Содержание

1 Множества и отношения

1.1 Основные понятия

Множество – любая определенная совокупность объектов. Элементы множества различны и отличными друг от друга.

Под **множеством** понимают любой набор определенных и различимых между собой объектов, мыслимый как единое целое. Объекты, из которых составлено множество, называются его **элементами**.

Множества обычно обозначатся заглавными латинскими буквами: $A, B, C, \ldots$. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами: $a, b, c, \ldots$.

Для обозначения того, что объект x является, либо не является элементом множества A, используют символику:

- $x \in A$ – объект x является элементом множества A.
- $x \notin A$ – объект x не является элементом множества A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\varnothing$.

Множество, из элементов которого составляют конкретное множество, называют **универсальным** и обозначают символом U.

Множество U называется **универсальным** для данной задачи, если все рассматриваемые в этой задаче множества являются его подмножествами.

Множества можно изображать с помощью кругов, которые называются **кругами Эйлера** или **диаграммами Венна**. Универсальное множество принято обозначать прямоугольником.

Способы задания множества:

1. перечислением всех элементов множества (в фигурных скобках через запятую):
$$A = \{1, 2, 3, 4\};$$
2. характеристическим предикатом, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество. Характеристический предикат записывается после двоеточия или символа «|»:
$$A = \{x : P(x)\} \quad \vee \quad A = \{x \mid P(x)\}$$
где $P(x)$ – характеристический предикат.

Обозначения числовых множеств:

- $\mathbb{N}$ – множества натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z}$ – множества целых чисел, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;

- $\mathbb{Q}$ – множество рациональных числе, $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \right\}$;
- $\mathbb{R}$ – множество действительных (вещественных) чисел;
- $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

1.2 Сравнение множеств

Множество A называется **подмножеством** множества B (множество A содержится в B, множество B включает множество A), если каждый элемент множества A является элементом множества B:

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A \implies x \in B.$$

B называется **надмножеством** множества A.

Под определению пустое множество является подмножеством всех множеств:

$$\forall M \implies \varnothing \subseteq M.$$

Универсальное множество содержит все множества:

$$\forall M \implies M \subseteq U.$$

Два множества называют **равными**, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A.$$

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то множество A называется **собственным** подмножеством множества B, а B – **собственным** надмножеством A.

Множества A и B **сравнимые**, если $A \subseteq B \lor B \subseteq A$. Иначе множества называются **несравнимыми**.

1.3 Свойства включения множеств

Свойство 1.

$$\forall A \implies A \subseteq A.$$

Свойство 2.

$$\forall A, B : A \subseteq B \land B \subseteq A \implies A = B.$$

Свойство 3.

$$\forall A, B, C : A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

1.4 Мощность множества

Говорят, что между множествами A и B установлено **взаимно-однозначное соответствие**, если каждому элементу множества A поставлен в соответствие один и только один элемент множества B, и каждому элементу множества B поставлен в соответствие один и только один элемент множества A:

$$A \sim B \iff \begin{cases} \forall a \in A \mapsto !b \in B \\ \forall b \in B \mapsto !a \in A \end{cases}$$

Два множества (конечных или бесконечных) имеют **одинаковую мощность**, если между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие. В этом случае говорят, что множества A и B **изоморфны**, имеют одинаковую **мощность**, или что они **равномощны**, и обозначают $|A| = |B|$.

Множество A называется **конечным**, если у него нет равномощного собственного подмножества:

$$\forall B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \implies B = A.$$

Для конечного множества используется запись $|A| < \infty$.

Множество **бесконечно** тогда и только тогда, когда оно имеет одинаковую мощность с некоторым своим подмножеством, не совпадающим с самим этим множеством:

$$\exists B : B \subseteq A \wedge |B| = |A| \wedge B \neq A.$$

То есть бесконечное множество равномощно некоторому своему собственному подмножеству. Для бесконечного множества используется запись $|A| = \infty$.

Множество X называется **счетным**, если его мощность равна мощности множества натуральных чисел, т. е. $|X| = |\mathbb{N}|$.

Говорят, что множество X – множество **мощности континуума**, если его мощность равна мощности множества точек на отрезке $[0, 1]$.

Теорема (Теорема Кантора о несчетности)**.** Отрезок $[0, 1]$ несчетен, т. е.

$$|[0, 1]| > |\mathbb{N}|.$$

1.5 Операции над множествами

Объединением двух множеств называется множество, содержащее все элементы обоих множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

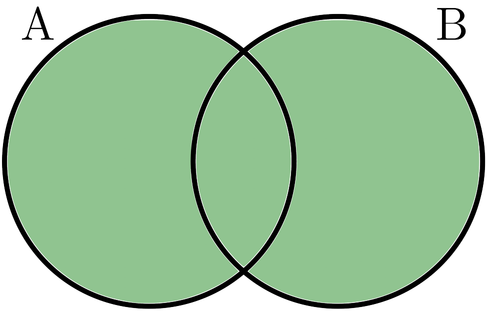

Рис. 1.1: Объединение двух множеств

Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов, входящих в каждое из множеств A и B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

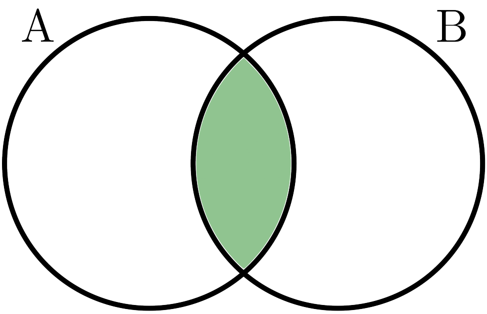

Рис. 1.2: Пересечение двух множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не содержащихся в множестве B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

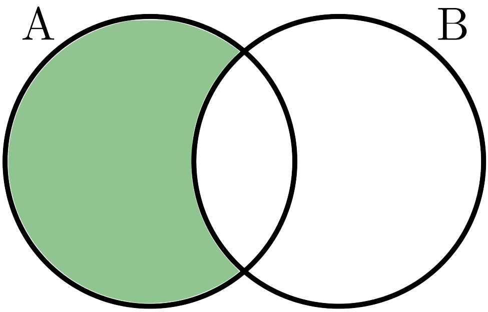

Рис. 1.3: Разность двух множеств

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не содержащихся в множестве B, и всех элементов множества B, не содержащихся в множестве A:

$$A \vartriangle B = \{x \mid (x \in A \land x \notin B) \lor (x \notin A \land x \in B)\}.$$

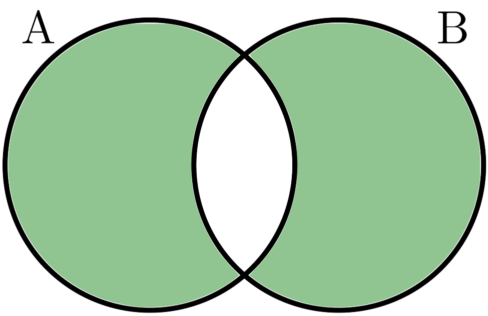

Рис. 1.4: Симметрическая разность двух множеств

Дополнением (дополнением до универсального множества U) множества A называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не содержащихся в множестве A:

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

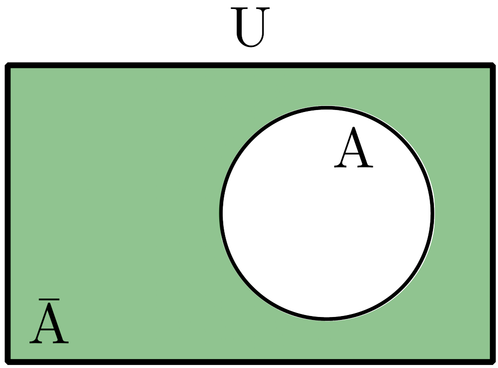

Рис. 1.5: Дополнение множества

1.6 Свойства операций над множествами

Свойство 1 (Идемпотентность)**.**

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Свойство 2 (Коммутативность)**.**

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Свойство 3 (Ассоциативность)**.**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Свойство 4 (Дистрибутивность)**.**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Свойство 5 (Поглощение)**.**

$$(A \cap B) \cup A = A, \quad (A \cup B) \cap A = A.$$

Свойство 6 (Свойства нуля)**.**

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Свойство 7 (Свойства единицы)**.**

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$$

Свойство 8 (Инволютивность).

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана).

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения).

$$A \cup \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = \varnothing.$$

Свойство 11 (Свойство разности).

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

Свойство 12 (Свойство симметрической разности).

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A).$$

1.7 Обобщенные тождества алгебры множеств

Свойство 1 (Обобщенная дистрибутивность).

$$A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i); \qquad A \cup \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i).$$

Свойство 2 (Обобщенный закон де Моргана).

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}; \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

1.8 Булеан

Множество всех подмножеств A называется **булеаном** множества A и обозначается 2^A:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Теорема. Если множество A конечно, то $|2^A| = 2^{|A|}$.

1.9 Методы доказательств теоретико-множественных тождеств

1.9.1 Метод двух включений

Пусть левая часть теоретико-множественного тождества определяет множество X, а правая часть – множество Y. Чтобы доказать равенство множеств X и Y, достаточно доказать два включения $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, т. е. доказать, что

$$\forall x \in X \implies x \in Y \quad \wedge \quad \forall x \in Y \implies x \in X.$$

Докажем этим методом тождество

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пусть $x \in A \triangle B$. Тогда, согласно определению симметрической разности

$$\begin{gathered} x \in (A \triangle B) \implies x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \implies \\ \implies (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \implies \\ \implies (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \vee (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \implies \\ \implies x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \implies x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)). \end{gathered}$$

Таким образом доказано, что $A \triangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Докажем обратное включение $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \triangle B$:

$$\begin{gathered} x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \implies x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \implies \\ \implies (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \implies \\ \implies x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \implies x \in (A \triangle B). \end{gathered}$$

Оба включения имеют место и тождество доказано.

1.9.2 Метод эквивалентных преобразований

Теоретико-множественные тождества можно доказывать, используя свойства операций над множествами. Для этого нужно преобразовать левую часть в правую, или правую – в левую, или правую и левую часть в некоторое третье выражение.

Докажем этим методом тождество:

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = A \cap (B \triangle C).$$

Преобразуем левую часть к правой:

$$
\begin{gathered}
(A \cap B) \vartriangle (A \cap C) = \\
= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)} = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{A \cap B} \cup \overline{A \cap C}) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{C}) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = \\
= ((A \cap (B \cup C)) \cap \bar{A}) \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
= (B \cup C) \cap (A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) = \\
= (A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap (\overline{B \cap C})) = \\
= A \cap ((B \cup C) \cap (\overline{B \cap C})) = \\
= A \cap (B \vartriangle C).
\end{gathered}
$$

1.9.3 Метод характеристических функций

Характеристическая функция χ_A множества A для $x \in U$ определяется следующим образом:

$$
\begin{cases} \chi_A(x) = 1, & x \in A \\ \chi_A(x) = 0, & x \notin A \end{cases}
$$

Для характеристической функции справедливы следующие тождества:

1. $\chi_A^2(x) = \chi_A(x)$;
2. $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
3. $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
4. $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A(x)$;
5. $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
6. $\chi_{A \vartriangle B} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2 \cdot \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Докажем этим методом тождество

$$
(A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C).
$$

С одной стороны,

$$\chi_{(A\triangle B)\cap C}(x) = \chi_{(A\triangle B)}(x)\chi_C(x) =$$
$$= (\chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x))\chi_C(x) =$$
$$= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).$$

С другой стороны,

$$\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}(x) = \chi_{(A\cap C)}(x) + \chi_{(B\cap C)}(x) - 2\chi_{(A\cap C)}(x)\chi_{(B\cap C)}(x) =$$
$$= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_C(x)\chi_B(x)\chi_C(x) =$$
$$= \chi_A(x)\chi_C(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x).$$

Так как $\chi_{(A\triangle B)\cap C}(x) = \chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}(x)$, тождество доказано.

1.10 Упорядоченные пары и наборы

(a, b) – упорядоченная пара объектов a и b.

Равенство упорядоченных пар определяется следующим образом:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

Вообще говоря, $(a, b) \neq (b, a)$.

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – упорядоченный набор из n элементов (n-ка, кортеж или (конечная) последовательность).

$|(a_1, a_2, \dots, a_n)|$ – длина набора, т. е. количество элементов в наборе.

Теорема. Два набора одной длины равны, если равны их соответствующие элементы

$$\forall n (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n.$$

1.11 Прямое произведение множеств

Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит A, а второй принадлежит B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

$$A \times B \neq B \times A.$$

Теорема. Для конечных множества A и B

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Понятие прямого произведения допускает обобщение. Прямое произведение множеств $A_1, \ldots, A_n$ – это множество наборов (кортежей):

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Множества A_i необязательно различны.

Степенью множества A называется его n-кратное произведение самого на себя:

$$A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n-\text{раз}}; \qquad |A^n| = |A|^n.$$

1.12 Бинарные отношения

Бинарным отношением между множествами A и B называется такая тройка $\langle A, B, R\rangle$, где R – подмножество прямого произведения A и B:

$$R \subset A \times B,$$

Эти множества именуют следующим образом:

- R – график отношения;
- A – область отправления;
- B – область прибытия.

Область определения отношения:

$$\mathrm{Dom}R = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\}.$$

Область значений:

$$\mathrm{Im}R = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\}.$$

Если $A = B$ (т. е. $R \subset A^2$), то говорят, что R есть отношение на множестве A.

Для бинарных отношений обычно используется **инфиксная** форма записи:

$$aRb \iff (a, b) \in R \subset A \times B.$$

Инфиксная форма позволяет более кратко записывать некоторые формы утверждений относительно отношений:

$$aRbRc \iff (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$$

Обратное отношение:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \subset B \times A.$$

Дополнение отношения:

$$\bar{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\} \subset A \times B.$$

Тождественное отношение:

$$I = \{(a,a) \mid a \in A\} \subset A^2.$$

Универсальное отношение:

$$U = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = A \times B.$$

1.13 Многоместные отношения

n-местное (n-арное) отношение R – это подмножество прямого произведения n множеств, т. е. множество упорядоченных наборов (кортежей):

$$R \subset A_1 \times \ldots \times A_n \iff \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\},$$

где n – вместимость (длина кортежей отношения).

1.14 Композиция отношений

Пусть $R_1 \subset A \times B$ – отношение между множествами A и B, а $R_2 \subset B \times C$ – отношение между множествами B и C. **Композицией** двух отношений R_1 и R_2 называется отношение $R \subset A \times C$ между множествами A и C, определяется следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 = \{(a,c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b \in B : aR_1b \wedge bR_2c\}.$$

Композиция отношений ассоциативна, т. е.

$$\forall R_1 \subset A \times B, R_2 \subset B \times C, R_3 \subset C \times D \implies$$
$$\implies (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

Композиция отношений на множестве A является отношением на множестве A.

Степенью отношения R на множестве A называется его n-кратная композиция с самим собой:

$$R^n = \underbrace{R \circ ... \circ R}_{n-\text{раз}}.$$

1.15 Способы задания бинарных отношений

1.15.1 Матричный способ

Отношение $R \subset A \times B$ задается с помощью прямоугольной таблицы (матрицы), состоящей из нулей и единиц, в которой строки – первые координаты, а столбцы – вторые, причем на пересечении i-ой строки и j-го столбца будет стоять 1, если имеется отношение $a_i R b_j$, и 0 в противном случае.

Пример. Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,4), (3,6)\}.$$

Отношение можно записать в виде матрицы:

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица **универсального** (полного) отношения – это квадратная матрица, состоящая только из единиц.

Матрица **тождественного** (диагонального) отношения – это квадратная матрица, элементами главной диагонали которой являются единицы, а остальные элементы равны нулю.

Матрица **пустого** отношения – это квадратная матрица, состоящая только из нулей.

Матрица **обратного** отношения R^{-1} для отношения R – это транспонированная матрица отношения R.

1.15.2 С помощью ориентированного графа

Элементы множеств A и B изображаются в виде точек на плоскости (вершины двудольного графа), а упорядоченные пары – линией со стрелкой (дуги ориентированного графа), которая направленна от a к b, если aRb.

Пример. Пусть

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Отношение

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 3), (3, 6)\}.$$

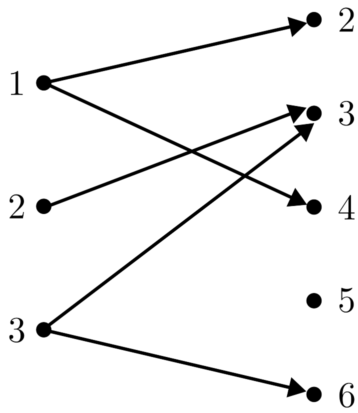

Рис. 1.6: Отношение в виде ориентированного графа

1.16 Способы задания композиции отношений

1.16.1 Матричный способ

Матрица композиции отношений $R \circ S$ получается как произведение матриц отношений R и S с дальнейшей заменой отличных от нуля элементов единицами.

Пример. Пусть

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\},$$
$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Тогда композиция равна

$$[R \circ S] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \circ S = \{(1,3), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,4)\}.$$

1.16.2 С помощью ориентированного графа

Пусть $R \subset A \times B$ и $S \subset B \times C$. Чтобы получить граф $T = R \circ S$, надо к графу отношения R добавить граф отношения S. Граф композиции отношений получим, если исключим вершины, которые являются элементами множества B.

Пример. Пусть

$$R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4)\},$$
$$S = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,2), (4,3)\}.$$

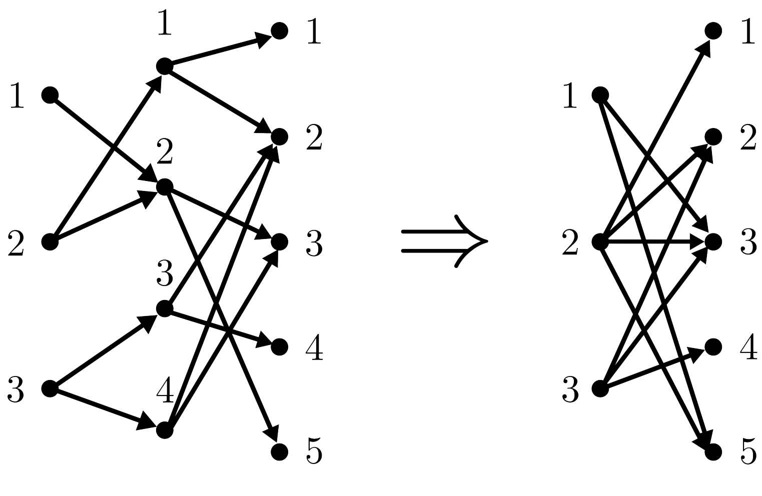

Рис. 1.7: Композиция в виде ориентированного графа

$$R \circ S = \{(1,3),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4)\}.$$

1.17 Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение R на множестве A называется

- **рефлексивным**, если
$$\forall x \in A : (x,x) \in R;$$
- **антирефлексивным**, если
$$\forall x \in A : (x,x) \notin R;$$
- **симметричным**, если
$$\forall x,y \in A : (x,y) \in R \implies (y,x) \in R;$$
- **антисимметричным**, если
$$\forall x,y \in A : (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \implies x = y;$$
- **транзитивным**, если
$$\forall x,y,z \in A : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \implies (x,z) \in R;$$
- **линейным** (полным), если
$$\forall x,y \in A : x = y \vee (x,y) \in R \vee (y,x) \in R.$$

Теорема. Пусть $R \subset A \times A$ – отношение на A. Тогда

- R рефлексивно $\iff I \subset R$;
- R антирефлексивно $\iff R \cap I = \varnothing$;
- R симметрично $\iff R = R^{-1}$;
- R антисимметрично $\iff R \cap R^{-1} = I$;
- R транзитивно $\iff R \circ R \subset R$;
- R линейно $\iff R \cup I \cup R^{-1} = U$.

1.18 Ядро отношения

Если $R \subset A \times B$ – отношение между множествами A и B, то композиция $R \circ R^{-1}$ называется **ядром** отношения R и обозначается $\mathrm{ker}R$:

$$\mathrm{ker}R = R \circ R^{-1}.$$

Ядро отношения R между A и B является отношением на A:

$$R \subset A \times B \implies \mathrm{ker}R \subset A^2.$$

Теорема. Ядро любого отношения рефлексивно и симметрично на области определения.

1.19 Замыкание отношений

Пусть R и $R^\times$ – отношения на множестве M. Отношение $R^\times$ называется замыканием R относительно свойства C, если

1. $R^\times$ обладает свойством C: $C(R^\times)$;
2. $R^\times$ является надмножеством R: $R \subset R^\times$;
3. $R^\times$ является наименьшим таким объектом:

$$C(R^{\times\times}) \wedge R \subset R^\times \implies R^\times \subset R^{\times\times}.$$

Теорема. Пусть R – отношение на множестве M. Тогда

- $R \cup I$ есть рефлексивное замыкание R;
- $R \cup R^{-1}$ есть симметричное замыкание R;
- если M – конечное множество, содержащее n элементов, то отношение

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup ... \cup R^n$$

  есть транзитивное замыкание R.

1.20 Функциональные отношения

Пусть f – отношение между A и B такое, что

$$\forall a : (a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \implies b = c.$$

Такое свойство отношений называется **однозначностью** или **функциональным**, а само отношение называется **функцией** из A в B.

$$f : A \to B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

$$b = f(a) \iff (a, b) \in f.$$

1.21 Тотальные и частичные функции

$$\mathrm{Dom} f \subset A; \qquad \mathrm{Im} f \subset B$$

Если $\mathrm{Dom} f = A$, то функция называется **тотальной**, а если $\mathrm{Dom} f \neq A$, то **частичной**.

1.22 Инъекция, сюрьекция и биекция

Пусть $f : A \to B$, тогда функция f называется

- **инъективной** (или инъекцией), если

$$b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \implies a_1 = a_2;$$

- **сюрьективной** (или сюрьекцией), если

$$\forall b \in B \, \exists a \in A : b = f(a);$$

- **биективной** (или биекцией), если она инъективная и сюрьективная.

1.23 Отношения эквивалентности

Отношение называется отношением **эквивалентности** (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эквивалентности обозначают символами E, $\sim$ (тильда) и $=$:

$$xEy, \quad x \sim y, \quad x = y.$$

Пример. Отношение равенства $x = y$ является эквивалентностью на любом множестве A, так как оно

- рефлексивно ($x = x$);
- симметрично ($x = y \implies y = x$);
- транзитивно ($x = y, y = z \implies x = z$).

1.24 Классы эквивалентности

Пусть E – отношение эквивалентности на множестве A. **Классом эквивалентности** элемента $x \in A$ называется подмножество элементов множества A, эквивалентных x:

$$E(x) = \{y \in A \mid xEy\}$$

или

$$[x]_E = \{y \in A \mid y \equiv x\}.$$

1.25 Фактормножества

Если E – отношение эквивалентности на множестве A, то множество классов эквивалентности называется **фактормножеством** множества A относительно эквивалентности E и обозначается A/E:

$$A/E = \{E(x) \mid x \in A\} \quad \text{или} \quad A/E = \{[x]_E\}_{x \in A}.$$

1.26 Отношения порядка

Антисимметричное транзитивное отношение называется **отношением порядка**. Отношение порядка в общем случае обозначается символом $\prec$. Отношение порядка может обладать также дополнительными свойствами, которые сведены в следующую таблицу:

Дополнительное свойство, которым обладает отношением порядка	Название отношения порядка, обладающего дополнительным свойством
рефлексивность	отношение нестрогого порядка $\leq$
антирефлексивность	отношение строгого порядка $<$
линейность	отношение линейного порядка
не обладает свойством линейности	отношение частичного порядка

Множества, на котором задано отношение частичного порядка, называется **частично упорядоченным**.

Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется **линейно упорядоченным**.

2 Элементы математической логики

2.1 Основные понятия

Математическая логика – это анализ методом рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т. е. математическая логика исследует соотношения между основными понятиями математики, на базе которых доказываются математические утверждения.

Простейшую из формальных логических теорий называют **алгеброй высказываний**.

Высказыванием называется утверждение (повествовательное предложение), о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Высказыванию ставят в соответствие логическую переменную, которая принимает значение 1, если высказывание истинно, и 0, если высказывание ложно.

Из простых высказываний с помощью **логических связок** могут быть построены **составные высказывания**.

2.2 Логические связки

2.2.1 Простейшие логические связки

В таблице 2.1 представлены простейшие логические связки.

Название	**Прочтение**	**Обозначение**
отрицание	не	$\neg$
конъюнкция	и	$\wedge$
дизъюнкция	или	$\vee$
импликация	если, то	$\rightarrow$
эквивалентность	тогда и только тогда, когда	$\leftrightarrow$

Таблица 2.1: Простейшие логические связки

Таблица 2.2 представляет собой таблицу истинности простейших логических связок.

A	B	$\bar{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Таблица 2.2: Таблица истинности простейших логических связок

2.2.2 Порядок выполнения логических операций

Если скобок нет, то операции выполняются в следующем порядке:

1. отрицание;
2. конъюнкция;
3. дизъюнкция;
4. импликация;
5. эквивалентность.

2.2.3 Доказательство тождественной истинности

Пример. Необходимо доказать тождественную истинность формулы

$$\bar{A} \to (A \to B).$$

A	B	$\bar{A}$	$A \to B$	$\bar{A} \to (A \to B)$
0	0	1	1	1

0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Таблица 2.3: Пример доказательства тождественной истинности

2.2.4 Другие логические связки

В таблице 2.4 представлены другие логические связки, которые мы в дальнейшем будем использовать.

Название	**Прочтение**	**Обозначение**
Штрих Шеффера	антиконъюнкция	$\mid$
Стрелка Пирса	антидизъюнкция	$\downarrow$
Сумма по модулю два	антиэквивалентность	$\oplus$

Таблица 2.4: Другие логические связки

Эти логические связки можно представить следующим образом:

$$A \,\Big|\, B = \overline{A \wedge B}; \quad A \downarrow B = \overline{A \vee B}; \quad A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}.$$

Таблица 2.5 представляет собой таблицу истинности других логических связок.

A	B	$A \mid B$	$A \downarrow B$	$A \oplus B$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Таблица 2.5: Таблица истинности других логических связок

Замечание. Таблицы истинности содержат 2^n строк, где n – число простых логических высказываний.

2.3 Логические отношения

Отношение следствия: из A следует B, если B истинно всякий раз, когда истинно A.

Пример. Рассмотрим высказывания $A \leftrightarrow B$, $A \to B$, $A \vee B$:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$A \vee B$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Из $A \leftrightarrow B$ следует $A \to B$, однако из $A \leftrightarrow B$ не следует $A \vee B$.

Два составных высказывания **эквивалентны**, если они имеют одинаковые истинностные значения на одинаковых наборах, т. е. последние столбцы их таблиц истинности должны совпадать.

Пример. Проверим, являются ли высказывания $A \to B$ и $\bar{A} \vee B$ эквивалентными:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Итого получим, что

$$A \to B \equiv \bar{A} \vee B.$$

2.4 Варианты импликации

Импликация двух высказываний отличается от эквивалентности, а также от дизъюнкции и конъюнкции тем, что она **несимметрична** (т. е. $A \to B$ не эквивалентно $B \to A$).

Для высказывания $A \to B$:

- высказывание $B \to A$ называется **конверсией**;
- высказывание $\bar{A} \to \bar{B}$ называется **конверсией контрапозиции**;
- высказывание $\bar{B} \to \bar{A}$ называется **контрапозицией**.

Таблица 2.9 представляет собой таблицу истинности этих вариантов импликации.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \to B$	$B \to A$	$\bar{A} \to \bar{B}$	$\bar{B} \to \bar{A}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Таблица 2.9: Таблица истинности вариантов импликации

2.5 Необходимое и достаточное условия

Условие	**Описание**	**Операция**
A является достаточным условием для B	Если имеет место A, то B также будет иметь место	Импликация $A \to B$
A является необходимым условием для B	Если имеет место B, то A также будет иметь место	Конверсия достаточного условия $B \to A$
A является необходимым и достаточным условием для B	A имеет место тогда и только тогда, когда имеет место B	Двойная импликация, т. е. эквивалентность $A \leftrightarrow B$

2.6 Основные логические эквивалентности

Свойство 1 (Идемпотентность)**.**

$$A \vee A = A, \quad A \wedge A = A.$$

Свойство 2 (Коммутативность)**.**

$$A \vee B = B \vee A, \quad A \wedge B = B \wedge A.$$

Свойство 3 (Ассоциативность)**.**

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, \quad A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C.$$

Свойство 4 (Дистрибутивность)**.**

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

Свойство 5 (Поглощение)**.**

$$(A \wedge B) \vee A = A, \quad (A \vee B) \wedge A = A.$$

Свойство 6 (Свойства нуля)**.**

$$A \vee 0 = A, \quad A \wedge 0 = 0.$$

Свойство 7 (Свойства единицы).

$$A \vee 1 = 1, \quad A \wedge 1 = A.$$

Свойство 8 (Инволютивность).

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана).

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}, \quad \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения).

$$A \vee \bar{A} = 1, \quad A \wedge \bar{A} = 0.$$

Свойство 11 (Свойство импликации).

$$A \to B = \bar{A} \vee B.$$

Свойство 12 (Свойство эквивалентности).

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A).$$

2.7 Булевы функции

Булевы функции находят применение в конструировании и упрощении логических схем.

Обозначим $E_2 = \{0, 1\}$, тогда

$$E_2^n = \underbrace{E_2 \times E_2 \times ... \times E_2}_{n}.$$

Функции $f : E_2^n \to E_2$ называются **функции алгебры логики** или **булевыми функциями** от n переменных. Множество булевых функций от n переменных обозначают P_n:

$$P_n = \{f \mid f : E_2^n \to E_2\}.$$

2.8 Множество булевых функций. Булев куб

P_2 – множество всех булевых функций.

$P_{2,n}$ – множество всех булевых функций от n переменных:

$$P_{2,n} = \{f \mid f : E_2^n \to E_2\}, \qquad P_2 = \bigcup_{n \geq 0} P_{2,n}.$$

$\{0,1\}^n$ – **булев куб** размерности n. Число всех элементов булева куба $\{0,1\}^n$ составляет 2^n.

2.9 Булев порядок

Для произвольных наборов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ имеет место

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \iff \alpha_i \leq \beta_i, \forall i = \overline{1,n}$$

то есть

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \iff \alpha_i = \beta_i \text{ или } \alpha_i, \beta_i = 1, \forall i = \overline{1,n}.$$

Если существует хотя бы одно i, для которого $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, то имеет место строгое неравенство $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$.

Если существует ровно одно i, для которого $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, то набор $\bar{\beta}$ **доминирует** над набором $\bar{\alpha}$.

Рассмотренное отношение порядка на B^n, где B^n – n-я декартова степень

$$B = (\{0,1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$$

будем называть **булевым порядком**.

Булев куб как упорядоченное множество можно изобразить в виде диаграммы Хассе

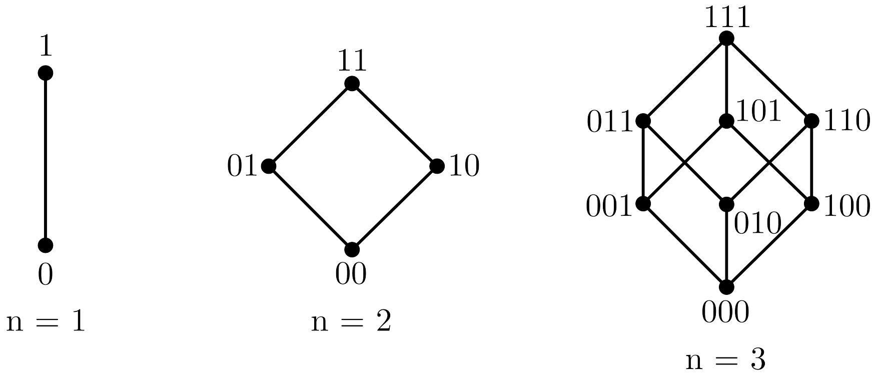

Рис. 2.1: Примеры булевых кубов в виде диаграммы Хассе

2.10 Мощность множества булевых функций

Число булевых функций от n переменных находится по формуле

$$|P_{2,n}| = 2^{2^n}.$$

x_1	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots x_n)$
0	...	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	...	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
0	...	1	0	$f(0, \dots, 1, 0)$
...	...	...	...	...
1	...	1	1	$f(1, \dots, 1, 1)$

Таблица 2.11: Таблица булевых функций

2.11 Существенные и несущественные переменные

Булева функция $f \in P_n$ **существенно зависит** от переменной x_i, если существует такой набор значений

$$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$$

что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

В этом случае x_i называют **существенной** переменной, в противном случае x_i называют **несущественной** (фиктивной) переменной.

Пример. Рассмотрим следующую таблицу истинности:

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

В данном случае x_1 – существенная переменная, а x_2 – несущественная, поскольку

$$f_1(0,0) = f_1(0,1), \quad f_1(1,0) = f_1(1,1).$$
$$f_2(0,0) = f_2(0,1), \quad f_2(1,0) = f_2(1,1).$$

2.12 Булевы функции одной и нескольких переменной

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 2.13: Булевы функции одной переменной

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 2.14: Булевы функции двух переменных

2.13 Мажоритарная функция

	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Таблица 2.15: Мажоритарная функция (функция голосования)

2.14 Реализация функций формулами

Так же, как составные высказывания строятся из более простых, с помощью логических операций, можно комбинировать булевы переменные с помощью булевых операций, получая булевы выражения, которые называются **формулами**. Всякой формуле однозначно соответствует некоторая функция, при этом говорят, что **формула реализует функцию**.

Пример. Построим таблицу истинности для формулы

$$((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2.$$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$(x_1 \wedge x_2) \oplus x_1$	$((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Формула $((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$ реализует функцию $f_8(x_1, x_2) = 0111$.

2.15 Равносильные формулы

Одна функция может иметь множество реализацией. Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются **равносильными**:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \iff \exists f : \text{func}\,\mathcal{F}_1 = f \wedge \text{func}\,\mathcal{F}_2 = f.$$

Другими словами, булевы функции f и g называют равносильными, если их существенные переменные соответственно равны и на каждом наборе значений этих переменных функции f и g принимают равные значения.

Пример. Пусть

$$f(x, y) = x \vee y, \quad g(x, y, z) = xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee y\bar{z}.$$

Упростим функцию $g(x, y, z)$:

$$g(x, y, z) = xz \vee x\bar{z} \vee yz \vee y\bar{z} = x(z \vee \bar{z}) \vee y(z \vee \bar{z}) = x \vee y.$$

Получили, что функции $f(x, y)$ и $g(x, y, z)$ равносильны.

2.16 Законы булевой алгебры

Свойство 1 (Идемпотентность).

$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$$

Свойство 2 (Коммутативность).

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a.$$

Свойство 3 (Ассоциативность)**.**

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Свойство 4 (Дистрибутивность)**.**

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Свойство 5 (Поглощение)**.**

$$(a \wedge b) \vee a = a, \quad (a \vee b) \wedge a = a.$$

Свойство 6 (Свойства нуля)**.**

$$a \vee 0 = a, \quad a \wedge 0 = 0.$$

Свойство 7 (Свойства единицы)**.**

$$a \vee 1 = 1, \quad a \wedge 1 = a.$$

Свойство 8 (Инволютивность)**.**

$$\bar{\bar{a}} = a.$$

Свойство 9 (Законы де Моргана)**.**

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}, \quad \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}.$$

Свойство 10 (Свойства дополнения)**.**

$$a \vee \bar{a} = 1, \quad a \wedge \bar{a} = 0.$$

Свойство 11 (Свойство импликации)**.**

$$a \to b = \bar{a} \vee b.$$

Свойство 12 (Свойство эквивалентности)**.**

$$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a).$$

2.17 Двойственная функция

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ – булева функция. Тогда функция

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$$

называется **двойственной** к функции f.

Пример 1.

$$0^* = \bar{0} = 1.$$

Пример 2.

$$1^* = \bar{1} = 0.$$

Пример 3.

$$x^* = \bar{\bar{x}} = x.$$

Т. к. x в данном случае и функция, и переменная, мы применяем двойное отрицание.

Пример 4.

$$(x \wedge y)^* = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = x \vee y.$$

Пример 5.

$$(x \vee y)^* = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = x \wedge y.$$

2.18 Инволютивность двойственности

Из определения видно, что двойственность инволютивна: $f^{**} = f$, поэтому отношение «быть двойственной к» на множестве булевых функций симметрично, то есть, если $f^* = g$, то $g^* = f$.

Если в таблице истинности булевой функции f инвертировать все значения, то получим таблицу истинности двойственной функции f^*.

2.19 Самодвойственная функция

Функция называется **самодвойственной**, если $f^* = f$. Примером такой функции может служить функция $f(x) = x$:

$$x^* = \bar{\bar{x}} = x.$$

2.20 Принцип двойственности

Теорема. Пусть $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ – система булевых функций, а $F^* = \{f_1^*, \dots, f_n^*\}$ – система двойственных функций. Тогда если формула $\mathcal{F}$ над базисом F реализует функцию f, то формула $\mathcal{F}^*$ над базисом F^*, полученная заменой функций f_i, двойственными функциями f_i^*, реализует функцию f^*:

$$\text{func } \mathcal{F}|F| = f \implies \text{func } \mathcal{F}^*|F^*| = f^*.$$

Следствие. Если две равносильные формулы заменить двойственными, то равносильность сохранится:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \implies \mathcal{F}_1^* = \mathcal{F}_2^*.$$

Замечание. Формула, двойственная к булевой формуле, может быть получена заменой констант 0 на 1, 1 на 0, операций $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$ и сохранением структуры формулы.

2.21 Нормальные формы

Если x – логическая переменная, $\sigma \in \{0, 1\}$, то выражение

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

называется литерой. Литеры x и $\bar{x}$ называются **контрарными**. **Элементарной конъюнкцией** называется конъюнкция литер. **Элементарной дизъюнкцией** называется дизъюнкция литер.

2.22 ДНФ и КНФ

Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**.

Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ)**.

Пример 1. ДНФ:

$$(x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z).$$

Пример 2. КНФ:

$$(x \vee z \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y) \wedge z.$$

Пример 3. Одновременно и КНФ, и ДНФ:

$$x \wedge \bar{y}.$$

Теорема.

1. Любая формула эквивалентна некоторой ДНФ.

2. Любая формула эквивалентна некоторой КНФ.

Алгоритм приведения формулы к ДНФ:

1. выразить все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;

2. используя законы де Моргана, перенести все отрицания к переменным;

3. убрать двойные отрицания;

4. используя закон дистрибутивности, преобразовать формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций.

Алгоритм приведения формулы к КНФ:

1. выразить все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;

2. используя законы де Моргана, перенести все отрицания к переменным;

3. убрать двойные отрицания;

4. используя закон дистрибутивности, преобразовать формулу так, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше, чем конъюнкции.

2.23 Совершенные нормальные формы

2.23.1 СДНФ

Реализация булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в виде формулы

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)**. Таким образом, СДНФ есть ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций, и в каждой элементарной конъюнкции каждая переменная x_i, из набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\bar{x}_i$.

Теорема. Каждая булева функция, отличная от константы 0, имеет единственную СДНФ.

2.23.2 СКНФ

Реализация булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в виде формулы

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$$

называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)**. Таким образом, СКНФ есть КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций, и в каждой элементарной дизъюнкции каждая переменная x_i из набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\bar{x}_i$.

Теорема. Всякая булева функция, отличная от константы 1, имеет единственную СКНФ.

2.24 Нахождение СДНФ

При нахождении СДНФ пользуются следующим правилом:

1. каждый набор аргументов определяет элементарную конъюнкцию, в которой значению 0 соответствует отрицание переменной, а значению 1 – сама переменная.

2. СДНФ функции образуют те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам аргументов, дающим 1.

Каждый набор аргументов, на котором функция принимает значение 1, называется **конституентой единицы** функции.

Пример. Найдем СДНФ для $x_1 \to x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	элем. конъюнкции
0	0	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$
0	1	1	$\bar{x}_1 \wedge x_2$
1	0	0	$x_1 \wedge \bar{x}_2$
1	1	1	$x_1 \wedge x_2$

СДНФ: $(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)$.

2.25 Нахождение СКНФ

При нахождении СКНФ пользуются следующим правилом:

1. каждый набор аргументов определяет элементарную дизъюнкцию, в которой значению 1 соответствует инверсия переменной, а значению 0 – сама переменная;
2. СКНФ функции образуют те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам аргументов, дающим 0.

Каждый набор аргументов, на котором функция принимает значение 0, называется **конституентой нуля** функции.

Пример 1. Найдем СКНФ для $x_1 \to x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	элем. дизъюнкции
0	0	1	$x_1 \vee x_2$
0	1	1	$x_1 \vee \bar{x}_2$
1	0	0	$\bar{x}_1 \vee x_2$
1	1	1	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

СКНФ: $\bar{x}_1 \vee x_2$.

2.26 Замкнутые классы

Пусть

$$F = \{f_1, \dots, f_m\}, f_i \in P_2 \ \forall i \in \overline{1, m}.$$

Замыканием F называется множество всех булевых функций, реализуемых формулами над F:

$$[F] = \{f \in P_2 \mid f = \text{func } F[F]\}.$$

2.27 Свойства замыкания

Свойство 1.

$$F \subset [F]$$

Свойство 2 (Идемпотентность).

$$[[F]] = [F]$$

Свойство 3 (Монотонность).

$$F_1 \subset F_2 \implies [F_1] \subset [F_2]$$

Свойство 4.

$$([F_1] \cup [F_2]) \subset [F_1 \cup F_2].$$

Класс (множество) функций F называется **замкнутым**, если $[F] = F$.

2.28 Замкнутые классы

Класс функций, сохраняющих 0:

$$T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0, \dots, 0) = 0\}.$$

Класс функций, сохраняющих 1:

$$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1, \dots, 1) = 1\}.$$

Класс самодвойственных функций:

$$S = \{f \in P_2 \mid f = f^*\}.$$

Класс монотонных функций:

$$M = \{f \in P_2 \mid \forall \alpha, \beta : \alpha \le \beta \implies f(\alpha) \le f(\beta)\}.$$

Класс линейных функций:

$$L = \{f \in P_2 \mid f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n\}.$$

Теорема. Классы T_0, T_1, S, M, L – замкнуты.

Пример. Рассмотрим конъюнкцию и введем обозначение $\psi(x, y) = x \wedge y$. Тогда

- $\psi \in T_0$, т. к. $0 \wedge 0 = 0$;
- $\psi \in T_1$, т. к. $1 \wedge 1 = 1$;
- $\psi \notin S$, т. к. $\psi(x, y) = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = x \vee y \neq \psi(x, y)$;
- $\psi \in M$, можно убедиться, построив таблицу истинности;
- $\psi \notin L$, можно убедиться, построив полином Жегалкина.

2.29 Полные системы функций

Класс функций F называется **полным**, если его замыкание совпадает с P_2:

$$[F] = P_2.$$

Другими словами, множество функции F образует полную систему, если любая булева функция реализуема в виде формулы над F.

Теорема. Пусть заданы две системы функций

$$F = \{f_1, \ldots, f_m\}, \quad G = \{g_1, \ldots, g_k\}$$

Тогда, если система F полна и все функции из F реализуемы формулами над G, то система G также полна.

Пример. Система $\{\vee, \wedge, \neg\}$ полная, т. к. всякая булева функция (в силу того, что она имеет единственную СДНФ) может быть выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. Тогда

- система $\{\neg, \wedge\}$ полная, т. к.

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2};$$

- система $\{\neg, \vee\}$ полная, т. к.

$$x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2};$$

- система $\{|\}$ полная, т. к.

$$\bar{x} = x \mid x, \quad x_1 \wedge x_2 = \overline{x_1 \mid x_2} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2);$$

- система $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$ полная, т. к.

$$\bar{x} = x + 1.$$

2.30 Полнота двойственной системы

Теорема. Если система $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ полна, то система $F^* = \{f_1^*, \ldots, f_m^*\}$ также полна.

Пример 1. Система $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$ полна, следовательно, система $\{1, 0, \vee, \leftrightarrow\}$ также полна.

2.31 Теорема Поста

Теорема. Система булевых функций F полна тогда и только тогда, когда она содержит:

- хотя бы одну функцию, не сохраняющую ноль;
- хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу;
- хотя бы одну несамодвойственную функцию;
- хотя бы одну немонотонную функцию;
- хотя бы одну нелинейную функцию.

$$[F] = P_2 \iff \overline{F \subset T_0 \lor F \subset T_1 \lor F \subset S \lor F \subset M \lor F \subset L}.$$

Пример 1. Рассмотрим систему $\{\lor, \land, \neg\}$:

	T_0	T_1	S	M	L
$\bar{x}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x_1 \land x_2$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x_1 \lor x_2$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$

Так как в каждом столбике есть $-$, система $\{\lor, \land, \neg\}$ – полная. Также очевидно, что $\{\land, \neg\}$ и $\lor, \neg$ являются полными, а значит являются базисами для исходной системы.

Пример 2. Рассмотрим систему $\{|\}$:

x	y	$f(x, y) = x \mid y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. $f(0,0) = 1 \implies f \notin T_0$;
2. $f(1,1) = 0 \implies f \notin T_1$;

3. $f(0,1) = 1, f_(1,0) = 1 \implies f \notin S$;

4. $(0,0) < (1,1), f(0,0) > f(1,1) \implies f \notin M$;

5. $f(x,y) = 1 \oplus xy \implies f \notin L$.

	T_0	T_1	S	M	L
$x \mid y$	–	–	–	–	–

Следовательно, система $\{|\}$ является полной по критерию Поста. Таким же образом можно доказать, что $\downarrow$ также является полной.
Замечание. Число шефферовых функций от n переменных равно

$$2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}.$$

2.32 Одноместный предикат

Одноместный предикат $P(x)$ – это функция переменной x, определенная на множестве M и принимающая значения на множестве $\{0,1\}$. Те значения переменной, на которых предикат принимает истинное значение, образуют **множество истинности предиката**. Так как предикаты принимают значения 0 и 1, то к ним применяются логические операции.
Пример. Пусть даны предикаты $P(x) =$ «x – четное число» и $Q(x) =$ «x кратно 3», определенные на множестве $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Необходимо найти область истинности предикатов:

1. $P(x) \wedge Q(x)$;
2. $P(x) \vee Q(x)$;
3. $\bar{P}(x)$;
4. $P(x) \to Q(x)$.

Решение:

1. $I_{P\wedge Q} = I_P \cap I_Q = \{6\}$;
2. $I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q = \{2,3,4,6,8,9\}$;
3. $I_{\bar{P}} = \bar{I}_P = M \setminus I_P = \{1,3,5,7,9\}$;
4. $I_{P\to Q} = \bar{I}_P \cup I_Q = \{1,3,5,6,7,9\}$.

2.33 n-местный предикат

n-местным предикатом называется функция n переменных $P(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на множестве $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ и принимающая на этом множестве одно из двух значений: истина или ложь:

$$P(x_1, \ldots, x_n) : M_1 \times \ldots \times M_n \to E_2.$$

2.34 Кванторные операции

Пусть $P(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве M. Квантор общности $\forall$ превращает предикат $P(x)$ в высказывание:

$$\forall P(x) = \text{«для всякого элемента } x \text{ высказывание } P(x) \text{ истинно».}$$

Квантор существования $\exists$ превращает предикат $P(x)$ в высказывание

$$\exists P(x) = \text{«существует элемент } x \text{ такой, что высказывание } P(x) \text{ истинно».}$$

Операция приписывания к предикату квантора называется **навешиванием квантора**. Переменная, к которой квантор связывается квантором и называется **связанной переменной**. Переменная, не связанная квантором, называется **свободной переменной**.

2.35 Алфавит логики предикатов

1. предметные константы p, q, r, ... (принимают значения 0 или 1);
2. предметные переменные x, y, z, ..., пробегающие значения некоторого множества M;
3. функциональные переменные f, g, h, ...;
4. предикатные переменные P, Q, R, ...;
5. символы логических операций $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$;
6. кванторные символы $\forall$, $\exists$;
7. запятая, скобки.

2.36 Формулы логики предикатов

Определим понятие **терма**:

1. Всякая предметная константа есть терм.

2. Всякая предметная переменная есть терм.

3. Если $t_1, \dots, t_n$ – термы, а f – функциональная переменная, то $f(t_1, \dots, t_n)$ – есть терм.

Определим понятие **формулы**:

1. Если $t_1, \dots, t_n$ – термы, $\{x_1, \dots, x_n\}$ – множество всех переменных в термах $t_1, \dots, t_n$, P – предикатная переменная, то $P(t_1, \dots, t_n)$ – элементарная формула со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$.

2. Если A – формула, то $\bar{A}$ – формула. Свободные переменные формулы A являются свободными переменными формулы $\bar{A}$.

3. Если A и B есть формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ тоже есть формулы. Их свободные переменные – это свободные переменные формул A и B.

4. Если $A(x)$ – формула с множеством свободных переменных $\{x, x_1, \dots, x_n\}$, то выражения $\exists x \ A(x)$ и $\forall x \ A(x)$ есть формулы. Переменные $x_1, \dots, x_n$ в этих формулах свободны, а переменная x связана квантором.

При построении новых формул надо внимательно следить за тем, чтобы предметные переменные, свободные в одной формуле, были свободными и в других формулах. Тогда эти переменные будут свободными и в построенной формуле.

Формула без свободных переменных называется **замкнутой**.

При построении формул в логике предикатов действуют те же правила опускания скобок, что и в исчислении высказываний. Кванторы имеют высший приоритет.

В формулах $\exists x \ A(x)$ и $\forall x \ A(x)$ формула $A(x)$ есть область действия квантора.

Пример.

- $\forall x \ P(x)$ является формулой;

- $\exists x \ (Q(x) \to P(x, y))$ является формулой;

- $\exists x \ P(x, y) \vee Q(x)$ не является формулой, т. к. нет скобочек.

2.37 Равносильные формулы

Две формулы логики предикатов называются **равносильными** на области M, если они принимают одинаковые значения для всех значений переменных из области M.

Равносильные формулы – это формулы, равносильные на любой области.

Пример 1.

$$\overline{\forall x\ A(x)} = \exists x\ \overline{A(x)}.$$

Пример 2.

$$\overline{\exists x\ A(x)} = \forall x\ \overline{A(x)}.$$

Пример 3.

$$C \wedge \forall x\ B(x) = \forall x\ (C \wedge B(x)).$$

Пример 4.

$$C \vee \forall x\ B(x) = \forall x\ (C \vee B(x)).$$

Пример 5.

$$C \wedge \exists x\ B(x) = \exists x\ (C \wedge B(x)).$$

Пример 6.

$$C \vee \exists x\ B(x) = \exists x\ (C \vee B(x)).$$

Пример 7.

$$\forall x\ A(x) \wedge \forall x\ B(x) = \forall x\ (A(x) \wedge B(x)).$$

Пример 8.

$$\exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x) = \exists x\ (A(x) \vee B(x)).$$

Пример 9.

$$\exists x\ A(x) \wedge \exists x\ B(x) = \exists x \exists y\ (A(x) \wedge B(y)).$$

Пример 10.

$$\forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x) = \forall x \forall y\ (A(x) \vee B(y))$$

2.38 Предваренная нормальная форма

Предваренная нормальная форма имеет следующий вид:

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n\ B(x_1, \dots, x_n),$$

где Q_i – один из кванторов, формула $B(x_1, \dots, x_n)$ не содержит кванторов.

Теорема. Любую формулу логики предикатов можно привести к предваренной нормальной форме.

Пример. Необходимо привести формулу

$$\overline{\forall x\ (P(x))} \vee \exists x\ (Q(x,y))$$

к предварительной формуле.

$$\overline{\forall x\ (P(x))} \vee \exists x\ (Q(x,y)) = \exists x\ (\overline{P(x)}) \vee \exists x\ (Q(x,y)) =$$
$$= \exists x\ (\overline{P(x)} \vee Q(x,y)).$$

2.39 Общезначимость и выполнимость

Формула логики предикатов называется **выполнимой** в некоторой области M, если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к области M, при которых формула принимает истинное значение. Формула **выполнима**, если существует область, на которой выполнима эта формула.

Формула логики предикатов называется **тождественно истинной** в области M, если для всех значений переменных из области M формула принимает истинное значение. Формула, тождественно истинная в любой области, называется **общезначимой** (логическим законом).

2.40 Проблема разрешимость в логике предикатов

Проблема разрешимость в логике предикатов формулируется следующим образом. Существуют ли алгоритмы, позволяющие определить общезначимость, выполнимость или тождественную ложность любой формулы логики предикатов? Показано, что эта проблема алгоритмически не разрешима.