Đại số Tuyến tính
Chương 3: Không gian vectơ

Quan Nguyen

International University, VNU-HCM

quannguyenuw@gmail.com

Tháng 4, 2021

Mục lục

3.1: Các phép toán vectơ trên $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 3.1.1 (hai vectơ bằng nhau)

Hai vectơ $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $u = v$ nếu $u_i = v_i, \forall i = \overline{1, n}$.

Định nghĩa 3.1.2 (phép cộng/trừ vectơ)

Xét hai vectơ $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$. Khi đó:
(a) Vectơ $a = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$ được gọi là tổng của hai vectơ u và v, kí hiệu $a = u + v$.
(b) Vectơ $b = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, ..., u_n - v_n)$ được gọi là hiệu của hai vectơ u và v, kí hiệu $b = u - v$.

Định nghĩa 3.1.3 (phép nhân vô hướng vectơ)

Xét vectơ $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ và hằng số $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kì. Khi đó vectơ $v = (\alpha u_1, \alpha u_2, ..., \alpha u_n)$ được gọi là tích của u và α, kí hiệu $v = \alpha u$.

Định lí 3.1.1 (không gian vectơ $\mathbb{R}^n$)

Với mọi vectơ u, v, w $\in \mathbb{R}^n$ và hằng số c, d:

(a) $u + v \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ đóng dưới phép cộng vectơ)
(b) $u + v = v + u$ (phép cộng vectơ có tính giao hoán)
(c) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (phép cộng vectơ có tính kết hợp)
(d) $u + 0 = u$ (phần tử đơn vị của phép cộng vectơ)
(e) $u + (-u) = 0$ (phần tử nghịch đảo của phép cộng vectơ)
(f) $cu \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ đóng dưới phép nhân vô hướng)
(g) $c(u + v) = cu + cv$
(phép nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng vectơ)
(h) $(c + d)u = cu + du$
(phép nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng số thực)
(i) $c(du) = (cd)u$ (phép nhân vô hướng có tính kết hợp)
(j) $1u = u$ (phần tử đơn vị của phép nhân vô hướng)

Định lí 3.1.2 (tính chất của phép cộng vectơ và phép nhân vô hướng)

Với mọi vectơ u, v $\in \mathbb{R}^n$ và hằng số c:
(a) Nếu $u + v = v$ thì $u = 0$.
(b) Nếu $u + v = 0$ thì $u = -v$.
(c) $0v = 0$.
(d) $c0 = 0$.
(e) Nếu $cv = 0$ thì $c = 0$ hoặc $v = 0$.
(f) $-(-v) = v$.

Định nghĩa 3.1.4 (tổ hợp tuyến tính)

Xét $n + 1$ vectơ $x, v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$.
Giả sử tồn tại các số thực $c_1, c_2, ..., c_n$ thoả $x = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$.
Khi đó x được gọi là một tổ hợp tuyến tính của n vectơ $v_1, v_2, ..., v_n$.

Định nghĩa 3.2.1 (không gian vectơ)

Xét tập hợp $V \neq \emptyset$ với các phép toán cộng và nhân (vô hướng) cho trước. Giả sử với mọi phần tử $u, v, w \in V$ và hằng số c, d:

(a) $u + v \in V$ (V đóng dưới phép cộng)
(b) $u + v = v + u$ (phép cộng trên V có tính giao hoán)
(c) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (phép cộng trên V có tính kết hợp)
(d) $\exists 0 \in V$: $u + 0 = u, \forall u \in V$ (phần tử đơn vị của phép cộng trên V)
(e) $\exists -u \in V$: $u + (-u) = 0$ (phần tử nghịch đảo của phép cộng trên V)
(f) $cu \in V$ (V đóng dưới phép nhân)
(g) $c(u + v) = cu + cv$
(phép nhân trên V có tính phân phối đối với phép cộng trên V)
(h) $(c + d)u = cu + du$
(phép nhân trên V có tính phân phối đối với phép cộng số thực)
(i) $c(du) = (cd)u$ (phép nhân trên V có tính kết hợp)
(j) $1u = u$ (phần tử đơn vị của phép nhân trên V)

Khi đó V được gọi là một không gian vectơ và mỗi phần tử của V được gọi là một vectơ trên V.

Ví dụ 3.2.1

Theo Định lí 3.1.1, $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ.

Ví dụ 3.2.2

Xét hai số tự nhiên m, n và $M_{m,n}$ là tập hợp mọi ma trận gồm m hàng, n cột. Khi đó $M_{m,n}$, cùng với phép cộng trong Định nghĩa 1.4.2 và phép nhân trong Định nghĩa 2.1.6, là một không gian vectơ.

Ví dụ 3.2.2 là hệ quả trực tiếp của Định lí 1.4.1 và Ví dụ 3.2.1.

Ví dụ 3.2.3

Xét số tự nhiên n và P_n là tập hợp mọi đa thức có bậc không vượt quá n. Khi đó P_n, cùng với các phép cộng - nhân thông thường, là một không gian vectơ.

Định nghĩa 3.2.2 (tính liên tục của hàm số thực)

Với tập $A \subset \mathbb{R}$ bất kì, một hàm số f: $A \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục tại điểm $a \in A$ nếu

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Ngược lại, ta nói hàm số f gián đoạn tại điểm a.
Hàm số f được gọi là liên tục trên A nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc A.

Định nghĩa 3.2.3 (phép cộng hàm số thực)

Với tập $A \subset \mathbb{R}$ và hai hàm số f, g: $A \to \mathbb{R}$ bất kì, hàm số h: $A \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$h(x) = f(x) + g(x), \forall x \in A$$

được gọi là tổng của hai hàm số f và g, kí hiệu $h = f + g$.

Định nghĩa 3.2.4 (phép nhân vô hướng hàm số thực)

Với tập $A \subset \mathbb{R}$, hằng số c và hàm số f: $A \to \mathbb{R}$ bất kì, hàm số g: $A \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$g(x) = c \cdot f(x),\ \forall x \in A$$

được gọi là tích của hàm số f và hằng số c, kí hiệu $g = cf$.

Định lí 3.2.1 (tổng của hai hàm số thực liên tục)

Với tập $A \subset \mathbb{R}$ và hai hàm số f, g: $A \to \mathbb{R}$ bất kì, nếu f và g liên tục trên A thì $f + g$ liên tục trên A.

Chứng minh

Xét điểm $a \in A$ bất kì, ta sẽ chứng minh $f + g$ liên tục tại a.

Chứng minh (tt)

Với $\epsilon > 0$ bất kì, do f và g liên tục tại a nên theo Định nghĩa 3.2.2,

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in A,\ |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ và}$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in A,\ |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Do đó, nếu chọn $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ thì với mọi $x \in A$ thoả $|x - a| < \delta$,

$$|(f + g)(x) - (f + g)(a)| = |f(x) - f(a) + g(x) - g(a)|$$

$$\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Theo Định nghĩa 3.2.2, $f + g$ liên tục tại mọi điểm $a \in A$ và do đó, liên tục trên A. ■

Định lí 3.2.2 (phép nhân vô hướng với hàm số thực liên tục)

Với tập $A \subset \mathbb{R}$, hằng số c và hàm số f: $A \to \mathbb{R}$ bất kì, nếu f liên tục trên A thì cf liên tục trên A.

Chứng minh

Xét điểm $a \in A$ bất kì, ta sẽ chứng minh cf liên tục tại a.
Với $\epsilon > 0$ bất kì, do f liên tục tại a nên theo Định nghĩa 3.2.2,

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in A, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \tfrac{\epsilon}{|c|+1}.$$

Do đó, nếu chọn $\delta = \delta_1$ thì với mọi $x \in A$ thoả $|x - a| < \delta$,

$$|(cf)(x) - (cf)(a)| = |c \cdot f(x) - c \cdot f(a)| = |c| \cdot |f(x) - f(a)| \leq |c| \cdot \tfrac{\epsilon}{|c|+1} < \epsilon.$$

Theo Định nghĩa 3.2.2, cf liên tục tại mọi điểm $a \in A$ và do đó, liên tục trên A. ■

Ví dụ 3.2.4

Xét tập $A \subset \mathbb{R}$ và $C(A)$ là tập hợp mọi hàm số thực xác định và liên tục trên A. Khi đó $C(A)$, cùng với phép cộng trong Định nghĩa 3.2.2 và phép nhân trong Định nghĩa 3.2.3, là một không gian vectơ.

Ví dụ 3.2.4 là hệ quả trực tiếp của Định lí 3.2.1 và Định lí 3.2.2.

Ví dụ 3.2.5

Tập các số nguyên $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, cùng với các phép cộng - nhân thông thường, không là một không gian vectơ.

Chứng minh

$1 \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ nhưng $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ không đóng dưới phép nhân. ■

Ví dụ 3.2.6

Xét P_2 là tập hợp mọi đa thức có bậc đúng bằng 2. Khi đó P_2, cùng với các phép cộng - nhân thông thường, không là một không gian vectơ.

Chứng minh

$x^2, -x^2 \in P_2$ nhưng $x^2 - x^2 = 0 \notin P_2 \Rightarrow P_2$ không đóng dưới phép cộng. ■

Ví dụ 3.2.7

Xét tập $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ được gắn với phép cộng thông thường và phép nhân xác định bởi: $c \cdot (a,\ b) = (ca,\ 0),\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.
Khi đó $\mathbb{R}^2$ không là một không gian vectơ.

Chứng minh

$(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ nhưng $1 \cdot (1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1) \Rightarrow \mathbb{R}^2$ không đóng dưới phép nhân. ■

Định lí 3.2.3 (phép cộng và phép nhân trên không gian vectơ)

Xét không gian vectơ V, vectơ $v \in V$ và hằng số c bất kì. Khi đó:
(a) $0v = 0$ (ở đây $0 \in \mathbb{R}$).
(b) $c0 = 0$ (ở đây $0 \in V$).
(c) Nếu $cv = 0$ thì $c = 0$ hoặc $v = 0$.
(d) $(-1)v = -v$.

Định lí 3.2.3 là tổng quát của Định lí 3.1.2 cho không gian vectơ bất kì.

3.3: Không gian vectơ con

Định nghĩa 3.3.1 (không gian vectơ con)

Xét không gian vectơ V với các phép cộng và nhân cho trước.
Giả sử tồn tại tập $W \subset V$ thoả mãn W, cùng với các phép cộng và nhân trên V, là một không gian vectơ.
Khi đó W được gọi là một không gian (vectơ) con của V.

Định lí 3.3.1 (không gian con tầm thường)

Với mọi không gian vectơ V, $\emptyset$ và V là các không gian con của V.

Một không gian con không tầm thường của một không gian vectơ cho trước còn được gọi là không gian con chuẩn của không gian vectơ đó.

3.3: Không gian vectơ con

Định lí 3.3.2 (điều kiện cấu thành không gian con)

Giả sử W là tập con của không gian vectơ V cho trước.
Khi đó W, cùng với các phép cộng và nhân trên V, là một không gian vectơ khi và chỉ khi các mệnh đề sau đúng:
(a) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$ (W đóng dưới phép cộng)
(b) $u \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cu \in W$ (W đóng dưới phép nhân)

Định lí 3.3.3 (giao của hai không gian con)

Nếu V, W là hai không gian con của không gian vectơ U thì $V \cap W$ cũng là không gian con của U.

Ví dụ 3.3.1

Xét $M_{2,2}$ là tập hợp mọi ma trận vuông 2×2 và W là tập hợp mọi ma trận đối xứng trong $M_{2,2}$. Khi đó W, cùng với các phép toán cộng - nhân vô hướng ma trận, là không gian con của $M_{2,2}$.

Chứng minh

Theo Ví dụ 3.2.2, $M_{2,2}$ là một không gian vectơ.

Với $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} \in W$ và $g \in \mathbb{R}$ bất kì,

$M + N = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ b+e & c+f \end{pmatrix} \in W$ và $gM = \begin{pmatrix} ga & gb \\ gb & gc \end{pmatrix} \in W$.

Theo Định lí 3.3.2, W là không gian con của $M_{2,2}$.

Định nghĩa 3.4.1 (bao tuyến tính - hệ sinh)

Xét không gian vectơ V và tập $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$.
Khi đó **bao tuyến tính** của S trong V, kí hiệu span(S), được xác định bởi:

$$\text{span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i v_i : c_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n} \right\}.$$

Nếu span(S) = V thì S được gọi là một **hệ sinh** của V.

Định lí 3.4.1 (tính chất của bao tuyến tính)

Xét không gian vectơ V và tập $S \subset V$. Khi đó:
(a) span(S) là một không gian con của V.
(b) Với mọi không gian con W của V, nếu $S \subset W$ thì $\text{span}(S) \subset W$.

Ví dụ 3.4.1

Đặt $S = \{(1,2,3),(0,1,2),(-2,0,1)\}$ thì S là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Chứng minh

Xét $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ bất kì và ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Do $|A| = -1 \neq 0$ nên theo Định lí 2.1.7, A khả nghịch.

Theo Định lí 1.4.12, phương trình $Ax = b$ có nghiệm $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Khi đó $b = x_1(1,2,3) + x_2(0,1,2) + x_3(-2,0,1) \Rightarrow b \in \text{span}(S)$.

Vậy $\mathbb{R}^3 \subset \text{span}(S)$, nhưng $S \subset \mathbb{R}^3$ nên theo Định lí 3.4.1a, $\text{span}(S) \subset \mathbb{R}^3$.

Do đó $\text{span}(S) = \mathbb{R}^3$, hay S là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$. ∎

Định nghĩa 3.4.2 (độc lập tuyến tính - phụ thuộc tuyến tính)

Xét không gian vectơ V và tập $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$.

Khi đó nếu phương trình $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$ có nghiệm duy nhất $c_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$

thì các vectơ trong S được gọi là độc lập tuyến tính với nhau.

Ngược lại, các vectơ trong S được gọi là phụ thuộc tuyến tính với nhau.

Định lí 3.4.2 (điều kiện phụ thuộc tuyến tính)

Xét không gian vectơ V và tập $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$. Khi đó các vectơ trong S phụ thuộc tuyến tính với nhau khi và chỉ khi tồn tại một vectơ thuộc S là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

Ví dụ 3.4.2

Chứng minh các vectơ $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (-2, 0, 1)$ độc lập tuyến tính với nhau.

Chứng minh

Giả sử vectơ v_3 đã cho là một tổ hợp tuyến tính của hai vectơ v_1, v_2. Khi đó $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R} : v_3 = k_1 v_1 + k_2 v_2$ hay

$$\begin{cases} k_1 = -2 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \\ 3k_1 + 2k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = 4 \\ 1 = 3k_1 + 2k_2 = 2 \end{cases}, \text{ mâu thuẫn.}$$

Do đó giả sử là sai và v_3 không là một tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2. Tương tự, v_1, v_2 không là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại. Do đó theo Định lí 3.4.2, v_1, v_2, v_3 độc lập tuyến tính với nhau. ∎

Định nghĩa 3.5.1 (cơ sở)

Xét không gian vectơ V và tập $S \subset V$ thoả mãn:
(a) S là một hệ sinh của V, hay $\text{span}(S) = V$.
(b) Các vectơ trong S độc lập tuyến tính với nhau.
Khi đó S được gọi là một cơ sở của V.

Ví dụ 3.5.1

Đặt $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\}$ thì S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3.5.1 là hệ quả trực tiếp của Ví dụ 3.4.1 và Ví dụ 3.4.2.

Ví dụ 3.5.2

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ là một cơ sở của $M_{2,2}$.

Định lí 3.5.1 (biểu diễn theo cơ sở)

Xét không gian vectơ V với cơ sở $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Với $v \in V$ bất kì, tồn tại duy nhất bộ n số thực $c_1, c_2, ..., c_n$ thoả $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$.

Biểu diễn $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ được gọi là biểu diễn theo cơ sở S của v.

Định lí 3.5.2 (số chiều của không gian vectơ)

Xét không gian vectơ V với cơ sở S gồm n vectơ. Khi đó mọi cơ sở của V đều có n vectơ, và n được gọi là số chiều của V, kí hiệu $\dim(V) = n$.

Định lí 3.5.3 (số chiều và tính độc lập tuyến tính)

Xét không gian vectơ n chiều V và tập $S \subset V$ thoả mãn các vectơ trong S độc lập tuyến tính với nhau. Khi đó S có không quá n phần tử.

Ví dụ 3.5.3

Theo Ví dụ 3.5.1 và Ví dụ 3.5.2, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ và $\dim(M_{2,2}) = 4$.

Định lí 3.5.4 (số chiều và cơ sở)

Xét không gian vectơ n chiều V và tập $S \subset V$ có n phần tử.
Khi đó các mệnh đề sau là tương đương nhau:
(a) S là một cơ sở của V.
(b) Các vectơ trong S độc lập tuyến tính với nhau.
(c) S là một hệ sinh của V, hay $\mathrm{span}(S) = V$.

3.6: Hạng của ma trận

Định nghĩa 3.6.1 (không gian hàng - không gian cột)

Xét ma trận $m \times n$ $A = \{a_{i,j}\}$ bất kì.
Đặt $R = \left\{R_i : i = \overline{1, m}\right\}$ và $C = \left\{C_j : j = \overline{1, n}\right\}$, trong đó R_i là vectơ hàng sinh bởi hàng i của A và C_j là vectơ cột sinh bởi cột j của A. Khi đó:

(a) Không gian hàng của A được xác định bởi: $RS(A) = span(R)$.

(b) Không gian cột của A được xác định bởi: $CS(A) = span(C)$.

Định lí 3.6.1 (không gian hàng của hai ma trận tương đương)

Với hai ma trận tương đương A, B bất kì, $RS(A) = RS(B)$.

Định lí 3.6.2 (cơ sở của không gian hàng)

Với ma trận A ở dạng hàng bậc thang rút gọn và R là tập tất cả các vectơ hàng sinh bởi các hàng khác hàng không của A, R là một cơ sở của $RS(A)$.

Ví dụ 3.6.1

Tìm một cơ sở của span(S), với $S = \{(-1, 2, 5), (3, 0, 3), (5, 1, 8)\}$.

Lời giải

Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss - Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$.

Theo Định nghĩa 3.6.1 và Định lí 3.6.1, $\text{span}(S) = RS(A) = RS(B)$.
Do đó theo Định lí 3.6.2, $\{(1, -2, -5), (0, 1, 3)\}$ là một cơ sở của span(S).

Định lí 3.6.3 (hạng của ma trận)

Với mọi ma trận A, $\dim(RS(A)) = \dim(CS(A)) = k$ được gọi là hạng của A, kí hiệu $k = \text{rank}(A)$.

Định lí 3.6.4 (không gian cột của hai ma trận tương đương)

Xét hai ma trận $m \times n$ A, B tương đương nhau và k số nguyên dương phân biệt $i_1, i_2, ..., i_k \in [1, n]$ bất kì $(k \leq n)$.
Đặt $C_A = \left\{C_{A,u} : u = \overline{1, k}\right\}$ và $C_B = \left\{C_{B,u} : u = \overline{1, k}\right\}$, trong đó $C_{A,u}, C_{B,u}$ lần lượt là vectơ cột sinh bởi cột i_u của A và B. Khi đó:
(a) Các vectơ trong C_A và C_B có tính độc lập tuyến tính giống nhau.
(b) $\text{span}(C_A) = CS(A) \Leftrightarrow \text{span}(C_B) = CS(B)$.

Lưu ý rằng với mọi ma trận A, $CS(A) = RS(A^T)$, do đó với một bài toán bất kì trên không gian cột của ma trận, bên cạnh việc sử dụng Định lí 3.6.4, ta có thể sử dụng phép chuyển vị để đưa bài toán đã cho về bài toán tương đương trên không gian hàng.

Định lí 3.6.5 (không gian nghiệm)

Xét ma trận $m \times n$ A bất kì và $N = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ là tập tất cả các bộ nghiệm của hệ phương trình $Ax = 0$. Khi đó N là một không gian con của $\mathbb{R}^n$ và được gọi là không gian nghiệm của A, kí hiệu $N = NS(A)$.

Định nghĩa 3.6.2 (số vô hiệu)

Số vô hiệu (nullity) của một ma trận A được xác định bởi:

$$\text{nullity}(A) = \dim(NS(A)).$$

Định lí 3.6.6 (số vô hiệu và hạng của ma trận)

Với mọi ma trận $m \times n$ A, $n = \text{rank}(A) + \text{nullity}(A)$.

Ví dụ 3.6.2

Tìm rank(A) và nullity(A), với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$.

Lời giải

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss - Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Theo Định lí 3.6.1 và Định lí 3.6.2, rank(A) = dim(RS(A)) = dim(RS(B)) = 3. Do đó theo Định lí 3.6.6, nullity(A) = 5 - rank(A) = 2.

3.6: Hạng của ma trận

Định lí 3.6.7 (tính có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính)

Với mọi hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, các mệnh đề sau tương đương:
(a) Hệ đã cho có nghiệm (giải được).
(b) $b \in CS(A)$.
(c) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.

Định lí 3.6.8 (hạng và tính khả nghịch của ma trận)

Với mọi ma trận vuông $n \times n$ A, các mệnh đề sau tương đương:
(a) A khả nghịch.
(b) Các vectơ hàng của A độc lập tuyến tính với nhau.
(c) Các vectơ cột của A độc lập tuyến tính với nhau.
(d) $\text{rank}(A) = n$.

Định nghĩa 3.7.1 (toạ độ theo cơ sở)

Xét không gian vectơ V với cơ sở $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ và vectơ $v \in V$ bất kì.

Giả sử $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ là biểu diễn theo cơ sở S của vectơ v.

Khi đó toạ độ theo cơ sở S của v được xác định bởi: $[v]_S = (c_1, c_2, ..., c_n)$.

Lưu ý rằng một không gian vectơ có thể có nhiều cơ sở khác nhau. Do đó, với một vectơ v cho trước, toạ độ theo các cơ sở khác nhau của v có thể sẽ khác nhau.

Ví dụ 3.7.1

$x = (1, 2, -1)$, $S = \{(1, 0, 1), (0, -1, 2), (2, 3, -5)\} \to [x]_S = (5, -8, -2)$.
$T = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \to [x]_T = (1, 2, -1) \neq [x]_S$.

Định lí 3.7.1 (ma trận chuyển cơ sở - phép chuyển cơ sở)

Xét không gian vectơ n chiều V với hai cơ sở phân biệt B, B'.
Khi đó tồn tại duy nhất ma trận vuông $n \times n$ P thoả mãn:

$$P[x]_B = [x]_{B'}, \forall x \in V.$$

P được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.
Ánh xạ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ xác định bởi: $f([x]_B) = P[x]_B = [x]_{B'}, \forall x \in V$, được gọi là phép chuyển cơ sở từ B sang B'.

Định lí 3.7.2 (tính chất của ma trận chuyển cơ sở)

Xét hai cơ sở phân biệt B, B' của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, nếu P là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B' thì P khả nghịch và P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

Định lí 3.7.3 (phương pháp tìm ma trận chuyển cơ sở)

Xét hai cơ sở phân biệt A, A' của $\mathbb{R}^n$ và P là ma trận chuyển cơ sở từ A sang A'. Giả sử B, B' lần lượt là các ma trận cấu thành bởi các cơ sở A và A', khi đó phép khử Gauss - Jordan biến B' thành I_n sẽ biến B thành P. Nói cách khác, hai ma trận $[B'|B]$ và $[I_n|P]$ tương đương nhau.

Ví dụ 3.7.2

Xét $B = \{(-1,2),(2,-2)\}$ và $B' = \{(-3,2),(4,-2)\}$ là hai cơ sở trên $\mathbb{R}^2$. Tìm ma trận chuyển cơ sở P từ B sang B'.

Lời giải

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{G. - J.}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$