Đại số Tuyến tính
Chương 4: Không gian tích trong

Quan Nguyen

International University, VNU-HCM

quannguyenuw@gmail.com

Tháng 6, 2021

Mục lục

4.1: Không gian tích trong

Định nghĩa 4.1.1 (không gian tích trong)

Xét không gian vectơ V và một hàm số $f : V \times V \to \mathbb{R}$ thoả mãn:

a) $\begin{cases} f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w), \forall u,v,w \in V \\ f(au,v) = a \cdot f(u,v), \forall u,v \in V, a \in \mathbb{R} \end{cases}$ (tính tuyến tính)

b) $f(u,v) = f(v,u), \forall u,v \in V$ (tính đối xứng)

c) $f(u,u) \geq 0, \forall u \in V$ và $f(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (tính xác định dương)

Khi đó f được gọi là một tích trong trên V và (V,f) được gọi là một không gian tích trong.

Ta thường kí hiệu tích trong bởi toán tử $\langle , \rangle$.

4.1: Không gian tích trong

Ví dụ 4.1.1

Hàm số $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\langle u, v\rangle = u \cdot v, \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

là một tích trong trên $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 4.1.2

Hàm số $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2, \forall u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

là một tích trong trên $\mathbb{R}^2$.

4.1: Không gian tích trong

Ví dụ 4.1.3

Hàm số $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 - 2u_2 v_2 + u_3 v_3, \forall u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

không là một tích trong trên $\mathbb{R}^3$.

Định lí 4.1.1

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và $a, b \in \mathbb{R}, u, v, w \in V$ bất kì:

a) $\langle 0, u \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$;

b) $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$;

c) $\langle u, av \rangle = a \langle u, v \rangle$.

Định nghĩa 4.1.2

Xét không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$. Ta kí hiệu:
a) **Chuẩn** (hay **độ dài**) của vectơ $u \in V$ bởi $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$;
b) **Khoảng cách** giữa hai vectơ $u, v \in V$ bởi $d(u, v) = ||u - v||$;
c) **Góc** giữa hai vectơ không âm $u, v \in V$ bởi $\cos(u, v) = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||}$;
d) Hai vectơ $u, v \in V$ được gọi là **trực giao** với nhau nếu $\langle u, v\rangle = 0$.

Nếu hai vectơ u, v trực giao với nhau, ta kí hiệu $u \perp v$.

Định nghĩa 4.1.3 (chuẩn hoá vectơ)

Xét không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và vectơ $v \in V, v \neq 0$.
a) Nếu $||v|| = 1$ thì v được gọi là **vectơ đơn vị**.
b) Nếu $||v|| \neq 1$ thì vectơ đơn vị $u = \frac{v}{||v||}$ được gọi là **chuẩn hoá** của v.

Định lí 4.1.2 (tính chất của khoảng cách)

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và $u, v, w \in V$ bất kì:

a) $d(u, v) \geq 0$ và $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;

b) $d(u, v) = d(v, u)$;

c) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Trong lí thuyết tôpô, hàm đo khoảng cách còn được gọi là **metric**.

Định lí 4.1.3 (tính chất của chuẩn)

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và $a \in \mathbb{R}, u, v \in V$ bất kì:

a) $||u|| \geq 0$ và $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

b) $||au|| = |a| \cdot ||u||$;

c) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

4.2: Cơ sở trực chuẩn

Định nghĩa 4.2.1 (tập trực giao - tập trực chuẩn - cơ sở trực chuẩn)

Xét không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và $S \subset V$.
a) S được gọi là tập trực giao nếu $u \perp v, \forall \{u, v\} \subset V$;
b) Tập trực giao S được gọi là tập trực chuẩn nếu $||u|| = 1, \forall u \in V$;
c) Tập trực chuẩn S được gọi là cơ sở trực chuẩn nếu S là cơ sở (của V).

Ví dụ 4.2.1

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$$

là các cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.

Định lí 4.2.1

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và tập trực giao $S \subset V$ bất kì, các vectơ trong S độc lập tuyến tính với nhau.

4.2: Cơ sở trực chuẩn

Hệ quả 4.2.1 (cơ sở trực giao)

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và tập trực giao $S \subset V$ bất kì, nếu $|S| = \dim(V)$ và $u \neq 0, \forall u \in S$ thì S là một cơ sở của V.

Ở đây, ta quy ước $|S|$ là **số phần tử** của S.

Định lí 4.2.2 (toạ độ theo cơ sở trực chuẩn)

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$, cơ sở trực chuẩn $B = \{v_1, ..., v_n\}$ và vectơ $u \in V$ bất kì,

$$[u]_B = (\langle u, v_1 \rangle, ..., \langle u, v_n \rangle).$$

Định lí 4.2.3 (sự tồn tại của cơ sở trực chuẩn)

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và không gian con $W \subset V$ bất kì, nếu $\dim(W) > 0$ thì W có cơ sở trực chuẩn T.

Định lí 4.3.1 (chu trình Gram - Schmidt)

Xét không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và không gian con $W \subset V$ với cơ sở $B = \{v_1, ..., v_n\}$. Xét $B' = \{w_1, ..., w_n\}$ và $T = \{u_1, ..., u_n\}$ thoả mãn

$$w_1 = v_1, w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i, \forall k = \overline{2, n} \text{ và } u_i = \frac{w_i}{||w_i||}, \forall i = \overline{1, n}. \textbf{ (1)}$$

Khi đó B' là cơ sở trực giao và T là cơ sở trực chuẩn của W.

Quá trình sử dụng **(1)** để tạo ra cơ sở trực chuẩn T từ cơ sở B được gọi là **chu trình trực chuẩn hoá Gram - Schmidt**, hoặc ngắn gọn hơn là **chu trình Gram - Schmidt**.

Ví dụ 4.3.1

Áp dụng chu trình Gram - Schmidt cho cơ sở sau của $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(1,1,0),(1,2,0),(0,1,2)\}.$$

Lời giải

$$B' = \left\{(1,1,0), \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), (0,0,2)\right\} \text{ và}$$
$$T = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1) \right\}. \blacksquare$$

4.3: Chu trình Gram - Schmidt

Ví dụ 4.3.2

Áp dụng chu trình Gram - Schmidt để tìm cơ sở trực chuẩn của NS(A) với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lời giải

$B = \{(-2,2,1,0),(1,-8,0,1)\}$, $B' = \{(-2,2,1,0),(-3,-4,2,1)\}$ và

$$T = \left\{ \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \left(\frac{-3}{\sqrt{30}}, \frac{-4}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right) \right\}. \blacksquare$$

4.4: Phần bù trực giao

Định nghĩa 4.4.1 (phần bù trực giao)

Xét không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và $S \subset V, v \in V$.

a) v được gọi là trực giao với S, kí hiệu $v \perp S$ nếu $v \perp u, \forall u \in S$;

b) Tập hợp $S^{\perp} = \{v \in V : v \perp S\}$ được gọi là phần bù trực giao của S.

Định lí 4.4.1

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và không gian con $S \subset V$ bất kì:

a) $\{0\}^{\perp} = V$ và $V^{\perp} = \{0\}$;

b) $S^{\perp}$ là một không gian con của V và $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

Ví dụ 4.4.1

Nếu $V = \mathbb{R}^2$ và $S = \{(x, y) \in V : y = 0\}$ thì $S^{\perp} = \{(x, y) \in V : x = 0\}$.

4.4: Phần bù trực giao

Định nghĩa 4.4.2 (tổng trực tiếp)

Xét không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và các không gian con $S_1, S_2 \subset V$. Ta gọi V là tổng trực tiếp của S_1 và S_2, kí hiệu $V = S_1 \oplus S_2$, nếu

$$\forall x \in V, \exists!(v_1, v_2) \in S_1 \times S_2 : x = v_1 + v_2.$$

Ta quy ước toán tử $\exists!$ có nghĩa là **tồn tại duy nhất**.

Định lí 4.4.2

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và không gian con $W \subset V$ bất kì, nếu $\dim(W) < \infty$ thì $V = W \oplus W^\perp$ và $(W^\perp)^\perp = W$.

Định lí 4.4.3

Với ma trận A bất kì gồm m hàng, n cột:

a) $CS(A)^\perp = NS(A^T)$ và $CS(A^T) = NS(A)^\perp$;

b) $CS(A) \oplus NS(A^T) = \mathbb{R}^m$ và $CS(A^T) \oplus NS(A) = \mathbb{R}^n$.

4.5: Hình chiếu trực giao

Định lí 4.5.1 (hình chiếu trực giao)

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$, không gian con $W \subset V$ và vectơ $v \in V$ bất kì, $\exists! w \in W, u \in W^{\perp} : v = u + w$. Ta gọi w là hình chiếu trực giao của v lên W, kí hiệu $w = \text{proj}_W v$.

Định lí 4.5.2

Với không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$ và không gian con $W \subset V$ với cơ sở trực giao $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ và cơ sở trực chuẩn $B_2 = \{w_1, ..., w_n\}$,

$$\text{proj}_W u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i = \sum_{i=1}^{n} \langle u, w_i \rangle \, w_i, \forall u \in V.$$

4.5: Hình chiếu trực giao

Ví dụ 4.5.1

Xét $w_1 = (0, 3, 1), w_2 = (2, 0, 0)$ và $W = \text{span}(\{w_1, w_2\})$. Khi đó

$$\text{proj}_W(1, 1, 3) = \left(1, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Định lí 4.5.3

Xét không gian tích trong $(V, \langle , \rangle)$, không gian con $S \subset V$ và vectơ $v \in V$ bất kì. Đặt $s = \text{proj}_S v$, khi đó

$$||v - s|| < ||v - u||, \forall u \in S \setminus \{s\}.$$

Ở đây, ta quy ước với hai tập hợp A, B bất kì, $A \setminus B = A \cap B^c$.

4.6: Nghiệm bình phương tối thiểu

Định lí 4.6.1

Xét ma trận A gồm m hàng, n cột và các vectơ $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Khi đó:
a) $(Ax)y = x(A^T y)$;
b) $NS(A^T A) = NS(A)$ và $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$;
c) Nếu $m \geq n$ và $\text{rank}(A) = n$ thì ma trận $A^T A$ khả nghịch.

Định lí 4.6.2 (nghiệm bình phương tối thiểu)

Xét ma trận A gồm m hàng, n cột và vectơ $b \in \mathbb{R}^m \setminus CS(A)$.
Nếu $m \geq n$ và $\text{rank}(A) = n$ thì vectơ $\hat{x} = (A^T A)^{-1}(A^T b)$ tồn tại và

$$||b - A\hat{x}|| < ||b - Ax||, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\hat{x}\}.$$

$\hat{x}$ được gọi là nghiệm bình phương tối thiểu của hệ phương trình $Ax = b$.

4.6: Nghiệm bình phương tối thiểu

Ví dụ 4.6.1

Tìm nghiệm bình phương tối thiểu của hệ phương trình $Ax = b$, biết

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ và } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Từ đó tính } \operatorname{proj}_{CS(A)} b.$$

Lời giải

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1}(A^T b) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 3/2 \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{proj}_{CS(A)} b = A\hat{x} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 4/3 \\ 17/6 \end{pmatrix}. \blacksquare$$