Đại số Tuyến tính
Chương 2: Định thức ma trận

Quan Nguyen

International University, VNU-HCM

quannguyenuw@gmail.com

Tháng 4, 2021

Mục lục

Định nghĩa 2.1.1 (định thức của ma trận 2×2)

Với $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận vuông 2×2 bất kì, định thức của ma trận A được xác định bởi: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Ví dụ 2.1.1

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Định nghĩa 2.1.2 (định thức con - phụ đại số)

Xét ma trận vuông $n \times n$ A bất kì:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(a) Với mỗi phần tử $a_{i,j} \in A$, đặt $M_{i,j}$ là định thức của ma trận được tạo ra từ A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j. Khi đó $M_{i,j}$ được gọi là định thức con của ma trận A ứng với phần tử $a_{i,j}$.

(b) Biểu thức $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$ được gọi là phụ đại số của phần tử $a_{i,j}$.

Ví dụ 2.1.2

Nếu $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ thì $M_{1,1} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ và $C_{1,1} = -1$.

Định lí 2.1.1 (định thức của ma trận $n \times n$)

Xét ma trận vuông $n \times n$ $A = \{a_{i,j}\}$ bất kì. Kí hiệu

$$f_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j}, \forall i = \overline{1, n} \text{ và } g_j(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j}, \forall j = \overline{1, n}.$$

Khi đó $f_i(A) = g_j(A) = \alpha$, $\forall i, j = \overline{1, n}$.
Đại lượng $\det(A) = |A| = \alpha$ được gọi là định thức của ma trận A.

Định lí 2.1.1 cho ta một công thức truy hồi để tính định thức của một ma trận vuông theo định thức của các ma trận con của nó, bằng phương pháp khai triển theo phụ đại số ứng với một hàng hoặc một cột bất kì của ma trận đã cho.

Ví dụ 2.1.3

Khai triển phụ đại số ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ theo hàng 1, ta được:

$$\det(A) = 0 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 14.$$

Khai triển phụ đại số ma trận A theo hàng 2, ta được:

$$\det(A) = 3 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 14.$$

Định nghĩa 2.1.3 (ma trận tam giác)

Các ma trận tam giác trên, ma trận tam giác dưới và ma trận chéo được gọi chung là ma trận tam giác.

Định lí 2.1.2 (định thức của ma trận tam giác)

Với ma trận tam giác $n \times n$ $A = \{a_{i,j}\}$, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Ví dụ 2.1.4

$$\begin{vmatrix} a & \sqrt{2} & \ln 3 \\ 0 & b & 4\% \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ \cos\alpha & b & 0 \\ \pi & 10^{10} & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

Định lí 2.1.3a (định thức và các phép biến đổi hàng sơ cấp)

Xét ma trận vuông A với hai hàng i, j bất kì và hằng số $\alpha \neq 0$.

(a) Nếu $A \xrightarrow{I_{i,j}} B$ thì $\det(B) = -\det(A)$.

(b) Nếu $A \xrightarrow{\alpha R_i} B$ thì $\det(B) = \alpha\det(A)$.

(c) Nếu $A \xrightarrow{R_i + \alpha R_j} B$ thì $\det(B) = \det(A)$.

Ví dụ 2.1.5

$$\text{Do } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ nên } \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Định nghĩa 2.1.4 (phép biến đổi cột sơ cấp)

Xét ma trận A bất kì gồm m hàng, n cột.
Ta định nghĩa các phép biến đổi cột sơ cấp trên A gồm:
(a) Đổi chỗ hai cột i và j, kí hiệu là $IC_{i,j}$.
(b) Nhân một số $\alpha \neq 0$ với cột i, kí hiệu là αC_i.
(c) Thêm $\alpha \neq 0$ lần cột j vào cột i, kí hiệu là $C_i + \alpha C_j$.

Ví dụ 2.1.6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{IC_{1,2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2C_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Định lí 2.1.3b (định thức và các phép biến đổi cột sơ cấp)

Xét ma trận vuông A với hai cột i, j bất kì và hằng số $\alpha \neq 0$.

(a) Nếu A $\xrightarrow{IC_{i,j}}$ B thì $\det(B) = -\det(A)$.

(b) Nếu A $\xrightarrow{\alpha C_i}$ B thì $\det(B) = \alpha\det(A)$.

(c) Nếu A $\xrightarrow{C_i+\alpha C_j}$ B thì $\det(B) = \det(A)$.

Ví dụ 2.1.7

$$\text{Do } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ nên } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sử dụng Định lí 2.1.2 và Định lí 2.1.3, ta có thể tính nhanh định thức của một ma trận vuông bằng cách thực hiện các phép biến đổi hàng/cột sơ cấp để biến ma trận vuông đó thành ma trận tam giác.

Ví dụ 2.1.8

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Định nghĩa 2.1.5

Xét ma trận A bất kì gồm m hàng, n cột. Một cột i bất kì của A được gọi là cột không nếu tất cả các phần tử của cột đó bằng 0.

Định lí 2.1.4 (điều kiện để ma trận có định thức bằng 0)

Giả sử ma trận vuông A thoả mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:
(a) A có ít nhất một hàng (cột) không.
(b) A có hai hàng (cột) bằng nhau.
(c) Tồn tại một hàng (cột) của A là bội của một hàng(cột) khác.
Khi đó $\det(A) = 0$.

Ví dụ 2.1.9

$$\text{Theo Định lí 2.1.4, } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Định lí 2.1.5 (định thức của ma trận tích)

Với mọi ma trận A, B có kích thước phù hợp, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Định nghĩa 2.1.6 (phép nhân vô hướng ma trận)

Xét hai ma trận $A = \{a_{i,j}\}$, $C = \{c_{i,j}\}$ có cùng kích thước.
Giả sử tồn tại hằng số $\alpha \neq 0$ thoả mãn $c_{i,j} = \alpha a_{i,j}, \forall a_{i,j} \in A$.
Khi đó C được gọi là tích của ma trận A và hằng số α, kí hiệu $C = \alpha A$.

Định lí 2.1.6 (định thức và phép nhân vô hướng)

Với mọi ma trận vuông $n \times n$ A và hằng số $\alpha \neq 0$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Định lí 2.1.6 là một hệ quả của Định lí 2.1.5, khi A là ma trận chéo.

2.1: Định thức - Tính chất của định thức

Định lí 2.1.7 (định thức và tính khả nghịch của ma trận)

Với mọi ma trận vuông A, A khả nghịch $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Định lí 2.1.8 (định thức của ma trận nghịch đảo)

Với mọi ma trận khả nghịch A, $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$.

Ví dụ 2.1.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ và } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (-2) \cdot \frac{-1}{2} = 1.$$

Định lí 2.1.9 (định thức của ma trận chuyển vị)

Với mọi ma trận vuông A, $\det(A) = \det(A^T)$.

2.2: Luật Cramer

Định nghĩa 2.2.1 (ma trận phụ hợp)

Xét ma trận vuông $n \times n$ $A = \{a_{i,j}\}$ bất kì và ma trận C xác định bởi:

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} & \dots & C_{n,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & \dots & C_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1,n} & C_{2,n} & \dots & C_{n,n} \end{pmatrix},$$

trong đó $C_{i,j}$ là phụ đại số của phần tử $a_{i,j} \in A$.
Khi đó C được gọi là ma trận phụ hợp của A, kí hiệu $C = \text{adj}(A)$.

Định lí 2.2.1 (ma trận phụ hợp của ma trận khả nghịch)

Với mọi ma trận khả nghịch A, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$.

Định lí 2.2.2 (Luật Cramer)

Xét ma trận khả nghịch $n \times n$ A và vectơ $b \in \mathbb{R}^n$ thoả mãn hệ phương trình $Ax = b$ có nghiệm duy nhất $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Với mỗi $i = \overline{1, n}$, ta xây dựng ma trận A_i từ A bằng cách thay cột thứ i của A bằng vectơ b. Khi đó $\forall i = \overline{1, n}$, A_i khả nghịch và $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

Luật Cramer thường được sử dụng để tìm bộ nghiệm của một hệ phương trình đại số tuyến tính, khi ta đã biết được tính tồn tại duy nhất của bộ nghiệm đó. Mặc dù phương pháp này không tối ưu bằng một số phương pháp khác như phân rã LU hay phép khử Gauss - Jordan, nhưng các giải thuật được thực hiện là đơn giản hơn và do đó, dễ sử dụng trong các chương trình máy tính hơn.

Trong một số tài liệu hiện hành, luật Cramer còn được gọi là quy tắc Cramer.

2.2: Luật Cramer

Ví dụ 2.2.1

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính $Ax = b$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lời giải

Ta có $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(A) = 10$, $\det(A_1) = 8$, $\det(A_2) =$ -15, $\det(A_3) =$ -16.

Theo luật Cramer, $x = \left(\frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \frac{\det(A_3)}{\det(A)}\right) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{5}\right)$.