

Содержание

1	Множества и отношения	2
1.1	Основные понятия	2
1.2	Сравнение множеств	3
1.3	Свойства включения множеств	3
1.4	Мощность множества	4
1.5	Операции над множествами	4
1.6	Свойства операций над множествами	7
1.7	Обобщенные тождества алгебры множеств	8
1.8	Булеан	8
1.9	Методы доказательств теоретико-множественных тождеств . . .	9
1.9.1	Метод двух включений	9
1.9.2	Метод эквивалентных преобразований	9
1.9.3	Метод характеристических функций	10

1 Множества и отношения

1.1 Основные понятия

Множество – любая определенная совокупность объектов. Элементы множества различны и отличными друг от друга.

Под **множеством** понимают любой набор определенных и различимых между собой объектов, мыслимый как единое целое. Объекты, из которых составлено множество, называются его **элементами**.

Множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами: A, B, C, \dots . Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, \dots .

Для обозначения того, что объект x является, либо не является элементом множества A , используют символику:

- $x \in A$ – объект x является элементом множества A .
- $x \notin A$ – объект x не является элементом множества A .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом \emptyset .

Множество, из элементов которого составляют конкретное множество, называют **универсальным** и обозначают символом U .

Множество U называется **универсальным** для данной задачи, если все рассматриваемые в этой задаче множества являются его подмножествами.

Множества можно изображать с помощью кругов, которые называются **кругами Эйлера** или **диаграммами Венна**. Универсальное множество принято обозначать прямоугольником.

Способы задания множества:

1. перечислением всех элементов множества (в фигурных скобках через запятую):

$$A = \{1, 2, 3, 4\};$$

2. характеристическим предикатом, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество. Характеристический предикат записывается после двоеточия или символа «|»:

$$A = \{x : P(x)\} \quad \vee \quad A = \{x \mid P(x)\}$$

где $P(x)$ – характеристический предикат.

Обозначения числовых множеств:

- \mathbb{N} – множества натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- \mathbb{Z} – множества целых чисел, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;

- \mathbb{Q} – множество рациональных чисел, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \right\}$;
- \mathbb{R} – множество действительных (вещественных) чисел;
- \mathbb{C} – множество комплексных чисел.

1.2 Сравнение множеств

Множество A называется **подмножеством** множества B (множество A содержится в B , множество B включает множество A), если каждый элемент множества A является элементом множества B :

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A \implies x \in B.$$

B называется **надмножеством** множества A .

Под определению пустое множество является подмножеством всех множеств:

$$\forall M \implies \emptyset \subseteq M.$$

Универсальное множество содержит все множества:

$$\forall M \implies M \subseteq U.$$

Два множества называют **равными**, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то множество A называется **собственным** подмножеством множества B , а B – **собственным** надмножеством A .

Множества A и B **сравнимые**, если $A \subseteq B \vee B \subseteq A$. Иначе множества называются **несравнимыми**.

1.3 Свойства включения множеств

Свойство 1.

$$\forall A \implies A \subseteq A.$$

Свойство 2.

$$\forall A, B : A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B.$$

Свойство 3.

$$\forall A, B, C : A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

1.4 Мощность множества

Говорят, что между множествами A и B установлено **взаимно-однозначное соответствие**, если каждому элементу множества A поставлен в соответствие один и только один элемент множества B , и каждому элементу множества B поставлен в соответствие один и только один элемент множества A :

$$A \sim B \iff \begin{cases} \forall a \in A \mapsto !b \in B \\ \forall b \in B \mapsto !a \in A \end{cases}$$

Два множества (конечных или бесконечных) имеют **одинаковую мощность**, если между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие. В этом случае говорят, что множества A и B **изоморфны**, имеют одинаковую **мощность**, или что они **равномощны**, и обозначают $|A| = |B|$.

Множество A называется **конечным**, если у него нет равномощного собственного подмножества:

$$\forall B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \implies B = A.$$

Для конечного множества используется запись $|A| < \infty$.

Множество **бесконечно** тогда и только тогда, когда оно имеет одинаковую мощность с некоторым своим подмножеством, не совпадающим с самим этим множеством:

$$\exists B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \wedge B \neq A.$$

То есть бесконечное множество равномощно некоторому своему собственному подмножеству. Для бесконечного множества используется запись $|A| = \infty$.

Множество X называется **счетным**, если его мощность равна мощности множества натуральных чисел, т. е. $|X| = |\mathbb{N}|$.

Говорят, что множество X – множество **мощности континуума**, если его мощность равна мощности множества точек на отрезке $[0, 1]$.

Теорема (Теорема Кантора о несчетности). Отрезок $[0, 1]$ несчетен, т. е.

$$|[0, 1]| > |\mathbb{N}|.$$

1.5 Операции над множествами

Объединением двух множеств называется множество, содержащее все элементы обоих множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

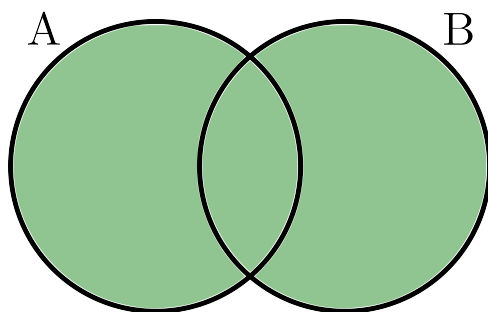


Рис. 1.1: Объединение двух множеств

Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов входящих в каждое из множеств A и B :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

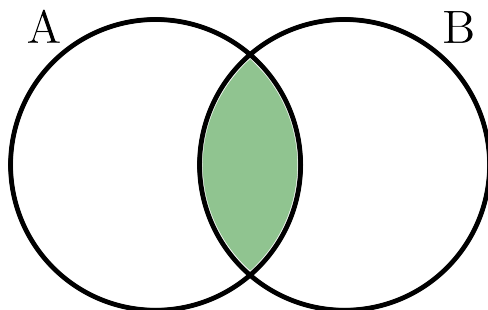


Рис. 1.2: Пересечение двух множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A , не содержащихся в множестве B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

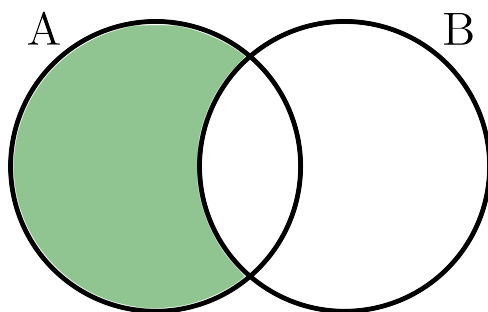


Рис. 1.3: Разность двух множеств

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A , не содержащихся в множестве B , и всех элементов множества B , не содержащихся в множестве A :

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

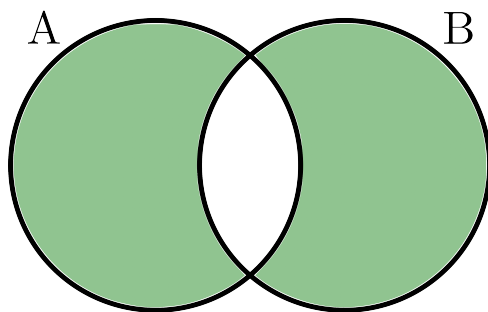


Рис. 1.4: Симметрическая разность двух множеств

Дополнением (дополнением до универсального множества U) множества A называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не содержащихся в множестве A :

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

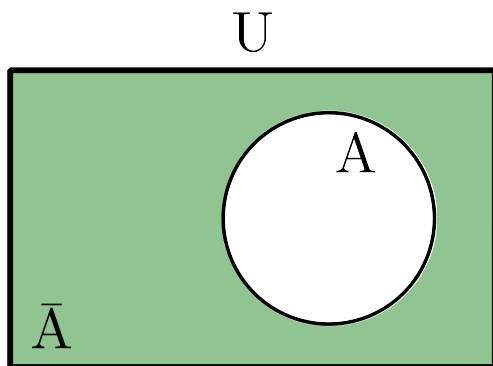


Рис. 1.5: Дополнение множества

1.6 Свойства операций над множествами

Свойство 1 (Идемпотентность).

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A.$$

Свойство 2 (Коммутативность).

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

Свойство 3 (Ассоциативность).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Свойство 4 (Дистрибутивность).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Свойство 5 (Поглощение).

$$(A \cap B) \cup A = A; \quad (A \cup B) \cap A = A.$$

Свойство 6 (Свойства нуля).

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Свойство 7 (Свойства единицы).

$$A \cup U = U; \quad A \cap U = A.$$

Свойство 8 (Инволютивность).

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана).

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}; \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения).

$$A \cup \bar{A} = U; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Свойство 11 (Свойство разности).

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

Свойство 12 (Свойство симметрической разности).

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1.7 Обобщенные тождества алгебры множеств

Свойство 1 (Обобщенная дистрибутивность).

$$A \cap \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i); \quad A \cup \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i).$$

Свойство 2 (Обобщенный закон де Моргана).

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

1.8 Булеан

Множество всех подмножеств A называется **булеаном** множества A и обозначается 2^A :

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Теорема. Если множество A конечно, то $|2^A| = 2^{|A|}$.

1.9 Методы доказательств теоретико-множественных тождеств

1.9.1 Метод двух включений

Пусть левая часть теоретико-множественного тождества определяет множество X , а правая часть – множество Y . Чтобы доказать равенство множеств X и Y , достаточно доказать два включения $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, т. е. доказать, что

$$\forall x \in X \Rightarrow x \in Y \quad \wedge \quad \forall x \in Y \Rightarrow x \in X.$$

Докажем этим методом тождество

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пусть $x \in A \Delta B$. Тогда, согласно определению симметрической разности

$$\begin{aligned} x \in (A \Delta B) &\Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) &\vee (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) &\Rightarrow x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)). \end{aligned}$$

Таким образом доказано, что $A \Delta B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Докажем обратное включение $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \Delta B$:

$$\begin{aligned} x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) &\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) &\Rightarrow x \in (A \Delta B). \end{aligned}$$

Оба включения имеют место и тождество доказано.

1.9.2 Метод эквивалентных преобразований

Теоретико-множественные тождества можно доказывать, используя свойства операций над множествами. Для этого нужно преобразовать левую часть в правую, или правую – в левую, или правую и левую часть в некоторое третье выражение.

Докажем этим методом тождество:

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C).$$

Преобразуем левую часть к правой:

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) \Delta (A \cap C) = \\
 & = ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{C}) = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = \\
 & = ((A \cap (B \cup C)) \cap \bar{A}) \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
 & = (B \cup C) \cap (A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap \overline{(B \cap C)}) = \\
 & = A \cap ((B \cup C) \cap \overline{(B \cap C)}) = \\
 & = A \cap (B \Delta C).
 \end{aligned}$$

1.9.3 Метод характеристических функций

Характеристическая функция χ_A множества A для $x \in U$ определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \chi_A(x) = 1, & x \in A \\ \chi_A(x) = 0, & x \notin A \end{cases}$$

Для характеристической функции справедливы следующие тождества:

1. $\chi_A^2(x) = \chi_A(x)$;
2. $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
3. $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
4. $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A(x)$;
5. $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
6. $\chi_{A \Delta B} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2 \cdot \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Докажем этим методом тождество

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned}\chi_{(A\Delta B)\cap C}(x) &= \chi_{(A\Delta B)}(x)\chi_C(x) = \\ &= (\chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x))\chi_C(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\chi_{(A\cap C)\Delta(B\cap C)}(x) &= \chi_{(A\cap C)}(x) + \chi_{(B\cap C)}(x) - 2\chi_{(A\cap C)}(x)\chi_{(B\cap C)}(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_C(x)\chi_B(x)\chi_C(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).\end{aligned}$$

Так как $\chi_{(A\Delta B)\cap C}(x) = \chi_{(A\cap C)\Delta(B\cap C)}(x)$, тождество доказано.