно доказать, что  $\downarrow$  также является полной.

**Замечание.** Число шепферовых функций от  $n$  переменных равно

$$2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}.$$

## 2.31 Одноместный предикат

**Одноместный предикат**  $P(x)$  – это функция переменной  $x$ , определенная на множестве  $M$  и принимающая значения на множестве  $\{0, 1\}$ . Те значения переменной, на которых предикат принимает истинное значение, образуют **множество истинности предиката**. Так как предикаты принимают значения 0 и 1, то к ним применяются логические операции.

**Пример.** Пусть даны предикаты  $P(x) = \langle x - \text{четное число} \rangle$  и  $Q(x) = \langle x \text{ кратно } 3 \rangle$ , определенные на множестве  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Необходимо найти область истинности предикатов:

1.  $P(x) \wedge Q(x)$ ;
2.  $P(x) \vee Q(x)$ ;
3.  $\bar{P}(x)$ ;

$$4. P(x) \rightarrow Q(x).$$

Решение:

1.  $I_{P \wedge Q} = I_P \cap I_Q = \{6\};$
2.  $I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\};$
3.  $I_{\bar{P}} = \bar{I}_P = M \setminus I_P = \{1, 3, 5, 7, 9\};$
4.  $I_{P \rightarrow Q} = \bar{I}_P \cup I_Q = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}.$

## 2.32 n-местный предикат

$n$ -местным предикатом называется функция  $n$  переменных  $P(x_1, \dots, x_n)$ , определенная на множестве  $M = M_1 \times \dots \times M_n$  и принимающая на этом множестве одно из двух значений: истина или ложь:

$$P(x_1, \dots, x_n) : M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow E_2.$$

## 2.33 Кванторные операции

Пусть  $P(x)$  – одноместный предикат, определенный на множестве  $M$ . Квантор общности  $\forall$  превращает предикат  $P(x)$  в высказывание:

$$\forall P(x) = \text{«для любого элемента } x \text{ высказывание } P(x) \text{ истинно»}.$$

Квантор существования  $\exists$  превращает предикат  $P(x)$  в высказывание

$$\exists P(x) = \text{«существует элемент } x \text{ такой, что высказывание } P(x) \text{ истинно»}.$$

Операция приписывания к предикату квантора называется **навешиванием квантора**. Переменная, к которой относится квантор, связывается квантором и называется **связанной переменной**. Переменная, не связанная квантором, называется **свободной переменной**.

## 2.34 Алфавит логики предикатов

1. предметные константы  $p, q, r, \dots$  (принимают значения 0 или 1);
2. предметные переменные  $x, y, z, \dots$ , пробегающие значения некоторого множества  $M$ ;
3. функциональные переменные  $f, g, h, \dots$ ;

4. предикатные переменные  $P, Q, R, \dots$ ;
5. символы логических операций  $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ ;
6. кванторные символы  $\forall, \exists$ ;
7. запятая, скобки.

## 2.35 Формулы логики предикатов

Определим понятие **терма**:

1. Всякая предметная константа есть терм.
2. Всякая предметная переменная есть терм.
3. Если  $t_1, \dots, t_n$  – термы, а  $f$  – функциональная переменная, то  $f(t_1, \dots, t_n)$  – есть терм.

Определим понятие **формулы**:

1. Если  $t_1, \dots, t_n$  – термы,  $\{x_1, \dots, x_n\}$  – множество всех переменных в термах  $t_1, \dots, t_n$ ,  $P$  – предикатная переменная, то  $P(t_1, \dots, t_n)$  – элементарная формула со свободными переменными  $x_1, \dots, x_n$ .
2. Если  $A$  – формула, то  $\bar{A}$  – формула. Свободные переменные формулы  $A$  являются свободными переменными формулы  $\bar{A}$ .
3. Если  $A$  и  $B$  есть формулы, то  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$  тоже есть формулы. Их свободные переменные – это свободные переменные формул  $A$  и  $B$ .
4. Если  $A(x)$  – формула с множеством свободных переменных  $\{x, x_1, \dots, x_n\}$ , то выражения  $\exists x A(x)$  и  $\forall x A(x)$  есть формулы. Переменные  $x_1, \dots, x_n$  в этих формулах свободны, а переменная  $x$  связана квантором.

При построении новых формул надо внимательно следить за тем, чтобы предметные переменные, свободные в одной формуле, были свободными и в других формулах. Тогда эти переменные будут свободными и в построенной формуле.

Формула без свободных переменных называется **замкнутой**.

При построении формул в логике предикатов действуют те же правила опускания скобок, что и в исчислении высказываний. Кванторы имеют высший приоритет.

В формулах  $\exists x A(x)$  и  $\forall x A(x)$  формула  $A(x)$  есть область действия квантора.

**Пример.**

- $\forall x P(x)$  является формулой;
- $\exists x (Q(x) \rightarrow P(x, y))$  является формулой;
- $\exists x P(x, y) \vee Q(x)$  не является формулой, т. к. нет скобочек.

## 2.36 Равносильные формулы

Две формулы логики предикатов называются **равносильными** на области  $M$ , если они принимают одинаковые значения для всех значений переменных из области  $M$ .

**Равносильные формулы** – это формулы, равносильные на любой области.

**Пример 1.**

$$\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}.$$

**Пример 2.**

$$\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}.$$

**Пример 3.**

$$C \wedge \forall x B(x) = \forall x (C \wedge B(x)).$$

**Пример 4.**

$$C \vee \forall x B(x) = \forall x (C \vee B(x)).$$

**Пример 5.**

$$C \wedge \exists x B(x) = \exists x (C \wedge B(x)).$$

**Пример 6.**

$$C \vee \exists x B(x) = \exists x (C \vee B(x)).$$

**Пример 7.**

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) = \forall x (A(x) \wedge B(x)).$$

**Пример 8.**

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) = \exists x (A(x) \vee B(x)).$$

**Пример 9.**

$$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) = \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)).$$

**Пример 10.**

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) = \forall x \forall y (A(x) \vee B(y))$$

## 2.37 Предваренная нормальная форма

Предваренная нормальная форма имеет следующий вид:

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B(x_1, \dots, x_n),$$

где  $Q_i$  – один из кванторов, формула  $B(x_1, \dots, x_n)$  не содержит кванторов.

**Теорема.** Любую формулу логики предикатов можно привести к предваренной нормальной форме.

**Пример.** Необходимо привести формулу

$$\overline{\forall x (P(x))} \vee \exists x (Q(x, y))$$

к предваренной нормальной форме:

$$\begin{aligned} \overline{\forall x (P(x))} \vee \exists x (Q(x, y)) &= \exists x (\overline{P(x)}) \vee \exists x (Q(x, y)) = \\ &= \exists x (\overline{P(x)} \vee Q(x, y)). \end{aligned}$$

## 2.38 Общезначимость и выполнимость

Формула логики предикатов называется **выполнимой** в некоторой области  $M$ , если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к области  $M$ , при которых формула принимает истинное значение. Формула **выполнима**, если существует область, на которой выполнима эта формула.

Формула логики предикатов называется **тождественно истинной** в области  $M$ , если для всех значений переменных из области  $M$  формула принимает истинное значение. Формула, тождественно истинная в любой области, называется **общезначимой** (логическим законом).

**Пример 1.** Логический закон:

$$\forall x (P(x) \vee \overline{P(x)}).$$

**Пример 2.** Определить выполнимость формулы  $\exists x (P(x))$ . Пусть  $M$  – это множество натуральных чисел, причем

$$P(x) = \langle x - \text{простое число} \rangle.$$

Тогда  $\exists x (P(x))$  – это истинное высказывание, то есть формула  $\exists x (P(x))$  выполнима.



## 2.39 Проблема разрешимости в логике предикатов

Проблема разрешимости в логике предикатов формулируется следующим образом. Существуют ли алгоритмы, позволяющие определить общезначимость, выполнимость или тождественную ложность любой формулы логики предикатов? Считается, что эта проблема алгоритмически не разрешима.

## 3 Комбинаторика

### 3.1 Комбинаторные задачи

Комбинаторные задачи называют задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор, то есть подсчет числа всевозможных комбинаций из элементов данного конечного множества при сделанных исходных предположениях.

**Пример 1.** У вас в темном чулане стоят банки с вареньем трех сортов: яблочное, сливовое и земляничное. Какое наименьшее количество банок вам надо взять, не глядя, чтобы среди них наверняка оказалось не менее девяти банок с вареньем одного сорта?

Самый худший случай: 8 банок подряд с одним сортом варенья, затем 8 банок подряд с другим сортом, затем 8 банок подряд с третьим сортом:

$$8 + 8 + 8 + 1 = 25.$$

**Пример 2.** Андрей, Борис, Виктор, Григорий и Дмитрий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым под одной партией. Сколько партий было сыграно?

Решение для случая  $n = 5$ :

$$4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10.$$

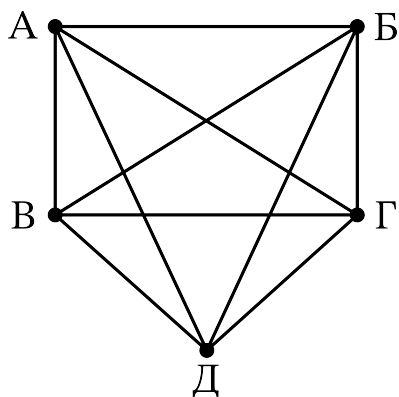


Рис. 3.1: Решение с помощью графа

Решение для случая  $n$ :

$$(n-1) + (n-2) + \dots + \dots + 1 + 0 = \frac{n-1+0}{2}n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

## 3.2 Правила суммы и произведения

Если объект первого вида можно выбрать  $m$  способами, а объект второго вида –  $n$  способами, то

- один объект любого из этих видов можно выбрать  $m + n$  способами (правило суммы);
- пару объектов, один из которых первого вида, а другой – второго вида, можно выбрать  $m \cdot n$  способами (правило произведения).

**Замечание.** Правила суммы и произведения справедливы для любого конечного числа видов объектов.

**Пример 1.** В вазе лежит 5 яблок и 3 персика различных сортов. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

По правилу суммы  $5 + 3 = 8$  вариантов.

**Пример 2.** Имеется 2 конверта: обычный и авиа, и 3 марки: прямоугольная, квадратная и треугольная. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку, чтобы отправить письмо?

По правилу произведения  $2 \cdot 3 = 6$  вариантов.

**Пример 3.** Сколько трехзначных чисел можно составить из 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

По правилу произведения  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  числа.

**Пример 4.** Сколько трехзначных чисел можно составить из 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них любое число раз?

По правилу произведения  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$  числа.

### 3.3 Схема выбора без возвращения

#### 3.3.1 Перестановки

Пусть имеется множество из  $n$  элементов. Каждая последовательность всех его элементов называется **перестановкой** из  $n$  элементов. Число всех перестановок из  $n$  элементов обозначается  $P_n$  и вычисляется по формуле:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

**Пример.** Имеется 10 различных книг. Сколько существует способов расставить их на одной книжной полке?

Решение:

$$n = 10 \implies P_n = P_{10} = 10! = 3628800.$$

#### 3.3.2 Размещения

Пусть имеется множество из  $n$  элементов. **Упорядоченными подмножествами** этого множества называют различные последовательности, составленные из элементов подмножеств.

Каждое упорядоченное подмножество из  $k$  элементов множества из  $n$  элементов называется **размещением** из  $n$  элементов по  $k$  элементам. Число всех размещений из  $n$  элементов по  $k$  элементам обозначается  $A_n^k$  (читается « $A$  из  $n$  по  $k$ ») и вычисляется по формуле:

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

**Пример.** В турнире участвуют 8 спортсменов. Сколько можно сделать предсказаний относительно распределения первых трех мест?

Решение:

$$n = 8, k = 3 \implies A_n^k = A_8^3 = \frac{8!}{(8 - 3)!} = 336.$$

**Замечание.** Размещение  $A_n^n$  из  $n$  элементов по  $n$  элементам является перестановкой  $P_n$  из  $n$  элементов.

### 3.3.3 Сочетания

Пусть имеется множество из  $n$  элементов. Каждое его подмножество из  $k$  элементов называется **сочетанием** из  $n$  элементов по  $k$  элементам. Таким образом, подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, не считаются различными. Число всех сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  элементам обозначается  $C_n^k$  (читается « $C$  из  $n$  по  $k$ ») и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Пример.** В группе 25 студентов. Надо выбрать трех человек, которые будут представлять группу на студенческой конференции. Сколькими способами можно осуществить этот выбор?

Решение:

$$n = 25, k = 3 \implies C_n^k = C_{25}^3 = \frac{25!}{3!(25-3)!} = 2300.$$

## 3.4 Схема выбора с возвращением (с повторениями)

### 3.4.1 Перестановки с повторениями

Пусть имеется мультимножество из  $n$  элементов  $k$  различных видов такое, что оно состоит из  $n_1$  элементов 1-го вида,  $n_2$  элементов 2-го вида, ...,  $n_k$  элементов  $k$ -го вида, причем  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Перестановки всех элементов такого мультимножества называются **перестановками с повторениями**.

**Теорема.** Число различных перестановок с повторениями равно

$$P(n, n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

**Пример.** Определить, сколько различных слов можно составить из слова «математика».

В слове «математика» имеется 6 видов букв:

букв «м»  $n_1 = 2$ ,

букв «а»  $n_2 = 3$ ,

букв «т»  $n_3 = 2$ ,

букв «е»  $n_4 = 1$ ,

букв «и»  $n_5 = 1$ ,

букв «к»  $n_6 = 1$ .

Всего  $n = 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$  букв. Тогда из слова «математика» можно составить

$$P(n, n_1, \dots, n_6) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_6!} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

различных слов.

### 3.4.2 Размещения с повторениями

Пусть имеется множество из  $n$  элементов. Каждый кортеж длины  $k$ , составленный из элементов данного  $n$ -элементного множества (элементы кортежа не обязательно должны быть различными), называется **размещением** из  $n$  элементов по  $k$  элементам **с повторениями**.

**Теорема.** Число всех размещений из  $n$  элементов по  $k$  элементам с повторениями равно:

$$\bar{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k = n^k.$$

**Пример.** Сколько пятизначных номеров можно составить из элементов множества  $\{1, 2, 3\}$ ?

Решение:

$$n = 3, k = 5 \implies \bar{A}_n^k = \bar{A}_3^5 = 3^5 = 243.$$

### 3.4.3 Сочетания с повторениями

Пусть имеются элементы  $n$  различных видов. Из них составляется комбинация из  $k$  элементов такая, что порядок элементов в комбинации не важен, причем элементы одного вида могут повторяться. Такая комбинация называется **сочетанием с повторениями** из  $n$  элементов по  $k$  элементам.

**Теорема.** Число всех сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  элементам равно

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

**Пример.** В почтовом отделении продаются открытки пяти видов. Определить число способов покупки семи открыток.

Решение:

$$n = 5, k = 7 \implies \bar{C}_n^k = \bar{C}_5^7 = C_{5+7-1}^7 = C_{11}^7 = 330.$$

### 3.5 Бином Ньютона

Для произвольного положительного целого числа  $n$  справедлива следующая формула:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^{n-0} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Коэффициенты  $C_n^k$  называются **биномиальными коэффициентами** и вычисляются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Пример.** Определить разложение  $(a + b)^n$  при  $n = 4$ .

Решение:

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= C_4^0 a^{4-0} b^0 + C_4^1 a^{4-1} b^1 + C_4^2 a^{4-2} b^2 + C_4^3 a^{4-3} b^3 + C_4^4 a^{4-4} b^4 = \\ &= \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} a^4 + \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} a^3 b + \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} a^2 b^2 + \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} a b^3 + \\ &\quad + \frac{4!}{4! \cdot (4-4)!} b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4. \end{aligned}$$

### 3.6 Свойства биномиальных коэффициентов

**Свойство 1.**

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

**Доказательство.**

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 2.**

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
 C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n-k+k}{k(n-k)} = \\
 &= \frac{(n-1)!n}{(k-1)!k(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.
 \end{aligned}$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 3.**

$$C_n^i \cdot C_i^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{i-k}.$$

**Свойство 4.**

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

**Доказательство.**

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

*Что и требовалось доказать.*

**Свойство 5.**

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0.$$

**Свойство 6.**

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}.$$

**Свойство 7 (тождество Коши).**

$$C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^k C_m^i C_n^{k-i}$$

### 3.7 Треугольник Паскаля

Рассмотрим следующий треугольник:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C_0^0 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots
 \end{array}$$

Первая строка, состоящая из одного элемента, считается нулевой. Строка под номером  $n$  содержит биномиальные коэффициенты разложения  $(a + b)^n$ , то есть  $C_n^k$ , где  $k$  пробегает значения от 0 до  $n$ .

Элемент нулевой строки и боковые элементы треугольника равны единицам, а каждый внутренний элемент треугольника согласно свойству

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

равен сумме двух элементов, расположенных над ним. Таким образом, будем иметь:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
 1 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

**Пример 1.** Используя треугольник Паскаля, найти  $C_5^2 + C_7^4 + C_9^6$ .

Решение:

$$C_5^2 + C_7^4 + C_9^6 = 10 + 35 + 84 = 129.$$



**Пример 2.** Используя треугольник Паскаля, представить  $(a + b)^7$  в виде многочлена:

Решение:

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

### 3.8 Полиномиальная формула

Формула, обобщающая формулу бинома Ньютона, называется **полиномиальной**.

**Теорема.** Для любых натуральных чисел  $n$  и  $k$  и любых чисел  $a_1, \dots, a_k$  справедлива формула

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} C(n, n_1, \dots, n_k) \cdot a_1^{n_1} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k},$$

где суммирование производится по всем решениям уравнения

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

в неотрицательных целых числах.

Коэффициенты данного разложения  $C(n, n_1, \dots, n_k)$  называются **мультиномиальными коэффициентами** и вычисляются по формуле

$$C(n, n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Они совпадают с числом различных перестановок с повторениями:

$$P(n, n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

**Пример 1.** Найти разложение степени  $(a + b + c)^3$ .

Сначала определим число слагаемых в разложении:

$$\bar{C}_3^3 = C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

$$(a + b + c)^3 = \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = 3} C(3, n_1, n_2, n_3) a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3},$$

где

$$C(3, n_1, n_2, n_3) = \frac{3!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}.$$

Возможно 10 решений уравнения  $n_1 + n_2 + n_3 = 3$  в целых числах:

1.  $n_1 = 3, n_2 = 0, n_3 = 0$ ;
2.  $n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 0$ ;
3.  $n_1 = 2, n_2 = 0, n_3 = 1$ ;
4.  $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 0$ ;
5.  $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1$ ;
6.  $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 2$ ;
7.  $n_1 = 0, n_2 = 3, n_3 = 0$ ;
8.  $n_1 = 0, n_2 = 2, n_3 = 1$ ;
9.  $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 2$ ;
10.  $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 3$ .

$$\begin{aligned}
 (a+b+c)^3 &= \frac{3!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} a^3 b^0 c^0 + \frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot 0!} a^2 b^1 c^0 + \frac{3!}{2! \cdot 0! \cdot 1!} a^2 b^0 c^1 + \\
 &+ \frac{3!}{1! \cdot 2! \cdot 0!} a^1 b^2 c^0 + \frac{3!}{1! \cdot 0! \cdot 2!} a^1 b^0 c^2 + \frac{3!}{0! \cdot 2! \cdot 1!} a^0 b^2 c^1 + \frac{3!}{0! \cdot 1! \cdot 2!} a^0 b^1 c^2 + \\
 &+ \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} a^1 b^1 c^1 + \frac{3!}{0! \cdot 3! \cdot 0!} a^0 b^3 c^0 + \frac{3!}{0! \cdot 0! \cdot 3!} a^0 b^0 c^3 = \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc + b^3 + c^3.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.** В разложении многочлена  $(1 + 2x^2 - 3x^4)^{10}$  найти коэффициент при  $x^8$ .

$$\begin{aligned}
 (1 + 2x^2 - 3x^4)^{10} &= \sum_{n_1+n_2+n_3=10} \frac{10!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} \cdot (1)^{n_1} \cdot (2x^2)^{n_2} \cdot (-3x^4)^{n_3} = \\
 &= \sum_{n_1+n_2+n_3=10} \frac{10!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} \cdot (2)^{n_2} \cdot (-3)^{n_3} \cdot x^{2n_2+4n_3}. \\
 &\quad \begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 = 10 \\ 2n_2 + 4n_3 = 8. \end{cases}
 \end{aligned}$$

1.  $n_1 = 8, n_2 = 0, n_3 = 2$ ;
2.  $n_1 = 7, n_2 = 2, n_3 = 1$ ;
3.  $n_1 = 6, n_2 = 4, n_3 = 0$ .

Коэффициент при  $x^8$  вычисляется по формуле:

$$\frac{10!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} \cdot (2)^{n_2} \cdot (-3)^{n_3}.$$

$$1. \ n_1 = 8, n_2 = 0, n_3 = 2:$$

$$\frac{10!}{8! \cdot 0! \cdot 2!} \cdot 2^0 \cdot (-3)^2 = 405;$$

$$2. \ n_1 = 7, n_2 = 2, n_3 = 1:$$

$$\frac{10!}{7! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot 2^2 \cdot (-3)^1 = -4320;$$

$$3. \ n_1 = 6, n_2 = 4, n_3 = 0.$$

$$\frac{10!}{6! \cdot 4! \cdot 0!} \cdot 2^4 \cdot (-3)^0 = 3360.$$

Таким образом, коэффициент при  $x^8$  будет равен:

$$405 - 4320 + 3360 = -555.$$

### 3.9 Схема упорядоченных разбиений

Пусть имеется  $n$  различных шаров и  $k$  различных урн. Требуется разложить шары по урнам так, чтобы в  $i$ -й находилось  $m_i$  шаров,  $i = \overline{1, k}$ , причем

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n.$$

$$C(n, m_1, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot \dots \cdot m_k!}.$$

**Пример 1.** Известно, что принимая экзамен в группе из 20 человек, преподаватель поставил 4 «пятерки», 8 «четверок», 5 «троек» и 3 «двойки». Сколько существует различных вариантов сдачи экзамена группой?

Решение:

$$C(20, 4, 8, 5, 3) = \frac{20!}{4! \cdot 8! \cdot 5! \cdot 3!} = 3491888400.$$