Содержание

1 Множества и отношения

1.1 Основные понятия

Множество – любая определенная совокупность объектов. Элементы множества различны и отличными друг от друга.

Под **множеством** понимают любой набор определенных и различимых между собой объектов, мыслимый как единое целое. Объекты, из которых составлено множество, называются его **элементами**.

Множества обычно обозначатся заглавными латинскими буквами: $A, B, C, \ldots$. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами: $a, b, c, \ldots$.

Для обозначения того, что объект x является, либо не является элементом множества A, используют символику:

- $x \in A$ – объект x является элементом множества A.
- $x \notin A$ – объект x не является элементом множества A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\varnothing$.

Множество, из элементов которого составляют конкретное множество, называют **универсальным** и обозначают символом U.

Множество U называется **универсальным** для данной задачи, если все рассматриваемые в этой задаче множества являются его подмножествами.

Множества можно изображать с помощью кругов, которые называются **кругами Эйлера** или **диаграммами Венна**. Универсальное множество принято обозначать прямоугольником.

Способы задания множества:

1. перечислением всех элементов множества (в фигурных скобках через запятую):
$$A = \{1, 2, 3, 4\};$$
2. характеристическим предикатом, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество. Характеристический предикат записывается после двоеточия или символа «|»:
$$A = \{x : P(x)\} \quad \vee \quad A = \{x \mid P(x)\}$$
где $P(x)$ – характеристический предикат.

Обозначения числовых множеств:

- $\mathbb{N}$ – множества натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z}$ – множества целых чисел, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;

- $\mathbb{Q}$ – множество рациональных числе, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})\right\}$;
- $\mathbb{R}$ – множество действительных (вещественных) чисел;
- $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

1.2 Сравнение множеств

Множество A называется **подмножеством** множества B (множество A содержится в B, множество B включает множество A), если каждый элемент множества A является элементом множества B:

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A \implies x \in B.$$

B называется **надмножеством** множества A.

Под определению пустое множество является подмножеством всех множеств:

$$\forall M \implies \varnothing \subseteq M.$$

Универсальное множество содержит все множества:

$$\forall M \implies M \subseteq U.$$

Два множества называют **равными**, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то множество A называется **собственным** подмножеством множества B, а B – **собственным** надмножеством A.

Множества A и B **сравнимые**, если $A \subseteq B \vee B \subseteq A$. Иначе множества называются **несравнимыми**.

1.3 Свойства включения множеств

Свойство 1.

$$\forall A \implies A \subseteq A.$$

Свойство 2.

$$\forall A, B : A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B.$$

Свойство 3.

$$\forall A, B, C : A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

1.4 Мощность множества

Говорят, что между множествами A и B установлено **взаимно-однозначное соответствие**, если каждому элементу множества A поставлен в соответствие один и только один элемент множества B, и каждому элементу множества B поставлен в соответствие один и только один элемент множества A:

$$A \sim B \iff \begin{cases} \forall a \in A \mapsto !b \in B \\ \forall b \in B \mapsto !a \in A \end{cases}$$

Два множества (конечных или бесконечных) имеют **одинаковую мощность**, если между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие. В этом случае говорят, что множества A и B **изоморфны**, имеют одинаковую **мощность**, или что они **равномощны**, и обозначают $|A| = |B|$.

Множество A называется **конечным**, если у него нет равномощного собственного подмножества:

$$\forall B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \implies B = A.$$

Для конечного множества используется запись $|A| < \infty$.

Множество **бесконечно** тогда и только тогда, когда оно имеет одинаковую мощность с некоторым своим подмножеством, не совпадающим с самим этим множеством:

$$\exists B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \wedge B \neq A.$$

То есть бесконечное множество равномощно некоторому своему собственному подмножеству. Для бесконечного множества используется запись $|A| = \infty$.

Множество X называется **счетным**, если его мощность равна мощности множества натуральных чисел, т. е. $|X| = |\mathbb{N}|$.

Говорят, что множество X – множество **мощности континуума**, если его мощность равна мощности множества точек на отрезке $[0, 1]$.

Теорема (Теорема Кантора о несчетности)**.** Отрезок $[0, 1]$ несчетен, т. е.

$$|[0, 1]| > |\mathbb{N}|.$$

1.5 Операции над множествами

Объединением двух множеств называется множество, содержащее все элементы обоих множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

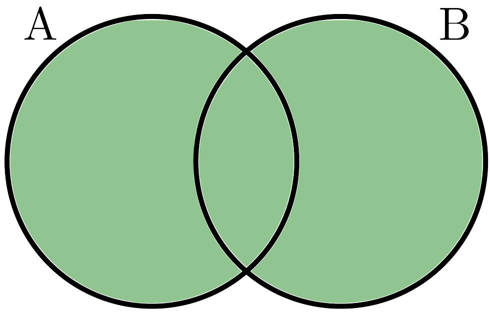


Рис. 1.1: Объединение двух множеств

Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов, входящих в каждое из множеств A и B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

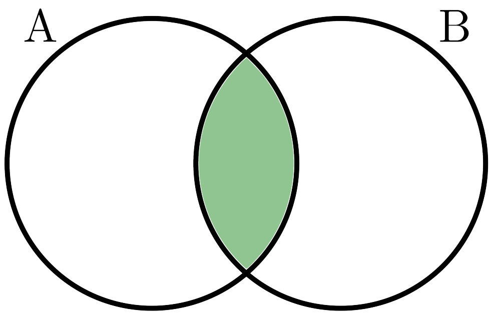


Рис. 1.2: Пересечение двух множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не содержащихся в множестве B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

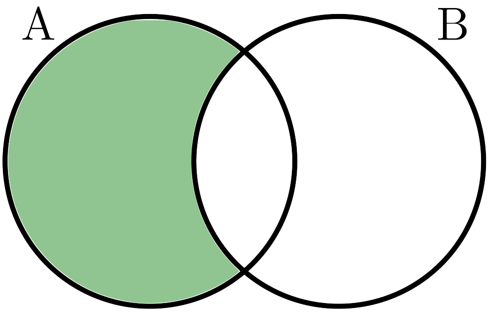


Рис. 1.3: Разность двух множеств

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не содержащихся в множестве B, и всех элементов множества B, не содержащихся в множестве A:

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

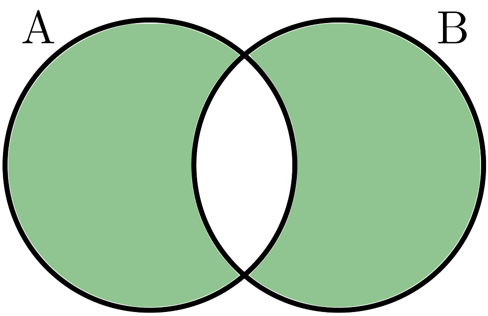


Рис. 1.4: Симметрическая разность двух множеств

Дополнением (дополнением до универсального множества U) множества A называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не содержащихся в множестве A:

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

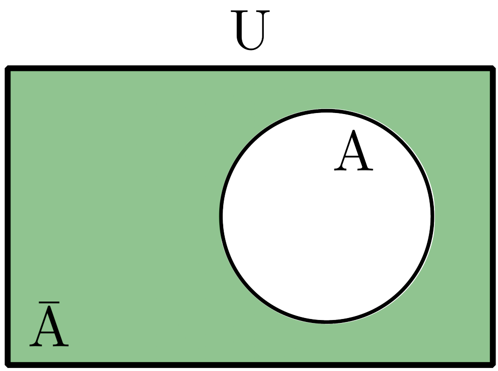


Рис. 1.5: Дополнение множества

1.6 Свойства операций над множествами

Свойство 1 (Идемпотентность)**.**

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Свойство 2 (Коммутативность)**.**

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Свойство 3 (Ассоциативность)**.**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Свойство 4 (Дистрибутивность)**.**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Свойство 5 (Поглощение)**.**

$$(A \cap B) \cup A = A, \quad (A \cup B) \cap A = A.$$

Свойство 6 (Свойства нуля)**.**

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Свойство 7 (Свойства единицы)**.**

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$$

Свойство 8 (Инволютивность)**.**

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана)**.**

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения)**.**

$$A \cup \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = \varnothing.$$

Свойство 11 (Свойство разности)**.**

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

Свойство 12 (Свойство симметрической разности)**.**

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A).$$

1.7 Обобщенные тождества алгебры множеств

Свойство 1 (Обобщенная дистрибутивность)**.**

$$A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i); \qquad A \cup \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i).$$

Свойство 2 (Обобщенный закон де Моргана)**.**

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}; \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

1.8 Булеан

Множество всех подмножеств A называется **булеаном** множества A и обозначается 2^A:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Теорема. Если множество A конечно, то $|2^A| = 2^{|A|}$.

1.9 Методы доказательств теоретико-множественных тождеств

1.9.1 Метод двух включений

Пусть левая часть теоретико-множественного тождества определяет множество X, а правая часть – множество Y. Чтобы доказать равенство множеств X и Y, достаточно доказать два включения $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, т. е. доказать, что

$$\forall x \in X \implies x \in Y \quad \wedge \quad \forall x \in Y \implies x \in X.$$

Докажем этим методом тождество

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пусть $x \in A \vartriangle B$. Тогда, согласно определению симметрической разности

$$\begin{gathered} x \in (A \vartriangle B) \implies x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \implies \\ \implies (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \implies \\ \implies (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \vee (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \implies \\ \implies x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \implies x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)). \end{gathered}$$

Таким образом доказано, что $A \vartriangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Докажем обратное включение $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \vartriangle B$:

$$\begin{gathered} x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \implies x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \implies \\ \implies (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \implies \\ \implies x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \implies x \in (A \vartriangle B). \end{gathered}$$

Оба включения имеют место и тождество доказано.

1.9.2 Метод эквивалентных преобразований

Теоретико-множественные тождества можно доказывать, используя свойства операций над множествами. Для этого нужно преобразовать левую часть в правую, или правую – в левую, или правую и левую часть в некоторое третье выражение.

Докажем этим методом тождество:

$$(A \cap B) \vartriangle (A \cap C) = A \cap (B \vartriangle C).$$

Преобразуем левую часть к правой:

$$
\begin{gathered}
(A \cap B) \vartriangle (A \cap C) = \\
= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{A \cap B} \cup \overline{A \cap C}) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{C}) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = \\
= ((A \cap (B \cup C)) \cap \bar{A}) \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
= (B \cup C) \cap (A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap (\overline{B \cap C})) = \\
= A \cap ((B \cup C) \cap (\overline{B \cap C})) = \\
= A \cap (B \vartriangle C).
\end{gathered}
$$

1.9.3 Метод характеристических функций

Характеристическая функция χ_A множества A для $x \in U$ определяется следующим образом:

$$
\begin{cases}
\chi_A(x) = 1, & x \in A \\
\chi_A(x) = 0, & x \notin A
\end{cases}
$$

Для характеристической функции справедливы следующие тождества:

1. $\chi_A^2(x) = \chi_A(x)$;
2. $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
3. $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
4. $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A(x)$;
5. $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
6. $\chi_{A \vartriangle B} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2 \cdot \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Докажем этим методом тождество

$$(A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C).$$

С одной стороны,

$$\chi_{(A\triangle B)\cap C}(x) = \chi_{(A\triangle B)}(x)\chi_C(x) =$$
$$= (\chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x))\chi_C(x) =$$
$$= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).$$

С другой стороны,

$$\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}(x) = \chi_{(A\cap C)}(x) + \chi_{(B\cap C)}(x) - 2\chi_{(A\cap C)}(x)\chi_{(B\cap C)}(x) =$$
$$= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_C(x)\chi_B(x)\chi_C(x) =$$
$$= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).$$

Так как $\chi_{(A\triangle B)\cap C}(x) = \chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}(x)$, тождество доказано.

1.10 Упорядоченные пары и наборы

(a, b) – упорядоченная пара объектов a и b.

Равенство упорядоченных пар определяется следующим образом:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

Вообще говоря, $(a, b) \neq (b, a)$.

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – упорядоченный набор из n элементов (n-ка, кортеж или (конечная) последовательность).

$|(a_1, a_2, \ldots, a_n)|$ – длина набора, т. е. количество элементов в наборе.

Теорема. Два набора одной длины равны, если равны их соответствующие элементы

$$\forall n (a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n.$$

1.11 Прямое произведение множеств

Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит A, а второй принадлежит B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

$$A \times B \neq B \times A.$$

Теорема. Для конечных множества A и B

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Понятие прямого произведения допускает обобщение. Прямое произведение множеств $A_1, \ldots, A_n$ – это множество наборов (кортежей):

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Множества A_i необязательно различны.

Степенью множества A называется его n-кратное произведение самого на себя:

$$A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n-\text{раз}}; \qquad |A^n| = |A|^n.$$

1.12 Бинарные отношения

Бинарным отношением между множествами A и B называется такая тройка $\langle A, B, R\rangle$, где R – подмножество прямого произведения A и B:

$$R \subset A \times B,$$

Эти множества именуют следующим образом:

- R – график отношения;
- A – область отправления;
- B – область прибытия.

Область определения отношения:

$$\mathrm{Dom} R = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\}.$$

Область значений:

$$\mathrm{Im} R = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\}.$$

Если $A = B$ (т. е. $R \subset A^2$), то говорят, что R есть отношение на множестве A.

Для бинарных отношений обычно используется **инфиксная** форма записи:

$$aRb \iff (a, b) \in R \subset A \times B.$$

Инфиксная форма позволяет более кратко записывать некоторые формы утверждений относительно отношений:

$$aRbRc \iff (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$$

Обратное отношение:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \subset B \times A.$$

Дополнение отношения:

$$\bar{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\} \subset A \times B.$$

Тождественное отношение:

$$I = \{(a,a) \mid a \in A\} \subset A^2.$$

Универсальное отношение:

$$U = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = A \times B.$$

1.13 Многоместные отношения

n-местное (n-арное) отношение R – это подмножество прямого произведения n множеств, т. е. множество упорядоченных наборов (кортежей):

$$R \subset A_1 \times \ldots \times A_n \iff \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\},$$

где n – вместимость (длина кортежей отношения).

1.14 Композиция отношений

Пусть $R_1 \subset A \times B$ – отношение между множествами A и B, а $R_2 \subset B \times C$ – отношение между множествами B и C. **Композицией** двух отношений R_1 и R_2 называется отношение $R \subset A \times C$ между множествами A и C, определяется следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 = \{(a,c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b \in B : aR_1b \wedge bR_2c\}.$$

Композиция отношений ассоциативна, т. е.

$$\forall R_1 \subset A \times B, R_2 \subset B \times C, R_3 \subset C \times D \implies$$
$$\implies (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

Композиция отношений на множестве A является отношением на множестве A.

Степенью отношения R на множестве A называется его n-кратная композиция с самим собой:

$$R^n = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{n-\text{раз}}.$$

1.15 Способы задания бинарных отношений

1.15.1 Матричный способ

Отношение $R \subset A \times B$ задается с помощью прямоугольной таблицы (матрицы), состоящей из нулей и единиц, в которой строки – первые координаты, а столбцы – вторые, причем на пересечении i-ой строки и j-го столбца будет стоять 1, если имеется отношение $a_i R b_j$, и 0 в противном случае.

Пример. Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (3, 6)\}.$$

Отношение можно записать в виде матрицы:

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица **универсального** (полного) отношения – это квадратная матрица, состоящая только из единиц.

Матрица **тождественного** (диагонального) отношения – это квадратная матрица, элементами главной диагонали которой являются единицы, а остальные элементы равны нулю.

Матрица **пустого** отношения – это квадратная матрица, состоящая только из нулей.

Матрица **обратного** отношения R^{-1} для отношения R – это транспонированная матрица отношения R.

1.15.2 С помощью ориентированного графа

Элементы множеств A и B изображаются в виде точек на плоскости (вершины двудольного графа), а упорядоченные пары – линией со стрелкой (дуги ориентированного графа), которая направленна от a к b, если aRb.

Пример. Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 3), (3, 6)\}.$$

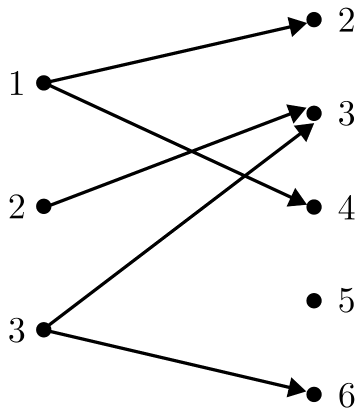


Рис. 1.6: Отношение в виде ориентированного графа

1.16 Способы задания композиции отношений

1.16.1 Матричный способ

Матрица композиции отношений $R \circ S$ получается как произведение матриц отношений R и S с дальнейшей заменой отличных от нуля элементов единицами.

Пример. Пусть

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\},$$
$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Тогда композиция равна

$$[R \circ S] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \circ S = \{(1,3),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4)\}.$$

1.16.2 С помощью ориентированного графа

Пусть $R \subset A \times B$ и $S \subset B \times C$. Чтобы получить граф $T = R \circ S$, надо к графу отношения R добавить граф отношения S. Граф композиции отношений получим, если исключим вершины, которые являются элементами множества B.

Пример. Пусть

$$R = \{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4)\},$$
$$S = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(4,2),(4,3)\}.$$

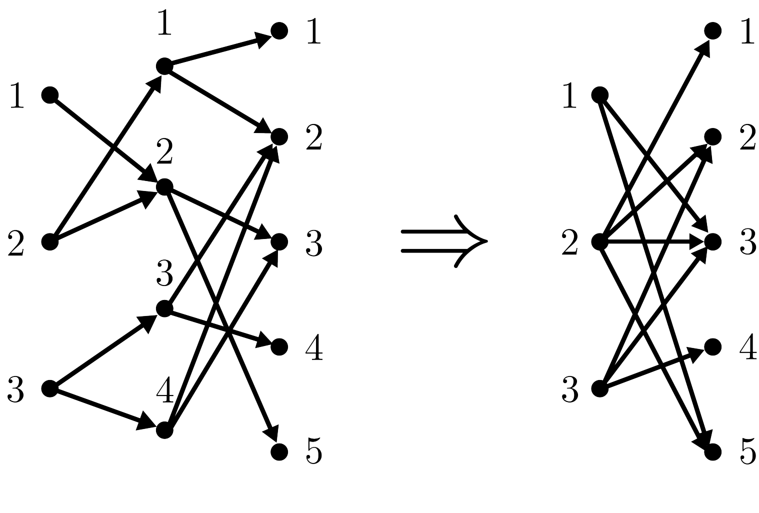


Рис. 1.7: Композиция в виде ориентированного графа

$$R \circ S = \{(1,3),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4)\}.$$

1.17 Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение R на множестве A называется

- **рефлексивным**, если

$$\forall x \in A : (x,x) \in R;$$

- **антирефлексивным**, если

$$\forall x \in A : (x,x) \notin R;$$

- **симметричным**, если

$$\forall x,y \in A : (x,y) \in R \implies (y,x) \in R;$$

- **антисимметричным**, если

$$\forall x,y \in A : (x,y) \in R \land (y,x) \in R \implies x = y;$$

- **транзитивным**, если

$$\forall x,y,z \in A : (x,y) \in R \land (y,z) \in R \implies (x,z) \in R;$$

- **линейным** (полным), если

$$\forall x,y \in A : x = y \lor (x,y) \in R \lor (y,x) \in R.$$

Теорема. Пусть $R \subset A \times A$ – отношение на A. Тогда

- R рефлексивно $\iff I \subset R$;
- R антирефлексивно $\iff R \cap I = \varnothing$;
- R симметрично $\iff R = R^{-1}$;
- R антисимметрично $\iff R \cap R^{-1} = I$;
- R транзитивно $\iff R \circ R \subset R$;
- R линейно $\iff R \cup I \cup R^{-1} = U$.

1.18 Ядро отношения

Если $R \subset A \times B$ – отношение между множествами A и B, то композиция $R \circ R^{-1}$ называется **ядром** отношения R и обозначается $\ker R$:

$$\ker R = R \circ R^{-1}.$$

Ядро отношения R между A и B является отношением на A:

$$R \subset A \times B \implies \ker R \subset A^2.$$

Теорема. Ядро любого отношения рефлексивно и симметрично на области определения.

1.19 Замыкание отношений

Пусть R и $R^{\times}$ – отношения на множестве M. Отношение $R^{\times}$ называется замыканием R относительно свойства C, если

1. $R^{\times}$ обладает свойством C: $C(R^{\times})$;
2. $R^{\times}$ является надмножеством R: $R \subset R^{\times}$;
3. $R^{\times}$ является наименьшим таким объектом:

$$C(R^{\times\times}) \wedge R \subset R^{\times} \implies R^{\times} \subset R^{\times\times}.$$

Теорема. Пусть R – отношение на множестве M. Тогда

- $R \cup I$ есть рефлексивное замыкание R;
- $R \cup R^{-1}$ есть симметричное замыкание R;
- если M – конечное множество, содержащее n элементов, то отношение

  $$R \cup R^2 \cup R^3 \cup ... \cup R^n$$

  есть транзитивное замыкание R.

1.20 Функциональные отношения

Пусть f – отношение между A и B такое, что

$$\forall a : (a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \implies b = c.$$

Такое свойство отношений называется **однозначностью** или **функциональным**, а само отношение называется **функцией** из A в B.

$$f : A \to B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

$$b = f(a) \iff (a, b) \in f.$$

1.21 Тотальные и частичные функции

$$\mathrm{Dom} f \subset A; \qquad \mathrm{Im} f \subset B$$

Если $\mathrm{Dom} f = A$, то функция называется **тотальной**, а если $\mathrm{Dom} f \neq A$, то **частичной**.

1.22 Инъекция, сюръекция и биекция

Пусть $f : A \to B$, тогда функция f называется

- **инъективной** (или инъекцией), если

$$b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \implies a_1 = a_2;$$

- **сюрьективной** (или сюрьекцией), если

$$\forall b \in B \, \exists a \in A : b = f(a);$$

- **биективной** (или биекцией), если она инъективная и сюрьективная.

1.23 Отношения эквивалентности

Отношение называется отношением **эквивалентности** (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эквивалентности обозначают символами E, $\sim$ (тильда) и $=$:

$$xEy, \quad x \sim y, \quad x = y.$$

Пример. Отношение равенства $x = y$ является эквивалентностью на любом множестве A, так как оно

- рефлексивно ($x = x$);
- симметрично ($x = y \implies y = x$);
- транзитивно ($x = y, y = z \implies x = z$).

1.24 Классы эквивалентности

Пусть E – отношение эквивалентности на множестве A. **Классом эквивалентности** элемента $x \in A$ называется подмножество элементов множества A, эквивалентных x:

$$E(x) = \{y \in A \mid xEy\}$$

или

$$[x]_E = \{y \in A \mid y \equiv x\}.$$

1.25 Фактормножества

Если E – отношение эквивалентности на множестве A, то множество классов эквивалентности называется **фактормножеством** множества A относительно эквивалентности E и обозначается A/E:

$$A/E = \{E(x) \mid x \in A\} \quad \text{или} \quad A/E = \{[x]_E\}_{x \in A}.$$

1.26 Отношения порядка

Антисимметричное транзитивное отношение называется **отношением порядка**. Отношение порядка в общем случае обозначается символом $\prec$. Отношение порядка может обладать также дополнительными свойствами, которые сведены в следующую таблицу:

Дополнительное свойство, которым обладает отношением порядка	Название отношения порядка, обладающего дополнительным свойством
рефлексивность	отношение нестрогого порядка $\leq$
антирефлексивность	отношение строгого порядка $<$
линейность	отношение линейного порядка
не обладает свойством линейности	отношение частичного порядка

Множества, на котором задано отношение частичного порядка, называется **частично упорядоченным**.

Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется **линейно упорядоченным**.

2 Элементы математической логики

2.1 Основные понятия

Математическая логика – это анализ методом рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т. е. математическая логика исследует соотношения между основными понятиями математики, на базе которых доказываются математические утверждения.

Простейшую из формальных логических теорий называют **алгеброй высказываний**.

Высказыванием называется утверждение (повествовательное предложение), о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Высказыванию ставят в соответствие логическую переменную, которая принимает значение 1, если высказывание истинно, и 0, если высказывание ложно.

Из простых высказываний с помощью **логических связок** могут быть построены **составные высказывания**.

2.2 Логические связки

2.2.1 Простейшие логические связки

В таблице 2.1 представлены простейшие логические связки.

Название	**Прочтение**	**Обозначение**
отрицание	не	$\neg$
конъюнкция	и	$\wedge$
дизъюнкция	или	$\vee$
импликация	если, то	$\rightarrow$
эквивалентность	тогда и только тогда, когда	$\leftrightarrow$

Таблица 2.1: Простейшие логические связки

Таблица 2.2 представляет собой таблицу истинности простейших логических связок.

A	B	$\bar{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Таблица 2.2: Таблица истинности простейших логических связок

2.2.2 Порядок выполнения логических операций

Если скобок нет, то операции выполняются в следующем порядке:

1. отрицание;
2. конъюнкция;
3. дизъюнкция;
4. импликация;
5. эквивалентность.

2.2.3 Доказательство тождественной истинности

Пример. Необходимо доказать тождественную истинность формулы

$$\bar{A} \to (A \to B).$$

A	B	$\bar{A}$	$A \to B$	$\bar{A} \to (A \to B)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Таблица 2.3: Пример доказательства тождественной истинности

2.2.4 Другие логические связки

В таблице 2.4 представлены другие логические связки, которые мы в дальнейшем будем использовать.

Название	**Прочтение**	**Обозначение**
Штрих Шеффера	антиконъюнкция	$\mid$
Стрелка Пирса	антидизъюнкция	$\downarrow$
Сумма по модулю два	антиэквивалентность	$\oplus$

Таблица 2.4: Другие логические связки

Эти логические связки можно представить следующим образом:

$$A \mid B = \overline{A \wedge B}; \quad A \downarrow B = \overline{A \vee B}; \quad A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}.$$

Таблица 2.5 представляет собой таблицу истинности других логических связок.

A	B	$A \mid B$	$A \downarrow B$	$A \oplus B$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Таблица 2.5: Таблица истинности других логических связок

Замечание. Таблицы истинности содержат 2^n строк, где n – число простых логических высказываний.

2.3 Логические отношения

Отношение следствия: из A следует B, если B истинно всякий раз, когда истинно A.

Пример. Рассмотрим высказывания $A \leftrightarrow B$, $A \to B$, $A \vee B$:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$A \vee B$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Из $A \leftrightarrow B$ следует $A \to B$, однако из $A \leftrightarrow B$ не следует $A \vee B$.

Два составных высказывания **эквивалентны**, если они имеют одинаковые истинностные значения на одинаковых наборах, т. е. последние столбцы их таблиц истинности должны совпадать.

Пример. Проверим, являются ли высказывания $A \to B$ и $\bar{A} \vee B$ эквивалентными:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Итого получим, что

$$A \to B \equiv \bar{A} \vee B.$$

2.4 Варианты импликации

Импликация двух высказываний отличается от эквивалентности, а также от дизъюнкции и конъюнкции тем, что она **несимметрична** (т. е. $A \to B$ не эквивалентно $B \to A$).

Для высказывания $A \to B$:

- высказывание $B \to A$ называется **конверсией**;
- высказывание $\bar{A} \to \bar{B}$ называется **конверсией контрапозиции**;

- высказывание $\bar{B} \to \bar{A}$ называется **контрапозицией**.

Таблица 2.9 представляет собой таблицу истинности этих вариантов импликации.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \to B$	$B \to A$	$\bar{A} \to \bar{B}$	$\bar{B} \to \bar{A}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Таблица 2.9: Таблица истинности вариантов импликации

2.5 Необходимое и достаточное условия

Условие	**Описание**	**Операция**
A является достаточным условием для B	Если имеет место A, то B также будет иметь место	Импликация $A \to B$
A является необходимым условием для B	Если имеет место B, то A также будет иметь место	Конверсия достаточного условия $B \to A$
A является необходимым и достаточным условием для B	A имеет место тогда и только тогда, когда имеет место B	Двойная импликация, т. е. эквивалентность $A \leftrightarrow B$

2.6 Основные логические эквивалентности

Свойство 1 (Идемпотентность).

$$A \vee A = A, \quad A \wedge A = A.$$

Свойство 2 (Коммутативность).

$$A \vee B = B \vee A, \quad A \wedge B = B \wedge A.$$

Свойство 3 (Ассоциативность)**.**

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, \quad A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C.$$

Свойство 4 (Дистрибутивность)**.**

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

Свойство 5 (Поглощение)**.**

$$(A \wedge B) \vee A = A, \quad (A \vee B) \wedge A = A.$$

Свойство 6 (Свойства нуля)**.**

$$A \vee 0 = A, \quad A \wedge 0 = 0.$$

Свойство 7 (Свойства единицы)**.**

$$A \vee 1 = 1, \quad A \wedge 1 = A.$$

Свойство 8 (Инволютивность)**.**

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана)**.**

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}, \quad \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения)**.**

$$A \vee \bar{A} = 1, \quad A \wedge \bar{A} = 0.$$

Свойство 11 (Свойство импликации)**.**

$$A \to B = \bar{A} \vee B.$$

Свойство 12 (Свойство эквивалентности)**.**

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A).$$

2.7 Булевы функции

Булевы функции находят применение в конструировании и упрощении логических схем.

Обозначим $E_2 = \{0, 1\}$, тогда

$$E_2^n = \underbrace{E_2 \times E_2 \times \ldots \times E_2}_{n}.$$

Функции $f : E_2^n \to E_2$ называются **функции алгебры логики** или **булевыми функциями** от n переменных. Множество булевых функций от n переменных обозначают P_n:

$$P_n = \{f \mid f : E_2^n \to E_2\}.$$

2.8 Множество булевых функций. Булев куб

P_2 – множество всех булевых функций.

$P_{2,n}$ – множество всех булевых функций от n переменных:

$$P_{2,n} = \{f \mid f : E_2^n \to E_2\}, \qquad P_2 = \bigcup_{n \geq 0} P_{2,n}.$$

$\{0, 1\}^n$ – **булев куб** размерности n. Число всех элементов булева куба $\{0, 1\}^n$ составляет 2^n.

2.9 Булев порядок

Для произвольных наборов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\bar{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ имеет место

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \iff \alpha_i \leq \beta_i, \forall i = \overline{1, n}$$

то есть

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \iff \alpha_i = \beta_i \text{ или } \alpha_i, \beta_i = 1, \forall i = \overline{1, n}.$$

Если существует хотя бы одно i, для которого $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, то имеет место строгое неравенство $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$.

Если существует ровно одно i, для которого $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, то набор $\bar{\beta}$ **доминирует** над набором $\bar{\alpha}$.

Рассмотренное отношение порядка на B^n, где B^n – n-я декартова степень

$$B = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$$

будем называть **булевым порядком.**

Булев куб как упорядоченное множество можно изобразить в виде диаграммы Хассе

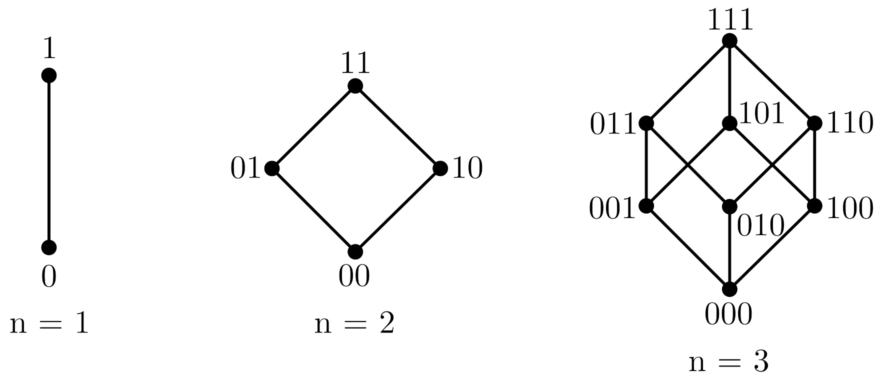


Рис. 2.1: Примеры булевых кубов в виде диаграммы Хассе

2.10 Мощность множества булевых функций

Число булевых функций от n переменных находится по формуле

$$|P_{2,n}| = 2^{2^n}.$$

x_1	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots x_n)$
0	...	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	...	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
0	...	1	0	$f(0, \dots, 1, 0)$
...	...	...	...	...
1	...	1	1	$f(1, \dots, 1, 1)$

Таблица 2.11: Таблица булевых функций

2.11 Существенные и несущественные переменные

Булева функция $f \in P_n$ **существенно зависит** от переменной x_i, если существует такой набор значений

$$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$$

что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

В этом случае x_i называют **существенной** переменной, в противном случае x_i называют **несущественной** (фиктивной) переменной.
Пример. Рассмотрим следующую таблицу истинности:

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

В данном случае x_1 – существенная переменная, а x_2 – несущественная, поскольку

$$f_1(0,0) = f_1(0,1), \quad f_1(1,0) = f_1(1,1).$$
$$f_2(0,0) = f_2(0,1), \quad f_2(1,0) = f_2(1,1).$$

2.12 Булевы функции одной и нескольких переменной

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 2.13: Булевы функции одной переменной

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 2.14: Булевы функции двух переменных

2.13 Мажоритарная функция

	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Таблица 2.15: Мажоритарная функция (функция голосования)

2.14 Реализация функций формулами

Так же, как составные высказывания строятся из более простых, с помощью логических операций, можно комбинировать булевы переменные с по-

мощью булевых операций, получая булевы выражения, которые называются **формулами**. Всякой формуле однозначно соответствует некоторая функция, при этом говорят, что **формула реализует функцию**.
Пример. Построим таблицу истинности для формулы

$$((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2.$$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$(x_1 \wedge x_2) \oplus x_1$	$((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Формула $((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$ реализует функцию $f_8(x_1, x_2) = 0111$.

2.15 Равносильные формулы

Одна функция может иметь множество реализацией. Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются **равносильными**:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \iff \exists f : \text{func}\ \mathcal{F}_1 = f \wedge \text{func}\ \mathcal{F}_2 = f.$$

Другими словами, булевы функции f и g называют равносильными, если их существенные переменные соответственно равны и на каждом наборе значений этих переменных функции f и g принимают равные значения.
Пример. Пусть

$$f(x, y) = x \vee y, \quad g(x, y, z) = xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee y\bar{z}.$$

Упростим функцию $g(x, y, z)$:

$$g(x, y, z) = xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee y\bar{z} = x(z \vee \bar{z}) \vee y(z \vee \bar{z}) = x \vee y.$$

Получили, что функции $f(x, y)$ и $g(x, y, z)$ равносильны.

2.16 Законы булевой алгебры

Свойство 1 (Идемпотентность)**.**

$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$$

Свойство 2 (Коммутативность)**.**

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a.$$

Свойство 3 (Ассоциативность)**.**

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Свойство 4 (Дистрибутивность)**.**

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Свойство 5 (Поглощение)**.**

$$(a \wedge b) \vee a = a, \quad (a \vee b) \wedge a = a.$$

Свойство 6 (Свойства нуля)**.**

$$a \vee 0 = a, \quad a \wedge 0 = 0.$$

Свойство 7 (Свойства единицы)**.**

$$a \vee 1 = 1, \quad a \wedge 1 = a.$$

Свойство 8 (Инволютивность)**.**

$$\bar{\bar{a}} = a.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана)**.**

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}, \quad \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения)**.**

$$a \vee \bar{a} = 1, \quad a \wedge \bar{a} = 0.$$

Свойство 11 (Свойство импликации)**.**

$$a \to b = \bar{a} \vee b.$$

Свойство 12 (Свойство эквивалентности)**.**

$$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a).$$

2.17 Двойственная функция

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ – булева функция. Тогда функция

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$$

называется **двойственной** к функции f.

Пример 1.

$$0^* = \bar{0} = 1.$$

Пример 2.

$$1^* = \bar{1} = 0.$$

Пример 3.

$$x^* = \bar{\bar{x}} = x.$$

Т. к. x в данном случае и функция, и переменная, мы применяем двойное отрицание.

Пример 4.

$$(x \wedge y)^* = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = x \vee y.$$

Пример 5.

$$(x \vee y)^* = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = x \wedge y.$$

2.18 Инволютивность двойственности

Из определения видно, что двойственность инволютивна: $f^{**} = f$, поэтому отношение «быть двойственной к» на множестве булевых функций симметрично, то есть, если $f^* = g$, то $g^* = f$.

Если в таблице истинности булевой функции f инвертировать все значения, то получим таблицу истинности двойственной функции f^*.

2.19 Самодвойственная функция

Функция называется **самодвойственной**, если $f^* = f$. Примером такой функции может служить функция $f(x) = x$:

$$x^* = \bar{\bar{x}} = x.$$

2.20 Принцип двойственности

Теорема. Пусть $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ – система булевых функций, а $F^* = \{f_1^*, \dots, f_n^*\}$ – система двойственных функций. Тогда если формула $\mathcal{F}$ над базисом F реализует функцию f, то формула $\mathcal{F}^*$ над базисом F^*, полученная заменой функций f_i, двойственными функциями f_i^*, реализует функцию f^*:

$$\operatorname{func} \mathcal{F}|F| = f \implies \operatorname{func} \mathcal{F}^*|F^*| = f^*.$$

Следствие. Если две равносильные формулы заменить двойственными, то равносильность сохранится:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \implies \mathcal{F}_1^* = \mathcal{F}_2^*.$$

Замечание. Формула, двойственная к булевой формуле, может быть получена заменой констант 0 на 1, 1 на 0, операций $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$ и сохранением структуры формулы.

2.21 Нормальные формы

Если x – логическая переменная, $\sigma \in \{0, 1\}$, то выражение

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

называется литерой. Литеры x и $\bar{x}$ называются **контрарными**. **Элементарной конъюнкцией** называется конъюнкция литер. **Элементарной дизъюнкцией** называется дизъюнкция литер.

2.22 ДНФ и КНФ

Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**.

Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ)**.

Пример 1. ДНФ:

$$(x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z).$$

Пример 2. КНФ:

$$(x \vee z \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y) \wedge z.$$

Пример 3. Одновременно и КНФ, и ДНФ:

$$x \wedge \bar{y}.$$

Теорема.

1. Любая формула эквивалентна некоторой ДНФ.
2. Любая формула эквивалентна некоторой КНФ.

Алгоритм приведения формулы к ДНФ:

1. выразить все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2. используя законы де Моргана, перенести все отрицания к переменным;
3. убрать двойные отрицания;
4. используя закон дистрибутивности, преобразовать формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций.

Алгоритм приведения формулы к КНФ:

1. выразить все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2. используя законы де Моргана, перенести все отрицания к переменным;
3. убрать двойные отрицания;
4. используя закон дистрибутивности, преобразовать формулу так, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше, чем конъюнкции.

2.23 Совершенные нормальные формы

2.23.1 СДНФ

Реализация булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в виде формулы

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)**. Таким образом, СДНФ есть ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций, и в каждой элементарной конъюнкции каждая переменная x_i, из набора $\{x_1, \ldots, x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\bar{x}_i$.

Теорема. Каждая булева функция, отличная от константы 0, имеет единственную СДНФ.

2.23.2 СКНФ

Реализация булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в виде формулы

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$$

называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)**. Таким образом, СКНФ есть КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций, и в каждой элементарной дизъюнкции каждая переменная x_i из набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\bar{x}_i$.

Теорема. Всякая булева функция, отличная от константы 1, имеет единственную СКНФ.

2.24 Нахождение СДНФ

При нахождении СДНФ пользуются следующим правилом:

1. каждый набор аргументов определяет элементарную конъюнкцию, в которой значению 0 соответствует отрицание переменной, а значению 1 – сама переменная.

2. СДНФ функции образуют те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам аргументов, дающим 1.

Каждый набор аргументов, на котором функция принимает значение 1, называется **конституентой единицы** функции.

Пример. Найдем СДНФ для $x_1 \to x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	элем. конъюнкции
0	0	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$
0	1	1	$\bar{x}_1 \wedge x_2$
1	0	0	$x_1 \wedge \bar{x}_2$
1	1	1	$x_1 \wedge x_2$

СДНФ: $(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)$.

2.25 Нахождение СКНФ

При нахождении СКНФ пользуются следующим правилом:

1. каждый набор аргументов определяет элементарную дизъюнкцию, в которой значению 1 соответствует инверсия переменной, а значению 0 – сама переменная;

2. СКНФ функции образуют те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам аргументов, дающим 0.

Каждый набор аргументов, на котором функция принимает значение 0, называется **конституентой нуля** функции.

Пример 1. Найдем СКНФ для $x_1 \to x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	элем. дизъюнкции
0	0	1	$x_1 \vee x_2$
0	1	1	$x_1 \vee \bar{x}_2$
1	0	0	$\bar{x}_1 \vee x_2$
1	1	1	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

СКНФ: $\bar{x}_1 \vee x_2$.

2.26 Замкнутые классы

Пусть

$$F = \{f_1, \dots, f_m\}, f_i \in P_2 \ \forall i \in \overline{1, m}.$$

Замыканием F называется множество всех булевых функций, реализуемых формулами над F:

$$[F] = \{f \in P_2 \mid f = \text{func } F[F]\}.$$

Класс функций, сохраняющих 0:

$$T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0, \dots, 0) = 0\}.$$

Класс функций, сохраняющих 1:

$$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1, \dots, 1) = 1\}.$$

Класс самодвойственных функций:

$$S = \{f \in P_2 \mid f = f^*\}.$$

Класс монотонных функций:

$$M = \{f \in P_2 \mid \forall \alpha, \beta : \alpha \leq \beta \implies f(\alpha) \leq f(\beta)\}.$$

Класс линейных функций:

$$L = \{f \in P_2 \mid f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n\}.$$

Теорема. Классы T_0, T_1, S, M, L – замкнуты.
Пример. Рассмотрим конъюнкцию и введем обозначение $\psi(x, y) = x \wedge y$. Построим таблицу истинности:

x	y	$\psi(x,y) = x \wedge y$	треугольник
0	0	0	0001
0	1	0	001
1	0	0	01
1	1	1	1

Тогда:
- $\psi \in T_0$, т. к. $0 \wedge 0 = 0$;
- $\psi \in T_1$, т. к. $1 \wedge 1 = 1$;
- $\psi \notin S$, т. к. $\psi^*(x, y) = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = x \vee y \neq \psi(x, y)$;
- $\psi \in M$, можно убедиться, посмотрев на таблицу истинности;
- $\psi \notin L$, можно убедиться, построив полином Жегалкина:

$$\psi(x, y) = xyz.$$

2.27 Свойства замыкания

Свойство 1.

$$F \subset [F]$$

Свойство 2 (Идемпотентность).

$$[[F]] = [F]$$

Свойство 3 (Монотонность).

$$F_1 \subset F_2 \implies [F_1] \subset [F_2]$$

Свойство 4.

$$([F_1] \cup [F_2]) \subset [F_1 \cup F_2].$$

Класс (множество) функций F называется **замкнутым**, если $[F] = F$.

2.28 Полные системы функций

Класс функций F называется **полным**, если его замыкание совпадает с P_2:

$$[F] = P_2.$$

Другими словами, множество функции F образует полную систему, если любая булева функция реализуема в виде формулы над F.

Теорема. Пусть заданы две системы функций

$$F = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad G = \{g_1, \dots, g_k\}$$

Тогда, если система F полна и все функции из F реализуемы формулами над G, то система G также полна.

Пример. Система $\{\vee, \wedge, \neg\}$ полная, т. к. всякая булева функция (в силу того, что она имеет единственную СДНФ) может быть выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. Тогда

- система $\{\neg, \wedge\}$ полная, т. к.

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2};$$

- система $\{\neg, \vee\}$ полная, т. к.

$$x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2};$$

- система $\{|\}$ полная, т. к.

$$\bar{x} = x \mid x, \quad x_1 \wedge x_2 = \overline{x_1 \mid x_2} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2);$$

- система $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$ полная, т. к.

$$\bar{x} = x \oplus 1.$$

2.29 Полнота двойственной системы

Теорема. Если система $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ полна, то система $F^* = \{f_1^*, \dots, f_m^*\}$ также полна.

Пример. Система $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$ полна, следовательно, система $\{1, 0, \vee, \leftrightarrow\}$ также полна.

2.30 Теорема Поста

Теорема. Система булевых функций F полна тогда и только тогда, когда она содержит:

- хотя бы одну функцию, не сохраняющую ноль;
- хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу;
- хотя бы одну несамодвойственную функцию;
- хотя бы одну немонотонную функцию;
- хотя бы одну нелинейную функцию.

$$[F] = P_2 \iff \overline{F \subset T_0 \vee F \subset T_1 \vee F \subset S \vee F \subset M \vee F \subset L}.$$

Пример 1. Рассмотрим систему $\{\vee, \wedge, \neg\}$:

	T_0	T_1	S	M	L
$\bar{x}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x_1 \wedge x_2$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x_1 \vee x_2$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$

Так как в каждом столбике есть $-$, система $\{\vee, \wedge, \neg\}$ – полная. Также очевидно, что $\{\wedge, \neg\}$ и $\{\vee, \neg\}$ являются полными, а значит являются базисами для исходной системы.

Пример 2. Рассмотрим систему $\{|\}$:

x	y	$f(x, y) = x \mid y$	треугольник
0	0	1	1110

0	1	1	001
1	0	1	01
1	1	0	1

1. $f(0,0) = 1 \implies f \notin T_0$;
2. $f(1,1) = 0 \implies f \notin T_1$;
3. $f(0,1) = 1, f(1,0) = 1 \implies f \notin S$;
4. $(0,0) < (1,1), f(0,0) > f(1,1) \implies f \notin M$;
5. $f(x,y) = 1 \oplus xy \implies f \notin L$.

	T_0	T_1	S	M	L
$x \mid y$	–	–	–	–	–

Следовательно, система $\{|\}$ является полной по критерию Поста. Таким же образом можно доказать, что $\downarrow$ также является полной.

Замечание. Число шефферовых функций от n переменных равно

$$2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}.$$

2.31 Одноместный предикат

Одноместный предикат $P(x)$ – это функция переменной x, определенная на множестве M и принимающая значения на множестве $\{0,1\}$. Те значения переменной, на которых предикат принимает истинное значение, образуют **множество истинности предиката**. Так как предикаты принимают значения 0 и 1, то к ним применяются логические операции.

Пример. Пусть даны предикаты $P(x) =$ «x – четное число» и $Q(x) =$ «x кратно 3», определенные на множестве $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Необходимо найти область истинности предикатов:

1. $P(x) \wedge Q(x)$;
2. $P(x) \vee Q(x)$;
3. $\bar{P}(x)$;

4. $P(x) \to Q(x)$.

Решение:

1. $I_{P\wedge Q} = I_P \cap I_Q = \{6\}$;
2. $I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$;
3. $I_{\bar{P}} = \bar{I}_P = M \setminus I_P = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;
4. $I_{P\to Q} = \bar{I}_P \cup I_Q = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

2.32 n-местный предикат

n-местным предикатом называется функция n переменных $P(x_1, \dots, x_n)$, определенная на множестве $M = M_1 \times \dots \times M_n$ и принимающая на этом множестве одно из двух значений: истина или ложь:

$$P(x_1, \dots, x_n) : M_1 \times \dots \times M_n \to E_2.$$

2.33 Кванторные операции

Пусть $P(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве M. Квантор общности $\forall$ превращает предикат $P(x)$ в высказывание:

$$\forall P(x) = \text{«для любого элемента } x \text{ высказывание } P(x) \text{ истинно».}$$

Квантор существования $\exists$ превращает предикат $P(x)$ в высказывание

$$\exists P(x) = \text{«существует элемент } x \text{ такой, что высказывание } P(x) \text{ истинно».}$$

Операция приписывания к предикату квантора называется **навешиванием квантора**. Переменная, к которой относится квантор, связывается квантором и называется **связанной переменной**. Переменная, не связанная квантором, называется **свободной переменной**.

2.34 Алфавит логики предикатов

1. предметные константы p, q, r, ... (принимают значения 0 или 1);
2. предметные переменные x, y, z, ..., пробегающие значения некоторого множества M;
3. функциональные переменные f, g, h, ...;

4. предикатные переменные P, Q, R, ...;
5. символы логических операций $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$;
6. кванторные символы $\forall$, $\exists$;
7. запятая, скобки.

2.35 Формулы логики предикатов

Определим понятие **терма**:

1. Всякая предметная константа есть терм.
2. Всякая предметная переменная есть терм.
3. Если $t_1, \dots, t_n$ – термы, а f – функциональная переменная, то $f(t_1, \dots, t_n)$ – есть терм.

Определим понятие **формулы**:

1. Если $t_1, \dots, t_n$ – термы, $\{x_1, \dots, x_n\}$ – множество всех переменных в термах $t_1, \dots, t_n$, P – предикатная переменная, то $P(t_1, \dots, t_n)$ – элементарная формула со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$.
2. Если A – формула, то $\bar{A}$ – формула. Свободные переменные формулы A являются свободными переменными формулы $\bar{A}$.
3. Если A и B есть формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ тоже есть формулы. Их свободные переменные – это свободные переменные формул A и B.
4. Если $A(x)$ – формула с множеством свободных переменных $\{x, x_1, \dots, x_n\}$, то выражения $\exists x\ A(x)$ и $\forall x\ A(x)$ есть формулы. Переменные $x_1, \dots, x_n$ в этих формулах свободны, а переменная x связана квантором.

При построении новых формул надо внимательно следить за тем, чтобы предметные переменные, свободные в одной формуле, были свободными и в других формулах. Тогда эти переменные будут свободными и в построенной формуле.

Формула без свободных переменных называется **замкнутой**.

При построении формул в логике предикатов действуют те же правила опускания скобок, что и в исчислении высказываний. Кванторы имеют высший приоритет.

В формулах $\exists x\ A(x)$ и $\forall x\ A(x)$ формула $A(x)$ есть область действия квантора.

Пример.

- $\forall x\ P(x)$ является формулой;
- $\exists x\ (Q(x) \to P(x, y))$ является формулой;
- $\exists x\ P(x, y) \lor Q(x)$ не является формулой, т. к. нет скобочек.

2.36 Равносильные формулы

Две формулы логики предикатов называются **равносильными** на области M, если они принимают одинаковые значения для всех значений переменных из области M.

Равносильные формулы – это формулы, равносильные на любой области.

Пример 1.

$$\overline{\forall x\ A(x)} = \exists x\ \overline{A(x)}.$$

Пример 2.

$$\overline{\exists x\ A(x)} = \forall x\ \overline{A(x)}.$$

Пример 3.

$$C \land \forall x\ B(x) = \forall x\ (C \land B(x)).$$

Пример 4.

$$C \lor \forall x\ B(x) = \forall x\ (C \lor B(x)).$$

Пример 5.

$$C \land \exists x\ B(x) = \exists x\ (C \land B(x)).$$

Пример 6.

$$C \lor \exists x\ B(x) = \exists x\ (C \lor B(x)).$$

Пример 7.

$$\forall x\ A(x) \land \forall x\ B(x) = \forall x\ (A(x) \land B(x)).$$

Пример 8.

$$\exists x\ A(x) \lor \exists x\ B(x) = \exists x\ (A(x) \lor B(x)).$$

Пример 9.

$$\exists x\ A(x) \land \exists x\ B(x) = \exists x \exists y\ (A(x) \land B(y)).$$

Пример 10.

$$\forall x\ A(x) \lor \forall x\ B(x) = \forall x \forall y\ (A(x) \lor B(y))$$

2.37 Предваренная нормальная форма

Предваренная нормальная форма имеет следующий вид:

$$Q_1x_1 \dots Q_nx_n \; B(x_1, \dots, x_n),$$

где Q_i – один из кванторов, формула $B(x_1, \dots, x_n)$ не содержит кванторов.
Теорема. Любую формулу логики предикатов можно привести к предваренной нормальной форме.
Пример. Необходимо привести формулу

$$\overline{\forall x \; (P(x))} \vee \exists x \; (Q(x, y))$$

к предваренной нормальной форме:

$$\overline{\forall x \; (P(x))} \vee \exists x \; (Q(x, y)) = \exists x \; (\overline{P(x)}) \vee \exists x \; (Q(x, y)) =$$
$$= \exists x \; (\overline{P(x)} \vee Q(x, y)).$$

2.38 Общезначимость и выполнимость

Формула логики предикатов называется **выполнимой** в некоторой области M, если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к области M, при которых формула принимает истинное значение. Формула **выполнима**, если существует область, на которой выполнима эта формула.

Формула логики предикатов называется **тождественно истинной** в области M, если для всех значений переменных из области M формула принимает истинное значение. Формула, тождественно истинная в любой области, называется **общезначимой** (логическим законом).
Пример 1. Логический закон:

$$\forall x(P(x) \vee \overline{P(x)}).$$

Пример 2. Определить выполнимость формулы $\exists x \;\; (P(x))$. Пусть M – это множество натуральных чисел, причем

$$P(x) = \text{«}x\text{ – простое число».}$$

Тогда $\exists x \;\; (P(x))$ – это истинное высказывание, то есть формула $\exists x \;\; (P(x))$ выполнима.

2.39 Проблема разрешимости в логике предикатов

Проблема разрешимости в логике предикатов формулируется следующим образом. Существуют ли алгоритмы, позволяющие определить общезначимость, выполнимость или тождественную ложность любой формулы логики предикатов? Считается, что эта проблема алгоритмически не разрешима.

3 Комбинаторика

3.1 Комбинаторные задачи

Комбинаторные задачами называют задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор, то есть подсчет числа всевозможных комбинаций из элементов данного конечного множества при сделанных исходных предположениях.

Пример 1. У вас в темном чулане стоят банки с вареньем трех сортов: яблочное, сливовое и земляничное. Какое наименьшие количество банок вам надо взять, не глядя, чтобы среди них наверняка оказалось не менее девяти банок с вареньем одного сорта?

Самый худший случай: 8 банок подряд с одним сортом варенья, затем 8 банок подряд с другим сортом, затем 8 банок подряд с третьим сортом:

$$8 + 8 + 8 + 1 = 25.$$

Пример 2. Андрей, Борис, Виктор, Григорий и Дмитрий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым под одной партии. Сколько партий было сыграно?

Решение для случая $n = 5$:

$$4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10.$$

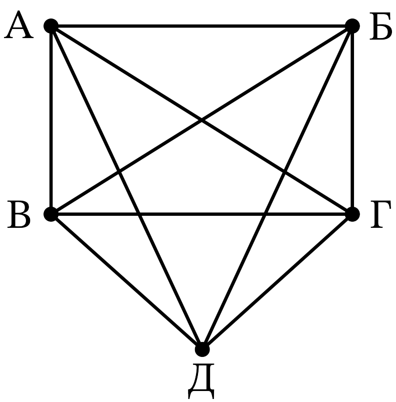


Рис. 3.1: Решение с помощью графа

Решение для случая n:

$$(n-1)+(n-2)+...+...+1+0=\frac{n-1+0}{2}n=\frac{n(n-1)}{2}.$$

3.2 Правила суммы и произведения

Если объект первого вида можно выбрать m способами, а объект второго вида – n способами, то

- один объект любого из этих видов можно выбрать $m+n$ способами (правило суммы);

- пару объектов, один из которых первого вида, а другой – второго вида, можно выбрать $m \cdot n$ способами (правило произведения).

Замечание. Правила суммы и произведения справедливы для любого конечного числа видов объектов.

Пример 1. В вазе лежит 5 яблок и 3 персика различных сортов. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

По правилу суммы $5+3=8$ вариантов.

Пример 2. Имеется 2 конверта: обычный и авиа, и 3 марки: прямоугольная, квадратная и треугольная. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку, чтобы отправить письмо?

По правилу произведения $2 \cdot 3 = 6$ вариантов.

Пример 3. Сколько трехзначных чисел можно составить из $1, 3, 5, 7$, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

По правилу произведения $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ числа.

Пример 4. Сколько трехзначных чисел можно составить из $1, 3, 5, 7$, используя в записи числа каждую из них любое число раз?

По правилу произведения $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ числа.

3.3 Схема выбора без возвращения

3.3.1 Перестановки

Пусть имеется множество из n элементов. Каждая последовательность всех его элементов называется **перестановкой** из n элементов. Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!.$$

Пример. Имеется 10 различных книг. Сколько существует способов расставить их на одной книжной полке?

Решение:

$$n = 10 \implies P_n = P_{10} = 10! = 3628800.$$

3.3.2 Размещения

Пусть имеется множество из n элементов. **Упорядоченными подмножествами** этого множества называют различные последовательности, составленные из элементов подмножеств.

Каждое упорядоченное подмножество из k элементов множества из n элементов называется **размещением** из n элементов по k элементам. Число всех размещений из n элементов по k элементам обозначается A_n^k (читается «A из n по k») и вычисляется по формуле:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример. В турнире участвуют 8 спортсменов. Сколько можно сделать предсказаний относительно распределения первых трех мест?

Решение:

$$n = 8, k = 3 \implies A_n^k = A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336.$$

Замечание. Размещение A_n^n из n элементов по n элементам является перестановкой P_n из n элементов.

3.3.3 Сочетания

Пусть имеется множество из n элементов. Каждое его подмножество из k элементов называется **сочетанием** из n элементов по k элементам. Таким образом, подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, не считаются различными. Число всех сочетаний из n элементов по k элементам обозначается C_n^k (читается «C из n по k») и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример. В группе 25 студентов. Надо выбрать трех человек, которые будут представлять группу на студенческой конференции. Сколькими способами можно осуществить этот выбор?

Решение:

$$n = 25, k = 3 \implies C_n^k = C_{25}^3 = \frac{25!}{3!(25-3)!} = 2300.$$

3.4 Схема выбора с возвращением (с повторениями)

3.4.1 Перестановки с повторениями

Пусть имеется мультимножество из n элементов k различных видов такое, что оно состоит из n_1 элементов 1-го вида, n_2 элементов 2-го вида, ..., n_k элементов k-го вида, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Перестановки всех элементов такого мультимножества называются **перестановками с повторениями**.

Теорема. Число различных перестановок с повторениями равно

$$P(n, n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Пример. Определить, сколько различных слов можно составить из слова «математика».

В слове «математика» имеется 6 видов букв:

букв «м» $n_1 = 2$, букв «а» $n_2 = 3$, букв «т» $n_3 = 2$,

букв «е» $n_4 = 1$, букв «и» $n_5 = 1$, букв «к» $n_6 = 1$.

Всего $n = 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$ букв. Тогда из слова «математика» можно составить

$$P(n, n_1, \ldots, n_6) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_6!} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

различных слов.

3.4.2 Размещения с повторениями

Пусть имеется множество из n элементов. Каждый кортеж длины k, составленный из элементов данного n-элементного множества (элементы кортежа не обязательно должны быть различными), называется **размещением** из n элементов по k элементам **с повторениями**.

Теорема. Число всех размещений из n элементов по k элементам с повторениями равно:

$$\bar{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k.$$

Пример. Сколько пятизначных номеров можно составить из элементов множества $\{1, 2, 3\}$?

Решение:

$$n = 3, k = 5 \implies \bar{A}_n^k = \bar{A}_3^5 = 3^5 = 243.$$

3.4.3 Сочетания с повторениями

Пусть имеются элементы n различных видов. Из них составляется комбинация из k элементов такая, что порядок элементов в комбинации не важен, причем элементы одного вида могут повторяться. Такая комбинация называется **сочетанием с повторениями** из n элементов по k элементам.

Теорема. Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по k элементам равно

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Пример. В почтовом отделении продаются открытки пяти видов. Определить число способов покупки семи открыток.

Решение:

$$n = 5, k = 7 \implies \bar{C}_n^k = \bar{C}_5^7 = C_{5+7-1}^7 = C_{11}^7 = 330.$$

3.5 Бином Ньютона

Для произвольного положительного целого числа n справедлива следующая формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^{n-0} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Коэффициенты C_n^k называются **биномиальными коэффициентами** и вычисляются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример. Определить разложение $(a+b)^n$ при $n=4$.

Решение:

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^{4-0} b^0 + C_4^1 a^{4-1} b^1 + C_4^2 a^{4-2} b^2 + C_4^3 a^{4-3} b^3 + C_4^4 a^{4-4} b^4 =$$
$$= \frac{4!}{0!\cdot(4-0)!} a^4 + \frac{4!}{1!\cdot(4-1)!} a^3 b + \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} a^2 b^2 + \frac{4!}{3!\cdot(4-3)!} ab^3 +$$
$$+ \frac{4!}{4!\cdot(4-4)!} b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

3.6 Свойства биномиальных коэффициентов

Свойство 1.

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Доказательство.

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k!))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 2.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Доказательство.

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n-k+k}{k(n-k)} =$$
$$= \frac{(n-1)!n}{(k-1)!k(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 3.

$$C_n^i \cdot C_i^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{i-k}.$$

Свойство 4.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Доказательство.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 5.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

Свойство 6.

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}.$$

Свойство 7 (тождество Коши)**.**

$$C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}$$

3.7 Треугольник Паскаля

Рассмотрим следующий треугольник:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Первая строка, состоящая из одного элемента, считается нулевой. Строка под номером n содержит биномиальные коэффициенты разложения $(a+b)^n$, то есть C_n^k, где k пробегает значения от 0 до n.

Элемент нулевой строки и боковые элементы треугольника равны единицам, а каждый внутренний элемент треугольника согласно свойству

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

равен сумме двух элементов, расположенных над ним. Таким образом, будем иметь:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & \\
 & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Пример 1. Используя треугольник Паскаля, найти $C_5^2 + C_7^4 + C_9^6$.

Решение:

$$C_5^2 + C_7^4 + C_9^6 = 10 + 35 + 84 = 129.$$

Пример 2. Используя треугольник Паскаля, представить $(a+b)^7$ в виде многочлена:

Решение:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

3.8 Полиномиальная формула

Формула, обобщающая формулу бинома Ньютона, называется **полиномиальной**.

Теорема. Для любых натуральных чисел n и k и любых чисел $a_1, \ldots, a_k$ справедлива формула

$$(a_1 + \ldots + a_k)^n = \sum_{n_1 + \ldots + n_k = n} C(n, n_1, \ldots, n_k) \cdot a_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{n_k},$$

где суммирование производится по всем решениям уравнения

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

в неотрицательных целых числах.

Коэффициенты данного разложения $C(n, n_1, \ldots, n_k)$ называются **мультиномиальными коэффициентами** и вычисляются по формуле

$$C(n, n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Они совпадают с числом различных перестановок с повторениями:

$$P(n, n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Пример 1. Найти разложение степени $(a + b + c)^3$.

Сначала определим число слагаемых в разложении:

$$\bar{C}_3^3 = C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

$$(a + b + c)^3 = \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = 3} C(3, n_1, n_2, n_3) a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3},$$

где

$$C(3, n_1, n_2, n_3) = \frac{3!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}.$$

Возможно 10 решений уравнения $n_1 + n_2 + n_3 = 3$ в целых числах:

1. $n_1 = 3, n_2 = 0, n_3 = 0$;
2. $n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 0$;
3. $n_1 = 2, n_2 = 0, n_3 = 1$;
4. $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 0$;
5. $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1$;
6. $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 2$;
7. $n_1 = 0, n_2 = 3, n_3 = 0$;
8. $n_1 = 0, n_2 = 2, n_3 = 1$;
9. $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 2$;
10. $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 3$.

$$(a + b + c)^3 = \frac{3!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} a^3 b^0 c^0 + \frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot 0!} a^2 b^1 c^0 + \frac{3!}{2! \cdot 0! \cdot 1!} a^2 b^0 c^1 +$$
$$+ \frac{3!}{1! \cdot 2! \cdot 0!} a^1 b^2 c^0 + \frac{3!}{1! \cdot 0! \cdot 2!} a^1 b^0 c^2 + \frac{3!}{0! \cdot 2! \cdot 1!} a^0 b^2 c^1 + \frac{3!}{0! \cdot 1! \cdot 2!} a^0 b^1 c^2 +$$
$$+ \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} a^1 b^1 c^1 + \frac{3!}{0! \cdot 3! \cdot 0!} a^0 b^3 c^0 + \frac{3!}{0! \cdot 0! \cdot 3!} a^0 b^0 c^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2 b + 3a^2 c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2 c + 3bc^2 + 6abc + b^3 + c^3.$$

Пример 2. В разложении многочлена $(1+2x^2-3x^4)^{10}$ найти коэффициент при x^8.

$$(1+2x^2-3x^4)^{10} = \sum_{n_1+n_2+n_3=10} \frac{10!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(1)^{n_1}\cdot(2x^2)^{n_2}\cdot(-3x^4)^{n_3} =$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=10} = \frac{10!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(2)^{n_2}\cdot(-3)^{n_3}\cdot x^{2n_2+4n_3}.$$

$$\begin{cases} n_1+n_2+n_3=10 \\ 2n_2+4n_3=8. \end{cases}$$

1. $n_1=8, n_2=0, n_3=2;$
2. $n_1=7, n_2=2, n_3=1;$
3. $n_1=6, n_2=4, n_3=0.$

Коэффициент при x^8 вычисляется по формуле:

$$\frac{10!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(2)^{n_2}\cdot(-3)^{n_3}.$$

1. $n_1=8, n_2=0, n_3=2$:

$$\frac{10!}{8!\cdot 0!\cdot 2!}\cdot 2^0\cdot(-3)^2 = 405;$$

2. $n_1=7, n_2=2, n_3=1$:

$$\frac{10!}{7!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot 2^2\cdot(-3)^1 = -4320;$$

3. $n_1=6, n_2=4, n_3=0.$

$$\frac{10!}{6!\cdot 4!\cdot 0!}\cdot 2^4\cdot(-3)^0 = 3360.$$

Таким образом, коэффициент при x^8 будет равен:

$$405-4320+3360=-555.$$

3.9 Схема упорядоченных разбиений

Пусть имеется n различных шаров и k различных урн. Требуется разложить шары по урнам так, чтобы в i-й находилось m_i шаров, $i = \overline{1,k}$, причем

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

$$C(n, m_1, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_k!}.$$

Пример 1. Известно, что принимая экзамен в группе из 20 человек, преподаватель поставил 4 «пятерки», 8 «четверок», 5 «троек» и 3 «двойки». Сколько существует различных вариантов сдачи экзамена группой?

Решение:

$$C(20, 4, 8, 5, 3) = \frac{20!}{4! \cdot 8! \cdot 5! \cdot 3!} = 3491888400.$$

3.10 Формула включений и исключений

Формула, известная как **формула включений и исключений** позволяет вычислить мощность объединения множеств, если известны их мощности и мощности всех возможных пересечений.

Теорема. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – конечные множества. Тогда

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i_1 \le n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| +$$
$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Рассмотрим случай при $n = 2$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Рассмотрим случай при $n = 3$:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Рассмотрим случай при $n = 4$:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| -$$
$$- |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| +$$
$$+ |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|.$$

Пример 1. Сколько натуральных чисел в первой сотне, которые не делятся ни на 2, ни на 5, ни на 7?

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 100 \ \wedge \ x \vdots 2\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 100 \ \wedge \ x \vdots 5\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 100 \ \wedge \ x \vdots 7\}.$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$
$$\overline{|A \cup B \cup C|} = |U| - |A \cup B \cup C|.$$

$$|A| = \left[\frac{100}{2}\right] = 50, \quad |B| = \left[\frac{100}{5}\right] = 20, \quad |C| = \left[\frac{100}{7}\right] = 14,$$
$$|A \cap B| = \left[\frac{100}{\text{НОК}(2,5)}\right] = \left[\frac{100}{2 \cdot 5}\right] = 10,$$
$$|A \cap C| = \left[\frac{100}{\text{НОК}(2,7)}\right] = \left[\frac{100}{2 \cdot 7}\right] = 7,$$
$$|B \cap C| = \left[\frac{100}{\text{НОК}(5,7)}\right] = \left[\frac{100}{5 \cdot 7}\right] = 2,$$
$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{100}{\text{НОК}(2,5,7)}\right] = \left[\frac{100}{2 \cdot 5 \cdot 7}\right] = 1.$$
$$|A \cup B \cup C| = 50 + 20 + 14 - 10 - 7 - 2 + 1 = 66.$$
$$\overline{|A \cup B \cup C|} = 100 - 66 = 34.$$

Ответ: 34.

Пример 2. Человек хочет послать своему другу 8 различных фотографий. Сколькими способами он может это сделать, использовав 5 различных конвертов, если ни один конверт не должен быть пустым?

Решение:

$$5^8 - C_5^1 \cdot 4^8 + C_5^2 \cdot 3^8 - C_5^3 \cdot 2^8 + C_5^4 \cdot 1^8 = 126000.$$

Пример 3. Сколькими способами можно положить n различных предметов в m различных ящиков так, чтобы в каждом ящике лежал хотя бы один предмет?

Решение:

$$m^n - C_m^1(m-1)^n + C_m^2(m-2)^n - ... + (-1)^{m-1}C_m^{m-1} \cdot 1^n.$$

Пример 4. Сколькими способами можно положить n различных предметов в m **неразличимых** ящиков так, чтобы в каждом ящике лежат хотя бы один предмет?

Решение:

$$\frac{1}{m!}\Big(m^n - C_m^1(m-1)^n + C_m^2(m-2)^n - ... + (-1)^{m-1}C_m^{m-1}\cdot 1^n\Big).$$

Полученная формула также называется **числом Стирлинга второго рода**.

3.11 Задача о беспорядках

Беспорядком называют перестановку n различных элементов, в которой ни один предмет не останется на своем первоначальном месте. Количество всех беспорядков обозначается $D(n)$ и вычисляется по формуле:

$$D(n) = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - ... + (-1)^n C_n^n(n-n)!.$$

Учитывая, что

$$C_n^k \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

формулу можно записать следующим образом:

$$D(n) = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - ... + (-1)^n\frac{n!}{n!} = n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n\frac{1}{n!}\Big).$$

Количество перестановок n различных предметов, при которых k предметов стоят на своих первоначальных местах, выражается числом

$$D(n,k) = C_n^k \cdot D(n-k).$$

3.12 Разбиения

Пусть $\{B_1, ... , B_k\}$ – **разбиение** множества X из n элементов на k подмножеств:

$$B_i \subset X, \quad \bigcup_{i-1}^{k} B_i = X, \quad B_i \neq \varnothing, \quad B_i \cap B_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

Подмножества B_i называются **блоками разбиения**.

3.13 Число Стирлинга второго рода

Число разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств (блоков) называется **числом Стирлинга второго рода** и обозначается $S(n,k)$ или $\left\{ n \atop k \right\}$ (читается «k подмножеств из n»). По определению полагают:

$$S(n,n)=1, \quad S(n,0)=0 \text{ при } n>0,$$
$$S(0,0)=1, \quad S(n,k)=0 \text{ при } k>n.$$

Рекуррентная формула:

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k) \text{ для } 0<k<n.$$

Явная формула:

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+i}C_k^i\cdot i^n.$$

Число размещений n предметов по k ящикам так, чтобы все ящики были заняты, вычисляется по формуле

$$k!\cdot S(n,k).$$

Пример 1. Найти число разбиений четырехэлементного множества на две части. Пусть таким четырехэлементным множеством будет множество $\{1,2,3,4\}$. Тогда получим следующие разбиения:

$$\{1,2,3\}\cup\{4\}, \quad \{1,2,4\}\cup\{3\}, \quad \{1,3,4\}\cup\{2\}, \quad \{2,3,4\}\cup\{1\},$$
$$\{1,2\}\cup\{3,4\}, \quad \{1,3\}\cup\{2,4\}, \quad \{1,4\}\cup\{2,3\}.$$

Итого получаем, что $S(4,2)=7$. Получим тот же результат с помощью формулы:

$$S(4,2)=\frac{1}{2!}\Big((-1)^2C_2^0 0^4+(-1)^3C_2^1 1^4+(-1)^4C_2^2 2^4\Big)=\frac{14}{2}=7.$$

Пример 2. Найти число разбиений пятиэлементного множества на три части.

Решение:

$$S(5,3)=\frac{1}{3!}\Big((-1)^3C_3^0 0^5+(-1)^4C_3^1 1^5+(-1)^5C_3^2 2^5+(-1)^6C_3^3 3^5\Big)=$$
$$=\frac{150}{6}=25.$$

3.14 Число Белла

Число всех разбиений множества из n элементов называется **числом Белла** и обозначается $B(n)$:

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k), \qquad B(0) = 1.$$

Теорема. Числа Белла удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B(k).$$

Пример 1. Найти число всех возможных разбиений трехэлементного множества.

Решение с помощью числа Белла:

$$B(3) = \sum_{k=1}^{3} S(3,k) = S(3,1) + S(3,2) + S(3,3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2!}\Big((-1)^2 C_2^0 0^3 + (-1)^3 C_2^1 1^3 + (-1)^4 C_2^2 2^3\Big) + 1 = 1 + \frac{6}{2} + 1 = 5.$$

Это легко проверить на примере множества $\{a,b,c\}$:

$$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}, \quad \{\{a,b\},\{c\}\}, \quad \{\{a,c\},\{b\}\},$$
$$\{\{a\},\{b,c\}\}, \quad \{\{a,b,c\}\}.$$

Пример 2. Найти $B(4)$, используя рекуррентное соотношение.

Решение:

$$B(4) = \sum_{k=0}^{3} C_3^k B(k) = C_3^0 B(0) + C_3^1 B(1) + C_3^2 B(2) + C_3^3 B(3) =$$
$$= 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 5 = 15.$$

3.15 Треугольник Белла

Принцип построения треугольника Белла:

- первая строка содержит 1;
- каждая следующая строка начинается числом, стоящим в конце предыдущей строки;

- каждое следующее число в строке равно сумме чисел, стоящих слева и сверху от него;
- числа Белла образуют последние числа в строках.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \qquad 2 \\
2 \qquad 3 \qquad 5 \\
5 \qquad 7 \qquad 10 \qquad 15 \\
15 \qquad 20 \qquad 27 \qquad 37 \qquad 52 \\
52 \qquad 67 \qquad 87 \qquad 114 \qquad 151 \qquad 203 \\
203 \qquad 255 \qquad 322 \qquad 409 \qquad 523 \qquad 674 \qquad 877 \\
877 \qquad 1080 \qquad 1335 \qquad 1657 \qquad 2066 \qquad 2589 \qquad 3263 \qquad 4140 \\
\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots
\end{array}
$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$B(n)$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140

3.16 Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи $F(n)$ определяются следующим образом:

$$F(0) = 1, \quad F(1) = 1, \quad \forall n \ \geq 0 \ F(n+2) = F(n+1) + F(n).$$

Последовательность Фибоначчи имеет вид:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots .$$

$F(n+2) - F(n+1) - F(n) = 0$ представляет собой линейное однородное разностное уравнение второго порядка, его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Положительный корень этого уравнения обозначается греческой буквой Ф (фи):

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

и называется «Золотым сечением».

Золотое сечение – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей (отношение меньшей части к большей равно отношению большей части к длине всего отрезка)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \Phi.$$

Формула для вычисления чисел Фибоначчи имеет вид:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

3.17 Числа Каталана

Числа Каталана используются при решении различных комбинаторных задач, обозначаются $C(n)$ и определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$C(0) = 1, \qquad C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k)\cdot C(n-k-1).$$

Числа Каталана выражаются через биномиальные коэффициенты:

$$C(n) = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$$

Числа Каталана встречаются в большом количестве задач комбинаторики. Так, например, n-е число Каталана – это:

- количество корректных скобочных последовательностей, состоящих из n открывающих и n закрывающих скобок;
- количество корневых бинарных деревьев с $n+1$ листьями (вершины не пронумерованы);
- количество триангуляций выпуклого $n+2$-угольника;
- количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимся хордами.

4 Графы

4.1 Основные определения

Граф представляет собой множество V вершин и набор X неупорядоченных и упорядоченных пар вершин. Неупорядоченная пара вершин называется **ребром**, упорядоченная пара — **дугой**.

Граф, содержащий только ребра, называется **неориентированным** и обозначается $G = (V, X)$. Граф, содержащий только дуги, называется **ориентированным** (или **орграфом**) и обозначается $D = (V, X)$.

Говорят, что ребро $\{u, v\}$ соединяет вершины u и v, дуга (u, v) начинается в вершине u и кончается в вершине v.

Вершины, соединенные ребром или дугой, называются **смежными**. Ребра, имеющие общую вершину, также называются **смежными**. Ребро (дуга) и любая из его двух вершин называются **инцидентными**.

Пара вершин может соединяться двумя или более ребрами (дугами одного направления), такие ребра (дуги) называются **кратными** (параллельными).

Дуга (ребро) может начинаться и кончаться в одной и той же вершине, такая дуга (ребро) называется **петлей**.

Граф называется **простым**, если он не содержит петель и параллельных ребер. В **мультиграфе** могут быть кратные ребра. В **псевдографе** допускаются петли и кратные ребра.

4.2 Порядок графа

Граф G является графом порядка n, если множество его вершин V состоит из n элементов: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

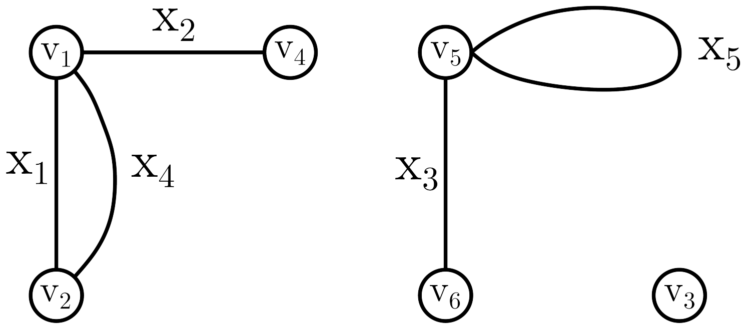
Граф с n вершинами и m ребрами называют (n, m)-графом. Граф, не имеющий ребер, называется **пустым**. Граф $(1, 0)$ называется **тривиальным**. Граф, не имеющий вершин, называется **нуль-графом**.

4.3 Наглядное представление графа

Каждый граф можно представить в евклидовом пространстве множеством точек, соответствующих вершинам, которые соединены линиями, соответствующими ребрам (или дугам, если у них указаны направления). Таким образом, граф можно изобразить рисунком, который наглядно изображает некоторую ситуацию.

Пример. Задан граф G, состоящий из вершин v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 и ребер x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6:

$$x_1 = (v_1, v_2), \quad x_2 = (v_1, v_4), \quad x_3 = (v_5, v_6),$$
$$x_4 = (v_1, v_2), \quad x_5 = (v_5, v_5).$$



Проанализировав граф, имеем:

- x_1 и x_4 — кратные ребра;
- x_5 — петля;
- x_1 и x_2 — смежные ребра;
- x_1 инцидентно v_1 и v_2;
- v_1 и v_4 — смежные ребра.

4.4 Валентность

Число инцидентных вершине v_i ребер называется **степенью вершины** (валентностью) и обозначается d_i или $\deg v_i$. При этом:

- вершина степени 0 называется **изолированной**;
- вершина степени 1 называется **висячей** (концевой);
- петля добавляет 2 в степень вершины.

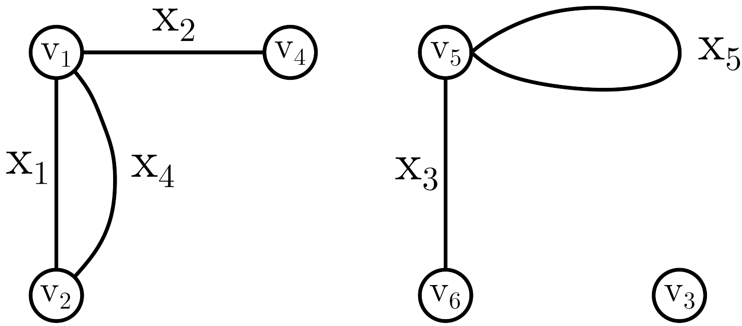
Теорема. Сумма степеней вершин графа G всегда равна $2m$, где m — число ребер графа G:

$$\sum d_i = 2m.$$

В любом графе число вершин с нечетными степенями четно.

Пример. Задан граф G, состоящий из вершин v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 и ребер x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6:

$$x_1 = (v_1, v_2), \quad x_2 = (v_1, v_4), \quad x_3 = (v_5, v_6),$$
$$x_4 = (v_1, v_2), \quad x_5 = (v_5, v_6).$$



Проанализировав граф, имеем:

$$d_1 = 3, \quad d_2 = 2, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 1, \quad d_5 = 3, \quad d_6 = 1.$$

$$\sum_{i=1}^{6} d_i = 10, \quad m = 5 \text{ (число ребер)}.$$

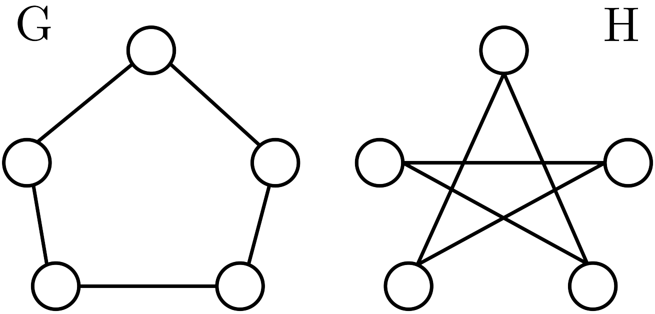
Таким образом:

- v_3 — изолированная вершина;
- v_4 и v_5 — висячие вершины.

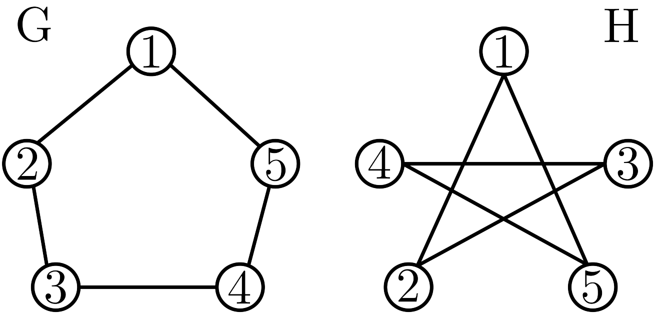
4.5 Изоморфизм графов

Два графа $G = (V, X)$ и $H = (W, Y)$ называют **изоморфными**, если между их множествами вершин V и W существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность. Изоморфизм есть отношение эквивалентности на графах. Из определения следует, что изоморфные графы отличаются лишь обозначением вершин.

Пример. Графы G и H, изображенные на рисунке, изоморфны.



Для того, чтобы доказать их изоморфность, достаточно пометить их вершины в соответствующем порядке:



4.6 Элементы графов

Инвариант графа G — это число, связанное с G, которое принимает одно и то же значение на любом графе, изоморфном G. Числа n (число вершин графа) и m (число ребер) являются инвариантами графа.

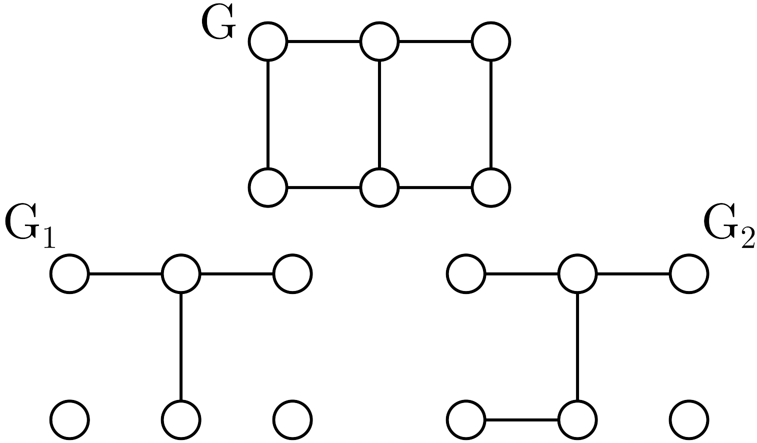
Полный набор инвариантов определяет граф с точностью до изоморфизма. Например, числа n и m образуют полный набор инвариантов для всех графов с $n < 4$.

Подграфом $G_0 = (V_0, X_0)$ графа $G = (V, X)$ называется граф, у которого все вершины и ребра (дуги) принадлежат $G : V_0 \subset V, X_0 \subset X$, каждое из ребер

x_i инцидентно только вершинам из V. Если G_0 — подграф, то G — **надграф** графа G_0.

Остовной подграф — это подграф G, содержащий все его вершины.

Пример. На рисунке представлены графы G, G_1 и G_2, причем G_1 и G_2 являются подграфами G.



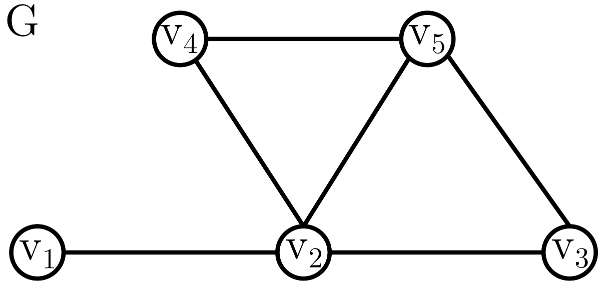
4.7 Маршруты

Последовательность ребер $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{i-1}, v_i), \dots, (v_{r-1}, v_r)$ называется **маршрутом**, соединяющим вершины v_0 и v_r. Указанный маршрут можно обозначать также последовательностью вершин $v_0, v_1, \dots, v_r$.

Маршрут **замкнут**, если $v_0 = v_r$, и **открыт** в противоположном случае. Маршрут называется **цепью**, если все его ребра различны, и **простой цепью**, если его вершины различны.

Замкнутая (простая) цепь называется (простым) **циклом**. В случае орграфа вместо слова «цепь» используются «путь», а слово «цикл» заменяют на слово **«контур»**.

Пример. Рассмотрим следующий граф:



В данном случае

- v_1-v_2-v_5-v_2-v_3 — маршрут, который не является цепью;
- v_1-v_2-v_5-v_4-v_2-v_3 — цепь, которая не является простой;
- v_1-v_2-v_5-v_4 — простая цепь;
- v_2-v_4-v_5-v_2 — простой цикл.

4.8 Связность

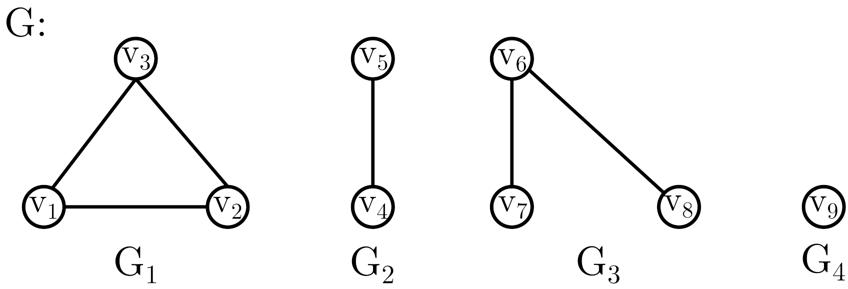
Граф называется **связным**, если любая пара его вершин соединена маршрутом. **Компонентой связности** называется максимальный связный подграф графа G. Изолированную вершину также следует рассматривать как компоненту связности.

Несвязный граф имеет, по крайней мере, две компоненты связности. Если граф G связен, то он имеет только одну компоненту, которая является подграфом G.

Число компонент связности графа G обозначается $k(G)$. Граф G связен тогда и только тогда, когда $k(G) = 1$.

Граф называется **вполне несвязным**, если он состоит только из изолированных вершин. Граф называется ***K*-связным**, если удаление не менее K вершин (ребер) приводит к потере свойства связности. Связный граф с наименьшим числом ребер (или связный граф без циклов) называется **деревом**.

Пример. Рассмотрим следующий граф:



Граф G не связен и имеет 4 компоненты: G_1, G_2, G_3 и G_4.

4.9 Длина маршрута

Длина маршрута (цепи, простой цепи) равна количеству ребер в порядке их прохождения (каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречается в данном маршруте).

Длина кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины v_i и v_j в графе G, называется **расстоянием** между v_i и v_j и обозначается $d(v_i, v_j)$. Если вершины v_i и v_j не соединены, то полагают $d(v_i, v_j) = \infty$.

В связном неориентированном графе расстояние удовлетворяет аксиомам метрики. Так, для любых трех вершин u, v и w

1. $d(u, v) \geq 0$ и $d(u, v) = 0 \iff u = v$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$;
3. $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

4.10 Метрические характеристики графа

Эксцентриситетом вершины v в связном графе G называется максимальное расстояние от вершины v до других вершин графа G:

$$e(v) = \max_{u \in V} d(u, v).$$

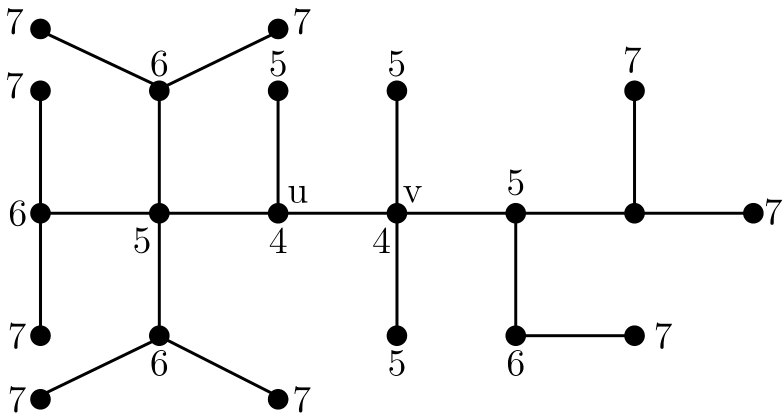
Радиусом графа называется наименьший из эксцентриситетов вершин и обозначается $R(G)$. **Диаметром** графа называется наибольший из эксцентриситетов вершин и обозначается $D(G)$.

Вершина v называется **центральной вершиной** графа G, если выполняется равенство $e(v) = R(G)$. **Центр графа** — это множество всех центральных

вершин:
$$C(G) = \{v \in V \mid e(v) = R(G)\}.$$

Теорема. Каждое дерево имеет центр, состоящий или из одной вершины, или из двух смежных вершин.

Пример. Вершины и их эксцентриситеты:



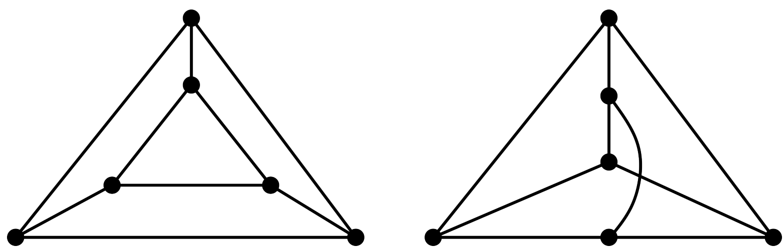
В данном случае
$$D(G) = 7, \qquad R(G) = 4, \qquad C(G) = \{u, v\}.$$

4.11 Однородные графы

Если все вершины имеют одинаковую степень r, то такой граф G называется **регулярным** (или однородным) степени r. В этом случае говорят о степени графа и пишут $\deg G = r$.

Регулярные графы степени 3 называются **кубическими**. Каждый кубический граф имеет четное число вершин.

Пример. Кубические графы с шестью вершинами:



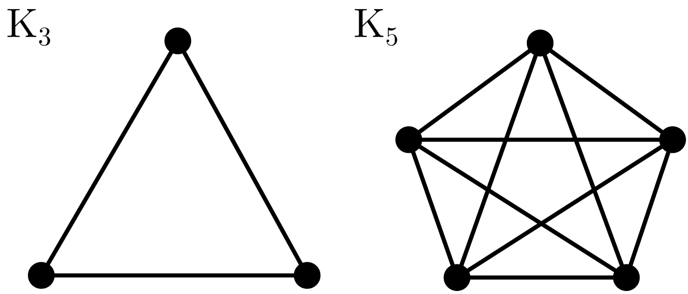
4.12 Полные графы

Граф, в котором любые две вершины смежны, называется **полным**. Полный граф с n вершинами обозначается K_n. Он имеем максимальное число ребер равное

$$m = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

и является регулярным степени $n-1$. Полный подграф некоторого графа называют **кликой** этого графа.

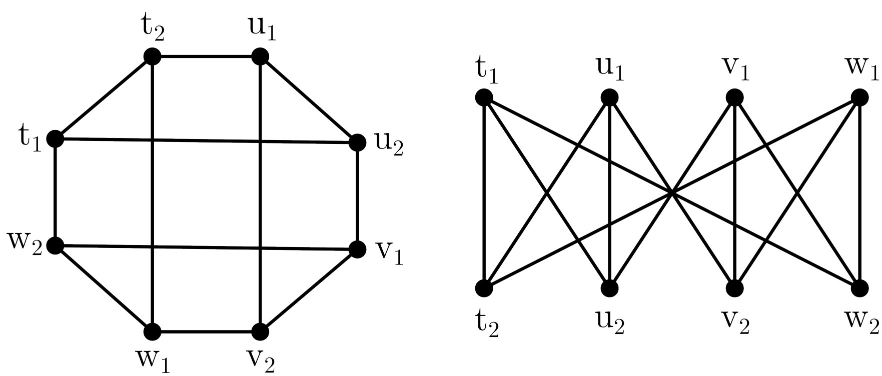
Пример. Полные графы K_3 и K_5:



4.13 Двудольные графы

Двудольный граф G — это граф, множество вершин V которого можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 таким образом, что каждое ребро графа G соединяет вершины из разных множеств.

Пример. Один и тот же двудольный граф, представленный по разному:



Если граф G содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2, то этот граф называется **полным двудольным**. Если при этом в множестве V_1 имеется m вершин, а в V_2 имеется n вершин, то граф обозначают $K_{m,n}$. **Звездой** называется полный двудольный граф $K_{1,n}$.

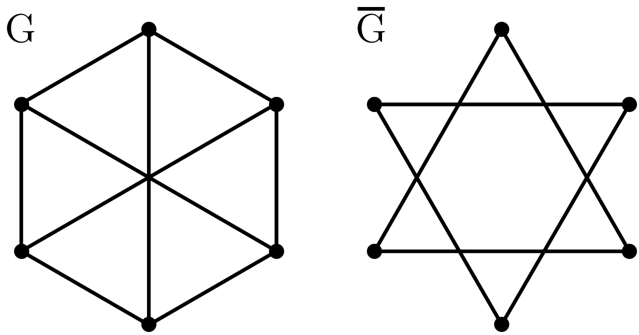
Теорема (Кенига)**.** Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечетной длины.

Следствие. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не имеет простых циклов нечетной длины.

4.14 Самодополнительные графы

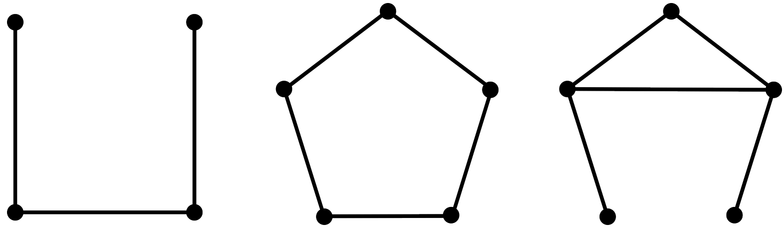
Дополнение $\bar{G}$ графа G имеет в качестве множества вершин множество вершин графа G. При этом две вершины $\bar{G}$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G. Графы $\bar{K}_n$ являются вполне несвязными (или регулярными степени 0).

Пример. Граф G и его дополнение $\bar{G}$:



Самодополнительный граф — это граф, изоморфный своему дополнению.

Пример. Следующие графы являются самодополнительными:



4.15 Матричные представления графов

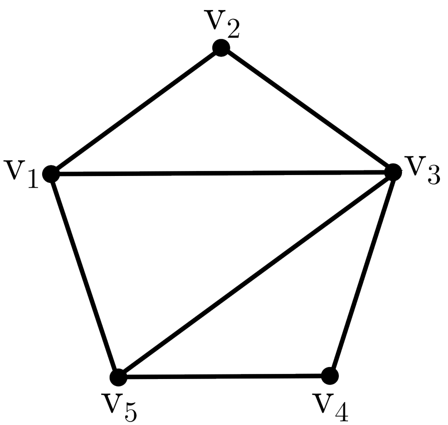
Для задания графа необходимо указать два множества: V (множество вершин) и X (множество ребер или дуг). Существуют различные способы задания графов. Для алгебраического задания удобно использовать матричный способ. Выбор вида матрицы определяется конкретной задачей.

4.15.1 Матрица смежности неориентированного графа

Пусть мы имеем граф G с вершинами $v_1, \dots, v_n$ и ребрами $x_1, \dots, x_m$. **Матрица смежности** неориентированного простого графа G — это квадратная матрица $A(G)$ порядка n (n — число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром (смежные);} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица смежности $A(G)$ определяет граф G с точностью до изоморфизма, а также является симметричной матрицей с нулями по главной диагонали. Сумма элементов по строкам матрицы $A(G)$ равна степеням вершин графа G.
Пример. Рассмотрим следующий граф:



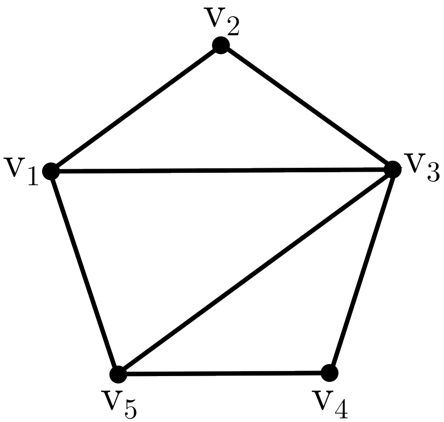
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили, что $a_{12} = 1$, поскольку в графе G есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_2, и $a_{42} = 0$, поскольку в графе G нет ребра, соединяющего вершины v_4 и v_2 и так далее.

4.16 Число маршрутов длины n

Если A — матрица смежности графа G, то элемент матрицы A^n, стоящий в i-й строке и j-м столбце, будет равен **числу маршрутов** длины n из вершины v_i в вершину v_j.

Пример. Рассмотрим следующий граф:



$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Существует 2 маршрута длины 2 из вершины v_2 в вершину v_5:

1. v_2-v_1-v_5;
2. v_2-v_3-v_5.

Существует 7 маршрутов длины 3 из вершины v_5 в вершину v_3:

1. v_5-v_1-v_2-v_3;
2. v_5-v_1-v_5-v_3;
3. v_5-v_4-v_5-v_3;
4. v_5-v_3-v_5-v_3;
5. v_5-v_3-v_1-v_3;
6. v_5-v_3-v_2-v_3;
7. v_5-v_3-v_4-v_3.

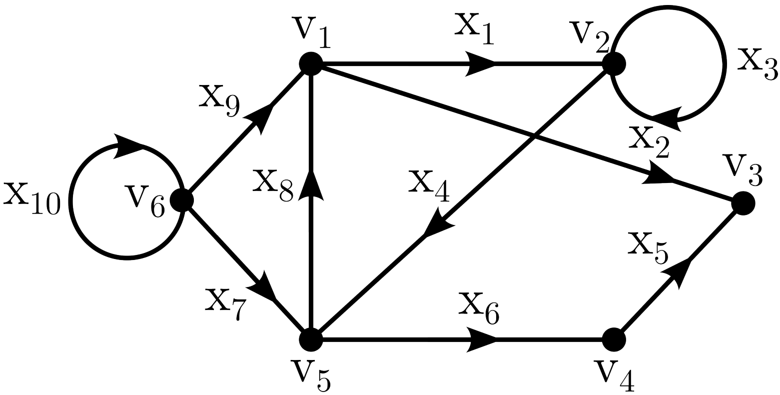
4.17 Матрица смежности ориентированного графа

Матрицей смежности орграфа D называется квадратная матрица $A(D)$ порядка n (n — число вершин) с элементами:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если в орграфе } D \text{есть дуга из} i - \text{й вершины в } j - \text{ювершину;} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица смежности орграфа в общем случае не будет симметричной.

Пример. Рассмотрим следующий граф:



$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

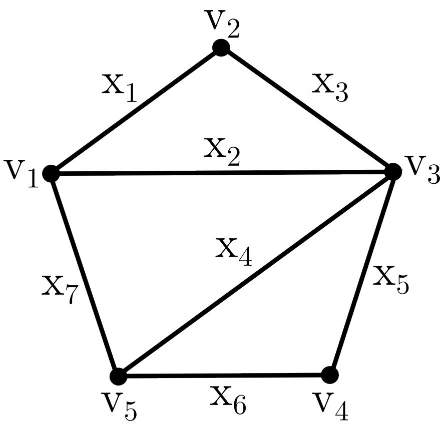
Сумма всех элементов i-й строки равна числу дуг, выходящий из вершины v_i. Сумма всех элементов j-го столбца равен числу дуг, направленных в вершину v_j. Если A — матрица смежности орграфа D, то элемент матрицы A^n, стоящий в i-й строке и j-м столбце, будет равен числу путей (не обязательно оргцепей и простых оргцепей) длины n, идущих из вершины v_i в вершину v_j.

4.18 Матрица инцидентности неориентированного графа

Матрицей инцидентности графа G называется матрица размера $n \times m$ такая, что $B(G) = (b_{ij})$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } x_j, \\ 0, \text{в противом случае.} \end{cases}$$

Матрица $B(G)$ определяет граф G с точностью до изоморфизма.
Пример. Рассмотрим следующий граф:



$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.19 Ациклический граф

Граф называется **ациклическим**, если в нем нет циклов. **Дерево** — это связный ациклический граф. В любом нетривиальном дереве имеется по крайней мере две висячие вершины.

Каждый граф, не содержащий циклов, называется **лесом**. Компонентами леса являются деревья.

4.20 Деревья

Граф $G = (V, E)$ называется **деревом**, если он связен и ацикличен (то есть не содержит циклов).

Пусть $G = (V, E)$ — граф с n вершинами и m ребрами. Тогда следующие условия будут необходимыми и достаточными, чтобы граф G являлся деревом:

- любая пара вершин в G соединена единственным путем;

- G связен и $m = n - 1$;
- G связен, а удаление хотя бы одного его ребра нарушает связность графа;
- G ацикличен, но если добавить хотя бы одно ребро, то в G появится цикл.

4.21 Дерево с корнем

Деревом с корнем называется дерево с одной выделенной вершиной. Эта выделанная вершина и является **корнем** дерева. Вершины дерева, лежащие непосредственно под данной, называются **сыновьями**. С другой стороны, вершина, стоящая непосредственно перед сыном, называется ее **отцом**. Вершины, которые не имеют сыновей, принято называть **листьями**. Остальные вершины, отличные от корня и листьев, называют **внутренними**.

4.22 Бинарные деревья с корнем

Двоичное дерево — это дерево, у которого каждая его вершина имеет не более двух сыновей. В двоичном дереве с корнем вниз от каждой вершины идет не более двух ребер. Вершины степени 1 будем называть **концевыми**.

Теорема. Количество бинарных деревьев с n концевыми вершинами равно $C(n-1)$.

4.23 Остовное дерево

В любом связном графе найдется подграф, являющимся деревом. Подграф в G, являющийся деревом и включающий в себя все вершины G, называется **остовным деревом**.

Остовное дерево в графе G строится просто: выбираем произвольное его ребро и последовательно добавляем другие ребра, не создавая при этом циклов, до тех пор, пока нельзя будет добавить никакого ребра, не получив при этом цикла.

Для построения остовного дерева в графе из n вершин необходимо выбрать ровно $n - 1$ ребро.

4.24 Нахождение минимального остовного дерева

Существует несколько алгоритмов нахождения минимального остовного дерева. Мы рассмотрим алгоритм Краскала и алгоритм Прима.

Алгоритм Краскала. Выбираем ребро с наименьшим весом. Далее, к полученному подграфу добавляем наименьшее ребро (не обязательно смежное), не образующее с ним цикла. Продолжаем до тех пор, пока все вершины не будут включены в дерево.

Алгоритм Прима. Выбираем любую вершину графа, от нее ищем смежное ребро с наименьшим весом. Далее, уже к построенному поддереву присоединяем следующее смежное ребро наименьшего веса, не образующее с ним цикла. Продолжаем до тех пор, пока все вершины не будут включены в дерево.

4.25 Число остовных деревьев

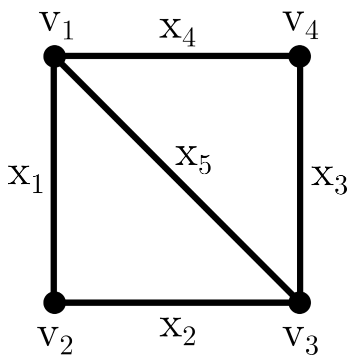
Число остовных деревьев можно найти с помощью формулы Кирхгофа. Утверждение Кирхгофа формулируется следующим образом.

Теорема. Число остовных деревьев в связном графе G равно любому алгебраическому дополнению матрицы

$$K = D - A,$$

где A — матрица смежности графа G, D — матрица степеней графа G.

Пример. Найти число остовных деревьев графа G:



$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = D - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

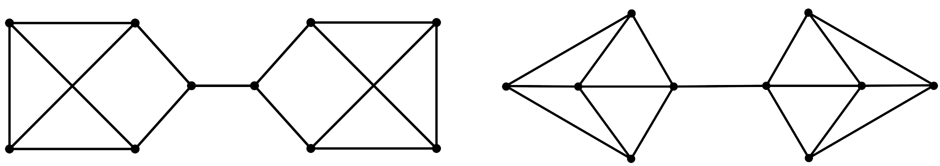
$$K_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

4.26 Плоские и планарные графы

Будем говорить, что граф **укладывается** на поверхности S, если его можно нарисовать на S так, что никакие два его ребра не пересекаются.

Планарным графом называют граф, который можно уложить на плоскости. **Плоский граф** — это граф, который уже уложен на плоскости.

Пример. Левый граф планарный, правый граф плоский:



Области, определяемые плоским графом, называют **гранями** (или внутренними гранями). Неограниченную область называют **внешней гранью**.

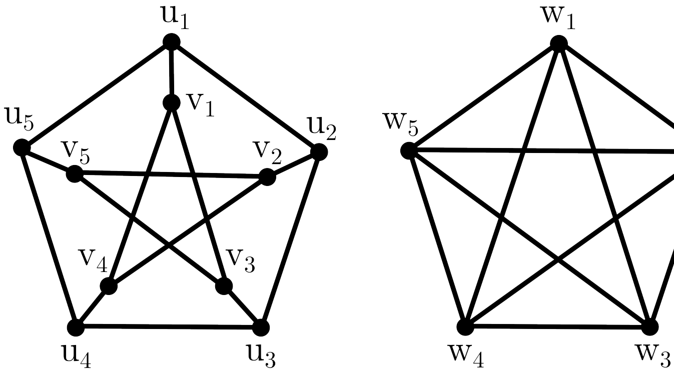
Теорема (формула Эйлера)**.** Для плоского графа, имеющего n вершин, m ребер и f граней, справедлива формула

$$n - m + f = 2.$$

Элементарное стягивание в графе G (или стягивание ребра) получается отождествлением двух смежных вершин u и v, то есть удалением u и v и добавлением новой вершины w, смежной с теми вершинами графа, которые были смежны или с u, или с v.

Граф G называется **стягиваемым** к графу H, если H можно получить из G с помощью некоторой последовательности элементарных стягиваний.

Пример. Рассмотрим следующие графы:



Граф Петерсена (левый граф) стягивается к K_5 (правый граф) в результате стягивания в новую вершину w_i любого из пяти ребер $u_i v_i$, соединяющих пятиугольник с пентаграммом.

Теорема. Граф планарен тогда и только тогда, когда у него нет подграфов, стягиваемых к K_5 и к $K_{3,3}$.

4.27 Обходы графов

4.27.1 Эйлеровы графы

Граф, в котором найдется маршрут, начинающийся и заканчивающийся в одной вершине, и проходящий по всем ребрам графа ровно один раз, называется **эйлеровым графом**.

Последовательность вершин (может быть с повторением), через которые проходит искомый маршрут, как и сам маршрут, называется **эйлеровым циклом**.

Теорема. Для связного графа G эквивалентны следующие утверждения:

1. G — эйлеров граф;
2. каждая вершина графа G имеет четную степень;
3. множество ребер графа G можно разбить на простые циклы.

4.27.2 Гамильтоновы графы

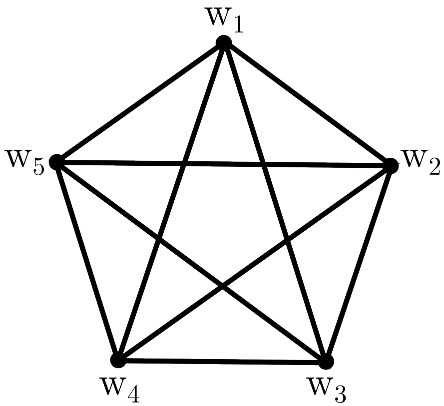
Цикл, проходящий через каждую вершину графа в точности один раз, если он существует, называется **гамильтоновым**, а соответствующий граф —

гамильтоновым графом.

В отличие от задачи Эйлера, простого критерия гамильтоновости графа пока не известно. Многие графы являются гамильтоновыми. В любом полом графе можно отыскать гамильтонов граф.

Количество гамильтоновых циклов в полном графе K_n равно $(n-1)!$, где n — количество вершин графа.

Пример. Полный граф K_5:



В данном случае $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ циклов. Поскольку каждый цикл можно проходить как в одном направлении, так и в другом, то реально в графе есть только 12 разных гамильтоновых циклов.

Гамильтоновы графы применяются для моделирования многих практических задач. Основой всех задач является **задача коммивояжера**, которая формулируется следующим образом: *коммивояжер должен совершить поездку по городам и вернуться обратно, побывав в каждом городе ровно один раз, сведя при этом затраты на передвижения к минимуму.*

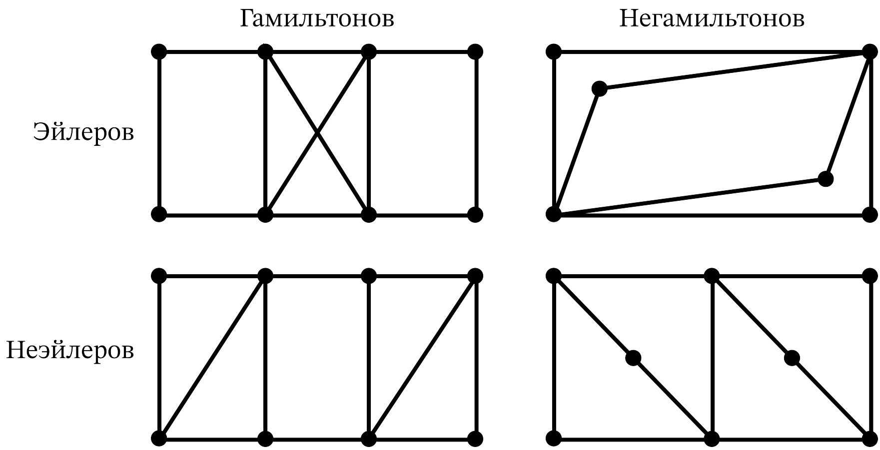
Теорема. Пусть G имеет $n \geq 3$ вершин. Если для всякого $k : 1 \leq k < \dfrac{n-1}{2}$ число вершин со степенями, не превосходящими k, меньше чем k, и для нечетного n число вершин степени $\dfrac{n-1}{2}$ не превосходит $\dfrac{n-1}{2}$, то граф G является гамильтоновым графом.

Следствие 1 (теорема Оре). Если $n \geq 3$ и $\deg n + \deg v \geq n$ для любой пары n и v несмежных вершин графа G, то граф G является гамильтоновым графом.

Следствие 2 (теорема Дирака). Если $n > 3$ и $\deg v \geq \dfrac{n}{2}$ для любой вершины v графа G, то граф G является гамильтоновым графом.

Теорема. Если G есть (n, m)-граф, у которого $n \geq 3$ и $m \geq \dfrac{n^2 - 3n + 6}{2}$, то G — гамильтонов граф.

Пример. Эйлеровы и неэйлеровы, гамильтоновы и негамильтоновы графы:



4.28 Операции над графами

Объединение графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ обозначается

$$G_1 \cup G_2 \text{ при условии } V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

и дает граф $G(V, E)$, где

$$V = V_1 \cup V_2, \quad E = E_1 \cup E_2.$$

Удаление вершины v из графа $G_1(V_1, E_1)$ обозначается

$$G_1(V_1, E_1) - v \text{ при условии } v \in V_1$$

и дает граф $G_2(V_2, E_2)$, где

$$V_2 = V_1 \setminus \{v\}, \quad E_2 = E_1 \setminus \{e = \{v_1, v_2\} \mid v_1 = v \vee v_2 = v\}.$$

Удаление ребра e из графа $G_1(V_1, E_1)$ обозначается

$$G_1(V_1, E_1) - e \text{ при условии } e \in E_1$$

и дает граф $G_2(V_2, E_2)$, где

$$V_2 = V_1, \quad E_2 = E_1 \setminus \{e\}.$$

Добавление вершины v в граф $G_1(V_1, E_1)$ обозначается

$$G_1(V_1, E_1) + v \text{ при условии } v \notin V_1$$

и дает граф $G_2(V_2, E_2)$, где

$$V_2 = V_1 \cup \{v\}, \quad E_2 = E_1.$$

Добавление ребра e в граф $G_1(V_1, E_1)$ обозначается

$$G_1(V_1, E_1) + e \text{ при условии } e \notin E_1$$

и дает граф $G_2(V_2, E_2)$, где

$$V_2 = V_1, \quad E_2 = E_1 \cup \{e\}.$$

Стягивание ребра $e = uv$ графа $G_1(V_1, E_1)$ обозначается

$$G_1(V_1, E_1) \cdot e(G_1(V_1, E_1) \setminus e) \text{ при условии } e \in E_1(\{u, v\} \in V_1$$

и дает граф $G_2(V_2, E_2)$, полученный из графа $G_1(V_1, E_1) - u - v$ добавлением новой вершины w ($w \notin V_1$), которая будет смежна в графе $G_1(V_1, E_1) \cdot e$ со всеми вершинами графа $G_1(V_1, E_1)$, смежными в $G_1(V_1, E_1)$ хотя бы с одной из вершин u или v (обозначение $w = u \cdot v$).