

Содержание

1	Множества и отношения	3
1.1	Основные понятия	3
1.2	Сравнение множеств	4
1.3	Свойства включения множеств	4
1.4	Мощность множества	5
1.5	Операции над множествами	5
1.6	Свойства операций над множествами	8
1.7	Обобщенные тождества алгебры множеств	9
1.8	Булеан	9
1.9	Методы доказательств теоретико-множественных тождеств . . .	10
1.9.1	Метод двух включений	10
1.9.2	Метод эквивалентных преобразований	10
1.9.3	Метод характеристических функций	11
1.10	Упорядоченные пары и наборы	12
1.11	Прямое произведение множеств	12
1.12	Бинарные отношения	13
1.13	Многоместные отношения	14
1.14	Композиция отношений	14
1.15	Способы задания бинарных отношений	15
1.15.1	Матричный способ	15
1.15.2	С помощью ориентированного графа	16
1.16	Способы задания композиции отношений	16
1.16.1	Матричный способ	16
1.16.2	С помощью ориентированного графа	17
1.17	Свойства бинарных отношений	18
1.18	Ядро отношения	19
1.19	Замыкание отношений	19
1.20	Функциональные отношения	20
1.21	Тотальные и частичные функции	20
1.22	Инъекция, сюръекция и биекция	20
1.23	Отношения эквивалентности	21
1.24	Классы эквивалентности	21
1.25	Фактормножества	21
1.26	Отношения порядка	21

2	Элементы математической логики	22
2.1	Основные понятия	22
2.2	Логические связи	23
2.2.1	Простейшие логические связи	23
2.2.2	Порядок выполнения логических операций	23
2.2.3	Доказательство тождественной истинности	24
2.2.4	Другие логические связи	24
2.3	Логические отношения	25
2.4	Варианты импликации	26
2.5	Необходимое и достаточное условия	27
2.6	Основные логические эквивалентности	27
2.7	Булевы функции	28
2.8	Множество булевых функций. Булев куб	29
2.9	Булев порядок	29
2.10	Мощность множества булевых функций	30
2.11	Существенные и несущественные переменные	30
2.12	Булевы функции одной и нескольких переменных	31
2.13	Мажоритарная функция	32
2.14	Реализация функций формулами	32
2.15	Равносильные формулы	33
2.16	Законы булевой алгебры	33
2.17	Двойственная функция	35
2.18	Инволютивность двойственности	35
2.19	Самодвойственная функция	35
2.20	Принцип двойственности	35
2.21	Нормальные формы	36
2.22	ДНФ и КНФ	36
2.23	Совершенные нормальные формы	37
2.23.1	СДНФ	37
2.23.2	СКНФ	37
2.24	Нахождение СДНФ	38
2.25	Нахождение СКНФ	38

1 Множества и отношения

1.1 Основные понятия

Множество – любая определенная совокупность объектов. Элементы множества различны и отличными друг от друга.

Под **множеством** понимают любой набор определенных и различимых между собой объектов, мыслимый как единое целое. Объекты, из которых составлено множество, называются его **элементами**.

Множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами: A, B, C, \dots . Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, \dots .

Для обозначения того, что объект x является, либо не является элементом множества A , используют символику:

- $x \in A$ – объект x является элементом множества A .
- $x \notin A$ – объект x не является элементом множества A .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом \emptyset .

Множество, из элементов которого составляют конкретное множество, называют **универсальным** и обозначают символом U .

Множество U называется **универсальным** для данной задачи, если все рассматриваемые в этой задаче множества являются его подмножествами.

Множества можно изображать с помощью кругов, которые называются **кругами Эйлера** или **диаграммами Венна**. Универсальное множество принято обозначать прямоугольником.

Способы задания множества:

1. перечислением всех элементов множества (в фигурных скобках через запятую):

$$A = \{1, 2, 3, 4\};$$

2. характеристическим предикатом, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество. Характеристический предикат записывается после двоеточия или символа «|»:

$$A = \{x : P(x)\} \quad \vee \quad A = \{x \mid P(x)\}$$

где $P(x)$ – характеристический предикат.

Обозначения числовых множеств:

- \mathbb{N} – множества натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- \mathbb{Z} – множества целых чисел, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;

- \mathbb{Q} – множество рациональных чисел, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \right\}$;
- \mathbb{R} – множество действительных (вещественных) чисел;
- \mathbb{C} – множество комплексных чисел.

1.2 Сравнение множеств

Множество A называется **подмножеством** множества B (множество A содержится в B , множество B включает множество A), если каждый элемент множества A является элементом множества B :

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A \implies x \in B.$$

B называется **надмножеством** множества A .

Под определению пустое множество является подмножеством всех множеств:

$$\forall M \implies \emptyset \subseteq M.$$

Универсальное множество содержит все множества:

$$\forall M \implies M \subseteq U.$$

Два множества называют **равными**, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то множество A называется **собственным** подмножеством множества B , а B – **собственным** надмножеством A .

Множества A и B **сравнимые**, если $A \subseteq B \vee B \subseteq A$. Иначе множества называются **несравнимыми**.

1.3 Свойства включения множеств

Свойство 1.

$$\forall A \implies A \subseteq A.$$

Свойство 2.

$$\forall A, B : A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B.$$

Свойство 3.

$$\forall A, B, C : A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

1.4 Мощность множества

Говорят, что между множествами A и B установлено **взаимно-однозначное соответствие**, если каждому элементу множества A поставлен в соответствие один и только один элемент множества B , и каждому элементу множества B поставлен в соответствие один и только один элемент множества A :

$$A \sim B \iff \begin{cases} \forall a \in A \mapsto !b \in B \\ \forall b \in B \mapsto !a \in A \end{cases}$$

Два множества (конечных или бесконечных) имеют **одинаковую мощность**, если между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие. В этом случае говорят, что множества A и B **изоморфны**, имеют одинаковую **мощность**, или что они **равномощны**, и обозначают $|A| = |B|$.

Множество A называется **конечным**, если у него нет равномощного собственного подмножества:

$$\forall B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \implies B = A.$$

Для конечного множества используется запись $|A| < \infty$.

Множество **бесконечно** тогда и только тогда, когда оно имеет одинаковую мощность с некоторым своим подмножеством, не совпадающим с самим этим множеством:

$$\exists B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \wedge B \neq A.$$

То есть бесконечное множество равномощно некоторому своему собственному подмножеству. Для бесконечного множества используется запись $|A| = \infty$.

Множество X называется **счетным**, если его мощность равна мощности множества натуральных чисел, т. е. $|X| = |\mathbb{N}|$.

Говорят, что множество X – множество **мощности континуума**, если его мощность равна мощности множества точек на отрезке $[0, 1]$.

Теорема (Теорема Кантора о несчетности). Отрезок $[0, 1]$ несчетен, т. е.

$$|[0, 1]| > |\mathbb{N}|.$$

1.5 Операции над множествами

Объединением двух множеств называется множество, содержащее все элементы обоих множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

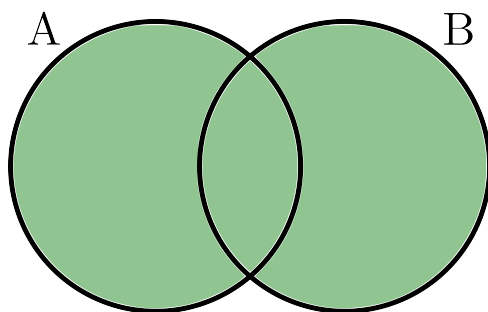


Рис. 1.1: Объединение двух множеств

Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов, входящих в каждое из множеств A и B :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

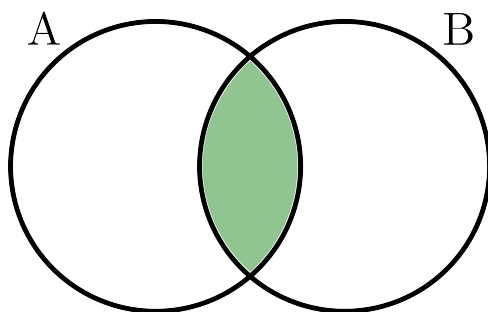


Рис. 1.2: Пересечение двух множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A , не содержащихся в множестве B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

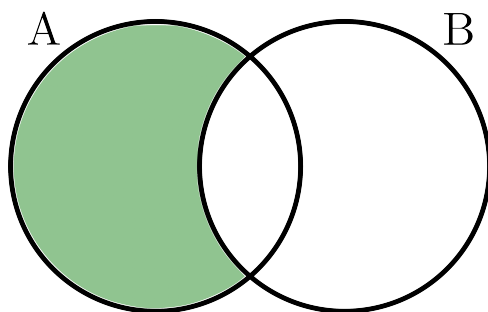


Рис. 1.3: Разность двух множеств

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A , не содержащихся в множестве B , и всех элементов множества B , не содержащихся в множестве A :

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

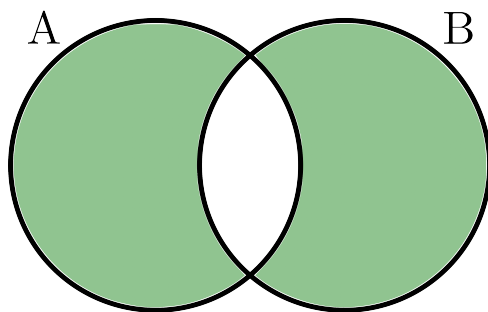


Рис. 1.4: Симметрическая разность двух множеств

Дополнением (дополнением до универсального множества U) множества A называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не содержащихся в множестве A :

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

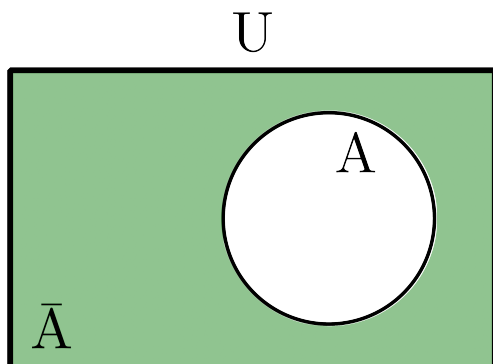


Рис. 1.5: Дополнение множества

1.6 Свойства операций над множествами

Свойство 1 (Идемпотентность).

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Свойство 2 (Коммутативность).

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Свойство 3 (Ассоциативность).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Свойство 4 (Дистрибутивность).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Свойство 5 (Поглощение).

$$(A \cap B) \cup A = A, \quad (A \cup B) \cap A = A.$$

Свойство 6 (Свойства нуля).

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Свойство 7 (Свойства единицы).

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$$

Свойство 8 (Инволютивность).

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана).

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения).

$$A \cup \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Свойство 11 (Свойство разности).

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

Свойство 12 (Свойство симметрической разности).

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1.7 Обобщенные тождества алгебры множеств

Свойство 1 (Обобщенная дистрибутивность).

$$A \cap \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i); \quad A \cup \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i).$$

Свойство 2 (Обобщенный закон де Моргана).

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

1.8 Булеан

Множество всех подмножеств A называется **булеаном** множества A и обозначается 2^A :

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Теорема. Если множество A конечно, то $|2^A| = 2^{|A|}$.

1.9 Методы доказательств теоретико-множественных тождеств

1.9.1 Метод двух включений

Пусть левая часть теоретико-множественного тождества определяет множество X , а правая часть – множество Y . Чтобы доказать равенство множеств X и Y , достаточно доказать два включения $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, т. е. доказать, что

$$\forall x \in X \Rightarrow x \in Y \quad \wedge \quad \forall x \in Y \Rightarrow x \in X.$$

Докажем этим методом тождество

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пусть $x \in A \Delta B$. Тогда, согласно определению симметрической разности

$$\begin{aligned} x \in (A \Delta B) &\Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) &\vee (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) &\Rightarrow x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)). \end{aligned}$$

Таким образом доказано, что $A \Delta B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Докажем обратное включение $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \Delta B$:

$$\begin{aligned} x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) &\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) &\Rightarrow x \in (A \Delta B). \end{aligned}$$

Оба включения имеют место и тождество доказано.

1.9.2 Метод эквивалентных преобразований

Теоретико-множественные тождества можно доказывать, используя свойства операций над множествами. Для этого нужно преобразовать левую часть в правую, или правую – в левую, или правую и левую часть в некоторое третье выражение.

Докажем этим методом тождество:

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C).$$

Преобразуем левую часть к правой:

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) \Delta (A \cap C) = \\
 & = ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{C}) = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = \\
 & = ((A \cap (B \cup C)) \cap \bar{A}) \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
 & = (B \cup C) \cap (A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
 & = (A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap \overline{(B \cap C)}) = \\
 & = A \cap ((B \cup C) \cap \overline{(B \cap C)}) = \\
 & = A \cap (B \Delta C).
 \end{aligned}$$

1.9.3 Метод характеристических функций

Характеристическая функция χ_A множества A для $x \in U$ определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \chi_A(x) = 1, & x \in A \\ \chi_A(x) = 0, & x \notin A \end{cases}$$

Для характеристической функции справедливы следующие тождества:

1. $\chi_A^2(x) = \chi_A(x)$;
2. $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
3. $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
4. $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A(x)$;
5. $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
6. $\chi_{A \Delta B} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2 \cdot \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Докажем этим методом тождество

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned}\chi_{(A \Delta B) \cap C}(x) &= \chi_{(A \Delta B)}(x) \chi_C(x) = \\ &= (\chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x))\chi_C(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\chi_{(A \cap C) \Delta (B \cap C)}(x) &= \chi_{(A \cap C)}(x) + \chi_{(B \cap C)}(x) - 2\chi_{(A \cap C)}(x)\chi_{(B \cap C)}(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_C(x)\chi_B(x)\chi_C(x) = \\ &= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).\end{aligned}$$

Так как $\chi_{(A \Delta B) \cap C}(x) = \chi_{(A \cap C) \Delta (B \cap C)}(x)$, тождество доказано.

1.10 Упорядоченные пары и наборы

(a, b) – упорядоченная пара объектов a и b .

Равенство упорядоченных пар определяется следующим образом:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

Вообще говоря, $(a, b) \neq (b, a)$.

(a_1, a_2, \dots, a_n) – упорядоченный набор из n элементов (n -ка, кортеж или (конечная) последовательность).

$|(a_1, a_2, \dots, a_n)|$ – длина набора, т. е. количество элементов в наборе.

Теорема. Два набора одной длины равны, если равны их соответствующие элементы

$$\forall n (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n.$$

1.11 Прямое произведение множеств

Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит A , а второй принадлежит B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

$$A \times B \neq B \times A.$$

Теорема. Для конечных множества A и B

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Понятие прямого произведения допускает обобщение. Прямое произведение множеств A_1, \dots, A_n – это множество наборов (кортежей):

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Множества A_i необязательно различны.

Степенью множества A называется его n -кратное произведение самого на себя:

$$A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-раз}}; \quad |A^n| = |A|^n.$$

1.12 Бинарные отношения

Бинарным отношением между множествами A и B называется такая тройка $\langle A, B, R \rangle$, где R – подмножество прямого произведения A и B :

$$R \subset A \times B,$$

Эти множества именуют следующим образом:

- R – график отношения;
- A – область отправления;
- B – область прибытия.

Область определения отношения:

$$\text{Dom}R = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\}.$$

Область значений:

$$\text{Im}R = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\}.$$

Если $A = B$ (т. е. $R \subset A^2$), то говорят, что R есть отношение на множестве A .

Для бинарных отношений обычно используется **инфиксная** форма записи:

$$aRb \iff (a, b) \in R \subset A \times B.$$

Инфиксная форма позволяет более кратко записывать некоторые формы утверждений относительно отношений:

$$aRbRc \iff (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$$

Обратное отношение:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subset B \times A.$$

Дополнение отношения:

$$\bar{R} = \{(a, b) \mid (a, b) \notin R\} \subset A \times B.$$

Тождественное отношение:

$$I = \{(a, a) \mid a \in A\} \subset A^2.$$

Универсальное отношение:

$$U = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = A \times B.$$

1.13 Многочестные отношения

n -местное (n -арное) отношение R – это подмножество прямого произведения n множеств, т. е. множество упорядоченных наборов (кортежей):

$$R \subset A_1 \times \dots \times A_n \iff \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\},$$

где n – вместимость (длина кортежей отношения).

1.14 Композиция отношений

Пусть $R_1 \subset A \times B$ – отношение между множествами A и B , а $R_2 \subset B \times C$ – отношение между множествами B и C . **Композицией** двух отношений R_1 и R_2 называется отношение $R \subset A \times C$ между множествами A и C , определяется следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b \in B : aR_1b \wedge bR_2c\}.$$

Композиция отношений ассоциативна, т. е.

$$\begin{aligned} \forall R_1 \subset A \times B, R_2 \subset B \times C, R_3 \subset C \times D \implies \\ \implies (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3). \end{aligned}$$

Композиция отношений на множестве A является отношением на множестве A .

Степенью отношения R на множестве A называется его n -кратная композиция с самим собой:

$$R^n = \underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n\text{-раз}}.$$

1.15 Способы задания бинарных отношений

1.15.1 Матричный способ

Отношение $R \subset A \times B$ задается с помощью прямоугольной таблицы (матрицы), состоящей из нулей и единиц, в которой строки – первые координаты, а столбцы – вторые, причем на пересечении i -ой строки и j -го столбца будет стоять 1, если имеется отношение $a_i R b_j$, и 0 в противном случае.

Рассмотрим пример. Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (3, 6)\}.$$

Отношение можно записать в виде матрицы:

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица **универсального** (полного) отношения – это квадратная матрица, состоящая только из единиц.

Матрица **тождественного** (диагонального) отношения – это квадратная матрица, элементами главной диагонали которой являются единицы, а остальные элементы равны нулю.

Матрица **пустого** отношения – это квадратная матрица, состоящая только из нулей.

Матрица **обратного** отношения R^{-1} для отношения R – это транспонированная матрица отношения R .

1.15.2 С помощью ориентированного графа

Элементы множеств A и B изображаются в виде точек на плоскости (вершины двудольного графа), а упорядоченные пары – линией со стрелкой (дуги ориентированного графа), которая направлена от a к b , если aRb .

Рассмотрим пример. Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 3), (3, 6)\}.$$

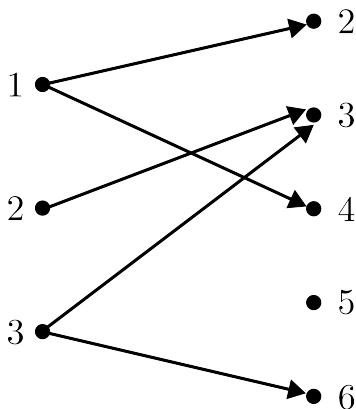


Рис. 1.6: Отношение в виде ориентированного графа

1.16 Способы задания композиции отношений

1.16.1 Матричный способ

Матрица композиции отношений $R \circ S$ получается как произведение матриц отношений R и S с дальнейшей заменой отличных от нуля элементов единицами.

Рассмотрим пример. Пусть

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\},$$
$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Тогда композиция равна

$$\begin{aligned}
 [R \circ S] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$R \circ S = \{(1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

1.16.2 С помощью ориентированного графа

Пусть $R \subset A \times B$ и $S \subset B \times C$. Чтобы получить граф $T = R \circ S$, надо к графу отношения R добавить граф отношения S . Граф композиции отношений получим, если исключим вершины, которые являются элементами множества B .

Рассмотрим пример. Пусть

$$\begin{aligned}
 R &= \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\}, \\
 S &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}.
 \end{aligned}$$

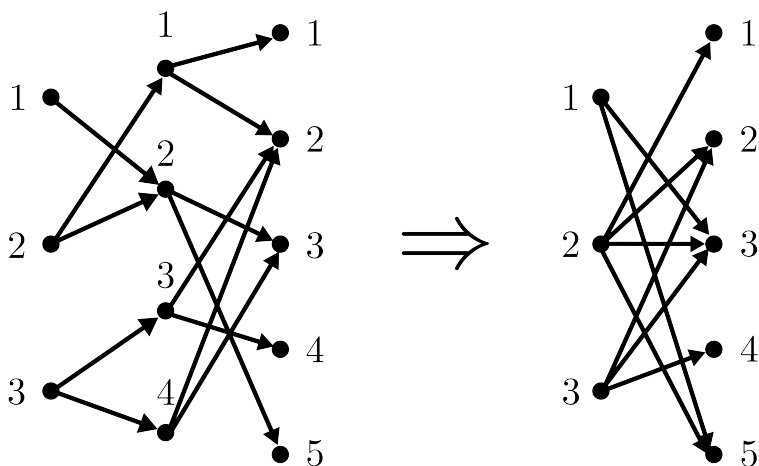


Рис. 1.7: Композиция в виде ориентированного графа

$$R \circ S = \{(1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

1.17 Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение R на множестве A называется

- **рефлексивным**, если

$$\forall x \in A : (x, x) \in R;$$

- **антирефлексивным**, если

$$\forall x \in A : (x, x) \notin R;$$

- **симметричным**, если

$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \implies (y, x) \in R;$$

- **антисимметричным**, если

$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies x = y;$$

- **транзитивным**, если

$$\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R;$$

- **линейным** (полным), если

$$\forall x, y \in A : x = y \vee (x, y) \in R \vee (y, x) \in R.$$

Теорема. Пусть $R \subset A \times A$ – отношение на A . Тогда

- R рефлексивно $\iff I \subset R$;
- R антирефлексивно $\iff R \cap I = \emptyset$;
- R симметрично $\iff R = R^{-1}$;
- R антисимметрично $\iff R \cap R^{-1} = I$;
- R транзитивно $\iff R \circ R \subset R$;
- R линейно $\iff R \cup I \cup R^{-1} = U$.

1.18 Ядро отношения

Если $R \subset A \times B$ – отношение между множествами A и B , то композиция $R \circ R^{-1}$ называется **ядром** отношения R и обозначается $\ker R$:

$$\ker R = R \circ R^{-1}.$$

Ядро отношения R между A и B является отношением на A :

$$R \subset A \times B \implies \ker R \subset A^2.$$

Теорема. Ядро любого отношения рефлексивно и симметрично на области определения.

1.19 Замыкание отношений

Пусть R и R^\times – отношения на множестве M . Отношение R^\times называется замыканием R относительно свойства C , если

1. R^\times обладает свойством C : $C(R^\times)$;
2. R^\times является надмножеством R : $R \subset R^\times$;
3. R^\times является наименьшим таким объектом:

$$C(R^{\times\times}) \wedge R \subset R^\times \implies R^\times \subset R^{\times\times}.$$

Теорема. Пусть R – отношение на множестве M . Тогда

- $R \cup I$ есть рефлексивное замыкание R ;
- $R \cup R^{-1}$ есть симметричное замыкание R ;
- если M – конечное множество, содержащее n элементов, то отношение

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$$

есть транзитивное замыкание R .

1.20 Функциональные отношения

Пусть f – отношение между A и B такое, что

$$\forall a : (a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \implies b = c.$$

Такое свойство отношений называется **однозначностью** или **функциональным**, а само отношение называется **функцией** из A в B .

$$f : A \rightarrow B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

$$b = f(a) \iff (a, b) \in f.$$

1.21 Тотальные и частичные функции

$$\text{Dom} f \subset A; \quad \text{Im} f \subset B$$

Если $\text{Dom} f = A$, то функция называется **тотальной**, а если $\text{Dom} f \neq A$, то **частичной**.

1.22 Инъекция, сюръекция и биекция

Пусть $f : A \rightarrow B$, тогда функция f называется

- **инъективной** (или инъекцией), если

$$b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \implies a_1 = a_2;$$

- **сюръективной** (или сюръекцией), если

$$\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a);$$

- **биективной** (или биекцией), если она инъективная и сюръективная.

1.23 Отношения эквивалентности

Отношение называется отношением **эквивалентности** (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эквивалентности обозначают символами E , \sim (тильда) и \equiv :

$$xEy, \quad x \sim y, \quad x = y.$$

Рассмотрим пример. Отношение равенства $x = y$ является эквивалентностью на любом множестве A , так как оно

- рефлексивно ($x = x$);
- симметрично ($x = y \implies y = x$);
- транзитивно ($x = y, y = z \implies x = z$).

1.24 Классы эквивалентности

Пусть E – отношение эквивалентности на множестве A . **Классом эквивалентности** элемента $x \in A$ называется подмножество элементов множества A , эквивалентных x :

$$E(x) = \{y \in A \mid xEy\}$$

или

$$[x]_E = \{y \in A \mid y \equiv x\}.$$

1.25 Фактормножества

Если E – отношение эквивалентности на множестве A , то множество классов эквивалентности называется **фактормножеством** множества A относительно эквивалентности E и обозначается A/E :

$$A/E = \{E(x) \mid x \in A\} \quad \text{или} \quad A/E = \{[x]_E\}_{x \in A}.$$

1.26 Отношения порядка

Антисимметричное транзитивное отношение называется **отношением порядка**. Отношение порядка в общем случае обозначается символом \prec . Отношение порядка может обладать также дополнительными свойствами, которые сведены в следующую таблицу:

Дополнительное свойство, которым обладает отношением порядка	Название отношения порядка, обладающего дополнительным свойством
рефлексивность	отношение нестрогого порядка \leq
антирефлексивность	отношение строгого порядка $<$
линейность	отношение линейного порядка
не обладает свойством линейности	отношение частичного порядка

Множества, на котором задано отношение частичного порядка, называется **частично упорядоченным**.

Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется **линейно упорядоченным**.

2 Элементы математической логики

2.1 Основные понятия

Математическая логика – это анализ методом рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т. е. математическая логика исследует соотношения между основными понятиями математики, на базе которых доказываются математические утверждения.

Простейшую из формальных логических теорий называют **алгеброй высказываний**.

Высказыванием называется утверждение (повествовательное предложение), о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Высказыванию ставят в соответствие логическую переменную, которая принимает значение 1, если высказывание истинно, и 0, если высказывание ложно.

Из простых высказываний с помощью **логических связей** могут быть построены **составные высказывания**.

2.2 Логические связи

2.2.1 Простейшие логические связи

В таблице 2.1 представлены простейшие логические связи.

Название	Прочтение	Обозначение
отрицание	не	\neg
конъюнкция	и	\wedge
дизъюнкция	или	\vee
импликация	если, то	\rightarrow
эквивалентность	тогда и только тогда, когда	\leftrightarrow

Таблица 2.1: Простейшие логические связи

Таблица 2.2 представляет собой таблицу истинности простейших логических связей.

A	B	\bar{A}	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Таблица 2.2: Таблица истинности простейших логических связей

2.2.2 Порядок выполнения логических операций

Если скобок нет, то операции выполняются в следующем порядке:

1. отрицание;
2. конъюнкция;
3. дизъюнкция;

4. импликация;
5. эквивалентность.

2.2.3 Доказательство тождественной истинности

С помощью таблиц можно доказывать тождества. Рассмотрим пример. Необходимо доказать тождественную истинность формулы

$$\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B).$$

A	B	\bar{A}	$A \rightarrow B$	$\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Таблица 2.3: Пример доказательства тождественной истинности

2.2.4 Другие логические связи

В таблице 2.4 представлены другие логические связи, которые мы в дальнейшем будем использовать.

Название	Прочтение	Обозначение
Штрих Шеффера	антиконъюнкция	$ $
Стрелка Пирса	антидизъюнкция	\downarrow
Сумма по модулю два	антиэквивалентность	\oplus

Таблица 2.4: Другие логические связи

Эти логические связки можно представить следующим образом:

$$A \mid B = \overline{A \wedge B}; \quad A \downarrow B = \overline{A \vee B}; \quad A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}.$$

Таблица 2.5 представляет собой таблицу истинности других логических связок.

A	B	$A \mid B$	$A \downarrow B$	$A \oplus B$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Таблица 2.5: Таблица истинности других логических связок

Замечание. Таблицы истинности содержат 2^n строк, где n – число простых логических высказываний.

2.3 Логические отношения

Отношение следствия: из A следует B , если B истинно всякий раз, когда истинно A . Рассмотрим высказывания $A \leftrightarrow B$, $A \rightarrow B$, $A \vee B$:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$A \vee B$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Два составных высказывания **эквивалентны**, если они имеют одинаковые истинностные значения на одинаковых наборах, т. е. последние столбцы их таблиц истинности должны совпадать.

Рассмотрим пример. Проверим, являются ли высказывания $A \rightarrow B$ и $\bar{A} \vee B$ эквивалентными:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Итого получим, что

$$A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B.$$

2.4 Варианты импликации

Импликация двух высказываний отличается от эквивалентности, а также от дизъюнкции и конъюнкции тем, что она **несимметрична** (т. е. $A \rightarrow B$ не эквивалентно $B \rightarrow A$).

Для высказывания $A \rightarrow B$:

- высказывание $B \rightarrow A$ называется **конверсией**;
- высказывание $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$ называется **конверсией контрапозиции**;
- высказывание $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ называется **контрапозицией**.

Таблица 2.9 представляет собой таблицу истинности этих вариантов импликации.

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$\bar{A} \rightarrow \bar{B}$	$\bar{B} \rightarrow \bar{A}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Таблица 2.9: Таблица истинности вариантов импликации

2.5 Необходимое и достаточное условия

Условие	Описание	Операция
A является достаточным условием для B	Если имеет место A , то B также будет иметь место	Импликация $A \rightarrow B$
A является необходимым условием для B	Если имеет место B , то A также будет иметь место	Конверсия достаточного условия $B \rightarrow A$
A является необходимым и достаточным условием для B	A имеет место тогда и только тогда, когда имеет место B	Двойная импликация, т. е. эквивалентность $A \leftrightarrow B$

2.6 Основные логические эквивалентности

Свойство 1 (Идемпотентность).

$$A \vee A = A, \quad A \wedge A = A.$$

Свойство 2 (Коммутативность).

$$A \vee B = B \vee A, \quad A \wedge B = B \wedge A.$$

Свойство 3 (Ассоциативность).

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, \quad A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C.$$

Свойство 4 (Дистрибутивность).

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

Свойство 5 (Поглощение).

$$(A \wedge B) \vee A = A, \quad (A \vee B) \wedge A = A.$$

Свойство 6 (Свойства нуля).

$$A \vee 0 = A, \quad A \wedge 0 = 0.$$

Свойство 7 (Свойства единицы).

$$A \vee 1 = 1, \quad A \wedge 1 = A.$$

Свойство 8 (Инволютивность).

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана).

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}, \quad \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения).

$$A \vee \bar{A} = 1, \quad A \wedge \bar{A} = 0.$$

Свойство 11 (Свойство импликации).

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B.$$

Свойство 12 (Свойство эквивалентности).

$$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

2.7 Булевы функции

Булевы функции находят применение в конструировании и упрощении логических схем.

Обозначим $E_2 = \{0, 1\}$, тогда

$$E_2^n = \underbrace{E_2 \times E_2 \times \dots \times E_2}_n.$$

Функции $f : E_2^n \rightarrow E_2$ называются **функции алгебры логики** или **булевыми функциями** от n переменных. Множество булевых функций от n переменных обозначают P_n :

$$P_n = \{f \mid f : E_2^n \rightarrow E_2\}.$$

2.8 Множество булевых функций. Булев куб

P_2 – множество всех булевых функций.

$P_{2,n}$ – множество всех булевых функций от n переменных:

$$P_{2,n} = \{f \mid f : E_2^n \rightarrow E_2\}, \quad P_2 = \bigcup_{n \geq 0} P_{2,n}.$$

$\{0, 1\}^n$ – **булев куб** размерности n . Число всех элементов булева куба $\{0, 1\}^n$ составляет 2^n .

2.9 Булев порядок

Для произвольных наборов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ имеет место

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \iff \alpha_i \leq \beta_i, \forall i = \overline{1, n}$$

то есть

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \iff \alpha_i = \beta_i \text{ или } \alpha_i, \beta_i = 1, \forall i = \overline{1, n}.$$

Если существует хотя бы одно i , для которого $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$, то имеет место строгое неравенство $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$.

Если существует ровно одно i , для которого $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$, то набор $\bar{\beta}$ **доминирует** над набором $\bar{\alpha}$.

Рассмотренное отношение порядка на B^n , где B^n – n -я декартова степень

$$B = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$$

будем называть **булевым порядком**.

Булев куб как упорядоченное множество можно изобразить в виде диаграммы Хассе

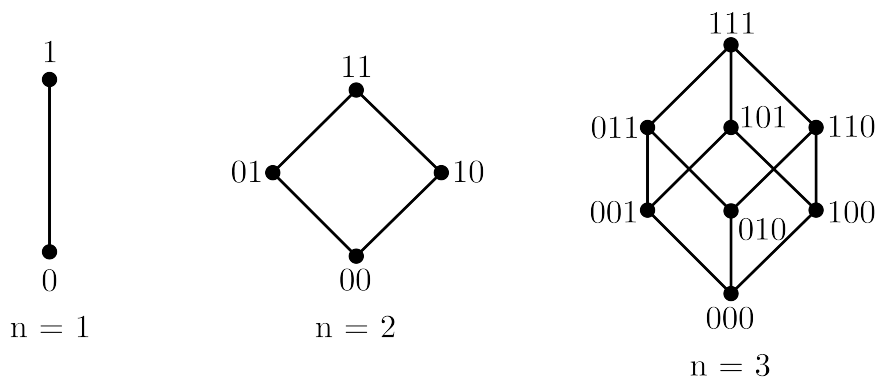


Рис. 2.1: Примеры булевых кубов в виде диаграммы Хассе

2.10 Мощность множества булевых функций

Число булевых функций от n переменных находится по формуле

$$|P_{2,n}| = 2^{2^n}.$$

x_1	\dots	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_n)$
0	\dots	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	\dots	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
0	\dots	1	0	$f(0, \dots, 1, 0)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
1	\dots	1	1	$f(1, \dots, 1, 1)$

Таблица 2.11: Таблица булевых функций

2.11 Существенные и несущественные переменные

Булева функция $f \in P_n$ **существенно зависит** от переменной x_i , если существует такой набор значений

$$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$$

что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

В этом случае x_i называют **существенной** переменной, в противном случае x_i называют **несущественной** (фиктивной) переменной.

Рассмотрим пример.

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

В данном случае x_1 – существенная переменная, а x_2 – несущественная, поскольку

$$f_1(0,0) = f_1(0,1), \quad f_1(1,0) = f_1(1,1).$$

$$f_2(0,0) = f_2(0,1), \quad f_2(1,0) = f_2(1,1).$$

2.12 Булевы функции одной и нескольких переменных

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 2.13: Булевы функции одной переменной

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 2.14: Булевы функции двух переменных

2.13 Мажоритарная функция

	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Таблица 2.15: Мажоритарная функция (функция голосования)

2.14 Реализация функций формулами

Так же, как составные высказывания строятся из более простых, с помощью логических операций, можно комбинировать булевы переменные с помощью булевых операций, получая булевы выражения, которые называются **формулами**. Всякой формуле однозначно соответствует некоторая функция, при этом говорят, что **формула реализует функцию**.

Рассмотрим пример. Построим таблицу истинности для формулы

$$((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2.$$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$(x_1 \wedge x_2) \oplus x_1$	$((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Формула $((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$ реализует функцию $f_8(x_1, x_2) = 0111$.

2.15 Равносильные формулы

Одна функция может иметь множество реализаций. Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются **равносильными**:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \iff \exists f : \text{func } \mathcal{F}_1 = f \wedge \text{func } \mathcal{F}_2 = f.$$

Другими словами, булевы функции f и g называют равносильными, если их существенные переменные соответственно равны и на каждом наборе значений этих переменных функции f и g принимают равные значения.

Рассмотрим пример. Пусть

$$f(x, y) = x \vee y, \quad g(x, y, z) = xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee y\bar{z}.$$

Упростим функцию $g(x, y, z)$:

$$g(x, y, z) = xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee y\bar{z} = x(z \vee \bar{z}) \vee y(z \vee \bar{z}) = x \vee y.$$

Получили, что функции $f(x, y)$ и $g(x, y, z)$ равносильны.

2.16 Законы булевой алгебры

Свойство 1 (Идемпотентность).

$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$$

Свойство 2 (Коммутативность).

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a.$$

Свойство 3 (Ассоциативность).

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Свойство 4 (Дистрибутивность).

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Свойство 5 (Поглощение).

$$(a \wedge b) \vee a = a, \quad (a \vee b) \wedge a = a.$$

Свойство 6 (Свойства нуля).

$$a \vee 0 = a, \quad a \wedge 0 = 0.$$

Свойство 7 (Свойства единицы).

$$a \vee 1 = 1, \quad a \wedge 1 = a.$$

Свойство 8 (Инволютивность).

$$\bar{\bar{a}} = a.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана).

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}, \quad \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения).

$$a \vee \bar{a} = 1, \quad a \wedge \bar{a} = 0.$$

Свойство 11 (Свойство импликации).

$$a \rightarrow b = \bar{a} \vee b.$$

Свойство 12 (Свойство эквивалентности).

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a).$$

2.17 Двойственная функция

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ – булева функция. Тогда функция

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$$

называется **двойственной** к функции f .

Рассмотрим примеры:

1. $0^* = \bar{0} = 1$;
2. $1^* = \bar{1} = 0$;
3. $x^* = \bar{\bar{x}} = x$ (т. к. x и функция, и переменная в данном случае);
4. $(x \wedge y)^* = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = x \vee y$;
5. $(x \vee y)^* = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = x \wedge y$.

2.18 Инволютивность двойственности

Из определения видно, что двойственность инволютивна: $f^{**} = f$, поэтому отношение «быть двойственной к» на множестве булевых функций симметрично, то есть, если $f^* = g$, то $g^* = f$.

Если в таблице истинности булевой функции f инвертировать все значения, то получим таблицу истинности двойственной функции f^* .

2.19 Самодвойственная функция

Функция называется **самодвойственной**, если $f^* = f$. Примером такой функции может служить функция $f(x) = x$:

$$x^* = \bar{\bar{x}} = x.$$

2.20 Принцип двойственности

Теорема. Пусть $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ – система булевых функций, а $F^* = \{f_1^*, \dots, f_m^*\}$ – система двойственных функций. Тогда если формула \mathcal{F} над базисом F реализует функцию f , то формула \mathcal{F}^* над базисом F^* , полученная заменой функций f_i , двойственными функциями f_i^* , реализует функцию f^* :

$$\text{func } \mathcal{F} | F = f \implies \text{func } \mathcal{F}^* | F^* = f^*.$$

Следствие. Если две равносильные формулы заменить двойственными, то равносильность сохранится:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \implies \mathcal{F}_1^* = \mathcal{F}_2^*.$$

Замечание. Формула, двойственная к булевой формуле, может быть получена заменой констант 0 на 1, 1 на 0, операций \wedge на \vee , \vee на \wedge и сохранением структуры формулы.

2.21 Нормальные формы

Если x – логическая переменная, $\sigma \in \{0, 1\}$, то выражение

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

называется литерой. Литеры x и \bar{x} называются **контрарными**. **Элементарной конъюнкцией** называется конъюнкция литер. **Элементарной дизъюнкцией** называется дизъюнкция литер.

2.22 ДНФ и КНФ

Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**.

Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ)**.

Примеры:

- $(x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z)$ – ДНФ;
- $(x \vee z \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y) \wedge z$ – КНФ;
- $x \wedge \bar{y}$ – одновременно и КНФ, и ДНФ.

Теорема.

1. Любая формула эквивалентна некоторой ДНФ.
2. Любая формула эквивалентна некоторой КНФ.

Алгоритм приведения формулы к ДНФ:

1. выразить все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2. используя законы де Моргана, перенести все отрицания к переменным;

3. убрать двойные отрицания;
4. используя закон дистрибутивности, преобразовать формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций.

Алгоритм приведения формулы к КНФ:

1. выразить все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2. используя законы де Моргана, перенести все отрицания к переменным;
3. убрать двойные отрицания;
4. используя закон дистрибутивности, преобразовать формулу так, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше, чем конъюнкции.

2.23 Совершенные нормальные формы

2.23.1 СДНФ

Реализация булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в виде формулы

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)**. Таким образом, СДНФ есть ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций, и в каждой элементарной конъюнкции каждая переменная x_i , из набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i , либо ее отрицание \bar{x}_i .

Теорема. Каждая булева функция, отличная от константы 0, имеет единственную СДНФ.

2.23.2 СКНФ

Реализация булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в виде формулы

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$$

называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)**. Таким образом, СКНФ есть КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций, и в каждой элементарной дизъюнкции каждая переменная x_i из набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i , либо ее отрицание \bar{x}_i .

Теорема. Всякая булева функция, отличная от константы 1, имеет единственную СКНФ.

2.24 Нахождение СДНФ

При нахождении СДНФ пользуются следующим правилом:

1. каждый набор аргументов определяет элементарную конъюнкцию, в которой значению 0 соответствует отрицание переменной, а значению 1 – сама переменная.
2. СДНФ функции образуют те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам аргументов, дающим 1.

Каждый набор аргументов, на котором функция принимает значение 1, называется **конституентой единицы** функции.

Рассмотрим пример нахождения СДНФ для $x_1 \rightarrow x_2$:

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	элемент. конъюнкции
0	0	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$
0	1	1	$\bar{x}_1 \wedge x_2$
1	0	0	$x_1 \wedge \bar{x}_2$
1	1	1	$x_1 \wedge x_2$

СДНФ: $(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)$.

2.25 Нахождение СКНФ

При нахождении СКНФ пользуются следующим правилом:

1. каждый набор аргументов определяет элементарную дизъюнкцию, в которой значению 1 соответствует инверсия переменной, а значению 0 – сама переменная;
2. СКНФ функции образуют те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам аргументов, дающим 0.

Каждый набор аргументов, на котором функция принимает значение 0, называется **конституентой нуля** функции.

Рассмотрим пример нахождения СКНФ для $x_1 \rightarrow x_2$:

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	ЭЛЕМ. КОНЪЮНКЦИИ
0	0	1	$x_1 \vee x_2$
0	1	1	$x_1 \vee \bar{x}_2$
1	0	0	$\bar{x}_1 \vee x_2$
1	1	1	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

СКНФ: $\bar{x}_1 \vee x_2$.