Đại số Tuyến tính
Chương 1: Ma trận

Quan Nguyen

International University, VNU-HCM

quannguyenuw@gmail.com

Tháng 3, 2021

Mục lục

1.1: Hệ phương trình đại số tuyến tính

Định nghĩa 1.1.1 (hệ phương trình đại số tuyến tính)

Một phương trình đại số tuyến tính là một phương trình có thể biểu diễn được dưới dạng $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ là các hằng số thực. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các biến của phương trình đó.

Một hệ phương trình đại số tuyến tính là một tập hợp gồm nhiều phương trình đại số tuyến tính (thường có cùng biến). Một bộ các số thực thỏa mãn tất cả các phương trình trong hệ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình đó.

Định lí 1.1.1

Số nghiệm của một hệ phương trình đại số tuyến tính chỉ có thể là 0, 1 hoặc vô hạn.

1.1: Hệ phương trình đại số tuyến tính

Định nghĩa 1.1.2

Hai hệ phương trình đại số tuyến tính có cùng số ẩn được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập hợp nghiệm.

Ví dụ 1.1.1

Hai hệ phương trình đại số tuyến tính sau là tương đương với nhau:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ 9x + 3y = 6 \end{cases}$$

Ở chương trình phổ thông, ta đã được làm quen với các hệ phương trình đại số tuyến tính đơn giản (ít biến số và phương trình).

Ví dụ 1.1.2

Giải các hệ phương trình sau:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Ta có thể dễ dàng giải các hệ phương trình trên bằng các phép biến đổi đại số đơn giản.

Với các hệ phương trình đại số tuyến tính phức tạp (nhiều biến số và phương trình, có thể có nhiều hơn một nghiệm), kĩ thuật biến đổi đại số thông thường trở nên rườm rà, cồng kềnh và thiếu hiệu quả.

Ví dụ 1.1.3

Chứng minh rằng hệ phương trình đại số tuyến tính sau có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình trên.

1.2: Ma trận

Đại số tuyến tính cho chúng ta một phương pháp hiệu quả để xử lí các hệ phương trình đại số tuyến tính phức tạp, thông qua việc thao tác với các vectơ và ma trận sinh bởi hệ phương trình đó.

Định nghĩa 1.2.1 (vectơ trong $\mathbb{R}^n$)

Xét hai điểm $A(a_1, a_2, ..., a_n)$, $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ trong không gian n chiều $\mathbb{R}^n$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{AB}$ được xác định bởi:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ ... \\ b_n - a_n \end{pmatrix}$$

Một kí hiệu khác thường dùng là $\overrightarrow{AB} = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n \rangle$.

Định nghĩa 1.2.2

Xét vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ bất kì.

(a) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{a}$ được xác định bởi $||\overrightarrow{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$.

(b) Nếu $||\overrightarrow{a}|| = 1$ thì $\overrightarrow{a}$ được gọi là vectơ đơn vị.

(c) Nếu $||\overrightarrow{a}|| = 0$ thì $\overrightarrow{a} = (0, 0, ..., 0)$ được gọi là vectơ không.

Ví dụ 1.2.1

(a) Nếu $\overrightarrow{a} = (-3, 4)$ thì $||\overrightarrow{a}|| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

(b) $\overrightarrow{b} = (1, 0)$ là một vectơ đơn vị trong $\mathbb{R}^2$.

(c) $\overrightarrow{c} = (0, 0, 0)$ là một vectơ không trong $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa 1.2.3 (ma trận)

Xét tập hợp A gồm $m \times n$ số thực, được sắp xếp thành m hàng và n cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Khi đó A được gọi là một ma trận $m \times n$, m được gọi là số hàng và n được gọi là số cột của A, $a_{i,j}$ được gọi là phần tử thuộc hàng i, cột j của A.

1.2: Ma trận

Định nghĩa 1.2.4

Xét ma trận A bất kì gồm m hàng, n cột.
(a) Nếu $m = 1$ thì A được gọi là vectơ hàng.
(b) Nếu $n = 1$ thì A được gọi là vectơ cột.
(c) Nếu $m = n$ thì A được gọi là ma trận vuông.
(d) Hai ma trận A, B được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số hàng, số cột và các phần tử tương ứng trên mỗi hàng, mỗi cột bằng nhau.

Ví dụ 1.2.2

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ là một vectơ hàng.
(b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ là một vectơ cột.
(c) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ là một ma trận vuông 2×2.

Định nghĩa 1.2.5 (ma trận hệ số và hệ số mở rộng)

Xét hệ phương trình đại số tuyến tính và hai ma trận tương ứng:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right).$$

A được gọi là ma trận hệ số và $\overline{A}$ được gọi là ma trận hệ số mở rộng sinh bởi hệ phương trình trên.

Ví dụ 1.2.3

Xét hệ phương trình đại số tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

Các ma trận hệ số và ma trận hệ số mở rộng sinh bởi hệ phương trình trên là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right).$$

Định nghĩa 1.2.6 (phép biến đổi hàng sơ cấp)

Xét ma trận A bất kì gồm m hàng, n cột.
Ta định nghĩa các phép biến đổi hàng sơ cấp trên A gồm:
(a) Đổi chỗ hai hàng i và j, kí hiệu là $I_{i,j}$.
(b) Nhân một số $\alpha \neq 0$ với hàng i, kí hiệu là αR_i.
(c) Thêm $\alpha \neq 0$ lần hàng j vào hàng i, kí hiệu là $R_i + \alpha R_j$.

Ví dụ 1.2.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_{1,2}} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 1.2.7

Hai ma trận có cùng kích thước A, B được gọi là tương đương với nhau nếu tồn tại một chuỗi hữu hạn phép biến đổi hàng sơ cấp biến A thành B.

Định lí 1.2.1

Nếu hai hệ phương trình đại số tuyến tính có ma trận hệ số mở rộng tương đương với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương với nhau.

Định lí 1.2.1 khẳng định rằng, các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận hệ số mở rộng của một hệ phương trình đại số tuyến tính bảo toàn tập nghiệm của hệ phương trình đó.
Do vậy, với một hệ phương trình đại số tuyến tính phức tạp, người ta thường làm việc với ma trận hệ số mở rộng của nó, vì biểu diễn của ma trận chỉ gồm các số thực chứ không có các biến và do đó gọn gàng, đẹp mắt và dễ hiểu hơn so với biểu diễn thông thường của hệ.

1.3: Phương pháp khử Gauss - Jordan

Phần tiếp theo của Chương 1 sẽ trình bày về phương pháp khử Gauss - Jordan - một thuật toán nổi tiếng thường được sử dụng trong đại số tuyến tính.

Phương pháp khử Gauss - Jordan được giới thiệu lần đầu vào năm 1810 bởi nhà toán học người Đức Carl Friedrich Gauss và được cải tiến vào năm 1888 bởi nhà trắc địa người đức Wilhelm Jordan, trình bày một thuật toán được sử dụng để giải một hệ phương trình đại số tuyến tính thông qua việc đơn giản hóa ma trận hệ số mở rộng sinh bởi hệ phương trình đó bằng các phép biến đổi hàng sơ cấp.

Phương pháp khử Gauss - Jordan còn được sử dụng để tìm hạng và định thức của một ma trận bất kì, cũng như tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch cho trước.

Định nghĩa 1.3.1

Xét ma trận A bất kì gồm m hàng, n cột.
(a) Một hàng i bất kì của A được gọi là hàng không nếu tất cả các phần tử của hàng đó bằng 0.
(b) Một phần tử $a_{i,j}$ thuộc hàng i, cột j của A được gọi là hệ số chính của hàng i nếu $a_{i,t} = 0, \forall t < j$.

Ví dụ 1.3.1

$$\text{Xét ma trận } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Hàng 3 của A là một hàng không.
(b) Phần tử $a_{1,2} = 1$ là hệ số chính của hàng 1.

1.3: Phương pháp khử Gauss - Jordan

Định nghĩa 1.3.2 (ma trận hàng bậc thang)

Một ma trận A được gọi là ở dạng **hàng bậc thang** nếu:

(a) Mọi hàng không của ma trận đều được đặt xuống dưới cùng.

(b) Với hai hệ số chính $a_{i,j}$, $a_{k,l}$ bất kì của A, nếu $i < k$ thì $j < l$.

Ví dụ 1.3.2

Các ma trận sau đây đều ở dạng hàng bậc thang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 2 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \ln 3 & 4\% \\ 0 & \pi & \cos\alpha \\ 0 & 0 & 10^{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 1.3.3

Biến đổi ma trận sau về dạng hàng bậc thang bằng các phép biến đổi hàng sơ cấp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

Lời giải

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_{1,3}} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+\frac{1}{2}R_1]{R_2-\frac{1}{2}R_1}$$

Lời giải (tt)

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{I_{2,3}} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4+\frac{5}{6}R_2]{R_3-\frac{1}{6}R_2} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{6} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+5R_3} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3: Phương pháp khử Gauss - Jordan

Định nghĩa 1.3.3 (ma trận hàng bậc thang rút gọn)

Một ma trận A ở dạng hàng bậc thang được gọi là ở dạng hàng bậc thang rút gọn nếu:

(a) Mọi hệ số chính của ma trận đều bằng 1.

(b) Với mọi hệ số chính $a_{i,j}$ của A, $a_{t,j} = 0, \forall t \neq i$.

Ví dụ 1.3.4

Các ma trận sau đây đều ở dạng hàng bậc thang rút gọn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 1.3.5

Biến đổi ma trận sau về dạng hàng bậc thang rút gọn bằng các phép biến đổi hàng sơ cấp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

Lời giải

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Vi du 1.3.3}} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 - R_2]{\frac{6}{5}R_3}$$

Lời giải (tt)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 & -1 & -10 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}R_2]{-\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{4}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+\frac{4}{3}R_3]{R_1-\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 1.3.4 (phép khử Gauss - Jordan)

Giả sử tồn tại các ma trận A, B, C tương đương với nhau sao cho B ở dạng hàng bậc thang và C ở dạng hàng bậc thang rút gọn.
(a) Một chuỗi hữu hạn các phép biến đổi hàng sơ cấp biến A thành B được gọi là một phép khử Gauss trên ma trận A.
(b) Một chuỗi hữu hạn các phép biến đổi hàng sơ cấp biến A thành C được gọi là một phép khử Gauss - Jordan trên ma trận A.

Định lí 1.3.1 (sự tồn tại của phép khử Gauss - Jordan)

Với ma trận A bất kì:
(a) Tồn tại một ma trận B ở dạng hàng bậc thang, tương đương với A và một phép khử Gauss trên A biến A thành B.
(b) Tồn tại một ma trận C ở dạng hàng bậc thang rút gọn, tương đương với A và một phép khử Gauss - Jordan trên A biến A thành C.

1.3: Phương pháp khử Gauss - Jordan

Định lí 1.3.1 khẳng định rằng, ta luôn luôn thực hiện được các phép khử Gauss và Gauss - Jordan để đưa một ma trận cho trước về dạng hàng bậc thang và dạng hàng bậc thang rút gọn.

Dễ dàng nhận thấy các ma trận ở dạng hàng bậc thang và dạng hàng bậc thang rút gọn là đơn giản hơn so với ma trận thông thường, tức là chúng được sinh bởi các hệ phương trình đại số tuyến tính dễ tìm nghiệm hơn.

Phương pháp sử dụng các phép khử Gauss và Gauss - Jordan trong quá trình giải một hệ phương trình đại số tuyến tính được gọi chung là phương pháp khử Gauss - Jordan.

Ví dụ 1.3.6

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính sau bằng phép khử Gauss:

$$\begin{cases} x + 4y - 4z = 3 \\ 3y + 2z = 7 \\ -9y + 20z = -8 \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải

Ma trận hệ số mở rộng sinh bởi hệ phương trình đã cho là:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -9 & 20 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 26 & 13 \end{array}\right) = \overline{B}.$$

Lời giải (tt)

Hiển nhiên $\overline{B}$ là ma trận ở dạng hàng bậc thang và được sinh bởi hệ phương trình đại số tuyến tính: $\begin{cases} x + 4y - 4z = 3 \\ \quad 3y + 2z = 7 \\ \quad\quad 26z = 13 \end{cases}$ (2).

Giải hệ (2), ta tìm được nghiệm duy nhất (x, y, z) = (-3, 2, $\frac{1}{2}$).

Do đó, theo Định lí 1.2.1, hệ (1) có nghiệm duy nhất:

$$(x, y, z) = (-3, 2, \tfrac{1}{2}).$$

Ví dụ 1.3.7

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính sau bằng phép khử Gauss - Jordan:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải

Ma trận hệ số mở rộng sinh bởi hệ phương trình đã cho là:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{I_{1,2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Lời giải (tt)

$$\xrightarrow[R_3+3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & -8 & 13 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+8R_2]{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -27 & -27 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{27}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1+7R_3]{R_2+5R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \overline{B}.$$

Hiển nhiên $\overline{B}$ là ma trận ở dạng hàng bậc thang rút gọn và được sinh bởi hệ phương trình đại số tuyến tính: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$

Do đó, theo Định lí 1.2.1, hệ (1) có nghiệm duy nhất:

$$(x_1, x_2, x_3) = (0,\ 1,\ 1).$$

1.4: Các phép toán trên ma trận

Phần tiếp theo của Chương 1 sẽ trình bày về một số phép toán cơ bản trên ma trận như phép cộng, trừ, nhân hai ma trận; phép chuyển vị, nghịch đảo một ma trận.

Một số dạng ma trận đặc biệt như ma trận đường chéo, ma trận đơn vị, ma trận tam giác trên/dưới, ma trận đối xứng/phản xứng cũng sẽ được đề cập trong phần này.

Định nghĩa 1.4.1 (tích vô hướng của hai vectơ)

Xét hai vectơ $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$ trong $\mathbb{R}^n$.
Khi đó tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}$ được xác định bởi:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i.$$

Ví dụ 1.4.1

Nếu $\overrightarrow{a} = (3, 6, 2)$ và $\overrightarrow{u} = (4, 2, 4)$ thì $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{u} = 32$.

Định nghĩa 1.4.2 (phép cộng - trừ ma trận)

Xét ba ma trận A, B, C gồm m hàng và n cột:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m,1} & b_{m,2} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}.$$

(a) Nếu $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$, $\forall i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ thì C được gọi là ma trận tổng của hai ma trận A và B, kí hiệu $A + B = C$.

(b) Nếu $c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}$, $\forall i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ thì C được gọi là ma trận hiệu của hai ma trận A và B, kí hiệu A - B = C.

Định nghĩa 1.4.3 (phép nhân ma trận)

Xét ba ma trận A, B, C có kích thước lần lượt là $m \times n$, $n \times p$, $m \times p$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m,1} & b_{m,2} & \dots & c_{m,p} \end{pmatrix}.$$

Giả sử $c_{i,j} = R_i \cdot C_j, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, trong đó R_i là vectơ hàng sinh bởi hàng i của ma trận A và C_j là vectơ cột sinh bởi cột j của ma trận B.
Khi đó C được gọi là ma trận tích của hai ma trận A và B, kí hiệu $AB = C$.

Ví dụ 1.4.2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 17 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.4: Các phép toán trên ma trận

Định lí 1.4.1 (tính chất của phép cộng ma trận)

Với mọi ma trận A, B, C bất kì có cùng kích thước $m \times n$:
(a) $A + B = B + A$. (phép cộng ma trận có tính giao hoán)
(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$. (phép cộng ma trận có tính phân phối)
(c) Tồn tại duy nhất ma trận $m \times n$ O thỏa mãn $A + O = A, \forall A$.
(d) Tồn tại duy nhất ma trận $m \times n$ D thỏa mãn $A + D = O$.

Định nghĩa 1.4.4

(a) Ma trận O trong Định lí 1.4.1(c) được gọi là ma trận không $m \times n$.
(b) Ma trận D trong Định lí 1.4.1(d) được gọi là ma trận đối của A.

Ma trận đối của A còn được kí hiệu là -A.

Ví dụ 1.4.3

$$\text{Nếu } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ thì -}A = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}.$$

Định lí 1.4.2 (tính chất của phép nhân ma trận)

Với mọi ma trận A, B, C có kích thước phù hợp:

(a) $(AB)C = A(BC)$. (phép nhân ma trận có tính giao hoán)

(b) $(A + B)C = AC + BC$.

(c) $C(A + B) = CA + CB$.

Các ý (b), (c) được gọi là tính phân phối của phép nhân ma trận đối với phép cộng ma trận.

Định nghĩa 1.4.5

Xét một ma trận vuông A kích thước $n \times n$.

(a) Tập hợp các phần tử $a_{i,i}$, $i = \overline{1, n}$ được gọi là đường chéo chính của A.

(b) Nếu mọi phần tử khác 0 của A đều nằm trên đường chéo chính thì A được gọi là một ma trận chéo.

(c) Nếu đường chéo chính của một ma trận chéo A chỉ gồm toàn số 1 thì A được gọi là ma trận đơn vị cấp n, kí hiệu là I_n.

Dễ thấy mọi ma trận đơn vị đều ở dạng hàng bậc thang rút gọn.

Định lí 1.4.3

Với mọi ma trận vuông A kích thước $n \times n$, ta luôn có $AI_n = I_nA = A$.

1.4: Các phép toán trên ma trận

Định nghĩa 1.4.6

Xét một ma trận vuông A kích thước $n \times n$.
(a) Nếu mọi phần tử nằm dưới đường chéo chính của A đều bằng 0 thì A được gọi là một ma trận tam giác trên.
(b) Nếu mọi phần tử nằm trên đường chéo chính của A đều bằng 0 thì A được gọi là một ma trận tam giác dưới.

Ví dụ 1.4.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ là một ma trận tam giác trên.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ là một ma trận tam giác dưới.}$$

Định lí 1.4.4 (phép chuyển vị ma trận)

Với mọi ma trận $m \times n$ A, tồn tại duy nhất ma trận $n \times m$ B thỏa mãn

$$R_i = C_i, \ \forall i = \overline{1, m}$$

trong đó R_i là vectơ hàng sinh bởi hàng i của ma trận A và C_i là vectơ cột sinh bởi cột i của ma trận B.
B được gọi là ma trận chuyển vị của ma trận A, kí hiệu là $B = A^T$.

Ví dụ 1.4.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Định lí 1.4.5 (tính chất của phép chuyển vị ma trận)

Với mọi ma trận A, B có kích thước phù hợp:

(a) $(A^T)^T = A$. (phép chuyển vị ma trận có tính tự nghịch đảo)

(b) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$.

(c) $(AB)^T = B^T A^T$.

Các ý (b), (c) được gọi là tính phân phối của phép chuyển vị ma trận đối với phép cộng/trừ ma trận và phép nhân ma trận.

Định nghĩa 1.4.7

Xét một ma trận A bất kì.

(a) Nếu $A^T = A$ thì A được gọi là một ma trận đối xứng.

(b) Nếu $A^T = -A$ thì A được gọi là một ma trận phản xứng.

Ví dụ 1.4.6

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ là một ma trận đối xứng.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ là một ma trận phản xứng.}$$

Định lí 1.4.6

(a) Mọi ma trận đối xứng/phản xứng đều là ma trận vuông.
(b) Với mọi ma trận vuông A, tồn tại ma trận đối xứng S và ma trận phản xứng K thỏa mãn $A = S + K$.

Định nghĩa 1.4.7 (phép nghịch đảo ma trận)

Giả sử tồn tại hai ma trận vuông $n \times n$ A, B thỏa mãn $AB = BA = I_n$. Khi đó B được gọi là ma trận nghịch đảo của A, kí hiệu là $B = A^{-1}$ và A được gọi là ma trận khả nghịch.

Ví dụ 1.4.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Định lí 1.4.7 (tính duy nhất của ma trận nghịch đảo)

Với mọi ma trận khả nghịch A, tồn tại duy nhất ma trận B thỏa mãn B là ma trận nghịch đảo của A.

Định lí 1.4.8 (tính chất của phép nghịch đảo ma trận)

Với hai ma trận n $\times$ n khả nghịch A, B bất kì:

(a) A^{-1} khả nghịch và $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(b) A^T khả nghịch và $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

(c) AB khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ý (c) được gọi là tính phân phối của phép nghịch đảo ma trận đối với phép nhân ma trận.

Định lí 1.4.9

$$\text{Xét ma trận } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ thỏa mãn } D = ad - bc \neq 0.$$

$$\text{Khi đó ma trận A khả nghịch và } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 1.4.8 (ma trận sơ cấp)

Một ma trận vuông $n \times n$ E được gọi là ma trận sơ cấp nếu tồn tại một phép biến đổi hàng cơ sở biến E thành I_n.

Ví dụ 1.4.8

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ là các ma trận sơ cấp.}$$

Định lí 1.4.10 (tính chất của ma trận sơ cấp)

(a) Mọi ma trận sơ cấp đều khả nghịch và nghịch đảo của một ma trận sơ cấp là một ma trận sơ cấp.
(b) Xét ma trận sơ cấp $m \times m$ E và phép biến đổi hàng cơ sở e biến E thành I_m. Khi đó với mọi ma trận $m \times n$ A, e biến A thành EA.

Kết hợp Định lí 1.3.1 và Định lí 1.4.10, ta thu được kết quả sau.

Định lí 1.4.11 (ma trận vuông và phép khử Gauss - Jordan)

Với mọi ma trận vuông $n \times n$ A:
(a) A khả nghịch $\Leftrightarrow$ A tương đương với I_n.
(b) Nếu A khả nghịch thì phép khử Gauss - Jordan biến A thành I_n sẽ biến I_n thành A^{-1}.

Định lí 1.4.11 chỉ ra một ứng dụng của phương pháp khử Gauss - Jordan trong quá trình xét tính khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của một ma trận cho trước.

Ví dụ 1.4.9

Xét tính khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lời giải

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss - Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Theo Định lí 1.4.11, A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Định lí 1.4.12

Với mọi ma trận khả nghịch $n \times n$ A và vectơ $b \in \mathbb{R}^n$, hệ phương trình $Ax = b$ luôn có nghiệm duy nhất $x = A^{-1}b$.

Định lí 1.4.12 khẳng định rằng, một hệ phương trình đại số tuyến tính có ma trận hệ số khả nghịch thì luôn có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 1.4.10

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 = 7 \end{cases}$ (1)

Lời giải

Viết lại hệ (1) dưới dạng $Ax = b$, trong đó $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ và $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Dễ thấy A khả nghịch nên theo Định lí 1.4.12, hệ (1) có nghiệm duy nhất:

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ hay } (x_1, x_2) = (5, -3).$$

1.5: Phân rã LU

Phần cuối của Chương 1 sẽ trình bày về phân rã LU - một phương pháp hiệu quả để tìm nghiệm của một hệ phương trình đại số tuyến tính.

Phương pháp phân rã LU được giới thiệu lần đầu vào năm 1938 bởi nhà toán học người Ba Lan Tadeusz Banachiewicz, trình bày một thuật toán được sử dụng để khai triển một ma trận cho trước thành tích của một ma trận tam giác dưới và một ma trận ở dạng hàng bậc thang.

Phương pháp này giúp quá trình tìm nghiệm của một hệ phương trình đại số tuyến tính trở nên dễ dàng, nhanh chóng và thuận tiện hơn, vì các ma trận tam giác dưới và ma trận ở dạng hàng bậc thang là đơn giản hơn so với ma trận thông thường.

Phương pháp phân rã LU thường được sử dụng trong trường hợp ta phải thao tác với nhiều hệ phương trình đại số tuyến tính có ma trận hệ số giống nhau, với điều kiện tài nguyên hạn chế (không có máy móc hỗ trợ...).

1.5: Phân rã LU

Định nghĩa 1.5.1 (phân rã LU)

Xét một ma trận $m \times n$ A. Giả sử tồn tại một ma trận vuông $m \times m$ L và một ma trận $m \times n$ U thỏa mãn:
(a) L là ma trận tam giác dưới và các hệ số trên đường chéo chính của L đều bằng 1.
(b) U là ma trận ở dạng hàng bậc thang và tồn tại một phép khử Gauss biến A thành U.
Khi đó (L, U) được gọi là một phân rã LU của ma trận A.

Ví dụ 1.5.1

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ là một phân rã LU của } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trong một số tài liệu hiện hành, phân rã LU còn được gọi là phân tích LU hay khai triển LU.

Định lí 1.5.1 (sự tồn tại của phân rã LU)

Với mọi ma trận A bất kì, tồn tại ma trận A' thỏa mãn:
(a) Tồn tại một phân rã LU của A'.
(b) Tồn tại hữu hạn phép biến đổi hàng sơ cấp loại (a) biến A thành A'.
Ở đây phép biến đổi hàng sơ cấp loại (a) chính là phép đổi chỗ hai hàng.

Định lí 1.5.1 khẳng định rằng, phương pháp phân rã LU có thể áp dụng cho mọi hệ phương trình đại số tuyến tính sau hữu hạn phép đổi chỗ hai hàng trên hệ đó.

Ví dụ 1.5.2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ không tồn tại phân rã LU, nhưng}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ là một phân rã LU của } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5: Phân rã LU

Phương pháp phân rã LU

Xét hệ phương trình đại số tuyến tính (1). Ta có thể sử dụng phân rã LU để tìm nghiệm của (1) như sau:

1. Biến đổi (1) về dạng $Ax = b$ sao cho tồn tại một phân rã LU của A là (L, U).
2. Viết lại (1) dưới dạng $\begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$, với y là vectơ cùng kích thước với b.
3. Giải hệ phương trình $Ly = b$ để tìm y.
4. Giải hệ phương trình $Ux = y$ để tìm x.

Ví dụ 1.5.3

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính $Ax = b$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix} \text{ và } b = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Lời giải

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U.$$

Lời giải (tt)

Đặt $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix}$. Để (L, U) là một phân rã LU của A thì

$$LU = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 3a & -7a-2 & -2a-1 & 2a+2 \\ 3b & -7b-2c & -2b-c-1 & 2b+2c+1 \\ 3d & -7d-2e & -2d-e-f & 2d+2e+f-1 \end{pmatrix} = A.$$

Từ đó (a, b, c, d, e, f) = (-1, 2, -5, -3, 8 , 3) $\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Lời giải (tt)

Đặt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ thì $Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -9 \\ -y_1 + y_2 = 5 \\ 2y_1 - 5y_2 + y_3 = 7 \\ -3y_1 + 8y_2 + 3y_3 + y_4 = 11 \end{cases}$.

Từ đó $y = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ và $Ux = y \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -9 \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \\ -x_3 + x_4 = 5 \\ -x_4 = 1 \end{cases}$ (1)

Giải hệ (1) cho ta $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.