Đại số Tuyến tính
Chương 5: Biến đổi tuyến tính

Quan Nguyen

International University, VNU-HCM

quannguyenuw@gmail.com

Tháng 6, 2021

Mục lục

5.1: Biến đổi tuyến tính

Định nghĩa 5.1.1 (biến đổi tuyến tính)

Xét hai không gian vectơ V, W và ánh xạ $T : V \to W$ thoả mãn:
a) $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V$;
b) $T(cu) = c \cdot T(u), \forall c \in \mathbb{R}, u \in V$.
Khi đó T được gọi là một biến đổi tuyến tính từ V vào W.

Ví dụ 5.1.1

Hàm số $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$T(u, v) = (u - v, u + 2v), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

là một biến đổi tuyến tính.

5.1: Biến đổi tuyến tính

Ví dụ 5.1.2

Các hàm số $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f_1(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_3(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

không là biến đổi tuyến tính.

Ví dụ 5.1.3 (ánh xạ không)

Với hai không gian vectơ V, W tuỳ ý, hàm số $T : V \to W$ xác định bởi

$$T(v) = 0, \forall v \in V$$

là một biến đổi tuyến tính.

Ví dụ 5.1.4 (ánh xạ đồng nhất)

Với không gian vectơ V tuỳ ý, hàm số $T : V \to V$ xác định bởi

$$T(v) = v, \forall v \in V$$

là một biến đổi tuyến tính.

Định lí 5.1.1

Với biến đổi tuyến tính $T : V \to W$ tuỳ ý:

a) $T(0) = 0$;

b) $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$;

c) $T(u - v) = T(u) - T(v), \forall u, v \in V$;

d) $T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i), \forall \{c_i\} \subset \mathbb{R}, \{v_i\} \subset V$.

5.1: Biến đổi tuyến tính

Định lí 5.1.2

Với ma trận A gồm m hàng và n cột, ánh xạ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ xác định bởi

$$T(v) = Av, \forall v \in \mathbb{R}^n$$

là một biến đổi tuyến tính.

Ví dụ 5.1.5 (phép chuyển vị ma trận)

Với mỗi cặp số tự nhiên (m, n), kí hiệu $M_{m,n}$ là tập tất cả các ma trận có m hàng và n cột. Khi đó ánh xạ $T : M_{m,n} \to M_{n,m}$ xác định bởi

$$T(A) = A^T, \forall A \in M_{m,n}$$

là một biến đổi tuyến tính.

5.2: Hạt nhân - Ảnh

Định nghĩa 5.2.1 (hạt nhân của biến đổi tuyến tính)

Xét biến đổi tuyến tính $T : V \to W$. Tập hợp

$$A = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

được gọi là hạt nhân của T, kí hiệu $A = \ker(T)$. Giá trị $a = \dim(\ker(T))$ được gọi là số vô hiệu (nullity) của T, kí hiệu $a = \text{nullity}(T)$.

Định nghĩa 5.2.2 (ảnh của biến đổi tuyến tính)

Xét biến đổi tuyến tính $T : V \to W$. Tập hợp

$$B = \{T(v) : v \in V\}$$

được gọi là ảnh của T, kí hiệu $B = \text{range}(T)$. Giá trị $b = \dim(\text{range}(T))$ được gọi là hạng của T, kí hiệu $b = \text{rank}(T)$.

Ví dụ 5.2.1

a) Trong Ví dụ 5.1.3, $\ker(T) = V$ và $\operatorname{range}(T) = \{0\}$;
b) Trong Ví dụ 5.1.4, $\ker(T) = \{0\}$ và $\operatorname{range}(T) = V$.

Định lí 5.2.1

Với biến đổi tuyến tính $T : V \to W$ tuỳ ý:
a) $\ker(T)$ là một không gian con của V;
b) $\operatorname{range}(T)$ là một không gian con của W;
c) $\operatorname{rank}(T) + \operatorname{nullity}(T) = \dim(V)$.

Định lí 5.2.2

Trong Định lí 5.1.2:
a) $\ker(T) = NS(A)$ và $\operatorname{range}(T) = CS(A)$;
b) $\operatorname{nullity}(T) = \operatorname{nullity}(A)$ và $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(A)$.

5.2: Hạt nhân - Ảnh

Định nghĩa 5.2.3 (đơn ánh - toàn ánh)

Xét một ánh xạ $f : X \to Y$ bất kì.

a) f được gọi là đơn ánh nếu $\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;

b) f được gọi là toàn ánh nếu $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$.

Định lí 5.2.3

Với biến đổi tuyến tính $T : V \to W$ tuỳ ý, các mệnh đề sau tương đương:

a) T là một đơn ánh;

b) $\ker(T) = \{0\}$.

Định lí 5.2.4

Với biến đổi tuyến tính $T : V \to W$ tuỳ ý, các mệnh đề sau tương đương:

a) T là một toàn ánh;

b) $\text{rank}(T) = \dim(W)$.

5.2: Hạt nhân - Ảnh

Định lí 5.2.5

Xét biến đổi tuyến tính $T : V \to W$ tuỳ ý thoả mãn $\dim(V) = \dim(W)$.
Khi đó các mệnh đề sau tương đương:

a) T là một đơn ánh;
b) T là một toàn ánh.

Ví dụ 5.2.2

a) Trong Ví dụ 5.1.3, T không là đơn ánh cũng không là toàn ánh;
b) Trong Ví dụ 5.1.4, T vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh;
c) Trong Ví dụ 5.1.5, T vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

5.2: Hạt nhân - Ảnh

Định nghĩa 5.2.3 (phép đẳng cấu - không gian đẳng cấu)

Một biến đổi tuyến tính $T : V \to W$ được gọi là một phép đẳng cấu nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Hai không gian vectơ V và W được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại một phép đẳng cấu $T : V \to W$.

Định lí 5.2.6

Với hai không gian vectơ V, W tuỳ ý, các mệnh đề sau tương đương:
a) V và W đẳng cấu với nhau;
b) $\dim(V) = \dim(W)$.

Ví dụ 5.2.3

Các không gian sau đôi một đẳng cấu với nhau;

$$\mathbb{R}^4, M_{4,1}, M_{2,2}, \mathbb{R}^4 \times \{0\}.$$

5.3: Ma trận biểu diễn của biến đổi tuyến tính

Định lí 5.3.1 (ma trận biểu diễn của biến đổi tuyến tính)

Xét biến đổi tuyến tính $T : V \to V'$ và $B = \{v_1, ..., v_n\}$, B' tương ứng là các cơ sở của V, V'. Xét ma trận $A = ([T(v_1)]_{B'}, ..., [T(v_n)]_{B'})$, khi đó

$$[T(v)]_{B'} = A[v]_B, \forall v \in V.$$

Ma trận A được gọi là ma trận biểu diễn của T ứng với các cơ sở B, B', kí hiệu $A = [T]_{BB'}$.

Trong trường hợp $V = V'$ và $B = B'$, ma trận A được gọi là ma trận biểu diễn của T ứng với cơ sở B, kí hiệu $A = [T]_B$.

Ví dụ 5.3.1

Xét $B = \{(1,2),(-1,1)\}, B' = \{(1,0),(0,1)\}$ và biến đổi tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $T(x,y) = (x+y, 2x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Định lí 5.3.2

Xét không gian vectơ V với cơ sở B, B' và biến đổi tuyến tính $T : V \to V$. Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B. Khi đó $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$.

Ví dụ 5.3.2

Xét $B = \{(-3,2),(4,-2)\}$, $B' = \{(-1,2),(2,-2)\}$ và biến đổi tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ thoả mãn $[T]_B = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. Tìm $[T]_{B'}$.

Lời giải

Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B. Theo Định lí 5.3.2,

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$