Содержание

1 Множества и отношения

1.1 Основные понятия

Множество – любая определенная совокупность объектов. Элементы множества различны и отличными друг от друга.

Под **множеством** понимают любой набор определенных и различимых между собой объектов, мыслимый как единое целое. Объекты, из которых составлено множество, называются его **элементами**.

Множества обычно обозначатся заглавными латинскими буквами: $A, B, C, \ldots$. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами: $a, b, c, \ldots$.

Для обозначения того, что объект x является, либо не является элементом множества A, используют символику:

- $x \in A$ – объект x является элементом множества A.
- $x \notin A$ – объект x не является элементом множества A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\varnothing$.

Множество, из элементов которого составляют конкретное множество, называют **универсальным** и обозначают символом U.

Множество U называется **универсальным** для данной задачи, если все рассматриваемые в этой задаче множества являются его подмножествами.

Множества можно изображать с помощью кругов, которые называются **кругами Эйлера** или **диаграммами Венна**. Универсальное множество принято обозначать прямоугольником.

Способы задания множества:

1. перечислением всех элементов множества (в фигурных скобках через запятую):
$$A = \{1, 2, 3, 4\};$$
2. характеристическим предикатом, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество. Характеристический предикат записывается после двоеточия или символа «|»:
$$A = \{x : P(x)\} \quad \vee \quad A = \{x \mid P(x)\}$$
где $P(x)$ – характеристический предикат.

Обозначения числовых множеств:

- $\mathbb{N}$ – множества натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z}$ – множества целых чисел, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;

- $\mathbb{Q}$ – множество рациональных числе, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})\right\}$;
- $\mathbb{R}$ – множество действительных (вещественных) чисел;
- $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

1.2 Сравнение множеств

Множество A называется **подмножеством** множества B (множество A содержится в B, множество B включает множество A), если каждый элемент множества A является элементом множества B:

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A \implies x \in B.$$

B называется **надмножеством** множества A.

Под определению пустое множество является подмножеством всех множеств:

$$\forall M \implies \varnothing \subseteq M.$$

Универсальное множество содержит все множества:

$$\forall M \implies M \subseteq U.$$

Два множества называют **равными**, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то множество A называется **собственным** подмножеством множества B, а B – **собственным** надмножеством A.

Множества A и B **сравнимые**, если $A \subseteq B \vee B \subseteq A$. Иначе множества называются **несравнимыми**.

1.3 Свойства включения множеств

Свойство 1.

$$\forall A \implies A \subseteq A.$$

Свойство 2.

$$\forall A, B : A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B.$$

Свойство 3.

$$\forall A, B, C : A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

1.4 Мощность множества

Говорят, что между множествами A и B установлено **взаимно-однозначное соответствие**, если каждому элементу множества A поставлен в соответствие один и только один элемент множества B, и каждому элементу множества B поставлен в соответствие один и только один элемент множества A:

$$A \sim B \iff \begin{cases} \forall a \in A \mapsto !b \in B \\ \forall b \in B \mapsto !a \in A \end{cases}$$

Два множества (конечных или бесконечных) имеют **одинаковую мощность**, если между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие. В этом случае говорят, что множества A и B **изоморфны**, имеют одинаковую **мощность**, или что они **равномощны**, и обозначают $|A| = |B|$.

Множество A называется **конечным**, если у него нет равномощного собственного подмножества:

$$\forall B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \implies B = A.$$

Для конечного множества используется запись $|A| < \infty$.

Множество **бесконечно** тогда и только тогда, когда оно имеет одинаковую мощность с некоторым своим подмножеством, не совпадающим с самим этим множеством:

$$\exists B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \wedge B \neq A.$$

То есть бесконечное множество равномощно некоторому своему собственному подмножеству. Для бесконечного множества используется запись $|A| = \infty$.

Множество X называется **счетным**, если его мощность равна мощности множества натуральных чисел, т. е. $|X| = |\mathbb{N}|$.

Говорят, что множество X – множество **мощности континуума**, если его мощность равна мощности множества точек на отрезке $[0, 1]$.

Теорема (Теорема Кантора о несчетности)**.** Отрезок $[0, 1]$ несчетен, т. е.

$$|[0, 1]| > |\mathbb{N}|.$$

1.5 Операции над множествами

Объединением двух множеств называется множество, содержащее все элементы обоих множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

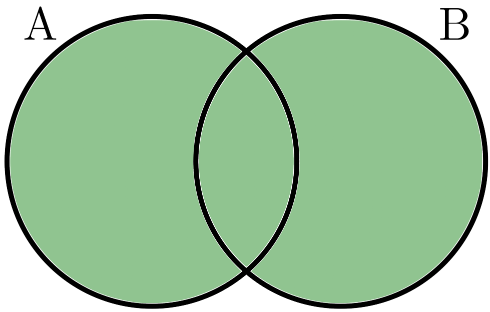

Рис. 1.1: Объединение двух множеств

Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов, входящих в каждое из множеств A и B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

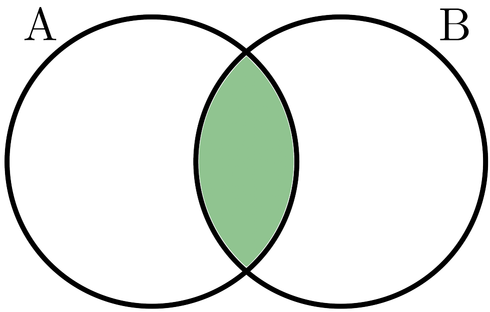

Рис. 1.2: Пересечение двух множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не содержащихся в множестве B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

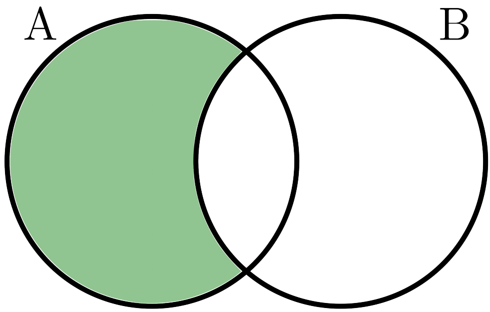

Рис. 1.3: Разность двух множеств

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не содержащихся в множестве B, и всех элементов множества B, не содержащихся в множестве A:

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \land x \notin B) \lor (x \notin A \land x \in B)\}.$$

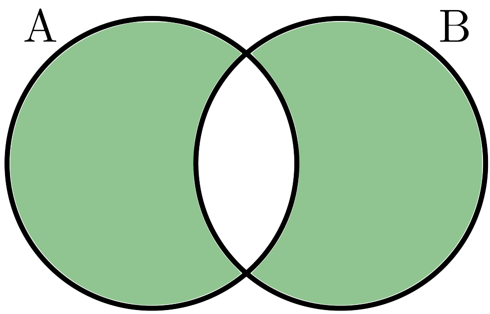

Рис. 1.4: Симметрическая разность двух множеств

Дополнением (дополнением до универсального множества U) множества A называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не содержащихся в множестве A:

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

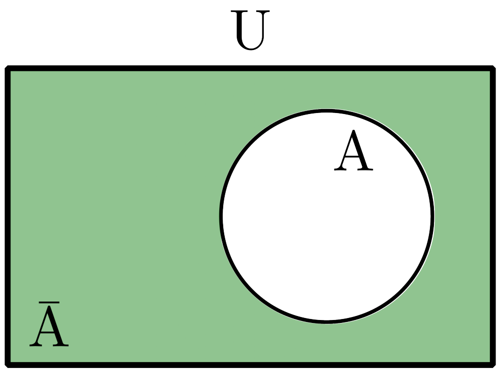

Рис. 1.5: Дополнение множества

1.6 Свойства операций над множествами

Свойство 1 (Идемпотентность)**.**

$$A \cup A = A; \qquad A \cap A = A.$$

Свойство 2 (Коммутативность)**.**

$$A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A.$$

Свойство 3 (Ассоциативность)**.**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Свойство 4 (Дистрибутивность)**.**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Свойство 5 (Поглощение)**.**

$$(A \cap B) \cup A = A; \qquad (A \cup B) \cap A = A.$$

Свойство 6 (Свойства нуля)**.**

$$A \cup \varnothing = A; \qquad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Свойство 7 (Свойства единицы)**.**

$$A \cup U = U; \qquad A \cap U = A.$$

Свойство 8 (Инволютивность)**.**

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана)**.**

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}; \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения)**.**

$$A \cup \bar{A} = U; \qquad A \cap \bar{A} = \varnothing.$$

Свойство 11 (Свойство разности)**.**

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

Свойство 12 (Свойство симметрической разности)**.**

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A).$$

1.7 Обобщенные тождества алгебры множеств

Свойство 1 (Обобщенная дистрибутивность)**.**

$$A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i); \qquad A \cup \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i).$$

Свойство 2 (Обобщенный закон де Моргана)**.**

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}; \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

1.8 Булеан

Множество всех подмножеств A называется **булеаном** множества A и обозначается 2^A:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Теорема. Если множество A конечно, то $|2^A| = 2^{|A|}$.

1.9 Методы доказательств теоретико-множественных тождеств

1.9.1 Метод двух включений

Пусть левая часть теоретико-множественного тождества определяет множество X, а правая часть – множество Y. Чтобы доказать равенство множеств X и Y, достаточно доказать два включения $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, т. е. доказать, что

$$\forall x \in X \implies x \in Y \quad \wedge \quad \forall x \in Y \implies x \in X.$$

Докажем этим методом тождество

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пусть $x \in A \triangle B$. Тогда, согласно определению симметрической разности

$$\begin{gathered} x \in (A \triangle B) \implies x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \implies \\ \implies (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \implies \\ \implies (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \vee (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \implies \\ \implies x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \implies x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)). \end{gathered}$$

Таким образом доказано, что $A \triangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Докажем обратное включение $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \triangle B$:

$$\begin{gathered} x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \implies x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \implies \\ \implies (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \implies \\ \implies x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \implies x \in (A \triangle B). \end{gathered}$$

Оба включения имеют место и тождество доказано.

1.9.2 Метод эквивалентных преобразований

Теоретико-множественные тождества можно доказывать, используя свойства операций над множествами. Для этого нужно преобразовать левую часть в правую, или правую – в левую, или правую и левую часть в некоторое третье выражение.

Докажем этим методом тождество:

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = A \cap (B \triangle C).$$

Преобразуем левую часть к правой:

$$
\begin{gathered}
(A \cap B) \vartriangle (A \cap C) = \\
= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{A \cap B} \cup \overline{A \cap C}) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{C}) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = \\
= ((A \cap (B \cup C)) \cap \bar{A}) \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
= (B \cup C) \cap (A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap (\overline{B \cap C})) = \\
= A \cap ((B \cup C) \cap (\overline{B \cap C})) = \\
= A \cap (B \vartriangle C).
\end{gathered}
$$

1.9.3 Метод характеристических функций

Характеристическая функция χ_A множества A для $x \in U$ определяется следующим образом:

$$
\begin{cases}
\chi_A(x) = 1, & x \in A \\
\chi_A(x) = 0, & x \notin A
\end{cases}
$$

Для характеристической функции справедливы следующие тождества:

1. $\chi_A^2(x) = \chi_A(x)$;
2. $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
3. $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
4. $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A(x)$;
5. $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
6. $\chi_{A \vartriangle B} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2 \cdot \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Докажем этим методом тождество

$$
(A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C).
$$

С одной стороны,

$$\chi_{(A\triangle B)\cap C}(x) = \chi_{(A\triangle B)}(x)\chi_C(x) =$$
$$= (\chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x))\chi_C(x) =$$
$$= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).$$

С другой стороны,

$$\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}(x) = \chi_{(A\cap C)}(x) + \chi_{(B\cap C)}(x) - 2\chi_{(A\cap C)}(x)\chi_{(B\cap C)}(x) =$$
$$= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_C(x)\chi_B(x)\chi_C(x) =$$
$$= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).$$

Так как $\chi_{(A\triangle B)\cap C}(x) = \chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}(x)$, тождество доказано.

1.10 Упорядоченные пары и наборы

(a, b) – упорядоченная пара объектов a и b.

Равенство упорядоченных пар определяется следующим образом:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

Вообще говоря, $(a, b) \neq (b, a)$.

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – упорядоченный набор из n элементов (n-ка, кортеж или (конечная) последовательность).

$|(a_1, a_2, \ldots, a_n)|$ – длина набора, т. е. количество элементов в наборе.

Теорема. Два набора одной длины равны, если равны их соответствующие элементы

$$\forall n (a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n.$$

1.11 Прямое произведение множеств

Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит A, а второй принадлежит B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

$$A \times B \neq B \times A.$$

Теорема. Для конечных множества A и B

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Понятие прямого произведения допускает обобщение. Прямое произведение множеств $A_1, \ldots, A_n$ – это множество наборов (кортежей):

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Множества A_i необязательно различны.

Степенью множества A называется его n-кратное произведение самого на себя:

$$A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n-\text{раз}}; \qquad |A^n| = |A|^n.$$

1.12 Бинарные отношения

Бинарным отношением между множествами A и B называется такая тройка $\langle A, B, R\rangle$, где R – подмножество прямого произведения A и B:

$$R \subset A \times B,$$

Эти множества именуют следующим образом:

- R – график отношения;
- A – область отправления;
- B – область прибытия.

Область определения отношения:

$$\mathrm{Dom} R = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\}.$$

Область значений:

$$\mathrm{Im} R = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\}.$$

Если $A = B$ (т. е. $R \subset A^2$), то говорят, что R есть отношение на множестве A.

Для бинарных отношений обычно используется **инфиксная** форма записи:

$$aRb \iff (a, b) \in R \subset A \times B.$$

Инфиксная форма позволяет более кратко записывать некоторые формы утверждений относительно отношений:

$$aRbRc \iff (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$$

Обратное отношение:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \subset B \times A.$$

Дополнение отношения:

$$\bar{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\} \subset A \times B.$$

Тождественное отношение:

$$I = \{(a,a) \mid a \in A\} \subset A^2.$$

Универсальное отношение:

$$U = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = A \times B.$$

1.13 Многоместные отношения

n-местное (n-арное) отношение R – это подмножество прямого произведения n множеств, т. е. множество упорядоченных наборов (кортежей):

$$R \subset A_1 \times \ldots \times A_n \iff \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\},$$

где n – вместимость (длина кортежей отношения).

1.14 Композиция отношений

Пусть $R_1 \subset A \times B$ – отношение между множествами A и B, а $R_2 \subset B \times C$ – отношение между множествами B и C. **Композицией** двух отношений R_1 и R_2 называется отношение $R \subset A \times C$ между множествами A и C, определяется следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 = \{(a,c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b \in B : aR_1b \wedge bR_2c\}.$$

Композиция отношений ассоциативна, т. е.

$$\forall R_1 \subset A \times B, R_2 \subset B \times C, R_3 \subset C \times D \implies$$
$$\implies (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

Композиция отношений на множестве A является отношением на множестве A.

Степенью отношения R на множестве A называется его n-кратная композиция с самим собой:

$$R^n = \underbrace{R \circ ... \circ R}_{n-\text{раз}}.$$

1.15 Способы задания бинарных отношений

1.15.1 Матричный способ

Отношение $R \subset A \times B$ задается с помощью прямоугольной таблицы (матрицы), состоящей из нулей и единиц, в которой строки – первые координаты, а столбцы – вторые, причем на пересечении i-ой строки и j-го столбца будет стоять 1, если имеется отношение $a_i R b_j$, и 0 в противном случае.

Рассмотрим пример. Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (3, 6)\}.$$

Отношение можно записать в виде матрицы:

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица **универсального** (полного) отношения – это квадратная матрица, состоящая только из единиц.

Матрица **тождественного** (диагонального) отношения – это квадратная матрица, элементами главной диагонали которой являются единицы, а остальные элементы равны нулю.

Матрица **пустого** отношения – это квадратная матрица, состоящая только из нулей.

Матрица **обратного** отношения R^{-1} для отношения R – это транспонированная матрица отношения R.

1.15.2 С помощью ориентированного графа

Элементы множеств A и B изображаются в виде точек на плоскости (вершины двудольного графа), а упорядоченные пары – линией со стрелкой (дуги ориентированного графа), которая направленна от a к b, если aRb.

Рассмотрим пример. Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 3), (3, 6)\}.$$

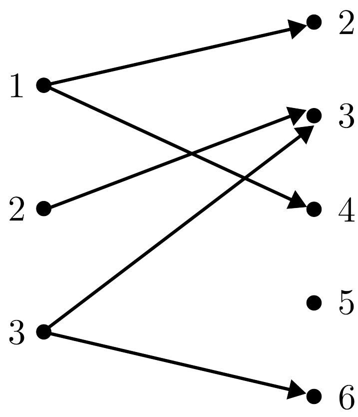

Рис. 1.6: Отношение в виде ориентированного графа

1.16 Способы задания композиции отношений

1.16.1 Матричный способ

Матрица композиции отношений $R \circ S$ получается как произведение матриц отношений R и S с дальнейшей заменой отличных от нуля элементов единицами.

Рассмотрим пример. Пусть

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\},$$
$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Тогда композиция равна

$$[R \circ S] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \circ S = \{(1,3),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4)\}.$$

1.16.2 С помощью ориентированного графа

Пусть $R \subset A \times B$ и $S \subset B \times C$. Чтобы получить граф $T = R \circ S$, надо к графу отношения R добавить граф отношения S. Граф композиции отношений получим, если исключим вершины, которые являются элементами множества B.

Рассмотрим пример. Пусть

$$R = \{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4)\},$$
$$S = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(4,2),(4,3)\}.$$

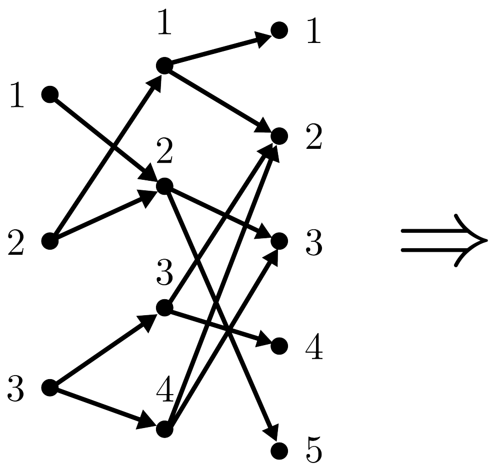

Рис. 1.7: Композиция в виде ориентированного графа

$$R \circ S = \{(1,3),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4)\}.$$

1.17 Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение R на множестве A называется

- **рефлексивным**, если

$$\forall x \in A : (x,x) \in R;$$

- **антирефлексивным**, если

$$\forall x \in A : (x,x) \notin R;$$

- **симметричным**, если

$$\forall x,y \in A : (x,y) \in R \implies (y,x) \in R;$$

- **антисимметричным**, если

$$\forall x,y \in A : (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \implies x = y;$$

- **транзитивным**, если

$$\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R;$$

- **линейным** (полным), если

$$\forall x, y \in A : x = y \vee (x, y) \in R \vee (y, x) \in R.$$

Теорема. Пусть $R \subset A \times A$ – отношение на A. Тогда

- R рефлексивно $\iff I \subset R$;
- R антирефлексивно $\iff R \cap I = \varnothing$;
- R симметрично $\iff R = R^{-1}$;
- R антисимметрично $\iff R \cap R^{-1} = I$;
- R транзитивно $\iff R \circ R \subset R$;
- R линейно $\iff R \cup I \cup R^{-1} = U$.

1.18 Ядро отношения

Если $R \subset A \times B$ – отношение между множествами A и B, то композиция $R \circ R^{-1}$ называется **ядром** отношения R и обозначается $\ker R$:

$$\ker R = R \circ R^{-1}.$$

Ядро отношения R между A и B является отношением на A:

$$R \subset A \times B \implies \ker R \subset A^2.$$

Теорема. Ядро любого отношения рефлексивно и симметрично на области определения.

1.19 Замыкание отношений

Пусть R и $R^{\times}$ – отношения на множестве M. Отношение $R^{\times}$ называется замыканием R относительно свойства C, если

1. $R^{\times}$ обладает свойством C: $C(R^{\times})$;
2. $R^{\times}$ является надмножеством R: $R \subset R^{\times}$;
3. $R^{\times}$ является наименьшим таким объектом:

$$C(R^{\times\times}) \wedge R \subset R^{\times} \implies R^{\times} \subset R^{\times\times}.$$

Теорема. Пусть R – отношение на множестве M. Тогда

- $R \cup I$ есть рефлексивное замыкание R;
- $R \cup R^{-1}$ есть симметричное замыкание R;
- если M – конечное множество, содержащее n элементов, то отношение

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$$

есть транзитивное замыкание R.

1.20 Функциональные отношения

Пусть f – отношение между A и B такое, что

$$\forall a : (a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \implies b = c.$$

Такое свойство отношений называется **однозначностью** или **функциональным**, а само отношение называется **функцией** из A в B.

$$f : A \to B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

$$b = f(a) \iff (a, b) \in f.$$

1.21 Тотальные и частичные функции

$$\mathrm{Dom} f \subset A; \qquad \mathrm{Im} f \subset B$$

Если $\mathrm{Dom} f = A$, то функция называется **тотальной**, а если $\mathrm{Dom} f \neq A$, то **частичной**.

1.22 Инъекция, сюрьекция и биекция

Пусть $f : A \to B$, тогда функция f называется

- **инъективной** (или инъекцией), если

$$b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \implies a_1 = a_2;$$

- **сюрьективной** (или сюрьекцией), если

$$\forall b \in B \; \exists a \in A : b = f(a);$$

- **биективной** (или биекцией), если она инъективная и сюрьективная.

1.23 Отношения эквивалентности

Отношение называется отношением **эквивалентности** (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эквивалентности обозначают символами E, $\sim$ (тильда) и $=$:

$$xEy, \quad x \sim y, \quad x = y.$$

Рассмотрим пример. Отношение равенства $x = y$ является эквивалентностью на любом множестве A, так как оно

- рефлексивно ($x = x$);
- симметрично ($x = y \implies y = x$);
- транзитивно ($x = y, y = z \implies x = z$).

1.24 Классы эквивалентности

Пусть E – отношение эквивалентности на множестве A. **Классом эквивалентности** элемента $x \in A$ называется подмножество элементов множества A, эквивалентных x:

$$E(x) = \{y \in A \mid xEy\}$$

или

$$[x]_E = \{y \in A \mid y \equiv x\}.$$

1.25 Фактормножества

Если E – отношение эквивалентности на множестве A, то множество классов эквивалентности называется **фактормножеством** множества A относительно эквивалентности E и обозначается A/E:

$$A/E = \{E(x) \mid x \in A\} \quad \text{или} \quad A/E = \{[x]_E\}_{x \in A}.$$

1.26 Отношения порядка

Антисимметричное транзитивное отношение называется **отношением порядка**. Отношение порядка в общем случае обозначается символом $\prec$. Отношение порядка может обладать также дополнительными свойствами, которые сведены в следующую таблицу:

Дополнительное свойство, которым обладает отношением порядка	Название отношения порядка, обладающего дополнительным свойством
рефлексивность	отношение нестрогого порядка $\leq$
антирефлексивность	отношение строгого порядка $<$
линейность	отношение линейного порядка
не обладает свойством линейности	отношение частичного порядка

Множества, на котором задано отношение частичного порядка, называется **частично упорядоченным**.

Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется **линейно упорядоченным**.