

TOPOLOGIA ALGEBRAICA

Vicenç Navarro

Departament d'Àlgebra i Geometria

Universitat de Barcelona

Pere Pascual

Departament de Matemàtica Aplicada I

Universitat Politècnica de Catalunya

Índex

Introducció	v
1. Políedres	1
1. Políedres simplicials	2
2. Aplicacions simplicials	10
3. Subpolíedres	12
4. Espais triangulables	17
5. Políedres abstractes	23
6. Subdivisió baricèntrica	29
7. El teorema d'aproximació simplicial	37
8. Políedres cellulars	42
9. Apèndix: Categories i functors	47
2. Homologia simplicial	53
1. Cadenes d'un políedre. Homologia simplicial	54
2. H_0 i connexió	61
3. Complexs de R -mòduls	63
4. Morfismes de complexs de R -mòduls	69
5. Homotopies entre morfismes de complexs de R -mòduls	76
6. Homologia d'un símplex	79
7. Successions exactes de complexs de R -mòduls	81
8. Successions exactes en homologia simplicial	86
9. Apèndix: Mòduls	90
3. Homologia singular	99
1. Cadenes singulars d'un espai topològic. Homologia singular	100

2.	H_0 i arc-connexió	107
3.	H_1 i el grup fonamental	110
4.	El teorema d'invariància homotòpica	116
5.	El teorema de les cadenes petites	123
6.	La successió exacta de Mayer-Vietoris	131
7.	Homologia relativa singular	137
8.	El teorema d'excisió	144
9.	El teorema de comparació	150
10.	Comparació dels morfismes induïts	155
11.	Caracterització axiomàtica de l'homologia singular	161
4.	Algunes aplicacions de l'homologia	165
1.	L'homologia local de les varietats topològiques	166
2.	Homologia reduïda	176
3.	El teorema de no separació	179
4.	El teorema de separació de Jordan-Brouwer	183
5.	Grau d'aplicacions entre esferes	189
6.	El teorema de Borsuk-Ulam	196
7.	Adjunció de cel·les i homologia	203
8.	El teorema del punt fix de Lefschetz	211
5.	Superfícies topològiques	219
1.	Preliminars als teoremes de classificació	220
2.	Classificació de corbes compactes	221
3.	Superfícies poligonals	223
4.	Les superfícies estàndard	228
5.	Superfícies triangulables	234
6.	Classificació de les superfícies triangulables	236
7.	El teorema de Schönflies	242
8.	Demostració del teorema de Schönflies	247
9.	Triangulació de superfícies	259
10.	Suma connexa de superfícies	264
6.	Varietats topològiques	271
1.	Varietats orientables	272
2.	Orientabilitat de les superfícies compactes	280
3.	El teorema de retracció	290

4.	El teorema d'anul·lació	295
5.	El grup d'homologia H_n de les varietats no compactes	299
6.	El criteri d'orientabilitat	301
7.	Grau d'aplicacions contínues	306
8.	Homologia i orientabilitat de les varietats amb vora	310
9.	El teorema general de separació	315
Bibliografia		323
Índex de matèries		325

Introducció

El llibre que el lector té a les mans és una introducció a la Topologia Algebraica basada en l'Homologia Singular, amb alguns complements de Topologia Geomètrica que volen accentuar el caràcter geomètric d'aquesta matèria.

Des dels seus inicis la Geometria s'ha entés com l'estudi de les figures, dels seus tamany i de les seves formes, i és amb aquesta concepció que hom pot dir que aquest text de Topologia Algebraica és també un llibre de Geometria. Actualment, la Geometria s'estructura, dins de les Matemàtiques, en diverses branques, segons el tipus i les propietats de les figures que s'estudien, i segons les eïnes que s'utilitzen per aquest estudi. En la Geometria Lineal, per exemple, s'estudien les figures més elementals: punts, rectes, plans, còniques, ... En aquest context l'estudi del tamany es realitza a través de les nocions de distància i de mètrica, és a dir, a través de la Geometria Euclidiana, mentres que l'estudi de la forma d'aquestes figures bàsicament es realitza amb la Geometria Afí. Així, de dues circumferències de diferents radis diem que tenen la mateixa forma però diferent tamany, i això es reflecteix en que s'identifiquen en la Geometria Afí, però són objectes diferents per a la Geometria Euclidiana. I més encara, totes les el·lipses, que euclidianament es diferencien segons els semi-eixos, s'identifiquen afinment i defineixen una única forma.

La Topologia es pot considerar una continuació de la Geometria Afí al posar èmfasi en l'estudi de la forma, sense consideracions del tamany, però anant més lluny que la Geometria Afí en considerar objectes geomètrics molt més generals. La Topologia proporciona un marc en el que concretar i estudiar les nocions bàsiques de figura geomètrica i de forma, així, en aquest context, una figura haurà de ser un espai topològic, i dues figures seran de la mateixa forma quan siguin homeomorfes. Un primer pas en l'estudi de

la forma d'aquests objectes geomètrics el realitza la Topologia General, en la que s'introdueixen nocions precises pels conceptes intuitius de finitud, de connexió, etc. En particular, una figura geomètrica es diu que és connexa si qualsevol parell dels seus punts pot unir-se per un camí continu traçat sobre la pròpia figura.

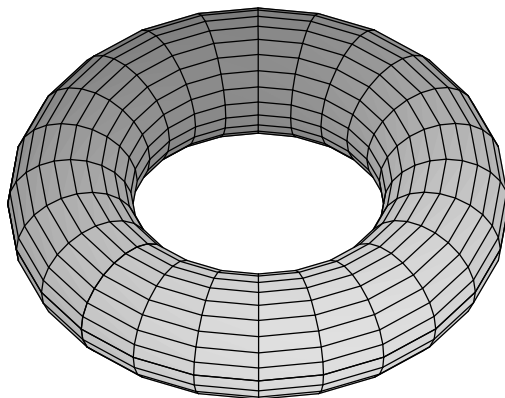
La Topologia Algebraica continua bàsicament la recerca de les propietats de connexió dels espais topològics, aprofundint aquesta recerca al tenir en compte no tan sols si dos punts d'un espai estan connectats o no, sinó també les diferents maneres de connectar-los, i, més encara, estenent l'estudi a les figures de dimensió superior contingudes en aquets espai. A més, i això constitueix un tret distintiu de la Topologia Algebraica, aquestes propietats de connexió s'expressen en termes algebraics, aconseguint transformar en problemes algebraics més senzills problemes geomètrics aparentment difícils en el context inicial.

Per entendre millor l'anterior procés d'algebraització, donarem uns breus apunts històrics sobre els orígens de la Topologia Algebraica.

Sovint es considera la fórmula de Euler, de la que parlarem tot seguit, com l'origen de la Topologia Algebraica, però es poden trobar ja algunes de les idees subjacents en l'escola pitagòrica de la Grècia antiga, doncs és aquí on es comença a concretar el concepte de figura geomètrica en termes de políedres de l'espai, i a pretendre resumir amb un nombre la forma d'un cos de l'espai ordinari. En efecte, com és conegut, aquesta escola pretenia traduir la Geometria a l'Aritmètica, de manera que el punt fos el 1, el segment el 2, el triangle el 3, etc. I, en general, postulava que tota figura geomètrica estava composta per nombres, que podríem dir que eren per ells com els àtoms són per nosaltres, la combinació dels quals hauria de donar un altre nombre, característic de la figura. Encara que no van arribar a elaborar aquest plantejament suficientment, des de la nostra perspectiva actual, hom pot interpretar el concepte més modern de políedre simplicial com la seva evolució natural. Però, d'altra banda, com una figura geomètrica podria descomposar-se de diverses maneres, semblava difícil que aquestes descomposicions ajudessin a obtenir un nombre que retingués la forma de la figura.

Varen fer falta dos mil anys perquè Euler constataés que, per a tot políedre P de forma esfèrica, o convex, si v és el nombre de vèrtexs de P , a el nombre d'arestes i c el nombre de cares, aleshores $v - a + c = 2$. Trobant així un invariant dels políedres d'aquesta forma. Certament, la fórmula de Euler no

és vàlida per a tot políedre de l'espai, ja que si considerem, per exemple, la figura



aleshores $v - a + c = 0$, i podríem concloure d'aquesta igualtat el que, en aquest cas, és evident: que aquesta figura no té forma esfèrica. En general, donat un políedre P de l'espai, a la suma $v - a + c$ se l'anomena la característica de Euler del políedre P , i el primer teorema bàsic de la Topologia Algebraica és que la característica de Euler d'un políedre és un invariant de la seva forma, és a dir, que políedres homeomorfs tenen la mateixa característica de Euler.

De la mateixa manera que els geòmetres grecs van arribar als seus resultats més profunds al estudiar els políedres regulars, també s'obtenen resultats més complets quan hom restringeix la classe dels políedres considerats als que són topològicament regulars, o homogenis, és a dir, els que són varietats topològiques. Per aquestes varietats topològiques es té un invariant numèric molt natural: la seva dimensió. Les corbes, que són els políedres formats per segments, són de dimensió 1, les superfícies, que són els políedres formats per triangles, són de dimensió 2, etc. Però, és la dimensió un invariant de la forma? Malgrat que la seva invariància és aparentment evident, la qüestió no és trivial, com va observar Cantor al demostrar que els espais \mathbf{R} i \mathbf{R}^n són equipotencials, és a dir, que existien aplicacions bijectives de \mathbf{R} a \mathbf{R}^n . No va ser fins a principis d'aquest segle que Brouwer va demostrar, utilitzant les tècniques homològiques que aleshores estaven naixent i que exposarem en aquest llibre, que si dues varietats topològiques són homeomorfs

necessàriament tenen la mateixa dimensió.

Un exemple paradigmàtic d'utilització dels anteriors invariants, i que en un cert sentit culmina l'anterior desig d'aritmètizació de la Geometria, és la caracterització de la forma de les superfícies de l'espai per la seva característica de Euler. És a dir, que dues superfícies compactes i connexes de l'espai ordinari són homeomorfes si, i només si, tenen la mateixa característica de Euler. Hom pot considerar que una part important del text s'organitza al voltant d'aquest resultat.

Fins aquí hem parlat d'invariants numèrics de la forma dels espais, però el pas decisiu que marca l'inici de la Topologia Algebraica moderna és la introducció per Poincaré, a finals del segle passat, de certs grups associats als políedres: els grups d'homologia simplicial, que reflecteixen bona part de la forma del políedre, de manera que, en particular, la característica de Euler es recupera a partir dels rangs d'aquests grups. Malgrat la seva inicial complexitat, l'estudi directe dels grups d'homologia resulta ser més accessible que el dels invariants numèrics abans esmentats, i és, per exemple, de la invariància topològica d'aquests grups de la que en resulta la invariància topològica de la característica de Euler a la que ens hem referit anteriorment.

A més, la Topologia Algebraica no solament associa grups d'homologia als espais topològics sinó que també associa morfismes entre aquest grups a les aplicacions contínues. Com a conseqüència destacada, notem que aquesta associació permet transformar problemes de factorització d'aplicacions contínues en problemes de factorització de morfismes de grups. Un exemple que il·lustra bé aquest procés és la demostració del teorema de no retracció d'una bola sobre la seva vora. En efecte, el problema geomètric és el de factoritzar la identitat de l'esfera \mathbf{S}^{n-1} a través de la inclusió de \mathbf{S}^{n-1} en la bola \mathbf{B}^n , doncs una tal factorització donaria una retracció de \mathbf{B}^n sobre \mathbf{S}^{n-1} . Però, la Topologia Algebraica transforma aquest problema en el de factoritzar la identitat del grup \mathbf{Z} a través del morfisme $\mathbf{Z} \rightarrow 0$, i com aquesta factorització no és possible, això permet concloure la no existència de la retracció.

Passem ara a descriure breument el contingut del llibre.

Al capítol 1 s'introdueix el concepte de políedre simplicial, i s'estableixen les seves propietats topològiques. També introduïm aquí la característica de Euler d'un políedre i provem la fórmula de Euler. Un resultat important d'aquest capítol és el teorema d'aproximació simplicial que permet aproximar

una aplicació contínua entre políedres per una aplicació simplicial.

En el capítol 2 s'introdueix l'homologia simplicial dels políedres i la tècnica principal de càlcul d'aquests grups: les successions exactes. Hem procurat que cadascuna de les nocions algebraiques presentades vagi acompanyada d'una aplicació geomètrica de forma immediata, que mostri així el seu interès. En lloc de demostrar directament la invariància topològica d'aquests grups introduïrem primer l'homologia singular, a la que està dedicat el capítol 3, la invariància topològica de la qual és molt senzilla de demostrar, i provarem després que les dues homologies coincideixen sobre els políedres, enfatitzant així el paper que juguen els axiomes de Eilenberg-Steenrod en els teoremes d'unicitat. Dels anteriors resultats deduirem la invariància topològica de la característica de Euler. Aquest capítol 3 és la part central del llibre, i en ell es troba un dels teoremes fonamentals: el teorema de les cadenes petites, que té com a corollaris els teoremes d'excisió i de Mayer-Vietoris. Això ens permet donar algunes aplicacions geomètriques, com el teorema del punt fix de Brouwer o el teorema d'existència de zeros dels camps de vectors tangents sobre les esferes de dimensió parell.

El capítol 4 recull algunes aplicacions de l'homologia singular, d'entre les que citarem el teorema d'invariància de la dimensió, el teorema de separació generalitzat de Jordan-Brouwer i el teorema del punt fix de Lefschetz. Els dos últims generalitzen, respectivament, el teorema de la corba de Jordan i el teorema del punt fix de Brouwer. A més, en aquest capítol, es calcula l'homologia singular dels espais projectius, estudiant com es modifica l'homologia singular d'un espai topològic quan se li adjunta una cella.

El teorema de classificació de superfícies és el tema central del capítol 5. Aquest és un capítol on la Topologia Algebraica permet distingir entre diverses superfícies, però on són també necessàries tècniques de Topologia Geomètrica, que és la que permet construir homeomorfismes de forma explícita. En particular, presentem una demostració completa del teorema de triangulació de superfícies i per tant del teorema de classificació de superfícies, fent compatible la intuïció amb un desenvolupament rigorós del tema.

Finalment, el capítol 6 està dedicat a l'homologia singular de les varietats topològiques de dimensió superior, posant particular atenció en el concepte d'orientabilitat. Veurem com definir l'orientabilitat en termes homològics, així com els teoremes d'anul·lació dels grups d'homologia superiors a la dimensió de la varietat. També establim el criteri global d'orientabilitat i

deduirem el teorema de no retracció per a les varietats amb vora. En aquest capítol provarem que no hi ha superfícies compactes no orientables a \mathbf{R}^3 , d'on resultarà, juntament amb els resultats del capítol 5, la classificació de les superfícies compactes i connexes de l'espai ordinari a través de la seva característica de Euler. El capítol acaba amb el teorema general de separació que generalitza el teorema de Jordan-Brouwer, i del que es dedueix el teorema de no immersió de les varietats no orientables.

Aquest text recull essencialment el contingut dels cursos de Topologia Algebraica impartits pels autors a la Universitat de Barcelona i a la Universitat Politècnica de Catalunya els darrers anys. El text ha estat ampliat amb alguns resultats i demostracions que la durada semestral dels actuals cursos no permet incloure-hi, però que creiem que ajuden a una millor comprensió o són un complement important dels temes tractats. Per exemple, en el capítol 5 exposarem i provarem el teorema de triangulació de Radó, tot i que la complexitat d'aquest tema aconsella no incloure'l en un curs ordinari de llicenciatura.

Degut a aquest plantejament, alguns temes que ordinàriament es troben en els textos de Topologia Algebraica, com són els teoremes de coeficients universals, la cohomologia singular i els teoremes de dualitat, han quedat fora de la nostra presentació. Exposicions d'aquests temes, que són una continuació natural d'aquest text, es troben, per exemple, en els llibres [10] i [27], citats a la bibliografia, i als que remetem al lector interessat.

Una possible configuració d'un curs semestral basat en aquest text, vindria donada pels apartats 1 a 5 del capítol 1, el capítol 2, els apartats 1 a 9 del capítol 3, els 1 a 5 del capítol 4, els 1 a 5 i el 9 del capítol 5, i els dos primers §§ del capítol 6.

Al llarg del llibre es suposen uns coneixements bàsics de Topologia General, així com d'homotopia i de grup fonamental d'un espai topològic. Coneixements que usualment s'inclouen en un primer curs semestral de Topologia.

Per les cites internes del text hem emprat el següent sistema de referència: el resultat $m.n$ del capítol x és citat dins del mateix capítol x com a $m.n$, mentres que en els altres capítols es cita com a $x.m.n$ o bé, $m.n$ del capítol x .

Durant la preparació d'aquest text, els nostres companys i alumnes ens han ajudat amb els seus comentaris i observacions, a tots ells els hi expressem

el nostre reconeixement. Agraïm, en particular, a J.Amorós, S.del Baño, R.Garcia, F.Guillen, i A.Roig, els seus comentaris detallats a les versions preliminars d'aquest treball, així com el suport que ens han donat en tot moment.

Vicenç Navarro
Pere Pascual

Barcelona, gener 1999

Capítol 1

Políedres

El concepte d'espai topològic és molt general, el que permet aplicar els mètodes i resultats de la Topologia General en molt diverses situacions. Però aquesta gran generalitat fa difícil resoldre amb la mateixa generalitat qüestions molt bàsiques com serien: donar una definició de la dimensió d'un espai topològic, classificar-ne els de petita dimensió, caracteritzar espais molt importants com ara esferes o les boles,... És per això que hom estudia amb més profunditat certs espais topològics suficientment senzills com per poder respondre aquestes qüestions per aquests espais, però alhora suficientment generals com per incloure molts dels espais topològics que hom troba en Geometria, com ara les varietats diferenciables, les varietats algebraiques, etc. Especialment senzills són els espais topològics construïts a partir de peces elementals conegudes, com els símplexs. Els símplexs de dimensió 0 són els punts, els de dimensió 1 són els segments tancats, els de dimensió 2 els triangles, etc. En aquest capítol es formalitza el concepte de políedre simplicial, que correspon a un subespai de \mathbf{R}^N construït a partir de símplexs, enganxats de forma convenient. Aquests espais estan a la base de les tècniques d'homologia que es desenvoluparan en els capítols següents.

Els políedres simplicials són, per la seva pròpia definició, subespais d'un espai afí \mathbf{R}^N i per ells cal especificar els diferents símplexs que els componen. La noció d'espai triangulable, que introduïrem en l'apartat 5, és més flexible, ja que permet triangulacions curvilínies, i inclou espais, com l'esfera \mathbf{S}^n , que no són políedres simplicials.

Les aplicacions entre políedres que conserven tota l'estructura s'anomenen

aplicacions simplicials. Aquestes aplicacions són contínues, però no tota aplicació contínua entre políedres és simplicial. De fet, d'aquestes només n'hi ha un nombre finit, mentres que d'aplicacions contínues n'hi ha moltes més. En l'apartat 7 comprovarem que tota aplicació contínua entre políedres es pot aproximar, en un sentit que cal precisar, per una aplicació simplicial. Aquest resultat és especialment interessant quan es tracta d'estendre nocions que provenen del context simplicial als espais triangulables.

En el darrer apartat del capítol s'introdueixen els políedres cellulars, més generals en primera instància que els políedres simplicials però alhora més immediatament relacionats amb els exemples clàssics.

1 Políedres simplicials

Els políedres que anem a introduir en aquest apartat són espais topològics construïts a partir de símplexs. Començarem la secció estudiant les propietats més rellevants dels símplexs, i seguidament donarem la definició de políedre simplicial. El concepte de políedre es formalitza a través del que anomenarem complex simplicial, que és el conjunt de símplexs que el formen.

En tot el que segueix \mathbf{R}^N denotarà l'espai afí euclidià de dimensió N amb la topologia fixada per la distància euclidiana, és a dir, definida per $d(x, y) = \|x - y\|$ per a tot parell de punts $x, y \in \mathbf{R}^N$.

Donat un conjunt de punts v_0, v_1, \dots, v_n de \mathbf{R}^N , recordem que es diu que són afíment independents si els vectors $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$, són linealment independents. Equivalentment, aquests punts són afíment independents si no hi ha cap subvarietat afí de \mathbf{R}^N de dimensió menor que n que els contingui. En aquest cas, tot punt de la subvarietat afí que generen admet una expressió única en la forma $x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$, on els coeficients $\lambda_i, 0 \leq i \leq n$, són nombres reals determinats unívocament, que verifiquen $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, i que s'anomenen les coordenades baricèntriques de x .

Definició. Siguin $N > 0$, i v_0, v_1, \dots, v_n , amb $n \geq 0$, $n + 1$ punts de \mathbf{R}^N afíment independents. S'anomena *símplex de dimensió n o n -dimensional* de vèrtexs v_0, \dots, v_n al subconjunt de \mathbf{R}^N definit per

$$\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n) = \left\{ x \in \mathbf{R}^N; x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 0, \dots, n \right\},$$

és a dir, a l'envoltura convexa d'aquests punts.

Usarem també l'expressió *n-símplex* per referir-nos a un símplex n -dimensional, i si no cal precisar els vèrtexs d'un n -símplex $\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n)$, el denotarem abreviadament per Δ^n . Els 0-símplexs són punts, els 1-símplexs són segments, els 2-símplexs són triangles, etc., com mostra la figura 1.1.

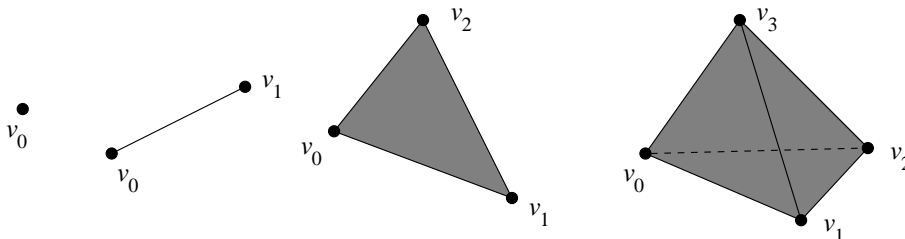


Figura 1.1: Símplexs de dimensions 0, 1, 2 i 3.

Tot símplex és un subconjunt de \mathbf{R}^N , i és per tant un espai topològic amb la topologia induïda per la de \mathbf{R}^N .

Lema 1.1. 1. *Tot símplex és un espai compacte, connex, localment arc-connex i contràctil.*

2. *Dos símplexs n -dimensionals qualssevol són homeomorfs.*

Demostració. 1. Un símplex Δ^n està acotat ja que si B és una bola de centre l'origen de \mathbf{R}^N i radi més gran que el màxim dels mòduls dels vèrtexs de Δ^n , aleshores $\Delta^n \subseteq B$. D'altra banda, Δ^n és un tancat de la subvarietat afí generada pels seus vèrtexs com es desprèn de la definició en termes de coordenades baricèntriques, i per tant és un tancat de \mathbf{R}^N . Com és tancat i acotat, és compacte.

Els símplexs són espais convexos, d'on se segueix la resta de les afirmacions.

2. Dos símplexs n -dimensionals qualssevol són afínnament equivalents. En efecte, donats els símplexs $\Delta(v_0, \dots, v_n)$ i $\Delta(w_0, \dots, w_n)$, l'aplicació definida per

$$\varphi(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_n w_n,$$

és una afinitat contínua entre les subvarietats afins que generen, que defineix un homeomorfisme. \square

D'aquest resultat se segueix que el tipus topològic d'un n -símplex està caracteritzat completament per la seva dimensió, n . El símplex de \mathbf{R}^{n+1} de vèrtexs $v_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, per a i entre 1 i $n+1$, rep el nom de *símplex n -dimensional estàndard*. Així, els símplexs estàndard de dimensions 1 i 2 són els representats en la figura 1.2.



Figura 1.2: 1- i 2-símplexs estàndard.

Vegem ara com els símplexs poden integrar-se per formar espais més complexos.

Definició. Sigui $\Delta(v_0, \dots, v_n)$ un símplex n -dimensional, i $k \geq 0$. Anomenarem *cares k -dimensionals* de $\Delta(v_0, \dots, v_n)$ als símplexs

$$\Delta(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) ,$$

essent $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$.

A les cares 1-dimensionals les anomenarem *arestes* de Δ^n .

Per exemple, les cares d'un 2-símplex $\Delta(v_0, v_1, v_2)$ són el propi 2-símplex, els 1-símplexs $\Delta(v_0, v_1), \Delta(v_0, v_2), \Delta(v_1, v_2)$, i els 0-símplexs v_0, v_1, v_2 .

Definició. Un *complex simplicial* és un conjunt finit de símplexs de \mathbf{R}^N , $K = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$, tal que

- (i) si σ_i és un símplex de K , aleshores totes les cares de σ_i són de K ,
- (ii) si σ_i i σ_j són símplexs de K , aleshores o bé $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ o bé $\sigma_i \cap \sigma_j$ és una cara de σ_i i de σ_j .

Per simplificar l'exposició, considerarem únicament políedres formats per un nombre finit de símplexs, com en la definició anterior. És possible però definir políedres construïts a partir d'un nombre infinit de símplexs. En aquest cas, cal demanar alguna altra propietat a més de (i) i (ii) que eviti, per exemple, considerar \mathbf{R} com un políedre de dimensió zero degut a l'agregació d'infinit 0-símplexs, un per cada punt de \mathbf{R} , el que entraria en contradicció amb la noció intuitiva de dimensió, i que més endavant formalitzarem.

Definició. Un *complex simplicial infinit* és un conjunt de símplexs K de \mathbf{R}^N que verifica les propietats (i) i (ii) de la definició anterior i a més,

- (iii) tot punt de \mathbf{R}^N té un entorn que talla només un nombre finit de símplexs de K .

Així per exemple, si considerem un vèrtex en cada enter de \mathbf{R} , i un 1-símplex per cada interval del tipus $[n, n+1]$, obtenim un complex simplicial infinit.

Definició. Donat un complex simplicial K , s'anomena *políedre simplicial geomètric* associat a K , i es denota per $|K|$, al subespai de \mathbf{R}^N definit per la reunió de tots els símplexs de K :

$$|K| = \cup_{\sigma_i \in K} \sigma_i.$$

Els políedres simplicials són espais topològics fàcilment visualitzables i suficientment generals com per tenir aplicacions significatives. La definició que hem donat es deu a H. Poincaré, qui va adonar-se de les bones propietats d'aquests espais i els va introduir al voltant de l'any 1899.

Per identificar un subespai de \mathbf{R}^N com a políedre no n'hi ha prou de donar el subespai topològic subjacent sinó que cal determinar el complex simplicial que el defineix. En la figura 1.3 veiem exemples d'aquest fet.

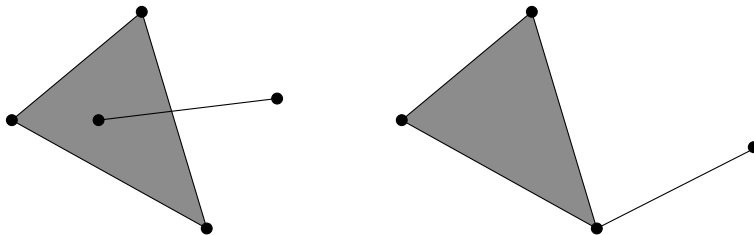


Figura 1.3: (a) no és un políedre, (b) és un políedre.

Si K és un complex simplicial direm que els símplexs $\sigma_i \in K$ són les *cares* de K , i que K és una *triangulació* de $|K|$. Especificar totes les cares d'un complex simplicial K esdevé redundant, ja que aquestes queden unívocament determinades a partir dels símplexs maximals, és a dir, pel conjunt K_{max} de símplexs de K que no són cara de cap altre símplex de K de dimensió superior, ja que es té el següent resultat de demostració immediata.

Lema 1.2. *Sigui K_0 un conjunt finit de símplexs de \mathbf{R}^N tal que la intersecció de dos qualssevol d'ells és una cara pròpia d'ambdós. Aleshores existeix un únic complex simplicial K tal que $K_{max} = K_0$. Es diu que K és el complex generat per K_0 .* \square

Exemples. 1. Un símplex Δ^n genera un complex simplicial, que consta de Δ^n i totes les seves cares. Si no hi ha possibilitat de confusió notarem també Δ^n per referirnos al complex simplicial associat.

2. La vora, o frontera, d'un símplex $(n+1)$ -dimensional Δ^{n+1} , que notarem $\partial\Delta^{n+1}$, és un altre exemple de complex simplicial. En aquest cas, $\partial\Delta^{n+1}$ és el complex que té per cares maximals totes les cares de dimensió n de Δ^{n+1} . El políedre associat és homeomorf a l'esfera de dimensió n , $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$.

Els políedres estan formats per símplexs, en un nombre finit, i per tant hereten d'aquests un bon nombre de propietats topològiques. De la topologia dels políedres destacarem,

Proposició 1.3. *Sigui K un complex simplicial. Aleshores es verifica:*

1. $|K|$ és un espai metrizable, compacte, localment arc-connex, localment contràctil, i verifica el segon axioma de numerabilitat.

2. La topologia de $|K|$ és coherent respecte els símplexs $\sigma \in K$.

Demostració. 1. Com a subespai de \mathbf{R}^N , $|K|$ és de Hausdorff i verifica el segon axioma de numerabilitat. A més, $|K|$ és una unió finita de símplexs, que són compactes segons el lema 1.1, i per tant $|K|$ és compacte.

Comprovem ara que $|K|$ és localment contràtil, és a dir, fixat un punt $x \in |K|$ i un entorn U de x qualsevol, provem que existeix un entorn contràtil V de x que verifica $x \in V \subseteq U$. Sigui d un nombre positiu menor que el mínim de les distàncies de x als símplexs σ de K tals que $x \notin \sigma$. Aquest mínim és un nombre positiu, ja que cada símplex és un tancat de \mathbf{R}^N . Notem $B_d(x)$ la bola de centre x i radi d . La bola $B_d(x)$ només talla als símplexs de K que contenen x i per tant hi ha un radi $d' < d$ tal que $B_{d'}(x) \cap |K| \subseteq U$ i tal que $B_{d'}(x)$ només talla els símplexs de K que contenen x . Sigui $V = B_{d'}(x) \cap |K|$. Com tant els símplexs com la bola són convexos, és immediat que V és contràtil.

2. Que la topologia de $|K|$ sigui coherent respecte les seves cares significa que un subconjunt C de $|K|$ és tancat si, i només si, ho són les interseccions $C \cap \sigma$, on σ recorre el conjunt de totes les cares de K . Com $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ i hi ha un nombre finit de cares, que són tancades, en resulta la proposició. \square

De la propietat 2 se segueix immediatament,

Corollari 1.4. *Sigui K un complex simplicial, X un espai topològic, i $f : |K| \rightarrow X$ una aplicació. Aleshores f és contínua si, i només si, ho és cada una de les restriccions $f|_{\sigma}$ a cada símplex σ de K .* \square

Un dels avantatges que presenten els políedres respecte dels espais topològics generals és que es pot introduir el concepte de dimensió de manera natural.

Definició. Sigui K un complex simplicial. Direm que K és un complex simplicial de *dimensió* n , o que el políedre $|K|$ és de dimensió n , si n és la més gran de les dimensions de les cares de K .

Així per exemple el políedre de la figura 1.4 té dimensió 2.

Notem $\mathcal{C}_k(K)$ el conjunt de les cares k -dimensionals de K , i c_k el nombre de cares k -dimensionals de K , és a dir, $c_k := \#\mathcal{C}_k(K)$. Exemples ben senzills

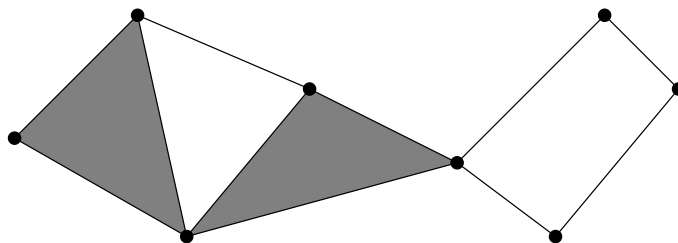


Figura 1.4: Políedre simplicial de dimensió 2.

mostren que els nombres c_k no són invariants topològics d'un políedre. Per exemple, tots els polígons regulars d' n costats P_n són homeomorfs, mentres que $c_0(P_n) = n$ i $c_1(P_n) = n$, varien en funció de n . Malgrat tot, si hom considera la suma alternada $\chi(P_n) = c_0(P_n) - c_1(P_n)$ es troba que sempre és zero.

Definició. Sigui K un complex simplicial. Es defineix la *característica de Euler* de K , també coneguda com característica de Euler-Poincaré, com la suma alternada

$$\begin{aligned}\chi(K) : &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i \\ &= c_0 - c_1 + c_2 - \dots\end{aligned}$$

Com els políedres que considerem són finits, la suma que defineix la característica de Euler és un enter finit: $\chi(K) \in \mathbf{Z}$.

Exemples. 1. Sigui K el complex simplicial que correspon a una triangulació de la superfície d'un cub com la indicada a la figura 1.5. Aleshores, $\chi(K) = 8 - 18 + 12 = 2$.

2. La característica de Euler d'un símplex n -dimensional Δ^n és $\chi(\Delta^n) = 1$. En efecte, Δ^n té $n + 1$ vèrtexs, i les cares k -dimensionals corresponen a totes les eleccions possibles de $k + 1$ vèrtexs diferents, per tant es té

$$c_k(\Delta^n) = \binom{n+1}{k+1},$$

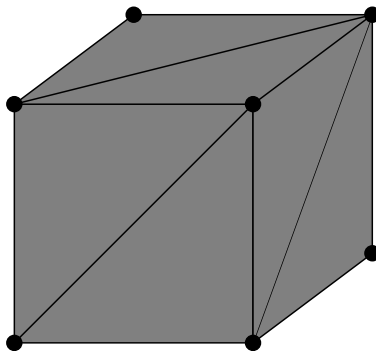


Figura 1.5: Triangulació de la superfície d'un cub.

i en definitiva

$$\begin{aligned}\chi(\Delta^n) &= \binom{n+1}{1} + (-1) \binom{n+1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n+1}{n} + (-1)^n \binom{n+1}{n+1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Mentres que la característica de Euler de la vora de Δ^n , $\partial\Delta^n$, és

$$\chi(\partial\Delta^n) = 1 - (-1)^n = 1 + (-1)^{n-1}.$$

En els exemples anteriors hem vist que tant la característica de Euler de la superfície d'un cub com la de $\partial\Delta^3$, que són espais homeomorfs, són iguals a 2. Aquesta és una situació que podem contrastar en altres exemples, pel que sembla natural plantejar-se la qüestió següent.

Qüestió: Són la dimensió i la característica de Euler invariants topològics? És a dir, si K i L són complexos simplicials tals que els poliedres associats, $|K|$ i $|L|$, són espais homeomorfs, és cert que la dimensió i la característica de Euler de K són iguals a la dimensió i la característica de Euler de L ?

Més endavant provarem que la resposta és afirmativa, i que la característica de Euler és, fins i tot, un invariant homotòpic. En particular, per exemple, en resultarà que $\partial\Delta^2$ i $\partial\Delta^3$ no són homotòpicament equivalents.

Problemes

1. Proveu el lema 1.2.
2. Sigui $C \subseteq \mathbf{R}^n$ un subconjunt convex, compacte i d'interior no buit. Sigui x un punt de l'interior de C .
 - (a) Proveu que tota semirecta d'origen x talla la frontera $Fr C$ en un únic punt.
 - (b) Proveu que hi ha un homeomorfisme $Fr C \longrightarrow \mathbf{S}^{n-1}$.
 - (c) Proveu que l'homeomorfisme de l'apartat anterior s'estén a un homeomorfisme de C amb la bola tancada unitat \mathbf{B}^n .
3. Si Δ^n és un símplex, s'anomena *interior* de Δ^n , o *símplex obert*, al subconjunt de punts de Δ^n de coordenades baricèntriques estrictament positives. Sigui K un complex simplicial. Demostreu que l'interior d'una cara de dimensió màxima és un obert de $|K|$.
4. Proveu que tot políedre és igual a la reunió de símplexs oberts, és a dir, de conjunts de la forma $\sigma = \{x \in \mathbf{R}^N; x = \lambda_1 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n, \sum \lambda_i = 1, \lambda_i > 0\}$. Deduïu que tot punt x de $|K|$ pertany a un únic símplex obert. A aquest símplex l'anomenarem el *suport* de x .

2 Aplicacions simplicials

Perquè la noció d'espai topològic sigui d'utilitat és essencial disposar de la noció d'aplicació contínua entre espais topològics, de forma que es tingui una categoria, la categoria dels espais topològics **Top** (vegeu l'apèndix d'aquest capítol per a una presentació succinta dels conceptes de categoria i de functor). En el context simplicial la noció corresponent és la de aplicació simplicial.

Definició. Siguin K, L complexs simplicials, i $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació. Es diu que φ és una *aplicació simplicial* si verifica:

- (i) Per tota cara σ de K , $\varphi(\sigma)$ és una cara de L . En particular, φ envia vèrtexs de $|K|$ a vèrtexs de $|L|$.

- (ii) Per tota cara $\sigma \in K$ la restricció $\varphi|_{\sigma} : \sigma \rightarrow \varphi(\sigma)$ és una aplicació afí. És a dir, si v_i són els vèrtexs de σ es verifica

$$\varphi\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i \varphi(v_i),$$

sempre que $\sum \lambda_i = 1$, i $\lambda_i \geq 0$ per a tot i .

Observem que, per la condició (ii), una aplicació simplicial queda determinada per les imatges dels vèrtexs de $|K|$, encara que aquestes no es poden donar arbitràriament ja que s'ha de verificar també la condició (i). Per exemple, sigui K el complex simplicial definit per $K_{max} = \{\Delta(v_0, v_1), \Delta(v_1, v_2)\}$ i L el complex definit per $L_{max} = \{\Delta(w_0, w_1), \Delta(w_1, w_2)\}$. Aleshores l'aplicació entre els vèrtexs de K i L definida per $\varphi(v_0) = w_0$, $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, determina una aplicació simplicial entre K i L , mentre que l'aplicació $\psi(v_0) = w_1$, $\psi(v_1) = w_0$, $\psi(v_2) = w_2$, no admet cap extensió simplicial, vegeu la figura 1.6.

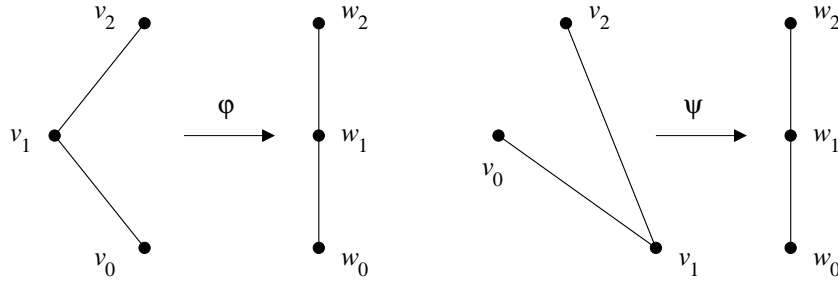


Figura 1.6: (a) aplicació simplicial, (b) aplicació no simplicial.

Com la topologia d'un políedre és coherent respecte els símplexs que el formen es té

Proposició 2.1. *Sigui $\varphi : |K| \rightarrow |L|$ una aplicació simplicial entre políedres. Aleshores φ és una aplicació contínua.*

Demostració. En efecte, tota aplicació afí és contínua i per tant si $\varphi : |K| \rightarrow |L|$ és una aplicació simplicial, i σ és un símplex de K , la restricció $\varphi|_{\sigma}$ és contínua. Per l'arbitrarietat de σ , és suficient ara aplicar el corollari 1.4. \square

De la definició d'aplicació simplicial se segueix immediatament:

Lema 2.2. 1. *L'aplicació identitat és una aplicació simplicial.*
 2. *La composició d'aplicacions simplicials és una aplicació simplicial.* \square

Per tant, els políedres geomètrics i les aplicacions simplicials formen una categoria, que denotarem per **Pol**. Els isomorfismes de **Pol** els anomenarem isomorfismes simplicials, és a dir, una aplicació simplicial $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$ és un isomorfisme simplicial si existeix l'aplicació simplicial inversa $\varphi^{-1} : |L| \longrightarrow |K|$.

Problemes

1. Sigui $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació simplicial. Proveu que φ és un isomorfisme si, i només si, és un homeomorfisme.
2. Sigui $|K|$ un políedre i X un espai topològic. Sigui $\Phi : |K| \times I \longrightarrow X$ una aplicació. Proveu que Φ és contínua si, i només si, les restriccions $\Phi|_{\sigma} : \sigma \times I \longrightarrow X$ són contínues per a tot símplex σ de K .
3. Siguin K i L complexs simplicials. Proveu que el nombre d'aplicacions simplicials entre $|K|$ i $|L|$ és finit.

3 Subpolíedres

En aquest apartat introduïrem el concepte de subpolíedre d'un políedre. També introduïrem alguns subpolíedres notables d'un políedre donat $|K|$ que permeten modelitzar part de la topologia de $|K|$ amb el llenguatge simplicial.

Definició. Sigui K un complex simplicial. Un *subcomplex simplicial* de K és un subconjunt L de K tal que si σ és una cara de L , aleshores totes les cares de σ són de L . Direm també que $|L|$ és un *subpolíedre* de $|K|$.

Un subcomplex L de K es diu que és un *subcomplex ple* si per a tota cara σ de K tal que els vèrtexs de σ són vèrtexs de L , llavors σ és una cara de L .

Observem que, en general, per determinar un subcomplex no és suficient conèixer els seus vèrtexs, mentres que un subcomplex ple queda determinat per aquests. Així per exemple, $\partial\Delta^n$ és un subcomplex de Δ^n que no és ple, i que té els mateixos vèrtexs que Δ^n .

Lema 3.1. *Sigui $|L|$ un subpolíedre d'un políedre $|K|$. Aleshores, $|L|$ és un tancat de $|K|$.*

Demostració. En efecte, ja que és compacte. \square

Exemples notables de subpolíedres.

1. Esquelet p -dimensional, $p \geq 0$.

Sigui K un complex simplicial. L'esquelet p -dimensional de K , $sq_p K$, és el subcomplex de K format per totes les cares de K de dimensió menor o igual a p .

Així, l'esquelet 0-dimensional de K està format solament pels vèrtexs de K , mentres que l'esquelet 1-dimensional estarà format pels vèrtexs i les arestes de K .

Si K és un complex de dimensió n , es tenen les inclusions

$$\emptyset \subseteq sq_0 K \subseteq sq_1 K \subseteq \cdots \subseteq sq_n K = K.$$

A aquesta successió de subcomplexs se l'anomena la *filtració per l'esquelet* de K .

Per exemple, observem que el complex $\partial\Delta^n$ és l'esquelet $(n-1)$ -dimensional del símplex Δ^n , $\partial\Delta^n = sq_{n-1}\Delta^n$, $n \geq 1$.

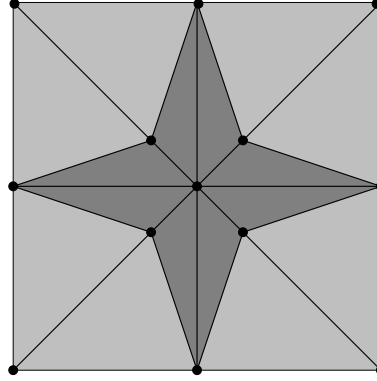
2. Estrella i nus d'un vèrtex.

Per a tractar qüestions locals en el context simplicial és convenient introduir l'estrella i el nus d'un vèrtex.

Definició. Sigui K un complex simplicial i v un vèrtex de K . L'estrella de v en $|K|$ és el subpolíedre de $|K|$, $\overline{st}_K v$, reunit de totes les cares maximals de K que tenen v com un dels seus vèrtexs.

En la figura 1.7 veiem un políedre de dimensió 2 en el que hem ressaltat l'estrella del vèrtex v .

Lema 3.2. *L'estrella d'un vèrtex v , $\overline{st}_K v$, es retrau a v .*

Figura 1.7: Estrella de v .

Demostració. Com tot símplex és convex, podem definir sobre cada símplex maximal σ de $\overline{st}_K v$ l'aplicació

$$F_\sigma(x, s) = sv + (1 - s)x ,$$

que és una homotopia entre l'aplicació constant de vèrtex v i la identitat de σ . Si σ i τ són dues cares maximals de $\overline{st}_K v$ d'intersecció no buida, les aplicacions F_σ i F_τ coincideixen en la intersecció, pel que defineixen una homotopia continua entre l'aplicació constant v i la identitat de $\overline{st}_K v$. \square

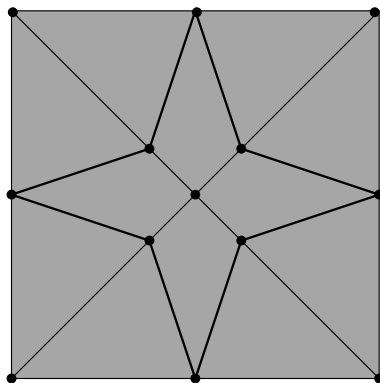
Definició. Es defineix el *nus* de v en $|K|$ com el subpolíedre de l'estrella de v en $|K|$ format per totes aquelles cares de $\overline{st}_K v$ que no tenen a v com un dels seus vèrtexs. El notarem $\ell k_K v$.

En la figura 1.8 està representat el nus del vèrtex v , del políedre corresponent a la figura 1.7.

Tant l'estrella com el nus d'un vèrtex són subpolíedres de $|K|$, pel que són subespais tancats. El model simplicial d'entorn obert d'un punt correspon a les estrelles obertes que ara introduïm.

Definició. Sigui v un vèrtex d'un políedre geomètric $|K|$, s'anomena *estrella oberta* de v en $|K|$ a

$$st_K v := \overline{st}_K v - \ell k_K v .$$

Figura 1.8: Nus de v .

En l'exemple de la figura 1.9 podem observar que la definició d'estrella oberta d'un vèrtex v no coincideix necessàriament amb l'interior de l'estrella $\overline{st_K v}$.

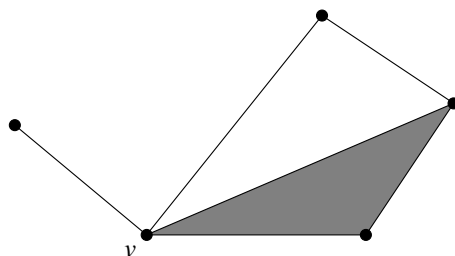


Figura 1.9: Estrella oberta que no és l'interior de l'estrella.

Lema 3.3. *Sigui K un complex simplicial.*

1. *Si v és un vèrtex de K , $st_K v$ és un obert de $|K|$ que conté v .*
2. *Al variar els vèrtexs v de K , els oberts $st_K v$ formen un recobriment obert de $|K|$.*

Demostració. 1. L'estrella oberta és un obert ja que el seu complementari és el subpolíedre de $|K|$ format per totes aquelles cares de K que no tenen a v com a vèrtex, que és tancat.

2. Un punt $x \in |K|$ és interior a un símplex σ de $|K|$, i per tant si v és un vèrtex qualsevol de σ , aleshores $x \in st_K v$, d'on se segueix

$$|K| = \cup_{v \in \mathcal{V}} st_K v . \quad \square$$

Acabarem aquest apartat amb un lema que ens serà útil en la demostració del teorema d'aproximació simplicial.

Lema 3.4. *Sigui $|K|$ un políedre i v_0, \dots, v_p vèrtexs de $|K|$. Aleshores v_0, \dots, v_p són vèrtexs d'un símplex de K si, i només si,*

$$\bigcap_{i=0}^{i=p} st_K v_i \neq \emptyset .$$

Demostració. Vegeu el problema 5. \square

Problemes

1. Calculeu la característica de Euler de l'esquelet p -dimensional de $\partial \Delta^n$.
2. Sigui $|K|$ un políedre i $|L|$ un subpolíedre. Es defineix l'estrella de $|L|$ en $|K|$, $\overline{st}_K L$ com el subpolíedre de $|K|$ format pels símplexs que tenen algun vèrtex a $|L|$. Proveu que, en general, $\overline{st}_K L$ no admet $|L|$ com a retracte.
3. Sigui K un complex simplicial, i $\sigma = \Delta(v_0, \dots, v_n)$ un símplex de K . Proveu que es verifica

$$\overline{st}_K \sigma = \overline{st}_K v_0 \cup \dots \cup \overline{st}_K v_n .$$

4. Sigui K un complex simplicial de \mathbf{R}^N i v un punt de \mathbf{R}^N tal que tota recta que passa per v talla $|K|$ com a molt en un punt. Es defineix el $con v * K$ com el complex que té per símplexs els símplexs $\Delta(v, v_0, \dots, v_p)$ sempre que $\Delta(v_0, \dots, v_p)$ sigui un símplex de K .
 - (a) Comproveu que $v * \Delta(v_0, \dots, v_p) = \Delta(v, v_0, \dots, v_p)$.
 - (b) Proveu que v és un retracte de deformació de $v * |K|$, i que per tant el con d'un políedre és sempre contràtil.
 - (c) Sigui w un vèrtex de K . Proveu que $\overline{st}_K w$ és homeomorf al con $w * \ell k_K w$.
5. Proveu el lema 3.4.

4 Espais triangulables

El concepte de políedre introduït als apartats anteriors és excessivament restrictiu en el sentit que aquests espais han de tenir una estructura afí o rectilínia, determinada pels símplexs que el componen. Així per exemple, l'esfera \mathbf{S}^n no és un políedre simplicial, encara que si ho és $|\partial\Delta^{n+1}|$, que és un espai homeomorf a l'esfera. En el context de la Topologia, en el que estem, dos espais homeomorfs són indistingibles, el que fa natural la introducció de la noció d'espai topològic triangulable.

Definició. Sigui X un espai topològic. S'anomena *triangulació* de X a tot parell (K, f) , on K és un complex simplicial i f és un homeomorfisme $f : X \rightarrow |K|$ de X amb el políedre $|K|$. Es diu que un espai topològic X és *triangulable* si existeix una triangulació de X .

Un espai triangulable admet més d'una triangulació, com veiem per exemple en les diferents triangulacions de la circumferència de la figura 1.10.

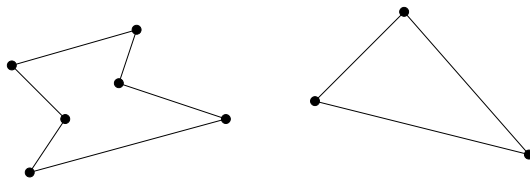


Figura 1.10: Dos políedres homeomorfs a la circumferència.

Exemples. 1. La bola tancada $\mathbf{B}^n := \{x \in \mathbf{R}^n ; \|x\| \leq 1\}$ de \mathbf{R}^n és un espai triangulable, ja que és homeomorf a un símplex n -dimensional Δ^n .

2. L'esfera de dimensió n , $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} ; \|x\| = 1\}$, és un espai triangulable ja que és homeomorf al políedre $\partial\Delta^{n+1}$.

3. *Espais projectius:* Sigui \mathbf{k} un cos i n un enter positiu. Es defineix una relació d'equivalència a $\mathbf{k}^{n+1} - 0$ segons: $x \sim y$ si existeix un escalar no nul $\lambda \in \mathbf{k}$ tal que $x = \lambda y$. S'anomena *\mathbf{k} -espai projectiu de dimensió n* , i el notarem $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^n$, al quocient $(\mathbf{k}^{n+1} - 0) / \sim$. És a dir, és l'espai de rectes de \mathbf{k}^{n+1} que passen per l'origen.

Si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, aleshores $\mathbf{k}^{n+1} - 0$ és un espai topològic, i per tant també ho són els espais projectius corresponents, $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^n$ i $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$. Per simplificar les notacions escriurem \mathbf{P}^n quan ens referim a l'espai projectiu real $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^n$. La topologia de \mathbf{P}^n es pot descriure també de la forma següent: tota recta que passa per l'origen de \mathbf{R}^{n+1} talla l'esfera \mathbf{S}^n en dos punts antipodals, el que estableix una bijecció entre el quocient de l'esfera \mathbf{S}^n per la relació d'equivalència $x \sim -x$, i l'espai projectiu \mathbf{P}^n . Aquesta bijecció és contínua, i com \mathbf{S}^n / \sim és compacte i \mathbf{P}^n és de Hausdorff, aquesta aplicació és un homeomorfisme.

L'espai projectiu complex $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$ admet una representació anàloga com a quocient de l'esfera \mathbf{S}^{2n} , vegeu el problema 2.

Els espais projectius, reals o complexos, són també espais triangulables, encara que la comprovació no és tant immediata com en els exemples anteriors, i la posposarem fins a l'apartat 6.

4. *Espais lenticulars*: Siguin p i q dos nombres enters positius, primers entre ells. Considerem l'esfera \mathbf{S}^3 com l'esfera unitat de \mathbf{C}^2 , és a dir,

$$\mathbf{S}^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbf{C}^2 ; z_0 \bar{z}_0 + z_1 \bar{z}_1 = 1\} ,$$

i sigui $g : \mathbf{S}^3 \longrightarrow \mathbf{S}^3$ l'homeomorfisme definit per

$$g(z_0, z_1) = (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi q i}{p}} z_1) .$$

Considerem la relació d'equivalència definida per: $(z_0, z_1) \sim (z'_0, z'_1)$ si, i només si, existeix un enter m tal que $g^m(z_0, z_1) = (z'_0, z'_1)$. Observem que g^p és la identitat de \mathbf{S}^3 , i que per tant les classes d'equivalència són finites. Es defineix l'*espai lenticular* $L(p, q)$ com l'espai quocient \mathbf{S}^3 / \sim .

Els espais lenticulars són triangulables, encara que, com en el cas dels espais projectius deixarem la demostració fins l'apartat 6. De fet, en aquest apartat veurem com triangular espais d'òrbites d'accions simplicials, el que inclou aquests exemples.

Els espais lenticulars, que varen ser introduïts per H. Tietze l'any 1908, han tingut un paper molt important en el desenvolupament de la Topologia Algebraica. Tornarem sobre aquest tema al capítol 6.

Els espais triangulables hereten les propietats topològiques dels políedres. Així, de 1.3 se segueix immediatament la proposició següent.

Proposició 4.1. *Sigui X un espai triangulable. Aleshores X és metrizable, compacte, localment arc-connex, localment contràctil, i verifica el segon axioma de numerabilitat.* \square

Com els espais triangulables són localment arc-connexos, el subespai topològic de \mathbf{R}^2 definit per

$$X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) ; 0 < x \leq 1\} \cup 0 \times [-1, 1] ,$$

conegut com a *sinus del topòleg*, representat a la figura 1.11, no és triangulable.

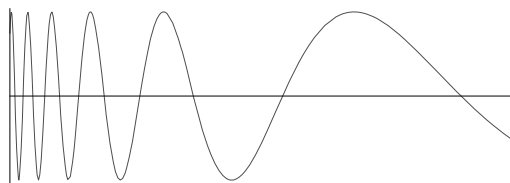


Figura 1.11: Sinus del topòleg.

D'altra banda, la contractibilitat local exclou espais com l'anomenat *ar-racada hawaiana*, (vegeu la figura 1.12): és el subespai de \mathbf{R}^2 , $X = \cup_n C_n$, reunió de les circumferències C_n de radi $1/n$ centrades en $(1/n, 0)$. Aquest espai no és localment contràctil en 0 (vegeu el problema 3 de 3.6), i per tant no és un espai triangulable.

Exemples coneguts d'espais topològics que verifiquin les propietats establertes a la proposició anterior són les varietats topològiques. Recordem-ne la definició.

Definició. Sigui X un espai topològic. Es diu que X és una *varietat topològica de dimensió n* si és un espai de Hausdorff, verifica el segon axioma de numerabilitat, i tot punt de X té un entorn homeomorf a un obert de \mathbf{R}^n .

Les varietats topològiques de dimensió 1 s'anomenen *corbes*, i les de dimensió 2 s'anomenen *superfícies*.

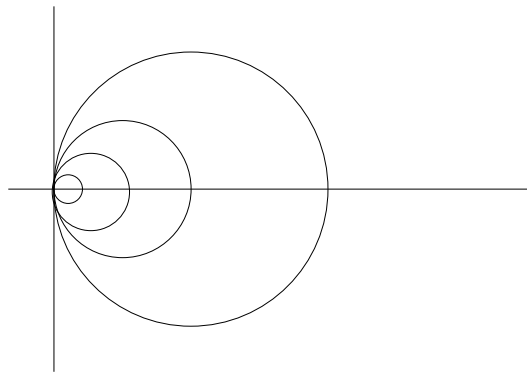


Figura 1.12: Arracada hawaiana.

Exemples. És immediat comprovar que els següents espais són varietats topològiques:

1. Els oberts de \mathbf{R}^n , i, en general, els oberts de les varietats topològiques.
2. L'esfera de dimensió n , \mathbf{S}^n .
3. El producte d'un nombre finit de varietats topològiques. En particular, el tor n -dimensional, $\mathbf{T}^n = \mathbf{S}^1 \times \dots \times \mathbf{T}^n$.
4. L'espai projectiu real \mathbf{P}^n , l'espai projectiu complex $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$, i els espais lenticulars $L(p, q)$, (vegeu el problema 3).

Proposició 4.2. Si $|K|$ és un políedre tal que les estrelles obertes de tots els seus vèrtexs són homeomorfes a l'espai euclidià \mathbf{R}^n , aleshores $|K|$ és una varietat topològica de dimensió n .

Demostració. Com s'ha provat en el lema 1.3, $|K|$ és de Hausdorff i verifica el segon axioma de numerabilitat. D'altra banda, segons el lema 3.3 les estrelles obertes formen un recobriment obert de $|K|$, d'on se segueix el resultat. \square

Les varietats topològiques es caracteritzen dins dels espais triangulables per la seva homogeneïtat. Recordem que un espai topològic X es diu que és *homogeni* si, per qualssevol $x, y \in X$, existeix un homeomorfisme $f : X \rightarrow X$ tal que $f(x) = y$.

Proposició 4.3. 1. *Si X és una varietat topològica connexa, aleshores X és un espai homogeni.*

2. *Si X és un espai triangulable. Si X és homogeni, X és una varietat topològica.*

Demostració. 1. Provarem en primer lloc que, donat un obert U de X homeomorf a \mathbf{R}^n i dos punts $x, y \in U$, existeix un homeomorfisme $h : X \rightarrow X$ tal que $h(x) = y$. En efecte, és suficient demostrar que si x', y' són dos punts de \mathbf{R}^n , existeix un homeomorfisme h' de \mathbf{R}^n tal que $h'(x') = y'$, i que és la identitat fora d'una bola. Prenem un sistema de coordenades en \mathbf{R}^n amb origen O en un punt de la recta definida per x', y' , i tal que x' estigui entre O i y' . Aleshores definim $h'(x) = g(\|x\|)x/\|x\|$, on $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ és l'aplicació lineal a trossos tal que $g(0) = 0$, $g(\|x'\|) = \|y'\|$, i $g(t) = t$, si $t \geq 2\|y'\|$.

Fixem ara un punt x de X . Del cas anterior se segueix que el conjunt Y de punts y de X tals que existeix un homeomorfisme h de X amb $h(x) = y$, és obert i tancat. Com la varietat X és connexa i Y és no buit, $X = Y$.

2. Si x és un punt interior d'un símplex maximal, x té un entorn homeomorf a \mathbf{R}^n . Per l'homogeneïtat de X , tots els seus punts verificaran la mateixa propietat. Per 4.1, d'aquí en resulta que X és una varietat topològica. \square

Un espai triangulable és homeomorf a un subespai compacte de \mathbf{R}^N , ja que els poliedres ho són. Podem provar també aquesta propietat per a les varietats topològiques:

Proposició 4.4. *Si X és una varietat topològica de dimensió n compacta. Aleshores existeix un $N \geq 0$ tal que X és homeomorfa a un subespai de \mathbf{R}^N .*

Demostració. Tot punt de X té un entorn obert homeomorf a \mathbf{R}^n (vegeu el problema 1). Així, per la compacitat de X , hi ha un nombre finit d'aquests entorns, B_1, \dots, B_m , que formen un recobriment de la varietat X .

Per a cada $i = 1, \dots, m$, escollim un homeomorfisme $h_i : B_i \rightarrow \mathbf{R}^n$. Cadascuna de les aplicacions contínues h_i s'esten a una aplicació contínua H_i de X en la compactificació de Alexandroff de \mathbf{R}^n , \mathbf{S}^n . En efecte, l'extensió $H_i : X \rightarrow \mathbf{S}^n$ es defineix simplement per

$$H_i(x) = \begin{cases} h_i(x), & \text{si } x \in B_i, \\ \infty, & \text{si } x \in X - B_i, \end{cases}$$

on ∞ indica el punt de l'infinit de la compactificació \mathbf{S}^n de \mathbf{R}^n . Considerem ara l'aplicació

$$i : X \rightarrow \mathbf{S}^n \times \dots \times \mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{m(n+1)}$$

definida per $i(x) = (H_1(x), \dots, H_m(x))$. L'aplicació i és contínua i injectiva. Així, com X és un espai compacte i $\mathbf{R}^{m(n+1)}$ és de Hausdorff, l'aplicació i induïx un homeomorfisme de X amb la seva imatge $i(X)$. \square

Així doncs, les varietats topològiques tenen moltes propietats en comú amb els espais triangulables, pel que és natural plantejar-se la pregunta següent:

Qüestió: És triangulable tota varietat topològica compacta de dimensió n ?

En general no es coneix la resposta a aquesta qüestió, se sap però que és afirmativa per a varietats de dimensió ≤ 3 , o per a varietats *diferenciables* de dimensió arbitrària. Per a les superfícies topològiques el teorema de triangulació es coneix com a teorema de Radó (1925). Per a les varietats topològiques de dimensió 3 el resultat va ser demostrat per Moise (1952), [19], mentres que per a les varietats diferenciables el resultat es deu a Cairns i Whitehead (1940), (vegeu J.R.Munkres: Elementary Differential Topology, Princeton Univ.Press, 1966). En el capítol 5 provarem primerament el teorema de triangulació per a dimensió 1, és a dir, per a les corbes topològiques, que és molt senzill, i que ens servirà de pauta per provar després el teorema de Radó, força més elaborat.

Remarquem també que s'ha provat que existeixen varietats topològiques que no es poden triangular de forma que els nus de cada vèrtex sigui una esfera, així si aquestes varietats són triangulables ho seran amb triangulacions força estranyes (vegeu R.C.Kirby, L.C.Siebenmann: Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations. Princeton Univ.Press, 1977).

Per acabar aquest apartat introduïrem el concepte de triangulació d'un parell topològic, que fa aparèixer un fenomen, l'existència d'arcs salvatges, no gens evident ja que és propi de la Topologia.

Definició. Sigui X un espai topològic, i A un subespai de X . S'anomena *triangulació del parell* (X, A) a tot triple (K, L, f) on K és un complex simplicial, L és un subcomplex de K , i $f : X \longrightarrow |K|$ és un homeomorfisme tal que $f|_A : A \longrightarrow |L|$ també ho és.

Es diu que el parell (X, A) és *triangulable* si existeix una triangulació de (X, A) .

Evidentment, si (X, A) és un parell triangulable, tant X com A són espais triangulables, però aquesta no és una condició suficient. Hi ha exemples d'espais triangulables X que admeten subespais triangulables A tals que no es pot triangular simultàniament X i A . En aquest cas s'acostuma a dir que A és un subespai *salvatge* de X , i per contraposició, si el parell (X, A) és triangulable es diu que A és un subespai *dòcil* de X . Tornarem sobre aquest tema més endavant, en els capítols 4 i 5.

Problemes

1. (a) Proveu que si X és una varietat topològica, tot punt de X té un entorn obert homeomorf a \mathbf{R}^n .
(b) Proveu que si X és un espai de Hausdorff compacte i tal que tot punt té un entorn homeomorf a un obert de \mathbf{R}^n , aleshores X verifica el segon axioma de numerabilitat, i per tant X és una varietat topològica.
2. Proveu que l'espai projectiu complex $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$ és homeomorf a un quocient de l'esfera \mathbf{S}^{2n} .
3. Proveu que \mathbf{P}^n , $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$, i $L(p, q)$ són varietats topològiques compactes de dimensió n , $2n$ i 3 , respectivament.
4. (a) Proveu que $L(1, 1)$ és homeomorf a \mathbf{S}^3 .
(b) Proveu que $L(2, 1)$ és homeomorf a \mathbf{P}^3 .
5. Proveu que en la proposició 4.3, es pot escollir l'homeomorfisme h *isòtop* a la identitat de X , és a dir, que existeix una homotopia H de h a id_X , tal que $H(-, t)$ és un homeomorfisme, per a tot $t \in I$.

5 Políedres abstractes

De la mateixa manera que tots els n -símplexs són homeomorfs entre ells, diferents políedres poden ser homeomorfs si tenen la mateixa estructura combinatòria. Aquesta estructura es concreta en la noció de políedre abstracte que introduïrem en aquest apartat. Els políedres abstractes presenten l'avantatge de permetre triangular fàcilment un bon nombre d'exemples

d'espais topològics, en especial dels espais obtinguts per identificació, com el tor o el pla projectiu real. A més, és la part abstracta d'un políedre la que resultarà més important en el desenvolupament de l'homologia simplicial.

Definició. Un *políedre abstracte* és un parell (\mathcal{V}, K) , on $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ és un conjunt finit, i K és un subconjunt del conjunt de parts de \mathcal{V} , $P(\mathcal{V})$, $K = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\ell; \sigma_i \in P(\mathcal{V})\}$, tal que:

- (i) tot $v_i \in \mathcal{V}$ pertany a K , és a dir, $\{v_i\} \in K$, per a tot $1 \leq i \leq r$.
- (ii) si $\delta \subset \tau$ i $\tau \in K$, llavors $\delta \in K$.

Als elements de \mathcal{V} els anomenarem *vèrtexs* del políedre abstracte, i als de K , *cares* del políedre. Si no hi ha perill de confusió denotarem un políedre abstracte (\mathcal{V}, K) simplement per K , i escriurem \mathcal{V}_K quan ens referim al conjunt dels seus vèrtexs.

Com succeïa en el cas geomètric per a determinar un políedre abstracte K és suficient donar el conjunt de les seves cares maximals K_{max} , és a dir, les cares $\sigma \in K$ tals que no existeix cap altra cara $\tau \in K$ que la contingui pròpiament.

Exemple. Donat un complex simplicial K li podem associar un políedre abstracte, que momentàniament notarem per K^a , de la forma següent: sigui $\mathcal{V}_K = \{v_1, \dots, v_m\}$ el conjunt de vèrtexs de K , i prenem $\mathcal{V}_{K^a} = \mathcal{V}_K$, i $K^a = \{\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} ; \Delta(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \text{ és un símplex de } K\}$. És immediat comprovar que (\mathcal{V}_{K^a}, K^a) és un políedre abstracte, i direm que K^a s'obté per oblit de la topologia de $|K|$, o també que K^a és l'estructura combinatòria de K . Anàlogament, s'associa un políedre abstracte a tot espai triangulat.

Recíprocament, donat un políedre abstracte (\mathcal{V}_{K^a}, K^a) li podem associar un políedre geomètric "omplint" els punts que manquen entre els vèrtexs. En efecte, si $\mathcal{V}_{K^a} = \{v_0, \dots, v_N\}$, considerem els punts de \mathbf{R}^{N+1} de coordenades

$$e_i = (0, \dots, \overset{i+1}{0}, 1, 0, \dots, 0) ,$$

és a dir, els que generen el símplex estàndard Δ^N . Sigui $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ el conjunt de cares de Δ^N de la forma $\sigma_i = \Delta(e_{i_0}, e_{i_2}, \dots, e_{i_s})$, sempre que $\{v_{i_0}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}\} \in K^a$. Es té la proposició següent:

Proposició 5.1. *El conjunt de simplexs K és un complex simplicial. Al políedre $|K|$ se l'anomena la realització geomètrica del políedre abstracte K^a .*

Demostració. Hem de veure que si σ_i i σ_j són cares de K d'intersecció no buida, aleshores $\sigma_i \cap \sigma_j$ també és una cara de K . Siguin

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \Delta(e_{i_0}, \dots, e_{i_p}) , \\ \sigma_j &= \Delta(e_{j_0}, \dots, e_{j_q}) ,\end{aligned}$$

i $x \in \sigma_i \cap \sigma_j$. Escrivim x en coordenades baricèntriques

$$\begin{aligned}x &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \dots + \lambda_{i_p} e_{i_p} , \\ &= \mu_{j_0} e_{j_0} + \dots + \mu_{j_q} e_{j_q} .\end{aligned}$$

Com $\{e_1, \dots, e_N\}$ són linealment independents, existiran índexs $\{k_0, \dots, k_r\} \subseteq \{i_0, \dots, i_p\} \cap \{j_0, \dots, j_q\}$ tals que $\lambda_{k_s} = \mu_{k_s}$ per tot $0 \leq s \leq r$, i

$$x = \lambda_{k_0} e_{k_0} + \dots + \lambda_{k_r} e_{k_r} ,$$

i per tant, $x \in \Delta(e_{k_0}, \dots, e_{k_r})$. Per la propietat (ii) de la definició de políedre abstracte, aquest símplex és una cara de K . \square

Així per exemple, el políedre de la figura 1.13 és la representació geomètrica del políedre abstracte definit per $K_{max} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}$.

El llenguatge de les categories ens permetrà precisar la relació entre els políedres geomètrics i els políedres abstractes.

Definició. Siguin K i L dos políedres abstractes. Una *aplicació simplicial* de K a L és una aplicació $\varphi : \mathcal{V}_K \longrightarrow \mathcal{V}_L$, tal que si $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \in K$, aleshores $\{\varphi(v_{i_0}), \varphi(v_{i_1}), \dots, \varphi(v_{i_k})\} \in L$.

És immediat comprovar que els políedres abstractes i les aplicacions simplicials entre ells formen una categoria: la categoria de políedres abstractes, **Pol Abs**. És immediat comprovar també que l'oblit de la topologia de políedres geomètrics defineix un functor

$$o : \mathbf{Pol} \longrightarrow \mathbf{Pol Abs} ,$$

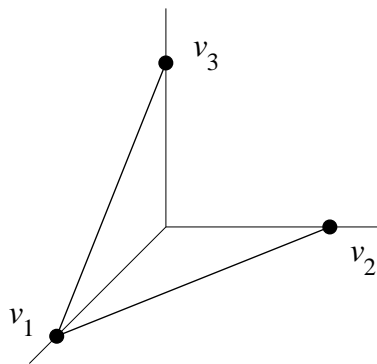


Figura 1.13: Realització geomètrica.

i, anàlogament, la realització geomètrica defineix un functor

$$| | : \mathbf{Pol\ Abs} \longrightarrow \mathbf{Pol}.$$

Aleshores es verifica:

Teorema 5.2. *Els functors o i $| |$ defineixen una equivalència de categories entre \mathbf{Pol} i $\mathbf{Pol\ Abs}$.* \square

Aquest resultat justifica que en endavant quan parlem de políedre ens referim indistintament a un políedre geomètric, al complex simplicial associat, o a un políedre abstracte.

Per acabar aquest apartat anem a veure com la noció de políedre abstracte i la construcció de la realització geomètrica, permeten triangular alguns espais topològics obtinguts per identificació. Ho farem a través de dos exemples senzills.

Recordem que el tor \mathbf{T}^2 és l'espai topològic que s'obté quan identifiquem els costats d'un rectangle R dos a dos, com indica la figura 1.14. Cada triangle de la figura, determina un subespai de \mathbf{T}^2 homeomorf a un triangle. Així, si etiquetem els vèrtexs amb els elements del conjunt $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_9\}$, podem considerar el políedre abstracte que té \mathcal{V} com a conjunt de vèrtexs, i les cares determinades pels triangles de la figura. La representació geomètrica d'aquest políedre abstracte triangulara el tor \mathbf{T}^2 .

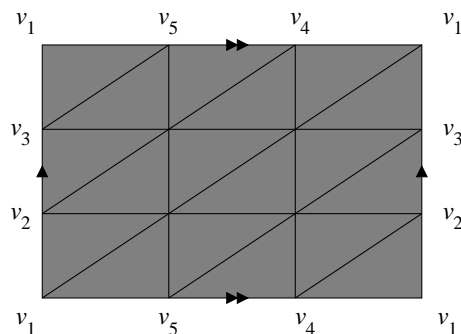


Figura 1.14: Una triangulació del tor.

En aquesta mena d'exemples cal anar en compte de determinar una veritable triangulació. Així per exemple, la figura 1.15 no seria una triangulació d'un cilindre com a primer cop d'ull podríem pensar, ja que en el poliedre abstracte associat l'aresta $\{a, c\}$ del triangle $\{a, c, d\}$ és la mateixa que la corresponent aresta del triangle $\{a, b, c\}$, i per tant estaran identificades en la realització geomètrica. Si efectuem les identifications a que això ens condueix, trobem que l'espai quocient associat és homeomorf a una esfera. Per obtenir un cilindre cal triangular el rectangle amb més triangles, com el lector pot comprovar fàcilment (vegeu el problema 1).

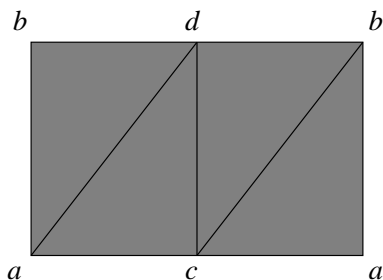


Figura 1.15: Triangulació d'una esfera.

En el proper apartat tornarem sobre aquest tema, quan triangulem l'espai projectiu.

Totes les nocions sobre políedres introduïdes en els apartats anteriors es traslladen sense dificultat als políedres abstractes, llevat és clar de les que fan referència a la topologia d'un políedre geomètric. Per exemple definirem la dimensió d'un políedre abstracte. Sigui K un políedre abstracte, si $\sigma \in K$ es defineix

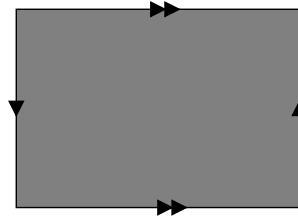
$$\dim \sigma := \# \sigma - 1 ,$$

i, aleshores, es defineix

$$\dim K := \max \{ \dim \sigma, \sigma \in K \} .$$

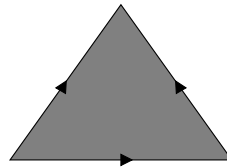
Problemes

1. Trianguleu un cilindre i un pla projectiu.
2. S'anomena *ampolla de Klein* l'espai topològic obtingut per identificació de costats d'un rectangle com indica la figura següent.



Trianguleu l'ampolla de Klein.

3. Trianguleu el *barret del capsigrany*, que és l'espai topològic obtingut per identificació dels costats d'un triangle com indica la figura següent.



4. (a) Proveu que tot políedre abstracte n -dimensional admet una realització geomètrica en \mathbf{R}^{2n+1} . (Indicació: si K és un políedre abstracte, situeu els diferents vèrtexs de K sobre la corba $\alpha(t) = (t, t^2, \dots, t^{2n+1})$ de \mathbf{R}^{2n+1}).
- (b) Comproveu que la cota $2n + 1$ no és millorable: sigui K_5 el políedre abstracte 1-dimensional amb vèrtexs v_1, \dots, v_5 en el que cada parella de vèrtexs determina un 1-símplex, és a dir, $K_5 = sq_1 \Delta^4$. Proveu que K_5 no admet cap realització geomètrica al pla \mathbf{R}^2 . El matemàtic català G. Flores va generalitzar aquest resultat l'any 1933 provant l'esquelet $sq_n \Delta^{2n+2}$ no admet cap realització geomètrica a \mathbf{R}^{2n} (G.Flores: *Über n -dimensionale Komplexe die im R_{2n+1} absolute selbverschlungen sind*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquium 6, 4 – 7, 1934).

6 Subdivisió baricèntrica

La rigidesa de la noció de políedre no permet tractar certs problemes locals ja que els símplexs són d'un tamany determinat. Per esmenar aquest inconvenient s'introdueixen les subdivisions d'un políedre.

Definició. Considerem el símplex $\sigma = \Delta(v_0, \dots, v_n)$ de \mathbf{R}^N . Es defineix el *baricentre* de σ , que notarem b_σ , com el punt

$$b_\sigma := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i.$$

Donat un complex simplicial K considerem el conjunt de símplexs sdK de la forma $\Delta(b_{\sigma_0}, \dots, b_{\sigma_p})$, on $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \dots \subseteq \sigma_p$ són cares diferents de K , i els b_{σ_i} denoten els baricentres corresponents.

Proposició 6.1. *El conjunt de símplexs sdK és un complex simplicial.*

Demostració. Hem de comprovar que quan la intersecció de dues cares de sdK no és buida, aleshores és una cara comú d'aquestes. Ho farem per inducció sobre la dimensió de K .

El resultat és evident per a dimensió zero. Suposem que el resultat és cert per a políedres de dimensió menor que m i demostrem-ho per a políedres de

dimensió m . Notem $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in K$ les cares de dimensió m de K , i b_1, \dots, b_r , els baricentres respectius. Sigui $K' = K - \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ l'esquelet $(m-1)$ -dimensional de K . Per hipòtesis d'inducció sdK' és un complex simplicial.

Observem primer que si $\sigma \in sdK - sdK'$, aleshores la intersecció de σ amb els símplexs de sdK' és una cara de sdK' : en efecte, com $\sigma \notin sdK'$, podem escriure

$$\sigma = \Delta(b_{\tau_1}, \dots, b_{\tau_s}, b_i) ,$$

per algú $i = 1, \dots, r$, amb $\tau_j \in sdK'$ i $\tau_1 \subseteq \dots \subseteq \tau_s \subseteq \sigma_i$. Així, σ només talla les cares de sdK que són cares del símplex

$$\bar{\sigma} = \Delta(b_{\tau_1}, \dots, b_{\tau_s}) .$$

Per tant, $\bar{\sigma}$ és la cara maximal del conjunt $\{\sigma \cap \tau; \tau \in sdK'\}$.

Siguin ara σ, σ' dos símplexs de sdK tals que la seva intersecció $\sigma \cap \sigma'$ és no buida. Per hipòtesis d'inducció podem suposar que almenys un dels dos símplexs no pertany a sdK' . Distingim ara dos casos:

(a) Suposem que $\sigma' \in sdK'$: amb les notacions anteriors tindren

$$\sigma \cap \sigma' = \bar{\sigma} \cap \sigma' ,$$

i per hipòtesis d'inducció aquesta intersecció és una cara comú d'ambdós símplexs.

(b) Suposem ara que $\sigma, \sigma' \notin sdK'$, i siguin b_i i b_j els vèrtexs de σ i σ' que són baricentres de símplexs de dimensió màxima de K , respectivament. Si $b_i \neq b_j$ aleshores

$$\sigma \cap \sigma' = \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}'$$

i s'aplica la hipòtesis d'inducció. Si $b_i = b_j$ aleshores la intersecció $\sigma \cap \sigma'$ és el con de $\bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}'$ des del punt b_i , és a dir, és el símplex generat per $\bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}'$ i b_i , i el resultat se segueix d'aplicar un cop més la hipòtesis d'inducció. \square

Definició. Sigui K un complex simplicial. S'anomena *subdivisió baricèntrica* de K al complex simplicial sdK .

En la figura 1.16 veiem la subdivisió baricèntrica d'un 2-símplex.

És un exercici comprovar que es verifica:

Lema 6.2. $|sdK| = |K|$.

\square

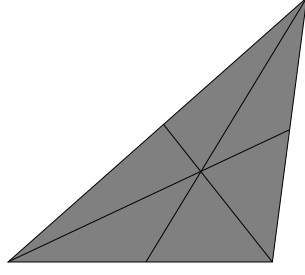


Figura 1.16: Subdivisió baricèntrica d'un 2-símplex.

Es defineix inductivament la subdivisió baricèntrica n -èssima per

$$sd^n K := sd(sd^{n-1} K) .$$

Anem a veure com, al variar n , els símplexs de $sd^n K$ són cada cop més petits. En efecte, si σ és un p -símplex, es defineix el *diàmetre* de σ per

$$\|\sigma\| = \sup \{d(x, y) ; x, y \in \sigma\} ,$$

i si K és un complex simplicial es defineix la *talla* de K per

$$\|K\| := \sup \{\|\sigma\| ; \sigma \in K\} .$$

Aleshores es té:

Teorema 6.3. *Segui K un complex simplicial. Aleshores*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|sd^n K\| = 0 ,$$

és a dir, per a tot nombre real $\varepsilon > 0$, existeix un enter $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n > n_0$, aleshores

$$\|sd^n K\| < \varepsilon .$$

Per a demostrar aquest resultat usarem dos lemes previs.

Lema 6.4. *Segui $\sigma = \Delta(v_0, \dots, v_p)$ un p -símplex. Aleshores es verifica $\|\sigma\| = \sup_{i,j} d(v_i, v_j)$.*

Demostració. Siguin $x, y \in \sigma$, i escrivim y en coordenades baricèntriques: $y = \sum_{i=0}^p t_i v_i$, amb $\sum t_i = 1$, i $t_i \geq 0$. Aleshores

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \left\| x - \sum_{i=0}^p t_i v_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^p t_i (x - v_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^p t_i \|x - v_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^p t_i \right) \sup_{0 \leq i \leq p} \|x - v_i\| = \sup_{0 \leq i \leq p} \|x - v_i\| \\ &= \sup d(x, v_i) . \end{aligned}$$

Fixant i , i repetint el mateix raonament, trobem que $d(v_i, x) \leq \sup_{i,j} d(v_i, v_j)$, i per tant

$$d(x, y) \leq \sup_{i,j} d(v_i, v_j) ,$$

com es volia demostrar. \square

Lema 6.5. *Si σ és un p -simplex llavors*

$$\|sd \sigma\| \leq \frac{p}{p+1} \|\sigma\| .$$

Demostració. Podem suposar $p \neq 0$. Sigui $\sigma = \Delta(v_0, \dots, v_p)$, i τ un simpleu de la subdivisió baricèntrica de σ . Pel lema anterior, hi haurà dos vèrtexs v, v' de τ de forma que

$$\|\tau\| = d(v, v') .$$

Sense pèrdua de generalitat podem escriure v i v' en la forma

$$v = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^r v_i , \quad v' = \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^s v_j , \quad 0 \leq r \leq s \leq p .$$

Com en la demostració del lema anterior tindrem

$$d(v, v') \leq \sup_{0 \leq i \leq r} d(v_i, v') ,$$

i d'altra banda, per un i fixat es tenen les desigualtats

$$\begin{aligned} d(v_i, v') &= \left\| v_i - \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^s v_j \right\| \\ &\leq \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^s \|v_i - v_j\| \\ &\leq \frac{s}{s+1} \sup_{0 \leq j \leq s} \|v_i - v_j\| . \end{aligned}$$

Posant en comú les dues desigualtats obtingudes, i usant el lema 6.4, en resulten les desigualtats

$$\begin{aligned} d(v, v') &\leq \frac{s}{s+1} \sup_{0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s} d(v_i, v_j) \\ &\leq \frac{s}{s+1} \|\sigma\| , \end{aligned}$$

i com $s \leq p$, es té

$$\|\tau\| = d(v, v') \leq \frac{p}{p+1} \|\sigma\| ,$$

el que, donada l'arbitrarietat de τ , acaba la prova. \square

Demostració del teorema 6.3 : Com per definició $sd^n \sigma = sd(sd^{n-1} \sigma)$, una simple inducció a partir del lema 6.5 prova que

$$\|sd^n \sigma\| \leq \left(\frac{p}{p+1} \right)^n \|\sigma\| .$$

Però com $p/(p+1) < 1$, el segon membre tendeix a zero quan n creix, d'on resulta el teorema. \square

Com a conseqüència d'aquest resultat podem demostrar un teorema d'aproximació de compactes per políedres simplicials que ens serà d'utilitat en capítols posteriors.

Corollari 6.6. *Sigui C un compacte de \mathbf{R}^N . Per tot obert U de \mathbf{R}^N que contingui C , existeix un políedre $|K|$ de \mathbf{R}^N que verifica*

$$C \subseteq |K| \subseteq U .$$

Demostració. En efecte, com C és compacte hi ha un símplex N -dimensional Δ que el conté, i com la subdivisió baricèntrica no varia l'espai topològic subjacent, es té $C \subseteq |sd^k \Delta|$ per a tot $k > 0$.

D'altra banda, si notem $\delta > 0$ la distància de C a la frontera de U i escollim k de forma que la talla de $sd^k \Delta$ sigui menor que δ , el que sempre podem assegurar pel teorema anterior, aleshores el subcomplex simplicial K de $sd^k \Delta$ engendrat per les cares maximals que tenen intersecció no buida amb C defineix un políedre simplicial que verifica l'asserció de l'enunciat. \square

Per acabar aquest apartat utilitzarem la subdivisió baricèntrica per provar que certs espais obtinguts per identificació a partir d'espais topològics triangulables, són espais triangulables. D'aquest resultat seguirà la triangulabilitat dels espais projectius reals \mathbf{P}^n i d'altres exemples introduïts en apartats anteriors.

Els espais d'identificació als que ens estem referint són els espais d'òrbites de l'acció d'un grup. En els exemples que hem introduït, els espais d'òrbites ho són respecte de grups cíclics, pel que ens reduïrem a aquest cas. Així, sigui K un complex simplicial i $\varphi : |K| \rightarrow |K|$ una aplicació simplicial que és un homeomorfisme d'ordre finit, és a dir, tal que existeix un nombre p amb $\varphi^p = \text{id}_{|K|}$. Si p és el mínim enter amb aquesta propietat, les potències de φ formen un grup cíclic, que notarem G , isomorf a $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, que actua simplicialment sobre $|K|$. Notem $|K|/G$ l'espai d'òrbites corresponent, és a dir, $|K|/G$ és l'espai quocient que s'obté al identificar els punts de $|K|$ de la mateixa òrbita: $x \sim y$ si, i només si, existeix un enter q tal que $x = \varphi^q(y)$. Sigui $\pi : |K| \rightarrow |K|/G$ l'aplicació quocient.

Proposició 6.7. *Amb les notacions anteriors, l'espai topològic $|K|/G$ és triangulable.*

Demostració. Notem K/G el complex simplicial corresponent al següent políedre abstracte: els vèrtexs de K/G són les òrbites dels vèrtexs de K , és a dir, $\mathcal{V}_{K/G} = \{\varphi^q v ; v \in \mathcal{V}_K, q \geq 0\}$. Donats $v'_0, \dots, v'_m \in \mathcal{V}_{K/G}$, el conjunt $\{v'_0, \dots, v'_m\}$ és un símplex de K/G si, i només si, existeixen vèrtexs v_0, \dots, v_m , de K tals que $\pi(v_i) = v'_i$, $0 \leq i \leq m$, i el símplex $\Delta(v_0, \dots, v_m)$ és una cara de K .

Per definició, es té una aplicació simplicial

$$\psi : |K| \rightarrow |K/G| ,$$

que factoritza per π , és a dir, hi ha un diagrama commutatiu d'aplicacions contínues

$$\begin{array}{ccc} |K| & & \\ \pi \downarrow & \searrow \psi & \\ |K|/G & \xrightarrow{\psi'} & |K/G|. \end{array}$$

És suficient provar que ψ' és un homeomorfisme, ja que aleshores $(K/G, \psi')$ és una triangulació de $|K|/G$. Això però no és cert en general, recordem l'exemple de la figura 1.15.

Pel lema 6.2 podem substituir un complex simplicial per la seva subdivisió baricèntrica sense afectar l'espai topològic subjacent al políedre associat, i per tant és suficient provar que $|sd^m K|/G$ és triangulable per algun m . El diagrama anterior dóna lloc a diagrames commutatius d'aplicacions contínues

$$\begin{array}{ccc} |sd^m K| & & \\ \pi_m \downarrow & \searrow \psi_m & \\ |sd^m K|/G & \xrightarrow{\psi'_m} & |sd^m K/G|. \end{array}$$

per a tot $m \geq 0$. Així és suficient provar que ψ'_2 és un homeomorfisme.

L'aplicació contínua ψ'_2 és clarament exhaustiva, i com és una aplicació entre espais compactes i de Hausdorff, és suficient provar que és injectiva per concloure que és un homeomorfisme. La injectivitat resulta ara del fet que π_2 identifica exactament els mateixos triangles que ψ_2 , vegeu el problema 7. \square

Corollari 6.8. *Per a tot $n \geq 1$, l'espai projectiu real \mathbf{P}^n és triangulable.*

Demostració. L'espai projectiu \mathbf{P}^n és homeomorf al quocient de l'esfera \mathbf{S}^n per l'aplicació antipodal, $al(x) = -x$. Així, si prenem com a φ l'aplicació antipodal, i comprovem que l'esfera admet una triangulació compatible amb φ , el resultat se seguirà de la proposició anterior.

Per triangular l'esfera $\mathbf{S}^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ de forma compatible amb l'aplicació antipodal prenem el complex K que té com a vèrtexs els $2(n+1)$ punts $\pm e_i$, $0 \leq i \leq n$, i com a cares maximals els n -símplexs $\Delta(\pm e_0, \dots, \pm e_n)$, i l'aplicació $f : |K| \rightarrow \mathbf{S}^n$ definida per $f(x) = x/\|x\|$. És immediat comprovar que (K, f^{-1}) és una triangulació de \mathbf{S}^n , compatible amb φ . \square

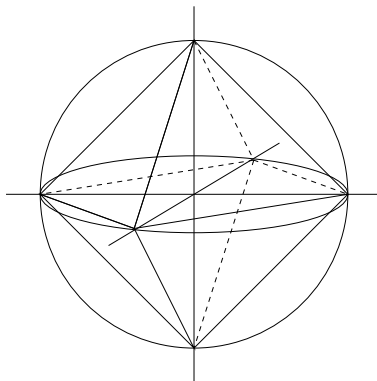


Figura 1.17: Una triangulació de \mathbf{S}^2 compatible amb l'aplicació antipodal.

La triangulabilitat dels espais projectius complexos i dels espais lenticulars se segueixen també de 6.7, vegeu el problema 8.

Problemes

1. Sigui K un complex simplicial i $L \subseteq K$ un subcomplex. Proveu que sdL és un subcomplex ple de sdK .
2. Sigui K un complex simplicial i L un subcomplex ple de K . Sigui L' el subcomplex de K generat per tots els vèrtexs de K que no són de L . Proveu que si σ és un símplex de K , aleshores σ és un símplex de L , de L' o de la forma $\Delta(v_0, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_q)$ amb $\Delta(v_0, \dots, v_p)$ un símplex de L i $\Delta(v_{p+1}, \dots, v_q)$ un símplex de L' .
3. Sigui K un complex simplicial i L un subcomplex ple de K . Proveu que existeix un entorn U de $|L|$ en $|K|$ tal que $|L|$ és un retracte de deformació de U , és a dir, que existeix una retracció contínua $r : U \rightarrow |L|$ tal que la

composició $r \circ i = \text{id}_{|L|}$, i la composició $i \circ r$ és homòtopa a la identitat de U , essent $i : |L| \hookrightarrow U$ la inclusió natural.

4. Utilitzeu els problemes anteriors per provar que tot subpolíedre, no necessàriament ple, d'un políedre té un entorn del qual és retracte de deformació.
5. Sigui \mathcal{U} un recobriment obert d'un espai triangulable X . Proveu que X admet una triangulació K més fina que \mathcal{U} , és a dir, tal que per a tot vèrtex v de la triangulació, hi ha un obert U de \mathcal{U} tal que $st_K v \subseteq U$.
6. Sigui U un obert connex de \mathbf{R}^N . Proveu que donats dos punts qualssevol de U existeix un políedre de dimensió 1 que els uneix, tot ell contingut a U .
7. Utilitzant les notacions de la proposició 6.7.
 - (a) Proveu que els vèrtexs d'un 1-símplex de $sd^2 K$ no són mai equivalents.
 - (b) Siguin $\Delta(v_0, \dots, v_k, w)$ i $\Delta(v_0, \dots, v_k, w')$ dos símplexs de $sd^2 K$. Proveu que si w és equivalent a w' , aleshores hi ha un enter p tal que $\varphi^p(v_i) = v_i$, per a tot $0 \leq i \leq k$, i $\varphi^p(w) = w'$.
 - (c) Proveu que (a) i (b) impliquen que ψ'_2 és injectiva.
8. Proveu que els espais projectius complexos $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$, $n \geq 0$, i els espais lenticulars, $L(p, q)$, són triangulables.
9. Sigui K un complex simplicial de \mathbf{R}^N . Una *subdivisió* de K és un complex simplicial K' de \mathbf{R}^N , tal que per a tot símplex σ' de K' existeix un símplex σ de K que el conté, $|\sigma'| \subseteq |\sigma|$, i tal que $|K'| = |K|$. Proveu que donat un punt $x \in |K|$ existeix una subdivisió de K de la que x és un vèrtex.

7 El teorema d'aproximació simplicial

Sigui $f : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació contínua entre els políedres $|K|$ i $|L|$. En general f estarà lluny d'ésser una aplicació simplicial, ja que només hi ha un nombre finit d'aplicacions simplicials entre dos políedres fixats, mentres que d'aplicacions contínues n'hi ha moltes més; de fet el conjunt d'aquestes és no numerable si els políedres són de dimensió positiva. En aquest apartat

provarem que es pot aproximar f , en un sentit que precisarem, per una aplicació simplicial.

Recordem que en el problema 4 de l'apartat 1 hem vist que tot punt d'un políedre pertany a l'interior d'un únic símplex, que s'anomena el *suport* del punt.

Definició. Siguin K i L complexs simplicials, i $f : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació contínua. Una aplicació simplicial $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$ es diu que és una *aproximació simplicial* de f si, per a qualsevol punt $x \in |K|$, el punt $\varphi(x)$ és del suport de $f(x)$.

Proposició 7.1. *Si φ és una aproximació simplicial de f , aleshores φ és homòtopa a f .*

Demostració. En efecte, és suficient considerar l'homotopia lineal sobre cada símplex definida per

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + t\varphi(x) ,$$

que està ben definida perquè tant $f(x)$ com $\varphi(x)$ estan sobre el mateix símplex, i els símplexs són convexos. \square

L'objectiu d'aquest apartat és provar el resultat següent, demostrat per J.W.Alexander l'any 1926.

Teorema 7.2 (d'aproximació simplicial). *Sigui $f : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació contínua entre políedres. Hi ha un enter n tal que f admet una aproximació simplicial*

$$\varphi : |sd^n K| \longrightarrow |L| .$$

Per fer la prova del teorema d'aproximació simplicial necessitarem el lema del nombre de Lebesgue, que recordem prèviament:

Lema 7.3 (del nombre de Lebesgue). *Sigui X un espai mètric compacte i $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recobriment per oberts de X . Llavors existeix un nombre real $\varepsilon > 0$, tal que tot subconjunt de X de diàmetre menor que ε està contingut en un dels oberts del recobriment, és a dir, si $A \subseteq X$ té diàmetre $\leq \varepsilon$, existeix un $i \in I$ tal que $A \subseteq U_i$.*

A tot nombre real ε amb aquesta propietat l'anomenarem nombre de Lebesgue del recobriment \mathcal{U} .

Demostració. Com que X és compacte, podem suposar que el recobriment és finit. Per a tot $x \in X$, la funció

$$f_i(x) = d(x, X - U_i) ,$$

és contínua, i també ho és

$$f(x) = \sup f_i(x) .$$

Observem que f pren valors en \mathbf{R}^+ , és a dir, defineix una aplicació contínua $f : X \longrightarrow \mathbf{R}^+$. En efecte, $\{U_i\}$ és un recobriment de X i, per tant, per a tot $x \in X$ existeix un i tal que $x \in U_i$, d'on $f_i(x) = d(x, X - U_i) > 0$, per un cert i , d'on resulta $f(x) > 0$.

Per la compacitat de X , $f(X)$ és compacte i existirà un nombre real $\varepsilon > 0$ tal que $f(X) \subseteq (\varepsilon, +\infty)$. Aquest ε és un *nombre de Lebesgue* del recobriment que buscàvem: en efecte, sigui $A \subseteq X$ de diàmetre menor que ε , i prenem un $x \in A$ qualsevol. Llavors, si i és tal que $f_i(x)$ és màxim (recordem que hi ha un nombre finit d'indexos), $A \subseteq U_i$. En efecte, si $A \not\subseteq U_i$, existiria un element $y \in A$ tal que $y \notin U_i$, però aleshores

$$d(x, y) \leq \text{diam } A < \varepsilon ,$$

mentres que, d'altra banda,

$$d(x, y) \geq d(x, X - U_i) = f_i(x) = f(x) \geq \varepsilon ,$$

el que és absurd. □

Demostració del teorema 7.2: Considerem el recobriment \mathcal{U} de $|K|$ format pel oberts $f^{-1}(st_L w)$, on w varia entre els vèrtexs de L . Com $|K|$ és un espai mètric compacte existirà un nombre de Lebesgue ε associat al recobriment \mathcal{U} . Segons el teorema 6.3, podem prendre q prou gran de forma que

$$\|sd^q K\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon .$$

En particular, per a tot vèrtex v de $sd^q K$, hi haurà un vèrtex w de L amb

$$st_K v \subseteq f^{-1}(st_L w) .$$

Definim una aplicació entre els conjunts de vèrtexs de K i L ,

$$\varphi : \mathcal{V}_K \longrightarrow \mathcal{V}_L ,$$

per $\varphi(v) = w$, on w és qualsevol vèrtex de L tal que $st_K v \subseteq f^{-1}(st_L w)$. Per tant es verifica

$$f(st_K v) \subseteq st_L \varphi(v) .$$

Provem que φ s'estén a una aplicació simplicial de K a L . En efecte, hem de comprovar que φ transforma símplexs en símplexs, és a dir, que si $\sigma = \Delta(v_0, \dots, v_p)$ és un símplex de K aleshores els vèrtexs $\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_p)$ generen un símplex de L . Com σ és un símplex, es té $\cap_{i=0}^p st_K v_i \neq \emptyset$ segons el lema 3.4. Així, com $f(st_K v_i) \subseteq st_L \varphi(v_i)$, també

$$\cap_{i=0}^p st_L \varphi(v_i) \neq \emptyset ,$$

el que és equivalent a que $\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_p)$ generin un símplex, aplicant novament 3.4.

Per acabar la demostració ens queda per comprovar que l'aplicació simplicial φ així construïda, és una aproximació simplicial de f . Sigui x un punt de $|K|$ i $\Delta(v_0, \dots, v_k)$ el seu suport. Per la definició de suport, es té

$$x \in \bigcap_{i=0}^{i=k} st_K v_i ,$$

i per tant, per la definició de φ , es verifica

$$f(x) \in \bigcap_{i=0}^{i=k} st_L \varphi(v_i) .$$

Per tant, el suport de $f(x)$ conté el símplex generat pels vèrtexs $\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_k)$, i en particular, conté $\varphi(x)$. \square

Podem donar una versió del teorema d'aproximació en termes de proximitat entre l'aplicació contínua f i l'aplicació simplicial φ . En efecte, si $f, g : |K| \longrightarrow |L|$ són aplicacions contínues entre políedres, la compacitat d'aquests permet definir una distància entre f i g com $d(f, g) = \max_{x \in |K|} \|f(x) - g(x)\|$, on la norma és la d'un espai euclidià \mathbf{R}^N tal que $|L| \subseteq \mathbf{R}^N$. Aleshores es té

Corollari 7.4. *Sigui $f : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació contínua entre políedres. Per a tot nombre real $\varepsilon > 0$, existeixen enters n i m , i una aplicació simplicial $\varphi : |sd^n K| \longrightarrow |sd^m L|$, tals que*

$$d(f, \varphi) < \varepsilon.$$

Demostració. Sigui m un enter prou gran perquè $\|sd^m L\| < \varepsilon$, l'existència del qual se segueix de 6.3. L'aplicació f induïx una aplicació contínua $f : |K| \longrightarrow |sd^m L|$, i pel teorema d'aproximació simplicial existeix una aplicació simplicial

$$\varphi : |sd^n K| \longrightarrow |sd^m L|,$$

que aproxima f , per n un enter prou gran. De la definició d'aproximació simplicial i de l'elecció de m en resulta el corollari. \square

Com aplicació del teorema d'aproximació simplicial podem demostrar el següent resultat sobre el grau de connexió de les esferes.

Teorema 7.5. *Si $m < n$, tota aplicació contínua $f : \mathbf{S}^m \longrightarrow \mathbf{S}^n$ és homòtopa a constant.*

Demostració. Siguin $K = \partial\Delta^{m+1}$ i $L = \partial\Delta^{n+1}$ triangulacions respectives de \mathbf{S}^m i \mathbf{S}^n . Pel teorema d'aproximació simplicial, f admet una aproximació simplicial $\varphi : |sd^r K| \longrightarrow |L|$. Així, per la proposició 7.1 és suficient comprovar que φ és homòtopa a constant. Com φ és una aplicació simplicial i $|sd^r K|$ és un políedre de dimensió m , la imatge de φ està continguda en el m -esquelet de $|L|$, i donat que la dimensió de $|L|$ és $n > m$, l'aplicació φ no és exhaustiva. Per tant, $\varphi(|sd^r K|)$ està contingut en el complementari d'un punt de $|L|$, que és homeomorf a \mathbf{R}^n i per tant contràctil, d'on se segueix el resultat. \square

Problemes

1. Sigui $f : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació contínua i $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$ una aproximació simplicial de f . Proveu que, per a tot vèrtex $v \in \mathcal{V}_K$, es verifica $f(st_K v) \subseteq st_L \varphi(v)$.
2. Sigui $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació simplicial entre políedres. Proveu que φ induïx aplicacions simplicials $|sd^n K| \longrightarrow |sd^n L|$.

3. Considerem aplicacions contínues entre políedres $f : |K| \longrightarrow |L|$ i $g : |L| \longrightarrow |M|$, amb aproximacions simplicials $\varphi : |sd^n K| \longrightarrow |L|$ i $\psi : |sd^m L| \longrightarrow |M|$. Proveu que $\psi \circ \varphi : |sd^{n+m} K| \longrightarrow |M|$ és una aproximació simplicial de $g \circ f$.
4. Sigui $K = \partial\Delta^2$, la vora d'un símplex de dimensió 2, de manera que $|K|$ és homeomorf a \mathbf{S}^1 .
 - (a) Fixat un enter n , proveu que hi ha aplicacions contínues $f : |K| \longrightarrow |K|$ que no admeten una aproximació simplicial $|sd^n K| \longrightarrow |K|$.
 - (b) Construïu una aplicació contínua $f : |K| \longrightarrow |K|$ que no admeti una aproximació simplicial de $|K|$ en $|K|$, i que l'admeti de $|sdK|$ en $|K|$. Calculeu en aquest cas totes les aproximacions simplicials $|sdK| \longrightarrow |K|$.
5. Proveu que el conjunt de classes d'homotopia d'aplicacions contínues entre dos políedres és numerable.

8 Políedres cellulars

Els políedres simplicials que hem introduït en els apartats anteriors d'aquest capítol estan construïts a partir dels símplexs. Ens podem preguntar si es poden construir políedres més generals a partir dels polítops, que són una generalització dels polígons convexos del pla. En aquest darrer apartat indicarem breument les definicions dels polítops i dels políedres associats, i la seva relació amb els políedres simplicials considerats anteriorment.

Definició. Sigui v_0, \dots, v_n un conjunt finit de punts de \mathbf{R}^N . S'anomena *polítop convex* generat per v_0, \dots, v_n a l'envoltura convexa d'aquests punts.

És a dir, el polítop convex generat per v_0, \dots, v_n és el subconjunt de \mathbf{R}^N format pels punts de la forma

$$x = \sum t_i v_i ,$$

on les coordenades baricèntriques t_i verifiquen: $t_i \geq 0$ i $\sum t_i = 1$.

Si els punts v_0, \dots, v_n que generen un polítop són afinement independents, retrobem la definició de símplex n -dimensional. Ara però, els punts que generen un polítop poden ser afinement dependents, d'aquesta forma els polígons

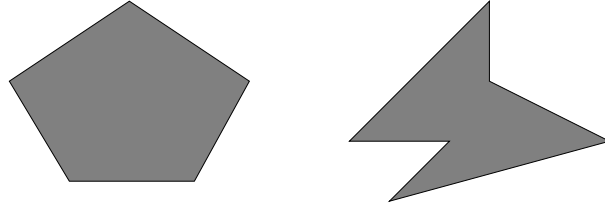


Figura 1.18: (a) és convex, (b) no és convex.

convexos del pla són exemples de polítops. A la figura 1.18 en veiem alguns exemples.

Com en el cas simplicial es pot parlar de dimensió d'un polítop convex, que és la dimensió de l'espai afí minimal que el conté.

Proposició 8.1. *Si P és un polítop convex de dimensió n , aleshores P és homeomorfa a un símplex n -dimensional.* \square

També podem parlar de les cares d'un polítop convex P : suposem que P és un polítop generat pels vèrtexs $\{v_0, \dots, v_n\}$. P genera un espai afí A , del que és un tancat, direm que un punt de P és un punt interior de P si és un punt interior del subconjunt P de l'espai A . Ara, definim les *cares* de P com els polítops convexos σ generats pels subconjunts $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_p}\}$ del conjunt de vèrtexs de P tals que cap dels punts de σ sigui de l'interior de P . Amb l'anterior definició, podem generalitzar la noció de complex i políedre simplicials.

Definició. Un *complex cellular* K és un conjunt finit de polítops convexos de \mathbf{R}^N , $K = \{P_1, \dots, P_r\}$, que verifica

- (i) si P_i és un polítop de K , totes les cares de P_i són de K ,
- (ii) si P_i i P_j són polítops de K , aleshores o bé $P_i \cap P_j = \emptyset$ o bé $P_i \cap P_j$ és una cara de P_i i de P_j

Un *políedre cellular* és un conjunt $|K| \subseteq \mathbf{R}^n$ que és unió dels polítops convexos d'un complex cellular.

Així per exemple, els políedres regulars, és a dir, el tetràedre, l'octàedre, l'icosàedre, el cub i el dodecàedre són complexs cel·lulars. Els tres primers són de fet complexs simplicials, no així el cub i el dodecàedre.

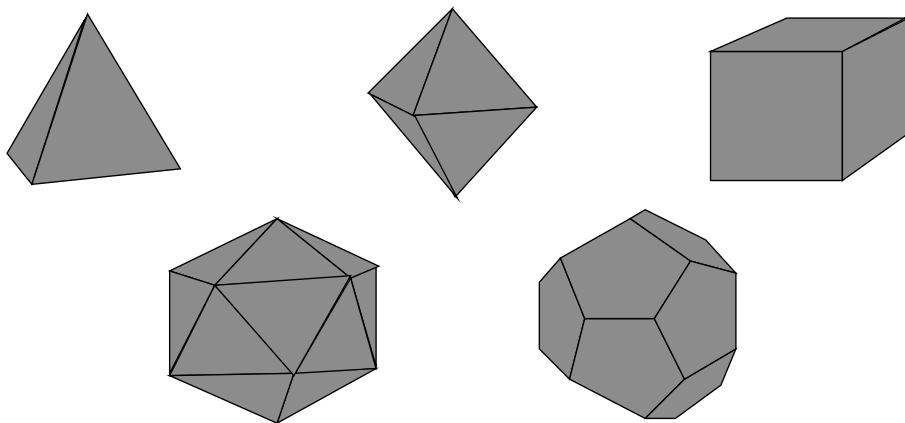


Figura 1.19: Els políedres regulars.

De la mateixa manera que un polígon convex del pla es pot triangular traçant els segments que uneixen els vèrtexs amb el baricentre, és fàcil demostrar, usant un raonament semblant al que hem fet en la construcció de la subdivisió baricèntrica, que els polítops admeten una subdivisió simplicial. Aquesta construcció permet establir la relació existent entre els políedres cel·lulars i els políedres simplicials:

Teorema 8.2. *Tot políedre cel·lular admet una subdivisió que és simplicial.*

□

Per els políedres cel·lulars es defineixen les cares de dimensió k com els subpolítops de dimensió k , l'esquelet p -dimensional com el subpolítop format per les cares de dimensió $\leq p$, i la característica de Euler de forma similar al cas simplicial, és a dir, com la suma alternada del nombre de cares de cadascuna de les dimensions possibles. És immediat comprovar que el procés de subdivisió simplicial no modifica el càlcul de la característica de Euler.

Per acabar aquest apartat anem a provar la fórmula de Euler pels polítops convexas de \mathbf{R}^3 . Si $|K|$ és un polítop de \mathbf{R}^3 notarem per v , a i c el nombre de vèrtexs, arestes i cares de dimensió 2, respectivament, de $|K|$.

Teorema 8.3 (Fórmula de Euler). *Per a tot polítop convex de dimensió 3 es verifica $\chi(sq_2 K) = 2$, és a dir, si v és el nombre de vèrtexs, a el nombre d'arestes i c el nombre de cares 2-dimensionals de K , es verifica*

$$v - a + c = 2.$$

Demostració. Ens limitarem a donar les idees bàsiques d'una demostració elemental, deixant els detalls al lector, ja que més endavant, al corollari 9.6 del capítol 3, es dóna una fórmula més general.

Podem suposar que les cares del polítop són triangulars perquè, com hem dit abans, la subdivisió simplicial no modifica la característica de Euler. Si treiem una cara del políedre i apliquem la projecció estereogràfica des d'un punt proper d'aquesta i sobre un pla general, obtenim un políedre simplicial de \mathbf{R}^2 amb $v' = v$ vèrtexs, $a' = a$ arestes i $c' = c - 1$ cares. Per tant hem de provar que $v' - a' + c' = 1$.

Numerem les regions triangulars del pla T_1, \dots, T_k de forma que T_j té contacte amb els triangles anteriors $T_1 \cup \dots \cup T_{j-1}$ en 1 o 2 arestes.

Pel triangle T_1 es té

$$\chi(T_1) = 3 - 3 + 1 = 1.$$

D'altra banda si afegim T_j a $T_1 \cup \dots \cup T_{j-1}$ es poden donar dues situacions: en el cas que el nou triangle té una sola aresta en comú amb les anteriors resulta

$$\begin{aligned} v(\cup_{1 \leq i \leq j} T_i) &= v(\cup_{1 \leq i \leq j-1} T_i) + 1, \\ a(\cup_{1 \leq i \leq j} T_i) &= a(\cup_{1 \leq i \leq j-1} T_i) + 2, \\ c(\cup_{1 \leq i \leq j} T_i) &= c(\cup_{1 \leq i \leq j-1} T_i) + 1. \end{aligned}$$

Mentres que si en té dues, trobem

$$\begin{aligned} v(\cup_{1 \leq i \leq j} T_i) &= v(\cup_{1 \leq i \leq j-1} T_i), \\ a(\cup_{1 \leq i \leq j} T_i) &= a(\cup_{1 \leq i \leq j-1} T_i) + 1, \\ c(\cup_{1 \leq i \leq j} T_i) &= c(\cup_{1 \leq i \leq j-1} T_i) + 1. \end{aligned}$$

En qualsevol cas, la característica de Euler, $\chi = v - a + c$, no canvia. Així, per inducció, la figura plana té característica de Euler 1, d'on resulta el teorema.

□

Com aplicació elemental de la fórmula de Euler que acabem de provar anem a veure que si imposen certes propietats de regularitat a un polítop de \mathbf{R}^3 , aleshores només hi ha un nombre finit de possibilitats per als valors de v , a i c .

Proposició 8.4. *Sigui $|K|$ un políedre que és vora d'un polítop convex de dimensió 3 de \mathbf{R}^3 . Suposem que cada cara té h vèrtexs, i que cada vèrtex pertany al mateix nombre de cares, k . Aleshores el parell (h, k) ha d'ésser un dels següents: $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$. Els triples (v, a, c) de vèrtexs, arestes i cares de K corresponents són $(4, 6, 4)$, $(6, 12, 8)$, $(12, 30, 20)$, $(8, 12, 6)$ i $(20, 30, 12)$, respectivament.*

Demostració. Com cada aresta té dos vèrtexs tindrem

$$hc = 2a = kv ,$$

i substituint a la fórmula de Euler trobem

$$\frac{2a}{k} - a + \frac{2a}{h} = 2 ,$$

o equivalentment

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2} .$$

Per un políedre podem suposar que $h, k \geq 3$. D'altra banda, si fossin tant h com k més grans que 3 tindriem

$$0 < \frac{1}{a} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0 ,$$

el que és absurd. Per tant h o k és igual a 3. Si $h = 3$, aleshores

$$0 < \frac{1}{a} = \frac{1}{3} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2} ,$$

i per tant

$$3 \leq k \leq 5 .$$

Per simetria, si $k = 3$ es tindrà $3 \leq h \leq 5$. Així les possibilitats es redueixen als parells (h, k) de l'enunciat.

Els triples corresponents es dedueixen ara immediatament de les fórmules anteriors

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2},$$

i

$$hc = 2a = kv.$$

□

Si fixem a més que les arestes de K siguin totes elles de la mateixa longitud, en resulten els cinc políedres regulars:

- el tetràedre, que correspon a $(4, 6, 4)$,
- l'octàedre, que correspon a $(6, 12, 8)$,
- l'icosàedre, que correspon a $(12, 30, 20)$,
- el cub, que correspon a $(8, 12, 6)$,
- i el dodecàedre, que correspon a $(20, 30, 12)$.

En els propers capítols provarem la fórmula de Euler 8.3 per a tot políedre celular homeomorf a l'esfera.

9 Apèndix: Categories i functors

En aquest apèndix recollim les definicions bàsiques de categories, functors i transformacions naturals, que farem servir al llarg d'aquest llibre. Aquests conceptes varen sorgir dels treballs en Topologia Algebraica de S.Eilenberg i S.MacLane cap a l'any 1942, i han esdevingut un llenguatge adequat a aquesta disciplina.

Definició. Una *categoria* \mathbf{C} consisteix de:

- (i) Una classe d'objectes, que notarem $Ob \mathbf{C}$.
- (ii) Per a tot parell d'objectes $X, Y \in Ob \mathbf{C}$, un conjunt $Hom(X, Y)$ que anomenarem el conjunt de morfismes de X a Y .
- (iii) Donats tres objectes qualssevol $X, Y, Z \in Ob \mathbf{C}$, una aplicació

$$Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z) \longrightarrow Hom(X, Z) ,$$

que anomenarem el morfisme de composició. La imatge del parell (f, g) per aquesta aplicació la denotarem per $g \circ f$, o simplement gf .

A més s'han de verificar els axiomes següents:

Associativitat: la composició és associativa, és a dir, si $f \in \text{Hom}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}(Y, Z)$ i $h \in \text{Hom}(Z, W)$, aleshores es verifica $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Existència d'identitats: Per a tot objecte $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$, hi ha un element 1_X , també notat id_X , tal que

$$\begin{aligned} 1_X \circ f &= f, \\ g \circ 1_X &= g, \end{aligned}$$

per a tot $f \in \text{Hom}(W, X)$ i tot $g \in \text{Hom}(X, Y)$.

Exemples. Anem a donar a continuació alguns exemples de categories deixant per al lector en tots els casos la comprovació trivial de que es verifiquen els axiomes de la definició.

1. La categoria de conjunts, que notarem **Conj**, té per classe d'objectes la classe de tots els conjunts, per morfismes les aplicacions entre conjunts i per composició la composició habitual d'aplicacions.

2. La categoria d'espais topològics, **Top**, té per objectes els espais topològics. Donats dos espais topològics X, Y , el conjunt de morfismes de X a Y , $\text{Hom}(X, Y)$, és el conjunt d'aplicacions contínues de X a Y , i la composició és la composició habitual d'aplicacions.

3. Recordem que dues aplicacions contínues $f, g : X \rightarrow Y$ entre espais topològics es diu que són homòtopes si existeix una aplicació contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $f(x) = F(x, 0)$ i $g(x) = F(x, 1)$, per a tot x de X . Donats dos espais topològics X, Y , l'homotopia d'aplicacions contínues defineix una relació d'equivalència entre aquestes, el que permet considerar el conjunt de classes d'homotopia d'aplicacions de X a Y , que notarem $[X, Y]$. Es defineix la categoria d'homotopia, **hTop**, com la categoria que té per objectes els espais topològics, i per morfismes les classes d'equivalència d'homotopia.

4. La categoria de parells topològics, **Top²**, té per objectes els parells d'espais topològics, (X, A) , tals que A és un subespai de X . Si (Y, B) és un altre parell, els morfismes de (X, A) a (Y, B) són les aplicacions contínues $f : X \rightarrow Y$ tals que $f(A) \subseteq B$.

5. Un altre exemple que ens serà d'utilitat és la categoria de grups abelians, **Ab**, que té per objectes els grups abelians, i per morfismes els homomorfismes de grups entre aquests.

Una variant d'aquest exemple és la categoria de grups abelians graduats, \mathbf{Ab}_* . Els seus objectes són les successions de grups abelians, $\{A_n\}_{n \geq 0}$. Donats dos grups abelians graduats, $\{A_n\}, \{B_n\}$, un morfisme entre ells és una successió de morfismes $\{f_n : A_n \longrightarrow B_n\}_{n \geq 0}$.

6. Si \mathbf{k} és un cos, es poden considerar anàlogament les categories de \mathbf{k} -espais vectorials, i la de \mathbf{k} -espais vectorials graduats.

Com hem esmentat a la introducció, en Topologia Algebraica s'associa a tot espai topològic algun objecte algebraic, com pot ser un grup abelià o un espai vectorial. El pas de la categoria **Top** a una categoria d'objectes algebraics, per exemple la categoria de grups abelians **Ab**, es precisa a través de la noció de functor.

Definició. Donades dues categories \mathbf{C}, \mathbf{D} , un *functor* F de \mathbf{C} a \mathbf{D} , $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, és una funció que assigna

- (i) a tot objecte X de \mathbf{C} un objecte, $F(X)$, de \mathbf{D} ,
- (ii) a cada morfisme $f \in \text{Hom}(X, Y)$ un morfisme $F(f) \in \text{Hom}(F(X), F(Y))$,

verificant els axiomes següents:

- 1. Per a tot $X \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, es té $F(1_X) = 1_{F(X)}$.
- 2. Per $f \in \text{Hom}(X, Y)$ i $g \in \text{Hom}(Y, Z)$ es verifica

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \in \text{Hom}(F(X), F(Z)) .$$

Exemples. 1. Com tot espai topològic és alhora un conjunt, podem considerar el functor d'inclusió, també anomenat d'oblit de l'estructura topològica, $\mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Conj}$. Anàlogament, es defineix el functor d'oblit de l'estructura de grup $\mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Conj}$.

2. El functor $h : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{hTop}$ està definit com la identitat sobre els objectes, i associa a una aplicació contínua $f : X \longrightarrow Y$ la seva classe d'homotopia.

3. Si associem el parell (X, \emptyset) a un espai topològic X , en resulta un functor $\mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}^2$.

4. Si X és un espai topològic es defineix el functor $X \times : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}$ que associa a un espai topològic Y l'espai $X \times Y$ amb la topologia producte, i a una aplicació contínua $f : Y \longrightarrow Z$, l'aplicació contínua $1_X \times f : X \times Y \longrightarrow X \times Z$.

Una de les característiques dels functors que ens resultaran de més utilitat és que conserven els isomorfismes.

Definició. Sigui \mathbf{C} una categoria. Un morfisme $f : X \rightarrow Y$ entre objectes de \mathbf{C} es diu que és un *isomorfisme*, si existeix un morfisme $g : Y \rightarrow X$ de \mathbf{C} tal que $fg = 1_Y$ i $gf = 1_X$.

Així per exemple, un isomorfisme de **Top** no és altra cosa que un homeomorfisme entre espais topològics, i un isomorfisme de **Ab** és un isomorfisme de grups en el sentit habitual. El resultat al que alludiem anteriorment és,

Proposició 9.1. *Sigui $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un functor, i f un isomorfisme de \mathbf{C} . Aleshores $F(f)$ és un isomorfisme de \mathbf{D} .*

Demostració. És immediata, ja que aplicant F a les composicions $gf = 1_X$ i $fg = 1_Y$, i tenint present els axiomes d'un functor, resulta que $F(f)$ és invers de $F(g)$. \square

Per tal de comparar dos functors necessitem la noció de transformació natural de functors.

Definició. Siguin \mathbf{C} i \mathbf{D} dues categories, i $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ dos functors. Una *transformació natural* del functor F al functor G és una família de morfismes de \mathbf{D} , $\tau_X : F(X) \rightarrow G(X)$, per a cada objecte X de \mathbf{C} , tal que per a cada morfisme $f : X \rightarrow Y$ de \mathbf{C} , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \tau_X \downarrow & & \downarrow \tau_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

és commutatiu.

Definició. Siguin $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ functors entre les categories \mathbf{C} i \mathbf{D} . Una transformació natural $\tau : F \rightarrow G$ es diu que és una *equivalència natural*, o *isomorfisme de functors*, si per a tot objecte X de \mathbf{C} , el morfisme τ_X és un isomorfisme. Si existeix una equivalència natural entre F i G , es diu que els functors F, G són isomorfs.

Per exemple, si \mathbf{k} és un cos, i $\mathbf{k}\text{-}evf$ és la categoria de \mathbf{k} -espais vectorials de dimensió finita, aleshores el functor identitat és isomorf al functor bidual, que associa a un espai vectorial E , el bidual E^{**} .

Definició. Un functor $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es diu que és *una equivalència de categories* si existeix un functor $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$, i isomorfismes de functors $FG \cong 1_{\mathbf{D}}$ i $GF \cong 1_{\mathbf{C}}$.

Per exemple, la categoria de \mathbf{k} -espais vectorials de dimensió finita és equivalent a la categoria formada pels objectes \mathbf{k}^n , al variar $n \geq 0$, i les aplicacions lineals entre ells.

Problemes

1. Sigui G un grup.
 - (a) Proveu que la construcció següent dóna lloc a una categoria: considerem un únic objecte $*$, i $Hom(*, *) = G$, amb la composició definida pel producte de G .
 - (b) Proveu que un morfisme de grups $f : G \longrightarrow G'$ induïx un functor entre les categories associades.
 - (c) Sigui H un subgrup normal de G . Proveu que el morfisme de pas al quocient $G \longrightarrow G/H$ induïx un functor entre les categories associades.
2. Sigui A un grup abelià, i

$$tA = \{a \in A ; \text{ existeix un } n \in \mathbf{Z} \text{ tal que } na = 0\} ,$$

el subgrup de torsió. Proveu que $t : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ defineix un functor. Proveu que t conserva la injectivitat dels morfismes (és a dir, que si $f : A \longrightarrow B$ és un morfisme injectiu de grups abelians, el morfisme $t(f)$ també és injectiu), mentre que t no té perquè conservar l'exhaustivitat dels morfismes.

Capítol 2

Homologia simplicial

Aquest capítol és una introducció a l'homologia simplicial dels políedres. Hem vist en el capítol anterior com associar a un políedre qualsevol K un enter $\chi(K)$, la característica de Euler, però com podem comparar les característiques de Euler de diferents políedres? Si $f : |K| \longrightarrow |L|$ és una aplicació contínua, o fins i tot simplicial, la definició de χ no permet establir una relació entre $\chi(K)$ i $\chi(L)$. Veurem en aquest capítol que la característica de Euler es pot calcular a partir dels grups d'homologia simplicial, i que l'aplicació simplicial f indueix un morfisme dels grups d'homologia simplicial de K en els de L . Això farà possible, en alguns casos, establir una relació entre $\chi(K)$ i $\chi(L)$.

El càlcul dels grups d'homologia d'un políedre requereix la introducció dels complexs de R -mòduls i les successions exactes llargues associades a una successió exacta de complexs, el que constitueix el substracte algebraic, conegut en general com a Àlgebra Homològica, en el que es basaran la major part dels resultats del curs. El desenvolupament d'aquesta part algebraica el farem aquí simultanejant-lo amb les aplicacions geomètriques, de forma que a la introducció de cada nou concepte o resultat segueixi una aplicació geomètrica. Així per exemple, a la noció d'homotopia entre morfismes de complexs li seguirà el càlcul dels grups d'homologia d'un símplex, i després de la successió exacta d'homologia associada a una successió exacta de complexs introduïrem dues successions exactes de gran interès geomètric, com són la de l'homologia d'un parell poliedral i la de Mayer-Vietoris, que aplicarem immediatament al càlcul de l'homologia d'una esfera triangulada, $sq_n \Delta^{n+1}$.

L'objectiu del capítol no és tant desenvolupar la teoria d'homologia simplicial de forma completa com proporcionar les idees geomètriques subjacents, mostrar els problemes que es plantejen, i introduir el llenguatge bàsic de l'Àlgebra Homològica, que serà d'utilitat en els capítols posteriors.

1 Cadenes d'un políedre. Homologia simplicial

Sigui K un complex simplicial i $\mathcal{V}_K = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ el conjunt dels seus vèrtexs. Direm que K és un *complex simplicial ordenat* si el conjunt \mathcal{V}_K està totalment ordenat: $v_1 < v_2 < \dots < v_r$. En aquest cas tot subcomplex de K hereta una ordenació induïda. En particular les cares de K són símplexs ordenats.

Intuitivament, ordenar els vèrtexs d'un símplex és una forma d'orientar aquest símplex com mostra la figura 2.1.

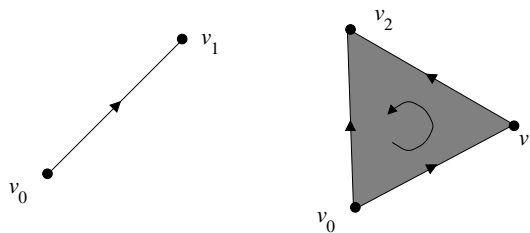


Figura 2.1: Símplexs ordenats.

Sigui $\Delta(v_{i_0}, \dots, v_{i_p})$ un símplex d'un complex ordenat K , de forma que $v_{i_0} < \dots < v_{i_p}$. Per indicar que considerem l'ordre dels vèrtexs, el denotarem per $[v_{i_0}, \dots, v_{i_p}]$.

Al llarg de tot aquest capítol suposarem que els complexs simplicials que apareixen estan ordenats.

Definició. Sigui K un complex simplicial ordenat. Per a tot $p \geq 0$, s'anomena *grup de cadenes p -dimensionals* de K , i es denota per $C_p(K)$,

el grup abelià lliure generat pel conjunt de cares p -dimensionals ordenades. És a dir, el grup de cadenes p -dimensionals és

$$C_p(K) := \oplus \mathbf{Z}[\sigma] ,$$

on la suma directa s'esten al conjunt de cares p -dimensionals ordenades.

Notem que si $p > \dim K$, aleshores $C_p(K) = 0$.

Per exemple, en el cas d'un 2-símplex, $[v_0, v_1, v_2]$, tindrem

$$\begin{aligned} C_0(\Delta) &= \mathbf{Z}[v_0] \oplus \mathbf{Z}[v_1] \oplus \mathbf{Z}[v_2] \cong \mathbf{Z}^3 , \\ C_1(\Delta) &= \mathbf{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbf{Z}[v_0, v_2] \oplus \mathbf{Z}[v_1, v_2] \cong \mathbf{Z}^3 , \\ C_2(\Delta) &= \mathbf{Z}[v_0, v_1, v_2] \cong \mathbf{Z} . \end{aligned}$$

i, en general, per a un símplex de dimensió n es té

$$C_p(\Delta^n) \cong \mathbf{Z}^{\binom{n+1}{p+1}}, \quad p \leq n.$$

Les arestes $[v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_1, v_2]$ de l'exemple anterior formen la vora del 2-símplex Δ^2 , si recorrem $[v_0, v_2]$ en sentit invers. L'operador vora que definirem a continuació és la versió algebraica d'aquest concepte geomètric. Observem, abans de donar aquesta definició, que com els grups de cadenes són grups abelians lliures de base els símplexs de diferents dimensions, per definir un morfisme entre aquests grups és suficient definir-lo sobre les cares i estendre'l per linealitat.

Definició. Sigui K un complex simplicial ordenat. Per tot $p \geq 1$, s'anomena *operador vora* $\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$ al morfisme de grups abelians que sobre els generadors està definit per

$$\partial_p[v_{i_0}, \dots, v_{i_p}] = \sum_{k=0}^p (-1)^k [v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_k}}, \dots, v_{i_p}] ,$$

on $[v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_k}}, \dots, v_{i_p}]$ denota el $(p-1)$ -símplex ordenat obtingut quan suprimim el vèrtex v_{i_k} . Per $p = 0$ es defineix $\partial_0 = 0$.

Per exemple, per un 1-símplex $[v_0, v_1]$ trobem $\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$, és a dir, la vora d'un 1-símplex ordenat indica quin dels vèrtex és punt inicial i quin és el punt final. En el cas d'un 2-símplex $[v_0, v_1, v_2]$ tindrem

$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] .$$

Per tal de simplificar les notacions, escriurem sovint l'operador vora sense indicar el subíndex, és a dir, escriurem ∂ per ∂_p .

Proposició 1.1. *Sigui K un complex simplicial ordenat. La composició*

$$C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K)$$

és nul·la per a tot $p \geq 1$, és a dir, $\partial^2 = 0$.

Demostració. És suficient veure-ho per als generadors. Sigui $\sigma = [v_{i_0}, \dots, v_{i_{p+1}}]$ un generador, és a dir, una cara ordenada de K . Calculem $\partial^2 \sigma$:

$$\begin{aligned} \partial(\partial[v_{i_0}, \dots, v_{i_{p+1}}]) &= \partial \left(\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k [v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_k}}, \dots, v_{i_{p+1}}] \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \left(\partial[v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_k}}, \dots, v_{i_{p+1}}] \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \left[\sum_{l < k} (-1)^l [v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_l}}, \dots, \widehat{v_{i_k}}, \dots, v_{i_{p+1}}] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l > k} (-1)^{l-1} [v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_k}}, \dots, \widehat{v_{i_l}}, \dots, v_{i_{p+1}}] \right] \\ &= \sum_{0 \leq l < k \leq p+1} \left[(-1)^{l+k} + (-1)^{l+k-1} \right] [v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_l}}, \dots, \widehat{v_{i_k}}, \dots, v_{i_{p+1}}] \\ &= 0 . \end{aligned}$$

□

Si K és un complex simplicial de dimensió n , els grups de cadenes simplicials p -dimensionals i els operadors vora corresponents, formen una successió de grups abelians lliures finit generats

$$C_n(K) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial} C_{n-2}(K) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0(K) .$$

Definició. A aquesta successió de grups abelians i morfismes se l'anomena el *complex de cadenes simplicials* del complex simplicial K , i es denota per $C_*(K)$.

Per tot $p \geq 0$, ∂_p és un morfisme de grups, i per tant el nucli i la imatge de ∂_p són subgrups de $C_p(K)$ i $C_{p-1}(K)$, respectivament. Es defineix el grup de *cicles p -dimensionals* de K com el nucli de ∂_p ,

$$Z_p(K) := \ker (\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)) ,$$

i el grup de *vores p -dimensionals* de K com la imatge de ∂_{p+1} ,

$$B_p(K) := \operatorname{im} (\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \longrightarrow C_p(K)) .$$

Lema 1.2. *Per a tot $p \geq 0$, es verifica*

$$B_p(K) \subseteq Z_p(K) .$$

Demostració. Si $z \in B_p(K)$, llavors existeix $c \in C_{p+1}(K)$ tal que $z = \partial_{p+1}(c)$ i per tant

$$\partial_p(z) = \partial_p \partial_{p+1}(c) = 0 ,$$

per 1.1. □

Definició. Sigui K un complex simplicial. Per a tot $p \geq 0$, es defineix el grup d'*homologia simplicial p -èssim* de K com el grup quocient

$$H_p(K) := Z_p(K) / B_p(K) .$$

Notem que $H_p(K) = 0$ si $p > \dim K$.

Els elements dels grups d'homologia $H_p(K)$ són així classes d'equivalència de cicles $z \in Z_p(K)$. Denotarem aquestes classes per $[z]$, i direm que el cicle z és un representant de la classe $[z]$. Quan dos cicles z i z' defineixen la mateixa classe, és a dir, quan existeix una cadena $c \in C_{p+1}(K)$ tal que $z - z' = \partial c$, es diu que z i z' són *cicles homòlegs*. Els grups d'homologia simplicial d'un políedre varen ser introduïts per H. Poincaré l'any 1895.

Presentem a continuació alguns exemples elementals que començaran a apuntar l'interés d'aquesta definició. Els càlculs, encara que senzills, il·lustraran també com podem raonar quan treballem amb classes d'homologia.

Exemples. 1. Sigui K el complex simplicial de dimensió 1 donat per $K_{max} = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}\}$, ordenat per $v_0 < v_1 < v_2$.

Aleshores tindrem

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbf{Z}[v_0] \oplus \mathbf{Z}[v_1] \oplus \mathbf{Z}[v_2], \\ C_1(K) &= \mathbf{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbf{Z}[v_1, v_2], \end{aligned}$$

i el complex de cadenes de K es redueix a un morfisme $\partial : C_1(P) \longrightarrow C_0(P)$, que opera en la forma

$$\begin{aligned} \partial[v_0, v_1] &= [v_1] - [v_0], \\ \partial[v_1, v_2] &= [v_2] - [v_1]. \end{aligned}$$

És a dir, es redueix a un morfisme entre un grup abelià lliure de rang 2 i un grup abelià lliure de rang 3, que té per matriu

$$\partial = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ +1 & -1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

i, per tant,

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{C_0(K)}{B_0(K)} = \frac{\mathbf{Z}[v_0] \oplus \mathbf{Z}[v_1] \oplus \mathbf{Z}[v_2]}{[v_0] \sim [v_1], [v_1] \sim [v_2]} \cong \mathbf{Z},$$

mentres que $Z_1(K) = 0$, d'on se segueix que $H_1(K) = 0$.

2. Sigui K l'1-esquelet d'un 2-símplex ordenat de vèrtexs $\{v_0, v_1, v_2\}$, tindrem

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbf{Z}[v_0] \oplus \mathbf{Z}[v_1] \oplus \mathbf{Z}[v_2], \\ C_1(K) &= \mathbf{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbf{Z}[v_1, v_2] \oplus \mathbf{Z}[v_0, v_2], \end{aligned}$$

amb ∂ donada per la matriu

$$\partial = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

d'on resulta,

$$H_0(K) \cong \mathbf{Z}, \quad H_1(K) = Z_1(K) \cong \mathbf{Z}.$$

3. Sigui K l'esquelet 2-dimensional d'un 3-símplex de vèrtexs $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$. En principi podem calcular l'homologia de K com en els exemples anteriors, és clar, però, que el nombre de cares de diferents dimensions ha augmentat, sobretot per dimensió 1, pel que trobar la matriu de la diferencial requereix realitzar més càlculs. És fàcil raonar que $H_0(K) = \mathbf{Z}$ (vegeu també el proper apartat).

Calculem H_2 : com la dimensió del políedre és 2, no hi ha vores 2-dimensionals, i per tant $H_2(K) = Z_2(K)$. Si z és un cicle 2-dimensional, serà de la forma

$$z = a[v_0, v_1, v_2] + b[v_0, v_1, v_3] + c[v_0, v_2, v_3] + d[v_1, v_2, v_3] ,$$

Imposant que $\partial z = 0$ en resulta

$$a = -b = -c = d ,$$

i per tant z és un múltiple del cicle

$$[v_0, v_1, v_2] - [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_1, v_2, v_3] ,$$

que així és un generador de $Z_2(K)$. En definitiva, $H_2(K) = Z_2(K) \cong \mathbf{Z}$.

Per calcular $H_1(K)$ enlloc de calcular la matriu de l'operador vora anem a aprofitar la possibilitat d'escollir un bon representant de la classe d'homologia d'un cicle. En efecte, suposem que z és un cicle 1-dimensional. Aquest cicle z serà una combinació lineal de les arestes de K . Si l'aresta $[v_2, v_3]$ apareix a z amb multiplicitat a , considerem el cicle

$$z' = z - a\partial[v_0, v_2, v_3] ,$$

aleshores z' és homòleg a z , ja que es diferencien de la vora de $[v_0, v_2, v_3]$, i l'aresta $[v_2, v_3]$ no apareixerà a z' . Raonant de forma anàloga amb el símplex $[v_0, v_1, v_2]$ trobarem un cicle z'' que representa la mateixa classe d'homologia que z en el que no apareixen les arestes $[v_2, v_3]$, $[v_1, v_2]$. Observem que aleshores no hi pot aparèixer tampoc l'aresta $[v_0, v_2]$, ja que en cas contrari el coeficient del vèrtex $[v_2]$ a la vora de z'' no s'anul·laria, en contradicció amb que z'' sigui un cicle. Així, $z'' = a[v_0, v_1] + b[v_1, v_3] + c[v_0, v_3]$, i imposant que z'' sigui un cicle, trobem, com en l'exemple anterior, que z'' haurà de ser un múltiple del cicle

$$[v_0, v_1] + [v_1, v_3] - [v_0, v_3] ,$$

però aquest verifica

$$[v_0, v_1] + [v_1, v_3] - [v_0, v_3] = \partial[v_0, v_1, v_3] ,$$

i per tant és homòleg a zero. En definitiva trobem

$$H_1(K) = 0 .$$

Proposició 1.3. *Sigui K un complex simplicial ordenat. Els grups d'homologia $H_p(K)$ són grups abelians finit generats, per a tot $p \geq 0$, i admeten una descomposició de la forma*

$$H_p(K) \cong \mathbf{Z}^r \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_m ,$$

on r és el rang, i $T_i \cong \mathbf{Z}/d_i\mathbf{Z}$ són grups cíclics finits, que verifiquen la relació de divisibilitat $d_1|d_2|\dots|d_m$.

Demostració. En efecte, els grups de cicles $Z_p(K)$ són finit generats ja que són subgrups dels grups de cadenes $C_p(K)$, que són finit generats per construcció. Com el grup d'homologia $H_p(K)$ és un quocient del grup de cicles $Z_p(K)$, també és finit generat.

La resta de la proposició és conseqüència directa del teorema d'estructura dels grups abelians finit generats. Segons aquest resultat tot grup abelià finit generat A és de la forma $A \cong F \oplus T$, on F és un grup abelià lliure finit generat, i per tant existeix r amb $F \cong \mathbf{Z}^r$, i T és un grup de torsió. A més, T és isomorf de forma única a una suma directa de la forma $\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/d_2\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/d_m\mathbf{Z}$, en la que els enters d_i verifiquen la relació de divisibilitat $d_1|d_2|\dots|d_m$ (vegeu, per exemple, [16]). \square

Definició. Sigui K un complex simplicial, i $p \geq 0$ un nombre enter. S'anomena *nombre de Betti p -èssim de K* al rang del grup d'homologia $H_p(K)$. Denotarem aquest nombre per $b_p(K)$.

En els exemples anteriors els grups d'homologia calculats són tots ells lliures. En els problemes trobareu exemples de grups d'homologia amb torsió no nulla.

Problemes

1. Calculeu l'homologia simplicial de sengles triangulacions del tor, el pla projectiu i l'ampolla de Klein.
2. Calculeu l'homologia del barret del capsigrany (vegeu el problema 2 de l'apartat 1.5).
3. Construïu un complex simplicial K amb grups d'homologia

$$H_0(K) \cong \mathbf{Z}, \quad H_1(K) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \quad H_p(K) = 0, \quad \text{si } p \geq 2.$$

2 H_0 i connexió

En aquest apartat anem a veure com el grup H_0 mesura la connexió d'un políedre. Comencem recordant que, com hem vist a 1.1.1, els políedres són espais localment arc-connexos, i que per tant els conceptes de connexió i arc-connexió els són equivalents. En primer lloc comprovarem que la connexió d'un políedre es pot expressar en termes de la connexió dels vèrtexs a través de les arestes, d'on se seguirà fàcilment el resultat principal.

Definició. Sigui K un complex simplicial. Direm que K és *simplicialment connex* si per a tot parell de vèrtexs v_0, v_1 de K , existeix una successió de vèrtexs de K , $w_0, w_1, w_2, \dots, w_r$, tal que $w_0 = v_0$, $w_r = v_1$, i tal que per a tot i , $0 \leq i \leq r-1$, el símplex $\Delta(w_i, w_{i+1})$ és una aresta de K .

Proposició 2.1. *Sigui K un complex simplicial. Aleshores K és simplicialment connex si, i només si, $|K|$ és connex.*

Demostració. Siguin v_0, v_1 vèrtexs de K . Introduïm la següent relació: $v_0 \sim v_1$ si, i només si, existeixen vèrtexs w_0, w_1, \dots, w_r de K tals que $w_0 = v_0$, $w_r = v_1$ i $\Delta(w_i, w_{i+1})$ és una aresta de K per a tot i . És immediat comprovar que \sim és una relació d'equivalència. De la definició anterior se segueix que K és simplicialment connex si, i només si, hi ha una única classe d'equivalència.

Sigui v un vèrtex de K i prenem

$$C_v = \bigcup_{w \sim v} st_K w ,$$

on $st_K w = \overline{st}_K w - \ell_K w$ és l'estrella oberta de w en K . El complex K és simplicialment connex si, i només si, $|K| = C_v$ per a qualsevol vèrtex v . En efecte, si K és simplicialment connex aleshores tots els vèrtexs són equivalents a un vèrtex qualsevol v , i per tant C_v és la reunió de totes les estrelles obertes de K , i com aquestes formen un recobriment de K , aleshores $|K| = C_v$. Recíprocament, si es verifica aquesta darrera igualtat, aleshores K és simplicialment connex ja que si w és un vèrtex de K , tindrem que $w \in st_K w'$ per algun vèrtex w' relacionat amb v , però com l'estrella oberta $st_K w'$ no conté cap altre vèrtex que w' , resulta $w = w'$, i en definitiva $w \sim w'$.

Per tant el resultat quedarà provat si demostrem que, en general, els oberts C_v , al variar v entre els vèrtexs de K , són les components connexes de $|K|$. Per veure-ho, provem que els conjunts C_v són arc-connexos i disjunts.

Provem que C_v és arc-connex: és suficient provar que si $x \in C_v$, llavors hi ha un camí a C_v que uneix v i x . Com que $x \in C_v$, existirà un vèrtex $w \sim v$ tal que $x \in st_K w$. Però, aleshores el segment que va de x a w està contingut en $st_K w$, i juntament a les arestes que uneixen w i v donen el camí cercat.

Provem ara que C_v i $C_{v'}$ són disjunts si v i v' són vèrtexs no relacionats: suposem que $C_v \cap C_{v'} \neq \emptyset$, i sigui $x \in C_v \cap C_{v'}$. Aleshores existeixen vèrtexs $w \sim v$ i $w' \sim v'$ tals que $x \in st_K w$ i $x \in st_K w'$. Però aleshores $[w, w']$ és una aresta del políedre K , d'on resulta que $v \sim v'$, el que és una contradicció.

En definitiva, C_v són les components arc-connexes de $|K|$, el que acaba la demostració. \square

Teorema 2.2. *Sigui $|K|$ un políedre connex, no buit. Llavors $H_0(K) \cong \mathbf{Z}$.*

Demostració. Fixem un vèrtex v_0 de K . Comencem observant que, donat un vèrtex qualsevol v_i , la 0-cadena $v_i - v_0$ és una vora. En efecte, $|K|$ és connex, i per tant, segons el resultat anterior, K és simplicialment connex. Així, si v_i és un vèrtex de K existeix una successió de vèrtexs $w_{i0}, w_{i1}, \dots, w_{ir}$ tal que $w_{i0} = v_0$, $w_{ir} = v_i$, i $[w_{ij}, w_{ij+1}]$ és una aresta de K . Aleshores la cadena

$$s_i = [w_{i0}, w_{i1}] + [w_{i1}, w_{i2}] + \dots + [w_{ir-1}, w_{ir}] \in C_1(K) ,$$

té vora

$$\partial s_i = (w_{i1} - w_{i0}) + (w_{i2} - w_{i1}) + \cdots + (w_{ir} - w_{ir-1}) = w_{ir} - w_{i0} = v_i - v_0.$$

Definim ara el morfisme

$$\begin{aligned} \varepsilon : C_0(K) &\longrightarrow \mathbf{Z}, \\ \sum \lambda_i v_i &\longmapsto \sum \lambda_i, \end{aligned}$$

que anomenarem morfisme d'augmentació. Per provar el teorema és suficient comprovar que ε és exhaustiu i té nucli $B_0(K)$. En efecte, ε és exhaustiu ja que donat $\lambda \in \mathbf{Z}$ es verifica $\varepsilon(\lambda v_0) = \lambda$. Provem que es té $\ker \varepsilon = B_0(P)$, comprovant les dues incusions:

$B_0(P) \subseteq \ker \varepsilon$: com les arestes σ de K generen $C_1(K)$, les seves vores $\partial \sigma$ generen $B_0(K)$ i, per tant, és suficient provar que $\varepsilon(\partial \sigma) = 0$. Sigui $\sigma = [v, v']$, aleshores es té

$$\varepsilon(\partial \sigma) = \varepsilon(v' - v) = 1 - 1 = 0,$$

així $\partial \sigma \in \ker \varepsilon$.

$\ker \varepsilon \subseteq B_0(P)$: que un 0-cicle $\sum \lambda_i v_i$ sigui del nucli de ε significa que $\sum \lambda_i = 0$ i, per tant, amb les notacions anteriors es té

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i v_i &= \sum \lambda_i v_i - \sum \lambda_i v_0 \\ &= \sum \lambda_i (v_i - v_0) = \sum \lambda_i \partial s_i \\ &= \partial(\sum \lambda_i s_i) \in B_0(P). \end{aligned}$$

□

Es pot fer un raonament semblant quan $|K|$ no és connex i veure que $H_0(K)$ és un grup lliure, de rang igual al nombre de components connexes de $|K|$. Nosaltres ho deduirem en un proper apartat d'altres resultats.

3 Complexs de R -mòduls

El càlcul de l'homologia d'un políedre a partir de la definició pot resultar molt feixuc, sinó impossible, pel que és convenient disposar de tècniques de càlcul

més àgils. En aquest i els següents apartats, introduïrem els complexs de R -mòduls i les operacions bàsiques entre ells, que constituïran l'eina algebraica en la que es fonamenta l'homologia.

En tot el que segueix, R serà un anell commutatiu unitari. Per fixar les idees es pot pensar en l'anell dels enters \mathbf{Z} , o en un cos de característica zero com \mathbf{Q} , \mathbf{R} o \mathbf{C} , encara que aquestes restriccions no són necessàries i, com veurem en el capítol 4 al parlar del teorema de Borsuk-Ulam, és convenient no excloure els anells de característica arbitrària, com $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Definició. Un *complex de cadenes de R -mòduls*, és una successió de R -mòduls M_n , $n \geq 0$, i de morfismes de R -mòduls $\partial_n : M_n \longrightarrow M_{n-1}$, $n \geq 1$, tals que

$$\partial_n \partial_{n+1} = 0 ,$$

per tot $n \geq 1$.

Per tal de tenir definit ∂_n per tot $n \geq 0$, posarem $\partial_0 = 0$.

Direm que el complex és *finit* si existeix un n_0 tal que $M_p = 0$, per a tot $p \geq n_0$.

Als morfismes ∂_n , $n \geq 1$, s'els anomena *diferencials* del complex. Un complex el notarem per (M_*, ∂) , o, fins i tot simplement per M_* , si els morfismes diferencials són clars pel context. Sovint escriurem també un complex en la forma

$$\cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 .$$

Els primers exemples que hom troba de complexs de R -mòduls són les successions exactes.

Definició. Sigui $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ una successió de morfismes de R -mòduls. Es diu que és una *successió exacta en M* si $\text{im } f = \ker g$.

Es diu que una successió de morfismes de R -mòduls

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots ,$$

és exacta, si ho és en cada grau, és a dir, si $\text{im } \partial_{n+1} = \ker \partial_n$, per a tot $n \geq 0$.

Sigui M_* un complex de R -mòduls. S'introdueixen els p -cicles i les p -vores del complex M_* com els sub- R -mòduls de M_p donats, respectivament, per

$$\begin{aligned} Z_p(M_*) &= \ker \partial_p \subseteq M_p, \\ B_p(M_*) &= \operatorname{im} \partial_{p+1} \subseteq M_p. \end{aligned}$$

Com a 1.2, en resulta la inclusió $B_p(M_*) \subseteq Z_p(M_*)$, el que permet definir l'homologia d'un complex de R -mòduls.

Definició. Sigui M_* un complex de R -mòduls. Per a tot $p \geq 0$, es defineix el R -mòdul d'homologia p -èssima de M_* com el R -mòdul quocient

$$H_p(M_*) = Z_p(M_*)/B_p(M_*).$$

Observem que si el complex M_* és exacte en M_n , és a dir, $\operatorname{im} \partial_{n+1} = \ker \partial_n$, aleshores $H_n(M_*) = 0$. En aquest sentit, els R -mòduls $H_p(M_*)$ mesuren la manca d'exactitud del complex M_* en cada grau.

Sovint es diu que un complex de R -mòduls M_* és acíclic si és una successió exacta, és a dir, si $H_p(M_*) = 0$ per a tot $p \geq 0$.

Homologia d'un complex simplicial amb coeficients en un anell R .

Sigui K un complex simplicial ordenat. El complex de cadenes simplicials $C_*(K)$ de K és un exemple de complex de \mathbf{Z} -mòduls. En aquest cas tots els grups abelians són lliures i el complex és finit. En diverses aplicacions ens interessarà disposar d'un complex de cadenes simplicials associat a K amb coeficients en un anell R , diferent de \mathbf{Z} .

Definició. Sigui K un complex simplicial ordenat, R un anell commutatiu, i $p \geq 0$. Es defineix el p -èssim R -mòdul de cadenes simplicials de K amb coeficients en R , que denotarem per $C_p(K; R)$, com el R -mòdul lliure generat per les cares ordenades de K de dimensió p .

Com l'operador vora del complex de cadenes $C_*(K)$ està definit sobre els generadors, s'esten R -linealment a un únic morfisme de R -mòduls

$$\partial : C_p(K; R) \longrightarrow C_{p-1}(K; R),$$

que continuarà verificant $\partial^2 = 0$, i així es té definit un complex de R -mòduls, $(C_*(K; R), \partial)$.

Definició. Sigui K un complex simplicial, i R un anell commutatiu. per a tot $p \geq 0$, es defineix el p -èssim R -mòdul d'homologia de K amb coeficients en R per

$$H_p(K; R) := H_p(C_*(K; R), \partial) .$$

Si R és un domini d'ideals principals tot submòdul d'un R -mòdul finit generat és finit generat (vegeu l'apèndix d'aquest capítol), i així els grups $H_p(K; R)$ són R -mòduls finit generats. En particular, si R és un cos \mathbf{k} , aquests grups són \mathbf{k} -espais vectorials de dimensió finita.

Definició. Sigui K un complex simplicial ordenat, i \mathbf{k} un cos. Es defineix el nombre de Betti p -èssim de K amb coeficients a \mathbf{k} com la dimensió

$$b_p(K, \mathbf{k}) := \dim_{\mathbf{k}} H_p(K, \mathbf{k}) \geq 0.$$

Si $\mathbf{k} = \mathbf{Q}$, els nombres de Betti amb coeficients a \mathbf{Q} coincideixen amb els nombres de Betti definits en el §1, ja que es verifica:

Proposició 3.1. *Sigui K un complex simplicial. Per a tot $p \geq 0$, es tenen isomorfismes*

$$H_p(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong H_p(K; \mathbf{Q}).$$

Demostració. Per 9.12 de l'apèndix, es tenen isomorfismes

$$\begin{aligned} Z_p(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} &\cong Z_p(K; \mathbf{Q}) \\ B_p(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} &\cong B_p(K; \mathbf{Q}), \end{aligned}$$

i, aplicant 9.11, en resulten els isomorfismes

$$H_p(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong Z_p(K; \mathbf{Q}) / B_p(K; \mathbf{Q}) = H_p(K; \mathbf{Q}). \quad \square$$

Corollari 3.2. *Sigui K un complex simplicial. Aleshores, per a tot $p \geq 0$,*

$$b_p(K) = b_p(K; \mathbf{Q}). \quad \square$$

Com $C_p(K; \mathbf{k}) = 0$ si $p > \dim K$, els nombres de Betti d'un complex simplicial K són zero per damunt de la seva dimensió, i.e. $b_p(K, \mathbf{k}) = 0$ si $p > n = \dim K$, qualsevol que sigui el cos \mathbf{k} . Però, per sota de la dimensió de K els nombres de Betti $b_p(K, \mathbf{k})$ depenen en general del cos \mathbf{k} (per exemple, més endavant trobarem que $b_2(\mathbf{P}^2, \mathbf{Q}) = 0$, mentres que $b_2(\mathbf{P}^2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 1$). Veurem a continuació que, en canvi, la seva suma alternada és independent del cos \mathbf{k} .

Recordem que si K és un políedre es defineix la característica de Euler de K per

$$\chi(K) = c_0 - c_1 + c_2 - \dots,$$

on c_p és el nombre de cares p -dimensionals de K . De la definició de $C_p(K; \mathbf{k})$ se segueix la igualtat

$$\chi(K) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \dim_{\mathbf{k}} C_p(K, \mathbf{k}).$$

Teorema 3.3 (d'invariància de la característica de Euler). *Sigui M_* un complex de cadenes finit de \mathbf{k} -espais vectorials de dimensió finita. Notem*

$$\begin{aligned} \chi(M_*) &:= \sum (-1)^p \dim_{\mathbf{k}} M_p, \\ \chi(H_*(M_*)) &:= \sum (-1)^p \dim_{\mathbf{k}} H_p(M_*). \end{aligned}$$

Aleshores

$$\chi(M_*) = \chi(H_*(M_*)).$$

Demostració. Es tenen les successions exactes de \mathbf{k} -espais vectorials de dimensió finita,

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow M_p \longrightarrow B_{p-1} \longrightarrow 0,$$

i

$$0 \longrightarrow B_p \longrightarrow Z_p \longrightarrow H_p(M) \longrightarrow 0,$$

i per tant les igualtats

$$\begin{aligned} \dim M_p &= \dim Z_p + \dim B_{p-1}, \\ \dim Z_p &= \dim B_p + \dim H_p(M). \end{aligned}$$

Si sumem respecte p , afectant d'un signe $(-1)^p$, trobem

$$\begin{aligned}\chi(M_*) &= \sum (-1)^p \dim M_p \\ &= \sum (-1)^p [(\dim B_p + \dim H_p(M)) + \dim B_{p-1}]\end{aligned}$$

i com els termes en B_* es cancel·len dos a dos, en resulta el teorema. \square

Corollari 3.4. *Sigui M_* un complex finit i exacte de \mathbf{k} -espais vectorials de dimensió finita, aleshores $\chi(M_*) = 0$.*

L'aplicació geomètrica del teorema 3.1 correspon al corollari següent, que és una generalització de la fórmula de Euler.

Corollari 3.5. *Sigui K un complex simplicial. Aleshores, per tot \mathbf{k} ,*

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p b_p(K, \mathbf{k}).$$

Problemes

1. Sigui (M_*, ∂) un complex de R -mòduls tal que $\partial = 0$. Proveu que $H_p(M_*) = M_p$, per a tot $p \geq 0$.
2. Proveu els resultats següents:
 - (a) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ és una successió exacta si, i només si, f és injectiva.
 - (b) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ és una successió exacta si, i només si, f és exhaustiva.
 - (c) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ és una successió exacta si, i només si, f és un isomorfisme.
3. *El lema dels cinc:* Considerem un diagrama commutatiu de morfismes de R -mòduls

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ M'_1 & \longrightarrow & M'_2 & \longrightarrow & M'_3 & \longrightarrow & M'_4 & \longrightarrow & M'_5 \end{array}$$

en el que les files són successions exactes. Proveu que es verifica:

- (a) si f_2, f_4 són exhaustives i f_5 és injectiva, aleshores f_3 és exhaustiva.
- (b) si f_2, f_4 són injectives i f_1 és exhaustiva, aleshores f_3 és injectiva.
- (c) si f_1 és exhaustiva, f_2 i f_4 són isomorfismes, i f_5 és injectiva, aleshores f_3 és un isomorfisme. En particular, si f_1, f_2, f_4 i f_5 són isomorfismes, també ho és f_3 .

4 Morfismes de complexs de R -mòduls

En aquest apartat s'introdueix la noció de morfisme de complexs de R -mòduls. D'aquesta forma es construeix la categoria de complexs de R -mòduls.

Definició. Siguin (M_*, ∂) i (M'_*, ∂') dos complexs de R -mòduls. Un *morfisme de complexs* $f_* : (M_*, \partial) \longrightarrow (M'_*, \partial')$ és una successió de morfismes de R -mòduls, $f_p : M_p \longrightarrow M'_p$, per a tot $p \geq 0$, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & M_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & M_p & \xrightarrow{\partial_p} & M_{p-1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} \\
 \dots & \longrightarrow & M'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & M'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & M'_{p-1} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

és commutatiu, és a dir, que es verifiquen les igualtats

$$f_{p-1}\partial_p = \partial'_p f_p,$$

per a tot $p \geq 1$.

Els morfismes de complexs de R -mòduls indueixen morfismes en els grups d'homologia:

Lema 4.1. *Sigui $f_* : (M_*, \partial) \longrightarrow (M'_*, \partial')$ un morfisme de complexs de R -mòduls. Aleshores f_* induïx un morfisme entre les homologies dels complexs*

$$H_*(f_*) : H_*(M_*) \longrightarrow H_*(M'_*),$$

tal que si $z \in Z_p(M_*)$ és un representant de $[z] \in H_p(M_*)$, llavors

$$H_*(f_*)([z]) := [f(z)] .$$

A aquest morfisme el denotarem també per f_* , si no hi ha confusió possible.

Demostració. Sigui $z \in Z_p(M_*)$, és a dir, $\partial_p z = 0$. Llavors, $f_p(z) \in Z_p(M'_*)$, ja que

$$\partial'_p f_p(z) = f_{p-1} \partial_p(z) = 0 .$$

Per tant $f_*(Z_*(M_*)) \subseteq Z_*(M'_*)$. D'altra banda, si $z \in B_p(M_*)$, existeix $z' \in M_{p+1}$ tal que $z = \partial z'$ i per tant

$$f_p(z) = f_p(\partial z') = \partial' f(z') \in B_p(M'_*) ,$$

és a dir, $f_* B_*(M_*) \subseteq B_*(M'_*)$. Així, f_* passa al quocient $H_*(f_*) : H_*(M_*) \longrightarrow H_*(M'_*)$. \square

El resultat següent és immediat de provar:

Lema 4.2. *Siguin $f_* : (M_*, \partial) \longrightarrow (M'_*, \partial')$ i $g_* : (M'_*, \partial') \longrightarrow (M''_*, \partial'')$ morfismes de complexos, aleshores*

$$\begin{aligned} (f \circ g)_* &= f_* \circ g_* , \\ (id_M)_* &= id_{H_*(M)} . \end{aligned}$$

\square

Els complexos de R -mòduls i els morfismes de complexos permeten definir la categoria de complexos de R -mòduls, que notarem $C(R\text{-}\mathbf{mod})$, i una manera equivalent de formular aquest últim resultat és:

Corollari 4.3. *Sigui p un enter ≥ 0 . L'homologia p -èssima de complexos defineix un functor*

$$H_p : C(R\text{-}\mathbf{mod}) \longrightarrow R\text{-}\mathbf{mod} .$$

\square

En la categoria $C(R\text{-}\mathbf{mod})$ es poden realitzar moltes de les operacions que es realitzen per als grups abelians o els R -mòduls, vegeu per exemple el problema 1. Destacarem, per l'ús que en farem, la suma directa: si (M_*, ∂) i (M'_*, ∂') són complexos de R -mòduls, aleshores es defineix el complex suma

directa com el complex que en grau n està constituït per la suma directa $M_n \oplus M'_n$ de R -mòduls, i que té diferencial $\partial + \partial'$. Les incusions de M_n i M'_n en la suma directa induïxen morfismes de complexs

$$\begin{aligned} i : M_* &\longrightarrow M_* \oplus M'_* , \\ i' : M'_* &\longrightarrow M_* \oplus M'_* . \end{aligned}$$

Amb aquestes notacions, podem deduir que els functors H_p són additius, en el sentit que expressa el lema següent, de demostració immediata.

Lema 4.4. *Siguin M_*, M'_* complexs de R -mòduls, i $i : M_* \longrightarrow M_* \oplus M'_*$, $i' : M'_* \longrightarrow M_* \oplus M'_*$, els morfismes d'inclusió en la suma directa. Aleshores el morfisme*

$$i_* + i'_* : H_p(M_*) \oplus H_p(M'_*) \longrightarrow H_p(M_* \oplus M'_*) ,$$

és un isomorfisme per a tot $p \geq 0$. □

Morfisme induït per una aplicació simplicial.

Com aplicació a l'homologia dels políedres de la noció de morfisme de complexs provarem que tota aplicació simplicial entre políedres induïx un morfisme entre els grups d'homologia simplicial d'aquests.

Siguin K i L dos complexs simplicials ordenats, i $f : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació simplicial, induïda per una aplicació entre els vèrtexs $\mathcal{V}_K \longrightarrow \mathcal{V}_L$. Anem a veure que f induïx un morfisme de complexs de R -mòduls

$$f_* : C_*(K; R) \longrightarrow C_*(L; R) ,$$

i per tant, segons 4.1, un morfisme natural entre les homologies

$$f_* : H_*(K; R) \longrightarrow H_*(L; R) .$$

Per fer-ho usarem la notació següent: siguin v_0, v_1, \dots, v_p , vèrtexs ordenats de K que generen un símplex; si s és una permutació del conjunt $\{0, \dots, p\}$ notarem $[v_{s(0)}, v_{s(1)}, \dots, v_{s(p)}] := \varepsilon(s)[v_0, v_1, \dots, v_p]$, on $\varepsilon(s)$ indica el signe de la permutació. El morfisme f_* es defineix per

$$f_*([v_0, \dots, v_p]) = \begin{cases} 0, & \text{si existeixen } i \neq j \text{ tals que } f(v_i) = f(v_j), \\ [f(v_0), \dots, f(v_p)], & \text{si } f(v_i) \neq f(v_j), \text{ per a tot } i \neq j. \end{cases}$$

Per comprovar que f_* i ∂ commuten distingirem diversos casos.

1er cas : Hi ha un únic parell $i \neq j$ tal que $f(v_i) = f(v_j)$. Per definició es té $\partial f_*([v_0, v_1, \dots, v_p]) = 0$. Calculem l'altra composició:

$$\begin{aligned} f_*\partial([v_0, v_1, \dots, v_p]) &= f_*\left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]\right) \\ &= (-1)^i [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_i)}, \dots, f(v_p)] \\ &\quad + (-1)^j [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_j)}, \dots, f(v_p)] \\ &= (-1)^i [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_i)}, \dots, f(v_p)] \\ &\quad + (-1)^j (-1)^{i-j-1} [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_j)}, \dots, f(v_j), \dots, f(v_p)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

2on cas: Existeixen almenys tres índexs diferents i, j, k amb $f(v_i) = f(v_j) = f(v_k)$. Aquest cas és similiar a l'anterior, amb l'avantatge ara de que el càlcul de $f_*\partial[v_0, \dots, v_p]$ és directament zero.

3er cas: Per tot parell $i \neq j$ es verifica $f(v_i) \neq f(v_j)$. Notem $w_i = f(v_i)$, tindrem:

$$\begin{aligned} \partial f_*[v_0, \dots, v_p] &= \partial[w_0, \dots, w_p] \\ &= \sum (-1)^i [w_0, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_p] \\ &= \sum (-1)^i [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_i)}, \dots, f(v_p)] \\ &= f_*\left(\sum (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]\right) \\ &= f_*\partial[v_0, \dots, v_p]. \end{aligned}$$

Així doncs hem demostrat:

Proposició 4.5. *Siguin K i L dos complexs simplicials ordenats, i sigui $f : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació simplicial. Aleshores f induïx un morfisme*

de R -mòduls $f_* : H_*(K; R) \longrightarrow H_*(L; R)$, de forma que es verifiquen les igualtats

$$\begin{aligned}(g \circ f)_* &= g_* \circ f_* \\ (id_{K_*}) &= id_{H_*(K)} .\end{aligned}$$

És a dir, H_p defineix un functor $H_p : \mathbf{Pol} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-mod})$, per a tot $p \geq 0$. \square

Així, com els functors conserven els isomorfismes, per 1.9.1 tindrem:

Corollari 4.6. *Siguin K i L complex simplicial ordenats, i $f : |K| \longrightarrow |L|$ un isomorfisme simplicial. Aleshores el morfisme induït en homologia $f_* : H_*(K, R) \longrightarrow H_*(L, R)$ és un isomorfisme.* \square

En particular, aquest resultat ens permet comparar diferents ordenacions d'un políedre.

Corollari 4.7 (Independència de l'ordre dels vèrtexs). *Sigui K un complex simplicial, i notem K_1 i K_2 els complex ordenats corresponents a dues ordenacions diferents dels vèrtexs de K . Aleshores, els grups d'homologia $H_p(K_1, R)$ i $H_p(K_2, R)$ són isomorfs, per a tot $p \geq 0$.*

Demostració. En efecte, l'aplicació simplicial $f : K_1 \longrightarrow K_2$, induïda per la identitat de K , és un isomorfisme simplicial, pel que s'aplica el corollari anterior. \square

Corollari 4.8. *Siguin K_1 i K_2 dos políedres disjunts, i $K = K_1 \sqcup K_2$. Aleshores $H_*(K, R) \cong H_*(K_1, R) \oplus H_*(K_2, R)$.*

Demostració. Com K és la unió disjunta de K_1 i K_2 , es té $C_*(K, R) = C_*(K_1, R) \oplus C_*(K_2, R)$. Però, l'homologia d'una suma directa de complex és la suma directa de les homologies, per 4.4, el que permet concloure la prova. \square

En particular resulta d'aquest corollari la caracterització del H_0 que estava pendent des de l'apartat 2:

Corollari 4.9. *Sigui K un complex simplicial. Si $|K|$ té r components connexes, aleshores $H_0(K) \cong \mathbf{Z}^r$.* \square

Per acabar aquest apartat, considerem un exemple elemental de la situació geomètrica presentada. Siguin K i L els complexs simplicials que tenen símplexs maximals donats per

$$\begin{aligned} K_{max} &= \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_0, v_5\}\} \\ L_{max} &= \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\} , \end{aligned}$$

ordenats per $v_0 < v_1 < \dots < v_5$ i $a < b < c$, respectivament (vegeu la figura 2.2). Sigui f l'aplicació simplicial que sobre el vèrtexs ve donada per $f(v_0) = f(v_3) = a$, $f(v_1) = f(v_4) = b$, $f(v_2) = f(v_5) = c$.

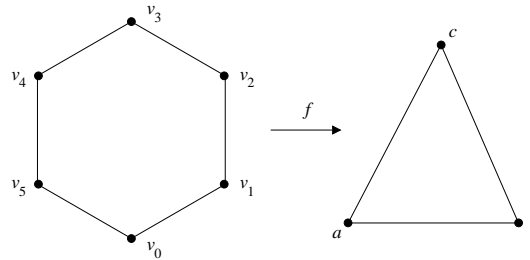


Figura 2.2: Exemple d'aplicació simplicial.

Com $|K|$ i $|L|$ són connexos es té $H_0(K) \cong \mathbf{Z}$ i $H_0(L) \cong \mathbf{Z}$, i a més aquests grups estan generats per un vèrtex qualsevol dels respectius políedres. Així, en resulta que f induïx un isomorfisme $H_0(K) \longrightarrow H_0(L)$.

Respecte a l'acció de f en els grups H_1 , observem que $H_1(K) \cong \mathbf{Z}$ està generat per la classe del cicle

$$z = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_3] + [v_3, v_4] + [v_4, v_5] - [v_0, v_5] ,$$

i que $H_1(L) \cong \mathbf{Z}$, està generat per la classe del cicle

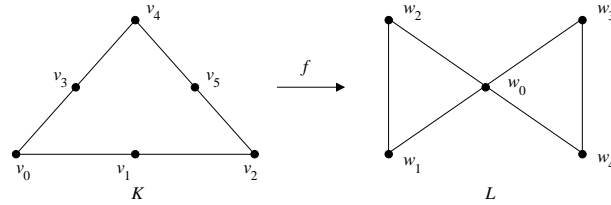
$$z' = [a, b] + [b, c] - [a, c] .$$

És immediat comprovar que $f_*(z) = 2z'$. Així, a través dels isomorfismes $H_1(K) = \mathbf{Z}[z] \cong \mathbf{Z}$ i $H_1(L) = \mathbf{Z}[z'] \cong \mathbf{Z}$, el morfisme induït en H_1 ,

$H_1(K) \longrightarrow H_1(L)$, correspon a la multiplicació per 2. Aquesta acció té un significat geomètric clar ja que mentres donem una volta a K , la imatge dóna dues voltes a L . Més endavant veurem que l'enter 2 és el grau de f , $\deg f$.

Problemes

1. Sigui M_* un complex de R -mòduls, i N_* un subcomplex, és a dir, que existeix un morfisme de complexs $N_* \longrightarrow M_*$ injectiu. Es defineix el complex quocient M_*/N_* com el complex que en grau p té el R -mòdul M_p/N_p , $p \geq 0$, i diferencial induïda per la de M_* . Sigui $f_* : M_* \longrightarrow M'_*$ un morfisme de complexs de R -mòduls. Proveu que $\ker f_*$ i $\operatorname{im} f_*$ són subcomplexos de M_* i M'_* respectivament, i que f_* induïx un isomorfisme de complexs $M_*/\ker f_* \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f_*$.
2. Calculeu l'homologia amb coeficients racionals del tor, del pla projectiu, de l'ampolla de Klein, i del barret del capsigrany.
3. Calculeu l'homologia amb coeficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ dels políedres del problema anterior.
4. Calculeu el morfisme f_* en les situacions següents
 - (a) $K = sq_2\Delta^3$ i $f : |K| \longrightarrow |L|$ és una aplicació simplicial que fixa un vèrtex.
 - (b) K i L són els políedres de la figura



i $f : |K| \longrightarrow |L|$ l'aplicació simplicial definida sobre els vèrtexs per $f(v_i) = w_i$, si $0 \leq i \leq 4$, i $f(v_5) = w_0$.

5 Homotopies entre morfismes de complexs de R -mòduls

En aquest apartat introduïrem la noció d'homotopia entre morfismes de complexs de R -mòduls. Aquesta noció es pot pensar com l'anàleg algebraic de la noció d'homotopia entre aplicacions contínues.

Definició. Siguin M_* i M'_* dos complexs de cadenes de R -mòduls, i $f, g : M_* \rightarrow M'_*$ dos morfismes de complexs. Es diu que f i g són *morfismes homòtops* si existeix una successió de morfismes de R -mòduls, $h = (h_p)$, $h_p : M_p \rightarrow M'_{p+1}$, $p \geq 0$, tal que, considerant $h_{-1} = 0$, es verifica

$$f_p - g_p = \partial_{p+1}h_p + h_{p-1}\partial_p ,$$

per a tot $p \geq 0$. Direm que h és una *homotopia* entre els morfismes f i g .

El diagrama següent recull la informació que proporciona una homotopia entre els morfismes f i g .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & M_{p+2} & \xrightarrow{\partial} & M_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & M_p & \xrightarrow{\partial} & M_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f & & \searrow h & & \downarrow f & & \searrow h & & \\
 & & \downarrow g & & & & \downarrow g_{p+1} & & \searrow h_p & & \\
 & & & & & & \downarrow f_p & & \searrow g_p & & \\
 & & & & & & \downarrow g_p & & \searrow h & & \\
 & & & & & & \downarrow f & & \searrow g & & \\
 \cdots & \longrightarrow & M'_{p+2} & \xrightarrow{\partial} & M'_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & M'_p & \xrightarrow{\partial} & M'_{p-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

En aquest diagrama s'han de verificar les commutativitats expressades per les igualtats de la definició.

Una primera mostra de l'interès d'aquesta definició ve donada pel següent resultat.

Proposició 5.1. Si $f, g : M_* \rightarrow M'_*$ són morfismes homòtops de complexs de R -mòduls, llavors induïren el mateix morfisme en homologia,

$$H_*(f) = H_*(g) : H_*(M_*) \rightarrow H_*(M'_*) .$$

Demostració. Prenem una classe $[z] \in H_n(M_*)$, representada per $z \in Z_n(M_*)$, que, en ser un cicle, verifica $\partial(z) = 0$. Llavors $H_*(f)[z]$ està representada per $f(z) \in Z_n(M'_*)$, mentres que $H_*(g)[z]$ està representada per $g(z) \in Z_n(M'_*)$, i per la definició d'homotopia

$$f(z) - g(z) = h\partial(z) + \partial h(z) = \partial h(z).$$

Per tant,

$$f(z) - g(z) \in B_n(M'_*),$$

d'on en resulta que $[f(z)] = [g(z)]$ en $H_n(M'_*)$. \square

Un dels principals resultats de la teoria d'homologia estableix que si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ són dues aplicacions simplicials homòtopes, aleshores els morfismes que indueixen entre els complexs de cadenes simplicials, $f_*, g_* : C_*(K; R) \rightarrow C_*(L; R)$ són homòtops en el sentit d'aquest apartat, i per tant, segons la proposició anterior, indueixen el mateix morfisme en homologia, $f_* = g_* : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$. Provarem aquest resultat en el proper capítol, deduint alhora la invariància homotòpica de l'homologia simplicial. En aquest capítol ens limitarem a estudiar un cas molt més senzill, el que correspon als complexs contràctils.

Recordem que si X és un espai topològic, es diu que X és contràctil si l'aplicació identitat id_X és homòtopa a una aplicació constant, i en aquest cas el grup fonamental de X és trivial. La noció algebraica que li correspon és la següent:

Definició. Sigui M_* un complex de cadenes de R -mòduls. Es diu que M_* és un complex de cadenes *contràctil* si l'aplicació identitat de M_* és homòtopa a l'aplicació nul·la, o sigui, si existeix una homotopia $h_p : M_p \rightarrow M_{p+1}$, $p \geq 0$, tal que

$$\text{id}_p = \partial_{p+1}h_p + h_{p-1}\partial_p,$$

per a tot $p \geq 0$.

En general, si existeixen morfismes $h_p : M_p \rightarrow M_{p+1}$, $p \geq n_0$, tals que $\text{id}_p = h_{p-1}\partial_p + \partial_{p+1}h_p$, per a tot $p > n_0$, es diu que M_* és *contràctil en grau més gran que n_0* .

Proposició 5.2. *Sigui M_* un complex de R -mòduls contràctil en grau més gran que n_0 . Llavors $H_p(M_*) = 0$, per a tot $p > n_0$.*

Demostració. Sigui $[z] \in H_p(M_*)$ una classe representada pel cicle $z \in Z_p(M_*)$, $p > n_0$. Com z és un cicle, tindrem

$$z = id(z) = \partial h(z) + h\partial(z) = \partial h(z)$$

i per tant $z \in B_p(M_*)$, és a dir, $[z] = 0$. \square

Corollari 5.3. *Si M_* és un complex contràtil, llavors $H_*(M_*) = 0$.* \square

En el proper apartat aplicarem aquests resultats al complex de cadenes simplicials d'un símplex. Podem donar un exemple purament algebraic com segueix: sigui $R = \mathbf{Z}$ i considerem el complex de grups abelians M_* definit per la successió

$$\cdots \xrightarrow{\cdot 4} \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

Aquest complex és contràtil per $p > 0$, ja que podem considerar l'homotopia

$$\begin{array}{ccccccccc} \xrightarrow{\cdot 4} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \xrightarrow{\cdot 3} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \xrightarrow{\cdot 4} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \xrightarrow{\cdot 3} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow id & \nearrow \cdot 3 & \downarrow id & \nearrow \cdot 1 & \downarrow id & \nearrow \cdot 3 & \downarrow id & & \\ \xrightarrow{\cdot 4} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \xrightarrow{\cdot 3} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \xrightarrow{\cdot 4} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \xrightarrow{\cdot 3} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

i per tant $H_p(M_*) = 0$, si $p > 0$.

Definició. Siguin M_* i N_* dos complexs de R -mòduls. Un morfisme de complexs, $f : M_* \rightarrow N_*$, és una *equivalència homotòpica de complexs* si existeix un morfisme de complexs $g : N_* \rightarrow M_*$ tal que les composicions $g \circ f$ i $f \circ g$ són homòtopes a les identitats id_{M_*} i id_{N_*} , respectivament.

Proposició 5.4. *Sigui $f : M_* \rightarrow N_*$ una equivalència homotòpica de complexs. Aleshores el morfisme induït $f_* : H_p(M_*) \rightarrow H_p(N_*)$, és un isomorfisme per a tot $p \geq 0$.*

Demostració. Se segueix immediatament de la definició i de 5.1. \square

Problemes

1. Per 5.3 tot complex de R -mòduls contràctil és acíclic. Doneu un exemple en el que el recíproc no sigui cert.
2. Siguin $f, g : M_* \longrightarrow N_*$ morfismes homòtops de complexs de R -mòduls, i $h, k : N_* \longrightarrow P_*$ un altre parell de morfismes homòtops de complexs de R -mòduls. Proveu que $h \circ f$ és homòtop a $k \circ g$.

6 Homologia d'un símplex

Un exemple important de complex contràctil en graus positius, és el complex de cadenes simplicials d'un símplex:

Teorema 6.1. *Sigui Δ^n un símplex n -dimensional. Aleshores el complex de cadenes $C_*(\Delta^n)$ és contràctil en grau > 0 , i en particular*

$$H_p(\Delta^n) = 0,$$

per a tot $p > 0$.

Demostració. Notem v_0, \dots, v_n , els vèrtexs de Δ^n ordenats per $v_0 < v_1 < \dots < v_n$, i considerem el complex de cadenes $C_*(\Delta^n)$, que està generat per les cares ordenades $\sigma_p = [v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_p}]$, $i_0 < i_1 < \dots < i_p$. Anem a construir una homotopia $h_p : C_p(\Delta^n) \longrightarrow C_{p+1}(\Delta^n)$, per a tot $p \geq 0$, tal que $\text{id} = \partial h + h \partial$.

Fixem un vèrtex de Δ^n , per exemple, v_0 . Observant que és suficient definir h_p sobre els generadors $\sigma_p = [v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_p}]$, definim

$$h_p(\sigma_p) = \begin{cases} 0, & \text{si } v_0 \in \{v_{i_0}, \dots, v_{i_p}\}, \\ [v_0, v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_p}], & \text{si } v_0 \notin \{v_{i_0}, \dots, v_{i_p}\}. \end{cases}$$

Comprovarem que $\text{id} = \partial h + h \partial$, distingint si v_0 pertany o no a σ_p .

Suposem que v_0 és un vèrtex de σ_p , i sense pèrdua de generalitat prendrem $v_0 = v_{i_0}$. Aleshores

$$\begin{aligned}
 \partial h(\sigma_p) + h\partial(\sigma_p) &= h\partial[v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}] \\
 &= h\left(\sum_{j=0}^p (-1)^j [v_{i_0}, \dots, \widehat{v}_{i_j}, \dots, v_{i_p}]\right) \\
 &= \sum_{j=0}^p (-1)^j h[v_{i_0}, \dots, \widehat{v}_{i_j}, \dots, v_{i_p}] \\
 &= [v_0, v_{i_1}, \dots, v_{i_p}] + 0 + \dots + 0 \\
 &= [v_0, v_{i_1}, \dots, v_{i_p}] = \sigma_p
 \end{aligned}$$

Si v_0 no és un vèrtex de σ_p , tindrem

$$\begin{aligned}
 \partial h(\sigma_p) + h\partial(\sigma_p) &= \partial([v_0, v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_p}]) + h\left(\sum_{j=0}^p (-1)^j [v_{i_0}, \dots, \widehat{v}_{i_j}, \dots, v_{i_p}]\right) \\
 &= [v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_p}] - \sum_{j=0}^p (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v}_{i_j}, \dots, v_{i_p}] + \sum_{j=0}^p (-1)^j [v_0, v_{i_0}, \dots, \widehat{v}_{i_j}, \dots, v_{i_p}] \\
 &= [v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_p}] = \sigma_p
 \end{aligned}$$

□

Observacion. El teorema anterior, $H_p(\Delta^n) = 0$, $p > 0$, és l'anàleg n -dimensional del teorema d'Anàlisi conegut com teorema de Poincaré, segons el qual, tot camp vectorial a \mathbf{R}^3 amb rotacional nul és el gradient d'una funció potencial, vegeu per exemple [4].

Problemes

1. Sigui K un complex simplicial de \mathbf{R}^N i $v \in \mathbf{R}^N$ un punt tal que tota recta que passa per v talla $|K|$ com a molt en un punt. Considerem el con $v * K$ (vegeu el problema 4 de 1.3). Proveu que es verifica

$$H_p(v * K) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } p = 0, \\ 0, & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

7 Successions exactes de complexes de R -mòduls

En aquest apartat introduïrem la successió exacta d'homologia associada a una successió exacta de complexs de R -mòduls. Les aplicacions a l'homologia simplicial les presentarem en l'apartat següent, on veurem com aquesta successió exacta ens permet calcular sense dificultat l'homologia de la triangulació $sq_n \Delta^{n+1}$ de l'esfera de dimensió n .

Sigui R un anell, siguin M_* , M'_* , M''_* , complexs de R -mòduls, i sigui

$$0 \longrightarrow M'_* \xrightarrow{f} M_* \xrightarrow{g} M''_* \longrightarrow 0,$$

una successió de morfismes de complexs.

Definició. Es diu que els morfismes f, g formen una *successió exacta de complexs* de R -mòduls, si per a tot $p \geq 0$, la successió

$$0 \longrightarrow M'_p \xrightarrow{f_p} M_p \xrightarrow{g_p} M''_p \longrightarrow 0$$

és exacta, és a dir, si f_p és injectiva, $\ker g_p = \operatorname{im} f_p$, i g_p és exhaustiva.

Una successió exacta de morfismes de complexs és equivalent a un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & M'_{p+1} & \xrightarrow{f_{p+1}} & M_{p+1} & \xrightarrow{g_{p+1}} & M''_{p+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & M'_p & \xrightarrow{f_p} & M_p & \xrightarrow{g_p} & M''_p \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & M'_{p-1} & \xrightarrow{f_{p-1}} & M_{p-1} & \xrightarrow{g_{p-1}} & M''_{p-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

en el que les files són successions exactes de morfismes de R -mòduls, mentres que les columnes són complexs de R -mòduls.

Per exemple, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow 4 \cdot & & \downarrow 4 \cdot & & \downarrow 0 \cdot & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} & \xrightarrow{2 \cdot} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 3 \cdot & & \downarrow 3 \cdot & & \downarrow 1 \cdot \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} & \xrightarrow{2 \cdot} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 4 \cdot & & \downarrow 4 \cdot & & \downarrow 0 \cdot \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} & \xrightarrow{2 \cdot} & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 3 \cdot & & \downarrow 3 \cdot & & \downarrow 1 \cdot \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

defineix una successió exacta de complexs de \mathbf{Z} -mòduls.

Proposició 7.1. *Sigui $0 \longrightarrow M'_* \xrightarrow{f} M_* \xrightarrow{g} M''_* \longrightarrow 0$ una successió exacta de complexs de R -mòduls, llavors, per a tot $p \geq 0$, es té una successió exacta de R -mòduls*

$$H_p(M'_*) \xrightarrow{f_*} H_p(M_*) \xrightarrow{g_*} H_p(M''_*).$$

Demostració. Cal provar que $\text{im } f_* = \ker g_*$. Verifiquem les dues inclusions.

$\text{im } f_* \subseteq \ker g_*$: Sigui $[z] \in \text{im } f_* \subset H_p(M_*)$ i escrivim $[z] = f_*[z']$ amb $[z'] \in H_p(M'_*)$. La classe $g_*([z])$ està representada per $g_p(z) = g_p(f_p(z')) = 0$, per la exactitud de la successió de complexs. Així, se segueix que $g_*([z]) = [g_p(z)] = 0$, és a dir $[z] \in \ker g_*$.

$\ker g_* \subseteq \text{im } f_*$: Sigui $[z] \in H_p(M_*)$ tal que $g_*([z]) = 0$. La classe $g_*([z])$ està representada per $g_p(z)$, i per tant $g_p(z)$ serà una vora, és a dir, existeix un $y'' \in M''_{p+1}$ tal que $g_p(z) = \partial y''$. Com g_{p+1} és exhaustiva hi haurà un $y \in M_{p+1}$ tal que $g_{p+1}(y) = y''$. Aquest y verifica $g(\partial y) = \partial g y = \partial y'' = g(z)$, i per tant $z - \partial y \in \ker g = \text{im } f$, d'on resulta que hi haurà un $z' \in M'_p$ tal que

$f_p(z') = z - \partial y$. Observem que z' és un cicle de M'_* ja que $f\partial(z') = \partial f(z') = \partial(z - \partial y) = \partial z - \partial^2 y = 0$, i com f és injectiva, $\partial z' = 0$. En definitiva, com $z = f(z') + \partial y$, tindrem que $[z] = f_*([z']) \in \text{im } f_*$. \square

En general el morfisme f_* no és injectiu, ni g_* és exhaustiu. No obstant, podem connectar les diferents successions de la proposició, per $p \geq 0$, mitjançant el morfisme de connexió, que es defineix en la proposició següent.

Proposició 7.2. *Amb les mateixes hipòtesis de la proposició anterior, per a tot $p \geq 1$, existeix un morfisme de R -mòduls*

$$H_p(M''_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(M'_*) ,$$

tal que $\partial_[z'']$ admet com a representant un cicle $y' \in M'_{p-1}$ que verifica $f(y') = \partial z$, amb $g(z) = z''$. A aquest morfisme se l'anomena morfisme de connexió i es denota per ∂_* .*

Demostració. Sigui $[z''] \in H_p(M''_*)$ una classe representada pel cicle $z'' \in Z_p(M''_*)$. Com z'' és un cicle, verifica $\partial z'' = 0$. El morfisme g és exhaustiu i per tant existeix un $z \in M_p$ tal que $gz = z''$. L'element ∂z és de la imatge de f ja que $g(\partial z) = \partial g(z) = \partial z'' = 0$, i de l'exactitud de la successió s'en dedueix l'existència d'un $y' \in M'_{p-1}$ tal que $f(y') = \partial z$. A més, aquest y' és un cicle, perquè f és injectiva i tenim

$$f(\partial y') = \partial f(y') = \partial \partial z = 0 .$$

Així y' defineix una classe d'homologia $[y'] \in H_{p-1}(M'_*)$.

Definim ara ∂_* per $\partial_*([z'']) = [y']$. És immediat ara provar que la definició de ∂_* no depen de les eleccions realitzades, és a dir, ni del representant z'' ni de l'anti-imatge z , i que és un morfisme de R -mòduls. \square

Podem ara enunciar el resultat principal d'aquest apartat.

Teorema 7.3. *Siguin M'_* , M_* i M''_* complexs de R -mòduls, i*

$$0 \longrightarrow M'_* \xrightarrow{f} M_* \xrightarrow{g} M''_* \longrightarrow 0$$

una successió exacta de complexs. Llavors la successió

$$\longrightarrow H_p(M''_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(M'_*) \xrightarrow{f_*} H_{p-1}(M_*) \xrightarrow{g_*} H_{p-1}(M''_*) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

és una successió exacta, que s'anomena la successió exacta llarga d'homologia associada a la successió exacta de complexs.

Demostració. Cal provar que es verifiquen les igualtats següents:

1. $\ker g_* = \operatorname{im} f_*$.
2. $\ker \partial_* = \operatorname{im} g_*$.
3. $\ker f_* = \operatorname{im} \partial_*$.

La primera ja està demostrada, perquè correspon a 7.1.

Provem 2. Comencem per la inclusió $\ker \partial_* \subseteq \operatorname{im} g_*$. Sigui $[z''] \in \ker \partial_*$, on $z'' \in Z_p(M'_*)$. Seguirem amb les notacions que hem usat per definir ∂_* . Així, $\partial_*[z''] = [y']$, amb $y' \in Z_{p-1}(M'_*)$, tal que $f(y') = \partial(z)$, i $g(z) = z''$. Com $[z''] \in \ker \partial_*$, y' és una vora, és a dir, hi haurà un $z' \in M'_p$ amb $y' = \partial z'$. Considerem l'element $z - f(z') \in M_p$. Com $g(z - f(z')) = g(z) = z''$, aquest element és també una antiimatge de z'' i a més, és un cicle

$$\partial(z - f(z')) = \partial z - f(\partial z') = \partial z - f(y') = 0.$$

Així, $[z''] = g_*[z - f(z')]$, i $[z''] \in \operatorname{im} g_*$.

Comprovem ara l'altra inclusió, $\operatorname{im} g_* \subseteq \ker \partial_*$. Sigui $[z''] \in \operatorname{im} g_*$, i $z \in Z_p(M_*)$ un cicle tal que $g(z) = z''$. Segons la definició de ∂_* hem de trobar $y' \in M'_{p-1}$ tal que $f(y') = \partial z$. Però $f(y') = \partial z = 0$ i f és injectiva, per tant, $y' = 0$, i llavors, $\partial_*[z''] = [y'] = [0]$. Així $[z''] \in \ker \partial_*$.

Provem finalment 3. Per provar que $\ker f_* \subseteq \operatorname{im} \partial_*$, considerem una classe $[y'] \in H_{p-1}(M'_*)$ tal que $f_*([y']) = 0$, representada per un cicle $y' \in Z_{p-1}(M'_*)$. Per definició $f_*[y'] = 0$ si, i només si, $f(y') = \partial z$, per algun $z \in M_p$, però aleshores, per la definició de ∂_* , $\partial_*[g(z)] = [y']$, i per tant: $y' \in \operatorname{im} \partial_*$.

La inclusió $\ker f_* \supseteq \operatorname{im} \partial_*$ es prova de forma anàloga a les anteriors. \square

Acabem aquest apartat establint la naturalitat de la successió exacta llarga d'homologia.

Proposició 7.4. *Sigui*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_* & \xrightarrow{f} & M_* & \xrightarrow{g} & M''_* & \longrightarrow & 0 \\ & & m' \downarrow & & m \downarrow & & m'' \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N'_* & \xrightarrow{h} & N_* & \xrightarrow{k} & N''_* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagrama commutatiu de successions exactes de complexos de R -mòduls.

Aleshores el diagrama de successions exactes llargues

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial_*} & H_p(M'_*) & \xrightarrow{f_*} & H_p(M_*) & \xrightarrow{g_*} & H_p(M''_*) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(M'_*) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow m'_* & & \downarrow m_* & & \downarrow m''_* & & \downarrow m'_* & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial'_*} & H_p(N'_*) & \xrightarrow{h_*} & H_p(N_*) & \xrightarrow{k_*} & H_p(N''_*) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{p-1}(N'_*) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

és commutatiu.

Demostració. Els dos primers quadrats són commutatius per la functorialitat de l'homologia, 4.3. Queda per provar, per tant, la naturalitat del morfisme de connexió. Usarem les notacions de 7.2. Sigui $[z''] \in H_p(M''_*)$, i $\partial_*[z''] = [y']$, amb $f(y') = \partial z$ i $g(z) = z''$. Com $mf = hm'$ i $m''g = km$ es tenen les igualtats $hm'(y') = \partial m(z)$ i $km(z) = \partial m''(z'')$. Així, $\partial'_* m'_*[z''] = [m'(y')] = m'_* \partial_*[z'']$, com volíem veure. \square

Problemes

1. *El lema dels nou:* Considereu el següent diagrama de morfismes de R -mòduls

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & M'_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M''_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M'_2 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M''_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M'_3 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M''_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

en el que les tres files són successions exactes i les tres columnes són complexs de R -mòduls. Proveu que l'exactitud de dues columnes qualssevol implica l'exactitud de la tercera.

2. Considereu un diagrama commutatiu de R -mòduls,

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & M'_n & \xrightarrow{f} & M_n & \xrightarrow{g} & M''_n & \xrightarrow{\partial} & M'_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & m' \downarrow & & m \downarrow & & m'' \downarrow & & m' \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & N'_n & \xrightarrow{f} & N_n & \xrightarrow{g} & N''_n & \xrightarrow{\partial} & N'_{n-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

en el que les dues files són successions exactes, i els morfismes m'' són isomorfismes. Proveu que la successió

$$\dots \longrightarrow M'_n \xrightarrow{m' - f} N'_n \oplus M_n \xrightarrow{f + m} N_n \xrightarrow{\partial(m'')^{-1}g} M'_{n-1} \xrightarrow{m' - f} N'_{n-1} \oplus M_{n-1} \longrightarrow \dots$$

és exacta.

3. Sigui M_* un complex exacte de R -mòduls, i N_* un subcomplex de M_* . Proveu que N_* és exacte si, i només si, ho és el complex quotient M_*/N_* .

8 Successions exactes en homologia simplicial

La successió exacta llarga d'homologia associada a una successió exacta de complexs té importants aplicacions en l'homologia simplicial. Aquí en destacarem dues, la successió d'homologia relativa i la successió de Mayer-Vietoris. Ambdues successions exactes existeixen per a l'homologia simplicial amb coeficients en un anell commutatiu R . Per simplificar les notacions suposarem que $R = \mathbf{Z}$.

L'homologia relativa d'un parell poliedral va ser introduïda per S. Lefschetz l'any 1927 i la successió exacta corresponent la va introduir W. Hurewicz el 1941, encara que ja era parcialment utilitzada amb anterioritat.

Definició. Sigui K un complex simplicial ordenat i L un subcomplex de K amb l'ordre induït. Es defineix el *complex de cadenes relatives* de (K, L) com el complex quotient $C_*(K, L) := C_*(K)/C_*(L)$.

S'anomena *homologia relativa* de (K, L) a l'homologia de $C_*(K, L)$,

$$H_*(K, L) := H_*(C_*(K, L)).$$

Per la pròpia definició es té una successió exacta de complexs

$$0 \longrightarrow C_*(L) \xrightarrow{i_*} C_*(K) \xrightarrow{\pi_*} C_*(K, L) \longrightarrow 0,$$

on i_* és el morfisme induït per la inclusió de L en K , i π_* és el morfisme de projecció. De l'apartat anterior es dedueix ara de forma immediata:

Teorema 8.1. *Sigui K un complex simplicial i L un subcomplex de K . Hi ha una successió exacta llarga d'homologia*

$$\dots \longrightarrow H_p(L) \xrightarrow{i_*} H_p(K) \xrightarrow{\pi_*} H_p(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(L) \longrightarrow \dots$$

que s'anomena la successió exacta d'homologia relativa del parell (K, L) .

Aquesta successió és natural en (K, L) , és a dir, si (K', L') és un altre parell de complexs simplicials, i $\varphi : |K| \longrightarrow |K'|$ és una aplicació simplicial tal que $\varphi(|L|) \subset |L'|$, aleshores el diagrama de successions exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_*} & H_p(L) & \xrightarrow{i_*} & H_p(K) & \xrightarrow{\pi_*} & H_p(K, L) & \xrightarrow{\partial_*} & \dots \\ & & \varphi_* \downarrow & & \varphi_* \downarrow & & \varphi_* \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial'_*} & H_p(L') & \xrightarrow{i'_*} & H_p(K') & \xrightarrow{\pi'_*} & H_p(K', L') & \xrightarrow{\partial'_*} & \dots \end{array}$$

és commutatiu. □

Usant aquesta successió exacta podem calcular, per exemple, l'homologia de $sq_n \Delta^{n+1}$. Sigui Δ^{n+1} un símplex n -dimensional amb els vèrtexs ordenats, i $sq_n \Delta^{n+1}$ el subcomplex ordenat format per les cares de Δ^{n+1} de dimensió $\leq n$. Comencem calculant l'homologia relativa del parell $(\Delta^{n+1}, sq_n \Delta^{n+1})$. El complex de cadenes de $sq_n \Delta^{n+1}$ ve donat per

$$\begin{aligned} C_p(sq_n \Delta^{n+1}) &= C_p(\Delta^{n+1}), \quad 0 \leq p \leq n, \\ C_{n+1}(sq_n \Delta^{n+1}) &= 0, \end{aligned}$$

d'on resulta

$$C_p(\Delta^{n+1}, sq_n \Delta^{n+1}) = \frac{C_p(\Delta^{n+1})}{C_p(sq_n \Delta^{n+1})} \cong \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ \mathbf{Z}, & \text{si } p = n + 1, \end{cases}$$

i per tant,

$$H_p(\Delta^{n+1}, sq_n \Delta^{n+1}) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ \mathbf{Z}, & \text{si } p = n + 1. \end{cases}$$

Observem a més, que el símplex Δ^{n+1} determina, un cop escollit l'ordre dels seus vèrtexs, un generador de $H_{n+1}(\Delta^{n+1}, sq_n \Delta^{n+1})$. D'aquí se segueix ara:

Teorema 8.2. *L'homologia de la triangulació $sq_n \Delta^{n+1}$ de l'esfera \mathbf{S}^n , $n \geq 1$, és*

$$H_p(sq_n \Delta^{n+1}) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < p < n, \\ \mathbf{Z}, & \text{si } p = n. \end{cases}$$

Demostració. Com sabem que $H_p(\Delta^{n+1}) = 0$ si $p > 0$ per 6.1, de la successió exacta d'homologia relativa i del càlcul anterior, resulta la successió exacta curta

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(\Delta^{n+1}, sq_n \Delta^{n+1}) \xrightarrow{\sim} H_n(sq_n \Delta^{n+1}) \longrightarrow 0,$$

i també, si $0 < p < n$,

$$0 \longrightarrow H_p(sq_n \Delta^{n+1}) \longrightarrow 0$$

d'on es dedueix el resultat. □

L'altra successió exacta a la que feiem referència és la successió de Mayer-Vietoris. Sigui K un complex simplicial i K_1, K_2 subcomplexs de K tals que $K = K_1 \cup K_2$. Considerem el morfisme de complexs

$$\begin{array}{ccc} \pi : C_p(K_1) \oplus C_p(K_2) & \longrightarrow & C_p(K) \\ (c_1, c_2) & \longmapsto & c_1 - c_2 \end{array}$$

i sigui

$$\begin{array}{ccc} i : C_p(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow & C_p(K_1) \oplus C_p(K_2) \\ c & \longmapsto & c + c \end{array}$$

la inclusió diagonal.

Teorema 8.3. *La successió*

$$0 \longrightarrow C_*(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} C_*(K_1) \oplus C_*(K_2) \xrightarrow{\pi} C_*(K) \longrightarrow 0$$

és una successió exacta de complexs de grups abelians, i indueix una successió exacta llarga d'homologia

$$\dots \longrightarrow H_p(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} H_p(K_1) \oplus H_p(K_2) \xrightarrow{\pi_*} H_p(K) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(K_1 \cap K_2) \longrightarrow \dots$$

Aquesta successió s'anomena la successió exacta llarga de Mayer-Vietoris.

Demostració. Com $K = K_1 \cup K_2$, tots els generadors de $C_p(K)$ tenen antiimatge per π , és a dir, l'aplicació π és exhaustiva. El nucli de π és

$$\ker \pi = \{(c_1, c_2); c_1 = c_2 \in C_*(K_1 \cap K_2)\} ,$$

d'on resulta l'exactitud de la successió de l'enunciat. La resta se segueix de 7.3. \square

El següent resultat és elemental, i es dedueix de la pròpia definició de característica de Euler. No obstant, el deduirem ara de la successió exacta de Mayer-Vietoris per il·lustrar l'ús que en farem d'aquesta successió.

Corollari 8.4. *Sigui K un políedre i K_1, K_2 subpolíedres de K tals que $K = K_1 \cup K_2$. Aleshores*

$$\chi(K) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2) .$$

Demostració. Segons el teorema anterior es té una successió exacta

$$\dots \longrightarrow H_p(K_1 \cap K_2) \longrightarrow H_p(K_1) \oplus H_p(K_2) \longrightarrow H_p(K) \longrightarrow H_{p-1}(K_1 \cap K_2) \longrightarrow \dots$$

i com la característica de Euler d'una successió exacta és 0, per 3.2, podem agrupar termes en la forma

$$\begin{aligned} 0 &= \text{rang } H_0(K) - (\text{rang } H_0(K_1) + \text{rang } H_0(K_2)) + \text{rang } H_0(K_1 \cap K_2) \\ &\quad - \text{rang } H_1(K) + (\text{rang } H_1(K_1) + \text{rang } H_1(K_2)) - \text{rang } H_1(K_1 \cap K_2) \\ &\quad \dots \\ &= \chi(K) - \chi(K_1) - \chi(K_2) + \chi(K_1 \cap K_2) \end{aligned}$$

\square

Problemes

1. Sigui K un complex simplicial i K_1, K_2 subcomplexs de K tals que $K = K_1 \cup K_2$. Proveu que, per a tot $p \geq 0$, es tenen isomorfismes

$$H_p(K_1, K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\sim} H_p(K, K_2) .$$

2. Sigui K un complex simplicial. Estudieu la relació entre $H_*(K)$ i $H_*(sq_p K)$. Calculeu en particular $H_*(sq_p \Delta^{n+1})$, amb $0 \leq p < n$.

9 Apèndix: Mòduls

En aquest apèndix recollim, de manera molt succinta, algunes definicions i resultats elementals corresponents a la teoria de mòduls. També hem inclòs la noció de producte tensorial de mòduls, que serà fonamental per estudiar l'homologia amb coeficients generals al capítol 7. Vegeu [16] per a una exposició més acurada de tots aquests temes.

En tot l'apartat, R denotarà un anell commutatiu amb unitat.

Definició. Un R -mòdul és un grup abelià M dotat d'una operació externa

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto rm , \end{aligned}$$

que verifica els axiomes següents:

$$\begin{aligned} (r + s)m &= rm + sm \\ r(m + n) &= rm + rn \\ r(sm) &= (rs)m \\ 1m &= m , \end{aligned}$$

per a qualssevol $r, s \in R$ i qualssevol $m, n \in M$.

Exemples. 1. Si $R = \mathbf{k}$ és un cos, un \mathbf{k} -mòdul no és altra cosa que un \mathbf{k} -espai vectorial.

2. Si $R = \mathbf{Z}$, la noció de R -mòdul coincideix amb la de grup abelià.

3. Donat un anell R , el conjunt de les n -uples (r_1, \dots, r_n) és un R -mòdul, en el que l'anell actua component a component, que anomenarem el R -mòdul *lliure de rang n* .

Sigui M un R -mòdul. Un submòdul N de M és un subgrup de M estable pel producte per elements de l'anell R . Si N és un submòdul de M , el grup quocient M/N hereta una operació externa definida per

$$r(m + N) = rm + N ,$$

i esdevé un R -mòdul.

Si M_i , $i \in I$, és una família de R -mòduls, es defineix la suma directa $\oplus_{i \in I} M_i$ com el R -mòdul format per les famílies d'elements de M_i , (x_i) , $i \in I$, tals que $x_i = 0$ llevat d'un nombre finit.

Definició. Sigui M i N dos R -mòduls. Una aplicació $f : M \longrightarrow N$ es diu que és un *morfisme de R -mòduls* si verifica

$$\begin{aligned} f(m + n) &= f(m) + f(n) \\ f(rm) &= rf(m) , \end{aligned}$$

per a qualssevol $r \in R$ i $m, n \in M$.

El nucli, $\ker f$, i la imatge, $\operatorname{im} f$, d'un morfisme de R -mòduls, $f : M \longrightarrow N$, són submòduls de M i N , respectivament.

Els R -mòduls i els morfismes entre ells, formen una categoria que denotarem per **R -mod**.

Definició. Sigui M un R -mòdul. Es diu que M és un R -mòdul lliure si existeix un conjunt d'índexs I tal que M és isomorf a la suma directa $\oplus_I R$.

Es diu que un subconjunt A d'un R -mòdul M és un *conjunt de generadors* de M si tot element de M és combinació lineal amb coeficients en R d'elements de A , és a dir, si tot $m \in M$ es pot expressar en la forma $m = \sum r_i a_i$, on la suma és finita i $r_i \in R$, $a_i \in A$. Així, M és un R -mòdul lliure si, i només si, té una base, és a dir, existeix un conjunt generador i linealment independent. En aquest cas, tot morfisme $M \longrightarrow N$ de R -mòduls queda determinat per la imatge dels elements d'una base.

Proposició 9.1. *Sigui M un R -mòdul. Aleshores existeix un R -mòdul lliure L i un morfisme exhaustiu $L \longrightarrow M$.*

Demostració. En efecte, si $\{m_i; i \in I\}$ és un conjunt de generadors de M , prenem $L = \bigoplus_{i \in I} R[e_i]$ i el morfisme $L \longrightarrow M$ determinat per $e_i \mapsto m_i$. \square

Observem que si M és un R -mòdul finit generat, és a dir, que admet un conjunt de generadors finit, aleshores podem prendre el R -mòdul L de la proposició anterior finit generat.

Un cas en el que estem especialment interessats, per les seves propietats, és el que correspon als dominis d'ideals principals. Recordem que l'anell R es diu que és un domini d'ideals principals si és un domini d'integritat (és a dir, no té divisors de zero: si $rs = 0$ aleshores r o s és igual a 0), i tot ideal és principal, és a dir, si I és un ideal de R existeix un element $r \in R$ tal que I és igual a l'ideal generat per r , $I = (r)$. Exemples bàsics de dominis d'ideals principals són els cossos o l'anell dels enters \mathbf{Z} .

Proposició 9.2. *Sigui R un domini d'ideals principals, i M un R -mòdul lliure de rang finit. Sigui N un submòdul de M , aleshores N és també un R -mòdul lliure de rang finit.*

Demostració. Sigui x_1, \dots, x_n una base de M , i considerem els submòduls N_p de M definits per $N_p = \langle x_1, \dots, x_p \rangle \cap N$, $1 \leq p \leq n$, on $\langle x_1, \dots, x_p \rangle$ indica el submòdul de M generat per x_1, \dots, x_p . Provem inductivament que N_p és lliure de rang $\leq p$, d'on resultarà la proposició ja que $N_n = N$.

Per $p = 1$, $N_1 = \langle x_1 \rangle \cap N$, i per tant existirà un element $r \in R$ tal que $N_1 = \langle rx_1 \rangle$. Així, o bé $N_1 = 0$ o bé N_1 és lliure de rang 1.

Suposem que N_p és lliure de rang $\leq p$, i provem que N_{p+1} és lliure de rang $\leq p + 1$. Sigui I l'ideal format pels coeficients de x_{p+1} dels elements de $N_{p+1} = \langle x_1, \dots, x_{p+1} \rangle \cap N$. Com R és un domini d'ideals principals, I és un ideal principal, i per tant existeix un element r_{p+1} que el genera. Si $r_{p+1} = 0$ aleshores $N_{p+1} = N_p$, i per tant és lliure de rang $\leq p$. Suposem que $r_{p+1} \neq 0$, i sigui $m \in N_{p+1}$ un element tal que

$$m = r_1 x_1 + \dots + r_p x_p + r_{p+1} x_{p+1} ,$$

per a certs $r_i \in R$, $1 \leq i \leq p$.

Afirmem que $N_{p+1} = N_p + \langle m \rangle$. En efecte, si m' és un altre element de N_{p+1} , el seu coeficient en x_{p+1} serà un múltiple de r_{p+1} , λr_{p+1} , i per tant

$m' - \lambda m$ és de N_p . A més, com $N_p \cap \langle m \rangle = 0$, la suma és directa, i per tant N_{p+1} és un R -mòdul lliure de rang $\leq p + 1$. \square

Corollari 9.3. *Si R un domini d'ideals principals, i M un R -mòdul finit generat. Si N és un submòdul de M , aleshores N és un R -mòdul finit generat.* \square

Dedicarem la resta de l'apartat a la introducció de la noció de producte tensorial de mòduls i l'establiment de les propietats que seran més significatives al llarg del text.

Definició. Siguin M, N i P , R -mòduls, i

$$\varphi : M \times N \longrightarrow P ,$$

una aplicació. Es diu que φ és una *aplicació bilineal* si és lineal en cada component, és a dir, si es verifiquen les igualtats

$$\begin{aligned} \varphi(r_1 m_1 + r_2 m_2, n) &= r_1 \varphi(m_1, n) + r_2 \varphi(m_2, n) , \\ \varphi(m, r_1 n_1 + r_2 n_2) &= r_1 \varphi(m, n_1) + r_2 \varphi(m, n_2) , \end{aligned}$$

per a tot $m_i \in M$, $n_i \in N$, $r_i \in R$.

Definició. Es diu que un R -mòdul T amb una aplicació bilineal $M \times N \rightarrow T$ és un *producte tensorial* dels R -mòduls M i N , si verifica la propietat següent: per a tot R -mòdul P i tota aplicació bilineal

$$M \times N \longrightarrow P ,$$

existeix un únic morfisme $T \longrightarrow P$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & T \\ & \searrow & \downarrow \\ & & P \end{array}$$

és commutatiu.

Com la definició de producte tensorial ve donada en termes d'una propietat universal, és immediat comprovar la seva unicitat.

Proposició 9.4. *Amb les notacions anteriors, si $M \times N \longrightarrow T$ i $M \times N \longrightarrow T'$ són productes tensorials dels R -mòduls M i N , aleshores existeix un isomorfisme $T \longrightarrow T'$ que fa commutatiu el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & T' \\ \downarrow & \nearrow & \\ P & & \end{array}$$

□

Podem donar una construcció explícita del producte tensorial:

Teorema 9.5. *Sigui $M \otimes_R N$ el R -mòdul quocient del R -mòdul lliure de base les parelles (m, n) de $M \times N$, pel submòdul engendrat per les "relacions"*

$$\begin{aligned} (r_1 m_1 + r_2 m_2, n) &= r_1(m_1, n) + r_2(m_2, n) , \\ (m, r_1 n_1 + r_2 n_2) &= r_1(m, n_1) + r_2(m, n_2) , \end{aligned}$$

i considerem el morfisme natural $\varphi : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$. Aleshores $M \otimes_R N$ és el producte tensorial dels R -mòduls M i N .

Demostració. És immediata. □

A les imatges de (m, n) per φ se les acostuma a notar per $m \otimes n$.

El producte tensorial és functorial en cadascuna de les variables. Més encara, es verifica

Proposició 9.6. *Siguin $f : M \longrightarrow M'$ i $g : N \longrightarrow N'$ morfismes de R -mòduls. Aleshores existeix un únic morfisme de R -mòduls*

$$f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N' ,$$

tal que

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n) .$$

Demostració. L'aplicació $\psi : M \times N \longrightarrow M' \otimes N'$ definida per $\psi(m, n) = f(m) \otimes g(n)$ és bilineal, i per tant factoritza de forma única per $M \otimes N$, i verifica $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$, per la definició de producte tensorial. \square

Ara és fàcil provar que la composició de morfismes és compatible amb el producte tensorial, és a dir, que es té

$$(f'f) \otimes (g'g) = (f' \otimes g')(f \otimes g) ,$$

i deduir per tant que es verifica:

Corollari 9.7. *El producte tensorial defineix un functor*

$$\otimes : R\text{-mod} \times R\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod} .$$

\square

A més el producte tensorial és additiu:

Proposició 9.8. *Siguin M i N_i , $i \in I$, R -mòduls. Aleshores hi ha un isomorfisme $M \otimes (\bigoplus_{i \in I} N_i) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} (M \otimes N_i)$, tal que $m \otimes (n_i) = (m \otimes n_i)$.*

Demostració. El morfisme $\psi : M \times (\bigoplus N_i) \longrightarrow \bigoplus (M \otimes N_i)$ definit per $\psi(m \otimes (n_i)) = (m \otimes n_i)$ és bilineal, i per tant factoritza per un únic morfisme $M \otimes (\bigoplus_{i \in I} N_i) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} (M \otimes N_i)$. D'altra banda, per a cada $j \in I$, podem considerar el morfisme d'inclusió $N_j \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} N_i$, i per la functorialitat del producte tensorial, definir un morfisme $\bigoplus_{i \in I} (M \otimes N_i) \longrightarrow M \otimes (\bigoplus_{i \in I} N_i)$. És immediat que un és l'invers de l'altre. \square

Finalment, observarem que el producte tensorial ens permet estudiar el canvi d'anell en termes functorials. En efecte, sigui $R \longrightarrow R'$ un morfisme d'anells. En particular, R' és un R -mòdul, i per tant, si M és un altre R -mòdul podem considerar el producte tensorial $M \otimes_R R'$.

Proposició 9.9. *Si definim l'operació externa $M \otimes_R R' \times R' \longrightarrow M \otimes_R R'$ per $(m \otimes s)r = m \otimes (sr)$, aleshores $M \otimes_R R'$ és un R' -mòdul. Direm que $M \otimes_R R'$ s'obté de M per extensió d'escalars.* \square

Les propietats anteriors permeten provar fàcilment el següent resultat:

Proposició 9.10. *Segui $R \longrightarrow R'$ un morfisme d'anells. Aleshores el producte tensorial defineix un functor*

$$\otimes_R R' : R\text{-mod} \longrightarrow R'\text{-mod} .$$

Si M és un R -mòdul lliure de base $\{e_i\}_{i \in I}$, aleshores $M \otimes_R R'$ és el R' -mòdul lliure de base el mateix conjunt $\{e_i\}_{i \in I}$. \square .

Així, si K és un complex simplicial ordenat, com $C_p(K)$ és el grup abelià lliure de base els p -simplexs simplicials ordenats, i $C_p(K; R)$ és el R -mòdul lliure que té com a base el mateix conjunt, es té

$$C_p(K; R) \cong C_p(K) \otimes_{\mathbf{Z}} R .$$

En general, es té un morfisme de R -mòduls $M \longrightarrow M \otimes_R R'$, definit per $m \mapsto m \otimes 1$, que no és injectiu i que, en general, és difícil d'explicitar el seu nucli. En la proposició següent es determina aquest nucli en el cas, prou important en el nostre context, en que $R = \mathbf{Z}$ i $R' = \mathbf{Q}$.

Proposició 9.11. *Segui A un grup abelià.*

1. *El nucli del morfisme $A \longrightarrow A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ és el subgrup de torsió de A , és a dir, el format pels elements $a \in A$ tals que existeix un enter n amb $na = 0$. En particular, si A és un grup de torsió, $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = 0$.*

2. *Si A és un grup abelià finit generat, $\text{rang } A = \dim(A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})$.*

Demostració. 1. Si $a \in A$ és un element de torsió, i $n \in \mathbf{Z}$ és tal que $na = 0$, aleshores $a \otimes 1 = na \otimes (1/n) = 0$. Provem l'altra inclusió: sigui a un element de A tal que $a \otimes 1 = 0$ en $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Per 9.5, $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ és isomorf al quocient del grup abelià lliure generat $A \times \mathbf{Q}$ pel subgrup engendrat per les relacions, així, $(a, 1)$ pertany al subgrup generat per les relacions, és a dir, existeixen elements $a_i \in A$ i $p_i/q_i \in \mathbf{Q}$, tals que

$$(a, 1) = \sum (a_i, \frac{p_i}{q_i}) ,$$

on la suma és del subgrup de les relacions. Si $q = m.c.m.(q_i)$, aleshores la igualtat anterior dóna una igualtat en el grup abelià lliure generat per les

parelles de $A \times \mathbf{Z}[1/q]$, i, per tant, $a \otimes 1 = 0$ com element de $A \otimes \mathbf{Z}[1/q]$. Però, $\mathbf{Z}[1/q]$ és lliure de rang 1, pel que el morfisme

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A \otimes \mathbf{Z}[1/q] \\ a &\mapsto a \otimes [1/q] \end{aligned}$$

és un isomorfisme. Per aquest isomorfisme, $a \otimes 1$ és la imatge de qa , i com $a \otimes 1 = 0$, $qa = 0$, és a dir, a és de torsió.

2. Pel teorema de classificació, $A \cong F \oplus T$, on $F \cong \mathbf{Z}^r$, amb $r = \text{rang } A$, i T és un grup de torsió. Per 9.10 i la primera part de la proposició, $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}^r$, d'on resulta 2. \square

El functor de canvi d'anell, $\otimes_R R'$, no conserva, en general, les successions exactes doncs, per exemple, la successió que resulta de tensorialitzar per $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ la successió exacta $0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}$, no és exacta. Però, si ho és en el cas $R = \mathbf{Z}$ i $R' = \mathbf{Q}$, ja que es té:

Proposició 9.12. *Sigui*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

una successió exacta de grups abelians. Aleshores la successió de \mathbf{Q} -espais vectorials

$$M' \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes \mathbf{Q}$$

és exacta.

Demostració. Com $(g \otimes 1)(f \otimes 1) = (gf \otimes 1) = 0$, en resulta la inclusió $\text{im}(f \otimes 1) \subseteq \ker(g \otimes 1)$. Provem ara l'altra inclusió. Sigui $y \in \ker(g \otimes 1)$, com y és un element de $M \otimes \mathbf{Q}$, és una suma finita

$$y = \sum_i m_i \otimes \frac{p_i}{q_i},$$

amb $m_i \in M$, i $p_i, q_i \in \mathbf{Z}$. Així, si $q = m.c.m.(q_i)$ i $r_i = q/q_i$, es té

$$qy = \sum_i m_i \otimes r_i p_i = \left(\sum_i r_i p_i m_i \right) \otimes 1 = m \otimes 1.$$

Com $qy \in \ker(g \otimes 1)$, $g(m)$ és de torsió, per 9.11, és a dir, existeix un $t \in \mathbf{Z}$ tal que $tg(m) = 0$, i, per tant, $g(tm) = 0$. Així, per la exactitud de la successió

de grups abelians, existeix un $m' \in M'$ tal que $f(m') = tm$. És immediat ara, per la linealitat, que $(f \otimes 1)(m' \otimes \frac{1}{tq}) = y$, és a dir, que y és de la imatge de $f \otimes 1$. \square

Assenyalem els casos particulars següents, que utilitzarem en el §3.

Corollari 9.13. *Sigui $f : M \longrightarrow N$ un morfisme de grups abelians, i $f \otimes 1 : M \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow N \otimes \mathbf{Q}$ el morfisme induït per canvi d'anell. Aleshores es tenen isomorfismes*

$$\ker(f \otimes 1) \cong (\ker f) \otimes \mathbf{Q},$$

i,

$$\operatorname{im}(f \otimes 1) \cong (\operatorname{im} f) \otimes \mathbf{Q}.$$

Demostració. Els isomorfismes de l'enunciat se segueixen, de forma immediata, de l'aplicació de la proposició anterior a les successions exactes de grups abelians

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker f & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \\ M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N/\operatorname{im} f & \longrightarrow & 0, \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} f & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N/\operatorname{im} f, \end{array}$$

i comparant les successions exactes resultants a les successions anàlogues del morfisme $f \otimes 1$. \square

Problemes

1. Proveu que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/q\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$, on d és el màxim comú divisor de p i q .
2. Proveu que el producte tensorial és commutatiu, és a dir, si M, N són R -mòduls, hi ha un isomorfisme $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$. Proveu que el producte tensorial és associatiu.
3. Sigui M un R -mòdul, r un element de R , i $\mu_r : M \longrightarrow M$ la multiplicació per r . Sigui N un altre R -mòdul. Proveu que el morfisme $\mu_r \otimes 1_N : M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ és també la multiplicació per r .

Capítol 3

Homologia singular

L'homologia simplicial definida en el capítol anterior s'aplica només a una classe d'espais topològics, els políedres, i a través de les triangulacions als espais triangulats. Però depèn aquesta homologia de la triangulació escollida? En lloc de respondre directament aquesta qüestió, en aquest capítol s'introdueix l'homologia singular, que presenta l'avantatge d'estar definida per a qualsevol espai topològic, i de ser functorial respecte les aplicacions contínues, i que a més, com veurem al §9, coincideix amb l'homologia simplicial sobre els políedres.

La definició de l'homologia singular és molt general, pel que és necessària una elaboració acurada de la teoria abans d'obtenir aplicacions significatives. Aquest capítol té per objectiu establir els resultats bàsics de l'homologia singular, deixant pels propers capítols les aplicacions més geomètriques. Tot i això, es demostra el teorema del punt fix de Brouwer a l'apartat 6.

Com a teoremes fonamentals assenyalarem la invariància homotòpica de l'homologia singular i el teorema de les cadenes petites, que són en essència els continguts dels apartats 4 i 5. Aquest darrer teorema és un resultat molt tècnic a primera vista però que esdevé fonamental pel desenvolupament de l'homologia singular. Com a corollari immediat deduirem l'existència de la successió de Mayer-Vietoris d'un recobriment, que juntament amb la invariància homotòpica esdevindran les principals eines de càlcul de grups d'homologia dels capítols següents.

Els resultats que es presenten en aquest capítol es resumeixen en els axiomes de Eilenberg-Steenrod, dels que depèn en última instància la comparació

de l'homologia simplicial d'un políedre amb la seva homologia singular.

1 Cadenes singulars d'un espai topològic. Homologia singular

Donat un enter $p \geq 0$, en aquest capítol denotarem per Δ^p el símplex p -dimensional estàndard, és a dir, $\Delta^p = \{x \in \mathbf{R}^{p+1}; \sum_{i=0}^p x_i = 1, x_i \geq 0\}$.

Definició. Sigui X un espai topològic, i p un enter no negatiu. Un p -símplex singular de X és una aplicació contínua $\sigma : \Delta^p \longrightarrow X$.

Per exemple, un 0-símplex singular de X és un punt de X , i un 1-símplex singular de X és un camí de X . La definició no exclou p -símplexs degenerats en el sentit de que, per exemple, un 1-símplex singular $\sigma : \Delta^1 \longrightarrow X$ pot ser una aplicació constant, i per tant tenir per imatge un punt.

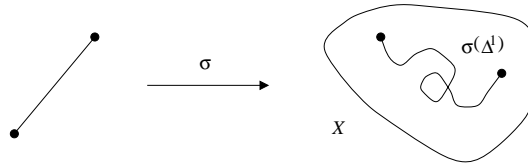


Figura 3.1: Un 1-símplex singular.

Definició. Sigui X un espai topològic. Es defineix el *grup de cadenes singulars p -dimensionals* de X , que notarem $S_p(X)$, com el grup abelià lliure generat pels p -símplexs singulars de X :

$$S_p(X) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i \sigma_i; \lambda_i \in \mathbf{Z}, \sigma_i : \Delta^p \longrightarrow X \text{ contínua} \right\}.$$

Per exemple, com els 0-símplexs de X són els seus punts, $S_0(X)$ és el grup abelià lliure generat pels seus punts. Així, si X no és finit, $S_0(X)$ és un grup abelià que no és finit generat, en contrast amb el grup de cadenes

0-dimensional d'un complex simplicial K , que té rang igual al nombre de vèrtexs de K .

S'introdueix l'operador vora $\partial_p : S_p(X) \longrightarrow S_{p-1}(X)$ de la forma següent: si σ és un p -simplex singular, es defineix

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ \delta_i,$$

on $\delta_i : \Delta^{p-1} \longrightarrow \Delta^p$, $0 \leq i \leq p$, és l'aplicació contínua definida per

$$\delta_i(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{p-1}).$$

Observem que δ_i és contínua, i que envia Δ^{p-1} a la cara $\Delta(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p)$ de Δ^p . Com ja hem fet anteriorment en situacions similars, suprimirem el subíndex de ∂_p quan aquest sigui clar pel context.

Lema 1.1. *Es verifica $\partial_{p-1}\partial_p = 0$, per a tot $p \geq 0$.*

Demostració. Com el grup $S_p(X)$ està generat pels simplexs singulars, és suficient provar que $\partial^2 = 0$ sobre aquests. Sigui doncs σ un p -simplex singular, es té

$$\begin{aligned} \partial(\partial\sigma) &= \partial\left(\sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ \delta_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j (\sigma \circ \delta_i) \circ \delta_j\right) \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\delta_i \circ \delta_j). \end{aligned}$$

Observem ara que sempre que $j < i$ es verifica $\delta_i \circ \delta_j = \delta_j \circ \delta_{i-1}$, ja que ambdues composicions corresponen a

$$(x_0, \dots, x_{p-2}) \longmapsto (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, \dots, x_{p-2}).$$

Per tant la suma anterior és igual a

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\delta_i \circ \delta_j) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\delta_i \circ \delta_j) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\delta_j \circ \delta_{i-1}) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\delta_i \circ \delta_j). \end{aligned}$$

Si fem ara el canvi de $i - 1$ per i en la primera suma veiem que les dues sumes es cancel·len. \square

La successió de grups de cadenes singulars $S_p(X)$, $p \geq 0$, amb l'operador vora ∂ , formen un complex de cadenes de grups abelians, $(S_*(X), \partial)$, que s'anomena *el complex de cadenes singulars de X* .

Definició. Sigui X un espai topològic, i p un enter no negatiu. Es defineix el *p -èssim grup d'homologia singular de X* com el grup d'homologia p -èssim del complex de cadenes singulars de X , és a dir,

$$H_p(X) := H_p(S_*(X)).$$

Observació. Si R és un anell commutatiu unitari, es defineix de forma anàloga el R -mòdul de cadenes singulars $S_p(X, R)$ com el R -mòdul lliure generat pels símplexs singulars. L'operador vora admet una extensió natural a un morfisme de R -mòduls $\partial : S_p(X, R) \rightarrow S_{p-1}(X, R)$, que continua verificant $\partial^2 = 0$, el que permet considerar també el complex de R -mòduls $S_*(X; R)$. Així, es defineixen els grups d'homologia singular d'un espai topològic X amb coeficients en un anell R , $H_*(X, R)$, com els grups d'homologia del complex $S_*(X; R)$.

Per simplificar les notacions, en la resta del capítol ens centrarem en el cas $R = \mathbf{Z}$, deixant l'extensió dels diferents resultats presentats pel cas general en forma de problemes. En els propers capítols utilitzarem en particular els grups $H_p(X, \mathbf{Q})$ i $H_p(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Assenyalem, però, que, com en el cas de l'homologia simplicial i usant el mateix raonament, es té un isomorfisme $H_*(X) \otimes \mathbf{Q} \cong H_*(X; \mathbf{Q})$.

Com a primer exemple de càlcul dels grups d'homologia singular d'un espai topològic podem considerar l'homologia d'un punt.

Teorema 1.2. *Sigui X un espai topològic reduït a un sol punt, $X = \{pt\}$. L'homologia singular de X és*

$$\begin{aligned} H_0(X) &\cong \mathbf{Z}, \\ H_p(X) &= 0, \end{aligned}$$

per a tot $p \geq 0$.

Demostració. Per a cada $p \geq 0$, només hi ha una aplicació contínua $\sigma_p : \Delta^p \rightarrow X$, que és l'aplicació constant. Per tant, $S_p(X) \cong \mathbf{Z}$, per a tot $p \geq 0$. Per definició $\partial(\sigma_p) = \sum (-1)^i \sigma_p \circ \delta_i$ i com $\sigma_p \circ \delta_i = \sigma_{p-1}$, per a tot i , tindrem

$$\partial(\sigma_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_{p-1} = \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i \right) \sigma_{p-1} = \begin{cases} 0, & \text{si } p \text{ és senar,} \\ \sigma_{p-1}, & \text{si } p \text{ és parell.} \end{cases}$$

Per tant, el complex de cadenes singulars de X és el complex

$$\cdots \xrightarrow{1} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z} \cdots$$

i l'homologia que en resulta és

$$\begin{aligned} H_0(X) &\cong \mathbf{Z}, \\ H_1(X) &= \mathbf{Z}/\mathbf{Z} = 0, \end{aligned}$$

i en general

$$H_p(X) = 0, \text{ si } p \geq 2.$$

□

Observem que si X és un políedre que consta d'un sol vèrtex, la seva homologia simplicial és la mateixa que la singular, tot i que el complex de cadenes simplicials és ben diferent, ja que es té $C_0(X) \cong \mathbf{Z}$, i $C_p(X) = 0$, si $p \geq 1$.

A tota aplicació contínua entre espais topològics li podem associar un morfisme en homologia singular.

Proposició 1.3. *Siguin X, Y espais topològics i $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Llavors f induceix un morfisme de complexos*

$$S_*(f) : S_*(X) \rightarrow S_*(Y),$$

tal que

$$S_p(f)(\sigma) = f \circ \sigma,$$

per a tot p -simplex singular σ de X .

Demostració. Com que $S_p(X)$ és el grup abelià lliure generat pels p -símplexs singulars $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$, és suficient definir $S_p(f)(\sigma)$, i en aquest cas es pren la composició $\Delta^p \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$ com a definició, és a dir,

$$S_p(f)(\sigma) := f \circ \sigma \in S_p(Y).$$

Comprovem que $S_*(f)$ és un morfisme complex, és a dir, que commuta amb l'operador vora: $S_*(f)\partial = \partial S_*(f)$. D'una banda tenim

$$\begin{aligned} S_{p-1}(f)(\partial(\sigma)) &= S_{p-1}(f)(\sum (-1)^i \sigma \circ \delta_i) \\ &= \sum (-1)^i f \circ (\sigma \circ \delta_i), \end{aligned}$$

mentres que de l'altra, obtenim el mateix

$$\begin{aligned} \partial(S_p(f)(\sigma)) &= \partial(f \circ \sigma) \\ &= \sum (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \delta_i. \end{aligned}$$

□

És immediat provar que el morfisme així definit és compatible amb les composicions d'aplicacions contínues, i que el morfisme induït per la identitat de l'espai topològic X , és el morfisme identitat del complex $S_*(X)$. Per tant, es té

Lema 1.4. *El complex de cadenes singulars S_* defineix un functor*

$$S_* : \mathbf{Top} \rightarrow C_*(\mathbf{Ab}).$$

□

Ara per pas a l'homologia s'obté el resultat en homologia singular.

Proposició 1.5. *Siguin X, Y , espais topològics i $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Aleshores el morfisme $S_*(f)$ induïx un morfisme de grups*

$$H_*(f) : H_*(X) \rightarrow H_*(Y),$$

tal que si $[c]$ és un cicle de X , aleshores $H_(f)([c]) = [S_*(f)(c)]$.*

Si $f = id_X$ aleshores

$$H_*(id_X) = id_{H_*(X)},$$

i si $g : Y \longrightarrow Z$ és una altra aplicació contínua, es verifica

$$H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f).$$

Per tant, H_* defineix un functor

$$H_* : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Ab}_*.$$

Demostració. Per 1.3, f induïx un morfisme de complexs $S_*(f) : S_*(X) \longrightarrow S_*(Y)$. Ara, per 2.4.1, $S_*(f)$ induïx un morfisme entre les homologies dels complexs, el que defineix $H_*(f)$. Les propietats enunciades es dedueixen de la definició. \square

Notarem indistintament per $H_*(f)$, o per f_* , el morfisme induït en homologia per una aplicació contínua $f : X \longrightarrow Y$.

Gran part de l'interès de la functorialitat de l'homologia singular expressada en la proposició anterior està en que d'ella se segueix de forma immediata la invariància topològica de l'homologia singular.

Teorema 1.6 (Invariància topològica de l'homologia singular). *Siguin X, Y espais topològics i $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfisme. Llavors, el morfisme*

$$H_*(f) : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$$

és un isomorfisme.

Demostració. És immediata, ja que tot functor conserva els isomorfismes. Recordem com es raona aquest fet: com que $f : X \longrightarrow Y$ és un homeomorfisme, f és bijectiva i té inversa $g = f^{-1}$ contínua. De les igualtats $f \circ g = \text{id}_Y$ i $g \circ f = \text{id}_X$, aplicant la functorialitat de l'homologia se segueix que

$$H_*(f) \circ H_*(g) = H_*(f \circ g) = H_*(\text{id}_Y) = \text{id}_{H_*(Y)}$$

i anàlogament

$$H_*(g) \circ H_*(f) = \text{id}_{H_*(X)},$$

és a dir, que $H_*(f)$ és un isomorfisme, d'invers $H_*(g)$. \square

Si bé l'homologia simplicial d'un políedre és sempre finit generada, com hem vist a 1.3 del capítol 2, l'homologia singular d'un espai topològic no ho

és en general, ni tant sols pels espais compactes, com ho prova l'exemple de l'arracada hawaiana. En el cas de l'homologia singular cal, doncs, fer hipòtesis de finitud per definir els nombres de Betti i la característica de Euler d'un espai topològic.

Definició. Sigui X un espai topològic, i $p \geq 0$ un enter. Si el grup d'homologia singular $H_p(X)$ és finitament generat, es defineix el *p-èssim nombre de Betti* de X per

$$b_p(X) := \text{rang } H_p(X).$$

Si tots els grups d'homologia de X són finitament generats i només n'hi ha un nombre finit d'ells no nuls, aleshores es defineix la *característica de Euler* de X per

$$\chi(X) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p b_p(X).$$

És evident que del teorema anterior se segueix la invariància topològica dels nombres de Betti i de la característica de Euler, quan aquests estan definits.

Més endavant provarem, a 9.6, que aquests nombres coincideixen, en el cas dels políedres, amb els nombres del mateix nom introduïts en el capítol anterior.

Problemes

1. Sigui X un espai topològic i A un subespai de X . Suposem que A és un retracte de X , és a dir, que existeix una aplicació contínua $r : X \rightarrow A$ tal que, si $i : A \rightarrow X$ és la inclusió de A en X , aleshores $ri = \text{id}_A$. Proveu que $i_* : H_*(A) \rightarrow H_*(X)$ és injectiva, que $r_* : H_*(X) \rightarrow H_*(A)$ és exhaustiva, i que es té un isomorfisme $H_*(X) \cong \ker r_* \oplus \text{im } i_*$.
2. Sigui X un espai topològic de Hausdorff, i $[z] \in H_p(X)$ una classe d'homologia. Proveu que hi ha un subespai compacte C de X tal que, si $i : C \rightarrow X$ denota la inclusió, $[z]$ és de la imatge de i_* . Deduïu que si per a tot compacte C de X existeix un compacte C' tal que $C \subseteq C' \subseteq X$ i $H_p(C') = 0$, aleshores $H_p(X) = 0$.

3. Sigui R un anell commutatiu. Proveu que si $X = \{pt\}$ un espai topològic amb un sol punt, aleshores

$$H_p(X; R) \cong \begin{cases} R, & \text{si } p = 0, \\ 0, & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

4. Sigui R un anell commutatiu. Proveu que l'homologia singular amb coeficients en R , $H_*(-; R)$, defineix un functor de **Top** en la categoria de R -mòduls. Deduïu que si $f : X \rightarrow Y$ és un homeomorfisme, aleshores el morfisme $H_*(X; R) \rightarrow H_*(Y; R)$ induït és un isomorfisme.
5. Sigui $\varphi : R \rightarrow R'$ un morfisme d'anells commutatius, proveu que hi ha una transformació natural de functors $H_*(-; R) \rightarrow H_*(-; R')$, tal que si X és l'espai topològic amb un sol punt, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_0(X; R) & \longrightarrow & H_0(X; R') \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ R & \xrightarrow{\varphi} & R' \end{array}$$

és commutatiu.

2 H_0 i arc-connexió

En aquest apartat anem a caracteritzar el grup $H_0(X)$ en termes de l'arc-connexió de X . Sigui X un espai topològic, i denotem per I l'interval $[0, 1]$ de \mathbf{R} . Es té un homeomorfisme $I \cong \Delta^1$, i per tant tot camí $\gamma : I \rightarrow X$ defineix un 1-símplex singular de X . Podem demostrar el resultat anàleg al teorema 2.2.2 que assegura que per un políedre connex K , el grup 0-èssim d'homologia simplicial és isomorf a \mathbf{Z} .

Teorema 2.1. *Sigui X espai topològic arc-connex, no buit. Llavors $H_0(X) \cong \mathbf{Z}$.*

Demostració. Definim el morfisme d'augmentació per

$$\begin{aligned} \varepsilon : S_0(X) &\longrightarrow \mathbf{Z}, \\ \sum \lambda_x [x] &\longmapsto \sum \lambda_x. \end{aligned}$$

El morfisme ε és exhaustiu, ja que si $x_0 \in X$ és un punt qualsevol es té $\varepsilon(x_0) = 1$, i per tant $\varepsilon(\lambda x_0) = \lambda \in \mathbf{Z}$, per a tot $\lambda \in \mathbf{Z}$.

Per la demostració del teorema és suficient provar que $\ker \varepsilon = B_0(X)$, perquè llavors $H_0(X) = S_0(X)/B_0(X) = S_0(X)/\ker \varepsilon \cong \mathbf{Z}$.

Si $\sigma \in S_1(X)$ és un 1-símplex singular, aleshores,

$$\varepsilon(\partial\sigma) = \varepsilon(\sigma(1) - \sigma(0)) = 1 - 1 = 0,$$

i per tant $\partial\sigma \in \ker \varepsilon$. Així, com $B_0(X)$ està engendrat per les vores dels 1-símplexs singulars, es té $B_0(X) \subseteq \ker \varepsilon$.

Comprovem ara l'altra inclusió. Sigui $c = \sum \lambda_x x \in S_0(X)$ tal que $\varepsilon(c) = 0$, és a dir, $\sum \lambda_x = 0$. Fixem un punt $x_0 \in X$. Com que X és arc-connex, per a tot $x \in X$, existeix una aplicació contínua $\gamma_x : I \rightarrow X$ tal que

$$\gamma_x(0) = x_0, \quad \gamma_x(1) = x.$$

Així,

$$c = \sum \lambda_x x = \sum \lambda_x x - \sum \lambda_x x_0 = \sum \lambda_x (x - x_0) = \sum \lambda_x \partial\gamma_x = \partial(\sum \lambda_x \gamma_x),$$

i per tant, $c \in B_0(X)$. □

Observem que de fet hem demostrat que si X és arc-connex i $x_0 \in X$ és un punt qualsevol, aleshores $H_0(X) \cong \mathbf{Z}[x_0]$. Aquest fet té com a conseqüència:

Corollari 2.2. *Sigui $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua entre espais arc-connexos, no buits. Aleshores*

$$f_* : H_0(X) \rightarrow H_0(Y),$$

és un isomorfisme. □

Sigui X un espai topològic, i $X_i, i \in I$, les seves components arc-connexes, de forma que $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Un p -símplex singular de X , $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$, necessàriament és un p -símplex singular d'una component X_i , ja que la imatge d'un espai topològic arc-connex és arc-connex, i per tant $\sigma(\Delta^p) \subseteq X_i$, per algun i . Així, és immediat que

$$S_*(X) = \bigoplus_{i \in I} S_*(X_i).$$

Proposició 2.3. *Sigui X un espai topològic de components arc-connexes X_i , $i \in I$. Aleshores*

$$H_*(X) = \bigoplus_{i \in I} H_*(X_i).$$

Demostració. Se segueix de l'additivitat de l'homologia de complexos de \mathbf{Z} -mòduls, 2.4.4. \square

En particular, com que els X_i són arc-connexos, de 2.1 en resulta:

Corollari 2.4. *$H_0(X)$ és un grup abelià lliure de rang igual al cardinal del conjunt de components arc-connexes.* \square

En el cas dels políedres disposavem d'un resultat anàleg pels que són connexos, ja que aleshores són necessàriament arc-connexos. Aquí és fonamental la distinció entre connexió i arc-connexió. Per exemple, sigui X el subespai de \mathbf{R}^2 definit per

$$X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) ; 0 < x \leq 1\} \cup \{0\} \times [-1, 1].$$

Aquest espai X , que és connex, té dues components arc-connexes i per tant $H_0(X) \cong \mathbf{Z}^2$.

Problemes

1. Calculeu l'homologia singular dels següents subespais de \mathbf{R} : \mathbf{S}^0 , \mathbf{Q} , i $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$.
2. Siguin $X = \cup_{i \in I} X_i$, $Y = \cup_{j \in J} Y_j$, les descomposicions en components arc-connexes de dos espais topològics, X , Y . Siguí $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Determineu $f_* : H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$.
3. Siguí R un anell commutatiu, i X un espai topològic arc-connex. Proveu que hi ha un isomorfisme de R -mòduls $H_0(X; R) \cong R$.

3 H_1 i el grup fonamental

L'objectiu d'aquest apartat és provar el teorema de Poincaré, que mostra la relació existent entre el grup fonamental d'un espai topològic i el seu primer grup d'homologia.

Sigui X un espai topològic i $x_0 \in X$ un punt base de X . El grup fonamental de X en x_0 , $\pi_1(X, x_0)$, té per elements les classes d'equivalència d'homotopia dels llaços $\gamma : I \rightarrow X$, amb punt base x_0 , $\gamma(0) = \gamma(1)$. Recordem aquesta definició: si $\gamma, \gamma' : I \rightarrow X$ són dos llaços amb punt base x_0 , es diu que γ és homòtop a γ' , el que escriurem $\gamma \sim \gamma'$, si existeix una homotopia $F : I \times I \rightarrow X$ relativa a $\{0, 1\}$, tal que $F_0 = \gamma$ i $F_1 = \gamma'$. Notarem $\tilde{\gamma}$ la classe d'homotopia corresponent al llaç γ .

Com I és homeomorf a Δ^1 , tot llaç γ es pot considerar com un 1-símplex singular. A més, si γ té punt base x_0 , es tindrà

$$\partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0) = x_0 - x_0 = 0 ,$$

i per tant γ és un cicle. Quan fem referència a la classe d'homologia de γ , la notarem $[\gamma]$.

Proposició 3.1. *Sigui X un espai topològic, i x_0 un punt de X . Siguin γ, γ' dos llaços de X amb punt base x_0 . Si γ i γ' són llaços homòtops, les cadenes singulars que representen són homòlogues.*

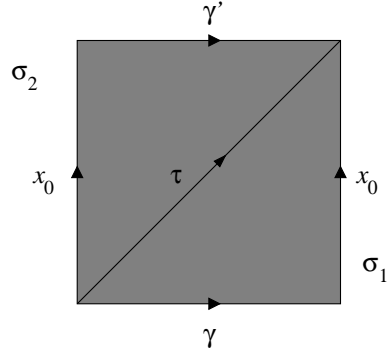
Demostració. Cal provar que $\gamma - \gamma' \in B_1(X)$, és a dir que $\gamma - \gamma' = \partial c_2$, on c_2 és una 2-cadena singular. Si $\gamma \sim \gamma'$, existeix una homotopia contínua

$$F : I \times I \rightarrow X ,$$

relativa a $\{0, 1\}$. Considerem els dos 2-símplexs de \mathbf{R}^2 , σ_1, σ_2 , donats per $\sigma_1 = \Delta((0, 0), (1, 0), (1, 1))$ i $\sigma_2 = \Delta((0, 0), (0, 1), (1, 1))$ (vegeu la figura 3.2).

Considerem ara els 2-símplexs singulars de X donats per $F \circ \sigma_1, F \circ \sigma_2 : \Delta^2 \rightarrow X$. Aleshores

$$\begin{aligned} \partial(F \circ \sigma_1) &= x_0 - \tau + \gamma , \\ \partial(F \circ \sigma_2) &= \gamma' - \tau + x_0 . \end{aligned}$$

Figura 3.2: Els símplexs σ_1 i σ_2 .

Així, la cadena singular

$$c_2 = F \circ \sigma_1 - F \circ \sigma_2 ,$$

té vora

$$\partial c_2 = (x_0 - \tau + \gamma) - (\gamma' - \tau + x_0) = \gamma - \gamma' ,$$

i en definitiva $\gamma - \gamma' \in B_1(X)$. \square

Aquest resultat permet definir l'aplicació $\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$ per $\varphi(\tilde{\gamma}) = [\gamma]$.

Proposició 3.2. *Sigui X un espai topològic, i x_0 un punt de X . L'aplicació*

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X) ,$$

és un morfisme de grups.

Demostració. Siguin γ i γ' dos llaços de X amb punt base x_0 . El seu producte en el grup fonamental està definit per

$$\gamma \cdot \gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 , \\ \gamma'(2t - 1), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 . \end{cases}$$

Anem a provar que existeix un 2-símplex singular de X tal que, considerant $\gamma \cdot \gamma'$ com una 1-cadena, es verifica $\gamma \cdot \gamma' = \gamma + \gamma' + \partial\sigma$, i per tant que $[\gamma\gamma'] = [\gamma] + [\gamma']$.

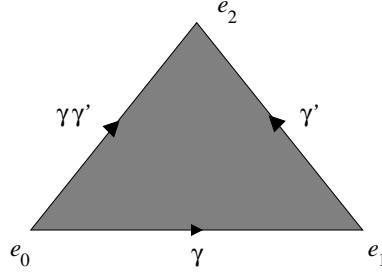


Figura 3.3: $\gamma\gamma' - (\gamma + \gamma')$ és una vora.

Sobre el símplex estàndard $\Delta^2 = \{t_0e_0 + t_1e_1 + t_2e_2 ; t_0 + t_1 + t_2 = 1, t_i \geq 0\}$ de \mathbf{R}^3 definim σ per

$$\sigma(\sum t_i e_i) = \begin{cases} \gamma(2t_2 + t_1), & \text{si } t_2 \leq t_0, \\ \gamma'(2t_2 + t_1 - 1), & \text{si } t_2 \geq t_0. \end{cases}$$

Així, sobre l'aresta $[e_0, e_1]$, el 2-símplex σ és igual a γ , sobre l'aresta $[e_1, e_2]$ és γ' , mentres que a l'aresta $[e_0, e_2]$ és igual a $\gamma\gamma'$, vegeu la figura 3.3. D'aquesta forma resulta $\partial\sigma = \gamma' - \gamma \cdot \gamma' + \gamma$, i per tant $[\gamma\gamma'] = [\gamma] + [\gamma']$. \square

Observació. Si tenim dos camins no necessàriament tancats γ, γ' , amb $\gamma(1) = \gamma'(0)$, la construcció anterior prova que existeix un 2-símplex σ tal que $\gamma\gamma' - (\gamma + \gamma') = \partial\sigma$. Més en general, si tenim $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, tals que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0), \gamma_2(1) = \gamma_3(0), \dots$, es té

$$\gamma_1 \dots \gamma_n - (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n) = \partial\sigma.$$

Utilitzarem aquesta observació en la demostració del teorema de Poincaré.

El grup fonamental $\pi_1(X, x_0)$ no és necessàriament un grup abelià, mentres que el grup d'homologia $H_1(X)$ sempre ho és. Així, si $a, b \in \pi_1(X, x_0)$, el producte $aba^{-1}b^{-1}$ és del nucli de φ ; aquests elements $aba^{-1}b^{-1}$ generen el que s'en diu el commutador del grup.

En general, si G és un grup, s'anomena *commutador* de G , i es denota per $[G, G]$, el subgrup generat pels elements $aba^{-1}b^{-1}$ de G , i és immediat verificar el següent lema.

Lema 3.3. 1. $[G, G]$ és un subgrup normal de G .

2. El grup quocient, $G/[G, G]$, és un grup abelià, que denotarem per G_{ab} , i s'anomena l'abelianitzat de G .

3. Si $f : G \longrightarrow H$ és un morfisme de grups, i H és un grup abelià, aleshores f factoritza a través de G_{ab} , és a dir, existeix un únic morfisme $f_{ab} : G_{ab} \longrightarrow H$, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow & \searrow f & \\ G_{ab} & \xrightarrow{f_{ab}} & H \end{array}$$

és commutatiu. □

Retornem a l'estudi del morfisme $\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$. Per la propietat 3 del lema anterior, el morfisme φ factoritza per un morfisme

$$\varphi_{ab} : \pi_1(X, x_0)_{ab} \longrightarrow H_1(X) ,$$

i es té el següent teorema, provat per H. Poincaré.

Teorema 3.4 (de Poincaré.). *Sigui X un espai topològic arc-connex. El morfisme de grups abelians*

$$\varphi_{ab} : \pi_1(X, x_0)_{ab} \longrightarrow H_1(X) ,$$

és un isomorfisme.

Demostració. Comencem comprovant que el morfisme φ és exhaustiu. Sigui $[z] \in H_1(X)$ una classe d'homologia representada pel cicle $z \in Z_1(X)$. Per definició de 1-cadena, el cicle z és una suma finita de 1-símplexs singulars, i, per tant, $z = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$, per a certs enters $n_i \in \mathbf{Z}$, on els $\alpha_i : I \longrightarrow X$ són 1-símplexs singulars. Com z és un cicle, es verifica

$$\partial z = \sum_{i=1}^r n_i (\alpha_i(1) - \alpha_i(0)) = 0 .$$

Per hipòtesi, X és arc-connex i, per tant, per a cada x podem escollir un camí γ_x que uneixi x_0 amb x . Notem $\gamma_{i_j} = \gamma_{\alpha_i(j)}$, $j = 0, 1$, els camins corresponents als punts inicial, $j = 0$, i final, $j = 1$, dels 1-símplexs α_i .

La relació $0 = \sum_{i=1}^r n_i(\alpha_i(1) - \alpha_i(0))$ implica $0 = \sum_{i=1}^r n_i(\gamma_{i_1} - \gamma_{i_0})$, el que permet escriure

$$z = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i = \sum_{i=1}^r n_i(\gamma_{i_0} + \alpha_i - \gamma_{i_1}).$$

Definim ara $\beta_i = \gamma_{i_0} \alpha_i \gamma_{i_1}^{-1}$, que és un camí tancat que surt i arriba a x_0 i, per tant, defineix una classe en $\pi_1(X, x_0)$. Usant l'observació que segueix a la proposició 3.2, tindrem

$$\varphi(\widetilde{\prod \beta_i^{n_i}}) = \sum n_i \varphi(\beta_i) = \left[\sum n_i(\gamma_{i_0} + \alpha_i - \gamma_{i_1}) \right] = [z],$$

el que conclou la prova de l'exhaustivitat.

Per comprovar la injectivitat, hem de veure que $\ker \varphi_{ab} = 0$, o, equivalentment, que $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] = \ker \varphi$. La inclusió del commutador de $\pi_1(X, x_0)$ en $\ker \varphi$ és clara. Provem que $\ker \varphi \subseteq [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$: sigui $\tilde{\gamma} \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\tilde{\gamma} \in \ker \varphi$, és a dir, γ és vora d'una 2-cadena $c \in S_2(X)$. Siguí $c = \sum n_i \sigma_i$, on $\sigma_i : \Delta^2 \rightarrow X$ són 2-símplexs singulars.

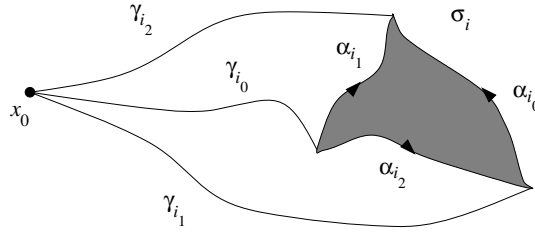


Figura 3.4: Els camins γ_{i_j} .

Notem les arestes dels símplexs σ_i per

$$\begin{aligned} \alpha_{i_0} &= \sigma_i(1, 2), \\ \alpha_{i_1} &= \sigma_i(0, 2), \\ \alpha_{i_2} &= \sigma_i(0, 1). \end{aligned}$$

Així tindrem

$$\gamma = \partial c = \sum n_i \partial \sigma_i = \sum n_i (\alpha_{i_0} - \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}).$$

Siguin ara γ_{i_m} camins que van de x_0 a $\sigma_i(m)$, $m = 0, 1, 2$. Definim

$$\begin{aligned}\beta_{i_0} &= \gamma_{i_1} \alpha_{i_0} \gamma_{i_2}^{-1}, \\ \beta_{i_1} &= \gamma_{i_0} \alpha_{i_1} \gamma_{i_2}^{-1}, \\ \beta_{i_2} &= \gamma_{i_0} \alpha_{i_2} \gamma_{i_1}^{-1},\end{aligned}$$

i siguin $\beta_i = \beta_{i_0} \beta_{i_1}^{-1} \beta_{i_2}$, per a $i = 0, 1, 2$. Els llaços β_i són homotòpicament equivalents al llaç constant x_0 :

$$\beta_i = \beta_{i_0} \beta_{i_1}^{-1} \beta_{i_2} \sim \gamma_{i_1} \alpha_{i_0} \alpha_{i_1}^{-1} \alpha_{i_2} \gamma_{i_1}^{-1} \sim x_0,$$

i per tant en el grup fonamental de X tindrem

$$\widetilde{\prod \beta_i^{n_i}} = 1.$$

Per construcció dels camins β_i , el camí $\beta = \prod \beta_i^{n_i}$ i el camí γ són iguals en $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$, però $\tilde{\beta} = 1$ en π_1 i, per tant, $\tilde{\gamma} = 1$ en $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$, és a dir $\tilde{\gamma} \in [\pi_1, \pi_1]$. \square

Corollari 3.5. *Sigui X un espai topològic arc-connex. Si el grup fonamental de X és abelià, aleshores φ és un isomorfisme*

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} H_1(X). \quad \square$$

Així per exemple, com $\pi_1(\mathbf{R}^n)$ i $\pi_1(\mathbf{S}^n)$ són abelians, $n \geq 1$, trobem

$$\begin{aligned}H_1(\mathbf{R}^n) &\cong \pi_1(\mathbf{R}^n) = 0, \\ H_1(\mathbf{S}^n) &\cong \pi_1(\mathbf{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Problemes

1. Proveu la naturalitat del morfisme φ , és a dir, sigui $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua, $x_0 \in X$, i $y_0 = f(x_0)$, proveu que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ \varphi_X \downarrow & & \varphi_Y \downarrow \\ H_1(X) & \xrightarrow{f_*} & H_1(Y),\end{array}$$

és commutatiu.

4 El teorema d'invariància homotòpica

En aquest apartat provarem que l'homologia singular és un invariant del tipus d'homotopia d'un espai topològic. Recordem que donats dos espais topològics X i Y , es diu que són del *mateix tipus d'homotopia* si existeixen aplicacions contínues $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow X$, tals que les composicions fg i gf , són homòtopes a les identitats corresponents: $fg \sim \text{id}_Y$, $gf \sim \text{id}_X$, i que un espai topològic X es diu que és *contràctil* si és del tipus d'homotopia d'un punt.

De fet provarem la invariància homotòpica de l'homologia singular no solament per als espais topològics, sinó també per a les aplicacions contínues. Així es té:

Teorema 4.1. *Siguin X, Y espais topològics i $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicacions contínues. Aleshores, si f és homòtopa a g ,*

$$H_*(f) = H_*(g) : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y).$$

Com a conseqüència immediata d'aquest resultat trobem la invariància homotòpica de l'homologia singular dels espais topològics:

Corollari 4.2. *Siguin X, Y espais topològics del mateix tipus d'homotopia. Llavors, els grups d'homologia singular de X i Y són isomorfs, és a dir, $H_*(X) \cong H_*(Y)$.*

Demostració. Sigui $f : X \longrightarrow Y$ una equivalència homotòpica, i $g : Y \longrightarrow X$ una inversa homotòpica. Així, gf és homòtopa a la identitat de X , i per la functorialitat de l'homologia i 4.1, en resulta $g_*f_* = \text{id}_{H_*(X)}$. Anàlogament es raona que $f_*g_* = \text{id}_{H_*(Y)}$, i per tant f_* és un isomorfisme i g_* és l'isomorfisme invers. \square

Exemples. 1. Sigui X un espai topològic contràctil. Del càlcul de l'homologia singular d'un punt, 1.2, i del corollari anterior se segueix que

$$\begin{aligned} H_0(X) &\cong \mathbf{Z}, \\ H_p(X) &= 0, \text{ si } p > 0. \end{aligned}$$

En particular:

$$\begin{aligned} H_p(\mathbf{R}^n) &\cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } p = 0, \\ 0, & \text{si } p > 0, \end{cases} \\ H_p(\Delta^n) &\cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } p = 0, \\ 0, & \text{si } p > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Cal tenir en compte que hi ha espais topològics que tenen l'homologia d'un espai contràctil però que no són contràctils, en veurem algun d'ells quan estudiem els teoremes de no separació, i també al problema 3.

2. L'espai $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ és del tipus d'homotopia de l'esfera \mathbf{S}^n i, per tant,

$$H_p(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}) \cong H_p(\mathbf{S}^n).$$

En l'apartat 6 calcularem l'homologia de les esferes. De moment podem aplicar 3.5 per deduir

$$H_1(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}) \cong \pi_1(\mathbf{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Demostració del teorema 4.1. La demostració del teorema d'invariància consisteix en una sèrie de reduccions que ens permetran deduir el resultat d'un cas particular, que demostrarem directament.

Com f i g són homòtopes existeix una homotopia de f a g , és a dir, una aplicació contínua $G : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $G(x, 0) = f(x)$ i $G(x, 1) = g(x)$.

Considerem les aplicacions

$$\lambda_0, \lambda_1 : X \longrightarrow X \times I,$$

definides per $\lambda_i(x) = (x, i)$, $i = 0, 1$, que són homòtopes per l'homotopia $\text{id} : X \times I \longrightarrow X \times I$. Observem que es verifica

$$\begin{aligned} G \circ \lambda_0(x) &= f(x), \\ G \circ \lambda_1(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Així, per la functorialitat de l'homologia singular, 1.5, és suficient provar el teorema per a λ_0, λ_1 . En efecte, si suposem conegut el teorema en aquest cas, és a dir, $H_*(\lambda_0) = H_*(\lambda_1)$, tindrem

$$H_*(f) = H_*(G) \circ H_*(\lambda_0) = H_*(G) \circ H_*(\lambda_1) = H_*(g).$$

Ara, per provar que $H_*(\lambda_0) = H_*(\lambda_1)$ és suficient, segons 2.5.1, provar que les aplicacions induïdes per λ_0 i λ_1 en el complex de cadenes singulars

$$S_*(\lambda_0), S_*(\lambda_1) : S_*(X) \longrightarrow S_*(X \times I),$$

són morfismes homòtops de complexs de grups abelians.

Recordem que, per definició, $S_*(\lambda_0)$ i $S_*(\lambda_1)$ seran homòtops si, per a tot $q \geq 0$, existeixen morfismes

$$P_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X \times I),$$

tals que, definint $P_{-1} = 0$, es verifica

$$\partial_{q+1} P_q + P_{q-1} \partial_q = S_q(\lambda_1) - S_q(\lambda_0),$$

per a tot $q \geq 0$.

La idea geomètrica de la construcció dels operadors P_q és la següent: donat un q -simplex singular σ de X es tracta de triangular $\sigma \times I$, de forma que esdevingui una cadena singular. Aquesta idea geomètrica justifica que s'anomeni a P l'operador *prisma*.

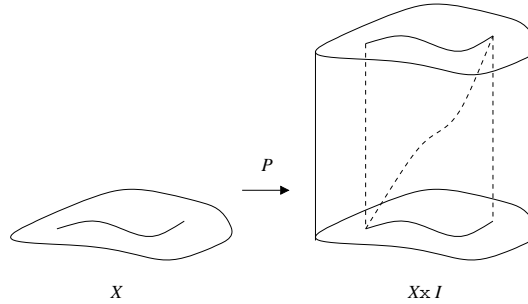


Figura 3.5: Idea geomètrica de l'operador prisma.

Si l'espai topològic X és arbitrari no disposem de cap algorisme per realitzar aquesta subdivisió directament. La propera reducció consisteix en veure que és suficient, de fet, definir P sobre els símplexs afins de Δ^q .

Per poder realitzar aquesta reducció imposem una condició suplementària a l'operador prisma: que sigui natural en X . És a dir, volem definir operadors P^X simultàniament sobre tots els espais topològics X i de forma que, donada una aplicació contínua $h : Y \longrightarrow X$ es tingui un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} S_q(Y) & \xrightarrow{P_q^Y} & S_{q+1}(Y \times I) \\ S_q(h) \downarrow & & \downarrow S_{q+1}(h \times \text{id}_I) \\ S_q(X) & \xrightarrow{P_q^X} & S_{q+1}(X \times I) \end{array}$$

per a tot $q \geq 0$.

Sabem a més que és suficient definir P_q^X sobre els generadors de $S_q(X)$.

Segui $\sigma : \Delta^q \longrightarrow X$ un q -símplex singular. Per la naturalitat imposada a l'operador prisma el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_q(\Delta^q) & \xrightarrow{P_q^{\Delta^q}} & S_{q+1}(\Delta^q \times I) \\ S_q(\sigma) \downarrow & & \downarrow S_{q+1}(\sigma \times \text{id}_I) \\ S_q(X) & \xrightarrow{P_q^X} & S_{q+1}(X \times I) \end{array}$$

ha d'ésser commutatiu. Observem que, si notem $\iota_q \in S_q(\Delta^q)$ el q -símplex singular corresponent a la identitat de Δ^q , es té

$$S_q(\sigma)(\iota_q) = \sigma \circ \iota_q = \sigma \in S_q(X) ,$$

i per tant, la commutativitat del diagrama anterior dóna la igualtat

$$P_q^X(\sigma) = S_{q+1}(\sigma \times \text{id})P_q^{\Delta^q}(\iota_q) .$$

És a dir, la imatge de σ per P_q^X , $P_q^X(\sigma)$, queda determinada pel valor de $P_q^{\Delta^q}(\iota_q)$.

En primer lloc observem que, prenent aquesta igualtat com a definició de P_q^X la naturalitat és immediata: si $h : Y \longrightarrow X$ és una aplicació contínua i

$\sigma \in S_q(Y)$, es té

$$\begin{aligned} P_q^X(S_q(\sigma)) &= S_{q+1}((h \circ \sigma) \times \text{id}_I)(\iota_q) \\ &= S_{q+1}(h \times \text{id}_I)S_{q+1}(\sigma \times \text{id}_I)(\iota_q) \\ &= S_{q+1}(h \times \text{id}_I)P_q^Y(\sigma). \end{aligned}$$

A més a més, la relació d'homotopia entre $S_*(\lambda_0^X)$ i $S_*(\lambda_1^X)$ es dedueix de la corresponent relació per $X = \Delta^q$ i $\sigma = \iota_q$:

$$(S_q(\lambda_1^\Delta) - S_q(\lambda_0^\Delta))(\iota_q) = (\partial_{q+1}P_q^\Delta + P_{q-1}^\Delta\partial_q)(\iota_q),$$

ja que aleshores es verificaran les igualtats

$$\begin{aligned} (S_q(\lambda_1^X) - S_q(\lambda_0^X))(\sigma) &= (S_q(\lambda_1^X) - S_q(\lambda_0^X))S_q(\sigma)(\iota_q) \\ &= S_q(\sigma \times \text{id})(S_q(\lambda_1^\Delta) - S_q(\lambda_0^\Delta))(\iota_q) \\ &= S_q(\sigma \times \text{id})(\partial_{q+1}P_q^\Delta(\iota_q) + P_{q-1}^\Delta\partial_q(\iota_q)) \\ &= \partial_{q+1}S_{q+1}(\sigma \times \text{id})(P_q^\Delta(\iota_q)) + S_q(\sigma \times \text{id})P_{q-1}^\Delta\partial_q(\iota_q) \\ &= \partial_{q+1}P_q^X(\sigma) + P_{q-1}^X\partial_q(\sigma). \end{aligned}$$

Per definir l'operador prisma sobre Δ^q aprofitarem la geometria afí dels símplexs estàndard. Considerarem $\Delta^q \subset \mathbf{R}^{q+1}$ amb vèrtexs $\{e_0, e_1, \dots, e_q\}$, i sobre $\Delta^q \times I \subset \mathbf{R}^{q+1} \times I$ considerem els punts

$$\begin{aligned} a_0 &= (e_0, 0), \quad a_1 = (e_1, 0), \quad \dots, \quad a_q = (e_q, 0) \\ b_0 &= (e_0, 1), \quad b_1 = (e_1, 1), \quad \dots, \quad b_q = (e_q, 1). \end{aligned}$$

La figura 3.6 mostra els punts a_i, b_i , en el cas $q = 2$.

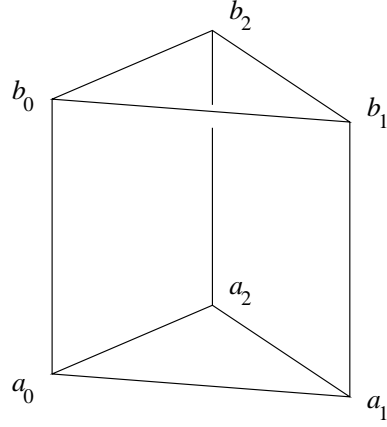
Els símplexs singulars afins de Δ^q i de $\Delta^q \times I$ estan determinats pels seus vèrtexs ordenats, pel que si σ és un q -símplex singular afí el denotarem per $(\sigma(0), \dots, \sigma(q))$. Així per exemple ι_q correspon al símplex (e_0, \dots, e_q) .

Ara es defineix l'operador prisma per

$$P_q(e_0, e_1, \dots, e_q) := \sum_{i=0}^q (-1)^i (a_0, a_1, \dots, a_i, b_i, \dots, b_q).$$

Per exemple, per $q = 1$ tindrem $P_1(e_0, e_1) = (a_0, b_0, b_1) - (a_0, a_1, b_1)$, i per $q = 2$,

$$P_2(e_0, e_1, e_2) = (a_0, b_0, b_1, b_2) - (a_0, a_1, b_1, b_2) + (a_0, a_1, a_2, b_2).$$

Figura 3.6: Prisma sobre Δ^2 .

Provem ara que P verifica la relació d'homotopia

$$(\partial_{q+1}P_q + P_{q-1}\partial_q)(\iota_q) = (S_q(\lambda_1) - S_q(\lambda_0))(\iota_q).$$

D'una banda tenim

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}P_q(e_0, \dots, e_q) &= \partial_{q+1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_q) \right) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_{q+1}(a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_q) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \left(\sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j (a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_i, b_i, \dots, b_q) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \leq j \leq q} (-1)^{j+1} (a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_q) \right) \end{aligned}$$

Els termes $i = j$ apareixen en els dos sumatoris però amb signes diferents i per tant es cancel·len dos a dos, llevat de (b_0, \dots, b_q) i (a_0, \dots, a_q) , pel que podem agrupar la suma anterior en la forma

$$\begin{aligned} &= (b_0, \dots, b_q) + \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_i, b_i, \dots, b_q) + \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j+1} (a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_q) - (a_0, \dots, a_q). \end{aligned}$$

D'altra banda tenim

$$\begin{aligned}
 P_{q-1}\partial_q(e_0, \dots, e_q) &= P_{q-1} \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j (e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_q) \right) \\
 &= \sum_{j=0}^q (-1)^j P_{q-1}(e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_q) \\
 &= \sum_{j=0}^q (-1)^j \left(\sum_{0 \leq i < j} (-1)^i (a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, \widehat{b}_j, \dots, b_q) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j < i \leq q} (-1)^{i-1} (a_0, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_i, b_i, \dots, b_q) \right),
 \end{aligned}$$

pel que, certament, es té

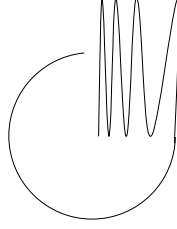
$$\begin{aligned}
 (\partial_{q+1}P_q + P_{q-1}\partial_q)(e_0, \dots, e_q) &= (b_0, \dots, b_q) - (a_0, \dots, a_q) \\
 &= (S_q(\lambda_1) - S_q(\lambda_0))(e_0, \dots, e_q),
 \end{aligned}$$

el que acaba la demostració del teorema. \square

En aquesta demostració del teorema d'invariància homotòpica hem donat una construcció explícita de l'operador prisma.

Problemes

1. Sigui X un espai topològic. Proveu que si A és un retracte de deformació de X , el morfisme $H_*(A) \longrightarrow H_*(X)$ induït per la inclusió $A \hookrightarrow X$ és un isomorfisme.
2. Sigui X l'espai topològic de la figura. Proveu que $H_0(X) \cong \mathbf{Z}$ i $H_p(X) = 0$ per a tot $p > 0$, però que X no és contràtil.
3. Sigui R un anell commutatiu. Proveu la invariància homotòpica de l'homologia singular amb coeficients en R , $H_*(-; R)$.



5 El teorema de les cadenes petites

En aquest apartat provarem el teorema de les cadenes petites, resultat fonamental de l'homologia singular que ens permetrà provar més endavant els teoremes de Mayer-Vietoris i d'excisió. El terme *cadena petita* fa referència al tamany d'una cadena respecte d'un recobriment, com ara precisem.

Definició. Sigui X un espai topològic i $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recobriment de X , i.e. $X = \cup_{i \in I} U_i$. Una cadena $c \in S_p(X)$ es diu que és \mathcal{U} -petita si $c = \sum \lambda_j \sigma_j$, amb $\sigma_j : \Delta^p \rightarrow X$ símplexs singulars p -dimensionals tals que, per a tot j , existeix un i tal que $\sigma_j(\Delta^p) \subseteq U_i$.

Per exemple, sigui $X = \mathbf{S}^n$, i considerem el recobriment format pels hemisferis nord i sud, $E_+^n = \mathbf{S}^n \cap \{x_{n+1} \geq 0\}$, $E_-^n = \mathbf{S}^n \cap \{x_{n+1} \leq 0\}$. Aleshores un paral·lel, és una cadena \mathcal{U} -petita, mentres que un meridià, no ho és.

Si c és una cadena singular \mathcal{U} -petita, llavors ∂c també és \mathcal{U} -petita. En efecte, sigui $c = \sum \lambda_j \sigma_j$, on els símplexs σ_j són \mathcal{U} -petits. Aleshores, $\partial c = \sum \lambda_j \partial \sigma_j$, i $\partial \sigma_j$ és suma (amb signes) dels símplexs $\sigma_j \circ \delta_i : \Delta^{p-1} \xrightarrow{\delta_i} \Delta^p \xrightarrow{\sigma_j} X$, i així, si U és un element de \mathcal{U} que conté la imatge de σ_j , $\sigma_j(\Delta^p) \subseteq U$, aleshores $(\sigma_j \circ \delta_i)(\Delta^{p-1}) \subseteq \sigma_j(\Delta^p) \subseteq U$.

Podem considerar per tant el subcomplex $S_*(\mathcal{U})$ de $S_*(X)$ format per les cadenes \mathcal{U} -petites, i el morfisme d'inclusió

$$(S_*(\mathcal{U}), \partial) \hookrightarrow (S_*(X), \partial),$$

que indueix un morfisme en homologia

$$H_*(S_*(\mathcal{U})) \longrightarrow H_*(X).$$

En general, aquest darrer morfisme no és un isomorfisme. Per exemple, considerem $X = \mathbf{S}^1$ i prenem com a recobriment $X = \cup_{x \in \mathbf{S}^1} \{x\}$. Les cadenes \mathcal{U} -petites són les cadenes de \mathbf{S}^1 amb la topologia discreta i, per tant,

$$H_p(S_*(\mathcal{U})) = H_p(\mathbf{S}^1_{\text{dis}}) \cong \begin{cases} \oplus_{x \in \mathbf{S}^1} \mathbf{Z}, & \text{si } p = 0, \\ 0, & \text{si } p \neq 0, \end{cases}$$

mentres que amb la topologia usual hem vist, com aplicació del teorema de Poincaré, 3.5, que es verifica

$$H_p(\mathbf{S}^1) \cong \mathbf{Z}, \text{ si } p = 0, 1.$$

Però, en el següent teorema, es dona una condició suficient per tal de que el morfisme anterior sigui un isomorfisme.

Teorema 5.1 (de les cadenes petites). *Sigui X un espai topològic, i \mathcal{U} un recobriment de X tal que $X = \cup_{i \in I} \overset{\circ}{U}_i$, aleshores el morfisme*

$$H_*(S_*(\mathcal{U})) \longrightarrow H_*(X)$$

és un isomorfisme.

Com a cas particular destacarem:

Corollari 5.2. *Sigui \mathcal{U} un recobriment de X per oberts, aleshores el morfisme*

$$H_*(S_*(\mathcal{U})) \longrightarrow H_*(X),$$

és un isomorfisme.

□

La idea de la demostració del teorema de les cadenes petites consisteix en provar que, per un procés de subdivisió baricèntrica anàleg al desenvolupat al capítol 1, tota cadena singular de X és homòloga a una cadena \mathcal{U} -petita. Per exemple, en el cas del meridià de \mathbf{S}^n de l'exemple del principi d'aquest paràgraf, podem subdividir-lo com una cadena formada per la suma de dos arcs, cadascun d'ells corresponent al tall amb els semiespais de \mathbf{R}^{n+1} definits per $x_{n+1} \geq 0$ i $x_{n+1} \leq 0$, que és una cadena $\{E_+^n, E_-^n\}$ -petita.

Per a dur a terme aquesta idea hem d'adaptar prèviament els conceptes i resultats de la subdivisió baricèntrica del capítol 1 a l'homologia singular.

1 . *Con d'un símplex singular afí.*

Segui $\sigma : \Delta^p \longrightarrow \mathbf{R}^n$ un p -símplex singular afí, $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_p)$, $a_i = \sigma(e_i)$. Si b és un punt de \mathbf{R}^n , el *con de vèrtex* b sobre σ es defineix com el $(p+1)$ -símplex singular afí determinat per

$$b * \sigma := (b, a_0, a_1, \dots, a_p) .$$

Si $c = \sum_{i=1}^r \lambda_i \sigma_i$, $\lambda_i \in \mathbf{Z}$, és una p -cadena singular en la que els símplexs σ_i són afins, definim

$$b * c := \sum \lambda_i (b * \sigma_i) .$$

Lema 5.3. *Es verifica:*

1. $\partial(b * c) = c - (\sum \lambda_i) b$, si $c = \sum \lambda_i \sigma_i$ és 0-dimensional,
2. $\partial(b * c) = c - b * \partial c$, si c és una cadena p -dimensional, $p > 0$.

Demostració. Si c és una cadena 0-dimensional, $c = \sum \lambda_i (a_i)$, així

$$\begin{aligned} \partial(b * \sum \lambda_i \sigma_i) &= \partial(\sum \lambda_i b * \sigma_i) = \sum \lambda_i \partial(b * \sigma_i) \\ &= \sum \lambda_i \partial(b, a_i) = \sum \lambda_i ((a_i) - (b)) \\ &= c - (\sum \lambda_i) b . \end{aligned}$$

Considerem ara el cas p -dimensional, amb $p > 0$. Com ambdues parts de la igualtat són lineals en c , és suficient demostrar-la per als p -símplexs. Si $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$, es té

$$\begin{aligned} \partial(b * \sigma) &= \partial(b, a_0, a_1, \dots, a_p) \\ &= (a_0, a_1, \dots, a_p) - \sum_{i=0}^p (-1)^i (b, a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p) \\ &= \sigma - b * \partial \sigma . \end{aligned}$$

□

2. *Operador de subdivisió baricèntrica.*

La subdivisió baricèntrica d'un símplex afí introduïda al capítol 1 permet escriure un tal símplex com una cadena formada per símplexs de talla tant petita com es vulgui, 1.6.3. El resultat següent trasllada aquesta construcció a l'homologia singular.

Proposició 5.4. *Per a tot espai topològic X , existeix un morfisme de complexos*

$$sd_*^X : S_*(X) \longrightarrow S_*(X),$$

i morfismes

$$T_p^X : S_p(X) \longrightarrow S_{p+1}(X), \quad p \geq 0,$$

que verifiquen:

1. sd_*^X i T_p^X , $p \geq 0$, són naturals en X , és a dir, si $f : X \longrightarrow Y$ és una aplicació contínua, aleshores els diagrames

$$\begin{array}{ccc} S_*(X) & \xrightarrow{sd_*^X} & S_*(X) \\ S_*(f) \downarrow & & \downarrow S_*(f) \\ S_*(Y) & \xrightarrow{sd_*^Y} & S_*(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S_p(X) & \xrightarrow{T_p^X} & S_{p+1}(X) \\ S_p(f) \downarrow & & \downarrow S_{p+1}(f) \\ S_p(Y) & \xrightarrow{T_p^Y} & S_{p+1}(Y) \end{array}$$

són commutatius.

2. Els morfismes T_p^X , $p \geq 0$, són una homotopia entre els morfismes de complexos $id_{S_*(X)}$ i sd_*^X .

3. Si \mathcal{U} és un recobriment de X tal que $X = \cup_{U_i \in \mathcal{U}} \overset{\circ}{U}_i$, $i \in S_p(X)$, aleshores existeix un n tal que $sd^n z \in S_p(\mathcal{U})$.

Al morfisme sd_*^X l'anomenarem l'operador de subdivisió baricèntrica.

Demostració. Començarem definint l'operador sd_p^X , $p \geq 0$, i comprovarem que és un morfisme de complexos, inductivament sobre p . Com en la demostració del teorema d'invariància homotòpica, 4.1, podem usar la naturalitat de sd_p^X i assegurar que és suficient definir

$$\begin{aligned} sd_p^{\Delta^p} : S_p(\Delta^p) &\longrightarrow S_p(\Delta^p), \\ \iota_p &\longmapsto sd_p(\iota_p) \end{aligned}$$

per tot $p \geq 0$. En efecte, si σ és un p -simplex singular de X , el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} S_*(\Delta^p) & \xrightarrow{sd_*^{\Delta^p}} & S_*(\Delta^p) \\ S_*(\sigma) \downarrow & & \downarrow S_*(\sigma) \\ S_*(Y) & \xrightarrow{sd_*^X} & S_*(X), \end{array}$$

obliga aleshores a definir

$$sd_p^X(\sigma) := S_p(\sigma_*)(sd_p^{\Delta^p}(\iota_p)) ,$$

on ι_p és el p -simplex singular identitat $\iota_p : \Delta^p \longrightarrow \Delta^p$.

Segui b_p el baricentre de ι_p , és a dir,

$$b_p = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p e_i .$$

Es defineix $sd_p^{\Delta^p}(\iota_p)$ inductivament segons

$$sd_p^{\Delta^p} \iota_p := \begin{cases} \iota_p, & \text{si } p = 0 , \\ b_p * sd_{p-1}^{\Delta^{p-1}} \partial \iota_p, & \text{si } p > 0 , \end{cases}$$

que és una altra forma d'expressar la subdivisió baricèntrica del capítol 1. Per exemple, per $p = 1$ trobem

$$\begin{aligned} sd_1(\iota_1) &= b_1 * sd_0[(e_1) - (e_0)] = b_1 * [(e_1) - (e_0)] \\ &= b_1 * (e_1) - b_1 * (e_0) = (b_1, e_1) - (b_1, e_0) . \end{aligned}$$

Provem per inducció sobre p que es verifica

$$sd_{p-1}^X \partial_p \sigma = \partial_p sd_p^X \sigma ,$$

per a tot p -simplex σ d'un espai topològic qualsevol X . Per $p = 0$ el resultat és trivial, ja que $\partial_0 = 0$. Suposem per hipòtesi d'inducció que hem provat

$$sd_{q-1}^X \partial_q \sigma = \partial_q sd_q^X \sigma ,$$

per a tot q -simplex σ d'un espai topològic qualsevol X , si $q < p$. Comencem provant que $sd_{p-1} \partial_p \iota_p = \partial_p sd_p \iota_p$. Es té

$$\begin{aligned} \partial_p sd_p \iota_p &= \partial_p (b_p * sd_{p-1} \partial_p \iota_p) \\ &= sd_{p-1} \partial_p \iota_p - b_p * \partial_{p-1} sd_{p-1} \partial_p \iota_p , && \text{per 5.3 ,} \\ &= sd_{p-1} \partial_p \iota_p - b_p * sd_{p-2} \partial_{p-1} \partial_p \sigma_p , && \text{per hipòtesi d'inducció ,} \\ &= sd_{p-1} \partial_p \iota_p . \end{aligned}$$

Com hem definit sd_p^X per la igualtat $sd_p^X(\sigma) = S_p(\sigma)(sd_p^{\Delta^p}(\iota_p))$, observem que si σ és un símplex afí, $sd_p^{\Delta^p}(\sigma)$ també és afí, i es verifica

$$\begin{aligned} sd_{p-1}^X(\partial_p \sigma) &= sd_{p-1}^X(\partial_p S_p(\sigma)(\iota_p)) = sd_{p-1}^X S_{p-1}(\sigma)(\partial_p \iota_p) \\ &= S_{p-1}(\sigma) sd_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p \iota_p) = S_{p-1}(\sigma) \partial_p sd_p^{\Delta^p}(\iota_p) \\ &= \partial_p S_p(\sigma) sd_p^{\Delta^p}(\iota_p) = \partial_p sd_p^X(\sigma). \end{aligned}$$

Respecte els morfismes T_p^X , una vegada més per la naturalitat imposada als operadors T_p^X , $p \geq 0$, i inducció, és suficient definir $T_p^{\Delta^p}(\iota_p)$, $\iota_p \in S_p(\Delta^p)$, tal que

$$T_{p-1} \partial_p(\iota_p) + \partial_{p+1} T_p(\iota_p) = \text{id}_p(\iota_p) - sd_p(\iota_p),$$

on, per simplificar les notacions hem escrit T_p en lloc de $T_p^{\Delta^p}$.

Prendrem

$$\begin{aligned} T_0 \iota_0 &= 0, \\ T_p \iota_p &= b_p * (\iota_p - sd \iota_p - T_{p-1} \partial \iota_p). \end{aligned}$$

Provem que es verifica $(\partial_{p+1} T_p + T_{p-1} \partial_p)(\iota_p) = (\text{id}_p - sd_p)(\iota_p)$. Per $p = 0$, els dos costats de la igualtat són nuls:

$$\begin{aligned} \partial_1 T_0 \iota_0 + T_{-1} \partial_0 \iota_0 &= 0, \\ \text{id}_0 \iota_0 - sd_0 \iota_0 &= \iota_0 - \iota_0 = 0. \end{aligned}$$

Sigui $p > 0$ i suposem-ho provat per a $p - 1$. Usant el càlcul de la vora d'un con, 5.3, tindrem

$$\begin{aligned} \partial T \iota_p &= \partial(b_p * (\iota_p - sd \iota_p - T \partial \iota_p)) \\ &= (\iota_p - sd \iota_p - T \partial \iota_p) - b_p * \partial(\iota_p - sd \iota_p - T \partial \iota_p) \\ &= (\iota_p - sd \iota_p - T \partial \iota_p) - b_p * (\partial \iota_p - sd \partial \iota_p - \partial T \partial \iota_p). \end{aligned}$$

Com per hipòtesi d'inducció

$$\partial T \partial \iota_p = \partial \iota_p - sd \partial \iota_p - T \partial \partial \iota_p,$$

substituint en la igualtat anterior s'acaba la prova de 1 i 2.

Provem 3: la cadena singular z és igual a una suma finita, $z = \sum \lambda_j \sigma_j$, on els σ_j són p -símplexs singulars de X . Com l'operador de subdivisió baricèntrica és lineal, és suficient provar que per cada símplex σ_j , existeix un

enter n_j tal que $sd^{n_j}\sigma_j$ és una cadena \mathcal{U} -petita. Per hipòtesi, els interiors dels elements U_i de \mathcal{U} formen un recobriment de X , i per tant podem considerar el recobriment de Δ^p definit per les antiimatges d'aquests interiors per σ_j :

$$\Delta^p = \cup_{i \in I} (\sigma_j^{-1}(U_i)^\circ) .$$

Com que Δ^p és un espai mètric compacte, aquest recobriment tindrà un nombre de Lebesgue associat, que denotarem per ε_L^j , 1.7.3. Per n prou gran es té

$$\|sd^n \Delta^p\| \leq \left(\frac{p}{p+1} \right)^n \| \Delta^p \| < \varepsilon_L^j,$$

segons el lema de Lebesgue, i per tant tots els símplexs que apareixen en $sd^n \Delta^p$ estan continguts en algun dels $\sigma_j^{-1}(U_i)$, és a dir, $sd^n \sigma_j$ és \mathcal{U} -petita. \square

Com a conseqüència de l'existència de l'homotopia T entre la identitat i l'operador de subdivisió baricèntrica, de 2.5.1 resulta

Corollari 5.5. *Sigui X un espai topològic. Aleshores l'operador de subdivisió baricèntrica induïx la identitat en homologia,*

$$sd_* = id_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(X) .$$

3. Demostració del teorema de les cadenes petites.

La inclusió $S_*(\mathcal{U}) \hookrightarrow S_*(X)$ induïx per pas al quocient una successió exacta de complexs

$$0 \longrightarrow S_*(\mathcal{U}) \longrightarrow S_*(X) \longrightarrow S_*(X)/S_*(\mathcal{U}) \longrightarrow 0$$

que alhora, induïx una successió exacta llarga d'homologia

$$\cdots \longrightarrow H_{p+1} \left(\frac{S_*(X)}{S_*(\mathcal{U})} \right) \longrightarrow H_p(S_*(\mathcal{U})) \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow H_p \left(\frac{S_*(X)}{S_*(\mathcal{U})} \right) \longrightarrow \cdots$$

pel que és suficient provar que $H_p(S_*(X)/S_*(\mathcal{U})) = 0$, per a tot $p \geq 0$.

Sigui $[z] \in H_p(S_*(X)/S_*(\mathcal{U}))$ una classe d'homologia representada per $z \in S_p(X)$. Observem, en primer lloc, que z i sdz són cicles homòlegs del

complex $S_*(X)/S_*(\mathcal{U})$. En efecte, com z és un cicle, verifica $\partial z \in S_{p-1}(\mathcal{U})$, és a dir, la cadena ∂z és una cadena \mathcal{U} -petita. Aplicant a z la igualtat

$$id_p - sd_p = \partial_{p+1}T_p + T_{p-1}\partial_p.$$

obtinguda en el paràgraf anterior, trobem que $z - sdz = \partial Tz + T\partial z$, com elements de $S_*(X)$. Ara, com que T és una homotopia natural, la inclusió de U_i en X dona lloc a un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} S_*(U_i) & \xrightarrow{T^{U_i}} & S_{*+1}(U_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_*(X) & \xrightarrow{T^X} & S_{*+1}(X) \end{array}$$

el que mostra que $T\partial z$ també és \mathcal{U} -petita. Per tant, $z - sdz = \partial Tz$ a $S_*(X)/S_*(\mathcal{U})$ i passant a homologia tindrem $[z] - [sdz] = 0$ en $H_p(S_*(X)/S_*(\mathcal{U}))$. En definitiva,

$$[z] = [sdz] \in H_p(S_*(X)/S_*(\mathcal{U})).$$

Així, per inducció es verifica

$$[z] = [sdz] = [sd^2z] = \dots = [sd^nz] \quad \text{a} \quad H_p(S_*(X)/S_*(\mathcal{U})).$$

Però, per 5.4, existeix un n tal que sd^nz és \mathcal{U} -petita, i per tant és igual a zero en $H_p(S_*(X)/S_*(\mathcal{U}))$. \square

En les condicions del teorema de les cadenes petites, el morfisme de complexs $S_*(\mathcal{U}) \rightarrow S_*(X)$ no solament indueix un isomorfisme en homologia sino que, de fet, és una equivalència homotòpica de complexs. La versió que hem donat serà suficient per les necessitats d'aquest llibre, per la versió més general del resultat feu el problema 1, o vegeu [26].

Problemes

1. Proveu que, amb les hipòtesis de 5.1, el morfisme de complexs $S_*(\mathcal{U}) \rightarrow S_*(X)$ és una equivalència homotòpica de complexs.
2. Proveu el teorema de les cadenes petites per a l'homologia singular amb coeficients en un anell commutatiu R .

6 La successió exacta de Mayer-Vietoris

El teorema de Mayer-Vietoris que enunciem a continuació és el resultat anàleg, en homologia singular, al corresponent teorema de l'homologia simplicial, 2.8.3. Aquest resultat, juntament amb la invariància homotòpica de l'homologia singular, ens permetrà calcular els grups d'homologia de les esferes, i donar les primeres aplicacions geomètriques de l'homologia singular.

Sigui X un espai topològic, i U, V dos subconjunts de X tals que $X = \overset{\circ}{U} \cup \overset{\circ}{V}$. Sigui π el morfisme de complexs

$$\begin{aligned} \pi : S_*(U) \oplus S_*(V) &\longrightarrow S_*(X) \\ (c_1, c_2) &\longmapsto c_1 - c_2 \end{aligned}$$

i notem per i el morfisme induït per la inclusió

$$\begin{aligned} i : S_*(U \cap V) &\longrightarrow S_*(U) \oplus S_*(V), \\ c &\longmapsto (c, c). \end{aligned}$$

Teorema 6.1. *Amb les notacions anteriors, existeix un morfisme $\partial_{U,V} : H_p(X) \longrightarrow H_{p-1}(U \cap V)$, per a tot $p \geq 0$, tal que la successió*

$$\cdots \longrightarrow H_p(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{\pi_*} H_p(X) \xrightarrow{\partial_{U,V}} H_{p-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

és exacta.

Aquesta successió exacta és natural en U, V , i s'anomena la successió exacta de Mayer-Vietoris del recobriment $\{U, V\}$.

Demostració. Sigui \mathcal{U} el recobriment de X format per U i V . La imatge del morfisme

$$\begin{aligned} \pi : S_*(U) \oplus S_*(V) &\longrightarrow S_*(X) \\ (c_1, c_2) &\longmapsto c_1 - c_2 \end{aligned}$$

és exactament $S_*(\mathcal{U})$, mentre que el seu nucli està format per les parelles $(c_1, c_2) \in S_*(U) \oplus S_*(V)$ tals que $c_1 = c_2$, i per tant, $c_1 = c_2 \in S_*(U \cap V)$. És a dir, es té la successió exacta de complexs

$$0 \longrightarrow S_*(U \cap V) \longrightarrow S_*(U) \oplus S_*(V) \longrightarrow S_*(\mathcal{U}) \longrightarrow 0.$$

Prenent la successió exacta llarga d'homologia, tenim

$$\cdots \longrightarrow H_p(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{\pi'_*} H_p(S_*(\mathcal{U})) \xrightarrow{\partial'_{U,V}} H_{p-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

Però, pel teorema de les cadenes petites aplicat al recobriment \mathcal{U} , es té un isomorfisme $j_* : H_*(S_*(\mathcal{U})) \xrightarrow{\sim} H_*(X)$, induït per la inclusió del complex $S_*(\mathcal{U})$ en el complex $S_*(X)$. Així, $j_*\pi'_* = \pi_*$, i per tant podem substituir $H_*(S_*(\mathcal{U}))$ per $H_*(X)$ en la successió exacta anterior, π'_* per π_* , i finalment definir $\partial_{U,V} = \partial'_{U,V}(j_*^{-1})$, amb el que es verifica l'enunciat del teorema. \square

Observem que la successió de Mayer-Vietoris depèn de l'ordre del recobriment $\{U, V\}$ de X ja que aquest ordre determina el morfisme

$$\pi_* : S_*(U) \oplus S_*(V) \longrightarrow S_*(X) \longrightarrow 0.$$

Si invertim l'ordre, aleshores el morfisme resultant

$$-\pi : S_*(V) \oplus S_*(U) \longrightarrow S_*(X),$$

és l'oposat al considerat pel recobriment \mathcal{U} , així és immediat completar el teorema de Mayer-Vietoris en la forma

Proposició 6.2. *Si en el teorema anterior invertim l'ordre del recobriment, aleshores $\partial_{V,U} = -\partial_{U,V}$. Així, la successió exacta de Mayer-Vietoris que li correspon és*

$$\cdots \longrightarrow H_p(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{-\pi_*} H_p(X) \xrightarrow{-\partial_{U,V}} H_{p-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

\square

Homologia de les esferes. Com aplicació de la successió exacta de Mayer-Vietoris calcularem l'homologia de les esferes.

Considerem en primer lloc la circumferència \mathbf{S}^1 . Siguin A, B dos punts diferents de \mathbf{S}^1 , i descomposem \mathbf{S}^1 en la forma

$$\mathbf{S}^1 = (\mathbf{S}^1 - A) \cup (\mathbf{S}^1 - B).$$

Aleshores, si prenem

$$\begin{aligned} U &= \mathbf{S}^1 - A \cong \mathbf{R} , \\ V &= \mathbf{S}^1 - B \cong \mathbf{R} , \end{aligned}$$

tindrem

$$U \cap V \cong \mathbf{R} \sqcup \mathbf{R} .$$

Com \mathbf{R} és contràctil, el teorema d'invariància homotòpica i el càlcul de l'homologia d'un punt, 1.2, asseguren que es té

$$H_p(\mathbf{R}) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } p = 0 , \\ 0, & \text{si } p > 0 , \end{cases}$$

i, per tant, de la successió de Mayer-Vietoris resulta $H_p(\mathbf{S}^1) = 0$, per $p \geq 2$, mentres que com $H_0(\mathbf{S}^1) \cong \mathbf{Z}$, per 2.1, resulta, també de la successió de Mayer-Vietoris, $H_1(\mathbf{S}^1) = \mathbf{Z}$.

Aquest càlcul és el primer pas de la inducció que ens permet calcular l'homologia de les esferes.

Teorema 6.3. *L'homologia singular de l'esfera n -dimensional, $n \geq 1$, és*

$$H_p(\mathbf{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } p = 0, n , \\ 0, & \text{si } p \neq 0, n . \end{cases}$$

Demostració. Ja hem provat el teorema per $n = 1$. Suposem doncs que $n \geq 2$, que el resultat és cert per \mathbf{S}^{n-1} , i demostrem-lo per \mathbf{S}^n . Usarem el mateix tipus de raonament que per a la circumferència \mathbf{S}^1 .

Siguin A i B dos punts diferents de \mathbf{S}^n i prenem els oberts

$$\begin{aligned} U &= \mathbf{S}^n - A \cong \mathbf{R}^n , \\ V &= \mathbf{S}^n - B \cong \mathbf{R}^n . \end{aligned}$$

Tindrem que $\mathbf{S}^n = U \cup V$ i $U \cap V = \mathbf{S}^n - \{A, B\}$, que és del tipus d'homotopia de \mathbf{S}^{n-1} . Com U i V són contràctils, $H_p(U) = H_p(V) = 0$ per a $p \geq 1$, i així, la successió exacta llarga de Mayer-Vietoris es redueix, per $p > 1$, a les successions exactes

$$0 \longrightarrow H_p(\mathbf{S}^n) \longrightarrow H_{p-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \longrightarrow 0 ,$$

d'on es dedueix el resultat, per $p > 1$, usant la hipòtesi d'inducció. Per $p = 1$ el resultat ja és conegut, per comparació amb el grup fonamental, tot i que també podem deduir-lo de la successió de Mayer-Vietoris, ja que aquesta acaba en la forma

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbf{S}^n) \longrightarrow H_0(\mathbf{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_0(\mathbf{R}^n) \oplus H_0(\mathbf{R}^n) \longrightarrow H_0(\mathbf{S}^n) \longrightarrow 0,$$

i com i_* és un morfisme injectiu, per 2.2, se segueix que $H_1(\mathbf{S}^n) = 0$, el que conclou la demostració del teorema. \square

Corollari 6.4. *L'esfera n -dimensional \mathbf{S}^n , $n \geq 1$, no és contràctil.* \square

Corollari 6.5. *Si $n \neq m$, les esferes \mathbf{S}^n i \mathbf{S}^m no són homeomorfes.*

Demostració. Si fossin homeomorfes en resultaria un isomorfisme

$$\mathbf{Z} \cong H_n(\mathbf{S}^n) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbf{S}^m) = 0,$$

el que és absurd. \square

Observem que \mathbf{S}^2 i \mathbf{S}^3 no són homeomorfes, mentre que $\pi_1(\mathbf{S}^2) \cong \pi_1(\mathbf{S}^3) \cong 0$, és a dir, el grup fonamental no permet distingir-les. El raonament anterior prova, de fet, que \mathbf{S}^n i \mathbf{S}^m no tenen el mateix tipus d'homotopia si $n \neq m$.

Corollari 6.6. *Si $n \neq m$, els espais \mathbf{R}^n i \mathbf{R}^m no són homeomorfs.*

Demostració. Si fossin homeomorfs, les seves compactificacions d'Alexandroff, les esferes \mathbf{S}^n i \mathbf{S}^m , ho serien, el que és contradictori amb 6.5. \square

També podem deduir de 6.3 el següent teorema de no retracció. Notem \mathbf{B}^{n+1} la bola unitat tancada de \mathbf{R}^{n+1} .

Corollari 6.7. *L'esfera \mathbf{S}^n no és un retracte de la bola \mathbf{B}^{n+1} .*

Demostració. Recordem que perquè \mathbf{S}^n sigui un retracte de \mathbf{B}^{n+1} ha d'existir una aplicació contínua $r : \mathbf{B}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{S}^n$ tal que la composició $r|_{\mathbf{S}^n} : \mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbf{B}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{S}^n$, sigui la identitat de \mathbf{S}^n . Si existís una tal retracció r , llavors en passar a l'homologia n -èssima, en resultaria una factorització de $\text{id}_{\mathbf{Z}}$ de la forma

$$\mathbf{Z} \cong H_n(\mathbf{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbf{B}^{n+1}) = 0 \longrightarrow H_n(\mathbf{S}^n) \cong \mathbf{Z},$$

el que és absurd. \square

Aquest resultat té com a conseqüència el teorema del punt fix de Brouwer, demostrat per aquest matemàtic holandès l'any 1912.

Teorema 6.8 (del punt fix de Brouwer). *Sigui $f : \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{B}^n$ una aplicació contínua, aleshores f té almenys un punt fix, és a dir, existeix un punt $x \in \mathbf{B}^n$ tal que $f(x) = x$.*

Demostració. Per reducció a l'absurd. Suposem que f no tingues cap punt fix, és a dir, que $f(x) \neq x$, per a tot $x \in \mathbf{B}^n$. Llavors podriem definir una aplicació $g : \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{S}^{n-1}$, de la forma següent: com $f(x) \neq x$, aquests dos punts determinen una recta, i podem prendre com $g(x)$ la intersecció amb \mathbf{S}^{n-1} de la semirecta d'origen $f(x)$ i que passa per x (vegeu la figura ??). Però aleshores, com g és contínua i $g|_{\mathbf{S}^{n-1}} = \text{id}_{\mathbf{S}^{n-1}}$, l'aplicació g seria una retracció de \mathbf{B}^n sobre \mathbf{S}^{n-1} , el que és absurd.

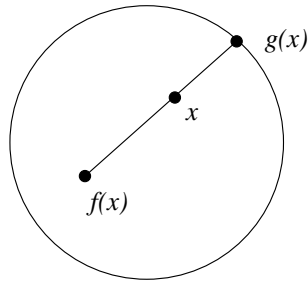


Figura 3.7: La retracció g de la bola sobre l'esfera.

Podem comprovar la continuïtat de g de la forma següent: analíticament la definició de g és $g(x) = x + \lambda(x)(x - f(x))$, amb $\lambda : \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{R}^+$, tal que $\|g(x)\| = 1$. Així, com

$$\langle g(x), g(x) \rangle = 1,$$

la funció $\lambda(x)$ verificarà l'equació

$$\langle x + \lambda(x)(x - f(x)), x + \lambda(x)(x - f(x)) \rangle = 1,$$

i serà l'arrel positiva de

$$\|x\|^2 + 2\lambda(x) \langle x, x - f(x) \rangle + \lambda(x)^2 \|x - f(x)\|^2 = 1,$$

el que prova que, efectivament, $\lambda(x)$, i per tant $g(x)$, és contínua. \square

Problemes

1. Sigui K un complex simplicial i K_1, K_2 , dos subcomplexos de K tals que $|K| = |K_1| \cup |K_2|$. Utilitzeu que tot subpolíedre és retracte de deformació d'un entorn (vegeu el problema 4 de l'apartat 1.6) per demostrar que existeix una successió exacta, en homologia singular,

$$H_p(|K_1| \cap |K_2|) \longrightarrow H_p(|K_1|) \oplus H_p(|K_2|) \longrightarrow H_p(|K|) \longrightarrow H_{p-1}(|K_1| \cap |K_2|)$$

2. Calculeu l'homologia singular dels espais següents:
 - (a) m boles n -dimensionals amb les fronteres identificades.
 - (b) la reunió $\mathbf{S}^n \cup \{x \in \mathbf{R}^{n+1} ; x_{n+1} = 0\}$.
 - (c) \mathbf{R}^n menys un nombre finit de punts: $\mathbf{R}^n - \{x_1, \dots, x_m\}$.
3. Sigui X l'espai anomenat arracada hawaïana, 1.4.1. Proveu que X no és localment contràtil.
4. Sigui X un espai topològic i U_1, U_2, \dots, U_m , un recobriment obert de X tal que les interseccions no buides d'oberts del recobriment són contràtils. Proveu que $H_p(X) = 0$, per tot $p \geq m - 1$.
5. Sigui X un espai topològic. Proveu que $H_p(X \times \mathbf{S}^n) \cong H_{p-n}(X) \oplus H_p(X)$, per $p \geq 0$. Apliqueu-lo al càlcul de l'homologia del tor n -dimensional $\mathbf{T}^n = \mathbf{S}^1 \times \dots \times \mathbf{S}^1$.
6. Sigui A una matriu $n \times n$ amb coeficients reals positius, $a_{ij} \geq 0$. Proveu que existeix un $\lambda \geq 0$ i un $x \in \mathbf{R}^n$, amb $x_i \geq 0$, tals que $Ax = \lambda x$.
7. Un espai topològic X es diu que té la *propietat del punt fix* (abreujadament PPF), si tota aplicació contínua $f : X \longrightarrow X$ té un punt fix.
 - (a) Proveu que si X té la PPF i A és un retracte de X , aleshores A té la PPF.
 - (b) Sigui X un espai mètric compacte tal que, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una aplicació contínua $f : X \longrightarrow X$ que verifica $d(x, f(x)) < \varepsilon$, per a tot $x \in X$, i $f(X)$ té la PPF. Proveu que X té la PPF.

(c) Sigui $I^{\mathbf{N}}$ el *cub de Hilbert*, és a dir, l'espai de successions $a = \{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, amb $0 \leq a_n \leq 1$, amb la mètrica

$$d(a, b) = \sqrt{\sum \frac{1}{2^n} (a_n - b_n)^2}.$$

Proveu que $I^{\mathbf{N}}$ té la PPF.

8. Sigui R un anell commutatiu. Sigui X un espai topològic, i U, V , dos subespais de X tals que $X = \overset{\circ}{U} \cup \overset{\circ}{V}$. Proveu que existeix una successió exacta de Mayer-Vietoris amb coeficients en R ,

$$H_p(U \cap V; R) \xrightarrow{i} H_p(U; R) \oplus H_p(V; R) \xrightarrow{\pi} H_p(X; R) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(U \cap V; R)$$

Apliqueu-ho per determinar l'homologia de l'esfera \mathbf{S}^n amb coeficients en R .

7 Homologia relativa singular

En aquest apartat estudiarem les parelles d'espais topològics formades per un espai topològic X i un subespai A de X , direm aleshores que (X, A) és un parell topològic. Si (X, A) i (Y, B) són parells topològics, una aplicació contínua de parells $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ és una aplicació contínua $f : X \rightarrow Y$, tal que $f(A) \subset B$. És immediat comprovar que els parells topològics i les aplicacions de parells formen una categoria, que notarem **Top**².

L'aplicació d'inclusió $i : A \hookrightarrow X$ és una aplicació contínua i, per tant, indueix un morfisme de complexs de cadenes singulars

$$\begin{array}{ccc} S_*(i) : S_*(A) & \longrightarrow & S_*(X) \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \end{array}$$

que és injectiu.

Definició. El *complex de cadenes singulars relatives del parell* (X, A) , que denotarem per $S_*(X, A)$, és el complex quocient $S_*(X)/S_*(A)$, és a dir,

$$S_p(X, A) := S_p(X)/S_p(A),$$

per a tot $p \geq 0$.

Es defineix l'*homologia relativa del parell* (X, A) , que denotarem per $H_*(X, A)$, com l'homologia del complex $S_*(X, A)$, és a dir,

$$H_*(X, A) := H_*(S_*(X, A)) = H_*(S_*(X)/S_*(A)).$$

Els grups $S_p(X, A)$ són grups abelians lliures, ja que són isomorfs als subgrups de $S_p(X)$ generats per tots els p -símplexs singulars no continguts en A .

Proposició 7.1. *Siguin (X, A) , (Y, B) parells topològics i $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ una aplicació contínua de parells. Aleshores f induïx un morfisme natural en homologia relativa*

$$H_*(f) : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B),$$

tal que, si σ és un cicle relatiu, aleshores $H_*(f)(\sigma) = [S_*(f)(\sigma)]$.

L'homologia relativa singular defineix un functor

$$H_* : \mathbf{Top}^2 \rightarrow \mathbf{Ab}.$$

Demostració. Per definició

$$\begin{aligned} S_*(X, A) &:= S_*(X)/S_*(A) \\ S_*(Y, B) &:= S_*(Y)/S_*(B). \end{aligned}$$

L'aplicació f induïx morfismes de complexs que, per la functorialitat de S_* , fan commutatiu el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_*(A) & \xrightarrow{S_*(f)} & S_*(B) \\ S_*(i) \downarrow & & \downarrow S_*(i) \\ S_*(X) & \xrightarrow{S_*(f)} & S_*(Y). \end{array}$$

Així, per pas al quocient resulta el diagrama commutatiu de successions exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(A) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & S_*^A(f) \downarrow & & S_*^X(f) \downarrow & & S_*^{(X, A)}(f) \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_*(B) & \longrightarrow & S_*(Y) & \longrightarrow & S_*(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

El morfisme de complexs $S_*^{(X,A)}(f)$ indueix el morfisme en homologia buscat.

La functorialitat és immediata a partir de la functorialitat de $S_*^{(X,A)}$. \square

Teorema 7.2. *Si (X, A) és un parell topològic, llavors hi ha una successió exacta llarga*

$$\dots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{\pi_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \longrightarrow \dots$$

que s'anomena la successió exacta d'homologia relativa del parell (X, A) . Aquesta successió exacta és natural en el parell (X, A) , és a dir, si $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ és una aplicació contínua de parells, aleshores el diagrama de successions exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_p(A) & \xrightarrow{i_*} & H_p(X) & \xrightarrow{\pi_*} & H_p(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_p(B) & \xrightarrow{j_*} & H_p(Y) & \xrightarrow{\pi'_*} & H_p(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

és commutatiu.

Demostració. Per la definició del complex singular relatiu $S_*(X, A)$, tenim la successió exacta de complexs

$$0 \longrightarrow S_*(A) \xrightarrow{S_*(i)} S_*(X) \xrightarrow{S_*(\pi)} S_*(X, A) \longrightarrow 0,$$

i, per 2.7.3, s'obté la successió exacta llarga d'homologia associada

$$\dots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{\pi'_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \longrightarrow \dots$$

Si $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ és una aplicació contínua de parells, aleshores el diagrama de successions exactes de complexs

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(A) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_*(B) & \longrightarrow & S_*(Y) & \longrightarrow & S_*(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

és commutatiu, així de 2.7.4 en resulta la naturalitat de la successió exacta d'un parell. \square

Aplicant el lema dels cinc i la invariància homotòpica de l'homologia singular, 4.1, resulta el següent teorema d'invariància de l'homologia relativa singular.

Corollari 7.3. *Sigui $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ una aplicació contínua de parells tal que $f : X \longrightarrow Y$ i $f|_A : A \longrightarrow B$ són equivalències homotòpiques. Aleshores*

$$f_* : H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B) ,$$

és un isomorfisme. □

Exemples. 1. Sigui X el cilindre $\mathbf{S}^1 \times I$ i A la circumferència $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$. Com A és un retracte de deformació de X , es tenen els isomorfismes (vegeu el problema 1 de l'apartat 4)

$$H_*(X) \cong H_*(A) \cong H_*(\mathbf{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } p = 0, 1, \\ 0, & \text{si } p \neq 0, 1, \end{cases}$$

i per tant la successió exacta d'homologia relativa és

$$\cdots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \longrightarrow H_p(X, A) \longrightarrow H_{p-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

el que permet concloure que $H_p(X, A) = 0$, per a tot p .

En general, el mateix argument prova que si A és un retracte de deformació de X aleshores $H_*(X, A) = 0$, vegeu el problema 1.

2. Per al mateix espai $X = \mathbf{S}^1 \times I$, considerem ara el subespai $A = \mathbf{S}^1 \times \{0\} \cup \mathbf{S}^1 \times \{1\}$. En aquest cas tindrem $A \cong \mathbf{S}^1 \sqcup \mathbf{S}^1$, i per tant

$$H_p(A) \cong H_p(\mathbf{S}^1) \oplus H_p(\mathbf{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}^2, & \text{si } p = 0, 1, \\ 0, & \text{si } p \neq 0, 1, \end{cases}$$

i de la successió exacta del parell (X, A) en resulta

$$\begin{aligned} H_0(X, A) &= 0, \\ H_1(X, A) &\cong \mathbf{Z}, \\ H_2(X, A) &\cong \mathbf{Z}, \\ H_p(X, A) &= 0, \quad \text{si } p > 0. \end{aligned}$$

Podem identificar uns elements de $H_1(X, A)$ i de $H_2(X, A)$. En efecte, si σ és una generatriu del cilindre llavors $\sigma \in Z_1(X, A)$, ja que $\partial\sigma = \{x\} - \{y\} \in S_0(A)$ i així $\partial\sigma = 0$ en $S_0(X)/S_0(A) = S_0(X, A)$. Vegeu la figura 3.8.

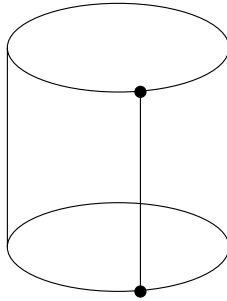


Figura 3.8: Generatriu del cilindre.

D'altra banda la 2-cadena $c = \sigma_1 + \sigma_2$, representada en la mateixa figura, defineix un element de $H_2(X, A)$. Al problema 2 us proposem que proveu que σ i c són generadors dels respectius grups d'homologia.

3. Si X és un espai arc-connex i $x \in X$ és un punt de X , aleshores

$$H_0(X, x) = 0.$$

Més generalment, és immediat comprovar que si X té r components arc-connexes i A és un subespai de X d'intersecció no buida amb s d'aquestes components, $s \leq r$, aleshores

$$H_0(X, A) \cong \mathbf{Z}^{r-s},$$

és a dir, el grup $H_0(X, A)$ mesura el nombre de components de X que no s'atansen des de A .

En capítols posteriors tindrem oportunitat d'utilitzar la següent variant de la successió exacta d'homologia relativa, coneguda com successió exacta d'un triple.

Proposició 7.4. *Sigui X un espai topològic, i $A' \subseteq A \subseteq X$ subespais de X . Aleshores hi ha una successió exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_p(A, A') \longrightarrow H_p(X, A') \longrightarrow H_p(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A, A') \longrightarrow \cdots$$

en la que els morfismes no especificats estan induïts per les incusions naturals. A aquesta successió se l'anomena la successió exacta del triple (X, A, A') .

La successió exacta del triple (X, A, A') és natural en (X, A, A') .

Demostració. Vegeu el problema 3. □

En el corollari 7.3 hem establert un resultat d'invariància homotòpica de l'homologia relativa singular. Com en el cas absolut, podem enunciar un resultat d'invariància homotòpica per a les aplicacions contínues.

Siguin (X, A) i (Y, B) dos parells d'espais topològics, i $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ aplicacions contínues de parells. Una *homotopia relativa entre f i g* és una aplicació contínua $G : X \times I \longrightarrow Y$, tal que

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= f(x), \text{ per a tot } x \in X, \\ G(x, 1) &= g(x), \text{ per a tot } x \in X, \\ G(A \times I) &\subseteq B. \end{aligned}$$

Si existeix una homotopia relativa entre f i g , es diu que f i g són *aplicacions homòtopes de parells*.

Teorema 7.5. *Siguin $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ dues aplicacions contínues de parells, homòtopes, aleshores f i g induïxen el mateix morfisme en homologia relativa, és a dir,*

$$H_*^{(X,A)}(f) = H_*^{(X,A)}(g) : H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B).$$

Demostració. Les aplicacions f i g induïxen morfismes de complexos $S_*^{(X,A)}(f)$, $S_*^{(X,A)}(g) : S_*(X, A) \longrightarrow S_*(Y, B)$, pel que és suficient provar que $S_*^{(X,A)}(f) \sim S_*^{(X,A)}(g)$. És a dir, que existeix $h_q^{(X,A)} : S_q(X, A) \longrightarrow S_{q+1}(Y, B)$, tal que

$$h_{q-1}^{(X,A)} \partial_q + \partial_{q+1} h_q^{(X,A)} = S_q^{(X,A)}(f) - S_q^{(X,A)}(g).$$

Com que $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, són aplicacions homòtopes, existeix una homotopia relativa $G : X \times I \longrightarrow Y$ entre f i g . Així, si P^X és l'operador prisma introduït a 4.1, $P_q^X : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X \times I)$, i definim

$$h_q^X = S_{q+1}(G) \circ P_q^X : S_q(X) \longrightarrow S_q(Y \times I)$$

i anàlogament,

$$h_q^A = S_{q+1}(G|_A) \circ P_q^A : S_q(A) \longrightarrow S_q(B \times I)$$

aquests operadors verifiquen

$$\begin{aligned} h_{q-1}^X \partial_q + \partial_{q+1} h_q^X &= S_q(f) - S_q(g), \\ h_{q-1}^A \partial_q + \partial_{q+1} h_q^A &= S_q(f) - S_q(g) \end{aligned}$$

Es té, per tant, el diagrama de successions exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_q(A) & \longrightarrow & S_q(X) & \longrightarrow & S_q(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h_q^A & & \downarrow h_q^X & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S_{q+1}(B) & \longrightarrow & S_{q+1}(Y) & \longrightarrow & S_{q+1}(Y, B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

en el que el quadrat de l'esquerra commuta per la naturalitat de les aplicacions P_q . Així, el morfisme h_q^X passa al quocient, i defineix un morfisme $h_q^{(X,A)} : S_q(X, A) \longrightarrow S_{q+1}(Y, B)$, per a tot $q \geq 0$. És immediat ara comprovar que els morfismes $h_q^{(X,A)}$ definiexen una homotopia entre $S_*^{(X,A)}(f)$ i $S_*^{(X,A)}(g)$. \square

Problemes

1. Sigui X un espai topològic i A un retractor de deformació de X . Proveu que $H_*(X, A) = 0$.
2. Siguin σ i c els elements de $H_2(X, A)$ i $H_1(X, A)$ de l'exemple 2. Proveu que són generadors dels respectius grups d'homologia relativa.
3. Proveu la proposició 7.4

4. Sigui $X = \mathbf{S}^1$, Y un espai topològic arbitrari, i $y \in Y$. Prenem els subespais $A = \{1\}$ i $B = \{y\}$ de X i Y , respectivament. Proveu que una homotopia de parells

$$\gamma, \gamma' : (\mathbf{S}^1, 1) \longrightarrow (Y, y),$$

no és altra cosa que una homotopia de llaços amb punt base.

5. Calculeu els grups d'homologia relativa següents: $H_*(\mathbf{B}^n, \mathbf{S}^{n-1})$ i $H_*(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^m)$, $n \geq m$.
6. Sigui X un espai topològic, i $A \subseteq B$ dos subespais de X . Proveu que si B és un retracte de X , aleshores es té un isomorfisme $H_*(X, A) \cong H_*(X, B) \oplus H_*(B, A)$
7. Sigui X un espai topològic, i N un punt de l'esfera \mathbf{S}^n . Proveu que es tenen isomorfismes $H_p(X \times \mathbf{S}^n, X \times \{N\}) \cong H_{p-n}(X)$, per a tot $p \geq 0$.
8. Sigui R un anell commutatiu. Donat un parell topològic (X, A) , es defineix el *complex de cadenes singulars relatives de (X, A) amb coeficients en R* per $S_*(X, A; R) := S_*(X; R)/S_*(A; R)$, i l'*homologia singular relativa del parell (X, A) amb coeficients en R* , com l'homologia del complex $S_*(X, A; R)$. Proveu que hi ha una successió exacta natural

$$\cdots \longrightarrow H_p(A; R) \longrightarrow H_p(X; R) \longrightarrow H_p(X, A; R) \longrightarrow H_{p-1}(A; R) \longrightarrow \cdots$$

9. Sigui R un anell commutatiu. Siguin $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ dues aplicacions contínues de parells, homòtopes, proveu que f i g indueixen el mateix morfisme en homologia relativa amb coeficients en R .

8 El teorema d'excisió

En aquest apartat provarem una de les propietats fonamentals de l'homologia singular, la propietat d'excisió. Aquesta propietat no té anàleg en l'homologia singular absoluta, i es demostra a partir del teorema de les cadenes petites.

Sigui (X, A) un parell topològic, i U un subespai de A . L'aplicació contínua de parells $(X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$ indueix un morfisme en homologia

$$H_*(X - U, A - U) \longrightarrow H_*(X, A),$$

que, en general, no té perquè ser un isomorfisme.

Exemple. Sigui $X = \mathbf{R}^2$, A el subespai

$$\begin{aligned} A = & \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x > 0, y \geq \sin \frac{1}{x}\} \\ & \cup \{(0, y); -1 \leq y\} \\ & \cup \{(x, y); x < 0, y \geq 0\}, \end{aligned}$$

i U l'interior de A : $U = \overset{\circ}{A}$, (vegeu la figura 3.9).

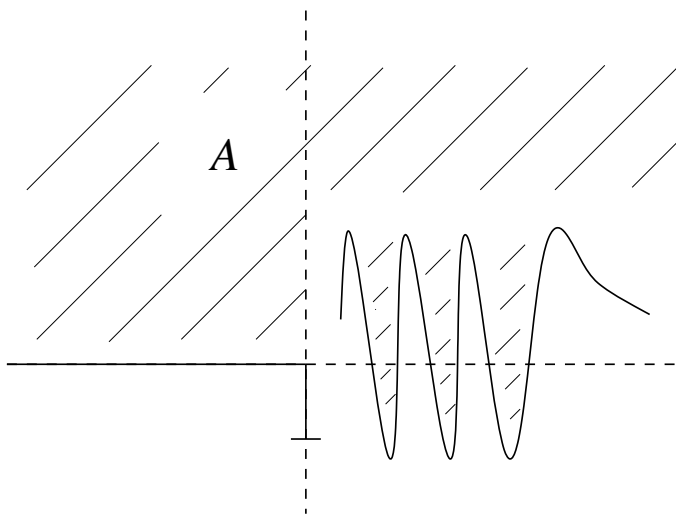


Figura 3.9: L'espai A .

Considerem el diagrama commutatiu de successions exactes d'homologia relativa induït per la inclusió $(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$, 7.2,

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(X - U) & \longrightarrow & H_1(X - U, A - U) & \longrightarrow & H_0(A - U) & \longrightarrow & H_0(X - U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_1(X) & \longrightarrow & H_1(X, A) & \longrightarrow & H_0(A) & \longrightarrow & H_0(X) \end{array}$$

Els espais X , A i $X - U$ són contràctils, i per tant només tenen homologia 0-èssima, que és isomorfa a \mathbf{Z} . D'altra banda, $A - U$ té dues components

arc-connexes, i per tant $H_0(A - U) \cong \mathbf{Z}^2$. Així, el diagrama commutatiu anterior és

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(X - U, A - U) & \longrightarrow & \mathbf{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_1(X, A) & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Z} \end{array}$$

d'on resulta que $H_1(X - U, A - U) \cong \mathbf{Z}$, mentres que $H_1(X, A) = 0$, i per tant aquests grups no poden ser isomorfs.

Definició. Sigui (X, A) un parell topològic, i U un subespai de A . Es diu que U és *excisiu* en (X, A) si el morfisme $H_*(X - U, A - U) \rightarrow H_*(X, A)$, induït per la inclusió, és un isomorfisme.

Teorema 8.1 (d'excisió). *Sigui (X, A) un parell topològic, i U un subespai de A . Si $\overline{U} \subseteq \overset{\circ}{A}$, llavors U és excisiu en (X, A) , és a dir, el morfisme natural*

$$H_*(X - U, A - U) \longrightarrow H_*(X, A)$$

és un isomorfisme.

Demostració. La prova es basa en el teorema de les cadenes petites, 5.1, aplicat al recobriment $\{A, X - U\}$ de X . En efecte, aquest recobriment verifica les hipòtesis de 5.1 ja que es té

$$X = \overline{U} \cup (X - \overline{U}) = \overset{\circ}{A} \cup (X - \overline{U}) = \overset{\circ}{A} \cup (X - \overset{\circ}{U}),$$

i per tant el morfisme natural $S_*(\{A, X - U\}) \rightarrow S_*(X)$ induïx un isomorfisme en homologia. Per relacionar aquest resultat amb l'homologia relativa considerem les successions exactes de complexs

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(\{A, A - U\}) & \longrightarrow & S_*(\{A, X - U\}) & \longrightarrow & \frac{S_*(\{A, X - U\})}{S_*(\{A, A - U\})} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_*(A) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(X, A) \longrightarrow 0. \end{array}$$

El diagrama és commutatiu i per tant, passant a les successions exactes llargues d'homologia, en resulta el diagrama commutatiu de successions exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_p(A) & \longrightarrow & H_p(S_*\{A, X-U\}) & \longrightarrow & H_p\left(\frac{S_*\{A, X-U\}}{S_*\{A, A-U\}}\right) & \longrightarrow & H_{p-1}(A) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_p(A) & \longrightarrow & H_p(X) & \longrightarrow & H_p(X, A) & \longrightarrow & H_{p-1}(A)
 \end{array}$$

Així podem aplicar el lema dels cinc, i deduir que es té un isomorfisme

$$H_*\left(\frac{S_*\{A, X-U\}}{S_*\{A, A-U\}}\right) \cong H_*(X, A).$$

Per relacionar ara $H_*\left(\frac{S_*\{A, X-U\}}{S_*\{A, A-U\}}\right)$ amb $H_*(X-U, A-U)$ considerem el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & S_*(A-U) & \longrightarrow & S_*(A-U) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & S_*(A) \oplus S_*(A-U) & \longrightarrow & S_*(A) \oplus S_*(X-U) & \longrightarrow & \frac{S_*(X-U)}{S_*(A-U)} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & S_*\{A, A-U\} & \longrightarrow & S_*\{A, X-U\} & \longrightarrow & \frac{S_*\{A, X-U\}}{S_*\{A, A-U\}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

en el que les files i les columnes són exactes. Aplicant el lema dels nou, (vegeu el problema 1 de l'apartat 2.7), es té un isomorfisme de complexs

$$\frac{S_*(X-U)}{S_*(A-U)} \xrightarrow{\sim} \frac{S_*\{A, X-U\}}{S_*\{A, A-U\}},$$

que compostat amb l'isomorfisme anterior dóna la cadena d'isomorfismes

$$\begin{aligned} H_*(X - U, A - U) &= H_*\left(\frac{S_*(X - U)}{S_*(A - U)}\right) \\ &\xrightarrow{\sim} H_*\left(\frac{S_*(\{A, X - U\})}{S_*(\{A, A - U\})}\right) \\ &\xrightarrow{\sim} H_*(X, A), \end{aligned}$$

el que acaba la prova. \square

Exemple. Sigui $X = \mathbf{S}^2$, $A = \mathbf{S}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2; z \geq 0\}$, i $U = \{N = (0, 0, 1)\}$. Com $\overline{U} = U \subseteq \overset{\circ}{A}$, pel teorema d'excisió U és excisiu, i els morfismes

$$H_p(X - U, A - U) \longrightarrow H_p(X, A)$$

són isomorfismes per $p \geq 0$. En el cas $p = 0$ això és trivial, ja que

$$H_0(X - U, A - U) = H_0(X, A) = 0,$$

però per $p = 1$ es té

$$\begin{aligned} H_1(X - U, A - U) &\cong \mathbf{Z}, \\ H_1(X, A) &\cong \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

i en aquest cas el fet que el morfisme $H_1(X - U, A - U) \longrightarrow H_1(X, A)$ sigui un isomorfisme ja no és una trivialitat.

Corollari 8.2. *Sigui X un espai topològic, i $U \subseteq A \subseteq B \subseteq X$ tres subespais de X . Si $\overline{U} \subseteq \overset{\circ}{B}$ i les inclusions $A \longrightarrow B$, $A - U \longrightarrow B - U$, són equivalències homotòpiques, aleshores U és excisiu en (X, A) .*

Demostració. Considerem el diagrama commutatiu de morfismes d'homologia relativa

$$\begin{array}{ccc} H_*(X - U, A - U) & \longrightarrow & H_*(X, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(X - U, B - U) & \longrightarrow & H_*(X, B), \end{array}$$

induits per les inclusions de parells evidents. Pel teorema d'excisió, U és excisiu en el parell (X, B) , i per tant el morfisme inferior d'aquest diagrama és un isomorfisme. D'altra banda, com la inclusió de A en B és una equivalència homotòpica, el morfisme de la dreta també és un isomorfisme, per 7.3, i anàlogament el morfisme de l'esquerra és un isomorfisme. Així, el morfisme superior és també un isomorfisme, i U és excisiu en (X, A) . \square

Exemple. Sigui $X = \mathbf{S}^2$, $A = \mathbf{S}_+^2$, i $U = \mathbf{E}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2; z > 0\}$. Si prenem $B = \mathbf{S}^2 - \{(0, 0, -1)\}$, tindrem que $\overline{U} \subseteq \overset{\circ}{B} = B$, i A i $A - U$ són retractes de deformació de B i $B - U$, respectivament. Podem aplicar doncs el corollari anterior i deduir que U és excisiu en (X, A) .

Problemes

1. Sigui K un complex simplicial, i L un subcomplex. Proveu que l'interior de $|L|$ és excisiu en $(|K|, |L|)$.
2. Sigui X un espai compacte, A un subespai tancat de X , tal que A és un retractor de deformació d'un entorn $U \subseteq X$, per exemple, si $X = |K|$ i $A = |L|$, on L és un subcomplex de K . Notem $\pi : X \longrightarrow X/A$ l'aplicació quotient, i sigui $a = \pi(A)$.
 - (a) Proveu que a és un retractor de deformació de $\pi(U)$, i deduïu que el morfisme $H_*(X/A, a) \longrightarrow H_*(X/A, \pi(U))$ induït per la inclusió, és un isomorfisme.
 - (b) Proveu que existeix un entorn V de A que verifica $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \overset{\circ}{U}$, i tal que es té un isomorfisme $H_*(X - V, U - V) \cong H_*(X, A)$.
 - (c) Deduïu que π induïx un isomorfisme

$$H_*(X, A) \xrightarrow{\sim} H_*(X/A, a) .$$

3. Utilitzeu l'exercici 2 de l'apartat 2.7 per deduir la successió exacta de Mayer-Vietoris del teorema d'excisió.
4. Sigui X un espai topològic, i A, B , dos subespais de X . Es diu que $\{A, B\}$ és un *parell excisiu* si el morfisme de complexs $S_*(A) + S_*(B) \longrightarrow S_*(A \cup B)$ induïx un isomorfisme en homologia.

(a) Proveu que si $\{A, B\}$ és un parell excisiu, aleshores existeix una successió exacta d'homologia

$$\dots H_p(A \cap B) \xrightarrow{i_*} H_p(A) \oplus H_p(B) \longrightarrow H_p(A \cup B) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A \cap B) \dots$$

(b) Siguin (A_1, B_1) i (A_2, B_2) dos parells de subespais de X tals que $\{A_1, A_2\}$ i $\{B_1, B_2\}$ són parells excisius. proveu que existeix una successió exacta

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H_p(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \longrightarrow H_p(A_1, B_1) \oplus H_p(A_2, B_2) \\ &\longrightarrow H_p(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

on els morfismes són els induïts per les inclusions respectives. S'anomena la *successió exacta de Mayer-Vietoris en homologia relativa*.

(c) Proveu que la successió exacta d'homologia relativa i la successió exacta d'un triple són casos particulars de la successió exacta de Mayer-Vietoris en homologia relativa.

5. Sigui R un anell commutatiu. Proveu l'anàleg del teorema d'excisió per a l'homologia singular amb coeficients en R .

9 El teorema de comparació

En els apartats anteriors hem desenvolupat les propietats bàsiques de l'homologia singular. En aquest apartat anem a veure com aquestes propietats ens permeten comparar l'homologia simplicial d'un políedre amb la seva homologia singular.

Sigui K un complex simplicial ordenat, i $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ el conjunt dels seus vèrtexs. En el capítol 2 hem considerat $C_*(K)$, el complex de cadenes simplicials de K . El políedre geomètric $|K|$ associat al complex K és un espai topològic i per tant podem considerar el complex de cadenes singulars de $|K|$, $S_*(|K|)$.

Si s és una cara simplicial ordenada p -dimensional de K , $s = [v_{i_0}, \dots, v_{i_p}]$, s defineix, amb les notacions de la prova de 4.1, un símplex singular afí p -dimensional $\sigma = (v_{i_0}, \dots, v_{i_p})$, el que permet definir una aplicació

$$\begin{aligned} \nu : C_*(K) &\longrightarrow S_*(|K|) \\ s &\longmapsto \sigma \end{aligned}$$

És immediat comprovar que es verifica:

Lema 9.1. *El morfisme ν és un morfisme de complexs, natural en K .* \square

Per tant, ν induïx un morfisme en les homologies respectives

$$H_*(\nu) : H_*(C_*(K)) \longrightarrow H_*(S_*(|K|)),$$

és a dir, tenim un morfisme

$$H_*(\nu) : H_*(K) \longrightarrow H_*(|K|),$$

de l'homologia simplicial del complex simplicial K en l'homologia singular de l'espai topològic $|K|$.

Teorema 9.2. *Per a tot complex simplicial ordenat K , el morfisme*

$$H_*(\nu) : H_*(K) \longrightarrow H_*(|K|),$$

és un isomorfisme.

Demostració. Farem la demostració per inducció sobre la dimensió n de K .

Si $n = 0$, el políedre $|K|$ es redueix a un conjunt de vèrtexs, $|K| = \{v_1, \dots, v_r\}$. El complex simplicial és per tant

$$C_p(K) = \begin{cases} \mathbf{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}v_r, & \text{si } p = 0, \\ 0, & \text{si } p \neq 0, \end{cases}$$

és a dir, és la suma directa de complexs $\oplus_{i=0}^r C_*(v_i)$. Anàlogament, el complex singular és $S_*(|K|) = \oplus_{i=1}^r S_*(v_i)$.

Ambdós complexs són acíclics en graus positius, pel que només hem de calcular l'homologia en grau zero, on és un isomorfisme

$$\oplus_{0 \leq i \leq r} \mathbf{Z}[v_i] \xrightarrow{\sim} \oplus_{0 \leq i \leq r} \mathbf{Z}[v_i].$$

Suposem provat el teorema per a tot políedre de dimensió $< n$. Sigui $|K|$ un políedre de dimensió $\leq n$, i s_1, \dots, s_m les cares de dimensió n de K . Provarem el teorema per inducció sobre m .

Si $m = 0$, aleshores $\dim K < n$, i apliquem la hipòtesi d'inducció.

Suposem el teorema cert per a tot políedre amb menys de m cares n -dimensionals. Sigui s_m una cara n -dimensional de K . Sigui L el subcomplex de K que té totes les cares de K , llevat s_m , és a dir, $L = K - s_m$. El complex de cadenes simplicials de L serà

$$\begin{aligned} C_p(L) &= C_p(K), \quad p \neq n, \\ C_n(L) &= \{s_1, \dots, s_{m-1}\}. \end{aligned}$$

Per a L podem aplicar la hipòtesi d'inducció.

Com el morfisme ν és natural, es té el diagrama commutatiu de successions exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(L) & \longrightarrow & C_*(K) & \longrightarrow & C_*(K, L) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \nu & & \downarrow \nu & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S_*(|L|) & \longrightarrow & S_*(|K|) & \longrightarrow & S_*(|K|, |L|) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

i així, les successions exactes llargues d'homologia associades donen un diagrama commutatiu de successions exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{p+1}(K, L) & \longrightarrow & H_p(L) & \longrightarrow & H_p(K) & \longrightarrow & H_p(K, L) & \longrightarrow & H_{p-1}(L) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{p+1}(|K|, |L|) & \longrightarrow & H_p(|L|) & \longrightarrow & H_p(|K|) & \longrightarrow & H_p(|K|, |L|) & \longrightarrow & H_{p-1}(|L|) \end{array}$$

Per provar el teorema serà suficient provar que es tenen isomorfismes $H_*(K, L) \xrightarrow{\sim} H_*(|K|, |L|)$, ja que llavors, pel lema dels cinc i la hipòtesi d'inducció aplicada a L , s'obtenen isomorfismes

$$H_*(K) \xrightarrow{\sim} H_*(|K|).$$

La inclusió de parelles simplicials

$$(s_m, \partial s_m) \longrightarrow (K, L),$$

dóna lloc al diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} H_*(s_m, \partial s_m) & \longrightarrow & H_*(K, L) \\ \downarrow \nu & & \downarrow \nu \\ H_*(|s_m|, |\partial s_m|) & \longrightarrow & H_*(|K|, |L|), \end{array}$$

i per tant perquè el morfisme de la dreta sigui un isomorfisme és suficient provar que ho són els altres tres morfismes del diagrama.

Observem que

$$C_p(K, L) = C_p(K)/C_p(L) = \begin{cases} 0, & \text{si } p \neq n, \\ \mathbf{Z}\widetilde{s_m}, & \text{si } p = n, \end{cases}$$

i, com també,

$$C_p(s_m, \partial s_m) = \begin{cases} 0, & \text{si } p \neq n, \\ \mathbf{Z}\widetilde{s_m}, & \text{si } p = n, \end{cases}$$

el morfisme $H_*(s_m, \partial s_m) \rightarrow H_*(K, L)$ és un isomorfisme.

Per comparar $H_p(|s_m|, |\partial s_m|)$ i $H_p(|K|, |L|)$ usarem el teorema d'excisió aplicat al parell $(|K|, |L|)$ respecte $U = |K| - |s_m|$, de forma que $(|K| - U, |L| - U) = (|s_m|, |\partial s_m|)$. Observem però que $\overline{U} = |L|$ no està inclòs a $\overset{\circ}{|L|}$. Sigui $B = |K| - b_m$, on b_m és el baricentre de s_m . Aleshores $|L|$ i $|L| - U$ són retractes de deformació de B i $B - U$, respectivament. Com $\overline{U} \subseteq \overset{\circ}{B} = B$, podem aplicar el corol·lari 8.2 per concloure que la inclusió natural dóna isomorfismes

$$H_p(|s_m|, |\partial s_m|) \cong H_p(|K|, |L|) .$$

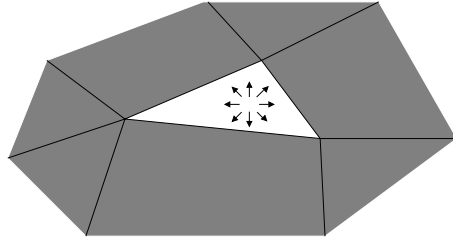


Figura 3.10: Retracció de B sobre $|L|$.

Així finalment hem reduït la demostració a provar que ν indueix un isomorfisme

$$H_*(s_m, \partial s_m) \xrightarrow{\sim} H_*(|s_m|, |\partial s_m|) .$$

Per demostrar aquest darrer isomorfisme, considerem el diagrama commutatiu de successió exactes d'homologia relativa

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_p(\partial s_m) & \longrightarrow & H_p(s_m) & \longrightarrow & H_p(s_m, \partial s_m) & \longrightarrow & H_{p-1}(\partial s_m) & \longrightarrow & H_{p-1}(s_m) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_p(|\partial s_m|) & \longrightarrow & H_p(|s_m|) & \longrightarrow & H_p(|s_m|, |\partial s_m|) & \longrightarrow & H_{p-1}(|\partial s_m|) & \longrightarrow & H_{p-1}(|s_m|)
 \end{array}$$

Els morfismes segon i cinquè són isomorfismes per 2.6.1 i 4.2, i els morfismes primer i quart ho són per hipòtesi d'inducció. Així, és suficient aplicar el lema dels cinc per acabar la demostració. \square

Utilitzant un cop més un argument al voltant del lema dels cinc, en resulta el corollari següent.

Corollari 9.3. *Segui K un complex simplicial, i L un subcomplex de K . Aleshores ν induïx un isomorfisme*

$$H_*(K, L) \xrightarrow{\sim} H_*(|K|, |L|).$$

\square

Corollari 9.4. *Segui K un complex simplicial de dimensió n . Aleshores els grups d'homologia singular de $|K|$ són grups abelians finit generats, i nuls en dimensió $> n$, és a dir,*

$$H_p(|K|) = 0, \quad \text{si } p > n.$$

Demostració. Com $H_p(K) = 0$, si $p > n$, aquest corollari se segueix de 9.2. \square

Corollari 9.5. *Segui K un complex simplicial. L'homologia simplicial de K és un invariant homotòpic de $|K|$, és a dir, si $|K|$ és homotòpicament equivalent a un altre políedre $|L|$, aleshores es té un isomorfisme*

$$H_*(K) \cong H_*(L).$$

Demostració. En efecte, per 9.2 i 4.2, es tenen els isomorfismes

$$H_*(K) \cong H_*(|K|) \cong H_*(|L|) \cong H_*(L).$$

\square

Corollari 9.6. *Sigui X un espai topològic triangulable, i sigui (K, f) una triangulació de X . Aleshores*

$$\chi(K) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \text{rang } H_p(X),$$

i, per tant, la característica de Euler no depèn de la triangulació (K, f) de X .

Demostració. La característica de Euler d'un políedre la podem calcular en la forma

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum (-1)^p \text{rang } H_p(K) \\ &= \sum (-1)^p \text{rang } H_p(|K|) \end{aligned}$$

i com $H_p(|K|)$ és un invariant topològic, $\chi(K)$ és també un invariant topològic de X . \square

Problemes

- Una triangulació d'una superfície es diu que és regular si tot vèrtex pertany al mateix nombre de cares i tota cara té el mateix nombre de vèrtexs.
 - Proveu que si K és una triangulació regular de l'esfera, aleshores el triple (v, a, c) , on v és el nombre de vèrtexs, a és el nombre d'arestes i c és el nombre de cares, de K és $(4, 6, 4)$, $(6, 12, 8)$ ó $(12, 30, 20)$ (vegeu la proposició 1.8.4).
 - Proveu que els possibles triples (v, a, c) de les triangulacions regulars del tor \mathbf{T}^2 són infinits.
- Sigui R un anell commutatiu. Proveu el teorema 9.2 amb coeficients en R .

10 Comparació dels morfismes induïts

En el paràgraf anterior hem vist com els grups d'homologia simplicial d'un complex simplicial són isomorfs als grups d'homologia singular del políedre

associat. En aquest apartat anem a comparar els morfismes induïts en homologia simplicial i en homologia singular per una aplicació simplicial.

Sigui $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació simplicial entre els complexs simplicials ordenats K i L . L'aplicació φ induïx, per 2.4.5, un morfisme en homologia simplicial, $\varphi_* : H_*(K) \longrightarrow H_*(L)$, i com és una aplicació contínua, induïx també, per 1.5, un morfisme en homologia singular, $\varphi_* : H_*(|K|) \longrightarrow H_*(|L|)$. Així, si notem ν el morfisme de comparació introduït en el paràgraf anterior, es té un diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_*(K) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(L) \\ \nu_* \downarrow & & \downarrow \nu_* \\ H_*(|K|) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(|L|). \end{array}$$

És aquest un diagrama commutatiu? Provarem que la resposta és afirmativa, encara que el resultat no és immediat ja que a nivell de complexs de grups abelians el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_*(K) & \xrightarrow{\varphi_*} & C_*(L) \\ \nu_* \downarrow & & \downarrow \nu_* \\ S_*(|K|) & \xrightarrow{\varphi_*} & S_*(|L|), \end{array}$$

no és, en general, un diagrama commutatiu de morfismes de complexs. En efecte, si la imatge per φ de dos vèrtexs v, w , de K coincideix, aleshores l'aplicació φ_* de complexs de cadenes simplicials verifica $\varphi_*[v, w] = 0$, mentres que en el complexs de cadenes singulars $\varphi_*\nu_*[v, w]$ correspon a un 1-símplex singular constant, en particular no nul.

Per tal de relacionar l'acció de φ sobre les cadenes simplicials i sobre les cadenes singulars, introduïm un nou complex de grups abelians associat a K , $C'_*(K)$, que farà de pont entre els anteriors.

Definició. Sigui K un complex simplicial. Per a tot $p \geq 0$, s'anomena *grup de cadenes p -dimensionals degenerades de K* i es denota per $C'_p(K)$, el grup abelià lliure generat per les $(p+1)$ -uples ordenades (v_0, \dots, v_p) , de vèrtexs, *no necessàriament diferents*, de K .

Per a cada $p \geq 0$, s'anomena operador vora al morfisme de grups abelians

$$\partial : C'_p(K) \longrightarrow C'_{p-1}(K),$$

que sobre els generadors està definit per

$$\partial(v_0, \dots, v_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p).$$

És immediat comprovar que els grups $C'_p(K)$, $p \geq 0$, amb els operadors vora ∂ , formen un complex de grups abelians, $(C'_*(K), \partial)$. Notarem $H'_*(K)$ la seva homologia,

$$H'_p(K) := H_p(C'_*(K), \partial), \quad p \geq 0.$$

Segui K un complex simplicial ordenat. Tal com s'han definit els operadors vora en cada cas, és obvi que els morfismes

$$\beta : C_p(K) \longrightarrow C'_p(K),$$

definit per

$$\beta[v_0, \dots, v_p] = (v_0, \dots, v_p),$$

per $p \geq 0$, defineixen un morfisme de complexs de cadenes $\beta : C_*(K) \longrightarrow C'_*(K)$.

D'altra banda, la mateixa expressió que defineix el morfisme $\nu : C_*(K) \longrightarrow S_*(|K|)$, defineix un morfisme de complexs

$$\nu' : C'_*(K) \longrightarrow S_*(|K|).$$

De les definicions resulta immediatament el següent lema.

Lema 10.1. *El morfisme de complexs $\nu : C_*(K) \longrightarrow S_*(|K|)$ factoritza per β i ν' , és a dir, es verifica*

$$\nu = \nu' \beta. \quad \square$$

Definim ara un morfisme en el sentit invers de β , $\alpha : C'_*(K) \longrightarrow C_*(K)$, per

$$\alpha(v_0, \dots, v_p) = \begin{cases} [v_0, \dots, v_p], & \text{si tots els vèrtexs } v_i \text{ són diferents,} \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases}$$

que és un morfisme de complexs (vegeu el problema 1).

Teorema 10.2. *Els morfismes α i β són equivalències homotòpiques inverses una de l'altra.*

En particular, es verifica

Corollari 10.3. *Sigui K un complex simplicial ordenat. Aleshores α induïx un isomorfisme*

$$\alpha_* : H'_*(K) \longrightarrow H_*(K). \quad \square$$

En la demostració del teorema necessitarem el lema següent, (compareu-lo amb l'apartat 2.6).

Lema 10.4. *Sigui Δ^n un n -símplex. Aleshores*

$$H'_p(\Delta^n) = 0, \text{ si } p > 0.$$

Demostració. Provarem que el complex $C'_*(\Delta^n)$ és contràctil en grau > 0 . Sigui w un vèrtex de Δ^n . Si $p \geq 0$, definim el morfisme

$$D_p : C'_p(\Delta^n) \longrightarrow C'_{p+1}(\Delta^n)$$

per

$$D_p(v_0, \dots, v_p) = (w, v_0, \dots, v_p).$$

Els morfismes D_p , $p \geq 0$, donen l'homotopia que volíem ja que un simple càlcul mostra que si c_p és una p -cadena de $C'_p(\Delta^n)$, $p > 0$, es verifica

$$\partial_{p+1} D_p c_p = c_p - D_{p-1} \partial_p c_p,$$

i així,

$$\text{id}_p = D_{p-1} \partial_p + \partial_{p+1} D_p, \text{ per } p > 0. \quad \square$$

Demostració del teorema 10.2: És evident que es verifica $\alpha\beta = \text{id}$, pel que és suficient provar que la composició $\beta\alpha$ és homòtopa a la identitat, $\beta\alpha \sim \text{id}$.

Definirem una homotopia

$$h : C'_p(K) \longrightarrow C'_{p+1}(K) \text{ } p \geq 0,$$

entre la composició $\beta\alpha$ i la identitat de $C'_*(K)$, tal que si σ és un símplex de $C'_p(K)$ es verifica la següent condició sobre els suports

$$h(\sigma) \in C'_*(\sigma) \subseteq C'_*(K).$$

Ho fem per inducció sobre la dimensió de σ . Si σ és un 0-símplex, definim $h(\sigma) = 0$. Així, com $\beta\alpha(\sigma) = \sigma$, h és una homotopia en grau 0 que verifica la condició anterior.

Sigui ara $p > 0$ i suposem construïda l'homotopia h en graus $< p$, verificant la condició sobre els suports, i sigui σ un p -símplex. Considerem la cadena

$$c_p = \sigma - \beta\alpha(\sigma) - h\partial(\sigma).$$

Com $\beta\alpha(\sigma) \in C'_*(\sigma)$ i $h(\partial\sigma) \in C'_*(\sigma)$, per hipòtesis d'inducció, c_p és una cadena de $C'_*(\sigma)$. A més a més, c_p és un cicle, ja que per hipòtesis d'inducció es verifica

$$\begin{aligned} \partial c_p &= \partial\sigma - \partial\beta\alpha(\sigma) - \partial h\partial\sigma \\ &= \partial\sigma - \beta\alpha\partial\sigma - (\partial\sigma - \beta\alpha\partial\sigma - h\partial\partial\sigma) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Però per 10.4, tot cicle de $C'_p(\sigma)$ és una vora, i per tant existeix una $(p+1)$ -cadena $h(\sigma)$ de $C'_{p+1}(\sigma)$ tal que

$$\partial h(\sigma) = c_p,$$

el que completa la inducció i acaba, per tant la demostració del teorema. \square

Un cop hem comprovat que el complex $C'_*(K)$ té la mateixa homologia que l'homologia simplicial de K podem procedir a comparar els morfismes.

Sigui $\varphi : |K| \rightarrow |L|$ una aplicació simplicial. Notarem $\varphi' : C'_*(K) \rightarrow C'_*(L)$ el morfisme de complex definit per

$$\varphi'((v_0, \dots, v_p)) = (\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_p)).$$

Lema 10.5. *Sigui $\varphi : |K| \rightarrow |L|$ una aplicació simplicial entre els complexs simplicials K i L . Aleshores el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} H'_*(K) & \xrightarrow{\varphi'_*} & H'_*(L) \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha_* \\ H_*(K) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(L) \end{array}$$

és commutatiu.

Demostració. És immediat comprovar que es verifica $\varphi\alpha = \alpha\varphi'$ a nivell de complexs de cadenes, pel que la commutativitat del diagrama en resulta trivialment. \square

Lema 10.6. *Segui $\varphi : |K| \rightarrow |L|$ una aplicació simplicial entre els complexs simplicials K i L . Aleshores el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} H_*(K) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(L) \\ \beta_* \downarrow & & \downarrow \beta_* \\ H'_*(K) & \xrightarrow{\varphi'_*} & H'_*(L) \end{array}$$

és commutatiu.

Demostració. Com hem observat al principi d'aquest paràgraf, no és cert en general que $\beta\varphi = \varphi'\beta$ a nivell de complexs de cadenes. De totes maneres, la igualtat $\beta_*\varphi_* = \varphi'_*\beta_*$ en homologia se segueix de que α_* és invers de β_* i de la igualtat $\varphi_*\alpha_* = \alpha_*\varphi'_*$ de 10.5. En efecte, de la igualtat $\varphi_*\alpha_* = \alpha_*\varphi'_*$ s'obté, composant a dreta i esquerra per β_*

$$\beta_*\varphi_*\alpha_*\beta_* = \beta_*\alpha_*\varphi'_*\beta_*,$$

i com β_* és un invers homotòpic de α_* resulta $\beta_*\varphi_* = \varphi'_*\beta_*$. \square

Teorema 10.7. *Segui $\varphi : |K| \rightarrow |L|$ una aplicació simplicial entre els complexs simplicials ordenats K i L . Aleshores el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} H_*(K) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(L) \\ \nu_* \downarrow & & \downarrow \nu_* \\ H_*(|K|) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(|L|), \end{array}$$

és commutatiu.

Demostració. Segons 10.1 i 10.6, és suficient observar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C'_*(K) & \xrightarrow{\varphi'_*} & C'_*(L) \\ \nu'_* \downarrow & & \downarrow \nu'_* \\ S_*(|K|) & \xrightarrow{\varphi_*} & S_*(|L|), \end{array}$$

és commutatiu, el que és conseqüència immediata de les definicions. \square

Problemes

1. Proveu que $\alpha : C'_*(K) \longrightarrow C_*(K)$ és un morfisme de complexs, és a dir, que commuta amb la diferencial.
2. Siguin (K, K') i (L, L') dos parells de políedres, i $\varphi : (K, K') \longrightarrow (L, L')$ una aplicació simplicial de parells. Proveu que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_*(K, K') & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(L, L') \\ \nu_* \downarrow & & \downarrow \nu_* \\ H_*(|K|, |K'|) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(|L|, |L'|) , \end{array}$$

és commutatiu.

3. Enuncieu i demostreu el corollari 10.7 per l'homologia simplicial i l'homologia singular amb coeficients en un anell commutatiu R .

11 Caracterització axiomàtica de l'homologia singular

La demostració del teorema 9.2 es basa en determinades propietats de l'homologia singular, com la functorialitat, la invariància homotòpica, el teorema d'excisió i el càlcul de l'homologia singular d'un punt. En aquest apartat anem a formalitzar aquesta dependència en termes dels anomenats axiomes de Eilenberg-Steenrod, introduïts per aquests autors l'any 1945, [9].

Sigui \mathbf{Top}^2 la categoria de parells d'espais topològics. Sigui R un anell commutatiu, i $R\text{-}\mathbf{mod}_*$ la categoria de R -mòduls graduats, que té per objectes les successions de R -mòduls $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, i per morfismes les successions de morfismes.

Fent abstracció de les propietats de l'homologia singular, Eilenberg i Steenrod defineixen una *teoria homològica amb coeficients en R* com un functor covariant

$$h_* : \mathbf{Top}^2 \longrightarrow R\text{-}\mathbf{mod}_*$$

amb una successió de transformacions naturals

$$\partial_p : h_p(X, A) \longrightarrow h_{p-1}(A, \emptyset) =: h_{p-1}(A) , \quad p \geq 0 ,$$

que verifiquen els axiomes següents:

1. *Axioma d'exactitud.* Si (X, A) és un parell d'espais topològics, la successió de R -mòduls

$$\cdots \longrightarrow h_p(A) \longrightarrow h_p(X) \longrightarrow h_p(X, A) \xrightarrow{\partial_p} h_{p-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

és una successió exacta.

2. *Axioma d'invariància homotòpica.* Si $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ són aplicacions homòtopes de parells d'espais topològics, llavors

$$h_*(f) = h_*(g) : h_*(X, A) \longrightarrow h_*(Y, B).$$

3. *Axioma d'excisió.* Si $U \subseteq A \subseteq X$ són subespais de X verificant $\overline{U} \subseteq \overset{\circ}{A}$, aleshores el morfisme

$$h_*(X - U, A - U) \longrightarrow h_*(X, A),$$

és un isomorfisme.

4. *Axioma de dimensió.* Si X és un espai topològic reduït a un sol punt, es verifica

$$h_p(X) = 0, \text{ si } p \neq 0,$$

i existeix un isomorfisme d'augmentació natural

$$\varepsilon_X : h_0(X) \cong R.$$

Així, els resultats dels apartats anteriors es poden resumir dient que l'homologia singular amb coeficients en un anell R , $H_*(-; R)$, és una teoria homològica generalitzada.

Si h_* i k_* són dues teories homològiques amb coeficients en R , un *morfisme de teories homològiques* $\nu : h_* \longrightarrow k_*$ és una transformació natural de functors que commuta amb els morfismes de connexió corresponents, és a dir, tal que $\partial\nu = \nu\partial$, i és compatible amb els morfismes d'augmentació, és a dir, $\varepsilon\nu = \varepsilon$.

La demostració del teorema de comparació entre l'homologia singular i l'homologia simplicial es basa pràcticament en que aquestes dues teories són comparables, és a dir, que existeix un morfisme entre elles, i verifiquen els axiomes anteriors per als políedres. Un raonament semblant, al efectuat en el teorema 9.2, que deixarem al lector, permet provar el resultat següent

Teorema 11.1 (de comparació general). *Sigui h_* una teoria homològica amb coeficients en R , i $\nu : h_* \longrightarrow H_*(-; R)$ un morfisme de teories homològiques. Aleshores, per a tot parell triangulable (X, A) , el morfisme*

$$\nu : h_*(X, A) \longrightarrow H_*(X, A; R) ,$$

és un isomorfisme.

□

Problemes

1. Fent servir el problema 2 de 2.7, proveu que si h_* és una teoria homològica, aleshores h_* verifica el teorema 6.1 de la successió exacta de Mayer-Vietoris.
2. Demostreu el teorema 11.1
3. Trobeu un complex simplicial K i un nombre primer p , tals que $H_*(|K|, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ i $H_*(|K|) \otimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ no siguin isomorfs.

Capítol 4

Algunes aplicacions de l'homologia

En el capítol anterior hem vist com l'homologia singular permet resoldre alguns problemes topològics globals, per exemple el fet que dos espais topològics amb grups d'homologia no isomorfs no poden ser homeomorfs ens ha permès provar que esferes de dimensions diferents no poden ser homeomorfes. En aquest capítol anem a veure algunes aplicacions més elaborades de l'homologia singular, que es refereixen bé a situacions locals, bé a càlculs no immediats de grups d'homologia o bé a l'acció d'una aplicació contínua en homologia.

En el primer apartat definirem l'homologia local d'una varietat topològica en un punt. Aquesta homologia permet linealitzar alguns problemes locals de la topologia de varietats, i en particular permet demostrar el teorema d'invariància de la dimensió, generalitzant així el resultat obtingut per les esferes. A més, l'homologia local és també l'ingredient que permet distingir l'interior de la vora d'una varietat amb vora, d'on deduirem que si dues varietats amb vora són homeomorfes aleshores les seves vores són també homeomorfes.

El càlcul de l'homologia del complementari a \mathbf{S}^n d'una bola o d'una esfera de dimensió inferior ocupa els apartats 3. i 4. D'aquest càlcul s'en deriva el teorema de separació de Jordan-Brouwer, generalització per a dimensions superiors del clàssic teorema de la corba de Jordan. El teorema de Jordan-Brouwer permet demostrar el teorema de la invariància del domini, que és

l'anàleg en el context topològic del teorema de la funció inversa del càlcul diferencial. Per provar aquests resultats ens serà còmode disposar d'una petita modificació de l'homologia singular coneguda com homologia reduïda.

La tercera aplicació que presentarem es refereix a l'acció en homologia d'una aplicació contínua entre esferes de la mateixa dimensió. Definirem el grau d'una d'aquestes aplicacions i calcularem el grau d'algunes aplicacions concretes, com el de l'aplicació antipodal. Aquests càlculs ens permetran provar alguns resultats sobre els punts fixos d'una aplicació o sobre els zeros dels camps tangents a les esferes.

El càlcul del grau de les aplicacions senar entre esferes és essencialment el contingut del teorema de Borsuk-Ulam, que provarem a l'apartat 6. Cal remarcar, que en la demostració d'aquest teorema utilitzarem l'homologia singular amb coeficients a $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, el que mostrarà l'interès de disposar de l'homologia amb coeficients finits. Al llarg de la demostració del teorema de Borsuk-Ulam calcularem l'homologia amb coeficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ dels espais projectius reals, emprant un mètode específic per a aquests coeficients. En l'apartat següent però, calcularem l'homologia entera dels espais projectius reals amb un mètode de caire més general; així estudiarem com es modifica l'homologia singular d'un espai topològic quan se li adjunta una cella, el que ens permetrà fer els càlculs corresponents no tant sols pels espais projectius reals, sino també pels espais projectius complexos.

Finalment usarem l'homologia simplicial per demostrar el teorema del punt fix de Lefschetz, que generalitza el teorema del punt fix de Brouwer i permet donar demostracions alternatives d'alguns dels càlculs dels apartats anteriors, en particular alguns que fan referència al grau d'aplicacions entre esferes.

1 L'homologia local de les varietats topològiques

En el context de l'Anàlisi Matemàtica l'espai tangent a una varietat diferenciable en un punt i la diferencial d'una aplicació diferenciable permeten linealitzar un bon nombre de problemes locals. Per exemple, si $U \subseteq \mathbf{R}^n$ i $V \subseteq \mathbf{R}^m$ són oberts i $x \in U$, a tota aplicació diferenciable $f : U \rightarrow V$ li podem associar l'aplicació diferencial

$$df_x : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m ,$$

que és una aplicació lineal, de manera que si f és un difeomorfisme aleshores df_x és un isomorfisme d'espais vectorials, i en particular aquests han de tenir la mateixa dimensió, $n = m$, és a dir, que U i V són oberts d'espais euclidians de la mateixa dimensió.

En aquest apartat introduïrem l'homologia local que és un substitut, en un context purament topològic, de la potència exterior $\Lambda^n T_x X$ de l'espai tangent d'una varietat diferenciable de dimensió n , X , en un punt x , i que permetrà linealitzar alguns problemes relatius a les varietats, com el referent a la dimensió.

Definició. Sigui X un espai topològic i x un punt de X . Es defineix l'homologia local de X en x com l'homologia relativa $H_*(X, X - x)$.

El caràcter *local* d'aquesta definició ve determinat pel resultat següent,

Lema 1.1. Si x és un punt tancat de X i V és un entorn de x en X , llavors la inclusió de V a X induïx un isomorfisme

$$H_*(V, V - x) \xrightarrow{\sim} H_*(X, X - x).$$

Demostració. El resultat se segueix immediatament del teorema d'excisió prenent $A = X - x$ i $U = X - V$, ja que, en ser x tancat, A és obert i al ser V un entorn de x es verifica $\overline{U} \subseteq \overset{\circ}{A} = A$. \square

Exemples. 1. Sigui x un punt de \mathbf{R}^n . De la contractibilitat de \mathbf{R}^n i de la successió exacta d'homologia relativa

$$\longrightarrow H_{p+1}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow H_{p+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - x) \longrightarrow H_p(\mathbf{R}^n - x) \longrightarrow H_p(\mathbf{R}^n) \longrightarrow$$

en resulta l'isomorfisme

$$H_{p+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - x) \cong H_p(\mathbf{R}^n - x), \text{ si } p \geq 1,$$

mentres que $H_0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - x) = 0$, perquè \mathbf{R}^n és arc-connex. Com $\mathbf{R}^n - x$ és del tipus d'homotopia de l'esfera \mathbf{S}^{n-1} , l'homologia local de \mathbf{R}^n en un punt ve donada per

$$H_p(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - x) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } p \neq n, \\ \mathbf{Z}, & \text{si } p = n. \end{cases}$$

2. Sigui K un complex simplicial i v un vèrtex. Podem identificar alguns grups de l'homologia local de $|K|$ en v de la forma següent

$$H_p(|K|, |K| - v) \cong H_{p-1}(\ell k_K v), \text{ si } p > 1 .$$

En efecte, v és un punt tancat de $|K|$, i l'estrella $\overline{st}_K v$ és un entorn de v , per tant, aplicant el lema 1.1, es té l'isomorfisme

$$H_*(|K|, |K| - v) \cong H_*(\overline{st}_K v, \overline{st}_K v - v) .$$

Com l'obert $\overline{st}_K v - v$ es retrau sobre el nus $\ell k_K v$, aquest isomorfisme induïx un isomorfisme

$$H_*(|K|, |K| - v) \cong H_*(\overline{st}_K v, \ell k_K v) .$$

L'estrella $\overline{st}_K v$ és contràctil ja que és un conjunt estrellat, de vèrtex v , i per tant la successió exacta llarga del parell $(\overline{st}_K v, \ell k_K v)$, queda reduïda, per $p > 1$, als isomorfismes

$$H_p(\overline{st}_K v, \ell k_K v) \cong H_{p-1}(\ell k_K v) , \quad p > 1 .$$

D'altra banda, si $\ell k_K v \neq \emptyset$, la successió exacta del parell acaba en la forma

$$0 \longrightarrow H_1(\overline{st}_K v, \overline{st}_K v - v) \longrightarrow H_0(\overline{st}_K v - v) \longrightarrow H_0(\overline{st}_K v) \longrightarrow 0 ,$$

i com $\overline{st}_K v$ és connex, H_1 queda determinat per la successió exacta

$$0 \longrightarrow H_1(\overline{st}_K v, \overline{st}_K v - v) \longrightarrow H_0(\ell k_K v) \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0 .$$

A partir d'ara només considerarem espais topològics tals que tots els seus punts són tancats, és a dir, espais de Fréchet.

Essencialment estem interessats en les varietats topològiques, que hem introduït al capítol 1, §4. Recordem que un espai topològic X es diu que és una *varietat topològica de dimensió n* si és de Hausdorff, verifica el segon axioma de numerabilitat i tot punt té un entorn homeomorf a un obert de \mathbf{R}^n .

Així, com les varietats topològiques són espais de Fréchet i tot punt d'elles té un entorn homeomorf a un obert de \mathbf{R}^n , de 1.1 i del càlcul de l'homologia local de \mathbf{R}^n se segueix immediatament

Proposició 1.2. *Si X és una varietat topològica de dimensió n , i x és un punt de X llavors*

$$H_p(X, X - x) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } p \neq n, \\ \mathbf{Z}, & \text{si } p = n. \end{cases}$$

□

Perquè l'homologia local sigui d'utilitat hem de considerar el seu caràcter functorial. Siguin X, Y espais topològics de Fréchet i $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Prenem un punt $x \in X$ i notem $y = f(x) \in Y$. Si existeixen entorns U i V de x i y respectivament, tals que $f(U) \subseteq V$, i $f(U - x) \subseteq V - y$, tindrem un morfisme induït

$$f_* : H_*(X, X - x) \rightarrow H_*(Y, Y - y)$$

a través del diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_*(U, U - x) & \xrightarrow{f_*} & H_*(V, V - y) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ H_*(X, X - x) & & H_*(Y, Y - y) \end{array}$$

Aquesta mena d'entorns existeixen, per exemple, si f és un homeomorfisme, i més generalment si és un homeomorfisme local.

Lema 1.3. *Sigui $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfisme local de varietats topològiques, $x \in X$ i $y = f(x)$. Aleshores f induïx isomorfismes*

$$H_*(X, X - x) \xrightarrow{\sim} H_*(Y, Y - y).$$

□

Teorema 1.4 (d'invariància de la dimensió). *Siguin X, Y varietats topològiques de dimensió n i m , respectivament. Si X, Y són homeomorfs aleshores $n = m$.*

Demostració. Sigui $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfisme, prenem $x \in X$ i $y = f(x) \in Y$. Com f és un homeomorfisme, per 1.3, f indueix un isomorfisme

$$f_* : H_*(X, X - x) \longrightarrow H_*(Y, Y - y) ,$$

i de 1.2 se segueix que $n = m$. □

En particular, podem donar la versió topològica del resultat d'Anàlisi amb el que hem començat aquest apartat.

Corollari 1.5. *Siguin U i V oberts de \mathbf{R}^n i \mathbf{R}^m , respectivament. Si U i V són homeomorfs, aleshores $n = m$.* □

Aplicarem seguidament l'homologia local per estudiar les varietats topològiques amb vora. Comencem definint aquestes varietats: així com \mathbf{R}^n és l'exemple fonamental de varietat topològica, l'exemple bàsic de varietat amb vora és el *semiespai de \mathbf{R}^n*

$$\mathbf{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_n \geq 0\}.$$

Aquest espai topològic, a diferència de \mathbf{R}^n , no té la mateixa homologia local en tots els seus punts. En efecte, si notem

$$\partial\mathbf{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_n = 0\},$$

es té

Lema 1.6. 1. *Si $x \in \mathbf{H}^n - \partial\mathbf{H}^n$, aleshores $H_n(\mathbf{H}^n, \mathbf{H}^n - x) \cong \mathbf{Z}$.*
 2. *Si $x \in \partial\mathbf{H}^n$, aleshores $H_n(\mathbf{H}^n, \mathbf{H}^n - x) = 0$.*

Demostració. Si $x \in \mathbf{H}^n - \partial\mathbf{H}^n$, aleshores x té un entorn homeomorf a \mathbf{R}^n , pel que 1. se segueix de 1.1 i el càlcul de l'homologia local de \mathbf{R}^n .

Provem 2.: considerem la successió exacta llarga del parell $(\mathbf{H}^n, \mathbf{H}^n - x)$

$$\cdots \longrightarrow H_p(\mathbf{H}^n - x) \longrightarrow H_p(\mathbf{H}^n) \longrightarrow H_p(\mathbf{H}^n, \mathbf{H}^n - x) \longrightarrow H_{p-1}(\mathbf{H}^n - x) \longrightarrow \cdots$$

Com \mathbf{H}^n és convex, és un espai contràctil. A més, com $x \in \partial\mathbf{H}^n$, $\mathbf{H}^n - x$ també és contràctil. Així, si $p \neq 0$, la successió exacta es redueix a

$$0 \longrightarrow H_p(\mathbf{H}^n, \mathbf{H}^n - x) \longrightarrow 0$$

d'on resulta

$$H_p(\mathbf{H}^n, \mathbf{H}^n - x) = 0, \text{ per a tot } p \geq 0,$$

i en particular, $H_n(\mathbf{H}^n, \mathbf{H}^n - x) = 0$. \square

Definició. Un espai topològic X es diu que és una *varietat topològica amb vora*, de dimensió n , si és de Hausdorff, verifica el segon axioma de numerabilitat, i tot punt x de X té un entorn homeomorf a un obert de \mathbf{H}^n .

Si X és una varietat amb vora, $x \in X$, i existeix un entorn V de x homeomorf a un obert U de \mathbf{H}^n per l'homeomorfisme $f : V \xrightarrow{\sim} U \subseteq \mathbf{H}^n$, tal que $f(x) \in \partial\mathbf{H}^n$, direm que x és de la vora de X . Anomenarem *vora de X* al conjunt:

$$\partial X = \{x \in X; x \text{ és de la vora de } X\}.$$

Com en el cas de les varietats topològiques, si X és una varietat topològica amb vora de dimensió 1 direm que és una *corba amb vora*, i si la dimensió de X és 2, direm que és una *superfície amb vora*.

Exemples. 1. Tota varietat topològica X és una varietat topològica amb vora, en aquest cas amb $\partial X = \emptyset$.

Quan fem referència a una varietat topològica amb vora suposarem sempre que la vora és no buida.

2. Un interval $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ és una corba amb vora; la vora està formada pels extrems a, b . Més generalment, és un exercici provar que una bola tancada $B_r(a)$ de centre a i radi $r > 0$ de \mathbf{R}^n és una varietat topològica amb vora, de vora una esfera.

3. El cilindre $\mathbf{S}^1 \times I$ és una superfície amb vora. La seva vora es la reunió de les circumferències $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$ i $\mathbf{S}^1 \times \{1\}$.

La vora d'una varietat topològica amb vora és invariant per homeomorfismes, ja que es verifica:

Teorema 1.7 (d'invariància de la vora). *Siguin X, Y varietats topològiques amb vora, i $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfisme. Siguin $x \in X$, i $y = f(x) \in Y$. Aleshores $x \in \partial X$ si, i només si, $y \in \partial Y$.*

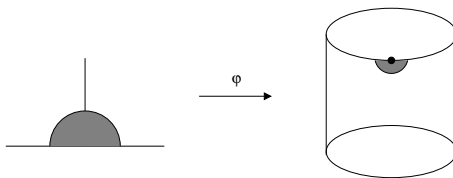


Figura 4.1: Vora d'un cilindre.

Demostració. Com f és un homeomorfisme, f indueix un isomorfisme en homologia local, per 1.3,

$$f_* : H_*(X, X - x) \xrightarrow{\sim} H_*(Y, Y - y).$$

Per 1.1, si U i V són entorns coordenats de x i y , respectivament, es té un isomorfisme

$$f_* : H_*(U, U - x) \xrightarrow{\sim} H_*(V, V - y),$$

i, segons 1.6 aquest isomorfisme només pot tenir lloc si ambdós punts, x, y , corresponen a punts de $\mathbf{H}^n - \partial\mathbf{H}^n$, o a punts de $\partial\mathbf{H}^n$. \square

Corollari 1.8. *Si f és un homeomorfisme de X en Y , f indueix un homeomorfisme entre les vores $\partial X \xrightarrow{\sim} \partial Y$.* \square

Així, per exemple, una banda de Möbius no pot ser homeomorfa a un cilindre, ja que mentres aquella té vora homeomorfa a una circumferència, i per tant connexa, la vora d'un cilindre té dues components.

És immediat deduir ara que es verifica

Corollari 1.9. *Sigui X una varietat topològica amb vora, de dimensió n . Aleshores ∂X és una varietat topològica de dimensió $n - 1$, i $X - \partial X$ és una varietat topològica de dimensió n , que s'anomena l'interior de X .* \square

Un tipus de raonament semblant als anteriors permet demostrar el teorema de la invariància de la dimensió pels políedres.

Teorema 1.10. *Siguin K i L complexs simplicials. Si $|K|$ i $|L|$ són homeomorfs, aleshores $\dim K = \dim L$.*

Demostració. El resultat se segueix de provar la següent caracterització de la dimensió de K en termes de l'homologia local: la dimensió de K és el màxim enter n tal que per a tot x d'un obert U no buit de $|K|$, es verifica $H_n(|K|, |K| - x) \neq 0$.

En efecte, notem $X = |K|$, i suposem que K és un complex simplicial de dimensió n . Provem que $H_p(X, X - x) = 0$ per a tot $x \in X$ i $p > n$. Sigui $x \in X$, i notem σ el seu suport, que és un símplex de K .

Substituint K per una subdivisió K' adequada podem suposar que x és un vèrtex v . Però aleshores hem vist que l'homologia local de X en v és isomorfa a l'homologia $H_*(\overline{st}_K v, \ell k_K v)$, i aquesta és nul·la per damunt de la dimensió de $\overline{st}_K v$ ja que coincideix amb l'homologia simplicial segons el teorema de comparació 9.2 del capítol 3.

Sigui ara σ un símplex de dimensió n , i x un punt de l'interior de σ . Com $\overset{\circ}{\sigma}$ és un obert de X , homeomorf a \mathbf{R}^n , l'homologia local és

$$H_n(X, X - x) \cong H_n(\overset{\circ}{\sigma}, \overset{\circ}{\sigma} - x) \cong \mathbf{Z} ,$$

i en particular diferent de zero.

Recíprocament, si per a tot x d'un obert U de X es té $H_n(X, X - x) \neq 0$, com la reunió $\cup_{\sigma \in K_{max}} \overset{\circ}{\sigma}$ és un obert dens de X , la intersecció $U \cap (\cup_{\sigma \in K_{max}} \overset{\circ}{\sigma})$ és no buida, i per tant si x és un punt d'aquesta intersecció, resulta que $H_n(X, X - x) \neq 0$, i per tant $\dim \sigma = n$, pel que $\dim K \geq n$.

Un cop així caracteritzada la dimensió d'un políedre, el resultat se segueix de 1.3. \square

Podem definir ara la dimensió dels espais triangulables:

Definició. Sigui X un espai triangulable. Es defineix la *dimensió de X* com la dimensió d'una triangulació de X , és a dir, si (K, f) és una triangulació de X , la dimensió de X és la dimensió del complex simplicial K .

És clar aleshores el següent corollari,

Corollari 1.11. *Siguin X, Y , dos espais triangulables. Si X i Y són homeomorfs, aleshores $\dim X = \dim Y$.* \square

Mitjançant el concepte de dimensió dels espais triangulables, la noció de graf admet una definició purament topològica.

Definició. Un *graf* és un espai topològic Γ triangulable i de dimensió 1.

Usualment, la definició de graf es dona en termes d'una estructura combinatoria formada pel conjunt de vèrtexs i el conjunt d'arestes del graf. Amb la definició que hem adoptat podem distingir els punts de Γ en els que incideixen més de dues arestes.

En efecte, sigui Γ un graf i $x \in \Gamma$. El grup d'homologia local $H_1(\Gamma, \Gamma - x)$ és un grup abelià lliure de rang finit, ja que com Γ és localment contràctil, x té un entorn contràctil V , i aleshores

$$H_1(\Gamma, \Gamma - x) \cong \ker (H_0(V - x) \longrightarrow H_0(V)) ,$$

que és lliure de rang igual al nombre de components connexes de $V - x$ menys 1. A més, per 1.2 aquest grup és de rang 1 llevat d'un nombre finit de punts x de Γ . Definim

$$m(x) = \text{rang } H_1(\Gamma, \Gamma - x) + 1 .$$

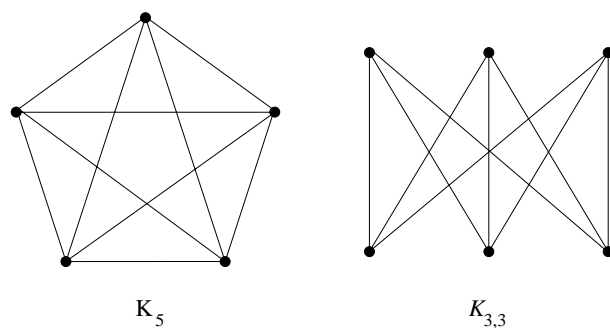
Els punts $x \in \Gamma$ tals que $m(x) \neq 1$ s'anomenen els *nodes* de Γ , i pel que hem dit abans, Γ té un nombre finit de nodes. És ara immediat provar que es verifica:

Proposició 1.12. *Sigui Γ un graf i $f : \Gamma \longrightarrow |K|$ una triangulació. Aleshores tot node de Γ és un vèrtex de K . Si v és un vèrtex de K , $m(v)$ és el nombre d'arestes de K que tenen v com a vèrtex.* \square

Si Γ és un graf, per la pròpia definició Γ és homeomorf a un políedre de \mathbf{R}^N , i de fet a un políedre de \mathbf{R}^3 , vegeu el problema 4 de l'apartat 1.5. Un problema clàssic de la teoria de grafs és el de caracteritzar els grafs plans, és a dir, els que són homeomorfs a un políedre de \mathbf{R}^2 . Per exemple, els grafs K_5 i $K_{3,3}$, representats en la figura 4.2 no són plans.

Hi ha diverses caracteritzacions dels grafs plans, degudes a Kuratowski, MacLane, Whitney... però el teorema més clàssic en aquest context és el de Kuratowski, que enunciem a continuació. Vegeu per exemple [6] per a la seva demostració.

Teorema de Kuratowski. *Un graf Γ és pla si, i només si, no conté K_5 ni $K_{3,3}$ com a subgrafs.* \square

Figura 4.2: Els grafes K_5 i $K_{3,3}$.

Problemes

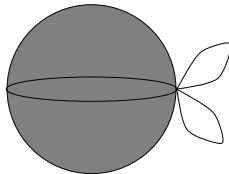
1. Doneu un exemple d'un espai topològic X , un punt $x \in X$ i un entorn V de x tals que $H_*(X, X - x) \not\cong H_*(V, V - x)$.
2. Sigui X el subespai de \mathbf{R}^{n+1} format per la unió de l'esfera \mathbf{S}^n amb el con definit per l'equació $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2$, i $f : X \rightarrow X$ un homeomorfisme. Proveu que l'origen és un punt fix de f . Proveu que f^2 té almenys tres punts fixos.
3. Sigui X un espai topològic de Hausdorff i ΣX la suspensió de X , és a dir, l'espai quocient de $X \times [0, 1]$ que resulta d'identificar $X \times 0$ a un punt v_0 , i $X \times 1$ a un punt v_1 . Calculeu l'homologia local en el punt v_0 de ΣX .
4. Sigui X una varietat topològica amb vora, triangulable, i $f : X \rightarrow |K|$ un homeomorfisme. Proveu que $f(\partial X)$ és un subpolíedre de K .
5. Sigui X un espai topològic de Hausdorff, i $x \in X$ un punt que té un entorn V contràctil. Proveu que es verifica

$$H_p(X, X - x) \cong H_{p-1}(V - x) \text{ , si } p \geq 2 \text{ ,}$$

i que es tenen isomorfismes

$$\begin{aligned} H_1(X, X - x) &\cong \ker (H_0(V - x) \longrightarrow H_0(V)), \\ H_0(X, X - x) &\cong \operatorname{coker}(H_0(V - x) \longrightarrow H_0(V)). \end{aligned}$$

6. Sigui X l'espai topològic format per la unió d'una esfera de dimensió 2 amb dues circumferències adjuntades en un punt (vegeu figura).



Proveu que X té grups d'homologia isomorfs a $Y = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, però que X i Y no són homeomorfs.

2 Homologia reduïda

En aquest apartat s'introdueix l'homologia reduïda d'un espai topològic. Aquesta homologia és una variant de l'homologia singular que permetrà formular amb més concisió alguns dels càlculs i raonaments dels propers apartats.

Sigui X un espai topològic, i $\{pt\}$ l'espai reduït a un sol punt. Hi ha una única aplicació contínua $\varepsilon : X \longrightarrow \{pt\}$, que és l'aplicació constant.

Definició. Sigui X un espai topològic. Es defineix l'*homologia reduïda* de X , que notarem $\widetilde{H}_*(X)$, com el nucli de l'aplicació ε_* induïda en homologia, és a dir,

$$\widetilde{H}_*(X) := \ker (\varepsilon : H_*(X) \longrightarrow H_*(\{pt\})).$$

Com l'homologia d'un punt es redueix al grup \mathbf{Z} concentrat en grau zero, en resulta

Proposició 2.1. *Segui X un espai topològic, llavors*

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_0(X) &= \ker (H_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}) , \\ \widetilde{H}_p(X) &= H_p(X), \quad \text{si } p \geq 1.\end{aligned}\quad \square$$

Exemples. 1. Si X té r -components arc-connexes, amb $r \geq 1$, llavors $\widetilde{H}_0(X) \cong \mathbf{Z}^{r-1}$, i en particular, X és arc-connex si, i només si, $\widetilde{H}_0(X) = 0$.

2. Si X és un espai topològic contràctil, $\widetilde{H}_*(X) = 0$, i en particular

$$\widetilde{H}_*(\mathbf{R}^n) = 0 .$$

3. El càlcul de l'homologia de les esferes efectuat en el capítol anterior implica que

$$\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } p \neq n, \\ \mathbf{Z}, & \text{si } p = n. \end{cases}$$

Com l'homologia reduïda coincideix amb l'homologia en dimensions més grans que 0 i la diferència pels grups H_0 és prou simple, resulta immediat provar que l'homologia reduïda té propietats anàlogues a les de l'homologia singular. Destaquem-ne per exemple la functorialitat i la invariància homotòpica, que enunciem a continuació.

Proposició 2.2. *Segui $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua d'espais topològics. Aleshores f induïx functorialment un morfisme en homologia reduïda*

$$f_* : \widetilde{H}_*(X) \longrightarrow \widetilde{H}_*(Y) ,$$

compatible amb el morfisme induït per f en homologia. □

Proposició 2.3. *Si $f, g : X \longrightarrow Y$ són aplicacions homòtopes, aleshores f i g induïxen la mateixa aplicació en homologia reduïda, és a dir,*

$$f_* = g_* : \widetilde{H}_*(X) \longrightarrow \widetilde{H}_*(Y) . \quad \square$$

Pel que fa a la successió de Mayer-Vietoris el resultat en aquest context requereix una hipòtesi addicional: que els oberts tinguin intersecció no buida. Aquest resultat s'enuncia en la forma següent

Proposició 2.4. *Segui X un espai topològic i U, V , oberts de X tals que $X = U \cup V$. Si $U \cap V \neq \emptyset$, llavors les incusions naturals induïxen una successió exacta*

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_p(U \cap V) \longrightarrow \widetilde{H}_p(U) \oplus \widetilde{H}_p(V) \longrightarrow \widetilde{H}_p(X) \longrightarrow \widetilde{H}_{p-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

que s'anomena successió exacta de Mayer-Vietoris en homologia reduïda.

Demostració. Segons la proposició 2.1 aquesta successió és la mateixa que la successió usual de Mayer-Vietoris llevat dels termes de grau zero.

Considerem el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}_1(X) & \longrightarrow & H_1(X) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}_0(U \cap V) & \longrightarrow & H_0(U \cap V) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}_0(U) \oplus \widetilde{H}_0(V) & \longrightarrow & H_0(U) \oplus H_0(V) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}_0(X) & \longrightarrow & H_0(X) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

que té files exactes, perquè en ser no buits tots els espais que intervenen, els morfismes $H_0 \longrightarrow \mathbf{Z}$ són exhaustius. Anomenem K_* , M_* , i L_* els complexs formats per la 1a, 2a i 3a columnes respectivament, de manera que el diagrama anterior correspon a la successió exacta de complexs

$$0 \longrightarrow K_* \longrightarrow M_* \longrightarrow L_* \longrightarrow 0 .$$

M_* és la successió exacta de Mayer-Vietoris usual, i per tant és un complex exacte. El complex L_* és exacte trivialment, per tant $H_*(M_*) = 0$ i $H_*(L_*) = 0$. Així, si considerem la successió exacta llarga d'homologia associada

$$\cdots \longrightarrow H_{p+1}(L_*) \longrightarrow H_p(K_*) \longrightarrow H_p(M_*) \longrightarrow H_p(L_*) \longrightarrow \cdots$$

en resulta immediatament que K_* és un complex exacte i per tant, que la successió de Mayer-Vietoris en homologia reduïda és exacta. \square

Problemes

1. Proveu que el teorema de Mayer-Vietoris per homologia reduïda és fals sense la hipòtesi d'intersecció no buida.
2. Sigui X un espai topològic i A un subespai de X . Suposem que $A \neq \emptyset$. Proveu que existeix una successió exacta

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_{p+1}(X) \longrightarrow H_p(X, A) \longrightarrow \tilde{H}_p(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_p(X) \longrightarrow \cdots$$

3 El teorema de no separació

Sigui $\mathbf{B}^r = \{x \in \mathbf{R}^r; \|x\| \leq 1\}$, $r \geq 0$, la bola r -dimensional i $I^r = I \times \cdots \times I$ un cub, on $I = [a, b]$ és un interval de la recta real. Els espais topològics \mathbf{B}^r i I^r són homeomorfs, i els anomenarem indistintament cub o bola r -dimensionals. En general estem interessats en boles submergides en un espai topològic X , així si $\varphi : I^r \longrightarrow X$ és una aplicació contínua tal que $\varphi : I^r \longrightarrow \varphi(I^r)$ és un homeomorfisme, direm que $\varphi(I^r)$ és una *cella o bola topològica* de dimensió r de X , i la denotarem per e^r .

Teorema 3.1 (de no separació). *Sigui e^r una bola topològica de \mathbf{S}^n . Aleshores $\mathbf{S}^n - e^r$ és no buit i es verifica*

$$\widetilde{H}_*(\mathbf{S}^n - e^r) = 0.$$

En particular $\widetilde{H}_0(\mathbf{S}^n - e^r) = 0$, el que podem enunciar en la forma

Corollari 3.2. $\mathbf{S}^n - e^r$ és *arc-connex*. □

Demostració. Observem en primer lloc que $\mathbf{S}^n - e^r$ és no buit, ja que en cas contrari tindriem $\mathbf{S}^n = e^r$ el que és absurd perquè e^r és contràctil i \mathbf{S}^n no.

Provem ara per inducció sobre r que es verifica $\widetilde{H}_*(\mathbf{S}^n - e^r) = 0$. Per $r = 0$, e^0 és un punt, i per tant $\mathbf{S}^n - e^0$ és homeomorf a \mathbf{R}^n , d'on se segueix que

$$\widetilde{H}_*(\mathbf{S}^n - e^0) \cong \widetilde{H}_*(\mathbf{R}^n) = 0.$$

Suposem cert el teorema per boles topològiques de dimensió $r-1$ i provem-lo per una bola de dimensió r , $e^r = \varphi(I^r)$. Sigui $[z] \in H_p(\mathbf{S}^n - e^r)$ una classe d'homologia. Volem provar que $[z] = 0$, és a dir que z és una vora a $\mathbf{S}^n - e^r$. Dividim la prova en dues etapes:

la etapa: Considerem les boles de dimensió r de \mathbf{S}^n donades per

$$e_1^r = \varphi(I^{r-1} \times [0, \frac{1}{2}])$$

$$e_2^r = \varphi(I^{r-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$$

i la bola de dimensió $r-1$

$$e^{r-1} = \varphi(I^{r-1} \times \{\frac{1}{2}\}) .$$

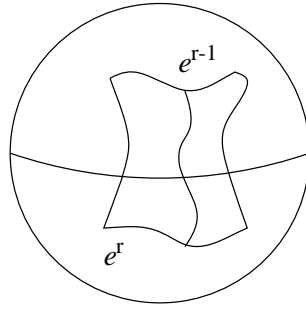


Figura 4.3: Les cel·les e^r i e^{r-1} .

Si $[z] \neq 0$ aleshores al menys per un dels morfismes en homologia induïts per les inclusions

$$\mathbf{S}^n - e^r \longrightarrow \mathbf{S}^n - e_i^r, \quad i = 1, 2,$$

la imatge de $[z]$ és no nul·la.

En efecte, notem $U = \mathbf{S}^n - e_1^r$ i $V = \mathbf{S}^n - e_2^r$. Observem que

$$\begin{aligned} U \cap V &= \mathbf{S}^n - e^r, \\ U \cup V &= \mathbf{S}^n - e^{r-1}. \end{aligned}$$

En particular, $U \cap V \neq \emptyset$ i per tant podem usar la successió de Mayer-Vietoris en homologia reduïda, corresponent a aquest recobriment

$$\widetilde{H}_{p+1}(\mathbf{S}^n - e^{r-1}) \rightarrow \widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - e^r) \rightarrow \widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - e_1^r) \oplus \widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - e_2^r) \rightarrow \widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - e^{r-1})$$

Per hipòtesi d'inducció $\widetilde{H}_*(\mathbf{S}^n - e^{r-1}) = 0$, i per tant en resulten isomorfismes

$$\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - e^r) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - e_1^r) \oplus \widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - e_2^r) ,$$

el que prova que $[z]$ ha de tenir una imatge no nul·la per alguna de les inclusions esmentades.

2a etapa: Provem ara que no hi ha classes $[z]$ diferents de zero.

Suposem que $[z] \neq 0$. Pel que acabem de provar en la primera etapa la classe de $[z]$ serà no nul·la a $\mathbf{S}^n - e_i^r$ per a $i = 1$ o $i = 2$. Suposem que $[z] \neq 0$ a $\mathbf{S}^n - e_1^r$. Podem repetir el procés a l'interval $[0, \frac{1}{2}]$, és a dir, considerar les cel·les $\varphi(I^{r-1} \times [0, \frac{1}{4}])$ i $\varphi(I^{r-1} \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}])$, i concloure que la imatge de $[z]$ en el complementari d'alguna d'aquestes boles és no nul·la. Iterant la primera etapa s'obté una successió d'interval·ls encaixats

$$\dots [a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1] \subseteq [0, 1]$$

amb $b_i - a_i = (1/2)^i$ i tals que la imatge de $[z]$ a $\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - \varphi(I^{r-1} \times [a_i, b_i]))$ és diferent de zero per a tot i . Com la longitud dels interval·ls encaixats $[a_i, b_i]$ tendeix a zero, la intersecció de tots ells serà un punt. Notem $\{c\} = \cap_i [a_i, b_i]$ i sigui

$$\begin{aligned} e^{r-1} &= \varphi(I^{r-1} \times \{c\}) \\ &= \cap \varphi(I^{r-1} \times [a_i, b_i]) , \end{aligned}$$

de forma que els oberts $U_i = \mathbf{S}^n - \varphi(I^{r-1} \times [a_i, b_i])$ formen un recobriment obert de $\mathbf{S}^n - e^{r-1}$:

$$\mathbf{S}^n - e^{r-1} = \cup (\mathbf{S}^n - \varphi(I^{r-1} \times [a_i, b_i])) .$$

Per hipòtesi d'inducció

$$\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - e^{r-1}) = 0 , \text{ per a tot } p \geq 0 ,$$

per tant $z = \partial w$ en el complementari de e^{r-1} . Sigui $w = \sum \lambda_j \sigma_j$, on σ_j són $(p+1)$ -símplexs singulars, el *suport de la cadena* w

$$\text{sup } w = \cup \sigma_j(\Delta^{p+1})$$

és compacte, i per tant del recobriment de $\text{sup } w$ induït pels oberts U_i s'en pot extreure un subrecobriment finit. Però, com $U_i \subseteq U_{i+1}$, això significa que existirà un j de forma que

$$\text{sup } w \subseteq U_j = \mathbf{S}^n - \varphi(I^{r-1} \times [a_j, b_j]) ,$$

és a dir, $[z]$ és zero a $\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - \varphi(I^{r-1} \times [a_j, b_j]))$, el que és contradictori amb l'elecció dels intervals $[a_i, b_i]$. \square

El teorema de no separació dona l'anul·lació de l'homologia reduïda del complementari d'una bola topològica de \mathbf{S}^n , i sembla natural preguntar-se si aquest complementari és contràctil. La resposta és negativa encara que no és fàcil donar contraexemples. La figura 4.4 representa un interval de \mathbf{S}^3 conegut com *arc salvatge de Artin-Fox*. Es pot demostrar que el complementari no és simplement connex, i en particular, que no és contràctil, vegeu: E.Artin, R.H.Fox: Some Wild Cells and Spheres in Three-Dimensional Space. *Annals of Math.* 49, (1948), 979 – 990, i [19].

Figura 4.4: Arc salvatge de Artin-Fox.

Problemes

1. Sigui Y un espai topològic compacte amb la propietat següent: per tota aplicació contínua $f : Y \rightarrow \mathbf{S}^n$ es verifica $\widetilde{H}_*(\mathbf{S}^n - f(Y)) = 0$. Proveu que $Y \times I$ verifica la mateixa propietat.

4 El teorema de separació de Jordan-Brouwer

Recordem que una corba de Jordan del pla \mathbf{R}^2 és, per definició, una corba $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ contínua, tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$ i injectiva a $[0, 1)$. Equivalentment, una corba de Jordan és una aplicació contínua i injectiva $\tilde{\alpha} : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$. El clàssic teorema de la corba de Jordan s'enuncia en la forma:

Teorema de Jordan. *El complementari d'una corba de Jordan en el pla, té exactament dues components connexes, una d'elles acotada, i l'altra no, que la tenen per frontera comú.*

L'objectiu d'aquest apartat és provar aquest teorema i, de fet, provarem una generalització d'aquest resultat en qualsevol dimensió, en la que l'ingredient essencial de la demostració és el teorema de no separació de l'apartat anterior. Per fer-ho, ens serà més còmode estudiar el complementari d'una corba de Jordan a \mathbf{S}^2 en lloc de \mathbf{R}^2 , i en general a \mathbf{S}^n . De fet és equivalent estudiar el nombre de components connexes del complementari en un i altre cas: si $\varphi : \mathbf{S}^r \rightarrow \mathbf{R}^n$ és una aplicació contínua, $\varphi(\mathbf{S}^r)$ és un compacte i per tant $\mathbf{R}^n - \varphi(\mathbf{S}^r)$ té una única component no acotada, i així, el nombre de components connexes de $\mathbf{R}^n - \varphi(\mathbf{S}^r)$ i $\mathbf{S}^n - \varphi(\mathbf{S}^r)$ és el mateix.

Teorema 4.1 (de separació). *Sigui $\varphi : \mathbf{S}^r \rightarrow \mathbf{S}^n$ una aplicació contínua que és un homeomorfisme de \mathbf{S}^r amb la seva imatge $s^r = \varphi(\mathbf{S}^r)$. Aleshores:*

1. *Si $s^r = \mathbf{S}^n$, llavors $r = n$ i $\varphi : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ és un homeomorfisme.*
2. *Si $s^r \neq \mathbf{S}^n$, llavors*

$$\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - s^r) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } p = n - r - 1, \\ 0, & \text{si } p \neq n - r - 1, \end{cases}$$

i, en particular, $r < n$.

Demostració. Si $s^r = \mathbf{S}^n$, llavors $\varphi : \mathbf{S}^r \longrightarrow \mathbf{S}^n$ és un homeomorfisme, on \mathbf{S}^r i \mathbf{S}^n són varietats topològiques de dimensions r i n , respectivament i per tant $r = n$, pel teorema d'invariància de la dimensió, 1.4.

Suposem ara que $s^r \neq \mathbf{S}^n$. Aleshores $\mathbf{S}^n - s^r \neq \emptyset$ i calcularem l'homologia reduïda $\widetilde{H}_*(\mathbf{S}^n - s^r)$ per inducció sobre r .

Si $r = 0$, s^0 està formada per dos punts diferents de l'esfera, $s^0 = \{x, y\}$, $x \neq y$, i tindrem els isomorfismes

$$\widetilde{H}_*(\mathbf{S}^n - \{x, y\}) \cong \widetilde{H}_*(\mathbf{R}^n - \{y\}) \cong \widetilde{H}_*(\mathbf{S}^{n-1}),$$

i per tant

$$\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - s^0) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } p = n - 1, \\ 0, & \text{si } p \neq n - 1. \end{cases}$$

Suposem ara cert el resultat per esferes topològiques de dimensió $r - 1$. Usarem les notacions següents:

$$\begin{aligned} E_+^r &= \{x \in \mathbf{S}^r; x_{r+1} \geq 0\}, & e_+^r &= \varphi(E_+^r), \\ E_-^r &= \{x \in \mathbf{S}^r; x_{r+1} \leq 0\}, & e_-^r &= \varphi(E_-^r), \\ \mathbf{S}^{r-1} &= E_+^r \cap E_-^r = \{x \in \mathbf{S}^r; x_{r+1} = 0\}, & s^{r-1} &= \varphi(\mathbf{S}^{r-1}). \end{aligned}$$

Observem que es tenen les igualtats

$$\begin{aligned} s^r &= e_+^r \cup e_-^r, \\ s^{r-1} &= e_+^r \cap e_-^r, \\ \mathbf{S}^n - s^r &= (\mathbf{S}^n - e_+^r) \cap (\mathbf{S}^n - e_-^r) \neq \emptyset, \\ \mathbf{S}^n - s^{r-1} &= \mathbf{S}^n - (e_+^r \cap e_-^r) = (\mathbf{S}^n - e_+^r) \cup (\mathbf{S}^n - e_-^r). \end{aligned}$$

La successió exacta de Mayer-Vietoris en homologia reduïda associada és

$$\begin{aligned} \dots \widetilde{H}_{p+1}(\mathbf{S}^n - e_+^r) \oplus \widetilde{H}_{p+1}(\mathbf{S}^n - e_-^r) &\longrightarrow \widetilde{H}_{p+1}(\mathbf{S}^n - s^{r-1}) \\ &\longrightarrow \widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - s^r) \longrightarrow \widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - e_+^r) \oplus \widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - e_-^r) \dots \end{aligned}$$

Com e_+^r i e_-^r són r -boles topològiques podem aplicar el teorema de no separació i deduir que la successió anterior dona els isomorfismes

$$\widetilde{H}_{p+1}(\mathbf{S}^n - s^{r-1}) \cong \widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - s^r),$$

el que permet aplicar la hipòtesi d'inducció i deduir

$$\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - s^r) \cong \widetilde{H}_{p+1}(\mathbf{S}^n - s^{r-1}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } p+1 = n - (r-1) - 1, \\ 0, & \text{si } p+1 \neq n - (r-1) - 1. \end{cases}$$

Finalment suposem que $r \geq n$. Aleshores $\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - s^r) \cong \mathbf{Z}$, si $p = n - r - 1 \leq -1$, el que és absurd ja que $\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^n - s^r) = 0$ si $p < 0$. \square

Corollari 4.2. 1. *Tota s^{n-1} separa \mathbf{S}^n en dues components connexes.*

2. *Si $r < n - 1$, llavors $\mathbf{S}^n - s^r$ és connex, és a dir, s^r no separa \mathbf{S}^n .*

Demostració. 1. $\widetilde{H}_0(\mathbf{S}^n - s^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$, per tant $H_0(\mathbf{S}^n - s^{n-1}) \cong \mathbf{Z}^2$, i per tant $\mathbf{S}^n - s^{n-1}$ té dues components arc-connexes o connexes.

2. Si $r \neq n - 1$, el teorema dona $\widetilde{H}_0(\mathbf{S}^n - s^r) = 0$, i per tant $\mathbf{S}^n - s^r$ és connex. \square

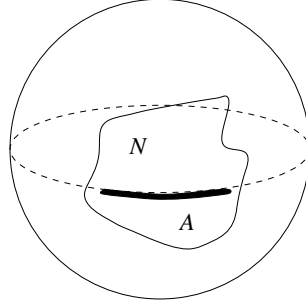
Podem expressar el resultat anterior dient que s^r separa \mathbf{S}^n en dimensió $n - r - 1$. Observem però que el teorema de separació no dona encara el teorema de la corba de Jordan tal i com l'hem enunciat al començament d'aquest apartat, ja que cal precisar la relació entre les components de $\mathbf{S}^n - s^{n-1}$ i l'esfera s^{n-1} .

Teorema 4.3 (de separació de Jordan-Brouwer). *Sigui s^{n-1} una $(n - 1)$ -esfera continguda en una \mathbf{S}^n . Llavors, $\mathbf{S}^n - s^{n-1}$ té dues components connexes i la frontera de cadascuna d'elles és s^{n-1} .*

Demostració. Pel teorema de separació $\mathbf{S}^n - s^{n-1}$ té dues components connexes. Sigui $\mathbf{S}^n - s^{n-1} = U \cup V$, la descomposició corresponent, amb U i V les components connexes, que seran obertes. Si denotem per FrU la frontera de U , ens queda per provar que $FrU = s^{n-1}$. Com

$$FrU = \overline{U} - U \subseteq U \cup s^{n-1},$$

es té $FrU \subseteq s^{n-1}$. Hem de provar ara que $s^{n-1} \subseteq FrU$ o, equivalentment, que $s^{n-1} \subseteq \overline{U}$. Així doncs, si prenem un $x \in s^{n-1}$ i un entorn N de x , cal provar que $N \cap U \neq \emptyset$.

Figura 4.5: La bola A i l'entorn N .

Sigui A una bola oberta continguda a \mathbf{S}^{n-1} amb centre x , o sigui: si $x = \varphi(y)$, $y \in \mathbf{S}^{n-1}$, considerem B una bola oberta de \mathbf{S}^{n-1} de centre y , i $A = \varphi(B)$.

Suposem que hem triat el radi de B de forma que $A \subseteq N$. El complementari de B a \mathbf{S}^{n-1} és una bola tancada i, per tant, $e^{n-1} := \mathbf{S}^{n-1} - A$ és una $(n-1)$ -cella de \mathbf{S}^n . Així, si apliquem el teorema de no separació

$$\widetilde{H}_0(\mathbf{S}^n - e^{n-1}) = 0$$

i, per tant, $Z = \mathbf{S}^n - e^{n-1}$ és connex. Com

$$Z = U \cup V \cup A \subseteq U \cup V \cup N,$$

si $N \cap U$ fos buit aleshores $U \cap (V \cup N)$ també ho seria, i podríem desconnectar Z en la forma

$$Z = (Z \cap U) \cup (Z \cap (V \cup N)),$$

el que és absurd perquè Z és connex. Així doncs $N \cap U \neq \emptyset$. \square

El teorema de separació de Jordan-Brouwer permet demostrar una versió topològica del teorema de la funció inversa de l'Anàlisi Matemàtica. Recordem que aquest resultat s'enuncia en la forma:

Teorema de la funció inversa. *Sigui U un obert de \mathbf{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicació diferenciable amb continuïtat, i x un punt de U . Aleshores si $\det df_x \neq 0$ existeixen entorns, A i B , de x i $f(x)$ respectivament, tals que $f : A \rightarrow B$ és un difeomorfisme.*

Una conseqüència immediata és

Corol·lari. *Sigui U un obert de \mathbf{R}^n i $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicació diferenciable amb continuïtat. Si $\det df_x \neq 0$, per tot $x \in U$, i f és injectiva, aleshores $f(U)$ és un obert de \mathbf{R}^n , i $f : U \rightarrow f(U)$ és un difeomorfisme.*

Aquest corol·lari admet el següent anàleg en el context topològic.

Teorema 4.4 (d'invariància del domini). *Sigui U un obert de \mathbf{R}^n i $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicació contínua. Si f és injectiva, aleshores $V = f(U)$ és un obert de \mathbf{R}^n i $f : U \rightarrow V$ és un homeomorfisme.*

Demostració. Com \mathbf{R}^n és un obert de \mathbf{S}^n podem suposar que $U \subseteq \mathbf{S}^n$. Comprovem que tot punt de V és interior a V . Sigui $x \in U$ i $y = f(x)$. Considerem una bola B^n de centre x tal que $B^n \subseteq U$. Com B^n és compacta, $f|_{B^n}$ és un homeomorfisme de B^n amb la seva imatge, i per tant $f(B^n)$ és una bola topològica $e^n \subseteq \mathbf{S}^n$. Pel teorema de no separació $A = \mathbf{S}^n - e^n$ és connex. D'altra banda, $B = f(\overset{\circ}{B}^n)$ és connex, i com $f(B^n - \overset{\circ}{B}^n) = f(\mathbf{S}^{n-1})$ és una $(n-1)$ -esfera $s^{n-1} \subseteq \mathbf{S}^n$, tindrem que $\mathbf{S}^n - s^{n-1} = A \cup B$, i per tant A i B són les components connexes de $\mathbf{S}^n - s^{n-1}$. En particular B és un obert de \mathbf{S}^n que conté y , i $B \subseteq V$, en definitiva V és obert. A més, f és un homeomorfisme. \square

Corol·lari 4.5. *Siguin X i Y varietats topològiques de la mateixa dimensió i $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua i injectiva. Aleshores f és oberta. En particular, si f és bijectiva, f és un homeomorfisme.*

Demostració. Sigui $x \in X$ i $y = f(x)$. Provem que y és un punt interior de $f(X)$: sigui V un entorn coordinat de y en Y , i U un entorn coordinat de x tal que $U \subseteq f^{-1}(V)$. Aleshores f indueix una aplicació contínua i injectiva $f|_U : U \rightarrow V$, que és oberta pel teorema d'invariància del domini, i per tant $f(U)$ és un obert de Y . Així, $y \in f(U) \subseteq f(X)$ és un punt interior. \square

Un cas particular del corol·lari 4.5, que utilitzarem al capítol 5, és el següent resultat

Corol·lari 4.6. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n , U un obert de \mathbf{R}^n , i $\varphi : U \rightarrow X$ una aplicació contínua i injectiva. Aleshores $\varphi(U)$ és un obert de X .*

En aquest cas, es diu que φ és una parametrització local de X . \square

Problemes

1. Sigui $\gamma : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ una aplicació contínua i injectiva. Calculeu $H_*(\mathbf{R}^3 - \gamma(\mathbf{S}^1))$. Observeu que aquesta homologia no depén de l'aplicació γ .
2. Calculeu l'homologia del complementari a \mathbf{R}^n dels espais següents
 - (a) una bola topològica.
 - (b) una esfera topològica.
 - (c) un subespai homeomorf a \mathbf{R}^k , amb $k \leq n$.
3. Siguin X, Y esferes topològiques de \mathbf{S}^n de dimensions k i l respectivament. Calculeu $H_*(\mathbf{S}^n - (X \cup Y))$ en els casos següents
 - (a) X i Y són disjunts.
 - (b) $X \cap Y$ és un sol punt.
4. Sigui $\Gamma \subseteq \mathbf{S}^n$ un graf connex. Calculeu $H_*(\mathbf{S}^n - \Gamma)$.
5. Calculeu l'homologia del complementari a \mathbf{R}^3 dels espais següents:
 - (a) un cilindre.
 - (b) una banda de Möbius.
6. Sigui x un punt de la component no acotada del complementari a \mathbf{R}^n d'una esfera topològica de dimensió $n - 1$, s^{n-1} . Proveu que la inclusió

$$s^{n-1} \longrightarrow \mathbf{R}^n - x$$

indueix l'aplicació zero en homologia reduïda. El recíproc d'aquest resultat és també cert, i es coneix com teorema de Borsuk, vegeu [14].

7. Proveu amb un exemple que el teorema de la invariància del domini és fals per a tancats.
8. Proveu que \mathbf{R}^n no conté subvarietats de dimensió n compactes.
9. Siguin X i Y varietats topològiques compactes i connexes, de la mateixa dimensió n . Sigui $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua. Proveu que f admet una secció (és a dir, que existeix una aplicació contínua $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = id_Y$) si, i només si, f és un homeomorfisme. Deduïu que la projecció $\pi : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{P}^n$ no admet cap secció.

5 Grau d'aplicacions entre esferes

Sigui $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ l'esfera n -dimensional, $n \geq 0$. Tota aplicació ortogonal $f : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ induïx una aplicació contínua $f : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$, i d'aquesta forma obtenim un bon nombre d'aplicacions contínues de l'esfera en ella mateixa. Exemples d'aquesta mena d'aplicacions són les rotacions o l'*aplicació antipodal* definida per

$$\begin{aligned} a\ell^n : \mathbf{S}^n &\longrightarrow \mathbf{S}^n \\ x &\longmapsto -x . \end{aligned}$$

Com podem classificar aquestes aplicacions respecte de la relació d'homotopia? Volem saber, per exemple, si una rotació i l'aplicació antipodal poden ser homòtopes. Per estudiar aquest tipus de qüestió és convenient conèixer l'acció de f en homologia.

En aquest apartat veurem que en el cas de les esferes aquesta acció ve determinada per un enter, el grau de f . En efecte, f induïx un morfisme

$$f_* : \widetilde{H}_n(\mathbf{S}^n) \longrightarrow \widetilde{H}_n(\mathbf{S}^n) ,$$

i, com $\widetilde{H}_n(\mathbf{S}^n) \cong \mathbf{Z}$, aquest morfisme f_* serà igual a la multiplicació per un enter.

Definició. Sigui $f : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ una aplicació contínua. Es defineix el *grau* de f com l'enter $\deg f$ tal que

$$f_*(z) = \deg f \cdot z ,$$

per a tot $z \in \widetilde{H}_n(\mathbf{S}^n)$.

Resumim les propietats més immediates del grau en la proposició següent

Proposició 5.1. 1. *El grau de l'aplicació identitat és 1, $\deg id_{\mathbf{S}^n} = +1$.*

2. *Siguin $f, g : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ aplicacions contínues. Si f és homòtopa a g , aleshores $\deg f = \deg g$. En particular, si f és homòtopa a una aplicació constant aleshores $\deg f = 0$.*

3. *Siguin $f, g : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ aplicacions contínues. Aleshores $\deg (f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.*

4. Si $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ és una equivalència homotòpica, aleshores $\deg f = \pm 1$.

Demostració. La prova d'aquestes propietats és immediata. Assenyalem a títol d'exemple que 3 se segueix de les igualtats:

$$(f \circ g)_*(z) = f_*(g_*(z)) = f_*(\deg g \cdot z) = \deg g \cdot f_*(z) = \deg g \cdot \deg f \cdot z \quad \square$$

El valor del grau de l'aplicació antipodal prova que aquesta no és homòtopa a l'aplicació identitat o a una rotació (vegeu el problema 1) per a les esferes de dimensió parell, ja que es té

Teorema 5.2. *El grau de l'aplicació antipodal $a\ell^n : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ és $(-1)^{n+1}$.*

Demostració. Farem la demostració per inducció sobre n . Calculem $\deg a\ell^0$: en aquest cas $\mathbf{S}^0 = \{x, y\}$, amb $x \neq y$, i l'homologia reduïda està generada pel 0-cicle $[x - y]$, ja que es té

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_0(S^0) &= \ker (H_0(S^0) \cong \mathbf{Z}[x] \oplus \mathbf{Z}[y] \longrightarrow H_0(pt)) \\ &= \mathbf{Z}[x - y] . \end{aligned}$$

D'altra banda l'aplicació antipodal intercanvia els punts x i y , i per tant

$$a\ell_*^0(x - y) = y - x = -(x - y) ,$$

és a dir, $\deg a\ell^0 = -1$.

Suposem cert el resultat per a esferes de dimensió $n - 1$ i provem-lo per a dimensió n . Prenem un punt qualsevol $R \in \mathbf{S}^n$ i la seva imatge $T = a\ell^n(R)$, i considerem el recobriment de \mathbf{S}^n format pels oberts

$$\begin{aligned} U &= \mathbf{S}^n - R , \\ V &= \mathbf{S}^n - T . \end{aligned}$$

La intersecció $U \cap V = \mathbf{S}^n - \{R, T\}$ és homotòpicament equivalent a l'esfera \mathbf{S}^{n-1} . L'aplicació antipodal $a\ell^n$ intercanvia U i V , i a més a més és compatible amb la retracció de $U \cap V$ sobre l'esfera \mathbf{S}^{n-1} , induint en aquesta l'aplicació

$a\ell^{n-1}$. Per tant es té un diagrama commutatiu de successions de Mayer-Vietoris, vegeu 6.1 i 6.2, del capítol 3.

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{H}_n(U) \oplus \widetilde{H}_n(V) & \xrightarrow{p} & \widetilde{H}_n(\mathbf{S}^n) & \xrightarrow{\delta} & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{n-1}(U) \oplus \widetilde{H}_{n-1}(V) \\ a\ell_*^n \downarrow & & a\ell_*^n \downarrow & & a\ell_*^{n-1} \downarrow & & a\ell_*^n \downarrow \\ \widetilde{H}_n(V) \oplus \widetilde{H}_n(U) & \xrightarrow{-p} & \widetilde{H}_n(\mathbf{S}^n) & \xrightarrow{-\delta} & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{n-1}(V) \oplus \widetilde{H}_{n-1}(U) \end{array}$$

Com $\widetilde{H}_*(U) = \widetilde{H}_*(V) = 0$, el diagrama es redueix a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}_n(\mathbf{S}^n) & \xrightarrow{\delta} & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow a\ell_*^n & & \downarrow a\ell_*^{n-1} & & \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}_n(\mathbf{S}^n) & \xrightarrow{-\delta} & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La commutativitat d'aquest diagrama i la hipòtesi d'inducció permeten escriure, per $z \in \widetilde{H}_n(\mathbf{S}^n)$, les igualtats

$$a\ell_*^n(z) = (-\delta)^{-1} a\ell_*^{n-1} \delta(z) = -\delta^{-1} (-1)^n \delta(z) = (-1)^{n+1} z,$$

i en definitiva,

$$\deg a\ell^n = (-1)^{n+1}. \quad \square$$

Anem a veure ara com podem aplicar el càlcul del grau de l'aplicació antipodal per estudiar la presència de punts fixos o antifixos per les aplicacions entre esferes. Recordem que donada una aplicació $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ es diu que $x \in \mathbf{S}^n$ és un punt *fix* de f si $f(x) = x$, i que x és un punt *antifix* si $f(x) = -x$.

Proposició 5.3. *Sigui $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ una aplicació contínua. Aleshores:*

1. *Si f no té punts fixos, $\deg f = (-1)^{n+1}$.*
2. *Si f no té punts antifixos, $\deg f = 1$.*

Demostració. 1. Si f no té punts fixos es tindrà $f(x) \neq x$, per a tot $x \in \mathbf{S}^n$. Per tant 0 no pertany al segment determinat per $-x$ i $f(x)$, és a dir, $(1-t)f(x) - tx \neq 0$, per a tot $t \in [0, 1]$. Així

$$\begin{aligned} H & : \mathbf{S}^n \times I \longrightarrow \mathbf{S}^n \\ H(x, t) & = \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|} \end{aligned}$$

defineix una homotopia contínua entre $H(x, 0) = f(x)$ i $H(x, 1) = a\ell^n(x)$ i, tindrem $\deg f = \deg a\ell^n = (-1)^{n+1}$.

2. Considerem $g = a\ell^n \circ f$. El punt x és un punt fix de g si, i només si, x és un punt antifix de f . Per tant, g no té punts fixos. Així per 1, $\deg g = (-1)^{n+1}$, però per 5.1

$$\deg g = \deg a\ell^n \cdot \deg f = (-1)^{n+1} \deg f,$$

i per tant, $\deg f = 1$. □

Corollari 5.4. *Tota aplicació contínua $f : \mathbf{S}^{2n} \rightarrow \mathbf{S}^{2n}$, o té un punt fix, o té un punt antifix. És a dir, existeix un $x_0 \in \mathbf{S}^{2n}$ tal que $f(x_0) = \pm x_0$.*

Demostració. Si f no té punts fixos, $\deg f = (-1)^{2n+1} = -1$ i si f no té punts antifixos, $\deg f = 1$. Per tant, o f té punts fixos o punts antifixos. □

Observació. Si $f : \mathbf{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{S}^{2n+1}$ és una aplicació contínua, el resultat anterior és fals. Per exemple, per $n = 1$ podem considerar un gir d'angle $\alpha \neq 0, \pi$, que no té punts fixos ni antifixos.

Aquests resultats admeten també una interpretació en termes de camps vectorials tangents sobre les esferes. Un camp vectorial tangent sobre l'esfera \mathbf{S}^n és una aplicació contínua $v : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ tal que, per a tot $x \in \mathbf{S}^n$, x i $v(x)$ són ortogonals, és a dir, $\langle x, v(x) \rangle = 0$.

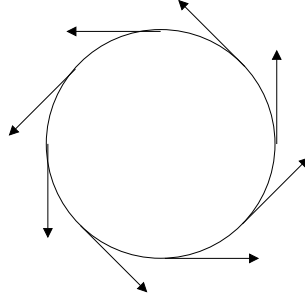
Corollari 5.5. *Si $v : \mathbf{S}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{2n+1}$ un camp vectorial tangent. Llavors, existeix un $x_0 \in \mathbf{S}^{2n}$ tal que $v(x_0) = 0$.*

Demostració. Suposem que $v(x) \neq 0$, per a tot $x \in \mathbf{S}^{2n}$ i definim una aplicació $f : \mathbf{S}^{2n} \rightarrow \mathbf{S}^{2n}$ per

$$f(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|},$$

que serà una aplicació contínua. Per hipòtesi

$$\langle f(x), x \rangle = \left\langle \frac{v(x)}{\|v(x)\|}, x \right\rangle = 0,$$

Figura 4.6: Un camp vectorial sense zeros de \mathbf{S}^1 .

per a tot x . Però pel corollari 5.4 sabem que existeix un x_0 tal que $f(x_0) = \pm x_0$, així verificarà

$$\langle f(x_0), x_0 \rangle = \langle \pm x_0, x_0 \rangle = \pm \|x_0\|^2 = \pm 1,$$

el que és absurd. \square

Les esferes de dimensió senar admeten camps vectorials tangents sense zeros ja que, per exemple, el camp

$$v(x_1, \dots, x_{2n+2}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2n+2}, x_{2n+1})$$

és tangent i no té zeros. Així doncs, el corollari anterior es pot enunciar en la forma

Corollari 5.6. \mathbf{S}^n admet un camp vectorial tangent sense zeros si, i només si, n és senar. \square

Acabem aquest apartat assenyalant que el grau de les aplicacions contínues de l'esfera \mathbf{S}^n en ella mateixa resol completament el problema plantejat al principi, és a dir, determina exactament el tipus d'homotopia de l'aplicació contínua, ja que es verifica el següent resultat:

Teorema del grau de Hopf. *Sigui $[\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n]$ el conjunt de classes d'homotopia d'aplicacions contínues de \mathbf{S}^n en si mateixa. Aleshores el grau estableix una bijecció*

$$\deg : [\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n] \longrightarrow \mathbf{Z}.$$

□

L'exhaustivitat de l'aplicació \deg del teorema de Hopf és fàcil de provar a partir de l'exhaustivitat en el cas $n = 1$, vegeu el problema 7, però la prova de la injectivitat és més difícil. A [5] trobareu una demostració completa del teorema de Hopf.

Problemes

1. Sigui $r : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ una aplicació contínua, $n \geq 1$.

(a) Proveu que si r és la reflexió

$$r(x_0, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$$

aleshores $\deg r = -1$.

(b) Proveu que si r és una rotació aleshores r és homòtopa a l'aplicació identitat, i per tant $\deg r = 1$.

(c) Useu (a) i (b) per deduir que si r és una aplicació ortogonal es té $\deg r = \det r$. Obteniu així una altra prova de que el grau de l'aplicació antipodal és $(-1)^{n+1}$.

2. Sigui X un espai topològic i $f, g : X \longrightarrow \mathbf{S}^n$ dues aplicacions contínues.

(a) Proveu que si $f(x) \neq -g(x)$ per a tot $x \in X$, aleshores f és homòtopa a g .

(b) Proveu que si $f(x) \neq g(x)$ per a tot $x \in X$, aleshores f és homòtopa a $-g$.

(c) Sigui $X = \mathbf{S}^n$. Deduïu que es verifica:

Si $f(x) \neq -g(x)$, per a tot $x \in X$, aleshores $\deg f = \deg g$.

Si $f(x) \neq g(x)$, per a tot $x \in X$, aleshores $\deg f = (-1)^{n+1} \deg g$.

3. Siguin $f, g : \mathbf{S}^{2n} \longrightarrow \mathbf{S}^{2n}$ aplicacions contínues.

(a) Proveu que f, g o la composició $f \circ g$, té un punt fix.

(b) Proveu que f ó f^2 té un punt fix.

4. Sigui $f : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ una aplicació contínua tal que $f(-x) = -f(x)$ i tal que $\deg f \neq (-1)^{n+1}$. Proveu que existeix un punt x tal que x i $-x$ són fixos. Deduïu en particular:
- (a) una rotació de \mathbf{R}^{2n+1} té un eix fix.
 - (b) si A és una matriu ortogonal de determinant diferent de $(-1)^{n+1}$ aleshores A té al menys un valor propi real.
5. Siguin $f, g : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ aplicacions contínues tals que $\deg f \neq \deg g$. Proveu que existeix un punt x tal que $f(x)$ és ortogonal a $g(x)$.
6. Sigui G un grup que actua lliurement a \mathbf{S}^{2n} , és a dir, tal que per a tot $g \in G$ es verifica $gx \neq x$ per a qualsevol $x \in \mathbf{S}^{2n}$. Proveu que G és o trivial o isomorf a $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
7. Sigui $f : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ una aplicació contínua de grau d . Proveu que la suspensió de f , $\Sigma f : \Sigma \mathbf{S}^n \rightarrow \Sigma \mathbf{S}^n$, és una aplicació de grau d . Deduïu que l'aplicació

$$\deg : [\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n] \rightarrow \mathbf{Z},$$

és exhaustiva.

8. Sigui $f : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ una aplicació contínua tal que $f(\mathbf{R}^{n+1} - x) \subseteq \mathbf{R}^{n+1} - x$, $x \in \mathbf{R}^{n+1}$.
- (a) Proveu que existeix un enter $\deg_x f$ tal que $f_*(z) = \deg_x f \cdot z$, per a tot $z \in H_{n+1}(\mathbf{R}^{n+1}, \mathbf{R}^{n+1} - x)$. A aquest enter se l'anomena el *grau local de f en x* .
 - (b) Suposant que $x = 0$, proveu que si $g : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ és l'aplicació definida per $g(y) = f(y)/\|f(y)\|$, aleshores $\deg_0 f = \deg g$.
 - (c) Proveu que si f és un isomorfisme lineal, aleshores $\deg_0 f = \det f / |\det f|$.
9. Sigui R un anell commutatiu unitari, i $f : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ una aplicació contínua.
- (a) Proveu que existeix un element de R , $\deg(f, R)$ tal que $f_*(z) = \deg(f, R)z$, per a tot $z \in H_n(\mathbf{S}^n; R)$. A $\deg(f, R)$ se l'anomena el *grau de f amb coeficients en R* .
 - (b) Proveu que si $\varphi : \mathbf{Z} \rightarrow R$ és el morfisme natural tal que $\varphi(1) = 1$, aleshores $\varphi(\deg f) = \deg(f, R)$. Deduïu en particular que la reducció mòdul 2 del grau de f és el grau de f amb coeficients a $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. També notarem $\deg_2 f = \deg(f, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

6 El teorema de Borsuk-Ulam

Per la seva pròpia definició l'esfera \mathbf{S}^n és un subespai de l'espai euclidià \mathbf{R}^{n+1} , observem però que no admet cap immersió en un espai euclidià de dimensió menor, és a dir, que no existeix cap aplicació contínua i *injectiva* $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$. En efecte, suposem que $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ fos una aplicació contínua i injectiva. Pel teorema d'invariància del domini aquesta aplicació serà oberta, i per tant la seva imatge serà un obert de \mathbf{R}^n . D'altra banda, com el domini de l'aplicació és compacte la imatge serà compacta i per tant tancada. En definitiva la imatge és oberta i tancada alhora, i com \mathbf{R}^n és connex ha de ser exhaustiva. Però això és absurd ja que \mathbf{R}^n no és compacte (vegeu també el problema 7 de l'apartat 4). El resultat que segueix millora aquest resultat especificant l'existència de punts distingits de no injectivitat de f .

Teorema 6.1 (de Borsuk-Ulam). *Sigui $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicació contínua. Aleshores hi ha un punt $x \in \mathbf{S}^n$ tal que*

$$f(x) = f(-x).$$

Observem que aquest enunciat és equivalent a

Teorema 6.2. *Sigui $g : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^m$ una aplicació contínua que commuta amb l'aplicació antipodal, és a dir, tal que $g(-x) = -g(x)$, per a tot $x \in \mathbf{S}^n$. Aleshores $n \leq m$.*

Comprovem, en efecte, que el teorema de Borsuk-Ulam es conseqüència d'aquest resultat: donada una aplicació contínua $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ si no existís cap punt $x \in \mathbf{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$, podríem definir l'aplicació contínua

$$\begin{aligned} g : \mathbf{S}^n &\longrightarrow \mathbf{S}^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \end{aligned}$$

que verifica $g(-x) = -g(x)$, el que entra en contradicció amb 6.2, ja que $m = n - 1 < n$.

Recíprocament, el teorema de Borsuk-Ulam implica 6.2, ja que si existís una aplicació contínua $g : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^m$ que commutes amb l'aplicació antipodal

i amb $n > m$, aleshores podriem considerar les inclosions $\mathbf{S}^m \subseteq \mathbf{R}^{m+1} \subseteq \mathbf{R}^n$ que, compostes amb g , definirien una aplicació contínua $f : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ verificant $f(-x) = -f(x) \neq 0$, per a tot $x \in \mathbf{S}^n$, el que seria contradictori amb el teorema de Borsuk-Ulam.

En aquest apartat donarem una demostració del teorema de Borsuk-Ulam que requereix l'homologia amb coeficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, mostrant així l'interés de disposar d'aquest tipus de coeficients.

La demostració del teorema 6.2 es basarà en algunes propietats homològiques del pas al quocient de \mathbf{S}^n per la relació d'equivalència $x \sim -x$, és a dir, de la identificació $\pi : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$, que resumim en l'enunciat següent:

Proposició 6.3. *Existeix un morfisme de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -mòduls*

$$t_* : H_*(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow H_*(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

que verifica:

1. *La composició*

$$H_*(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi_*} H_*(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{t_*} H_*(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

és nulla.

2. *Hi ha una successió exacta llarga*

$$H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{t_*} H_p(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi_*} H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow H_{p-1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

3. *Si $g : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^m$ és una aplicació contínua que commuta amb l'aplicació antipodal, i $\tilde{g} : \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^m$ denota l'aplicació induïda per g , aleshores el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t_*} & H_p(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi_*} & H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \longrightarrow \\ & \tilde{g}_* \downarrow & & g_* \downarrow & & \tilde{g}_* \downarrow & \\ \longrightarrow & H_p(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t_*} & H_p(\mathbf{S}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi_*} & H_p(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \longrightarrow \end{array}$$

és un diagrama commutatiu de successions exactes.

Demostració. Assenyalarem dues formes de construir t_* . Indiquem la primera que utilitza la teoria d'espais recobridors (vegeu [18], per exemple): π és un recobriment i així, com un símplex és un espai simplement connex, es pot provar que tot símplex singular de \mathbf{P}^n admet un aixecament a \mathbf{S}^n , és a dir, que podem completar el diagrama següent

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{S}^n \\ & \nearrow \tilde{\sigma} & \downarrow \pi \\ \Delta^p & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{P}^n \end{array}$$

A més, si $\tilde{\sigma}$ és un aixecament de σ , aleshores $a\ell^n \circ \tilde{\sigma}$, també ho és, i de fet són els dos únics aixecaments de σ . Aquestes afirmacions són conseqüència immediata de resultats bàsics de la teoria dels espais recobridors (vegeu [18]). Es defineix aleshores un morfisme de complexs $t_* : S_*(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow S_*(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ que sobre els símplexs singulars ve donat per

$$t_*(\sigma) = \tilde{\sigma} + a\ell^n \circ \tilde{\sigma},$$

i que s'esten a les cadenes singulars per linealitat. Per pas a l'homologia s'obté el morfisme de l'enunciat.

Proposem un raonament alternatiu a partir del teorema de les cadenes petites: sigui \mathcal{U} un recobriment obert de \mathbf{S}^n tal que si \mathcal{V} és el recobriment de \mathbf{P}^n format pels oberts $V = \pi(U)$ de \mathbf{P}^n , amb $U \in \mathcal{U}$, π indueixi homeomorfismes $U \rightarrow V$. Si $\sigma \in S_p(\mathcal{V})$ és un p -símplex \mathcal{V} -petit, $\sigma(\Delta^p)$ està contingut en un obert V de \mathcal{V} , així si U és un obert de \mathcal{U} tal que $\pi|_U : U \rightarrow V$ és un homeomorfisme, podem considerar el símplex de \mathbf{S}^n definit per $\tilde{\sigma} = (\pi|_U)^{-1} \circ \sigma$. Observem que aquest aixecament depen de l'obert U escollit, però que qualsevol altre obert dóna lloc al mateix aixecament o a $a\ell^n \circ \tilde{\sigma}$. Definim un morfisme de complexs $t_*^{\mathcal{U}} : S_*(\mathcal{V}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow S_*(\mathcal{U}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ que sobre el símplexs singulars val

$$t_*^{\mathcal{U}}(\sigma) = \tilde{\sigma} + a\ell^n \circ \tilde{\sigma}.$$

Pel teorema de les cadenes petites $t_*^{\mathcal{U}}$ indueix un morfisme $t_* : H_*(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow$

$H_*(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ a través del següent diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & & H_*(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ H_*(\mathcal{V}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t_*^{\mathcal{U}}} & H_*(\mathcal{U}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}). \end{array}$$

És un exercici comprovar (vegeu el problema 1) que el morfisme així definit no depen del recobriment \mathcal{U} escollit.

Per demostrar la primera propietat observem que

$$(t_* \circ \pi_*)(z) = (1 + \deg_2 a \ell^n)(z)$$

per a tot $z \in H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, i com $\deg_2 a \ell = 1$ en homologia amb coeficients en $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, per 5.2 i el problema 5.8, resulta que $t_* \circ \pi_* = 0$.

Per demostrar 2 és suficient provar que es té la successió exacta de complexs

$$0 \longrightarrow S_*(\mathcal{V}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{t_*} S_*(\mathcal{U}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi_*} S_*(\mathcal{V}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow 0.$$

Per la definició de t_* , la composició $\pi_* \circ t_*$ correspon a multiplicar per 2, i per tant és zero ja que utilitzem coeficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. D'altra banda, si c és una cadena del nucli de π_* , i σ és un símplex de c , aleshores c ha de contenir també el símplex $a \ell^n(\sigma)$, i per tant és de la imatge de t_* .

Per la demostració de 3 vegeu el problema 1. \square

Com a conseqüència de la proposició anterior, es té el següent corollari:

Corollari 6.4. *Els grups d'homologia amb coeficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ dels espais projectius reals són:*

$$H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ 0, & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Demostració. Si $p > n$, aleshores $H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$ ja que l'espai projectiu real de dimensió n és un espai triangulable de dimensió n .

Considerem ara la successió exacta llarga de la proposició anterior,

$$\longrightarrow H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{t_*} H_p(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi_*} H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow H_{p-1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow$$

Observem que

$$\pi_* : H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow H_n(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}),$$

és el morfisme zero, ja que $t_* : H_n(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ és injectiu, com resulta de la successió exacta anterior, mentres que la composició $t_*\pi_*$ és zero segons la proposició 6.3. A més, com $H_p(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$, si $0 < p < n$, i $\pi_* : H_0(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow H_0(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ és un isomorfisme ja que ambdós espais són connexs, la successió exacta considerada dona lloc als isomorfismes

$$H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \cong H_{p-1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}),$$

per a tot $1 \leq p \leq n$. Així inductivament resulten isomorfismes

$$H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \quad p \leq n,$$

d'on se segueix la proposició. □

Demostració del teorema 6.2. Sigui $g : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^m$ una aplicació equivariant respecte el morfisme antipodal, és a dir, tal que $g(-x) = -g(x)$ per a tot $x \in \mathbf{S}^n$, i suposem que $n > m$. Per la proposició 6.3, tindrem un diagrama commutatiu de successions exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t_*} & H_p(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi_*} & H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \longrightarrow \\ & \downarrow \tilde{g}_* & & \downarrow g_* & & \downarrow \tilde{g}_* & \\ \longrightarrow & H_p(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t_*} & H_p(\mathbf{S}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi_*} & H_p(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \longrightarrow \end{array}$$

Així, tenint present l'anul·lació de l'homologia de les esferes per sota de la seva dimensió, el diagrama commutatiu de successions exactes llargues dona lloc, per $1 \leq p \leq m$, a diagrames commutatius

$$\begin{array}{ccc} H_p(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H_{p-1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \\ \downarrow \tilde{g}_p & & \downarrow \tilde{g}_{p-1} \\ H_p(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H_{p-1}(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}), \end{array}$$

en el que els morfismes horitzontals són isomorfismes, segons la demostració de 6.4.

Com els espais projectius són connexs, el morfisme $\widetilde{g}_0 : H_0(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow H_0(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ és un isomorfisme, i usant el diagrama anterior es dedueix, inductivament, que els morfisme \widetilde{g}_p són també isomorfismes, per $0 \leq p \leq m$.

Per $p = m$, es té també el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} H_m(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \longrightarrow & H_m(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \\ \widetilde{g}_m \downarrow & & \downarrow \\ H_m(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H_m(\mathbf{S}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}). \end{array}$$

Com \widetilde{g}_m és un isomorfisme i $H_m(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$ perquè estem suposant que $n > m$, aquest diagrama és de la forma

$$\begin{array}{ccc} H_m(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ H_m(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \end{array}$$

el que és absurd. □

Com a conseqüència de la demostració que hem efectuat, podem demostrar també el resultat següent, que és una altra versió del teorema de Borsuk-Ulam.

Corollari 6.5. *Segui $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ una aplicació contínua tal que $f(-x) = -f(x)$. Aleshores el grau de f és senar.*

Demostració. Com f és compatible amb l'aplicació antipodal, f indueix una aplicació contínua $\widetilde{f} : \mathbf{P}^n \longrightarrow \mathbf{P}^n$. Segons la demostració anterior del teorema de Borsuk-Ulam, es té un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \\ \widetilde{f}_n \downarrow & & f_n \downarrow \\ H_n(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}), \end{array}$$

en el que els morfismes horitzontals i \widetilde{f}_n són isomorfismes, i per tant també ho ha de ser f_n . Així doncs, $\deg_2 f = 1$, i per tant el grau de f és senar (vegeu el problema 5.8). □

Problemes

1. (a) Siguin \mathcal{U} i \mathcal{U}' recobriments oberts de \mathbf{S}^n tals que $\pi : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ induïx homeomorfismes $U \rightarrow \pi(U)$ per a tot U de \mathcal{U} o de \mathcal{U}' . Siguin $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ els recobriments oberts de \mathbf{P}^n corresponents. Suposem que \mathcal{U} és més fi que \mathcal{U}' . Proveu que hi ha un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathcal{V}', \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t_*^{\mathcal{U}'}} & H_*(\mathcal{U}', \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_*(\mathcal{V}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t_*^{\mathcal{U}}} & H_*(\mathcal{U}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}), \end{array}$$

en el que els morfismes verticals són isomorfismes, i dedueix que la definició de t_* en la prova de 6.3 és independent del recobriment escollit.

- (b) Sigui $g : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^m$ una aplicació contínua que commuta amb l'aplicació antipodal, i sigui $\tilde{g} : \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^m$ l'aplicació induïda. Proveu que existeixen recobriments \mathcal{U} i \mathcal{U}' de \mathbf{S}^n i \mathbf{S}^m , respectivament, que verifiquen les condicions de (a), i tals que g induïx el diagrama commutatiu de morfismes de complexs

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(\mathcal{V}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t_*^{\mathcal{U}}} & S_*(\mathcal{U}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi_*} & S_*(\mathcal{V}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \tilde{g}_* \downarrow & & g_* \downarrow & & \tilde{g}_* \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_*(\mathcal{V}', \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t_*^{\mathcal{U}'}} & S_*(\mathcal{U}', \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi_*} & S_*(\mathcal{V}', \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

- (c) Proveu l'apartat 3 de la proposició 6.3.

2. *El teorema de Lusternik-Schnirelmann*: siguin C_1, \dots, C_{n+1} , $n+1$ tancats de \mathbf{S}^n que recobreixen \mathbf{S}^n . Proveu que hi ha un tancat C_i que conté un parell de punts antipodals.

Proveu que el resultat és fals si el recobriment consta de $n+2$ tancats. És cert el resultat per a recobriments oberts?

3. Siguin P_1, \dots, P_n , n polinomis homogenis amb coeficients reals de grau senar en m variables. Proveu que, si $m > n$, els polinomis p_i , $1 \leq i \leq n$, tenen un zero comú no trivial, és a dir, que el sistema d'equacions

$$\begin{aligned} P_1(x_1, \dots, x_m) &= 0, \\ P_2(x_1, \dots, x_m) &= 0, \\ &\dots \\ P_n(x_1, \dots, x_m) &= 0, \end{aligned}$$

té una solució $\neq 0$. Mostreu amb un exemple que el resultat no és cert si $m \leq n$.

4. Sigui $f : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ una aplicació contínua, tal que $f(x) = f(-x)$ per a tot $x \in \mathbf{S}^n$, proveu que f és de grau parell.
5. *El teorema del sandwich*: Siguin A_1, \dots, A_m , conjunts mesurables de \mathbf{R}^m . Proveu que existeix un hiperplà H de \mathbf{R}^m que divideix cada A_i , $1 \leq i \leq m$, en dos subconjunt d'igual mesura.

7 Adjunció de celles i homologia

Una tècnica important per construir espais topològics consisteix en modificar un espai X per l'adjunció d'una cella. Exemples d'espais que es poden construir d'aquesta forma són els espais projectius, reals o complexs. En aquest apartat estudiarem com varia l'homologia d'un espai topològic X quan se li adjunta una cella, i calcularem l'homologia singular dels espais projectius.

Definició. Sigui X un espai topològic i $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow X$ una aplicació contínua. Es diu que l'espai topològic X_f definit per

$$X_f := X \sqcup \mathbf{B}^n / \sim ,$$

on \sim és la relació d'equivalència generada per $x \sim f(x)$ per a tot $x \in \mathbf{S}^{n-1}$, s'ha obtingut a partir de X per *adjunció d'una cella de dimensió n amb aplicació d'adjunció f* .

Observem que no imposem cap altra propietat a l'aplicació f que la continuïtat, per exemple, f no té perquè ser injectiva. En canvi el morfisme de projecció $\pi : X \sqcup \mathbf{B}^n \rightarrow X_f$ indueix un homeomorfisme de l'interior de la bola \mathbf{B}^n amb un subespai de X_f . Observem també que π indueix un homeomorfisme de X en la seva imatge, i que per tant podem suposar que X és un subespai de X_f .

Exemples. 1. Si $X = \mathbf{S}^{n-1}$ i f és l'aplicació identitat, aleshores $X_f = \mathbf{B}^n$.

2. Si X és un punt, f serà una aplicació constant, i X_f és homeomorf a l'esfera \mathbf{S}^n .

3. L'espai projectiu real \mathbf{P}^n s'obté a partir de l'espai \mathbf{P}^{n-1} per adjunció d'una cella de dimensió n . En efecte, recordem que l'espai projectiu real \mathbf{P}^n es defineix com el quocient de l'esfera \mathbf{S}^n per la relació d'equivalència $x \sim -x$. Notem $\pi : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{P}^{n-1}$ la projecció. La inclusió de l'esfera \mathbf{S}^{n-1} com a equador de \mathbf{S}^n defineix una inclusió $\mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}^n$. Considerem els hemisferis E_+^n i E_-^n de l'esfera \mathbf{S}^n . Sigui $g : \mathbf{B}^n \rightarrow E_+^n$ un homeomorfisme, i considerem la composició

$$\mathbf{B}^n \xrightarrow{g} E_+^n \xrightarrow{\pi} \mathbf{P}^n .$$

Aquesta aplicació s'estén a una aplicació exhaustiva $\mathbf{B}^n \sqcup \mathbf{P}^{n-1} \rightarrow \mathbf{P}^n$ que factoritza per

$$\mathbf{B}^n \sqcup \mathbf{P}^{n-1} / \sim \rightarrow \mathbf{P}^n ,$$

i que es comprova fàcilment que és injectiva.

De la topologia de X_f destacarem:

Proposició 7.1. *Sigui X un espai compacte. Aleshores X_f és compacte, i existeix un entorn compacte A de X en X_f , tal que X és un retracte de deformació de A .*

Demostració. Com la relació d'equivalència és tancada, és evident que X_f és de Hausdorff, i compacte.

Considerem ara un nombre real $0 < \varepsilon < 1$ i sigui $U = \{x \in \mathbf{B}^n; \|x\| \geq \varepsilon\}$. U és un entorn compacte de \mathbf{S}^{n-1} en la bola unitat \mathbf{B}^n , del que l'esfera és un retracte de deformació. Sigui $A = \pi(X \sqcup U)$, comprovem que A és un entorn compacte de X del que X és un retracte de deformació.

Definim

$$H : (X \sqcup U) \times I \rightarrow X \sqcup U$$

segons

$$H(x, t) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in X \\ (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}, & \text{si } x \in U. \end{cases}$$

Notem $\pi : X \sqcup \mathbf{B}^n \rightarrow X_f$ l'aplicació de pas al quocient, aleshores podem definir $H' : \pi(X \sqcup U) \times I \rightarrow \pi(X \sqcup U)$ per

$$H' = \pi \circ H \circ ((\pi \times \text{id})^{-1}) .$$

H' està ben definida, és contínua i és una homotopia de la retracció de A sobre X amb la identitat de X . \square

Per tal d'estudiar la relació entre l'homologia de X i la de X_f , comencem pel resultat següent

Proposició 7.2. *Sigui X un espai compacte i $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow X$ una aplicació contínua. Sigui $f' : (\mathbf{B}^n, \mathbf{S}^{n-1}) \rightarrow (X_f, X)$ l'aplicació de parells induïda. Aleshores el morfisme*

$$f'_* : H_*(\mathbf{B}^n, \mathbf{S}^{n-1}) \rightarrow H_*(X_f, X) ,$$

és un isomorfisme.

Demostració. Usarem les notacions de la demostració de la proposició anterior. Així, U és un entorn de l'esfera \mathbf{S}^{n-1} , i notarem $A = \pi(U) \cup X$ l'entorn compacte del que X és un retracte de deformació. Notem f'' l'aplicació induïda per π entre els parells (\mathbf{B}^n, U) i (X_f, A) . Les inclusions naturals donen lloc a un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathbf{B}^n, \mathbf{S}^{n-1}) & \xrightarrow{f'_*} & H_*(X_f, X) \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ H_*(\mathbf{B}^n, U) & \xrightarrow{f''_*} & H_*(X_f, A) \end{array}$$

i per tant és suficient provar que g , h i f''_* són isomorfismes. Els morfismes g i h són isomorfismes per la invariància homotòpica de l'homologia relativa, vegeu 3.7.2.

Provem ara que f''_* és un isomorfisme. Considerem el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathbf{B}^n - \mathbf{S}^{n-1}, U - \mathbf{S}^{n-1}) & \xrightarrow{f''_*} & H_*(X_f - X, A - X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(\mathbf{B}^n, U) & \xrightarrow{f''_*} & H_*(X_f, A) . \end{array}$$

Els morfismes verticals són isomorfismes ja que en cadascun dels casos podem aplicar el teorema d'excisió. D'altra banda l'aplicació de parells $(\mathbf{B}^n - \mathbf{S}^{n-1}, U - \mathbf{S}^{n-1}) \rightarrow (X_f - X, A - X)$ és un homeomorfisme de parells, i per

tant el morfisme horitzontal inferior també és un isomorfisme. La commutativitat del diagrama assegura doncs que f''_* és un isomorfisme. \square

Teorema 7.3. *Si X un espai topològic compacte i $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow X$ una aplicació contínua. Aleshores es tenen isomorfismes*

$$H_p(X_f) \cong H_p(X) \text{ , per a tot } p \neq n, n-1 \text{ ,}$$

i una successió exacta

$$0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X_f) \rightarrow H_n(X_f, X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(X_f) \rightarrow 0 \text{ .}$$

A més, si identifiquem $H_n(X_f, X)$ amb $H_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1})$ a través dels isomorfismes $H_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \cong H_n(\mathbf{B}^n, \mathbf{S}^{n-1}) \cong H_n(X_f, X)$, aleshores $\partial_ = f_*$.*

Demostració. Es dedueix immediatament de la successió exacta del parell (X_f, X) i de la identificació de l'homologia relativa de (X_f, X) amb la de $(\mathbf{B}^n, \mathbf{S}^{n-1})$, segons la proposició anterior. \square

Així doncs l'adjunció d'una cella de dimensió n modifica l'homologia d'un espai X només en dimensions $n-1$ i n . Per a aquestes dimensions, podem trencar la successió exacta d'homologia relativa del parell (X_f, X) en dues successions exactes curtes

$$0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X_f) \rightarrow \ker f_* \rightarrow 0 \text{ ,}$$

$$0 \rightarrow \operatorname{im} f_* \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(X_f) \rightarrow 0 \text{ .}$$

Així veiem que si $f_* : H_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X)$ és injectiva, l'efecte d'adjuntar la cella és tapar un forat de dimensió $n-1$, mentres que si f_* és zero, s'ha creat un nou forat de dimensió n .

Perquè aquestes successions siguin d'utilitat hem de conèixer f_* . En el resultat següent estudiarem f_* en el cas dels espais projectius reals (el cas complex és deixa com exercici, vegeu el problema 2).

Teorema 7.4. 1. *L'homologia singular de l'espai projectiu real \mathbf{P}^n ve donada per*

$$H_p(\mathbf{P}^n) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } p \text{ és parell o } p > n, \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & \text{si } p \text{ és senar } < n, \\ \mathbf{Z}, & \text{si } p = 0 \text{ o } p = n \text{ és senar.} \end{cases}$$

2. L'aplicació $\pi_* : H_n(\mathbf{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbf{P}^n)$, induïda per l'aplicació quocient $\pi : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$, és

$$\pi_* = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ és parell,} \\ \pm 2, & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

Demostració. Sigui (a_n) l'afirmació 1 per a \mathbf{P}^n , i (b_n) l'afirmació 2. Provarem que per a tot n es verifiquen les implicacions

$$(b_{n-1}) \implies (a_n) \implies (b_n) .$$

Com (a_0) és trivial perquè \mathbf{P}^0 és un punt, per inducció sobre n el teorema se segueix de les implicacions anteriors.

$(b_{n-1}) \implies (a_n)$: Per inducció sobre n i donat que, com hem vist en un exemple anterior, \mathbf{P}^n s'obté a partir de \mathbf{P}^{n-1} adjuntant una cella de dimensió n , de 7.3 se segueix que el resultat és cert per als grups $H_p(\mathbf{P}^n)$ per $p \neq n-1, n$. Distingim ara els casos parell i senar per tractar els grups H_{n-1} i H_n .

Si n és parell, $n-1$ és senar i usant la hipòtesi (b_{n-1}) podem escriure la successió exacta de 7.3 en la forma

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbf{P}^n) \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\pm 2} \mathbf{Z} \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{P}^n) \longrightarrow 0 ,$$

d'on se segueix que

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{P}^n) &= \ker(\pm 2) = 0 , \\ H_{n-1}(\mathbf{P}^n) &= \operatorname{coker}(\pm 2) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} . \end{aligned}$$

En el cas n senar la successió s'escriu

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbf{P}^n) \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{P}^n) \longrightarrow 0 ,$$

i per tant en resulta

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{P}^n) &\cong \mathbf{Z} , \\ H_{n-1}(\mathbf{P}^n) &= 0 . \end{aligned}$$

$(a_n) \implies (b_n)$: el cas n parell és immediat perquè $H_n(\mathbf{P}^n) = 0$, suposem per tant que n és senar.

Sigui $\tilde{p} \in \mathbf{P}^n$ un punt i p_+, p_- les antiimatges de \tilde{p} per π . Considerem el diagrama commutatiu induït per π de successions exactes d'homologia relativa

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(\mathbf{S}^n) & \xrightarrow{j} & H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - \{p_+, p_-\}) & & & & \\ \pi_* \downarrow & & \tilde{\pi}_* \downarrow & & & & \\ H_n(\mathbf{P}^n - \{\tilde{p}\}) & \longrightarrow & H_n(\mathbf{P}^n) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^n - \{\tilde{p}\}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathbf{P}^n - \{\tilde{p}\}) \end{array}$$

Podem utilitzar aquest diagrama per calcular π_* . En efecte, $\mathbf{P}^n - \tilde{p}$ és del tipus d'homotopia de \mathbf{P}^{n-1} , i per tant el grup $H_n(\mathbf{P}^n - \{\tilde{p}\})$ és zero. A més, com n és senar, la hipòtesi d'inducció implica que $H_{n-1}(\mathbf{P}^n - \{\tilde{p}\}) = 0$. Així el morfisme de connexió ∂_* del diagrama és un isomorfisme i per tant, el valor de π_* queda determinat per la composició

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbf{S}^n) & \xrightarrow{j} & H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - \{p_+, p_-\}) \\ & & \tilde{\pi}_* \downarrow \\ & & H_n(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^n - \{\tilde{p}\}) . \end{array}$$

Fixem el punt \tilde{p} de forma que $p_{\pm} = (0, \dots, 0, \pm 1)$. Podem calcular el grup $H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - \{p_+, p_-\})$ mitjançant el teorema d'excisió. En efecte, prenem un nombre real $0 < \varepsilon < 1$, i notem

$$A = \{x \in \mathbf{S}^n; -\varepsilon < x_{n+1} < \varepsilon\} .$$

Com $\mathbf{S}^n - \{p_+, p_-\}$ és obert i conté \overline{A} , podem extreure A i obtenir un isomorfisme

$$H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - \{p_+, p_-\}) \cong H_n(\mathbf{S}^n - A, \mathbf{S}^n - \{p_+, p_-\} - A) .$$

Però si notem ara

$$\begin{aligned} B_+ &= \{x \in \mathbf{S}^n; x_{n+1} \geq \varepsilon\} , \\ B_- &= \{x \in \mathbf{S}^n; x_{n+1} \leq -\varepsilon\} . \end{aligned}$$

es té $\mathbf{S}^n - A = B_+ \sqcup B_-$, i per tant

$$H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - \{p_+, p_-\}) \cong H_n(B_+, B_+ - \{p_+\}) \oplus H_n(B_-, B_- - \{p_-\}) .$$

Considerem ara el següent diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(\mathbf{S}^n) & \xrightarrow{j_+} & H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - p_+) & \xleftarrow{i_+} & H_n(B_+, B_+ - p_+) & & \\
 \downarrow a\ell_* & & \downarrow a\ell_* & & \downarrow a\ell_* & \searrow \pi_+ & \\
 & & & & & & H_n(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^n - \tilde{p}) \\
 & & & & & \nearrow \pi_- & \\
 H_n(\mathbf{S}^n) & \xrightarrow{j_-} & H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - p_-) & \xleftarrow{i_-} & H_n(B_-, B_- - p_-) & &
 \end{array}$$

Sigui α un generador de $H_n(\mathbf{S}^n)$. Com n és senar, i el grau de l'aplicació antipodal és $(-1)^{n+1}$, el morfisme vertical esquerra del diagrama és la identitat. Així, el valor de π_* queda determinat per la suma de les imatges de α a través del diagrama anterior.

Els morfismes horitzontals són isomorfismes, i π_+ també ho és, ja que π és un homeomorfisme local i per tant induïx isomorfismes entre els grups d'homologia local. Així, si $\beta \in H_n(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^n - \tilde{p})$ és la imatge de α per la composició $\tilde{\pi}_+ i_+^{-1} j_+$, β serà un generador de $H_n(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^n - \tilde{p})$, i es té $\tilde{\pi}_* j(\alpha) = 2\beta$. \square

La demostració anterior es simplifica notablement si prenem coeficients al cos \mathbf{Q} , i es té

Corollari 7.5. *L'homologia singular de \mathbf{P}^n amb coeficients en \mathbf{Q} és*

$$H_p(\mathbf{P}^n; \mathbf{Q}) \cong \begin{cases} \mathbf{Q}, & \text{si } p = 0, \text{ o } p = n \text{ és senar,} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Corollari 7.6. *La característica de Euler de l'espai projectiu és*

$$\chi(\mathbf{P}^n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ és parell,} \\ 0, & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

Demostració. En efecte, $\chi(\mathbf{P}^n) = \sum (-1)^p b_p(\mathbf{P}^n) = 1 + 0 + \cdots + 0 + (-1)^n = 0$, si n és senar, mentres que $\chi(\mathbf{P}^n) = 1 + 0 + \cdots + 0 = 1$ en el cas parell. \square

Problemes

- (a) Sigui X un espai topològic compacte tal que la seva característica de Euler $\chi(X)$ està definida. Sigui $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow X$ una aplicació contínua i X_f l'espai corresponent a l'adjunció d'una cella de dimensió n . Proveu que $\chi(X_f)$ està definida i es verifica

$$\chi(X_f) = \chi(X) + (-1)^n.$$

- (b) Es diu que un espai topològic X és un *complex esfèric de dimensió n* si s'obté a partir d'un nombre finit de punts, β_0 , per adjunció successiva de β_p cel·les de dimensió p , amb $p \leq n$, vegeu [2] i [10]. Proveu que si X és un complex esfèric la seva característica de Euler està definida, i

$$\chi(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \beta_p.$$

- (c) Proveu que \mathbf{P}^n és un complex esfèric.
- Proveu que l'espai projectiu complex \mathbf{CP}^n s'obté a partir de \mathbf{CP}^{n-1} per adjunció d'una cella de dimensió $2n$. Dedueu que es verifica

$$H_p(\mathbf{CP}^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si } p \text{ és parell i } 0 \leq p \leq 2n, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

- Considereu l'espai topològic $\widetilde{\mathbf{CP}}^n$ definit per

$$\widetilde{\mathbf{CP}}^n = \{(x, v) \in \mathbf{CP}^n \times \mathbf{CP}^{n-1} ; \sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i = 0\}.$$

Calculeu la seva homologia singular.

- Proveu que \mathbf{P}^k no és un retracte de \mathbf{P}^n , si $k < n$ i k és senar. De fet, podeu demostrar, per exemple utilitzant el teorema de les cadenes petites, que en cap cas \mathbf{P}^k és un retracte de \mathbf{P}^n , si $k < n$.

5. Siguin p, q , dos enters positius primers entre ells. Proveu que l'espai lenticular $L(p, q)$ és un complex esfèric que té una 0-cella, una 1-cella, una 2-cella i una 3-cella. Proveu que l'homologia singular de $L(p, q)$ és:

$$\begin{aligned} H_0(L(p, q)) &\cong \mathbf{Z} & H_1(L(p, q)) &\cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \\ H_2(L(p, q)) &= 0 & H_3(L(p, q)) &\cong \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

6. Calculeu l'homologia singular de \mathbf{P}^n amb coeficients en un anell commutatiu R .

8 El teorema del punt fix de Lefschetz

En el capítol anterior hem demostrat el teorema del punt fix de Brouwer que assegura que tota aplicació contínua de la bola unitat \mathbf{B}^n en si mateixa té un punt fix. Així mateix, l'estudi del grau d'aplicacions contínues entre esferes ens ha permès provar l'existència de punts fixos o antifixos per a les aplicacions entre esferes de dimensió parella, $\mathbf{S}^{2n} \rightarrow \mathbf{S}^{2n}$. Aquest apartat està dedicat al teorema del punt fix de Lefschetz, que estudia l'existència de punts fixos per aplicacions d'un poliedre en si mateix, i que generalitza els dos resultats esmentats. En el capítol 6 veurem una extensió d'aquest resultat per a les varietats topològiques compactes. L'invariant algebraic que ens dóna compte dels punts fixos serà el nombre de Lefschetz, que introduïm a continuació.

Definició. Sigui E_* un \mathbf{Q} -espai vectorial graduat de dimensió finita, és a dir, $E_* = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} E_i$, on els E_i són zero llevat d'un nombre finit d'índexs i són \mathbf{Q} -espais vectorials de dimensió finita. Sigui $f_* : E_* \rightarrow E_*$ una aplicació lineal graduada, és a dir, f_* és una família d'aplicacions lineals $f_p : E_p \rightarrow E_p$, $p \in \mathbf{Z}$. Es defineix el *nombre de Lefschetz* de f_* per

$$\Lambda_{f_*} = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \operatorname{tr} f_p.$$

Lema 8.1. *Sigui*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un morfisme de successions exactes de \mathbf{Q} -espais vectorials de dimensió finita. Aleshores

$$\text{tr } f = \text{tr } g + \text{tr } h .$$

Demostració. És evident ja que $F \cong E \oplus G$, i podem escollir una base de F adaptada a aquesta descomposició. \square

Proposició 8.2 (Fórmula de les traces de Hopf). *Sigui C_* un complex finit de \mathbf{Q} -espais vectorials de dimensió finita i $f_* : C_* \longrightarrow C_*$ un endomorfisme. Notem $H(f_*)$ el morfisme induït en homologia. Aleshores*

$$\Lambda_{f_*} = \Lambda_{H(f_*)} .$$

Demostració. La proposició se segueix immediatament del lema anterior de forma anàloga a com hem provat en 3.1, del capítol 2, la invariància de la característica de Euler per pas a l'homologia. En efecte, considerem les successions exactes

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow Z_p \longrightarrow C_p \longrightarrow B_{p-1} \longrightarrow 0 , \\ 0 &\longrightarrow B_p \longrightarrow Z_p \longrightarrow H_p(C) \longrightarrow 0 . \end{aligned}$$

Com el morfisme f commuta amb la diferencial del complex, indueix morfismes

$$\begin{aligned} f_{Z_p} : Z_p &\longrightarrow Z_p , \\ f_{B_p} : B_p &\longrightarrow B_p , \\ H_p(f_*) : H_p(C) &\longrightarrow H_p(C) , \end{aligned}$$

pel que es té el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & C_p & \longrightarrow & B_{p-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_{Z_p} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{B_{p-1}} & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & C_p & \longrightarrow & B_{p-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

i anàlogament en resulta el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & B_p & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & H_p(C) \longrightarrow 0 \\
 & & f_{B_p} \downarrow & & f_{Z_p} \downarrow & & H_p(f_*) \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B_p & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & H_p(C) \longrightarrow 0 .
 \end{array}$$

Així, pel lema anterior

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr} f_p &= \operatorname{tr} f_{Z_p} + \operatorname{tr} f_{B_{p-1}} , \\
 \operatorname{tr} f_{Z_p} &= \operatorname{tr} f_{H_p(f_*)} + \operatorname{tr} f_{B_p} ,
 \end{aligned}$$

i per tant es té

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{f_*} &= \sum_{p \geq 0} (-1)^p \operatorname{tr} f_p \\
 &= \sum_{p \geq 0} (-1)^p (\operatorname{tr} f_{Z_p} + \operatorname{tr} f_{B_{p-1}}) \\
 &= \sum_{p \geq 0} (-1)^p (\operatorname{tr} f_{H_p(f_*)} + \operatorname{tr} f_{B_p} + \operatorname{tr} f_{B_{p-1}}) \\
 &= \Lambda_{H(f_*)} .
 \end{aligned}$$

□

Definició. Sigui X un espai triangulable, i $f : X \longrightarrow X$ una aplicació contínua. Notem $f_* : H_*(X, \mathbf{Q}) \longrightarrow H_*(X, \mathbf{Q})$ el morfisme induït en homologia amb coeficients racionals. Es defineix el *nombre de Lefschetz* de f per

$$\Lambda_f = \Lambda_{f_*} .$$

Observem que la suma que defineix el nombre de Lefschetz és finita, ja que com X és triangulable, té l'homologia d'un políedre $|K|$, i per tant els $H_p(X, \mathbf{Q})$ són \mathbf{Q} -espais vectorials de dimensió finita per a tot $p \geq 0$, i nuls per a p més gran que la dimensió de $|K|$.

Lema 8.3. 1. Si $f = id_X$ aleshores el nombre de Lefschetz de f és la característica de Euler de X : $\Lambda_{id} = \chi(X)$.

2. Si $f, g : X \longrightarrow X$ són aplicacions homòtopes, aleshores

$$\Lambda_f = \Lambda_g .$$

Demostració. 1. És una comprovació immediata, ja que

$$\begin{aligned}\Lambda_{\text{id}} &= \sum (-1)^p \text{tr id}_{H_p(X)} \\ &= \sum (-1)^p \dim H_p(X, \mathbf{Q}) \\ &= \chi(X) .\end{aligned}$$

La demostració de 2. és immediata, per 3.4.1. \square .

L'objectiu d'aquest apartat és provar el resultat següent:

Teorema 8.4 (del punt fix de Lefschetz). *Sigui X un espai triangulable i $f : X \rightarrow X$ una aplicació contínua. Si $\Lambda_f \neq 0$ aleshores f té un punt fix.*

Demostració. Suposem que f no té punts fixos i provem que aleshores $\Lambda_f = 0$. Sigui $\varphi : X \rightarrow |K|$ una triangulació de X . L'aplicació contínua $g = \varphi f \varphi^{-1} : |K| \rightarrow |K|$ induïda per f no té punts fixos, i $\Lambda_f = \Lambda_g$, perquè per a tota matriu A i tota matriu invertible S es verifica $\text{tr } A = \text{tr } SAS^{-1}$. Per tant, podem suposar que $X = |K|$ és un políedre, i utilitzar l'homologia simplicial $H_*(K)$.

Com X és un políedre, és un subespai d'un espai euclidià, $X \subset \mathbf{R}^N$, i la distància euclídea de \mathbf{R}^N induïx una distància sobre X . Considerem la funció

$$\begin{aligned}X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto d(x, f(x)).\end{aligned}$$

Com X és compacte i aquesta funció és contínua i estrictament positiva, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$d(x, f(x)) > \delta ,$$

per a tot $x \in X$. Per 1.6.1 existeix un enter m prou gran tal que la subdivisió baricèntrica $sd^m K$ té talla menor que $\delta/3$. Així, substituint K per $sd^m K$, podem suposar que la talla del políedre K és menor que $\delta/3$.

Pel teorema d'aproximació simplicial, f admet una aproximació simplicial

$$f' : |sd^n K| \longrightarrow |K| .$$

La subdivisió baricèntrica de K és compatible amb la subdivisió baricèntrica del complex $S_*(|K|)$, i així, pel teorema 10.7 del capítol 3, es té un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc} H_*(K; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{sd_*^n} & H_*(sd^n K; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{f'_*} & H_*(K; \mathbf{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_*(|K|; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{\text{id}} & H_*(|sd^n K|; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{f_*} & H_*(|K|; \mathbf{Q}), \end{array}$$

en el que els morfismes verticals són isomorfismes, pel teorema de comparació. Així, $\Lambda_{f_*} = \Lambda_{f'_* \circ sd_*^n}$. Per tant, utilitzant la fórmula de les traces de Hopf, és suficient veure que les traces dels morfismes $f'_p \circ sd_p^n : C_p(K) \rightarrow C_p(K)$ són zero.

Sigui $\sigma \in C_p(K)$ un p -símplex de K , i τ un p -símplex de $sd^n K$ del suport de la cadena $sd_p^n(\sigma)$. Tindrem que $\tau \subseteq \sigma$. Si provem que $f'(\tau) \neq \sigma$ podrem concloure que la traça de $f'_p \circ sd_p^n$ és zero. Per fer-ho anem a veure que per a tot $x \in \tau$ i tot $y \in \sigma$, y i $f(x)$ estan en símplexs diferents. En efecte, com f' és una aproximació simplicial de f i la talla de K és menor que $\delta/3$, es verifica

$$d(f(x), f'(x)) < \frac{\delta}{3},$$

i per tant, com segons l'elecció de δ , $d(x, f(x)) > \delta$, es té

$$d(x, f'(x)) > \frac{2\delta}{3}.$$

D'altra banda, i novament per ser la talla de K menor que $\delta/3$, es té

$$d(x, y) < \frac{\delta}{3},$$

i en definitiva deduem

$$d(y, f'(x)) > \frac{\delta}{3},$$

així doncs, no poden estar en el mateix símplex. \square

Com a conseqüència immediata del teorema de Lefschetz es dedueix la següent generalització del teorema del punt fix de Brouwer.

Corollari 8.5. *Sigui X un espai triangulable contràctil, i $f : X \longrightarrow X$ una aplicació contínua. Aleshores f té un punt fix.*

Demostració. Com X és contràctil, $H_0(X, \mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q}$ i $H_p(X; \mathbf{Q}) = 0$, si $p > 0$. Així, $\Lambda_f = 1$, i pel teorema de Lefschetz, f té un punt fix. \square

D'altra banda, si $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ és una aplicació contínua aleshores

$$\Lambda_f = 1 + (-1)^n \deg f ,$$

i per tant podem recuperar alguns dels resultats de l'apartat 5, com per exemple:

Corollari 8.6. *Sigui $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ una aplicació contínua. Si $\deg f \neq (-1)^{n+1}$ aleshores f té un punt fix.* \square

En particular, com l'aplicació antipodal no té punts fixos retrobem el seu grau, $\deg a\ell^n = (-1)^{n+1}$.

Finalment, del càlcul de l'homologia de l'espai projectiu podem concloure,

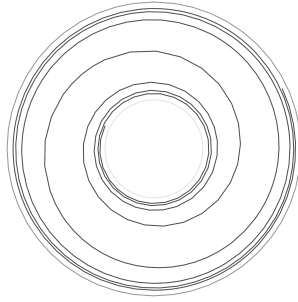
Corollari 8.7. *Sigui $f : \mathbf{P}^{2n} \longrightarrow \mathbf{P}^{2n}$ una aplicació contínua. Aleshores f té un punt fix.*

Demostració. L'homologia singular amb coeficients racionals de \mathbf{P}^{2n} és, segons 7.5, 0 en graus diferents de 0, i \mathbf{Q} per H_0 , pel que $\Lambda_f = 1$. \square

Problemes

1. Proveu que el nombre de Lefschetz d'una aplicació contínua és un enter.
2. Sigui X un políedre compacte i connex tal que els grups d'homologia $H_p(X)$, $p \geq 1$, són tots de torsió. Proveu que X té la propietat del punt fix.
3. Sigui X un espai triangulable i $f : X \longrightarrow X$ una aplicació contínua.
 - (a) Proveu que si f és homòtopa a una aplicació constant aleshores f té un punt fix.
 - (b) Proveu que si $\chi(X) \neq 0$ i f és homòtopa a la identitat de X , aleshores f té un punt fix.

4. Sigui $f : \mathbf{CP}^{2n} \rightarrow \mathbf{CP}^{2n}$ un homeomorfisme. Proveu que f té un punt fix. (De fet es pot provar que \mathbf{CP}^{2n} té la propietat del punt fix per a tota aplicació contínua f , no tan sols pels homeomorfismes).
5. Sigui X l'espai topològic compacte format per dues circumferències concèntriques i una espiral entre ambdues, vegeu la figura següent.



Proveu que hi ha una aplicació contínua $f : X \rightarrow X$ tal que $\Lambda_f \neq 0$ i que no té punts fixos.

6. (a) Sigui f un endomorfisme d'un \mathbf{Q} -espai vectorial de dimensió finita. Proveu que $\log \det(1 - tf) = -\sum_{n \geq 0} \text{tr } f^n \frac{t^n}{n}$.
- (b) Sigui f_* un endomorfisme d'un \mathbf{Q} -espai vectorial graduat de dimensió finita. Es defineix la funció zeta de Weil de f_* per

$$Z(f_*, t) := \exp \sum_{n \geq 0} \Lambda_{f_*^n} t^n .$$

Proveu que

$$Z(f_*, t) = \frac{\prod \det(1 - f_{2k+1} t)}{\prod \det(1 - f_{2k} t)} .$$

- (c) Sigui h un homeomorfisme d'un espai triangulable X . Proveu que si $\chi(X) \neq 0$, existeix un $n > 0$ tal que h^n té punts fixos. Trobeu un exemple en el que h no tingui punts fixos.

Capítol 5

Superfícies topològiques

Un dels objectius de la Topologia és entendre les diferents classes d'homeomorfisme de les varietats topològiques. En el capítol anterior hem vist com l'homologia local permet provar que la dimensió d'una varietat topològica és un invariant topològic, pel que podem centrar-nos ara en l'estudi de les classes d'homeomorfisme de les varietats d'una dimensió donada.

La classificació de les varietats de dimensió 1 és relativament senzilla, i es presenta en el primer apartat. La resta del capítol està dedicada, essencialment, al teorema de classificació de les superfícies compactes i connexes.

El teorema de classificació de superfícies consta de dues parts ben diferenciades: una part geomètrica, en la que tota superfície es redueix a un cert quocient del disc i es classifiquen aquests quocients, obtenint-se models de totes les superfícies, i l'altra homològica, en la que, a partir del càlcul de les homologies d'aquests models, es prova que no tenen el mateix tipus d'homotopia, i en particular d'homeomorfisme.

Provar que una superfície és homeomorfa a un model donat requereix provar l'existència d'un homeomorfisme, i aquí les tècniques homològiques són de poca utilitat. Els raonaments que condueixen a l'homeomorfisme cercat són de caire molt geomètric, i utilitzen tècniques i resultats del que s'enten per Topologia Geomètrica. D'aquests resultats en sobresurten dos: el teorema de Schönflies, al que dedicarem els apartats 7 i 8, i que estableix la unicitat topològica de la circumferència de \mathbf{R}^2 , i el teorema de triangulació de superfícies de Radó, que provarem en l'apartat 8 a partir del teorema de Schönflies.

1 Preliminars als teoremes de classificació

Abans d'estudiar la classificació de corbes i de superfícies, anem a fer algunes consideracions generals que ens serviran per tots dos teoremes de classificació.

Proposició 1.1. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n . Aleshores X és la unió disjunta de les seves components connexes, i aquestes són també varietats topològiques de dimensió n .*

Demostració. Les components connexes de X són tancades, i com X és localment connexa, són alhora obertes. Per tant són varietats topològiques de dimensió n i X és la seva unió disjunta. \square

Com tot homeomorfisme d'espais topològics estableix homeomorfismes entre les components connexes, és suficient estudiar la classificació de les varietats topològiques connexes.

Una propietat topològica fonamental de les varietats que usarem també en els teoremes de classificació d'aquest capítol, és que són espais de Hausdorff. L'ús que en farem d'aquesta propietat serà a través del resultat de separació següent.

Proposició 1.2. *Sigui X una varietat topològica connexa de dimensió n , s^{n-1} una $(n-1)$ -esfera que és vora d'una bola coordinada B de X , i F un tancat de X que conté s^{n-1} . Aleshores, si $x \in B - F$, la component connexa de x en $X - F$ està continguda en B .*

Demostració. Com $s^{n-1} \subseteq F$, la component connexa de x en $X - F$ està continguda en la component connexa de x en $X - s^{n-1}$. Així, podem suposar que $F = s^{n-1}$.

Sigui $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow X$ una parametrització local de X tal que $\varphi(\mathbf{B}) = B$. Per 4.4.6, $\varphi(\overset{\circ}{\mathbf{B}})$ és un obert de X . Com B és un compacte de X , B és un tancat de X , ja que X és de Hausdorff, i així, $X - B$ és un obert de X . Per tant $X - s^{n-1}$ és la reunió dels oberts disjunts $\varphi(\overset{\circ}{\mathbf{B}})$ i $X - B$, pel que la component connexa de tot punt de $B - s^{n-1}$ està continguda a B . \square

Finalment assenyalem que, en general, no podem esperar classificar les varietats topològiques no compactes. Doncs per exemple tots els oberts de

\mathbf{R}^n són varietats no compactes de dimensió n i sembla difícil pensar que hom pugui classificar-los si $n \geq 2$ (no obstant, vegeu [1] i [18] per alguns resultats en el cas de superfícies). És per això que, en el que segueix, ens centrarem en l'estudi de les varietats compactes.

2 Classificació de corbes compactes

El teorema de classificació de corbes compactes és molt més senzill que el teorema de classificació de superfícies compactes. Hem organitzat la seva demostració de forma que segueixi un guió paral·lel al de la demostració del teorema de classificació de les superfícies.

Teorema 2.1. *Sigui X una corba compacta i connexa. Aleshores X és homeomorfa a la circumferència \mathbf{S}^1 .*

La demostració d'aquest teorema serà conseqüència dels lemes 2.3 i 2.4 que provem a continuació.

Prèviament provarem un lema que es pot interpretar com la versió en dimensió 1 del teorema de Schönflies, 6.1.

Lema 2.2. *Sigui X una corba i A un obert connex de X , contingut en una bola coordinada. Aleshores l'adherència \overline{A} de A en X és homeomorfa a l'interval $I = [0, 1]$.*

Demostració. Sigui B una bola coordinada tal que $A \subseteq B$. Com B és un tancat de X , l'adherència de A en X és l'adherència de A en B , i com A és un obert connex i B és homeomorf a un interval tancat, \overline{A} és també homeomorf a un interval tancat. \square

Lema 2.3. *Sigui X una corba compacta. Aleshores X és triangulable.*

Demostració. Per a cada punt $x \in X$, prenem una parametrització local $\varphi_x : (-2, 2) \rightarrow X$ tal que $x \in U_x = \varphi_x(-1, 1)$, i notem $a_x = \varphi_x(-1)$, $b_x = \varphi_x(1)$.

Els entorns U_x , $x \in X$, formen un recobriment obert de X , i com X és compacte, en podem extreure un subrecobriment finit, U_1, \dots, U_m . Per 1.2, si

A és una component connexa de $X - \bigcup_{i=1}^m \{a_i, b_i\}$, aleshores A està continguda en un entorn coordinat U_i , i així pel lema anterior, la seva adherència és homeomorfa a l'interval $I = [0, 1]$. Considerant com a vèrtexs els punts $\{a_i, b_i, i = 1, \dots, m\}$, i com arestes les esmentades adherències, s'obté una triangulació de X . \square

Lema 2.4. [Reducció a forma normal]. *Sigui X una corba triangulable connexa. Aleshores X és homeomorfa a la circumferència \mathbf{S}^1 .*

Demostració. Com cada vèrtex de la triangulació de X ho és exactament de dues arestes, els podem ordenar de la forma següent: escollim un vèrtex qualsevol, p_1 ; notem p_2 un vèrtex que estigui connectat a p_1 per una aresta; seguidament escollim el vèrtex p_3 com el vèrtex de l'altra aresta incident a p_2 , i reiterem el procés fins ordenar tots els vèrtexs p_1, p_2, \dots, p_m . Observi's que la corba X ha de contenir una aresta entre p_1 i p_m , ja que en cas contrari a aquests vèrtex només hi arribaria una aresta, i que s'obtenen així efectivament tots els vèrtexs, ja que la corba és simplicialment connexa, per 2.2.1.

Considerem ara els m punts de la circumferència \mathbf{S}^1 , corresponents a les arrels m -èsimes de la unitat, $q_j = \exp(2\pi i j/m)$, $1 \leq j \leq m$. Per a cada j , $1 \leq j \leq m-1$, sigui h_j un homeomorfisme entre l'arc de circumferència $q_j q_{j+1}$, i l'aresta $[p_j, p_{j+1}]$ de la triangulació de X , tal que $h_j(q_j) = p_j$ i $h_j(q_{j+1}) = p_{j+1}$, i sigui h_m un homeomorfisme entre l'arc de circumferència $q_m q_1$, i l'aresta $[p_m, p_1]$ de la triangulació de X , tal que $h_m(q_m) = p_m$ i $h_m(q_1) = p_1$. Aquests homeomorfismes defineixen un homeomorfisme de \mathbf{S}^1 en X . \square

Com una varietat compacta té un nombre finit de components connexes, se segueix finalment,

Teorema 2.5. *Sigui X una corba compacta, aleshores X és homeomorfa a la unió disjunta d'un nombre finit de circumferències.* \square

Problemes

1. Sigui X una corba connexa no compacta. Proveu que X és homeomorfa a la recta real \mathbf{R} .
2. Sigui X una corba amb vora, connexa i compacta. Proveu que X és homeomorfa a l'interval $[0, 1]$ de la recta real.
3. Sigui X una corba amb vora, connexa i no compacta. Proveu que X és homeomorfa a l'interval semiobert $(0, 1]$ de la recta real.

3 Superfícies poligonals

Recordem que una superfície topològica és una varietat topològica de dimensió 2, és a dir, un espai topològic que verifica el segon axioma de numerabilitat, que és de Hausdorff i que localment és homeomorf a \mathbf{R}^2 .

El pla \mathbf{R}^2 és l'exemple més elemental de superfície. Les quàdriques no degenerades de \mathbf{R}^3 , com els el·lipsoïdes, els cilindres, els hiperboloides, etc. en són altres exemples clàssics. Entre les superfícies compactes l'esfera i el tor són les més elementals. Ambdues superfícies es poden obtenir a partir d'un polígon del pla per identificació d'arestes. En efecte, si considerem un quadrat de vèrtexs $ABCD$, l'esfera s'obté identificant el costat AD amb el costat AB , i BC amb DC , mentres que el tor s'obté identificant el costat AD amb BC , i AB amb DC , vegeu la figura 5.1.

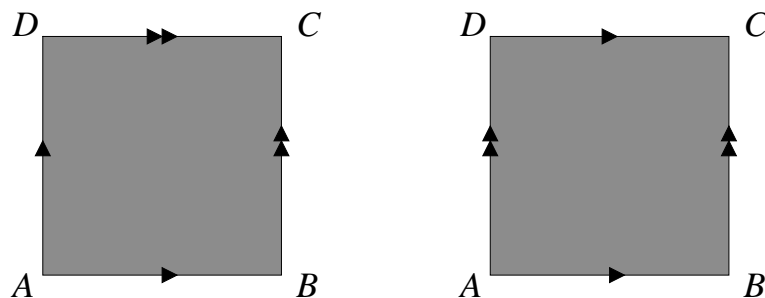


Figura 5.1: Esfera i tor obtinguts a partir d'un quadrat.

En aquest apartat anem a generalitzar aquesta construcció per tal d'obtenir superfícies a partir de la identificació dels costats orientats d'un polígon arbitrari.

Considerem un polígon regular del pla, P , amb un nombre parell de costats $2n$. Numerem els vèrtexs en forma creixent p_1, \dots, p_{2n} , segons els sentit anti-horari, i agrupem les arestes orientades per parells: si l'aresta $[p_i, p_{i+1}]$ està aparellada amb l'aresta $[p_j, p_{j+1}]$, notem

$$\tau_{ij} : [p_i, p_{i+1}] \longrightarrow [p_j, p_{j+1}]$$

una afinitat bijectiva. Observem que només hi ha dues afinitats possibles: si $\tau_{ij}(p_i) = p_j$, i necessàriament $\tau_{ij}(p_{i+1}) = p_{j+1}$, direm que τ_{ij} conserva l'orientació, en cas contrari tindrem $\tau_{ij}(p_i) = p_{j+1}$ i $\tau_{ij}(p_{i+1}) = p_j$, i direm que τ_{ij} inverteix l'orientació. Considerem ara l'espai topològic X que s'obté quan identifiquem les arestes dos a dos segons les afinitats escollides, és a dir, X és l'espai quocient de P per la relació d'equivalència R generada per $x \sim \tau_{ij}x$, per tot $x \in FrP$. Notarem $\pi : P \longrightarrow X$ la projecció.

Proposició 3.1. *X és una superfície compacta, connexa i triangulable.*

Demostració. La compacitat i la connexió es dedueixen de les mateixes propietats de P ja que π és una aplicació d'identificació. Així mateix, X verifica el segon axioma de numerabilitat. El que cal provar és que X és localment homeomorf a \mathbf{R}^2 i és de Hausdorff.

Observem que podem distingir tres tipus de punts de X : els de $\pi(\overset{\circ}{P})$, que només tenen una antiimatge per π ; els de $\pi(FrP - \{p_1, \dots, p_{2n}\})$, que tenen dues antiimatges a P ; i els que corresponen als vèrtexs p_i , amb un nombre indeterminat d'antiimatges entre 1 i $2n$. En qualsevol cas, la antiimatge d'un punt de X per π és un nombre finit de punts.

Per veure que X és localment \mathbf{R}^2 hem de fer un estudi particular per a cadascun dels tipus de punts. Si $x = \pi(p)$ és imatge d'un punt interior de P aleshores el resultat és immediat ja que en un entorn prou petit de p l'aplicació π és un homeomorfisme.

Si $x \in X$ és imatge d'un punt d'una aresta que no és un vèrtex, x tindrà dues antiimatges, q_1, q_2 , ambdues sobre dos costats de P identificats per π . Si prenem discs D_i , $i = 1, 2$, del pla centrats a q_i , de radi ε prou petit per tal que no continguin cap vèrtex de P , aleshores $D = \pi[(D_1 \cap P) \cup (D_2 \cap P)]$ és homeomorf a un disc de \mathbf{R}^2 , (vegeu la figura 5.2).

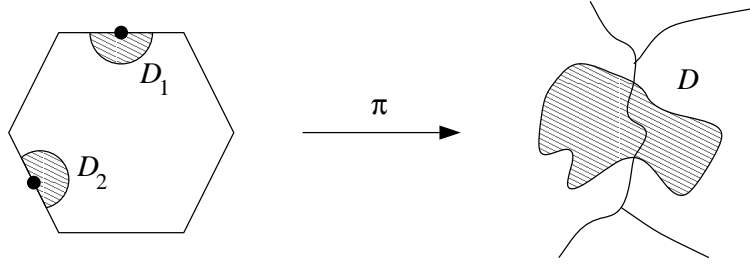


Figura 5.2: Disc al voltant d'un punt en la imatge de dues arestes.

Sigui ara x un punt de X que és imatge de r vèrtexs de P , p_{i_1}, \dots, p_{i_r} . Com en el cas anterior prenem discs D_{i_j} de \mathbf{R}^2 centrats en els punts p_{i_j} , $1 \leq j \leq r$, de radi fixat ε que no continguin altres vèrtexs de P que p_{i_1}, \dots, p_{i_r} , i notem de la mateixa manera les corresponents interseccions amb P , $1 \leq j \leq r$. Com els costats de P estan identificats a parells, podem suposar ordenats els punts p_{i_j} de forma que cada D_{i_j} tingui un costat en comú amb el disc anterior i l'altre amb el posterior. És un exercici comprovar aleshores que $D = \pi(\cup_{1 \leq j \leq r} D_{i_j})$ és un entorn de x homeomorf a un disc del pla (vegeu la figura 5.3).

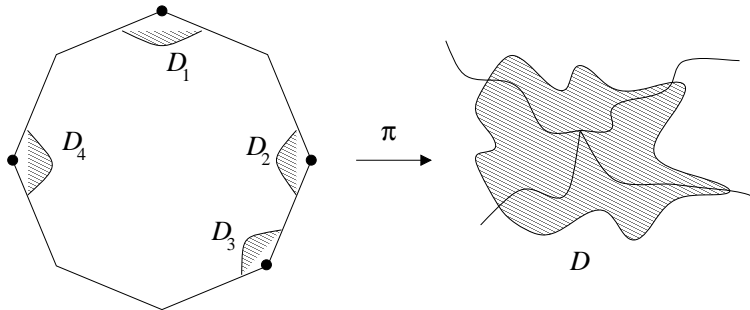
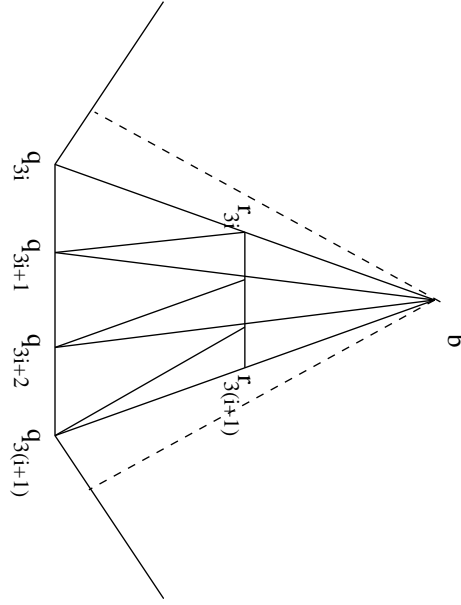


Figura 5.3: Disc al voltant d'un punt imatge de r -vèrtexs.

Observi's que aquest darrer raonament no és vàlid quan un vèrtex no s'identifica a cap altre. En aquest cas, si D és la intersecció de P amb un disc que no conté cap altre vèrtex, les arestes de D s'identifiquen per donar l'entorn de x corresponent.

Figura 5.4: Triangulació de X .

Utilitzant oberts com els descrits en la prova anterior de que X és localment homeomorfa a \mathbf{R}^2 , prou petits, es demostra que X és un espai de Hausdorff.

Finalment, per veure que X és triangulable, triangularem P de forma que π indueixi la triangulació buscada. Per fer-ho considerem b el baricentre de P , introduïm els punts q_{3i} , q_{3i+1} i q_{3i+2} de l'aresta $[p_i, p_{i+1}]$ de coordenades baricèntriques 0, $1/3$ i $2/3$, i els baricentres r_j de les arestes $[b, q_j]$, $1 \leq j \leq 6n$. Els triangles $\Delta(b, r_j, r_{j+1})$, $\Delta(r_j, q_j, q_{j+1})$, i $\Delta(r_j, q_{j+1}, r_{j+1})$, donen una triangulació de P compatible amb π que indueix una triangulació de X , (vegeu la figura 5.4). \square

Definició. Sigui X una superfície compacta. Direm que X és una *superfície polygonal* si existeix un polígon regular P amb un nombre parell de costats, i un aparellament dels costats orientats, tal que X és homeomorfa a la superfície quocient P/\sim .

És clar que les superfícies polygonals que s'obtenen depenen de com s'hagin

aparellat els costats del polígon P . Precisarem aquesta dependència de la forma següent: sigui P un polígon regular de $2n$ costats, i suposem que els costats estan agrupats per parells. A cada costat li assignem una lletra, a, b, c, \dots , i al costat associat li assignem la mateixa lletra si s'identifiquen per l'afinitat que conserva l'orientació, o la mateixa lletra afectada d'un exponent -1 si s'identifiquen per l'afinitat que inverteix l'orientació. Aleshores l'aparellament de les arestes de P queda determinat per la *paraula* que correspon a la juxtaposició de les lletres de les arestes, començant per una aresta i seguint en ordre anti-horari.

En general, direm que A és una paraula de longitud n , $A(a_1, \dots, a_n)$, si conté n lletres, a_1, \dots, a_n , cadascuna de les quals hi apareix dues vegades en la forma

$$\dots a_i \dots a_i \dots \quad \text{o} \quad \dots a_i \dots a_i^{-1} \dots$$

Denotarem per X_A la superfície que li correspon segons la construcció anterior. Així per exemple, el tor \mathbf{T}^2 correspon a la paraula $aba^{-1}b^{-1}$, i l'ampolla de Klein correspon a la paraula $abab^{-1}$. Associarem l'esfera \mathbf{S}^2 a la paraula aa^{-1} , i el pla projectiu real \mathbf{P}^2 a la paraula aa .

Donat que hem triangulat les superfícies poligonals, podem calcular fàcilment la característica de Euler d'aquestes superfícies. Sigui A una paraula de n lletres i X_A la superfície poligonal corresponent. Notem v' el nombre de punts de la superfície X_A que són imatge dels vèrtexs del polígon. Aleshores es té:

Proposició 3.2. $\chi(X_A) = 1 + v' - n$.

Demostració. En efecte, el nombre de vèrtexs, arestes i triangles de la triangulació de la prova de la proposició 3.1 és

$$\begin{aligned} v &= 1 + 8n + v' , \\ a &= 27n , \\ c &= 18n , \end{aligned}$$

i per tant resulta

$$\chi(X_A) = v - a + c = 1 + v' - n . \quad \square$$

En la definició de superfície poligonal hem suposat que les aplicacions d'identificació de les arestes, τ_{ij} , són afinitats, o que el polígon de partida P

és regular. Podem preguntar-nos si escollint altres homeomorfismes entre les arestes, o polígons no necessàriament regulars, o fins i tot curvilinis, obtenim les mateixes superfícies. La resposta és afirmativa, encara que no necessitem aquest resultat en el desenvolupament del capítol, i de fet serà una conseqüència del teorema de classificació de superfícies. Vegeu no obstant els problemes d'aquesta secció.

Problemes

1. Sigui P un polígon regular del pla amb un nombre parell de costats, identificats dos a dos. Siguin $\sigma_{ij} : [p_i, p_{i+1}] \longrightarrow [p_j, p_{j+1}]$ homeomorfismes qualssevol, i siguin τ_{ij} afinitats amb les mateixes orientacions que els homeomorfismes σ_{ij} . Proveu que l'espai quocient $P/(x \sim \sigma_{ij}x)$ és homeomorf a la superfície poligonal $P/(x \sim \tau_{ij}x)$.
2. Sigui \mathbf{D} el disc unitat tancat de \mathbf{R}^2 , i p_1, \dots, p_{2n} , $2n$ punts de la circumferència \mathbf{S}^1 . Agrupem els arcs entre cada dos d'aquest punts consecutius per parelles. Si l'arc (p_i, p_{i+1}) està aparellat amb l'arc (p_j, p_{j+1}) , sigui $\sigma_{ij} : (p_i, p_{i+1}) \longrightarrow (p_j, p_{j+1})$ un homeomorfisme. Proveu que l'espai quocient $\mathbf{D}/(x \sim \sigma_{ij}(x))$ és una superfície poligonal.
3. *Superfícies amb vora poligonals*: sigui P un polígon del pla, no necessàriament amb un nombre parell de costats. Identifiquem alguns dels costats per parelles, segons una afinitat. Proveu que l'espai topològic quocient $X = P/\sim$ és una superfície amb vora, compacta, connexa, i triangulable.

4 Les superfícies estàndard

En l'apartat anterior hem calculat la característica de Euler de totes les superfícies poligonals. En aquest apartat introduïm unes superfícies poligonals particulars, les superfícies estàndard, i calculem la seva homologia. Això ens permetrà provar que aquestes superfícies són essencialment diferents, és a dir, que no són homeomorfes entre elles.

Definició. Anomenarem *superfícies estàndard* a les superfícies poligonals X_A que corresponen a les paraules

$$\begin{aligned} A_0 &:= aa^{-1}, \\ A_g &:= a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}, \\ B_g &:= a_1a_1 \dots a_ga_g. \end{aligned}$$

Direm que g és el *gènere* de la superfície corresponent, i notarem $g\mathbf{T}^2 = X_{A_g}$, $g\mathbf{P}^2 = X_{B_g}$.

Així, per exemple, X_{A_0} és l'esfera, X_{A_1} és el tor \mathbf{T}^2 , i X_{B_1} és el pla projectiu real \mathbf{P}^2 . Geomètricament la construcció de les superfícies estàndard es realitza a partir del tor o del pla projectiu mitjançant la suma connexa de superfícies, construcció a la que dedicarem l'apartat 9. Per exemple, la superfície estàndard de paraula A_2 s'obté per juxtaposició de A_1 amb A_1 i això equival, com veurem, a dibuixar un disc en dos tors i identificar-los per la vora (vegeu la figura 5.5).

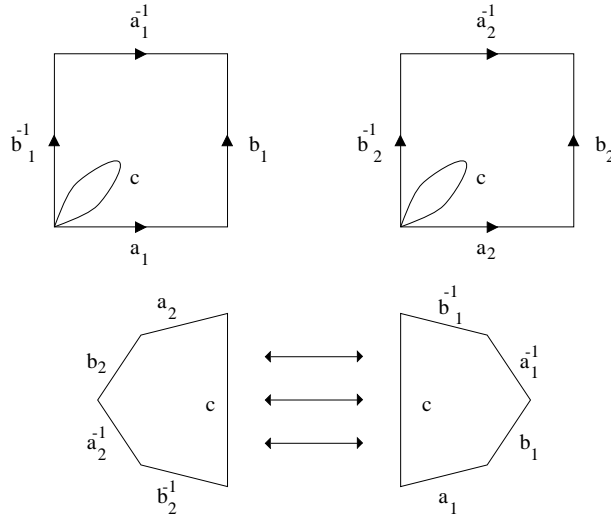


Figura 5.5: Obtenció de $2\mathbf{T}^2$ a partir de dos tors.

Proposició 4.1. *Els grups d'homologia $H_p(X)$ de les superfícies estàndard són nuls per $p \geq 3$, i per $0 \leq p \leq 2$ són*

$$\begin{aligned} H_p(\mathbf{S}^2) &\cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = 0, \\ 0, & p = 1, \\ \mathbf{Z}, & p = 2, \end{cases} \\ H_p(g\mathbf{T}^2) &\cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = 0, \\ \mathbf{Z}^{2g}, & p = 1, \\ \mathbf{Z}, & p = 2, \end{cases} \\ H_p(g\mathbf{P}^2) &\cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = 0, \\ \mathbf{Z}^{g-1} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & p = 1, \\ 0, & p = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

D'aquí es dedueix immediatament:

Corollari 4.2. *Dues superfícies estàndard diferents no són homeomorfes.*

□

Demostració de 4.1: L'homologia de l'esfera \mathbf{S}^2 és coneguda. Calculem l'homologia de $X = g\mathbf{T}^2$. Sigui x un punt de X que prové de l'interior del polígon P , i B un disc de X centrat en x , de radi prou petit perquè no talli les imatges de les arestes del polígon.

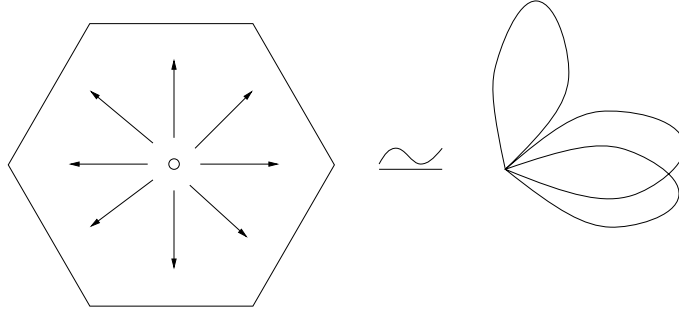
Considerem el recobriment obert de X donat per

$$U = X - x, \quad V = B.$$

Calculem ara $H_*(U)$ i $H_*(V)$. L'obert U és del mateix tipus d'homotopia que el graf de $2g$ arestes i un sol vèrtex que s'obté al realitzar les identifications de les arestes del polígon, vegeu la figura 5.6.

Mentres que V és un disc de \mathbf{R}^2 . Per tant les homologies de U i de V són

$$H_p(U) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = 0, \\ \mathbf{Z}^{2g}, & p = 1, \\ 0, & p \geq 2, \end{cases} \quad H_p(V) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = 0, \\ 0, & p \geq 2. \end{cases}$$

Figura 5.6: Graf de $2g$ arestes i 1 vèrtex.

Finalment observem que $U \cap V = V - x$ és del tipus d'homotopia de \mathbf{S}^1 . Així, la successió exacta de Mayer-Vietoris associada al recobriment $\{U, V\}$

$$H_2(U) \oplus H_2(V) \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow H_1(U \cap V) \longrightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow 0$$

es redueix a

$$0 \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}^{2g} \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow 0.$$

El cicle generador de $H_1(\mathbf{S}^1)$ és homòleg en U a la suma $a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \dots + a_g + b_g - a_g - b_g = 0$. Per tant, f és el morfisme 0, i en resulta

$$H_2(X) \cong \mathbf{Z} \quad \text{i} \quad H_1(X) \cong \mathbf{Z}^{2g}.$$

Per $X = g\mathbf{P}^2$, fem un raonament anàleg: prenem com abans x un punt que prové de l'interior del polígon, $U = X - x$, i $V = B$ un disc al voltant de x que no talli les imatges de les arestes del polígon. Així, $U \cap V = B - x$ és del tipus d'homotopia de la circumferència \mathbf{S}^1 . En aquest cas U és del mateix tipus d'homotopia que un graf de g arestes i un sol vèrtex, i per tant

$$H_p(U) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = 0, \\ \mathbf{Z}^g, & p = 1, \\ 0, & p \geq 2, \end{cases} \quad H_p(V) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = 0, \\ 0, & p \geq 2. \end{cases}$$

La successió exacta de Mayer-Vietoris es redueix a

$$0 \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}^g \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow 0.$$

Però ara, el cicle generador de $H_1(\mathbf{S}^1)$ és homòleg en U a la suma $a_1 + a_1 + \dots + a_g + a_g = 2 \sum_{i=1}^g a_i$, i per tant f és el morfisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbf{Z}^g, \\ 1 & \longrightarrow & 2 \sum a_i. \end{array}$$

En particular, f és un morfisme injectiu, d'on resulta que $H_2(X) = 0$, i $H_1(X) = \text{coker} f$.

El cicles a_1, \dots, a_g formen una base de \mathbf{Z}^g . Considerem el canvi de base de \mathbf{Z}^g donat per

$$\begin{cases} a'_1 = a_1 \\ a'_2 = a_2 \\ \dots \\ a'_g = \sum_{i=1}^g a_i, \end{cases}$$

que, en efecte, és un canvi de base ja que el determinant de la transformació és 1. En aquesta nova base (a'_1, \dots, a'_g) l'aplicació f s'escriu

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}^{g-1} \oplus \mathbf{Z} & \longrightarrow & H_1(X) \longrightarrow 0 \\ & & 1 & \longrightarrow & 2a'_g & & \end{array}$$

i per tant, $H_1(X) \cong \mathbf{Z}^{g-1} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. □

Si haguéssim pres coeficients en un cos de característica zero, per exemple \mathbf{Q} , el mateix raonament ens donaria:

Corollari 4.3. *L'homologia racional de les superfícies estàndard $H_p(X, \mathbf{Q})$, és nulla per $p \geq 3$, i per $0 \leq p \leq 2$ és*

$$\begin{aligned} H_p(\mathbf{S}^2, \mathbf{Q}) &\cong \begin{cases} \mathbf{Q}, & p = 0, \\ 0, & p = 1, \\ \mathbf{Q}, & p = 2, \end{cases} \\ H_p(g\mathbf{T}^2, \mathbf{Q}) &\cong \begin{cases} \mathbf{Q}, & p = 0, \\ \mathbf{Q}^{2g}, & p = 1, \\ \mathbf{Q}, & p = 2, \end{cases} \\ H_p(g\mathbf{P}^2, \mathbf{Q}) &\cong \begin{cases} \mathbf{Q}, & p = 0, \\ \mathbf{Q}^{g-1}, & p = 1, \\ 0, & p = 2. \end{cases} \end{aligned} \quad \square$$

En qualsevol cas, d'aquests resultat se segueix fàcilment el càlcul de la característica de Euler de les superfícies estàndard.

Corollari 4.4. *La característica de Euler de les superfícies estàndard és:*

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{S}^2) &= 2, \\ \chi(g\mathbf{T}^2) &= 2 - 2g, \\ \chi(g\mathbf{P}^2) &= 2 - g.\end{aligned}$$

□

Observem en particular que la característica de Euler χ , o equivalentment el gènere g , no és suficient per a distingir el tipus d'homeomorfisme de les superfícies estàndard, perquè $\chi(g\mathbf{T}^2) = \chi(2g\mathbf{P}^2)$. Més endavant veurem que les superfícies estàndard $g\mathbf{T}^2$ són orientables, mentres que les $g\mathbf{P}^2$ no ho són. Així, les superfícies estàndard es distingiran pel seu gènere i la seva orientabilitat.

Problemes

1. Calculeu l'homologia singular de la superfície poligonal associada a la paraula $ababc^{-1}$.
2. S'anomenen *superfícies amb vora estàndard* a les superfícies amb vora corresponents a les paraules

$$\begin{aligned}A_{0,k} &= c_1 d_1 c_1^{-1} \dots c_k d_k c_k^{-1}, \\ A_{g,k} &= a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 d_1 c_1^{-1} \dots c_k d_k c_k^{-1}, \\ B_{g,k} &= a_1 a_1 \dots a_g a_g c_1 d_1 c_1^{-1} \dots c_k d_k c_k^{-1}.\end{aligned}$$

Calculeu l'homologia de les superfícies amb vora estàndard, i deduiu que no són homeomorfes entre elles.

3. Calculeu l'homologia singular amb coeficients en un anell commutatiu R de les superfícies estàndard. Considereu, en particular, el cas $R = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

5 Superfícies triangulables

En els apartats anteriors hem vist com construir superfícies topològiques a partir d'un polígon amb un nombre parell de costats identificant aquests costats per parells. En el present apartat provarem que aquest mètode és molt general, en el sentit que precisa el següent resultat.

Teorema 5.1. *Sigui X una superfície topològica compacta, connexa i triangulable. Aleshores X és homeomorfa a una superfície polygonal.*

La idea de la demostració és demantellar la superfície en triangles i després unir aquest triangles en el pla per tal d'obtenir el polígon cercat. Per realitzar aquest procés hem de conèixer algunes propietats de les triangulacions de superfícies, propietats que es resumeixen en el resultat següent:

Proposició 5.2. *Sigui X una superfície triangulada. Aleshores es verifica:*

1. *Tota arista ho és exactament de dos triangles.*
2. *Donat un vèrtex x de la triangulació, podem ordenar els triangles que el tenen com a vèrtex: T_1, \dots, T_k , de forma que el triangle T_i té exactament una arista en comú amb T_{i+1} si $i < k$, i T_k té una arista en comú amb T_1 .*

Demostració. Suposem que una arista e ho és de r triangles, i sigui $x \in e$. Calculem l'homologia local de X en x : restringint-nos a un entorn contràctil U de x i usant la successió exacta d'homologia relativa trobem

$$H_2(X, X - x) \cong H_2(U, U - x) \cong H_1(U - x).$$

Per la invariància homotòpica de l'homologia, aquest grup és isomorf a l'homologia d'un graf amb dos vèrtexs i r arestes entre ells (figura 5.7).

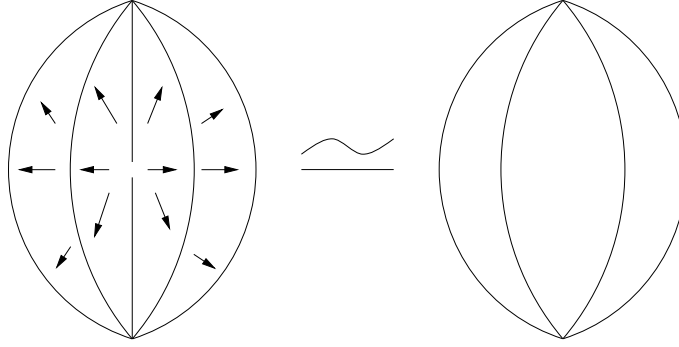
Per tant

$$H_2(X, X - x) \cong \mathbf{Z}^{r-1}.$$

Si $r > 2$ el rang d'aquest grup és > 1 , i en particular diferent de 1, el que contradiu que X sigui una superfície topològica, per 4.1.2. Així, $r = 2$.

La segona part es demostra de forma semblant. \square

Demostració de la proposició 5.1. Siguin T_1, T_2, \dots, T_n els triangles d'una triangulació de X . Podem suposar els triangles ordenats de forma que T_j té un costat en comú amb algun dels precedents T_i , $1 \leq i \leq j$. En efecte,

Figura 5.7: Tipus d'homotopia d'un entorn puntejat de x .

prenem T_1 un triangle qualsevol, T_2 un triangle que tingui un costat en comú amb T_1 , i T_3 qualsevol triangle que tingui un costat en comú amb T_1 o T_2 , etc. Suposem que aquest procés acaba en T_k , amb $k < n$. Llavors, tenim una partició $\{T_1, \dots, T_k\}$, $\{T_{k+1}, \dots, T_n\}$ tal que cap triangle de la segona part té una aresta en comú amb un triangle de la primera part, i així podem descomposar X en la forma

$$X = (\cup_{1 \leq i \leq k} T_i) \cup (\cup_{k+1 \leq j \leq n} T_j) = Y \cup Z.$$

Com X és connex i Y , Z , són tancats, es tindrà $Y \cap Z \neq \emptyset$, i, donat que els triangles T_i i T_j no tenen arestes en comú, la intersecció $Y \cap Z$ estarà formada per un conjunt de vèrtexs aïllats. Però aleshores, si x és un d'aquests vèrtexs, els triangles que tenen x com a vèrtex no es poden ordenar com indica l'apartat 2 de 5.2, en contradicció amb aquesta proposició.

Observem ara el lema següent, de demostració immediata.

Lema 5.3. *Sigui K_1 un complex simplicial de dimensió 2 tal que $|K_1|$ és un polígon regular de n costats i els vèrtexs de K_1 són els vèrtexs del polígon, i sigui K_2 el complex que resulta d'afegir a K_1 un triangle que té amb K_1 un costat del polígon en comú. Aleshores K_2 admet com a realització geomètrica un polígon regular de $n + 1$ costats tal que els vèrtexs de K_2 són els vèrtexs dels polígon.* \square

Acabem ara la prova del teorema 5.1: prenem els triangles T_1, \dots, T_n de la triangulació de X , un triangle equilàter del pla P_1 i un homeomorfisme amb

T_1 . Com T_2 té almenys un costat en comú amb T_1 , pel lema anterior s'obté un quadrat P_2 i un homeomorfisme de P_2 amb $T_1 \cup T_2$. Així, inductivament construïm un polígon regular del pla, P , i una aplicació $\varphi : P \rightarrow X$ contínua i exhaustiva, amb $\varphi|_{\overset{\circ}{P}}$ injectiva. Sigui R_φ la relació d'equivalència de P segons la qual dos punts de P són equivalents si tenen la mateixa imatge per φ . L'aplicació induïda $P/R_\varphi \rightarrow X$ és bijectiva, i per tant, com P és compacte i X és de Hausdorff, aquesta aplicació és un homeomorfisme. \square

6 Classificació de les superfícies triangulables

En aquest apartat anem a provar que tota superfície triangulable compacta i connexa és homeomorfa a una superfície estàndard. El mètode de demostració consisteix en convertir una superfície poligonal qualsevol en una superfície estàndard per una successió de modificacions de paraules que preservin el tipus topològic de la superfície subjacent. Aquest procés s'anomena reducció a la forma normal.

La reducció a la forma normal està basada en una idea intuitivament molt senzilla: si en una fase de la identificació d'arestes d'un polígon practiquem un tall, marcant una instrucció d'enganxar que permeti recosir aquest tall, el resultat final no s'altera. Aquesta mena de modificacions es coneix amb el nom de *retallar i enganxar*. Per exemple, la figura 5.8 il·lustra el fet que les paraules $abab^{-1}cc$ i $acdad^{-1}c$ donen lloc a superfícies homeomorfes. Per formalitzar aquest procés definirem una relació entre paraules.

Definició. Direm que dues paraules A i B són equivalents, $A \sim B$, si les superfícies poligonals associades, X_A i X_B , són homeomorfes.

És immediat comprovar que es verifiquen les relacions

$$\begin{aligned} AB &\sim BA, \\ A(\dots a \dots) &\sim A(\dots a^{-1} \dots), \\ A(\dots a \dots) &\sim A(\dots b \dots), \end{aligned}$$

i que aquesta relació \sim és una relació d'equivalència.

Volem provar que tota paraula és equivalent a una paraula estàndard, i per això realitzarem una sèrie de reduccions que enunciem en forma de lemes.

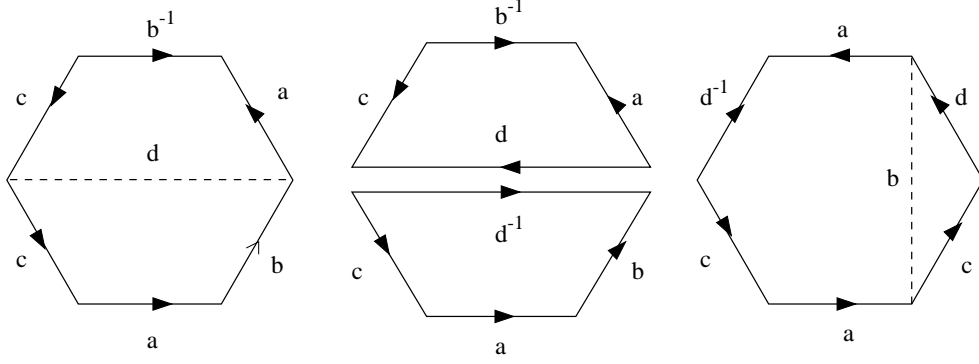


Figura 5.8: Les superfícies $abab^{-1}cc$ i $acdad^{-1}c$ són homeomorfes.

Lema 6.1. [Canvi de variables]. *Es verifiquen les equivalències*

$$\begin{aligned} AaBCaD &\sim bCA^{-1}bB^{-1}D, \\ AaBCa^{-1}D &\sim bCBb^{-1}AD. \end{aligned}$$

Demostració. Formalment la primera equivalència correspon al canvi de variables $b = AaB$, i per tant $a = A^{-1}bB^{-1}$. Geomètricament aquest canvi correspon a retallar el primer polígon per b , una corda que va des del vèrtex inicial de A fins al vèrtex final de B , i identificar-lo per a , com es veu a la figura 5.9. És a dir, si notem P i P' els polígons així obtinguts, es té una bijecció entre P/\sim i P'/\sim que és contínua, i com P/\sim és compacte i P'/\sim és de Hausdorff, en resulta el lema.

Quant a la segona equivalència, utilitzarem el canvi de variables $a = A^{-1}bC$. \square

Definició. Sigui A una paraula. Direm que una lletra a de A és de *primera espècie* si la paraula A conté la parella a, a^{-1} . En cas contrari direm que a és de *segona espècie*.

Lema 6.2. [Normalització de parells de segona espècie]. *Es verifica*

1. $AaBaC \sim AbbB^{-1}C$.
2. $AaaBC \sim ABbbC$.

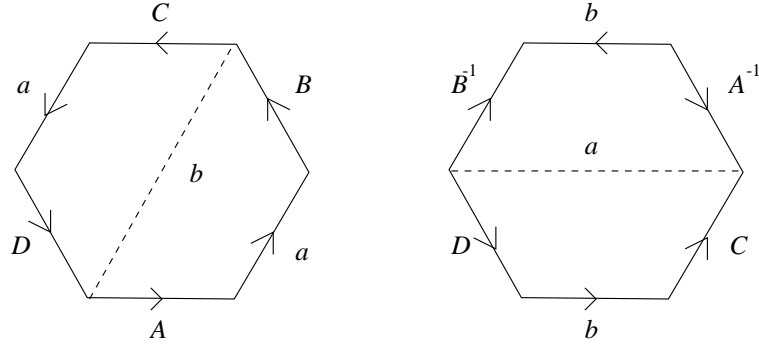


Figura 5.9: Canvi de variable.

Demostració. En efecte, realitzem el canvi de variables $b = aB$, i per tant $a = bB^{-1}$. Per 6.1 resulta l'equivalència

$$AaBaC \sim AbbB^{-1}C .$$

La demostració de 2. és anàloga. \square

Exemple. L'ampolla de Klein, que correspon a la paraula $abab^{-1}$ és equivalent, després de normalitzar el parell de segona espècie, a $aab^{-1}b^{-1}$, és a dir, a la superfície estàndard $2\mathbf{P}^2$.

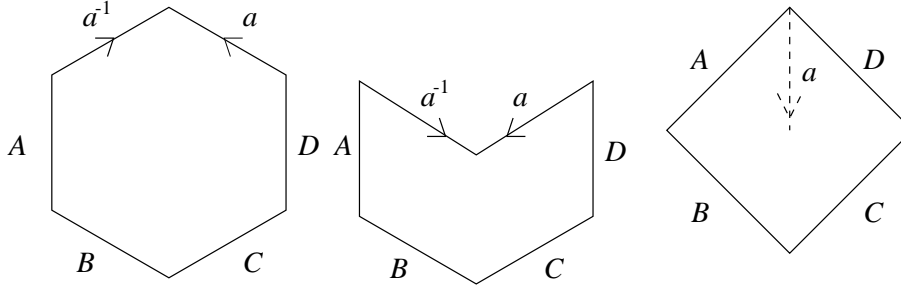
Inductivament podem normalitzar totes les parelles de lletres de segona espècie de forma que podem suposar que tota paraula és equivalent a una paraula de la forma AB , on A només conté lletres de segona espècie i B només conté lletres de primera espècie.

Lema 6.3. [Cancel·lació]. *Si A o B són paraules no buides, es verifica*

$$Aaa^{-1}B \sim AB .$$

Demostració. Es raona de forma similiar a a 6.1, vegeu la figura 5.10. \square

Així, podem cancel·lar tots els parells de primera espècie consecutius, i per tant, mantenint les notacions anteriors, suposar que la paraula B no conté cap parell del tipus aa^{-1} . Quant en una paraula apareixen dues lletres de primera espècie entrelaçades en la forma $aba^{-1}b^{-1}$, direm que es té una *nansa*.

Figura 5.10: $Aaa^{-1}B \sim AB$

Lema 6.4. [Normalització de nanses] *Es verifica l'equivalència*

$$AaBbCa^{-1}Db^{-1}E \sim ADCcdc^{-1}d^{-1}BE .$$

Demostració. Fent el canvi de variables $d = BbC$, resulta $AaBbCa^{-1}Db^{-1}E \sim Aada^{-1}DCd^{-1}BE$, per 6.1. Ara fent el canvi de variables $c^{-1} = a^{-1}DC$, i aplicant un cop més 6.1, resulta el lema. \square

Finalment necessitarem el següent lema:

Lema 6.5. *Es verifica $Aaabcb^{-1}c^{-1}B \sim AddeeffB$.*

Demostració. En efecte, usant el lema 6.2 reiteradament, es tenen les equivalències següents

$$\begin{aligned} Aaabcb^{-1}c^{-1}B &\sim Adbc^{-1}b^{-1}dc^{-1}B \\ &\sim Adbd^{-1}bffB \\ &\sim AddeeffB . \end{aligned}$$

\square

Estem ara en condicions de provar el resultat central d'aquest apartat.

Teorema 6.6 (Classificació de les superfícies triangulables). *Si X és una superfície topològica compacta, connexa i triangulable. Aleshores X és homeomorfa a una única superfície estàndard.*

Demostració. Per 5.1, X és homeomorfa a una superfície polygonal X_A . És suficient per tant veure que la paraula A és equivalent a una paraula estàndard, la unicitat resultarà de 4.2.

En primer lloc provem que A és equivalent a aa^{-1} o bé a una superfície polygonal amb tots els vèrtexs identificats en un sol punt.

Direm que dos vèrtexs del polígon P són equivalents si, i només si, tenen la mateixa imatge en la superfície X_A . Suposem que A no és aa^{-1} , i que hi ha més d'una classe d'equivalència de vèrtexs de P . Sigui r el nombre màxim de vèrtexs equivalents. Com hi ha més d'una classe d'equivalència, hi ha una aresta a que té vèrtex no equivalents v i v' , i tal que un d'ells, per exemple v , és equivalent a $r - 1$ vèrtexs. Si apliquem prèviament la cancel·lació de parells de primera espècie adjacents, l'altra aresta que surt de v' , b , no pot ser a ni a^{-1} . Anem a provar que, si la classe d'equivalència del vèrtex v' té s elements, A és equivalent a una paraula en la que la classe de v' té $s - 1$ elements, i la de v , en té $r + 1$. En efecte, fem el canvi de variables $c = ab$, que correspon a tallar el polígon P com es veu a la figura 5.11. Així, per 6.1 si $A = BabCb^{\pm 1}D$, es té $A \sim BcC(ca^{-1})^{\pm 1}D$, que és un polígon en el que v' és equivalent a $s - 1$ vèrtexs (vegeu la figura 5.11).

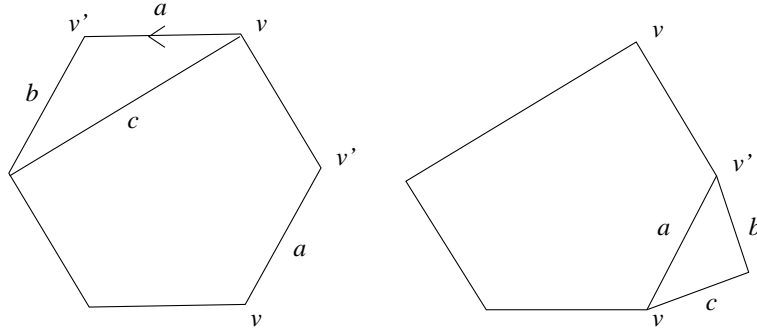


Figura 5.11: Modificació de l'ordre d'un vèrtex.

Així doncs, reiterant aquest procediment, podem suposar que, llevat que $A = aa^{-1}$, A és una paraula en la que tots els vèrtexs estan identificats. Anem a aplicar la normalització de parells de primera i de segona espècie per demostrar que A és equivalent a una paraula estàndard. Observem, abans de començar el procés de normalització, que les equivalències de paraules

contingudes en el lemes 6.2, 6.4 i 6.5, no modifiquen el fet que la paraula resultant tingui tots els vèrtexs equivalents. Així, per 6.2, podem suposar que $A = BC$, on B només conté parelles de segona espècie, i C només en conté de primera espècie. Si C és buida, aleshores X_A és equivalent a una superfície estàndard $g\mathbf{P}^2$. Si C no és buida, contindrà un parell de primera espècie, $C = DaEa^{-1}F$, i després d'aplicar el lema 5.3 podem suposar que $E \neq \emptyset$. Afirmem que necessàriament hi ha un altre parell de primera espècie, b, b^{-1} , amb b de E i b^{-1} de F o de D . En efecte, en cas contrari, com les arestes de E no s'identifiarien amb cap aresta de F o de D , els vèrtexs de a no serien equivalents, en contradicció amb que tots els vèrtexs de A ho són. Així, $A = BDaE'bGa^{-1}Hb^{-1}F'$, i per 6.4, podem normalitzar aquestes dues parelles de forma que $A \sim BDHGcdc^{-1}c^{-1}E'F'$. Observem que aquesta equivalència no modifica B , ni trenca les nanses que pugui haver en D, E', G, H i F' . Podem per tant iterar el procés, de forma que totes les parelles de primera espècie de C estiguin normalitzades. Si B és buida, aleshores la superfície X_A és equivalent a una superfície $g\mathbf{T}^2$, per algun g .

Finalment analitzem el cas en que ni B ni C són buides. Aleshores el lema 6.5 permet normalitzar A de forma que només quedin lletres de segona espècie, i per tant la superfície corresponent és equivalent a una superfície estàndard $g\mathbf{P}^2$, per algun g . \square

Com per 4.1, una superfície estàndard queda determinada per la seva homologia, de 6.6 s'obté el corollari següent.

Corollari 6.7. *Siguin X, Y , superfícies topològiques compactes, connexes i triangulables. Aleshores X i Y són homeomorfs si, i només si, $H_*(X) \cong H_*(Y)$.* \square

Veiem així que certs invariants homotòpics determinen el tipus topològic de les superfícies compactes orientables. Però un resultat semblant és fals en dimensió ≥ 3 , ja que es pot provar, per exemple, que els espais lenticulars $L(7, 1)$ i $L(7, 2)$ són del mateix tipus d'homotopia però no són homeomorfs, [12]. De fet, ni tant sols se sap caracteritzar amb invariants homotòpics l'esfera de dimensió 3. En aquest sentit H. Poincaré va conjecturar l'any 1904 que una varietat de dimensió 3, compacta, orientable, i simplement connexa és homeomorfa a l'esfera \mathbf{S}^3 . Avui en dia encara no es coneix la resposta a aquesta conjectura!.

L'objectiu dels propers apartats serà provar que la hipòtesis de triangulabilitat del teorema 6.6 (i, per tant, del corollari 6.7, també) és innecessària, doncs el teorema de Radó, que provarem al §8, afirma que tota superfície topològica ho és. Per a arribar a aquest teorema de Radó, pasarem abans pel teorema de Schönflies, resultat per si mateix molt interessant.

Problemes

1. Sigui A una paraula. Proveu que la superfície X_A és homeomorfa a una superfície $g\mathbf{P}^2$, per algun g , si, i només si, A conté una parella de segona espècie.
2. Sigui X una superfície triangulable, compacta i connexa. Proveu que X és homeomorfa a una superfície poligonal donada per la paraula

$$a_1 \dots a_n a_1^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} a_n^{\pm 1}.$$

7 El teorema de Schönflies

El teorema de la corba de Jordan establert al capítol 4 assegura que si J és una *corba de Jordan*, és a dir, una corba tancada simple de \mathbf{R}^2 , aleshores $\mathbf{R}^2 - J$ té dues components connexes, una acotada i l'altra no, que tenen J com a frontera comú. Anomenarem *domini de Jordan* a tot conjunt obert, connex i acotat del pla que té per frontera una corba de Jordan, i *arc de Jordan* a tot subconjunt del pla homeomorf a l'interval $I = [0, 1]$. L'objectiu del teorema de Schönflies és identificar les adherències dels dominis de Jordan.

Teorema 7.1 (de Schönflies). *Sigui J una corba de Jordan i D el domini de Jordan que defineix J . Aleshores $\overline{D} = D \cup J$ és homeomorf al disc unitat tancat \mathbf{D} .*

Dedicarem aquest apartat a donar diverses conseqüències del teorema de Schönflies, deixant la demostració del teorema per al proper apartat.

Corollari 7.2. *Si $J \subseteq \mathbf{S}^2$ és una corba de Jordan, aleshores l'adherència de cadascuna de les components connexes de $\mathbf{S}^2 - J$ és homeomorfa al disc unitat tancat.*

Demostració. Considerem el pla \mathbf{R}^2 com a subespai de l'esfera \mathbf{S}^2 . Pel teorema de Jordan-Brower $\mathbf{S}^2 - J$ té dues components connexes. Si considerem la projecció estereogràfica $\mathbf{S}^2 - 0 \rightarrow \mathbf{R}^2$, aleshores l'adherència de la component no acotada de $\mathbf{R}^2 - J$ és un domini de Jordan, i pel teorema de Schönflies, és homeomorfa al disc unitat tancat. \square

Al llarg d'aquest apartat necessitarem el següent lema elemental.

Lema 7.3. *Tot homeomorfisme $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ s'estén a un homeomorfisme del disc unitat, $\tilde{f} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$.*

Demostració. En efecte, és immediat comprovar que l'aplicació $\tilde{f} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ definida per

$$\begin{aligned}\tilde{f}(0) &= 0, \\ \tilde{f}(x) &= \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad \text{si } x \neq 0,\end{aligned}$$

és un homeomorfisme, que estén f . \square

Corollari 7.4. *Siguin J, J' , corbes de Jordan de \mathbf{R}^2 , i $f : J \rightarrow J'$ un homeomorfisme. Si D, D' són els dominis de Jordan definits per J, J' , respectivament, aleshores f s'estén a un homeomorfisme $\tilde{f} : \overline{D} \rightarrow \overline{D}'$.*

Demostració. Pel teorema de Schönflies, podem escollir homeomorfismes $h : \mathbf{D} \rightarrow \overline{D}$ i $h' : \mathbf{D} \rightarrow \overline{D}'$. Considerem l'homeomorfisme de la circumferència \mathbf{S}^1 en si mateixa, definit per la composició $h'^{-1}fh$. Per 7.3, aquest homeomorfisme s'estén a un homeomorfisme $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$. Així, obtenim l'homeomorfisme $h'Fh^{-1} : \overline{D} \rightarrow \overline{D}'$, que sobre la corba de Jordan J és igual a f . \square

El teorema de Schönflies estarà a la base de la demostració d'un resultat fonamental de la teoria de superfícies: el teorema de triangulació de Radó. L'ús que en farem d'aquest teorema serà també a través d'algunes variants que enunciem a continuació.

Teorema 7.5 (de la corona). *Siguin J i J' dues corbes de Jordan de \mathbf{R}^2 tals que J està continguda en la component acotada de $\mathbf{R}^2 - J'$. Aleshores existeix un homeomorfisme $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ que transforma J i J' en les circumferències de radi 1 i 2, respectivament, i la regió entre J i J' en la corona corresponent.*

Abans de començar la demostració observem que, pel teorema de Jordan $\mathbf{R}^2 - J \cup J'$ té tres components, la interior a J , l'exterior a J' , i la intermèdia entre J i J' , que notarem B . El resultat postula que a través d'un homeomorfisme l'adherència de B és equivalent a la corona $C = \{x \in \mathbf{R}^2; 1 \leq \|x\| \leq 2\}$.

Demostració. Pel teorema de Schönflies podem suposar que J és la circumferència unitat. Considerem dos radis arbitraris de \mathbf{R}^2 i siguin x i y els punts de tall d'aquests radis amb J , i x' , y' els primers punts de tall amb J' . Notem r i s els segments entre x i x' , i y i y' , respectivament. Els punts x i y (resp. x' i y') descomponen J (resp. J') en dos arcs de Jordan que denotarem per J_1 i J_2 (resp. J'_1 , J'_2) (vegeu la figura 5.12).

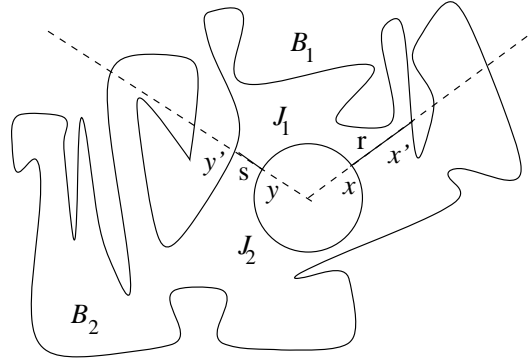


Figura 5.12: Teorema de la corona.

Sigui B la component connexa de $\mathbf{R}^2 - (J \cup J')$ entre J i J' . La corba de Jordan formada pels arcs J_1, r, J'_1 i s , envolta un domini acotat B_1 que podem suposar que està contingut a B , ja que en cas contrari prendriem la corba de Jordan J_1, r, J'_2, s . I anàlogament la corba de Jordan J_2, r, J'_2, s envolta un domini acotat B_2 igualment contingut a B . A més, $\overline{B} = \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2$. Pel teorema de Schönflies \overline{B}_1 i \overline{B}_2 són homeomorfs al disc unitat.

Descomposem la corona C en la forma

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y); 1 \leq \|(x, y)\| \leq 2, y \geq 0\}, \\ C_2 &= \{(x, y); 1 \leq \|(x, y)\| \leq 2, y \leq 0\}, \end{aligned}$$

Les fronteres FrB_1 i FrC_1 de B_1 i C_1 , respectivament, són corbes de Jordan. Escollim un homeomorfisme de FrB_1 amb FrC_1 de forma que J_1 es transformi en la semicircumferència de radi 1, r es transformi en el radi corresponent a les x positives, J'_1 es transformi en la semicircumferència de radi 2 i s en el segment corresponent a les x negatives. Pel lema 7.3, podem estendre aquest homeomorfisme a un homeomorfisme de B_1 sobre C_1 . De la mateixa forma podem definir un homeomorfisme de B_2 sobre C_2 , que coincideixi en els punts de $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = r \cup s$ amb l'anterior, i per tant defineixi un homeomorfisme de \overline{B} sobre C . Una nova aplicació del lema 7.3 permet estendre l'homeomorfisme a un homeomorfisme entre el domini de Jordan definit per J i el disc unitat, i entre el domini no acotat de $\mathbf{R}^2 - J'$ i $\{(x, y); \|(x, y)\| \geq 2\}$. \square

Aquest resultat permet precisar el teorema de Schönflies de la forma següent

Teorema 7.6. *Siguin J i J' dues corbes de Jordan del pla. Aleshores hi ha un homeomorfisme $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ i una constant $r > 0$ tals que, h transforma J en J' , i és la identitat sobre els punts de \mathbf{R}^2 de mòdul $\geq r$.*

Demostració. Podem suposar que J està continguda en la component acotada de $\mathbf{R}^2 - J'$, ja que en cas contrari podem prendre una circumferència que contingui a J i J' , i comparar-la alternativament amb J i J' .

Pel teorema de la corona existeix un homeomorfisme $k : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ que transforma la regió entre J i J' en la corona $C = \{x \in \mathbf{R}^2; 1 \leq \|x\| \leq 2\}$. Considerem la funció contínua $g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ definida per

$$g(t) = \begin{cases} 2t - 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}, & 1 \leq t \leq 3, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Aleshores $\ell(x) = (1 + g(\|x\|))x$ defineix una aplicació de \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^2 que transforma la circumferència de radi 1 en la circumferència de radi 2, i que és la

identitat per als punts de distància a l'origen superior o igual a 3. Podem ara pendre

$$h := k^{-1}\ell k$$

i r el màxim dels valors de la funció $\|k^{-1}(x)\|$ sobre el disc de radi 3. \square

Utilitzant un raonament completament anàleg al de la demostració del teorema de la corona es prova la següent versió del teorema de Schönflies.

Teorema 7.7. *Sigui J una corba de Jordan i D el domini de Jordan que defineix. Sigui a un punt de D . Existeix un homeomorfisme $h : \mathbf{D} \rightarrow \overline{D}$ tal que $h(0) = a$.* \square

Com a conseqüència d'aquest resultat s'obté la unicitat topològica de la circumferència de \mathbf{R}^2 :

Corollari 7.8. *Sigui $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow J$ un homeomorfisme de la circumferència \mathbf{S}^1 amb una corba de Jordan J de \mathbf{R}^2 . Aleshores hi ha un homeomorfisme $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ que estén f .*

Demostració. En efecte, $\mathbf{S}^2 - J$ és la unió de dos dominis de Jordan, D_1 i D_2 . Suposem que, per projecció estereogràfica, $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{S}^2 - (0, 0, 1)$, i que D_1 conté el punt de l'infinit, $(0, 0, 1)$. Per 7.7 i 7.3, existeixen homeomorfismes $g_1 : E_+^2 \rightarrow D_1$ i $g_2 : E_-^2 \rightarrow D_2$ que estenen f , on $E_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2; z \geq 0\}$ i $E_-^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2; z \leq 0\}$, i tal que $g_1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. Com aquests homeomorfismes coincideixen sobre $\mathbf{S}^1 = E_+^2 \cap E_-^2$, defineixen un homeomorfisme $g : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ que estén f , i com aquest homeomorfisme conserva el punt de l'infinit, podem acabar la demostració per projecció estereogràfica. \square

L'últim corollari que donem del teorema de Schönflies estableix que els arcs de Jordan localment són rectes del pla, des del punt de vista de la Topologia, és clar.

Corollari 7.9. *Sigui γ un arc de Jordan del pla i x un punt de γ . Aleshores existeix una base d'entorns de x , \mathcal{U} , tal que si $U \in \mathcal{U}$, existeix un homeomorfisme $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que $\varphi(\gamma \cap U) = \mathbf{R} \times 0$ i $\varphi(x) = 0$.*

Demostració. Exercici pel lector. \square

8 Demostració del teorema de Schönflies

Hem deixat per aquest apartat la demostració del teorema de Schönflies ja que, encara que no és molt difícil, és prou elaborada. Sigui J una corba de Jordan, i D el domini de Jordan que defineix. L'objectiu de l'apartat és demostrar que $\overline{D} = D \cup J$ és homeomorf a un disc tancat.

En els cursos d'Anàlisi Complexa es demostra el teorema de la transformació conforme de Riemann segons el qual tot domini simplement connex de \mathbf{C} , i diferent de \mathbf{C} , és conformement equivalent al disc unitat obert, és a dir, que si $D \neq \mathbf{C}$ és un domini simplement connex de \mathbf{C} existeix una aplicació holomorfa i bijectiva de D a l'interior del disc unitat \mathbf{D} . Aquest resultat, juntament amb el teorema d'extensió a la frontera de Caratheodory, si aquesta és una corba de Jordan, permet provar el teorema de Schönflies (vegeu, per exemple, el llibre de Berenstain-Gay, [3]). A més, en el context de l'Anàlisi Complexa hi ha alguns casos pels que disposem de fórmules concretes per establir la transformació conforme del domini sobre el disc unitat, com per exemple, les fórmules de Schwarz-Christoffel per a les regions poligonals.

La demostració que anem a presentar a continuació és topològica i procedeix en diverses etapes. En primer lloc comprovarem el resultat per a una corba de Jordan *poligonal*, és a dir, que és un políedre de dimensió 1 del pla. Després establim resultats que permeten aproximar J per corbes poligonals, i finalment demostrarem el teorema.

Teorema 8.1. *Sigui J una corba de Jordan poligonal de \mathbf{R}^2 , i D el domini de Jordan de $\mathbf{R}^2 - J$. Aleshores \overline{D} és homeomorf al disc unitat tancat.*

Demostració. En primer lloc raonarem que l'espai \overline{D} és triangulable, per usar després inducció sobre el nombre de triangles d'una triangulació per establir el resultat. A més provarem que la triangulació és compatible amb una subdivisió de J .

Comencem per comprovar la triangulabilitat en els casos més senzills, els que corresponen a un quadrilàter P , per fer-nos una idea de la demostració en general. Si P és convex, podem triangular \overline{D} considerant els triangles determinats pel baricentre de P i cadascuna de les quatre arestes. Si el quadrilàter no és convex hi haurà dos costats tals que les rectes que els contenen tallen un altre costat de P (vegeu la figura 5.13). D'aquesta forma \overline{D} es descompon en tres regions convexes, que es triangulen a partir dels respectius baricentres com en el cas anterior.

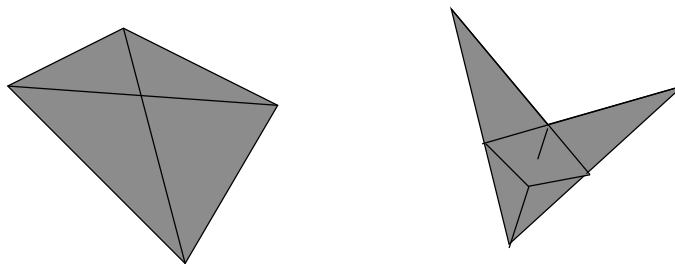


Figura 5.13: Triangulacions de quadrilàters.

En general, siguin ℓ_1, \dots, ℓ_n les rectes del pla que contenen les arestes de J . Cadascuna d'aquestes rectes descompon el pla en dos semiespais tancats, i com la intersecció de conjunts convexos és un conjunt convex, la reunió d'aquestes rectes descompon el pla en una unió finita de regions tancades convexes R_1, \dots, R_m . Una regió R_j o bé està continguda a \overline{D} o bé és disjunta amb D , ja que es verifica $FrR_j \subseteq \cup_{i=1}^n \ell_i$ i $R_j \cap J \subseteq FrR_j$. Per tant, \overline{D} és unió d'algunes de les regions R_j , que són necessàriament acotades. Si R_j és una regió tal que $R_j \subseteq \overline{D}$, la frontera de la regió R_j , FrR_j , és un políedre de dimensió 1, i així el baricentre de R_j i cadascuna de les arestes de FrR_j determinen triangles que defineixen una triangulació de R_j . Aquestes triangulacions són compatibles amb l'estructura de FrR_j com a políedre, i per tant les triangulacions de dues d'aquestes regions, R_j i R_k , són compatibles. S'obté, per tant, una triangulació de \overline{D} .

Així, podem suposar que \overline{D} està triangulat i continuar la demostració. Raonem ara per inducció sobre el nombre de triangles de la triangulació. Si només hi ha un triangle, el resultat és evident, pel que suposarem que el teorema és cert per a tota corba de Jordan poligonal tal que \overline{D} admeti una triangulació amb menys d' m triangles, i suposem que tenim una descomposició de \overline{D} en m triangles. Sigui σ un triangle tal que la intersecció $\sigma \cap J$ és no buida. Aquesta intersecció pot constar d'una o dues arestes, en tot cas en el subconjunt d'arestes restants de σ hi ha un arc simple γ tot ell contingut a D i amb extrems a J . Aquest arc descompon J en dos subarcs γ_1, γ_2 que juntament amb γ formen sengles corbes de Jordan J_1, J_2 . Siguin D_1 i D_2 els dominis de Jordan corresponents. Com γ és frontera d'aquestes regions, no

són buides, i a més és fàcil comprovar que verifiquen

$$\begin{aligned}\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 &= \overline{D} \\ \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 &= \gamma .\end{aligned}$$

Per hipòtesi d'inducció les adherències \overline{D}_1 i \overline{D}_2 són homeomorfes a un disc, i per tant, si notem B_1 i B_2 els semidiscs definits per

$$\begin{aligned}B_1 &= \{(x, y) ; x \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\} , \\ B_2 &= \{(x, y) ; x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\} ,\end{aligned}$$

existeixen homeomorfismes $h_i : \overline{D}_i \longrightarrow B_i$, $i = 1, 2$. A més, podem escollir els homeomorfismes h_1 i h_2 de forma que $h_i(\gamma)$, $i = 1, 2$, sigui el segment $0 \times [-1, 1]$, i tals que $h_1|_\gamma = h_2|_\gamma$. Així, h_1 i h_2 defineixen un homeomorfisme de \overline{D} en el disc unitat. \square

Definició. Sigui D un domini del pla i $\alpha : [0, 1] \longrightarrow \overline{D}$ un arc simple. Direm que α és un *camí de sortida* de D si $\alpha([0, 1)) \subseteq D$ i $\alpha(1)$ és un punt de la frontera de D . Al punt $\alpha(1)$ l'anomenarem *la sortida* de α .

Direm que α és una *secció transversal* de D si $\alpha((0, 1)) \subseteq D$ i $\alpha(0), \alpha(1)$ són punts de la frontera de D .

Més endavant necessitarem el resultat següent,

Lema 8.2. *Sigui J una corba de Jordan de \mathbf{R}^2 , i D el domini de Jordan corresponent. Tota secció transversal σ de D , descomposa D en dos dominis de Jordan.*

Demostració. Provem, en primer lloc, que $\mathbf{R}^2 - (J \cup \sigma)$ té tres components connexes. Per veure-ho, calculem el grup $H_0(\mathbf{R}^2 - (J \cup \sigma))$. Com un punt no desconecta una superfície, calcularem de fet $H_0(\mathbf{S}^2 - (J \cup \sigma))$. Els extrems de σ determinen dos arcs de Jordan de J , que juntament amb σ formen sengles corbes de Jordan, J_1, J_2 . Així, pel teorema de separació de Jordan, els oberts del pla $U = \mathbf{S}^2 - J_1$, $V = \mathbf{S}^2 - J_2$, tenen dues components connexes cadascun. La unió d'aquests oberts és

$$U \cup V = \mathbf{S}^2 - (J_1 \cap J_2) = \mathbf{S}^2 - \sigma ,$$

i la seva intersecció

$$U \cap V = \mathbf{S}^2 - (J_1 \cup J_2) = \mathbf{S}^2 - (J \cup \sigma) .$$

Així, pel teorema de no separació $U \cup V$ és connex, i $H_1(U \cup V) = 0$. Per tant, la successió exacta de Mayer-Vietoris del recobriment $\{U, V\}$ acaba en la forma

$$0 \longrightarrow H_0(\mathbf{S}^2 - (J \cup \sigma)) \longrightarrow \mathbf{Z}^2 \oplus \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0 ,$$

i com la característica de Euler d'una successió exacta és zero, resulta que el rang de $H_0(\mathbf{S}^2 - (J \cup \sigma))$ és 3, és a dir, el complementari de $J \cup \sigma$ té tres components connexes.

Comprovem ara que D és unió de dues d'aquestes components. Notem D' l'altra component connexa de $\mathbf{R}^2 - J$, i D_1, D'_1, D_2, D'_2 les components connexes de $\mathbf{R}^2 - J_1$ i $\mathbf{R}^2 - J_2$, respectivament. Com $J_1 \cap D' = \emptyset$, una de les components de $\mathbf{R}^2 - J_1$ no talla D' , suposem que és D_1 . Així, $D_1 \subseteq \mathbf{R}^2 - D'$, i de fet, com D_1 és un obert, $D_1 \subseteq D - \sigma$. Provem que D_1 és una component connexa de $D - \sigma$. En efecte, si no ho fos, existiria un punt x de la component connexa de $D - \sigma$ que conté D_1 tal que $x \in FrD_1$, però pel teorema de separació de Jordan $FrD_1 = J_1$, el que és una contradicció. \square

Definició. Sigui D un domini del pla. Es diu que un punt de la frontera $x \in FrD$ és *accessible* des de D si existeix un camí de sortida de D amb sortida x .

Exemples. 1. Sigui D un domini del pla tal que la seva frontera és una corba poligonal J . Aleshores tots els punts de J són accessibles des de D . En efecte, si $x \in J$, un disc de centre x i radi més petit que la distància de x als vèrtexs de J talla D en un semidisc, del que la intersecció amb J és el diàmetre, d'on se segueix l'asserció.

De fet, aquest argument prova que si la frontera de D és localment poligonal en x , aleshores x és accessible des de D per un arc poligonal.

2. Sigui D el domini interior al quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ de \mathbf{R}^2 complementari a la unió dels segments $I_n = \{(x, x/n); 0 \leq x \leq 1/2\}$. Els punts de la frontera de D de la forma $(x, 0)$ amb $x < 1/2$ no són accessibles des de D . En efecte, sigui $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ un camí de sortida d'extrem $(x, 0)$ amb $x < 1/2$. Per la continuïtat de α , existirà un $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $t > 1 - \varepsilon$

es verifica $\alpha_1(t) < 1/2$. Així, si (a, b) és un punt del subarc de α corresponent a $t > 1 - \varepsilon$ i escollim n de forma que $1/n < b$, aleshores α talla necessàriament el segment I_n (vegeu la figura 5.14).

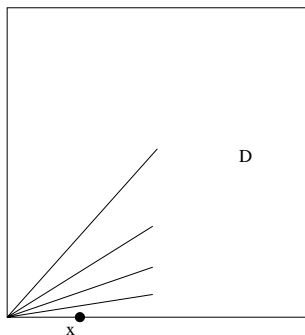


Figura 5.14: El punt x no és accessible des de D .

Deixem com exercici la comprovació del lema següent.

Lema 8.3. *Sigui D un domini del pla.*

1. *Si un punt de la frontera FrD és accessible, ho és des de qualsevol punt de D .*
2. *Siguin $x, y \in D$ dos punts accessibles. Aleshores hi ha una secció transversal de D d'extrems x i y .* □

Definició. Sigui D un domini del pla i $\alpha : [0, 1] \rightarrow \overline{D}$ un arc simple. Direm que α és un arc *quasi-poligonal* si qualsevol subarc tancat de α contingut a D , és un arc poligonal.

Per tal de començar l'aproximació d'una corba de Jordan per corbes poligonals necessitarem un resultat previ d'accessibilitat, la proposició 8.5, que serà conseqüència del lema següent.

Lema 8.4 (d'accessibilitat). *Siguin J una corba de Jordan, D un domini de $\mathbf{R}^2 - J$, i p un punt de J . Aleshores per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que donats dos punts qualssevol $x, y \in D_\delta(p) \cap D$ existeix un arc de Jordan poligonal que uneix x i y , i contingut a $D_\varepsilon(p) \cap D$.*

Demostració. Sigui J_1 un subarc de J que conté p i tot ell contingut a $D_\varepsilon(p)$ i sigui $J_2 = \overline{J - J_1}$. Considerem δ la distància de p a l'arc J_2 , que és un nombre positiu, $\leq \varepsilon$. Afirmem que δ verifica l'enunciat de la proposició.

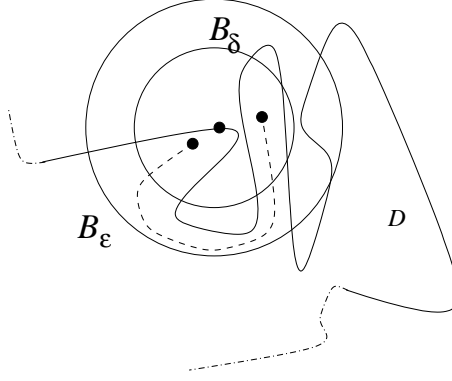


Figura 5.15: Accessibilitat d'un punt d'una corba de Jordan.

En efecte, notem $C_\varepsilon = Fr D_\varepsilon(p)$ i siguin $x, y \in D_\delta(p) \cap D$. Els punts x, y no estan separats per $C_\varepsilon \cup J_2$, ni tampoc per J . La intersecció $(C_\varepsilon \cup J_2) \cap J = J_2$ és un arc simple i per tant podem aplicar el teorema de no separació per deduir que $H_1(\mathbf{S}^2 - (C_\varepsilon \cup J_2) \cap J) = 0$. Així, la successió exacta de Mayer-Vietoris associada al recobriment obert $\{\mathbf{S}^2 - (C_\varepsilon \cup J_2), \mathbf{S}^2 - J\}$ de $\mathbf{S}^2 - (C_\varepsilon \cup J) \cap J$ dóna un morfisme injectiu

$$\partial : H_0(\mathbf{S}^2 - (C_\varepsilon \cup J_2 \cup J)) \longrightarrow H_0(\mathbf{S}^2 - (C_\varepsilon \cup J_2)) \oplus H_0(\mathbf{S}^2 - J) ,$$

d'on se segueix que x i y no estan separats per $C_\varepsilon \cup J_2 \cup J$. El camí pot escollir-se poligonal per 1.6.6. \square

Proposició 8.5. *Els punts d'una corba de Jordan són accessibles des de qualsevol de les components del complementari. Més encara, són accessibles per arcs de Jordan quasi-poligonals.*

Demostració. Sigui J una corba de Jordan, D una component connexa $\mathbf{R}^2 - J$ i $p \in J$. Pel lema d'accessibilitat, 8.4, si prenem $\varepsilon = 1/n$ existeix un nombre $\delta_n > 0$ tal que dos punts $x, y \in D \cap D_{\delta_n}(p)$ qualssevol poden unir-se per

un arc poligonal contingut a $D \cap D_{1/n}(p)$. Per a cada n considerem un punt $x_n \in D \cap D_{\delta_n}(p)$, i notem ℓ_n un arc de Jordan poligonal que uneix x_n amb x_{n+1} a $D \cap D_{1/n}(p)$. La unió d'aquests arcs defineix un camí $\alpha(t)$, de traça $A = \cup \ell_n$. Si aquest camí fos un arc simple, hauriem acabat la prova. En general, α tindrà autointerseccions, pel que hem de rectificar-lo per tal d'obtenir l'arc simple desitjat.

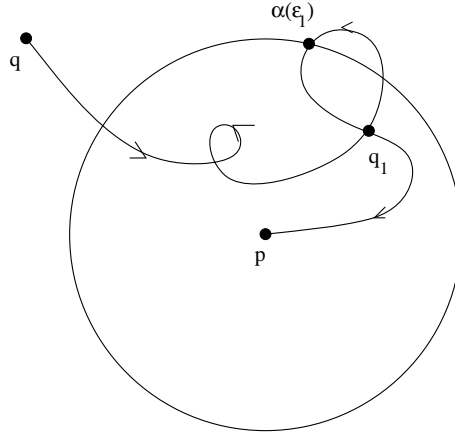
Sigui $q \in A$ un punt qualsevol, afirmem que hi ha un arc simple de q a p , contingut en A i que és un arc de sortida. En efecte, sigui C_1 la circumferència de centre p i radi $|q - p|/2$. Sigui ε_1 el valor màxim de t tal que $\alpha(t) \in C_1$, i notem $t_1 = \max\{\alpha^{-1}\alpha[0, \varepsilon_1]\}$. Així, el punt $q_1 = \alpha(t_1)$ és tal que $|q_1 - p| \leq |q - p|/2$, i $q \notin \alpha((t_1, 1])$ (vegeu la figura 5.16). La corba α és quasipoligonal, i per tant és una corba poligonal entre els punts q i q_1 , pel que hi ha un subarc simple que els uneix. Ara repetim el raonament començant en el punt q_1 . És a dir, sigui C_2 la circumferència de centre p i radi $|q_1 - p|/2$, $\varepsilon_2 = \max\{\alpha^{-1}(C_m)\}$, i $t_2 = \max\{\alpha^{-1}\alpha[0, \varepsilon_2]\}$. Notem $q_2 = \alpha(t_2)$, i σ_2 un subarc poligonal de A entre els punts, q_1 i q_2 . Observem que σ_1 i σ_2 es tallen només en el punt q_1 : si existís un punt q' de la intersecció de σ_1 i σ_2 diferent de q_1 , aleshores existirien $t < t_1$ i $t' > t_1$ tals que $\alpha(t) = \alpha(t') = q'$, el que contradiu que t_1 és el màxim de $\alpha^{-1}\alpha([0, \varepsilon_1])$. Inductivament obtenim una successió de punts, q_n , que tendeix a p , i una successió d'arcs de Jordan σ_n des de q_n fins a q_{n+1} amb interiors disjunts. Si escollim un homeomorfisme de l'arc σ_n amb l'interval $[1/2^n, 1/2^{n+1}]$ de la recta real, s'obté finalment un homeomorfisme de $\cup \sigma_n$ amb $[0, 1]$, i per tant aquesta unió és un arc simple entre q i p . \square

El següent corollari és conseqüència immediata de 8.5 i de 7.3.

Corollari 8.6. *Sigui J una corba de Jordan de \mathbf{R}^2 , i $p, q \in J$. Sigui D un domini del complementari de J . Aleshores existeix una secció transversal de D des de p fins a q . A més, es pot escollir aquesta secció de forma que sigui quasi-poligonal.* \square

Per sistematitzar el procés d'aproximació per corbes poligonals necessitem precisar el resultat d'accessibilitat de la forma següent.

Proposició 8.7. *Sigui J una corba de Jordan, D un domini del complementari de J , i L un subarc de J amb extrems p i q . Donat $\varepsilon > 0$ hi ha una*

Figura 5.16: Elecció de q_1 i de ε_1 .

secció transversal de p a q en $D \cap D_\varepsilon L$, on

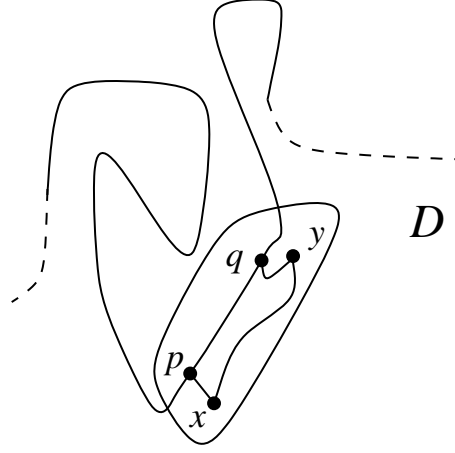
$$D_\varepsilon L = \{x \in \mathbf{R}^2; d(x, L) < \varepsilon\}.$$

A més, es pot escollir aquesta secció de forma que sigui quasi-poligonal.

Demostració. Siguin ap i bq camins de sortida de diàmetre menor que $\varepsilon/2$, amb $a, b \in D$, que existeixen per 7.5. Afirmem que a i b estan connectats en $D \cap D_\varepsilon(L)$. En efecte, sigui L_0 un subarc tancat de $J - L$ tal que $J - L_0 \subseteq D_{\varepsilon/2}(L)$. Els punts a i b no estan separats per $A = L_0 \cup (\mathbf{S}^2 - D_{\varepsilon/2}(L))$ ja que $ap \cup L \cup qb$ és un arc del complementari de A , ni tampoc estan separats per J . La intersecció $J \cap (L_0 \cup (\mathbf{S}^2 - D_{\varepsilon/2}(L))) = J \cap L_0 = L_0$ és un arc, i pel teorema de no separació, $H_1(\mathbf{S}^2 - L_0) = 0$. Així, de la successió exacta de Mayer-Vietoris associada als oberts $\{\mathbf{S}^2 - A, \mathbf{S}^2 - J\}$, es dedueix que el morfisme natural

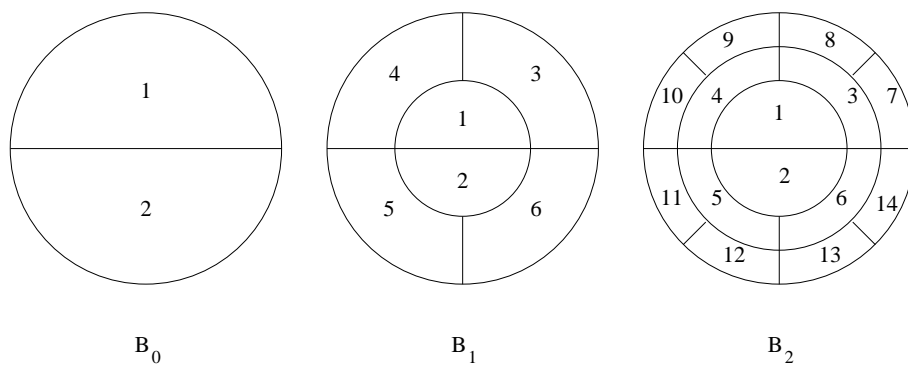
$$H_0(\mathbf{S}^2 - (A \cup J)) \longrightarrow H_0(\mathbf{S}^2 - A) \oplus H_0(\mathbf{S}^2 - J),$$

és injectiu, i que per tant $A \cup J$ no separa els punts a, b . Com $\mathbf{S}^2 - (A \cup J) = D_{\varepsilon/2}(L) - J$, existeix un arc de Jordan L_1 des de a fins a b , que no talla J i contingut a $D_{\varepsilon/2}(L)$, és a dir, contingut a $D \cap D_{\varepsilon/2}(L)$. Si x, y són els primers punts de tall de pa i qb amb L_1 , aleshores la unió dels arcs px , xy , i yq és la secció transversal buscada (vegeu la figura 5.17). \square

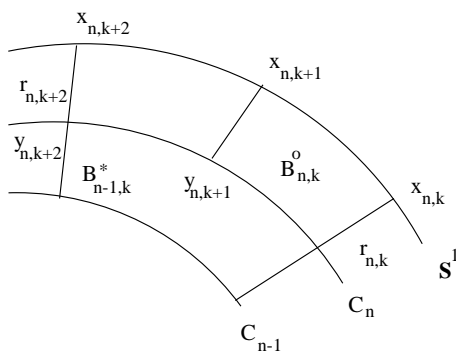
Figura 5.17: Eix transversal en $D \cap D_\varepsilon(L)$.

Demostració del teorema de Schönflies 7.1. Notem \mathbf{D} el disc unitat tancat i \mathbf{S}^1 la circumferència unitat. Anem a definir inductivament una partició de \mathbf{D} que després reproduïrem, en un sentit que ja precisarem, en el domini D . Notarem B_0 la partició del disc unitat que s'obté afegint el diàmetre $[-1, 1]$. B_1 és la partició que s'obté de B_0 afegint la circumferència C_1 de radi $1/2$ i els segments dels radis de \mathbf{D} d'argument les arrels quartes de la unitat entre C_1 i \mathbf{S}^1 . El procés continua subdividint els sectors de la corona entre C_1 i \mathbf{S}^1 , és a dir, la partició B_n s'obté de B_{n-1} afegint la circumferència C_n de radi $1 - 1/n = (n-1)/n$ i els segments dels radis d'argument les arrels 2^n -èssimes de la unitat entre C_n i \mathbf{S}^1 (vegeu la figura 5.18).

Podem formalitzar la construcció de les particions anteriors en la forma següent: notem $x_{n,k} = e^{2\pi i k/2^n}$, $0 \leq k \leq 2^n$, les arrels 2^n -èssimes de la unitat, i $S_{n,k}$ l'arc de la circumferència \mathbf{S}^1 entre les arrels $x_{n,k}$ i $x_{n,k+1}$. Sigui C_n la circumferència de centre l'origen i radi $(n-1)/n$, i siguin $y_{n,k}$, $0 \leq k \leq 2^n$, els punts de C_n d'argument $2\pi k/2^n$, és a dir, $y_{n,k} = \frac{n-1}{n} e^{2\pi i k/2^n}$. La partició B_n s'obté a partir de la partició B_{n-1} afegint la circumferència C_n i els segments del radi d'argument $2\pi k/2^n$ entre els punts $y_{n,k}$ i $x_{n,k}$, $0 \leq k \leq 2^n$, segments que notarem $r_{n,k}$. Notarem $C_{n,k}$ l'arc de la circumferència C_n determinat pels punts $y_{n,k}$ i $y_{n,k+1}$, en el sentit antihorari. Finalment, notarem $B_{n,k}^\circ$ el sector circular determinat per $r_{n,k}$ i $r_{n,k+1}$ i les circumferències C_n i \mathbf{S}^1 , i $B_{n,k}^*$

Figura 5.18: Particions B_0, B_1, B_2 , del disc.

indicarà el sector de $B_{n,k}^\circ$ entre C_n i C_{n+1} (vegeu la figura 5.19).

Figura 5.19: Partició B_n .

Fixat n , els arcs $C_{n,k}$, els arcs $S_{n,k}$, els segments $r_{n,k}$ i els vèrtexs $x_{n,k}$ i $y_{n,k}$ que apareixen a la partició B_n determinen un espai triangulat de dimensió 1, que denotarem per P_n .

Per tal d'establir un homeomorfisme entre \mathbf{D} i \overline{D} reproduïrem les particions anteriors en el domini D . Fixem un homeomorfisme $f : C \rightarrow J$. Començarem construint un espai triangulat J_n homeomorf a P_n , i contingut a \overline{D} . Si p és un punt de \mathbf{D} denotarem per p' el punt corresponent de D . Prenem $x'_{n,k} = f(x_{n,k})$. Com tots els punts d'una corba de Jordan són accessibles, hi ha una secció transversal σ de D des de $x'_{2,0}$ fins a $x'_{2,1}$, que a

més podem escollir quasi-poligonal, 8.5. Siguin $y'_{2,0}$ i $y'_{2,1}$ dos punts d'aquesta secció diferents dels extrems. Per 8.2 la secció σ divideix D en dues regions de Jordan. Utilitzant un cop més el teorema d'accessibilitat, hi ha una secció transversal en cadascuna d'aquestes regions des de $y'_{2,0}$ fins a $y'_{2,1}$. A més, com en els punts $y'_{2,0}$ i $y'_{2,1}$, σ és localment poligonal, podem escollir aquestes seccions poligonals. D'aquesta forma obtenim un subespai triangulat J_1 de \overline{D} que és homeomorf a P_1 , i tal que tot arc de J_1 disjunt de J és poligonal.

Inductivament podem construir ara J_n a partir de J_{n-1} . En efecte, es tracta de subdividir els sectors més externs: considerem dos vèrtexs consecutius $y'_{n-1,k}$ i $y'_{n-1,k+1}$ de J_{n-1} , escollim punts $y'_{n,2k}$, $y'_{n,2k+2}$ dels arcs $r'_{n-1,k}$ i $r'_{n-1,k+1}$, respectivament, i una secció transversal poligonal σ de $B'_{n-1,k}$ que els uneix. La secció σ , els arcs de $r'_{n-1,k}$ i $r'_{n-1,k+1}$, entre $y'_{n,2k}$ i $x'_{n,2k}$, i entre $y'_{n,2k+2}$ i $x'_{n,2k+2}$, respectivament, i l'arc de Jordan de J entre els punts $x'_{n,2k}$ i $x'_{n,2k+1}$ que passa pel punt $x'_{n,2k+1}$, determinen un corba de Jordan. Signi $y'_{n,2k+1}$ un punt de σ diferent dels extrems, aleshores escollim, per 8.6, una secció transversal quasipoligonal des de $y'_{n,2k+1}$ fins a $x'_{n,2k+1}$ en el domini de Jordan corresponent (vegeu la figura 5.20).

La construcció anterior no seria suficient per definir l'homeomorfisme entre \mathbf{D} i \overline{D} ja que no hem imposat cap mena de restricció que assegurí que les eleccions efectuades aproximessin J . Per això, escollirem els punts $y'_{n,2k}$ de forma que la seva distància a $x'_{n-1,k}$ sigui menor que $1/n$, i les seccions transversals entre aquests punts tals que es mantinguin dins de l'entorn $D_{1/n}(J_{n,k})$ de l'arc de Jordan $J_{n,k}$ entre $x'_{n-1,k}$ i $x'_{n-1,k+1}$, el que podem realitzar gràcies al lema 8.7.

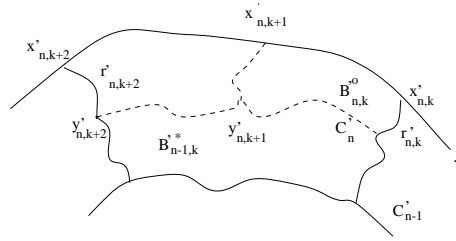


Figura 5.20: Partició de D .

En definitiva, obtenim una successió d'espais triangulats, J_n , que són subespais de \overline{D} i verifiquen:

- (a) Els espais triangulats P_n i J_n són homeomorfs.
- (b) Tot subespai triangulat de J_n que no talli J , és poligonal.
- (c) Els arcs $C'_{n,k}$ estan continguts a $D_{1/n}(J_{n,k})$.

Notem $P_\infty = \cup P_n$ i $J_\infty = \cup J_n$, P_∞ i J_∞ són subespais de \mathbf{D} i de \overline{D} , respectivament, que defineixen particions dels seus interiors. Utilitzant el teorema de Schönflies poligonal, 8.1, anem a definir inductivament un homeomorfisme entre les adherències de les cel·les d'aquestes particions contingudes al·interior de \mathbf{D} i de D , que siguin compatibles en les interseccions. Per fer-ho, ordenem les regions $B_{n,k}$ lexicogràficament, és a dir, $(n, k) < (m, l)$ si $n < m$ o bé si $n = m$ i $k < l$.

La corba C'_1 , que és unió dels arcs $C'_{1,0}$ i $C'_{1,1}$, és una corba de Jordan poligonal, pel que pel teorema de Schönflies poligonal, 8.1, l'adherència del domini de Jordan que defineix és homeomorf a un disc tancat, sigui g_1 un tal homeomorfisme. Considerem ara el domini de Jordan $\overline{B}_{2,0}^*$. La corba de Jordan que l'envolta està formada pels arcs de Jordan $C'_{2,0}$, $r'_{2,0}$, $C'_{3,0}$, $C'_{3,1}$ i $r'_{2,1}$, i per tant és poligonal, pel que per una nova aplicació del teorema de Schönflies poligonal $\overline{B}_{2,0}^*$ és homeomorf al disc unitat. A més, podem escollir un homeomorfisme $g_{2,0} : \overline{B}_{2,0}^* \rightarrow \overline{B}_{2,0}^*$, que coincideixi amb g_1 sobre $C'_{1,0}$.

Inductivament, suposem definits homeomorfismes $g_{m,l} : \overline{B}_{m,n}^* \rightarrow \overline{B}_{m,n}^*$ si $(m, l) < (n, k)$ compatibles en els punts de P_∞ . Pel teorema de Schönflies poligonal, $\overline{B}_{(n,k)+1}^*$ i $\overline{B}_{(n,k)+1}^*$ són homeomorfs. A més, podem escollir un homeomorfisme tal que és igual a $g_{m,l}$ sobre les interseccions $\overline{B}_{m,l}^* \cap \overline{B}_{n,k}^*$, quan aquestes no són buides. Així, inductivament es poden estendre els homeomorfismes $g_{m,l}$ a un homeomorfisme de $\mathring{\mathbf{D}}$ en D .

Estenem g a una aplicació $\overline{g} : \mathbf{D} \rightarrow \overline{D}$ definint $\overline{g}|_{\mathbf{S}^1} = f$. L'aplicació \overline{g} així definida és bijectiva i, com \mathbf{D} és compacte i \overline{D} és de Hausdorff, és suficient provar que és contínua perquè sigui un homeomorfisme.

Segui $p' = f(p) \in J$ i $\varepsilon > 0$, anem a provar que $\overline{g}^{-1}(D_\varepsilon(p'))$ és un obert de \mathbf{D} . Podem suposar que $\varepsilon = 1/n$. Com f és contínua i les arrels de la unitat $x_{n,k}$ són denses en la circumferència \mathbf{S}^1 , podem prendre m prou gran de forma que p' estigui com a molt en dues regions $B'_{m,k}$ i $B'_{m,k+1}$, i que els arcs $p'x'_{m,k}$, $p'x'_{m,k+1}$, $x'_{m,k}x'_{m,k+1}$ i $p'x'_{m,k+2}$, estiguin continguts a $D_{1/2n}(p')$. Per la desigualtat triangular, si imposem a més que $m - 1 > 2n$, es té

$$d(z, p') \leq \frac{1}{m-1} + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n},$$

per tot $z \in FrB'_{m,k} \cup FrB'_{m,k+1}$. I per tant, per l'elecció de les seccions transversals, es tenen les inclusions $B'_{m,k}, B'_{m,k+1} \subset D_{1/n}(p')$. Així, l'entorn de p format pels sectors $B_{m,k} \cup B_{m,k+1}$ està inclòs a $g^{-1}(D_\varepsilon(p'))$, el que acaba la prova. \square

Problemes

1. Proveu el lema 8.3.
2. Raonant com en el cas de les corbes de Jordan proveu que tot punt d'un arc de Jordan és accessible. Deduïu que si I és un arc de Jordan de \mathbf{R}^2 hi ha un homeomorfisme $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ que transforma I en l'interval $[0, 1]$.
És a dir, els arcs de Jordan de \mathbf{R}^2 són dòcils, i no es poden donar a \mathbf{R}^2 situacions com la reflectida per l'arc salvatge de Artin-Fox de \mathbf{R}^3 .
3. Sigui D un domini del pla. Es diu que D és localment connex en un punt de la frontera $a \in FrD$ si donat qualsevol $\varepsilon > 0$ hi ha un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in D \cap D_\delta(a)$ aleshores hi ha un camí de x a y contingut en $D \cap D_\varepsilon(a)$.
 - (a) Doneu exemples de dominis localment connexos en tots els punts de la frontera i d'altres on això no sigui cert.
 - (b) És diu que D és uniformement localment connex en la frontera (que abreujaem en la forma *ulc*) si és localment connex en la frontera i es pot escollir δ per a tots els punts alhora. Proveu que si \overline{D} és compacte i localment connex en tots els punts de la frontera, aleshores és uniformement localment connex en la frontera.
 - (c) Proveu que si un domini és *ulc* aleshores tots els punts de la frontera són accessibles.

9 Triangulació de superfícies

L'objectiu d'aquest apartat és demostrar el teorema de triangulació de superfícies de Radó a partir del teorema de Schönflies. Donat que només hem considerat políedres finits, ens reduïrem a les superfícies compactes.

Teorema 9.1 (de Radó). *Sigui X una superfície compacta. Aleshores X és triangulable.*

La idea de la demostració és la següent: com X és compacta, existeix un recobriment obert finit de X per discs topològics tancats D_1, D_2, \dots, D_m . Notem $\gamma_i = \partial D_i$, que són corbes tancades simples, i.e. homeomorfes a la circumferència. La intersecció d'un disc D_i amb tots els altres defineix una partició de D_i en regions que, per el teorema de Schönflies, és de esperar que siguin homeomorfes al disc. Aleshores cadascuna d'aquestes regions D es podrà triangular com segueix: es marquen com a vèrtexs els punts de FrD que corresponen a les interseccions de les diferents corbes γ_j , un punt intermig entre cada dos punts d'aquests, i un punt interior de D ; aleshores es "llencen" arcs des d'aquest punt interior als altres vèrtexs per tal de determinar els triangles de la triangulació.

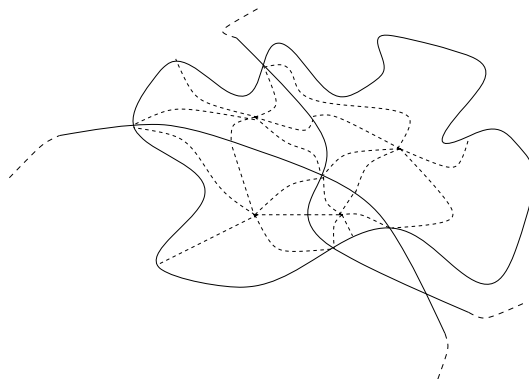


Figura 5.21: Triangulació de superfícies.

Aquest raonament és evidentment incomplet ja que haurem de provar que podem escollir els discs de forma que les interseccions $\gamma_i \cap \gamma_j$ són finites. Per provar això necessitarem el resultat següent, en la prova del qual també intervé el teorema de Schönflies.

Proposició 9.2. *Sigui D un domini del pla i Γ un conjunt de seccions transversals de D que és localment finit en D , i suposem que els arcs de Γ es tallen en un nombre finit de punts. Siguin $p, q \in FrD - \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma}$, dos punts accessibles des de D . Aleshores existeix una secció transversal σ de D de p*

a q , que talla els arcs de Γ en un nombre finit de punts i que no passa pels punts d'intersecció dels arcs de Γ .

Demostració. Com Γ és localment finit en D , la reunió de tots els camins de Γ és un tancat de D , i per tant les components del seu complementari són oberts de D , el conjunt de les quals serà finit o numerable.

Sigui σ_0 una secció transversal de D que uneix p i q , l'existència del qual es pot assegurar per l'accessibilitat dels punts p, q . Com un nombre finit de punts no desconnecta D podem suposar que σ_0 no passa pels punts d'intersecció de les diferents corbes de Γ .

Provem que σ_0 només talla un nombre finit de les components connexes de $D - \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$.

En efecte, suposem que σ_0 tallés un nombre infinit de components de $D - \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$. Prenent un punt de la intersecció de σ_0 amb cadascuna d'aquestes components, tindriem una successió de punts de σ_0 que, com σ_0 és compacte, admet un punt límit $x \in \sigma_0$. Així, tot entorn d'aquest punt talla infinites components connexes de $D - \cup \gamma$, i com aquestes són obertes, x no pot pertànyer a cap d'elles. Per tant $x \in FrD \cup (\cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma)$.

Observem que $x \notin FrD \cap \sigma_0 = \{p, q\}$. En efecte, $x \neq p$ ja que $p \notin \overline{\cup \gamma}$, i per tant existeix un nombre real positiu ε prou petit de forma que el disc de centre p i radi ε , $D_\varepsilon(p)$, no talla a $\overline{\cup \gamma}$, pel que la intersecció $D_\varepsilon(p) \cap \sigma_0$ està continguda en una component connexa del complementari de $\cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$. Anàlogament, $x \neq q$. Així, com $x \in FrD \cup (\cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma)$, i $x \notin FrD$, tindrem que $x \in \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$. Però aleshores, com σ_0 no passa pels punts d'intersecció dels arcs $\gamma \in \Gamma$, existirà un únic camí $\gamma \in \Gamma$ tal que $x \in \gamma$, i, pel corollari 7.9 del teorema de Schönflies, existeix un entorn U de x tal que $U - \cup \gamma$ només té dues components, el que és contradictori amb l'elecció de x . En definitiva, no pot existir un tal punt x , i per tant σ_0 talla un nombre finit de components connexes de $D - \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$.

Notem C_1 la component connexa del complementari de $\cup \gamma$ tal que $p \in \overline{C_1}$, i sigui p_1 el darrer punt de $\sigma_0 \cap \overline{C_1}$. Com C_1 és arc-connex i tant p com p_1 són accessibles des de C_1 , hi ha una secció transversal de C_1 , σ_1 , que uneix p i p_1 , i que tant sols talla els arcs de Γ en p_1 .

Novament pel corollari 7.9, i per l'elecció de σ_0 , en un entorn de p_1 només hi ha dues components connexes. Una d'elles és C_1 , notem C_2 l'altra i sigui p_2 l'últim punt de $\sigma_0 \cap \overline{C_2}$. Per l'arc-connexió de C_2 hi ha una secció transversal de C_2 de p_1 fins a p_2 , notem-lo σ_2 . Iterant el procés, trobarem un nombre

finit de punts $p = p_0, \dots, p_{m-1}, p_m = q$ i camins $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ entre p_{i-1} i p_i , que només tallen els punts de Γ en els punts $p_i, i \neq 0, m$. Component aquests camins s'obté el camí σ buscat. \square

Demostració del teorema de Radó, 8.1. Podem ara precisar la demostració que hem esbossat anteriorment. En cada punt de X considerem dos discs coordenats $D_x \subset D'_x$ homeomorfs als discs oberts de radis 1 i 2 de \mathbf{R}^2 , respectivament. Per la compacitat de X , un nombre finit dels discs D_x formen un recobriment obert. Notem-los D_1, \dots, D_m . Podem suposar que si $i \neq j$ aleshores D_i no és un subconjunt de D_j , ja que en cas contrari podem suprimir el disc D_i . Notem $\gamma_i = \partial D_i, 1 \leq i \leq m$, que són corbes tancades simples de X .

Provem en primer lloc que podem escollir els discs D_i de forma que les interseccions $\gamma_i \cap \gamma_j$ són finites. En efecte, per inducció sobre m podem suposar que els discs D_1, \dots, D_{m-1} verifiquen que les seves fronteres, $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$, es tallen en un nombre finit de punts.

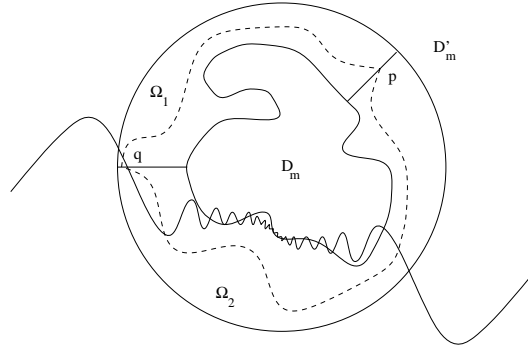


Figura 5.22: Rectificació de D_m .

La unió $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_{m-1}$ té complementari no buit en D'_m , pel que podem escollir dos punts diferents p, q , d'aquest complementari. A més podem escollir aquests punts sobre radis de la corona entre D_m i D'_m diferents, i tant propers a la frontera de D'_m com es vulgui, en particular de forma que els radis r, s que surten de p, q cap a la frontera de D'_m no tallin $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{m-1}$. Aquests radis divideixen la corona entre D_m i D'_m en dos dominis de Jordan Ω_1, Ω_2 . Per 9.2 existeix un eix transversal σ_1 de Ω_1 que uneix p i q , i que

només talla les corbes γ_j en un nombre finit de punts. Anàlogament, existirà un camí σ_2 en Ω_2 amb la mateixa propietat. La corba formada per σ_1 i σ_2 és una corba de Jordan i per tant, pel teorema de Schönflies, el domini de Jordan que defineix és homeomorf a un disc D''_m , que conté a D_m , i que està contingut a D'_m (vegeu la figura 5.22). Substituint D_m per D''_m , obtenim per inducció un recobriment de X per discs, D_1, D_2, \dots, D_m , tal que les seves fronteres es tallen en un nombre finit de punts.

Si existeix un parell $i \neq j$ tal que $\gamma_i \subset D_j$ aleshores el complementari de D_j està contingut en D_i , i essent γ_j una corba de Jordan, el teorema de Schönflies assegura que aquest complementari és homeomorf a un disc. Així doncs, X està cobert per dos discs amb la vora comú, i per tant X és homeomorfa a una esfera, en quin cas és triangulable trivialment.

Podem suposar per tant que no hi ha cap corba γ_i continguda en un disc D_j de forma completa. Així, donat un disc D_j , per aplicació reiterada de 7.2, i tenint present 1.2, veiem que les corbes γ_i el divideixen en un nombre finit de dominis de Jordan, D_{ji} . D'aquesta forma X és reunió d'un nombre finit de dominis de Jordan amb interiors disjunts.

La unió de les vores γ_i forma un espai triangulat de dimensió 1. Sigui K la seva subdivisió baricèntrica. Ara triangulem X prenent com a vèrtexs tots els vèrtexs de K i un punt interior p_{ij} per cadascuna de les regions de Jordan D_{ij} . Com arestes prenem les arestes de K i arcs de Jordan disjunts des de p_{ij} als vèrtexs de K en cadascuna de les regions D_{ij} , l'existència dels quals està assegurada per 7.5. Finalment prenem com a triangles els dominis de Jordan determinats per una aresta de K de la vora de D_{ji} i els arcs de Jordan que uneixen els seus vèrtexs als punts p_{ij} . És senzill comprovar que s'obté així la triangulació buscada. \square

Observació. El teorema de triangulació de Radó es cert per a superfícies no necessàriament compactes si s'usa el concepte de triangulació adequat. En aquest cas més general, resulta fonamental la hipòtesi de que les superfícies verifiquen el segon axioma de numerabilitat. De fet, el resultat pot enunciar-se en la forma següent: si X és un espai de Hausdorff i localment homeomorf a \mathbf{R}^2 , aleshores X triangulable si, i només si, verifica el segon axioma de numerabilitat.

Com a conseqüència del teorema de triangulació de Radó i del teorema 5.6, obtenim el teorema de classificació de superfícies en la forma següent.

Teorema 9.3. *Sigui X una superfície topològica compacte i connexa. Aleshores X és homeomorfa a una única superfície estàndard.* \square

Problemes

1. (a) Sigui X una superfície compacta i P un espai triangulat de dimensió 1 que és un subespai de X . Proveu que existeix una triangulació de X i un enter m tal que $sd^m P$ és un subespai triangulat de X .
 (b) Proveu que si Γ és un graf que és un subespai d'una superfície compacta X , aleshores Γ és un subespai dòcil de X .
 (c) Proveu que no existeix cap subespai de \mathbf{S}^2 homeomorf als grafs K_5 o $K_{3,3}$.
2. Proveu que tota superfície amb vora i compacta és triangulable.
3. Sigui X una superfície compacta. Proveu que donades dues triangulacions de X hi ha una tercera triangulació de X compatible amb subdivisions baricèntriques adequades de les dues primeres.

10 Suma connexa de superfícies

Com hem vist en els apartats anteriors, tota superfície compacta i connexa és homeomorfa a una superfície estàndard, per la qual cosa serà important tenir un coneixement més aprofundit d'aquestes superfícies. En el present apartat anem a expressar les superfícies estàndard en termes de peces elementals utilitzant una construcció geomètrica coneguda com a suma connexa. Aquesta construcció de la suma connexa és una operació que es pot realitzar entre varietats de dimensió qualsevol, i no necessàriament compactes, pel que ens situarem en principi en aquest context més general.

Sigui X una varietat topològica de dimensió n . Recordem que $B \subseteq X$ és una *bola coordinada de X* si hi ha una parametrització local $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow X$ tal que $B = \varphi(\mathbf{B})$, on \mathbf{B} és la bola unitat tancada de \mathbf{R}^n .

Siguin X, Y dues varietats topològiques de dimensió n , i $B \subseteq X$, $B' \subseteq Y$, boles coordenades de X i Y , respectivament. Considerem un homeomorfisme h entre les esferes que envolten B i B' ,

$$h : S = \partial B \longrightarrow S' = \partial B'.$$

Definició. La *suma connexa* de les varietats topològiques X i Y associada a les boles B , B' i l'homeomorfisme h , és l'espai topològic quocient

$$X \#_{B, B', h} Y = \frac{(X - \overset{\circ}{B}) \sqcup (Y - \overset{\circ}{B'})}{S \sim_h S'}.$$

És a dir, després d'extreure els interiors de les boles B i B' de X i de Y , respectivament, s'identifiquen les esferes resultants a través de l'homeomorfisme h (vegeu la figura 5.23).

Si no cal especificar les dades B , B' i h , notarem la suma connexa de X i Y simplement per $X \# Y$.

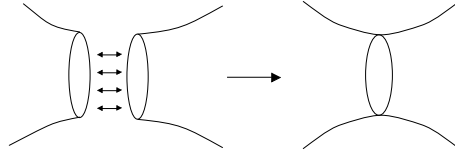


Figura 5.23: Suma connexa.

Proposició 10.1. La suma connexa de dues varietats topològiques de dimensió n és una varietat topològica de dimensió n .

Demostració. Provem que la suma connexa $X \# Y$ és un espai localment euclidià. Notem $X' = X - \overset{\circ}{B}$, $Y' = Y - \overset{\circ}{B'}$, i siguin $i : X' \longrightarrow X \# Y$, $j : Y' \longrightarrow X \# Y$ les aplicacions naturals. Aquestes aplicacions indueixen homeomorfismes de $X' - S$ i $Y' - S'$ amb les seves imatges, pel que per provar que la suma connexa és una varietat basta considerar els punts de la imatge de S i S' . Sigui $p \in X \# Y$ imatge de $s \in S$ i de $s' \in S'$. Sigui

U un obert de \mathbf{R}^n que conté la bola unitat i $\varphi : U \rightarrow X$, $\psi : U \rightarrow Y$ parametritzacions tals que $B = \varphi(\mathbf{B})$ i $B' = \psi(\mathbf{B})$. Sigui $z \in \mathbf{S}^{n-1}$ tal que $\varphi(z) = s$ i $\psi(z) = s'$, i prenem ε tal que la bola de centre z i radi ε , $B_\varepsilon(z)$, estigui continguda en U .

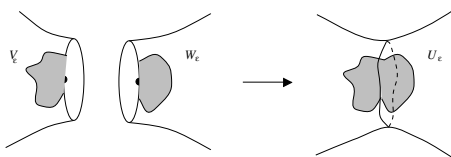


Figura 5.24: Entorn homeomorf a \mathbf{R}^n .

Aleshores

$$\begin{aligned} V_\varepsilon &= \varphi(B_\varepsilon(z)) \cap X', \\ W_\varepsilon &= \psi(B_\varepsilon(z)) \cap Y', \end{aligned}$$

són entorns de s en X' i de s' en Y' , i $U_\varepsilon = i(V_\varepsilon) \cup j(W_\varepsilon)$ és un entorn obert de p en $X \# Y$, que és homeomorf a una bola de \mathbf{R}^n .

La demostració de que la suma connexa és de Hausdorff es fa de forma similar. La comprovació de que verifica el segon axioma de numerabilitat és immediata. \square

En general la suma connexa de varietats depen de les eleccions efectuades. La dependència de les boles coordenades B i B' es veu fàcilment si sumem varietats no connexes, per exemple, $(\mathbf{T}^2 \sqcup \mathbf{S}^2) \# \mathbf{T}^2$ pot ser homeomorf a $\mathbf{T}^2 \sqcup \mathbf{T}^2$ o a $2\mathbf{T}^2 \sqcup \mathbf{S}^2$ segons siguin les boles escollides (vegeu la figura 5.25).

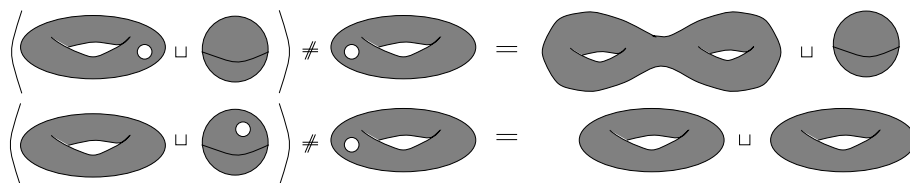


Figura 5.25: Dependència de la suma connexa dels discs escollits.

També depèn, en general, de l'homeomorfisme h , encara que els exemples que ho proven estan fora de l'abast d'aquest curs. Tot i així, es té el següent resultat.

Proposició 10.2. *Siguin X, Y varietats topològiques de dimensió n , B_1, B_2 boles coordinades de X , B' una bola coordinada de Y , i $h_i : \partial B_i \rightarrow \partial B'$, $i = 1, 2$, dos homeomorfismes. Si existeix un homeomorfisme $H : X \rightarrow X$ tal que $H(B_1) = B_2$ i tal que $h_2 \circ H = h_1$, aleshores les sumes connexes*

$$X \#_{B_1, B', h_1} Y \cong X \#_{B_2, B', h_2} Y$$

són homeomorfes.

Demostració. En efecte, l'homeomorfisme H induïx un homeomorfisme entre els subespais tancats $X_1 = X - \overset{\circ}{B}_1$ i $X_2 = X - \overset{\circ}{B}_2$ de X , compatible amb els homeomorfismes h_1 i h_2 . Per tant aquest homeomorfisme, juntament amb la identitat de $Y - \overset{\circ}{B}'$, passa als quocients, i induïx un homeomorfisme entre les sumes connexes. \square

Centrant-nos en el cas de superfícies, el teorema de Schönflies permet comparar dos discs coordinats sobre una superfície connexa, donant un primer pas per a demostrar la invariància de la summa connexa de les eleccions efectuades.

Proposició 10.3. *Sigui X una superfície connexa i D, D' dos discs coordinats de X . Aleshores existeix un homeomorfisme $H : X \rightarrow X$ tal que $H(D) = D'$.*

Demostració. Observem que podem suposar que D i D' estan en el mateix entorn coordinat. En efecte, com X és connexa si p i q són els centres de D i D' respectivament, existeix una successió finita d'entorns coordinats U_1, \dots, U_m que verifica

$$\begin{aligned} D &\subseteq U_1, \\ U_i \cap U_{i+1} &\neq \emptyset \quad 1 \leq i \leq m, \\ D' &\subseteq U_m. \end{aligned}$$

Prenem aleshores un disc coordinat per a cada intersecció

$$D_i \subseteq U_i \cap U_{i+1}.$$

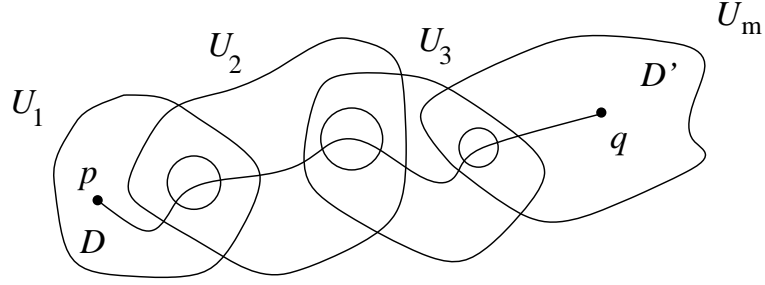


Figura 5.26: Equivalència de dos discs.

Si provem el resultat quan els dos discs estan en el mateix entorn coordinat, la cadena de discs i entorns coordinats anteriors prova el teorema en general.

Suposem doncs que D i D' estan continguts en un mateix entorn coordinat, $\varphi(\mathbf{R}^n)$, on $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow X$ és una parametrització local de X . Per 7.6 existeix un homeomorfisme k de \mathbf{R}^2 que transforma D en D' i és la identitat fora d'un disc obert $V \subseteq \mathbf{R}^2$. Definim l'aplicació $H : X \rightarrow X$ en la forma següent

$$\begin{aligned} H|_{X-\varphi(V)} &= id|_{X-\varphi(V)} \\ H|_{\varphi(\mathbf{R}^2)} &= \varphi \circ k \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

Observem que com k és la identitat fora de V les dues definicions són compatibles en els punts de $(X - \varphi(V)) \cap \varphi(\mathbf{R}^2)$, i per tant defineixen una aplicació de X a X , que és un homeomorfisme. És l'homeomorfisme buscat. \square

Les proposicions 10.2 i 10.3 no són suficients per assegurar la independència de la suma connexa de superfícies connexes respecte les eleccions efectuades, ja que en la proposició 10.3 no hem establert la compatibilitat de l'homeomorfisme H amb un homeomorfisme fixat $h : \partial D \rightarrow \partial D'$. El teorema d'independència serà conseqüència del teorema de classificació de les superfícies connexes i compactes.

Teorema 10.4. *Entre les superfícies estàndard, la suma connexa verifica les propietats següents:*

1. $g\mathbf{T}^2 \# g'\mathbf{T}^2 \cong (g + g')\mathbf{T}^2$.

2. $g\mathbf{P}^2 \# g'\mathbf{P}^2 \cong (g + g')\mathbf{P}^2$.
3. $g\mathbf{T}^2 \# g'\mathbf{P}^2 \cong (2g + g')\mathbf{P}^2$.

Demostració. 1. Per les proposicions 10.2 i 10.3, podem suposar que la suma connexa X de $g\mathbf{T}^2$ i de $g'\mathbf{T}^2$ es realitza a través de discs centrats en el baricentres dels polígons corresponents a $g\mathbf{T}^2$ i $g'\mathbf{T}^2$, els interiors dels quals els notarem V i V' respectivament, que no tallen les arestes d'aquests polígons. Considerem el recobriment de X donat per $g\mathbf{T}^2 - V$ i $g'\mathbf{T}^2 - V'$. Aquests tancats es retrauen a grafs d'un sol vèrtex de $2g$ i $2g'$ arestes respectivament, pel que no tenen homologia en dimensió superior o igual a 2. Així, la part no nul·la de la successió exacta de Mayer-Vietoris associada es concentra en els graus 0, 1 i 2, i tenint present que per connexió la part de grau 0 escindeix, en resulta la successió exacta

$$0 \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow H_1(\mathbf{S}^1) \xrightarrow{f} H_1(g\mathbf{T}^2 - V) \oplus H_1(g'\mathbf{T}^2 - V') \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow 0 ,$$

on hem substituït la intersecció dels dos tancats per \mathbf{S}^1 , ja que aquesta intersecció és homeomorfa a una circumferència. Tenint en compte l'homologia d'un graf de $2g$ arestes i un sol vèrtex, la successió exacta s'escriu

$$0 \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}^{2g} \oplus \mathbf{Z}^{2g'} \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow 0 .$$

Com en el càlcul de l'homologia de la superfície estàndard $g\mathbf{T}^2$, 3.1, és immediat comprovar que f és el morfisme zero, i per tant $H_1(X) \cong \mathbf{Z}^{2g+2g'}$ i $H_2(X) \cong \mathbf{Z}$. Pel teorema de classificació de les superfícies, X és homeomorfa a una superfície estàndard, i com $H_2(X) \cong \mathbf{Z}$, i $H_1(X) \cong \mathbf{Z}^{2g+2g'}$, X és homeomorfa a $(g + g')\mathbf{T}^2$.

Els apartats 2. i 3. es raonen de forma similar a 1. Per exemple, si X és la suma connexa de $g\mathbf{T}^2$ i de $g'\mathbf{P}^2$, apellant a la proposició anterior, podem suposar que la suma es realitza per discs centrats en els baricentres dels polígons respectius, i raonant per Mayer-Vietoris com abans, arribem a una successió exacta

$$0 \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}^{2g} \oplus \mathbf{Z}^{g'} \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow 0 ,$$

en la que $f(1) = 0 + 2(a_1 + \cdots + a_{g'})$, pel que $H_2(X) = 0$, i $H_1X \cong \mathbf{Z}^{2g+g'-1} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, així per 3.1, X és homeomorfa a $(2g + g')\mathbf{P}^2$. \square

Corollari 10.5. 1. *La superfície estàndard $g\mathbf{T}^2$ és la suma connexa de g tors \mathbf{T}^2 .*

2. *La superfície estàndard $g\mathbf{P}^2$ és la suma connexa de g plans projectius \mathbf{P}^2 .* \square

Veiem així com les superfícies estàndard poden generar-se per suma connexa a partir del tor i del pla projectiu. Per exemple, la superfície A_2 corresponent a la paraula $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$ és homeomorfa a la suma de dos tors, com havíem anunciat anteriorment.

Podem enunciar finalment la classificació de superfícies compactes en la forma,

Corollari 10.6. *Tota superfície topològica compacta i connexa és homeomorfa a una única de les superfícies següents: l'esfera \mathbf{S}^2 , una suma connexa de g tors, o una suma connexa de g plans projectius reals.* \square

Del teorema de classificació se segueix ara el següent resultat d'independència de la suma connexa de superfícies, específic de la dimensió 2.

Corollari 10.7. *La suma connexa de superfícies compactes i connexes és independent de les eleccions efectuades.* \square

Problemes

1. Sigui X una superfície compacta, i D un subespai homeomorf a un disc. Proveu que D és un disc coordinat, és a dir, que existeix un entorn coordinat que cobreix D .
2. Sigui X una superfície amb vora, compacta i connexa. Proveu que és homeomorfa a una superfície amb vora estàndard (vegeu el problema 3 del §3).

Capítol 6

Varietats topològiques

En aquest darrer capítol estudiarem amb més detall les propietats homològiques de les varietats topològiques de dimensió n , i en deduirem interessants resultats geomètrics. En primer lloc s'introdueix el concepte d'orientabilitat d'una varietat topològica usant l'homologia local, i s'utilitza aquest concepte per donar una altra versió del teorema de classificació de superfícies en funció de la seva orientabilitat. Després provarem perquè les superfícies compactes no orientables no són fàcilment visualitzables, en efecte, si bé és fàcil construir superfícies de \mathbf{R}^3 homeomorfes a les superfícies orientables, provarem que no hi ha superfícies compactes no orientables contingudes dins de \mathbf{R}^3 . De fet provarem al §9 un teorema general de no immersió per les varietats topològiques n -dimensionals no orientables del que aquest resultat és un fàcil corollari, però la prova d'aquest teorema requereix d'un coneixement més aprofundit de les varietats topològiques de dimensió superior i, per tal raó, el posposarem fins a tenir millor estudiades aquestes varietats.

En els apartats 3 – 6 es precisen els grups d'homologia $\geq n$ d'una varietat topològica de dimensió n , i es dona un criteri d'orientabilitat en termes de l'homologia relativa, que en particular per a les varietats compactes i connexes és: una varietat topològica de dimensió n , compacta i connexa, és orientable si, i només si, el seu grup d'homologia de dimensió n és isomorf a \mathbf{Z} .

En l'apartat 7 s'introdueix el grau d'una aplicació contínua entre varietats compactes, connexes i orientades de la mateixa dimensió. Aquest concepte generalitza el grau d'una aplicació contínua entre esferes. I en l'apartat 8

s'estén l'estudi de l'homologia i de l'orientabilitat, fet en els apartats anteriors, a les varietats topològiques amb vora. D'aquest estudi en resultarà el teorema general de no retracció d'una varietat sobre la seva vora.

Finalment, al §9, provarem els teoremes generals de no separació i separació que estenen els teoremes de mateix nom del capítol 4, i d'ells deduirem el teorema de no immersió que hem esmentat anteriorment.

1 Varietats orientables

En aquest apartat s'introdueix el concepte de varietat orientable i es donen els primers exemples. La primera formalització del concepte d'orientabilitat la trobem en els cursos de Geometria Lineal, on es dona la següent definició: una orientació d'un \mathbf{R} -espai vectorial E de dimensió finita és una ordenació d'una base de E , mòdul la relació d'equivalència donada pels canvis de base de determinant positiu. És a dir, que dues bases ordenades defineixen la mateixa orientació de E si la matriu de canvi de base és de determinant positiu.

Podem veure com aquesta definició d'orientabilitat està molt aprop de l'homologia que estem estudiant, i que de fet es pot expressar homològicament, amb la proposició següent.

Proposició 1.1. *Sigui E un espai vectorial euclidià de dimensió n . Són equivalents:*

1. *Donar una orientació de E .*
2. *Donar un generador de $H_n(E, E - 0)$.*

Demostració. Sigui v_1, \dots, v_n una base ordenada de E . La classe $[\sigma_v]$ del símplex singular afí $\sigma_v = (v_1, \dots, v_n, -\sum_{i=1}^n v_i)$ és un generador de $H_n(E, E - 0)$. Aquest generador només depèn de l'orientació de la base ordenada v_1, \dots, v_n , i l'aplicació així definida entre el conjunt d'orientacions de E i el de generadors de $H_n(E, E - 0)$ és una bijecció. En efecte, sigui w_1, \dots, w_n , una altra base ordenada de E , i sigui f l'aplicació lineal de canvi de base $f(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$. De la definició dels símplex σ_v i σ_w se segueix que

$$f_*(\sigma_v) = \sigma_w.$$

Però, pel problema 8 de 4.5,

$$f_*([\sigma_v]) = \frac{\det f}{|\det f|} [\sigma_v] .$$

Així doncs, si $\det f > 0$, aleshores $[\sigma_v] = [\sigma_w]$, mentres que si $\det f < 0$, $[\sigma_v] = -[\sigma_w]$. \square

Per globalitzar aquest concepte d'orientabilitat, pensem que a Geometria Diferencial la noció d'orientabilitat de varietats diferenciables s'estableix a partir d'una família d'orientacions compatibles dels espais tangents en cada punt; i així, una manera de definir una orientació sobre una varietat diferenciable X és donar un recobriment per oberts coordenats de X de forma que els canvis de carta siguin de jacobiana positiu. En el cas topològic és natural, després de les consideracions anteriors, prendre com a substitut de l'espai tangent el grup n -èssim de l'homologia local, com ja hem fet en el capítol 4. Comencem per una definició general.

Definició. Sigui L un grup abelià lliure de rang 1. Una *orientació* de L és un generador θ de L .

Observem que al ser de rang 1 i lliure, L és isomorf a \mathbf{Z} , i per tant L només té dos generadors, corresponents a $\pm 1 \in \mathbf{Z}$. Així, L té dues orientacions possibles.

Sigui X una varietat topològica de dimensió n i $x \in X$. Hem vist, a la proposició 1.2 del capítol 4, que es tenen isomorfismes

$$H_n(X, X - x) \cong H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - \{x\}) \cong \mathbf{Z} ,$$

i per tant, $H_n(X, X - x)$ és un grup abelià lliure de rang 1.

Definició. Una *orientació local* de X en x és una orientació del grup $H_n(X, X - x)$, és a dir, un generador θ_x de $H_n(X, X - x)$.

Per exemple, si prenem $X = \mathbf{R}^2$ i $x = 0$, aleshores la successió exacta d'homologia relativa dóna els isomorfismes

$$H_2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2 - 0) \cong H_1(\mathbf{R}^2 - 0) \cong H_1(\mathbf{S}^1) \cong \mathbf{Z} ,$$

pel que és equivalent donar un generador de $H_2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2 - 0)$ a donar-ne un de $H_1(\mathbf{S}^1)$. Com a cicle generador de $H_1(\mathbf{S}^1)$ podem prendre el símplex singular $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{S}^1$, definit per $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, i així orientar el pla no és altra cosa que escollir un sentit de gir, vegeu la figura 6.1.

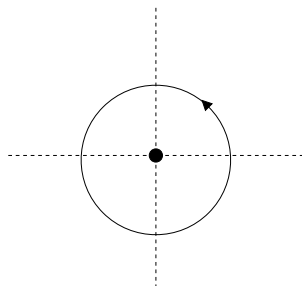


Figura 6.1: Orientació de \mathbf{R}^2 a l'origen.

Sigui X una varietat topològica de dimensió n . Anomenarem *bola oberta coordinada* de X a tot obert de X de la forma $\varphi(U)$, on $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow X$ és una parametrització local i U és una bola oberta de \mathbf{R}^n de centre 0 i radi r . Si B és una bola oberta coordinada i $x \in B$, aleshores $X - B$ és un retracte de deformació de $X - x$, i per tant, per 3.7.3, la inclusió natural $X - B \hookrightarrow X - x$ induïx un isomorfisme

$$j_x : H_n(X, X - B) \xrightarrow{\sim} H_n(X, X - x).$$

Podem utilitzar aquests isomorfismes per definir la noció de compatibilitat entre dues orientacions locals, el que ens ha de permetre definir l'orientabilitat global d'una varietat.

Definició. Sigui X una varietat topològica de dimensió n , $x, y \in X$, i θ_x, θ_y , orientacions locals de X en x i y . Es diu que θ_x i θ_y són *orientacions locals compatibles* si per a tota bola oberta coordinada B de X tal que $x, y \in B$ existeix un generador $\theta_B \in H_n(X, X - B)$ tal que

$$\begin{aligned} j_x \theta_B &= \theta_x, \\ j_y \theta_B &= \theta_y. \end{aligned}$$

Definició. Sigui X una varietat topològica. Una *orientació de X* és una família d'orientacions locals $\{\theta_x\}_{x \in X}$ compatibles dos a dos.

Una varietat topològica X es diu que és *orientable* quan admet una orientació.

Una varietat orientable es diu que està *orientada* quan s'ha fixat una orientació.

La definició d'orientabilitat és topològica, és a dir, es verifica el resultat següent, de demostració immediata.

Proposició 1.2. *Siguin X, Y varietats topològiques homeomorfes. Aleshores X és orientable si, i només si, Y és orientable.* \square

Més endavant, al §6, veurem criteris homològics globals per saber quan una varietat topològica és orientable, dels que se'n deduiran els resultats que presentem a continuació. No obstant això, en el cas de les esferes podem raonar directament.

Proposició 1.3. *L'esfera \mathbf{S}^n , $n \geq 1$, és una varietat orientable, i una orientació de \mathbf{S}^n ve donada per un generador de $H_n(\mathbf{S}^n)$.*

Demostració. Sabem que $H_n(\mathbf{S}^n) \cong \mathbf{Z}$, sigui θ_n un generador de $H_n(\mathbf{S}^n)$. Per a cada punt $x \in \mathbf{S}^n$ la successió exacta d'homologia relativa

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathbf{S}^n - x) \longrightarrow H_n(\mathbf{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - x) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{S}^n - x) \longrightarrow \cdots$$

indueix, tenint present que $\mathbf{S}^n - x$ és contràctil i que $n \geq 1$, un isomorfisme

$$H_n(\mathbf{S}^n) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - x).$$

Sigui $\theta_x \in H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - x)$ la imatge de θ_n per aquest isomorfisme, així θ_x és un generador de $H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - x)$, i per tant, una orientació local. Aquestes orientacions locals són compatibles, ja que si $B \subseteq \mathbf{S}^n$ és una bola oberta coordinada i $x, y \in B$, per la functorialitat de l'homologia es té el diagrama

commutatiu

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - x) & & \\
 & \nearrow & \uparrow j_x & & \\
 H_n(\mathbf{S}^n) & \xrightarrow{j_B} & H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - B) & & \\
 & \searrow & \downarrow j_y & & \\
 & & H_n(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n - y) & &
 \end{array}$$

per tant, si prenem $\theta_B = j_B(\theta_n)$, resulta que $j_x(\theta_B) = \theta_x$ i $j_y(\theta_B) = \theta_y$. Així, \mathbf{S}^n és orientable i, si fixem un generador $\theta_n \in H_n(\mathbf{S}^n)$, l'esfera \mathbf{S}^n està orientada. \square

Proposició 1.4. *Si X és una varietat topològica orientable i U un obert de X , aleshores U és orientable.*

Demostració. Com que X és orientable, existeix una família d'orientacions locals compatibles $\{\theta_x\}_{x \in X}$. Pel teorema d'excisió aplicat al triple $x \in U \subseteq X$, es tenen isomorfismes

$$H_n(X, X - x) \cong H_n(U, U - x).$$

Així, si denotem per $\{\theta_x^U\}_{x \in U}$ les imatges de la família θ_x per aquests isomorfismes, en resultarà una família d'orientacions locals a U . Provem que aquesta família és compatible. Si $B \subseteq U$ és una bola oberta coordinada, el teorema d'excisió dona un isomorfisme

$$H_n(X, X - B) \cong H_n(U, U - B),$$

de forma que podem considerar la imatge θ_B^U del generador θ_B que fa compatible la família a X . Així per la functorialitat de l'homologia relativa, $j_x(\theta_B^U) = \theta_x^U$ i $j_y(\theta_B^U) = \theta_y^U$, i per tant la família d'orientacions $\{\theta_x^U\}$ és compatible. \square

D'aquest resultat i de l'orientabilitat de l'esfera es dedueix,

Corollari 1.5. \mathbf{R}^n és orientable, i tot obert de \mathbf{R}^n és orientable. \square

Hem assenyalat a la proposició 1.2 que l'orientabilitat és un concepte topològic, cal remarcar però que no és un concepte homotòpic. En efecte, un cilindre és orientable ja que és homeomorf a $\mathbf{R}^2 - 0$, que ho és perquè és un obert del pla, mentres que la banda de Möbius, que té el mateix tipus d'homotopia d'un cilindre, no és orientable, com comprovarem tot seguit. (Vegeu també l'exemple que segueix a 6.1).

Proposició 1.6. *La banda de Moëbius no és orientable.*

Demostració. Sigui X la banda de Möbius obtinguda per identificació de dos costats d'un rectangle, vegeu la figura 6.2. Suposem que X és orientable i sigui $\theta = \{\theta_x\}$ una orientació, és a dir, siguin θ_x orientacions locals compatibles dels grups d'homologia local $H_2(X, X - x)$. Donats dos punts x, y de X , sigui $B \subseteq X$ una bola oberta coordinada de X que contingui x, y . Per la compatibilitat de θ_x i θ_y , hi ha un generador θ_B de $H_2(X, X - B)$ que té per restricció θ_x i θ_y en els grups d'homologia corresponents. Com veiem a

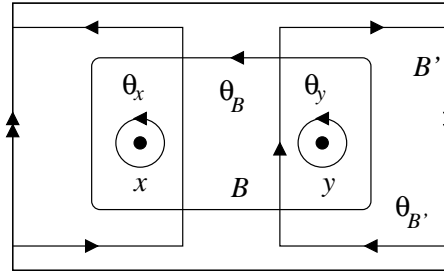


Figura 6.2: Orientacions no compatibles en una banda de Möbius.

la figura 6.2, θ_x determina θ_B , i aquesta determina aleshores θ_y . Prenem ara una altra bola coordinada B' , com la dibuixada a la figura 6.2. En aquest cas B' determina $-\theta_y$. Així, l'existència de B' mostra que θ_x i θ_y no són compatibles. \square

Definició. Siguin X i Y varietats topològiques orientades de la mateixa dimensió n . Un homeomorfisme local $f : X \rightarrow Y$ es diu que *conserva les orientacions* en $x \in X$ si el morfisme $f_* : H_n(X, X - x) \rightarrow H_n(Y, Y - f(x))$

verifica $f_*(\theta_x) = \theta_{f(x)}$. Si f conserva l'orientació en tot punt $x \in X$, direm simplement que f és un homeomorfisme local que conserva les orientacions.

Com hem assenyalat al principi d'aquest apartat, en el cas diferenciable la noció d'orientabilitat es dona en termes dels espais tangents, així es diu que una varietat diferenciable X és orientable si existeix una família d'orientacions dels espais tangents $T_x X$ compatibles dos a dos, i no és difícil veure que una definició equivalent és que existeixi un recobriment de X per entorns coordinats tal que els canvis de coordenades siguin de jacobiana positiu ([4]). Anem a relacionar aquesta noció d'orientabilitat diferenciable amb la introduïda en aquest paràgraf (vegeu també l'exercici 5).

Proposició 1.7. *Si X és una varietat diferenciable orientable. Aleshores X és orientable topològicament.*

Demostració. Hem de definir una família d'orientacions compatibles $\{\theta_x\}$. Com X és una varietat diferenciable orientable, existeix un recobriment \mathcal{U} de X per oberts coordinats, tals que els jacobians dels canvis de carta són positius. Sigui U un obert d'aquest recobriment, i sigui $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow U$ la parametrització corresponent. Fixem una orientació local $\theta \in H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0)$, i notem $x = \varphi(0)$. Definim $\theta_x = \varphi_*(\theta)$, que és un generador de $H_n(U, U - x)$, i per tant de $H_n(X, X - x)$. Obtenim així una orientació local de X en x .

Provem que l'orientació local definida per θ_x és independent de l'entorn coordinat utilitzat per definir-lo. En efecte, sigui $V \in \mathcal{U}$ un altre entorn coordinat de x , i $\psi : \mathbf{R}^n \rightarrow V$ la parametrització corresponent. Comparant alternativament U i V amb una bola coordinada centrada en x , podem suposar que $V \subseteq U$ i que $\psi(0) = x$. Així, el canvi de coordenades

$$\varphi^{-1}\psi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n ,$$

és un difeomorfisme de jacobiana positiu tal que $\varphi^{-1}\psi(0) = 0$. Observem que $\varphi^{-1}\psi$ és homòtop a l'aplicació lineal $d(\varphi^{-1}\psi)_0$. En efecte, podem considerar l'homotopia definida per

$$\begin{aligned} F_t(x) &= \frac{1}{t}\varphi^{-1}\psi(tx), \text{ si } t \neq 0 , \\ F_0(x) &= d(\varphi^{-1}\psi)_0(x) , \end{aligned}$$

que és contínua perquè $\varphi^{-1}\psi(0) = 0$. A més, per a cada t l'aplicació F_t és un homeomorfisme, i indueix per tant un morfisme d'homologia local $(F_t)_* : H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0) \longrightarrow H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0)$. Així, per la invariància homotòpica de l'homologia relativa, $\varphi^{-1}\psi$ i $d(\varphi^{-1}\psi)_0$ indueixen el mateix morfisme en homologia local. Però com el determinant de $d(\varphi^{-1}\psi)_0$ és positiu, podem aplicar el problema 8 de 4.5 i deduir que $d(\varphi^{-1}\psi)_0(\theta) = \theta$, i per tant $(\varphi^{-1}\psi)_*(\theta) = \theta$. D'on se segueix que $\psi_*(\theta) = \varphi_*(\theta)$, i en resulta la independència de θ_x de l'entorn coordinat positiu utilitzat en la definició.

El fet que hem definit així una família d'orientacions locals compatibles es prova de forma similar. \square

Problemes

1. Sigui X una varietat topològica. Proveu que X és orientable si, i només si, ho són les seves components connexes.
2. Proveu que totes les corbes són orientables.
3. Proveu que si X és un *grup de Lie*, és a dir, és una varietat topològica i alhora un grup topològic, aleshores X és orientable.
4. Sigui X una varietat topològica connexa. Proveu que dues orientacions de X que coincideixen en un punt són iguals. Deduïu que una varietat topològica connexa orientable té exactament dues orientacions.
5. Sigui X una varietat topològica de dimensió n connexa, i considerem el conjunt

$$\tilde{X} = \{(x, \theta_x) ; \text{ on } x \in X \text{ i } \theta_x \text{ és un generador de } H_n(X, X - x)\}.$$

- (a) Sigui $\tilde{x} = (x, \theta_x)$ un punt de \tilde{X} , i B una bola oberta coordinada de X que conté x . Notem $U_{\tilde{x}, B}$ el subconjunt de \tilde{X}

$$U_{\tilde{x}, B} = \{(y, \theta_y) ; y \in B, \theta_y \text{ compatible amb } \theta_x\}.$$

Proveu que la família de subconjunts $\{U_{\tilde{x}, B}\}$, variant \tilde{x} i B , és base d'una topologia en \tilde{X} . Proveu que, amb aquesta topologia, \tilde{X} és una varietat topològica de dimensió n , orientable, i la projecció $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ definida per $p(x, \theta_x) = x$, és un homeomorfisme local. Se l'anomena *el recobridor orientable* de X .

- (b) Proveu que \tilde{X} és connexa si, i només si, X és no orientable. Proveu que si X és una varietat orientable, aleshores $\tilde{X} = X \sqcup X$.
- (c) Proveu que si una varietat topològica X no és orientable, existeix un subgrup de $H_1(X)$ d'índex 2, és a dir, existeix un morfisme exhaustiu $H_1(X) \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Deduïu que si X és simplement connexa, aleshores és orientable.
6. Sigui X una varietat diferenciable, orientable en el sentit topològic. Proveu que X és orientable com a varietat diferenciable.
7. Sigui R un anell commutatiu.
- (a) Introduïu, paral·lelament a com hem fet en el text, els conceptes de R -orientacions locals i de R -orientabilitat.
- (b) Sigui $\varphi : R \rightarrow R'$ un morfisme d'anells. Proveu que si una varietat topològica és R -orientable, aleshores és R' -orientable. Deduïu que si una varietat és orientable, és R -orientable per tot anell R .
- (c) Proveu que si la característica de R és 2 tota varietat topològica és R -orientable. En particular, tota varietat topològica és $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -orientable.
- (d) Proveu que si una varietat X és R -orientable per un anell R de característica diferent de 2, X és orientable.

2 Orientabilitat de les superfícies compactes

Com en el cas de les esferes, el conèixer l'homologia i l'homologia local de les superfícies compactes ens permetrà estudiar la seva orientabilitat de forma elemental. A més a més, donat que l'orientabilitat és un concepte topològic, i es té una classificació de les superfícies compactes, ens serà suficient estudiar l'orientabilitat de les superfícies estàndard.

Proposició 2.1. *Les superfícies $g\mathbf{T}^2$ són orientables.*

Demostració. Raonarem de forma anàloga a com ho hem fet per l'esfera \mathbf{S}^n . Notem $X = g\mathbf{T}^2$.

Sigui $x \in X$ i considerem la successió exacta de l'homologia relativa

$$\cdots \rightarrow H_2(X - x) \rightarrow H_2(X) \xrightarrow{j_x} H_2(X, X - x) \rightarrow H_1(X - x) \rightarrow \cdots$$

Recordem que en la demostració de 5.3.1 hem vist que la superfície $X - x$ és del tipus d'homotopia d'un graf d'un vèrtex i $2g$ arestes, pel que $H_2(X - x) = 0$, i $H_1(X - x) \cong \mathbf{Z}^{2g}$. Per tant j_x és injectiva.

Provem que j_x és bijectiva. En efecte, sabem que $H_2(X)$ és isomorf a \mathbf{Z} , sigui $\theta \in H_2(X)$ un generador, i sigui θ_x un generador de $H_2(X, X - x)$, tal que $j_x(\theta) = m\theta_x$, amb $m \geq 1$. Si $m > 1$, aleshores la successió exacta anterior factoritzaria en dues successions exactes de la forma

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbf{Z} &\xrightarrow{j_x} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} &\longrightarrow H_1(X - x) \cong \mathbf{Z}^{2g}. \end{aligned}$$

En particular, donaria un morfisme injectiu de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ en \mathbf{Z}^{2g} , el que és absurd ja que \mathbf{Z}^{2g} no té torsió. Així, $\theta_x = j_x(\theta)$ és un generador de $H_2(X, X - x)$ i per tant defineix una orientació local de X en x .

Vegem que la família d'orientacions locals $\{\theta_x\}_{x \in X}$ és compatible: sigui B una bola oberta coordinada i $x, y \in B$, per la functorialitat de l'homologia singular, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & H_2(X, X - x) & & \\ & \nearrow j_x & \uparrow & & \\ H_2(X) & \xrightarrow{j_B} & H_2(X, X - B) & & \\ & \searrow j_y & \downarrow & & \\ & & H_2(X, X - y) & & \end{array}$$

és commutatiu, per tant si prenem $\theta_B = j_B(\theta)$ veiem que les orientacions θ_x i θ_y són compatibles. \square

En l'apartat anterior hem vist que una banda de Möbius no és orientable. D'altra banda, la suma connexa de g plans projectius conté una banda de Möbius com un obert. En efecte, $g\mathbf{P}^2$ és la superfície estàndard definida a partir d'un polígon de $2g$ costats per la paraula $a_1a_1 \dots a_ga_g$, així si considerem dos punts p, q del primer costat a_1 i els equivalents del següent costat a_1 ,

l'interior de la imatge en $g\mathbf{P}^2$ de l'envoltura convexa en el pla d'aquests quatre punts és una banda de Möbius, (vegeu la figura 6.3). Així de la proposició 1.4 en resulta la proposició següent.

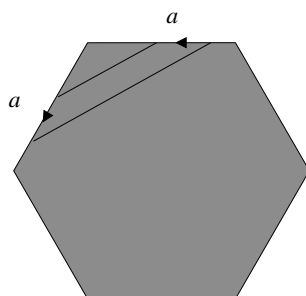


Figura 6.3: $g\mathbf{P}^2$ conté un obert homeomorf a una banda de Möbius.

Proposició 2.2. *Les superfícies $g\mathbf{P}^2$ no són orientables.* □

A la vista d'aquests dos resultats, el teorema de classificació de superfícies 5.9.6 pot enunciar-se en la forma:

Teorema 2.3. *Dues superfícies compactes i connexes són homeomorfes si, i només si, tenen la mateixa característica de Euler i són ambdues orientables o ambdues no orientables.* □

També, per 5.3.4, podem enunciar el teorema substituint la característica de Euler per el gènere de les superfícies.

Corollari 2.4. *Dues superfícies compactes i connexes són homeomorfes si, i només si, tenen el mateix gènere i són ambdues orientables o ambdues no orientables.* □

Acabarem aquest apartat provant que les superfícies compactes no orientables no es poden representar a \mathbf{R}^3 . En efecte, si bé totes les superfícies compactes admeten una immersió homeomòrfica a \mathbf{R}^4 (vegeu el problema 2), i és evident que hi ha models a \mathbf{R}^3 de les que són orientables, es té

Teorema 2.5. *No hi ha cap superfície topològica homeomorfa a $g\mathbf{P}^2$ continguda a \mathbf{R}^3 .*

Abans d'entrar en la prova d'aquest teorema notem que més endavant establim resultats de no immersió més generals, per exemple, provarem que \mathbf{R}^{n+1} no conté varietats compactes no orientables de dimensió n . Però aquests resultats més generals requereixen un estudi més aprofundit de les varietats n -dimensionals, i és per això que presentem a continuació una prova més elemental per les superfícies, que es basa, per una banda, en els teoremes de separació i no separació del capítol 4, i per altra banda, en els teoremes de classificació de superfícies del capítol 5. A més a més, creiem també que la prova següent pot ser un bon exercici de repàs dels resultats esmentats.

Demostració. Comencem observant que $g\mathbf{P}^2$ s'obté a partir d'un polígon regular de $2g$ costats identificant els seus costats segons la paraula $B'_g = a_1 \dots a_g a_1^{-1} \dots a_g^{-1} a_g$. En efecte, aplicant 5.3.2 s'obté $\chi(X_{B'_g}) = 2 - g$, i com B'_g té un parell de segona espècie, $X_{B'_g} \cong g\mathbf{P}^2$.

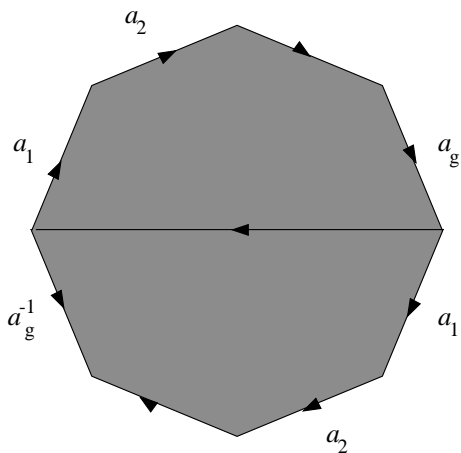
Sigui ara b el diàmetre orientat del polígon que va des de l'extrem de a_g a l'origen de a_1 . La imatge d'aquest diàmetre en X descomposa X en dos tancats, Y i Y' , que són les imatges dels polígons d'arestes a_1, \dots, a_g, b , i $a_1^{-1}, \dots, a_g, b^{-1}$, respectivament (vegeu la figura 6.4). La intersecció d'aquests dos tancats, $Y \cap Y'$, és un graf de $g + 1$ arestes i un sol vèrtex.

Provarem el teorema per reducció a l'absurd. Suposem doncs que $X \subseteq \mathbf{R}^3$, o equivalentment que $X \subseteq \mathbf{S}^3$. Considerem el recobriment de $\mathbf{S}^3 - Y \cap Y'$ donat pels oberts $\mathbf{S}^3 - Y$ i $\mathbf{S}^3 - Y'$. Com $(\mathbf{S}^3 - Y) \cap (\mathbf{S}^3 - Y') = \mathbf{S}^3 - X$, tindrem una successió exacta de Mayer-Vietoris

$$H_1(\mathbf{S}^3 - Y) \oplus H_1(\mathbf{S}^3 - Y') \xrightarrow{f-f'} H_1(\mathbf{S}^3 - Y \cap Y') \longrightarrow H_0(\mathbf{S}^3 - X).$$

La part essencial de la demostració consistirà en provar que

$$\begin{aligned} H_1(\mathbf{S}^3 - Y) \oplus H_1(\mathbf{S}^3 - Y') &\cong \mathbf{Z}^{2g}, \\ H_1(\mathbf{S}^3 - Y \cap Y') &\cong \mathbf{Z}^{g+1}, \end{aligned}$$

Figura 6.4: Representació de $g\mathbf{P}^2$ com a $X_{B'_g}$.

i que la matriu de $f - f'$ a través d'aquests isomorfismes és

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

Doncs, aleshores, el subgrup $\text{im}(f - f')$ de \mathbf{Z}^{g+1} és l'engendrat per les columnes d'aquesta matriu, o equivalentment per les columnes de

$$\left(\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Fent el canvi de base, en el grup \mathbf{Z}^{g+1} ,

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 - e_2 \\ e'_2 &= e_2 - e_3 \\ &\dots \\ e'_g &= e_g - e_{g+1} \\ e'_{g+1} &= e_{g+1}, \end{aligned}$$

el subgrup $\text{im}(f - f')$ és l'engendrat per les columnes de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

i per tant, $H_1(\mathbf{S}^3 - Y \cap Y')/\text{im}(f - f') \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Però de la successió exacta anterior resulta que $H_1(\mathbf{S}^3 - Y \cap Y')/\text{im}(f - f')$ és un subgrup de $H_0(\mathbf{S}^3 - X)$, el que és contradictori amb que H_0 és sempre un grup abelià lliure, per 3.2.1.

En el que segueix provarem els isomorfismes

$$\begin{aligned} H_1(\mathbf{S}^3 - Y) \oplus H_1(\mathbf{S}^3 - Y') &\cong \mathbf{Z}^{2g}, \\ H_1(\mathbf{S}^3 - Y \cap Y') &\cong \mathbf{Z}^{g+1}, \end{aligned}$$

i l'expressió donada de la matriu de $f - f'$. Abans però provarem dos lemes, que necessitarem al llarg de la demostració.

Considerem una orientació $\theta \in H_3(\mathbf{S}^3)$ de l'esfera \mathbf{S}^3 . Siguin e_0, \dots, e_s , $s + 1$ cel·les disjunts de \mathbf{S}^3 , de dimensions arbitràries ≤ 3 . Si e_i és una d'aquestes cel·les, per la propietat d'excisió es té un isomorfisme

$$H_3(\mathbf{S}^3, \mathbf{S}^3 - e_i) \xleftarrow{\sim} H_3(\mathbf{S}^3 - \cup_{j \neq i} e_j, \mathbf{S}^3 - \cup_{j=0}^s e_j)$$

i així, s'obté un morfisme

$$\varphi_{e_i} : H_3(\mathbf{S}^3) \longrightarrow H_3(\mathbf{S}^3, \mathbf{S}^3 - e_i) \xleftarrow{\sim} H_3(\mathbf{S}^3 - \cup_{j \neq i} e_j, \mathbf{S}^3 - \cup e_j) \longrightarrow H_2(\mathbf{S}^3 - \cup e_j).$$

Notarem z_i la imatge de θ per aquest morfisme: $z_i = \varphi_{e_i}(\theta)$, i l'anomenarem la classe de la cel·la e_i en $H_2(\mathbf{S}^3 - \cup e_j)$.

Lema 2.6. 1. *El grup $H_2(\mathbf{S}^3 - \cup_{j=0}^s e_j)$ és un grup lliure de rang s que admet com a base z_1, \dots, z_s .*

2. $\widetilde{H}_p(\mathbf{S}^3 - \cup_{j=0}^s e_j) = 0$, si $p \neq 2$.

Demostració. És immediata, per inducció sobre s a partir del teorema de no separació, utilitzant la successió d'homologia relativa. \square

Lema 2.7. *Amb les notacions del lema anterior, suposem que les cel·les e_i son de dimensió 1, notem p_i, q_i els extrems de e_i , i $x_i = \varphi_{p_i}(\theta)$, $y_i = \varphi_{q_i}(\theta)$ les classes d'aquests punts en $H_2(\mathbf{S}^3 - \cup_{j=0}^s \{p_j, q_j\})$. Aleshores la imatge de z_i pel morfisme*

$$H_2(\mathbf{S}^3 - \cup_{j=0}^s e_j) \longrightarrow H_2(\mathbf{S}^3 - \cup_{j=0}^s \{p_j, q_j\})$$

és $x_i + y_i$.

Demostració. Per la functorialitat de l'homologia, per tot $i = 0, \dots, s$ es té un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc} H_3(\mathbf{S}^3) & \longrightarrow & H_3(\mathbf{S}^3 - \cup_{j \neq i} e_j, \mathbf{S}^3 - \cup e_j) & \longrightarrow & H_2(\mathbf{S}^3 - \cup e_j) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_3(\mathbf{S}^3 - \cup_{j \neq i} \{p_j, q_j\}, \mathbf{S}^3 - \cup \{p_j, q_j\}) & \longrightarrow & H_2(\mathbf{S}^3 - \cup \{p_j, q_j\}) \end{array}$$

Però, pel teorema d'excisió es té un isomorfisme natural de $H_3(\mathbf{S}^3 - \cup_{j \neq i} \{p_j, q_j\}, \mathbf{S}^3 - \cup \{p_j, q_j\})$ amb la suma directa

$$H_3(\mathbf{S}^3 - \cup_{j \neq i} \{p_j, q_j\}, \mathbf{S}^3 - \cup_{i \neq j} \{p_i, p_j, q_j\}) \oplus H_3(\mathbf{S}^3 - \cup_{j \neq i} \{p_j, q_j\}, \mathbf{S}^3 - \cup_{i \neq j} \{q_i, p_j, q_j\}),$$

d'on se segueix el resultat. \square

Tornem a la demostració del teorema.

Prenem en cada costat a_i dos punts p_i, q_i , de coordenades baricèntriques $1/3, 2/3$, respectivament, i sobre el diàmetre b dos punts p_{g+1}, q_{g+1} , també de coordenades baricèntriques $1/3$ i $2/3$.

Finalment, prendrem sobre la superfície X arcs de Jordan imatge dels següents segments sobre el polígon:

$$\begin{aligned} l_1 &= [p_1, q_1], l_2 = [p_2, q_2], \dots, l_{g+1} = [p_{g+1}, q_{g+1}], \\ e_1 &= [q_{g+1}, p_1], e_2 = [q_1, p_2], \dots, e_{g+1} = [q_g, p_{g+1}], \\ e'_1 &= [p_{g+1}, q_1], e'_2 = [p_1, q_2], \dots, e'_g = [p_{g-1}, p_g], e'_{g+1} = [q_g, q_{g+1}], \end{aligned}$$

arcs que per simplificar notarem de la mateixa manera (vegeu la figura 6.5).

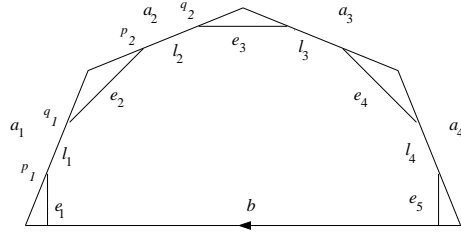


Figura 6.5: Els arcs l_i, e_i i e'_i .

Sigui A_1 la 2-cella de Y que té com a vora la corba de Jordan $e_1 l_1 \dots e_{g+1} l_{g+1}$, i sigui A_2 l'adherència en Y de $Y - A_1$, que és la unió de $g + 1$ 2-celles amb un punt en comú. Evidentment $A_1 \cap A_2$ consisteix en les 1-celles e_1, \dots, e_{g+1} . Aplicant la successió exacta de Mayer-Vietoris tindrem

$$H_2(\mathbf{S}^3 - A_1) \oplus H_2(\mathbf{S}^3 - A_2) \longrightarrow H_2(\mathbf{S}^3 - \cup e_j) \longrightarrow H_1(\mathbf{S}^3 - Y) \longrightarrow \dots$$

però com A_1 és una 2-cella, $\widetilde{H}_*(\mathbf{S}^3 - A_1) = 0$, i així mateix, és immediat per Mayer-Vietoris que també $\widetilde{H}_*(\mathbf{S}^3 - A_2) = 0$, d'on resulta que

$$H_2(\mathbf{S}^3 - \cup e_j) \cong H_1(\mathbf{S}^3 - Y),$$

i, pel lema 2.6, $H_1(\mathbf{S}^3 - Y) \cong \mathbf{Z}^g$.

Anàlogament, sigui A'_1 la 2-cella de Y' que té com a vora $e'_1 l_1^{-1} \dots e'_{g+1} l_{g+1}^{-1}$, i sigui A'_2 l'adherència en Y' de $Y' - A'_1$. Raonant com anteriorment, trobem que

$$H_2(\mathbf{S}^3 - \cup e'_j) \cong H_1(\mathbf{S}^3 - Y'),$$

i per tant que $H_1(\mathbf{S}^3 - Y') \cong \mathbf{Z}^g$.

Com $Y \cap Y'$ és un graf de $g+1$ arestes amb un sol vèrtex, per inducció sobre g i aplicant el teorema de separació s'obté fàcilment l'isomorfisme $H_1(\mathbf{S}^3 - Y \cap Y') \cong \mathbf{Z}^{g+1}$. Però, per tal d'obtenir la matriu del morfisme f utilitzarem el recobriment de $Y \cap Y'$ induït pels tancats A_1 i A_2 de Y .

Notem doncs $B_1 = Y \cap Y' \cap A_1$, que és la reunió dels arcs l_1, \dots, l_{g+1} , i $B_2 = Y \cap Y' \cap A_2$, que és la reunió de $2g+2$ arcs amb un punt en comú. Evidentment, $B_1 \cap B_2$ és igual a $\cup\{p_j, q_j\}$. Tindrem la successió exacta de Mayer-Vietoris

$$H_2(\mathbf{S}^3 - B_1) \longrightarrow H_2(\mathbf{S}^3 - \cup\{p_j, q_j\}) \longrightarrow H_1(\mathbf{S}^3 - Y \cap Y') \longrightarrow 0,$$

ja que $H_2(\mathbf{S}^3 - B_2) = H_1(\mathbf{S}^3 - B_1) = H_1(\mathbf{S}^3 - B_2) = 0$.

Com els recobriments $\{A_1, A_2\}$ de Y , i $\{B_1, B_2\}$ de $Y \cap Y'$ són compatibles, tindrem un diagrama commutatiu de successions exactes

$$\begin{array}{ccccc} H_2(\mathbf{S}^3 - \cup e_j) & \xrightarrow{\cong} & H_1(\mathbf{S}^3 - Y) & & \\ \downarrow \alpha & & \downarrow f & & \\ H_2(\mathbf{S}^3 - \cup l_j) & \xrightarrow{\beta} & H_2(\mathbf{S}^3 - \cup\{p_j, q_j\}) & \xrightarrow{\gamma} & H_1(\mathbf{S}^3 - Y \cap Y') \longrightarrow 0. \end{array}$$

Notem x_i, y_i , les classes de p_i, q_i en $H_2(\mathbf{S}^3 - \cup\{p_j, q_j\})$, z_i la classe de e_i en $H_2(\mathbf{S}^3 - \cup e_j)$, z'_i la classe de e'_i en $H_2(\mathbf{S}^3 - \cup e'_j)$, i w_i la classe de l_i en $H_2(\mathbf{S}^3 - \cup l_j)$.

Pel lema 2.6 les imatges a $H_1(\mathbf{S}^3 - Y)$ de z_2, \dots, z_{g+1} , formen una base d'aquest grup. Així mateix, com $H_2(\mathbf{S}^3 - \cup\{p_j, q_j\})$ té com a base $x_1, \dots, x_{g+1}, y_1, \dots, y_g$, i, pel lema 2.7,

$$\beta(w_i) = x_i + y_i, \quad i = 1, \dots, g+1,$$

podem prendre com a base de $H_1(\mathbf{S}^3 - Y \cap Y')$, $\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_{g+1})$. Finalment, com novament pel lema 2.7,

$$\gamma\alpha(z_i) = \gamma(x_i + y_{i-1}) = \gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1}), \quad i = 2, \dots, g+1,$$

la matriu de f en les anteriors bases és

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

La comprovació de que la matriu de $-f'$ és la donada, és anàloga. \square

Arribats a aquest punt, veiem que de 2.3 i 2.5 se segueix el que podríem considerar gran teorema de l'escola pitagòrica.

Corollari 2.8. *Dues superfícies topològiques compactes i connexes de \mathbf{R}^3 són homeomorfes si, i només si, tenen la mateixa característica de Euler.* \square

Com en el corollari anterior es tracten superfícies de l'espai ordinari \mathbf{R}^3 , es podria plantejar el problema de classificar *extrínsecament* aquestes superfícies, és a dir, classificant les parelles (\mathbf{R}^3, S) , llevat d'homeomorfisme de parelles. Però, aquest tipus de classificació extrínseca és molt més complexa que la classificació intrínseca que estem considerant al llarg del llibre, fins i tot en el cas de les corbes, en el que dona lloc a tota una teoria: la teoria de nusos, (vegeu [15], [18], per a una introducció).

Problemes

1. (a) Proveu que l'aplicació $f : \mathbf{S}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ donada per

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz),$$

indueix una aplicació $\tilde{f} : \mathbf{P}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ que és un homeomorfisme amb la seva imatge.

(b) Proveu que si X és una superfície compacta connexa, existeix una aplicació contínua $f : X \longrightarrow \mathbf{R}^4$ que és un homeomorfisme de X amb $f(X)$.

2. (a) Proveu que el recobridor orientable de $g\mathbf{P}^2$ és $(g-1)\mathbf{T}^2$ (vegeu el problema 4 del §1).

(b) Determineu el morfisme induït en homologia per l'aplicació

$$p : (g-1)\mathbf{T}^2 \longrightarrow g\mathbf{P}^2.$$

3. (a) Proveu que el complementari a \mathbf{R}^3 d'una superfície compacta connexa té dues components connexes.

(b) Proveu que, si $n \geq 4$, el complementari a \mathbf{R}^n d'una superfície compacta connexa és connex.

3 El teorema de retracció

Sigui X una varietat topològica compacta de dimensió n . Si X és triangulable, els seus grups d'homologia singular són finit generats i nuls en dimensió superior a n , com resulta de comparar-los amb l'homologia simplicial d'un políedre de dimensió n que trianguli X . En aquest apartat provarem que l'homologia singular d'una varietat topològica compacta és finit generada en cada dimensió sense hipòtesi de triangulabilitat, i nulla en dimensió prou elevada. El resultat se seguirà de que tota varietat compacta és un retracte d'entorn euclidià.

Teorema 3.1. *Sigui X una varietat topològica compacta. Si $X \subseteq \mathbf{R}^N$, aleshores existeix un obert U de \mathbf{R}^N , que conté X , i una retracció $r : U \rightarrow X$.*

Per la demostració del teorema necessitarem el següent lema:

Lema 3.2. *Sigui X una varietat topològica compacta continguda a \mathbf{R}^N . Sigui W_1 un compacte de X tal que existeixen un entorn W'_1 de W_1 en \mathbf{R}^N i una retracció $r_1 : W'_1 \rightarrow W'_1 \cap X$, i sigui K un compacte de X contingut en una bola oberta coordinada V de X . Aleshores, existeixen un entorn W'_2 de $W_1 \cup K$ en \mathbf{R}^N , i una retracció $r_2 : W'_2 \rightarrow W'_2 \cap X$.*

Demostració. Com \mathbf{R}^N és localment compacte i W_1 és compacte, podem suposar que W'_1 és compacte. Sigui V_0 un obert de \mathbf{R}^N tal que $V = V_0 \cap X$, i posem

$$V' = V_0 - r_1^{-1}(X - V).$$

Aquest V' és un obert de \mathbf{R}^N , ja que r_1 és contínua i W'_1 és un tancat de \mathbf{R}^N . A més, $V' \cap X = V$ i $r_1(V' \cap W'_1) \subseteq V$.

Els subconjunts $V' \cap W'_1$ i $V' \cap X$ són tancats de V' , i així pel teorema d'extensió de Tietze, [20], l'aplicació contínua

$$f : A = (V' \cap W'_1) \cup (V' \cap X) \rightarrow V \cong \mathbf{R}^n$$

definida per

$$f(a) = \begin{cases} r_1(a), & \text{si } a \in V' \cap W'_1, \\ a, & \text{si } a \in V' \cap X, \end{cases}$$

admet una extensió a V'

$$g : V' \longrightarrow V.$$

Definim

$$r_2 : \overset{\circ}{W}'_1 \cup V' \longrightarrow X$$

per

$$r_2(w) = \begin{cases} r_1(w), & \text{si } w \in \overset{\circ}{W}'_1, \\ g(w), & \text{si } w \in V'. \end{cases}$$

És immediat que r_2 està ben definida, és contínua i $r_2(w) = w$, si $w \in X$. Així, és suficient prendre la restricció de r_2 a $\overset{\circ}{W}'_2 = r_2^{-1}((\overset{\circ}{W}'_1 \cup V') \cap X)$, ja que $W_1 \cup K \subseteq W'_2$. \square

Demostració del teorema: Com X és compacte i localment homeomorf a \mathbf{R}^n , existeixen oberts U_i, V_i , de X , $1 \leq i \leq r$, tals que \overline{U}_i és compacte, $\overline{U}_i \subseteq V_i$, V_i és una bola oberta coordinada, i $X = \cup_{i=1}^r U_i$. Si posem $W_0 = \emptyset$, i $W_i = \overline{U}_1 \cup \dots \cup \overline{U}_i$, el teorema se segueix del lema anterior, per inducció sobre i , ja que $W_r = X$. \square

En la situació del teorema anterior es pot precisar el resultat de la forma següent,

Teorema 3.3. *Sigui X una varietat topològica compacta. Si $X \subseteq \mathbf{R}^N$, aleshores existeix un políedre P de \mathbf{R}^N , que conté X , i una retracció $r : P \longrightarrow X$.*

Demostració. Pel teorema 3.1 existeix un obert U que conté X i una retracció $r : U \longrightarrow X$. Com per 1.6.6, existeix un políedre P tal que $X \subseteq P \subseteq U$, la restricció de r a P és una retracció de P sobre X . \square

Com a conseqüència d'aquest teorema de retracció podem enunciar ara el resultat de finitud.

Teorema 3.4. *Sigui X una varietat topològica compacta. Aleshores els grups d'homologia singular $H_q(X)$ són finit generats per a tot $q \geq 0$.*

Demostració. Per 1.4.3, X admet una immersió homeomòrfica en un espai euclidià \mathbf{R}^N , i pel teorema anterior, X és retracte d'un políedre P . Per tant es té un morfisme exhaustiu

$$H_q(P) \longrightarrow H_q(X) ,$$

per a tot $q \geq 0$. Com l'homologia singular de P és finit generada, per 3.9.4, també ho és la de X . \square

Observem que de la demostració resulta que $H_q(X) = 0$ per a q prou gran, concretament per a $q > N$, on N és la dimensió de submergiment. En el proper apartat millorarem aquest resultat fent referència a la dimensió de la varietat, i no a la de l'espai ambient on està submergida.

Com aplicació del teorema de retracció podem estendre el teorema del punt fix de Lefschetz a les varietats topològiques compactes no necessàriament triangulables. En efecte, els resultats anteriors permeten definir el nombre de Lefschetz d'una aplicació contínua com a 4.8, i es té:

Teorema 3.5 (del punt fix de Lefschetz). *Sigui X una varietat topològica compacta i $f : X \longrightarrow X$ una aplicació contínua. Si $\Lambda_f \neq 0$, aleshores f té un punt fix.*

Demostració. Sigui P un políedre que es retrau sobre X . Notem $i : X \hookrightarrow P$ la inclusió, i $r : P \longrightarrow X$ una retracció. Sigui $g : P \longrightarrow P$ l'aplicació contínua definida per la composició $g = ifr$. És suficient provar que g té un punt fix, ja que si $x \in P$ és un tal punt fix es té $x = ifr(x)$, per tant x és un punt de X , i com aleshores $r(x) = x$ es tindrà $x = f(x)$.

Per veure que g té un punt fix provem que $\Lambda_g = \Lambda_f$, i apliquem el teorema del punt fix de Lefschetz a P , 4.8.4. Com X és un retracte de P , l'homologia de X és sumand directe de l'homologia de P , així $H_*(P, \mathbf{Q}) \cong H_*(X, \mathbf{Q}) \oplus E$. Escollint una base de $H_p(X, \mathbf{Q})$ i ampliant-la a una base de $H_p(P, \mathbf{Q})$, la matriu de $g_p : H_p(X, \mathbf{Q}) \longrightarrow H_p(P, \mathbf{Q})$ és de la forma

$$\begin{pmatrix} f_p & \vdots & * \\ \dots\dots\dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

i per tant, $\Lambda_g = \sum (-1)^p \text{tr } g_p = \sum (-1)^p \text{tr } f_p = \Lambda_f$. \square

Com aplicació del teorema del punt fix de Lefschetz estudiarem la presència de punts fixos d'un flux en una varietat topològica compacta.

Definició. Sigui X una varietat topològica compacta. Un *flux* en X és una aplicació contínua

$$\varphi : \mathbf{R} \times X \longrightarrow X ,$$

tal que

$$(i) \quad \varphi(t_1 + t_2, x) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) \quad ,$$

$$(ii) \quad \varphi(0, x) = x \quad ,$$

per a tot $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ i tot $x \in X$.

Si X és una varietat diferenciable i φ és un flux diferenciable en X , és a dir, tal que l'aplicació φ és diferenciable, aleshores $v_x = \frac{d}{dt}(\varphi(t, x))_{t=0}$ defineix un camp vectorial sobre X . De fet, els fluxos apareixen de forma natural com trajectòries d'un camp vectorial donat, i en aquest cas, els zeros del camp vectorial es corresponen als punts fixos del flux. En el capítol 4 hem vist com teoremes de punt fixos sobre les esferes permetien provar l'existència de zeros d'un camp vectorial definit a \mathbf{S}^{2n} , ara veurem com del teorema del punt fix de Lefschetz en resulta un teorema d'existència de punts fixos de fluxos.

Definició. Sigui X una varietat topològica i φ un flux en X . Direm que un punt x_0 de X és un *punt fix del flux* φ si $\varphi(t, x_0) = x_0$, per a tot $t \in \mathbf{R}$.

Teorema 3.6. *Sigui X una varietat topològica compacta tal que $\chi(X) \neq 0$. Aleshores tot flux en X té un punt fix.*

Demostració. Sigui φ un flux en X . Fixat un $t \in \mathbf{R}$, el flux φ defineix una aplicació contínua $\varphi_t : X \longrightarrow X$, que és un homeomorfisme, ja que per la definició de flux, φ_{-t} és un homeomorfisme invers. A més, per (ii) φ_t és homòtop a la identitat de X , i per tant

$$\Lambda_{\varphi_t} = \Lambda_{\text{id}} = \chi(X) \neq 0 .$$

Així, pel teorema del punt fix de Lefschetz, φ_t té un punt fix.

Per a cada enter $n \geq 0$, sigui F_n el conjunt de punts fixos de $\varphi_{1/2^n}$. Pel que acabem de provar, $F_n \neq \emptyset$, i a més és compacte ja que és un tancat de X . Observem també que els punts de F_n són fixos per l'aplicació $\varphi_{m/2^n}$ per a tot $m \in \mathbf{Z}$, ja que $\varphi_{m/2^n} = (\varphi_{1/2^n})^m$.

Com $\varphi_{1/2^{n+1}} \circ \varphi_{1/2^{n+1}} = \varphi_{1/2^n}$, es tenen les inclusions $F_{n+1} \subseteq F_n$, i per tant el conjunt $F = \bigcap_{n \geq 0} F_n$ és no buit. El conjunt F està format pels punts fixos de $\varphi_{m/2^n}$, per a qualssevol $n \geq 0$ i $m \in \mathbf{Z}$, i com els racionals $m/2^n$ són densos en \mathbf{R} , de la continuïtat de φ s'en dedueix que F està format per punts fixos de φ . \square

Problemes

- Es diu que un espai topològic X és un *ENR* (de l'anglès "euclidean neighbourhood retract") si existeix un obert d'un espai euclidià del que X és un retracte. Per exemple, per 1.4.3 i 3.1, tota varietat topològica compacta és un ENR.
 - Proveu que si X és una varietat topològica amb vora i compacta, aleshores X és un ENR.
 - Proveu que si X és un espai triangulable, X és un ENR (vegeu el problema 4 de 1.6).
 - Proveu que si X és un ENR compacte, aleshores els seus grups d'homologia singular són finit generats i nuls a partir d'un grau prou elevat.
 - Proveu que si X és un ENR compacte i $f : X \rightarrow X$ és una aplicació contínua, aleshores Λ_f està ben definit, i es verifica que si $\Lambda_f \neq 0$ aleshores f té un punt fix.
- Determineu quines superfícies compactes connexes admeten un flux sense punts fixes.
- Sigui G un grup de Lie compacte, connex i no trivial. Proveu que $\chi(G) = 0$.
- Sigui R un domini d'ideals principals, i X una varietat topològica compacta. Proveu que els R -mòduls $H_q(X; R)$ són finit generats, per a tot $q \geq 0$.

4 El teorema d'anullació

En els propers tres apartats continuarem estudiant l'homologia singular de les varietats topològiques n -dimensionals.

En apartats anteriors hem estudiat l'homologia de les superfícies compactes, i en particular, hem provat que es verifica

- els grups $H_q(X)$ s'anul·len per $q \geq 3$,
- $H_2(X) \cong \mathbf{Z}$ si X és compacte, connexa, i orientable, mentres que $H_2(X) = 0$ en el cas no orientable.

Coneixem també resultats anàlegs per a les esferes \mathbf{S}^n . Veurem ara com aquests resultats establerts per a les superfícies i les esferes s'estenen a les varietats de dimensió arbitrària.

El primer resultat que provarem és un teorema d'anullació que assegura que l'homologia de les varietats topològiques de dimensió n és nul·la per damunt de la dimensió. De fet, provarem un resultat més general, el teorema 4.6, que fa referència a l'anullació de l'homologia relativa, i que serà d'utilitat en els apartats següents.

L'esquema de la demostració del teorema d'anullació es basa en tres etapes: en primer lloc es demostra el resultat per als políedres, després usant l'aproximació simplicial es demostra el teorema pels oberts de \mathbf{R}^n , i finalment un raonament inductiu permet acabar la prova. Les dues primeres etapes les recollim prèviament a l'establiment de l'enunciat del teorema en forma de proposicions ja que tenen interès per elles mateixes.

Proposició 4.1. *Sigui P un políedre compacte de \mathbf{R}^n . Aleshores $H_q(P) = 0$ per a tot $q \geq n$.*

Demostració. Provarem que P és homotòpicament equivalent a un políedre de dimensió $\leq n - 1$.

Farem la demostració per inducció sobre el nombre s de n -símplexs de P . Si $s = 0$, P és un políedre de dimensió $\leq n - 1$, i el resultat és obviament cert. Suposem que $s \geq 1$. La idea és veure que sempre podem contraure un n -símplex de forma que s'obtingui un políedre P' homotòpicament equivalent a P i amb un símplex menys de la màxima dimensió. Sigui x un punt interior a un n -símplex i considerem les rectes ℓ que passen per x . El conjunt dels punts d'aquestes rectes, que tallen l'esquelet $sq_{n-2}P$, està contingut en una reunió finita d'hiperplans de \mathbf{R}^n , perquè cada cara de l'esquelet $sq_{n-2}P$ està

continguda en una varietat lineal de dimensió $n - 2$. Per tant podem escollir una semirecta ℓ que surt de x i que no talla l'esquelet $(n - 2)$ -dimensional. Sigui y el punt de $\ell \cap \overline{\overset{\circ}{P}}$ més allunyat de x . Per construcció y no és de l'esquelet $sq_{n-2}(P)$, i com no pot ser interior a un n -simplex, y és de $sq_{n-1}(P)$. Per tant y pertany a una cara $(n - 1)$ -dimensional τ que és de la vora d'un n -simplex σ i que no pot pertànyer a cap altre n -simplex de P . Direm que és una cara lliure. Però aleshores P és homotòpicament equivalent al políedre P' que s'obté treient $\overset{\circ}{\sigma}$ i $\overset{\circ}{\tau}$ de P , ja que σ es contrau sobre $\sigma - (\overset{\circ}{\sigma} \cup \overset{\circ}{\tau})$. Com P' té $s - 1$ simplexes n -dimensionals, s'acaba la demostració usant la hipòtesis d'inducció. \square

Proposició 4.2. *Sigui U un obert de \mathbf{R}^n i A un tancat de U . Aleshores es verifica*

1. $H_q(U) = 0$, per a tot $q \geq n$.
2. $H_q(U, U - A) = 0$, per a tot $q > n$.

Demostració. 1. Sigui $[z] \in H_q(U)$ una classe d'homologia representada pel cicle $z \in Z_q(U)$. El cicle z és una combinació a coeficients enters de q -simplexes singulars $\sigma_i : \Delta^q \rightarrow U$, $z = \sum \lambda_i \sigma_i$, i per tant té suport, $\text{sup } z = \cup \sigma_i(\Delta^q)$, compacte. Per 1.6.6, existeix un políedre P que verifica $\text{sup } z \subseteq P \subseteq U$. Però aleshores, z és de la imatge del morfisme $H_q(P) \rightarrow H_q(U)$. Si $q \geq n$, $H_q(P) = 0$ per la proposició anterior, i per tant, $[z] = 0$.

2. Es dedueix immediatament de 1. usant la successió exacta d'homologia relativa del parell $(U, U - A)$. \square

Per a tota varietat topològica X , si A és un subconjunt de X , i $x \in A$, en el que segueix notarem per

$$j_{A,x} : H_n(X, X - A) \rightarrow H_n(X, X - x)$$

el morfisme induït per la inclusió $X - A \subseteq X - x$.

Proposició 4.3. *Sigui U un obert de \mathbf{R}^n , i A un tancat de U . Si $[z] \in H_n(U, U - A)$ és tal que $j_{A,x}[z] = 0$ per a tot $x \in A$, aleshores $[z] = 0$.*

Demostració. Sigui z una cadena de $S_n(U)$, que representa $[z]$. Per a tot punt x de A , com $j_{A,x}[z] = 0$, existeix una bola B_x tal que $B_x \subseteq U - \sup \partial z$, i z és una vora del complex $S_*(U, U - B_x)$. Donat que $A \cap \sup z$ és compacte, hi ha un nombre finit d'aquestes boles, B_1, \dots, B_m , tals que $A \cap \sup z \subseteq \bigcup_{i=1}^m \overset{\circ}{B}_i \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_i \subseteq U - \sup \partial z$. El conjunt $V = (U - A) \cup (\bigcup_{i=1}^m \overset{\circ}{B}_i)$ és un obert de U tal que $\sup z \subseteq V$ i $V \cap A \subseteq \bigcup_{i=1}^m \overset{\circ}{B}_i$. Aleshores la igualtat $V - V \cap (\bigcup B_i) = V - (V \cap A) \cup (V \cap (\bigcup B_i))$, i les inclusions $V - (V \cap A) \cup (V \cap (\bigcup B_i)) \subseteq V - V \cap A \subseteq U - A$ indueixen un morfisme

$$H_n(V, V - V \cap (\bigcup_{i=1}^m B_i)) \longrightarrow H_n(U, U - A) .$$

Com $\sup z \subseteq V$ i $\sup \partial z \subseteq U - \bigcup B_i$, la cadena z defineix un element de $H_n(V, V - V \cap (\bigcup B_i))$, i la classe $[z]$ de $H_n(U, U - A)$ és la imatge de la classe de z en $H_n(V, V - V \cap (\bigcup B_i))$. Per tant és suficient veure que, per $k = 0, \dots, m$, la classe de z en el grup $H_n(V, V - V \cap (\bigcup_{i=1}^k B_i))$ és zero. Raonem per inducció sobre k . Per $k = 0$ el resultat és trivial. Suposem cert el resultat per la unió de k boles coordinades, $k \geq 0$, i notem $B' = V \cap (\bigcup_{i=1}^k B_i)$ i $B'' = V \cap B_{k+1}$. Considerem la successió de Mayer-Vietoris relativa

$$H_{n+1}(V, V - B' \cap B'') \longrightarrow H_n(V, V - B' \cup B'') \longrightarrow H_n(V, V - B') \oplus H_n(V, V - B'')$$

Per 4.2, el terme de l'esquerra és zero, i per tant el morfisme restant és injectiu. Però, per la hipòtesis d'inducció i per l'elecció de les boles B_i , la classe de z en els grups de la dreta és zero, d'on se segueix el resultat. \square

Proposició 4.4. *Siguin U i V oberts de \mathbf{R}^n , amb $U \subseteq V$, i A un tancat de V . Aleshores el morfisme*

$$j_A : H_n(U, U - A \cap U) \longrightarrow H_n(V, V - A) ,$$

induit per la inclusió, és injectiu.

Demostració. Si $j_A[z] = 0$ aleshores $j_{A,x}[z] = 0$ per a tot $x \in A \cap U$, i s'aplica la proposició anterior. \square

Finalment podem establir el teorema d'anul·lació dels grups d'homologia relativa:

Teorema 4.5. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n i A un tancat de X . Aleshores*

$$H_q(X, X - A) = 0 ,$$

per a tot $q > n$.

Demostració. En efecte, sigui $[z] \in H_q(X, X - A)$, i sigui z un representant de $[z]$. Com el suport de z és compacte, està contingut en un nombre finit de boles coordenades, $\text{sup } z \subseteq \cup_{i=1}^m B_i$. Així, $[z]$ és de la imatge del morfisme $H_q(\cup_{i=1}^m B_i, \cup_{i=1}^m B_i - A) \longrightarrow H_q(X, X - A)$ induït per la inclusió. Provarem, per inducció sobre $k \geq 1$, que, per a tot obert U de X contingut en la reunió de k boles coordenades, es verifica

$$H_q(U, U - A) = 0 ,$$

sempre que $q > n$, el que demostrarà el teorema.

El resultat és cert per $k = 1$ per la proposició 4.2. Suposem el resultat demostrat per $k \geq 1$, i notem $U' = U \cap \cup_{i=1}^k B_i$ i $U'' = U \cap B_{k+1}$. La successió exacta de Mayer-Vietoris d'homologia relativa (vegeu el problema 4 de l'apartat 3.8), associada al recobriment obert U' i U'' de $U = U' \cup U''$ és

$$\begin{aligned} H_q(U', U' - A) \oplus H_q(U'', U'' - A) &\longrightarrow H_q(U, U - A) \xrightarrow{g_q} \\ H_{q-1}(U' \cap U'', U' \cap U'' - A) &\xrightarrow{f_{q-1}} H_{q-1}(U', U' - A) \oplus H_{q-1}(U'', U'' - A) \end{aligned}$$

Si $q \geq n + 2$, per hipòtesi d'inducció la successió anterior es redueix a

$$0 \longrightarrow H_q(U, U - A) \longrightarrow 0 ,$$

i per tant en resulta l'anul·lació del grup $H_q(U, U - A)$. Si $q = n + 1$, aleshores per hipòtesi d'inducció la successió exacta de Mayer-Vietoris és

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_{n+1}(U, U - A) &\xrightarrow{g_{n+1}} H_n(U' \cap U'', U' \cap U'' - A) \\ &\xrightarrow{f_n} H_n(U', U' - A) \oplus H_n(U'', U'' - A) \end{aligned}$$

però, per la proposició 4.4, el morfisme f_n és injectiu, i per tant $H_{n+1}(U, U - A) = 0$. \square

En particular, per $A = \emptyset$ trobem

Corollari 4.6. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n , aleshores es verifica*

$$H_q(X) = 0, \quad \text{per a tot } q > n. \quad \square$$

És a dir, aquest resultat assegura que l'homologia no trivial de les varietats topològiques està concentrada en dimensió menor o igual que la dimensió de la varietat. Com ja hem esmentat abans, el resultat seria evident si X fos una varietat triangulable.

Problemes

1. Sigui U un obert de \mathbf{R}^n .
 - (a) Sigui $[z]$ una classe de $H_{n-1}(U)$. Per tot $x \in \mathbf{R}^n - U$, notem j_x el morfisme

$$j_x : H_{n-1}(U) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{R}^n - x),$$
 induït per la inclusió $U \subseteq \mathbf{R}^n - x$. Proveu que si per a tot $x \in \mathbf{R}^n - U$ es verifica $j_x[z] = 0$, aleshores $[z] = 0$.
 - (b) Proveu que $H_{n-1}(U)$ és un grup sense torsió.
2. Sigui R un anell commutatiu. Si X és una varietat topològica de dimensió n , i A és un tancat de X , proveu que $H_q(X, X - A; R) = 0$, per a tot $q > n$.

5 El grup d'homologia H_n de les varietats no compactes

Hem provat en l'apartat anterior que l'homologia d'una varietat s'anulla per damunt de la dimensió. En el cas no compacte podem refinar el resultat en la forma següent, que generalitza la proposició 4.2,

Teorema 5.1. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n . Si X és connexa i no compacta, aleshores $H_n(X) = 0$.*

De fet aquest teorema correspon al cas $A = X$ del següent resultat, més general, que provarem a continuació.

Teorema 5.2. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n , i A un subespai tancat de X . Si totes les components connexes de A són no compactes, aleshores $H_n(X, X - A) = 0$.*

Prèviament a la prova establirem una proposició, que generalitza 4.3, i que precisa de quina forma la no compacitat influeix en aquests grups d'homologia.

Proposició 5.3. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n , A un subespai de X , i $[z] \in H_n(X, X - A)$.*

1. *Si $j_{A,x}[z] = 0$ per a un punt x de A , aleshores $j_{A,y}[z] = 0$ per a tot y de la component connexa de x en A .*
2. *Si C és una component connexa de A que no és relativament compacta, aleshores $j_{A,x}[z] = 0$, per a tot $x \in C$.*
3. *Si A és tancat i $j_{A,x}[z] = 0$, per a tot $x \in A$, aleshores $[z] = 0$.*

Demostració. 1. Sigui z un representant de $[z]$. Si $j_{A,y}[z] = 0$, per a un $y \in A$, com existeix una bola B_y , $y \in B_y$, tal que $B_y \subseteq X - \sup \partial z$, aleshores també $j_{A,y'}[z] = 0$ per a tot $y' \in B_y \cap A$. Per tant el conjunt de punts $y \in A$ tals que $j_{A,y}[z] = 0$ és un obert i un tancat de A , pel que és una reunió de components connexes de A .

2. Com C no és relativament compacta, hi ha un punt $y \in C$ tal que $y \notin \sup z$, i, així, $j_{A,y}[z] = 0$. De 1. se segueix doncs que $j_{A,x}[z] = 0$ per a tot $x \in C$.

3. És totalment anàloga a la de la proposició 4.3, prenent boles coordenades de X en lloc de boles de \mathbf{R}^n , i aplicant el teorema d'anul·lació 4.5 en lloc de 4.2. \square

Demostració del teorema 5.2: Com totes les components connexes de A són tancades i no compactes, per 2. de la proposició anterior, $j_{A,x}[z] = 0$ per a tot $x \in A$, i així, per 3., $[z] = 0$. \square

Problemes

1. Doneu un exemple d'un subespai tancat A de \mathbf{R}^2 tal que totes les components arc-connexes de A són no compactes, i $H_2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2 - A) \neq 0$.

2. Sigui R un anell commutatiu.

(a) Proveu la proposició 5.3 per l'homologia amb coeficients en R .

(b) Sigui X una varietat topològica de dimensió n , connexa, i A un subespai tancat de X . Proveu que si totes les components connexes de A són no compactes, aleshores $H_n(X, X - A; R) = 0$.

6 El criteri d'orientabilitat

El criteri d'orientabilitat de varietats topològiques al que ens hem referit anteriorment al llarg del capítol és:

Teorema 6.1. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n . Aleshores X és orientable si, i només si, per a tot subespai compacte connex K de X , i per a tot $x \in K$, el morfisme natural $H_n(X, X - K) \longrightarrow H_n(X, X - x)$ és un isomorfisme.*

Demostració. Suposem que X és orientable, i sigui $\{\theta_x\}$ una família compatible d'orientacions. Anem a provar que per a tot compacte connex $K \subseteq X$ i tot $x \in K$, el morfisme $H_n(X, X - K) \longrightarrow H_n(X, X - x)$ és un isomorfisme.

Provarem, en primer lloc, el següent lema:

Lema 6.2. *Si K és un compacte qualsevol de X , hi ha una única classe θ_K de $H_n(X, X - K)$ que es restringeix a θ_x per a tot $x \in K$.*

Demostració. Si $K = B$ és una bola coordinada el resultat és evident pel fet que la família d'orientacions és compatible.

Per la compacitat de K , podem suposar que K està contingut en un nombre finit de boles coordinades $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_i$. Raonem per inducció sobre k . Notem $B' = \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$ i $B = B' \cup B_k$, aleshores es té una successió exacta de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_n(X, X - B) &\longrightarrow H_n(X, X - B') \oplus H_n(X, X - B_k) \\ &\xrightarrow{\iota} H_n(X, X - B' \cap B_k) \end{aligned}$$

Per hipòtesi d'inducció es tenen elements $\theta_{B'}$ i θ_{B_k} dels grups d'homologia relativa corresponents, que es restringeixen a θ_x . El parell $(\theta_{B'}, -\theta_{B_k})$ és

del nucli de ι per la unicitat de $\theta_{B' \cap B_k}$, pel que existeix una única classe $\theta_B \in H_n(X, X - B)$ que s'aplica sobre $(\theta_{B'}, -\theta_{B_k})$. En particular, el grup $H_n(X, X - B)$ és no nul.

Ara, com la composició

$$H_n(X, X - B) \longrightarrow H_n(X, X - K) \longrightarrow H_n(X, X - x) ,$$

aplica θ_B sobre θ_x , la classe θ_K imatge de θ_B , també s'aplica sobre θ_x per a tot $x \in K$. A més, aquesta classe és única per 5.3. \square

Continuem amb la demostració del teorema 6.1. Així doncs X és orientable, K és connex, i hem de demostrar que el morfisme $H_n(X, X - K) \longrightarrow H_n(X, X - x)$ és un isomorfisme. L'exhaustivitat resulta del lema anterior. Provem la injectivitat. Si x és un punt de K , podem escriure la successió exacta del triple $X - K \subseteq X - x \subseteq X$, 3.7.4,

$$\cdots \longrightarrow H_n(X - x, X - K) \longrightarrow H_n(X, X - K) \longrightarrow H_n(X, X - x) \longrightarrow \cdots$$

en la que el membre de l'esquerra és zero pel teorema 5.2, perquè $X - x$ és una varietat de dimensió n , i $K - x$ és un tancat de X que té totes les components connexes no compactes. Així doncs, el morfisme $H_n(X, X - K) \longrightarrow H_n(X, X - x)$ és injectiu.

Provem ara l'altra implicació, és a dir, suposem que per a tot subespai compacte connex K de X , i per a tot $x \in K$ els morfismes $H_n(X, X - K) \longrightarrow H_n(X, X - x)$ són isomorfismes, i demostrem que X és orientable.

Podem suposar que X és connexa (vegeu el problema 3 de §1). Hem de construir una família compatible d'orientacions locals. Fixem un punt $x \in X$ i escollim una orientació local θ_x . Donat un altre punt $y \in X$ hi ha un camí γ que uneix x i y ja que la varietat X és arc-connexa. La imatge d'aquest camí, que seguirem notant γ , és un compacte connex i per tant podem definir una orientació local θ_y a través dels isomorfismes que resulten de la hipòtesi,

$$H_n(X, X - x) \xleftarrow{\sim} H_n(X, X - \gamma) \xrightarrow{\sim} H_n(X, X - y) .$$

Comprovem que l'orientació local θ_y així definida és independent del camí escollit. Sigui γ' un altre camí entre x i y . Per la functorialitat de l'homologia

es té el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(X, X - \gamma) & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 H_n(X, X - x) & \longleftarrow & H_n(X, X - \gamma \cup \gamma') & \longrightarrow & H_n(X, X - y) \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & H_n(X, X - \gamma') & &
 \end{array}$$

en el que per hipòtesi tots els morfismes són isomorfismes, d'on se segueix la independència de θ_y respecte el camí.

El fet que la família d'orientacions locals així definida sigui compatible és conseqüència un cop més de la functorialitat de l'homologia singular i de que, com acabem de provar, l'orientació local en un punt y anteriorment definida no depèn del camí. \square

Exemple. Amb l'ajut d'aquest resultat podem donar una nova demostració de que la banda de Möbius no és orientable. En efecte, si X és una banda de Möbius i K la circumferència "del mig" aleshores $H_2(X, X - K) = 0$, com resulta de la successió exacta d'homologia relativa, i per tant X no és orientable.

Sigui X una varietat topològica de dimensió n , i $K \subseteq X$ un subespai compacte. Si X està orientada per la família d'orientacions locals $\{\theta_x\}$, pel lema 6.2 existeix una única classe θ_K de $H_n(X, X - K)$ que es restringeix a θ_x per a tot $x \in K$.

Definició. S'anomena *classe fonamental de l'orientació al llarg de K* , a la classe $\theta_K \in H_n(X, X - K)$. Si X és una varietat topològica compacta i orientada, notarem θ_X la classe fonamental al llarg de X .

Teorema 6.3. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n , compacta i connexa. Les afirmacions següents són equivalents:*

1. X és orientable.
2. $H_n(X) \cong \mathbf{Z}$.
3. $H_n(X) \neq 0$.

Demostració. L'assertió 2. se segueix de 1. pel criteri d'orientabilitat aplicat a $K = X$, i com la implicació 2. \implies 3. és trivial, és suficient comprovar que 3. implica 1.. Suposem doncs que el grup $H_n(X)$ és no nul i provem que X és orientable.

Per fer-ho provarem que hi ha una família d'orientacions locals $\{\theta_x\}$ de X compatible. Sigui θ una classe no nul·la de $H_n(X)$. Considerem la successió exacta d'homologia relativa

$$\cdots \longrightarrow H_n(X - x) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, X - x) \longrightarrow H_{n-1}(X - x) \longrightarrow \cdots$$

El terme de l'esquerra és zero pel teorema d'anul·lació per a varietats no compactes, d'on se segueix que el morfisme $p_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(X, X - x)$ és injectiu. A més, $H_n(X, X - x) \cong \mathbf{Z}$ perquè és l'homologia local de X en x . Sigui ara θ_x l'orientació local de x definida per $p_*(\theta) = m\theta_x$, amb $m > 0$, i comprovem que la família així definida és compatible. Si $x, y \in X$ i B és una bola coordinada tal que $x, y \in B$, aleshores es té un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc}
 & & H_n(X, X - y) \\
 & \nearrow & \uparrow \cong \\
 H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, X - B) \\
 & \searrow & \downarrow \cong \\
 & & H_n(X, X - x)
 \end{array}$$

i per tant, existeix $\theta_B \in H_n(X, X - B)$ tal que θ s'aplica a $m\theta_B$, i per la commutativitat del diagrama i el fet que els morfismes verticals són isomorfismes, θ_B es restringeix a θ_x i θ_y , és a dir, les orientacions són compatibles.

□

Com a conseqüència d'aquest resultat general s'en deriva l'orientabilitat de les superfícies $g\mathbf{T}^2$ i la no orientabilitat de les superfícies $g\mathbf{P}^2$, que ja

conexiem d'apartats anteriors. A més, dels càlculs de l'apartat 7 del capítol 4 en resulten els exemples següents.

Corollari 6.4. *Les varietats \mathbf{S}^n i \mathbf{P}^{2n+1} són orientables per a qualsevol n . Les varietats \mathbf{P}^{2n} no són orientables.* \square

Acabarem aquest apartat amb una proposició que resumeix bona part dels resultats anteriors, i que ens serà útil al §9.

Proposició 6.5. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n , orientada, i A un tancat de X . Siguin K_1, \dots, K_r , components connexes compactes de A , i per a cada i , sigui x_i un punt de K_i . Aleshores el morfisme*

$$\sum j_{A, x_i} : H_n(X, X - A) \longrightarrow \oplus_i H_n(X, X - x_i),$$

és exhaustiu.

Si A no té més que un nombre finit de components compactes: K_1, \dots, K_r , l'anterior morfisme és un isomorfisme.

Demostració. Fixem un i . Sigui $K'_i = \cup_{j \neq i} K_j$, i sigui θ_i la imatge de la classe fonamental al llarg de K_i en $X - K'_i$ pel morfisme

$$H_n(X - K'_i, X - A) \longrightarrow H_n(X, X - A).$$

Per la seva definició, la imatge de θ_i en $H_n(X, X - x_i)$ és un generador. Mentres que, si $j \neq i$, la imatge de θ_i en $H_n(X, X - x_j)$ és zero. Per tant, el morfisme $\sum j_{A, x_i}$ és exhaustiu.

Si A només té K_1, \dots, K_r com components compactes, la injectivitat del morfisme se segueix de 5.3. \square

Problemes

1. Proveu, mitjançant un exemple, que la hipòtesi de que K sigui connex en el teorema 6.1 és necessària.

2. Sigui X una varietat topològica de dimensió n . Proveu que són equivalents:
 1. X és orientable.
 2. $H_n(X, X - \gamma) \neq 0$, per a tota corba tancada simple γ de X .
 3. $H_n(X, X - \Gamma) \neq 0$, per a tot graf connex Γ de X .
3. Sigui X una superfície topològica, proveu que X és no orientable si, i només si, X conté un obert homeomorf a una banda de Möbius.
4. (a) Proveu que els espais projectius complexes $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$ són orientables, per a tot n .
 (b) Proveu que els espais lenticulars $L(p, q)$ són orientables.
 (c) Sigui X una varietat topològica compacta i connexa. Proveu que $X \times \mathbf{S}^m$ és orientable si, i només si, X és orientable. Deduïu que els tors n -dimensionals \mathbf{T}^n són orientables.
5. Sigui \mathbf{K}^n l'espai quocient que resulta d'identificar les dues esferes que formen la vora de $I \times \mathbf{S}^{n-1}$ per una reflexió de \mathbf{S}^{n-1} , espai que podem anomenar *ampolla de Klein* de dimensió n .
 (a) Proveu que \mathbf{K}^n és una varietat topològica de dimensió n , compacta i connexa.
 (b) Determineu l'homologia singular de \mathbf{K}^n .
 (c) Proveu que \mathbf{K}^n no és orientable.
6. Sigui R un anell commutatiu. Sigui X una varietat topològica de dimensió n , compacta i connexa. Proveu que si X és R -orientable, $H_n(X; R) \cong R$. Deduïu que $H_n(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

7 Grau d'aplicacions contínues

En aquest apartat anem a generalitzar la noció de grau que hem introduït en el capítol 4 per les aplicacions contínues de l'esfera \mathbf{S}^n en ella mateixa a les aplicacions entre varietats compactes orientades.

Definició. Siguin X, Y varietats topològiques de dimensió n , compactes, connexes i orientades, i sigui $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Notem θ_X

i θ_Y les classes fonamentals de X i Y , respectivament. Es defineix el *grau* de f com l'únic enter $\deg f$ que verifica

$$f_*(\theta_X) = \deg f \cdot \theta_Y .$$

És convenient també disposar de la noció de grau en una situació més general. Recordem que una aplicació $f : X \longrightarrow Y$ entre espais topològics es diu que és *pròpia* si la anti-imatge de tot compacte de Y és un subespai compacte de X . Per exemple, si X és compacte tota $f : X \longrightarrow Y$ contínua és pròpia.

Proposició 7.1. *Siguin X, Y varietats topològiques de dimensió n , orientades, no necessàriament compactes, amb Y connexa, i $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua pròpia. Aleshores hi ha un únic enter, que anomenarem el grau de f i notarem $\deg f$, tal que si $K \subseteq Y$ és un subespai compacte i connex, es verifica*

$$f_*(\theta_{f^{-1}(K)}) = \deg f \cdot \theta_K .$$

Demostració. Siguin K i K' dos subespais compactes i connexos de Y . Com Y és connex, hi ha un nombre finit de boles coordenades tal que la unió de totes elles B és connexa, i conté K i K' . Així, substituint K' per B podem suposar que $K \subseteq K'$. El resultat se segueix ara de la functorialitat de l'homologia relativa i de la definició de la classe fonamental d'un compacte. \square

La proposició següent resumeix les propietats principals del grau d'una aplicació pròpia entre varietats de la mateixa dimensió. Aquestes propietats generalitzen de forma natural les establertes a 4.5.1 per al grau d'aplicacions entre esferes, i són de demostració immediata.

Proposició 7.2. *Siguin X, Y varietats topològiques de dimensió n , orientades, amb Y connexa, i $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua pròpia. Es verifica:*

1. *Si f no és exhaustiva, $\deg f = 0$.*
2. *Si f és un homeomorfisme, aleshores $\deg f = \pm 1$.*

3. *Si V un obert no buit de Y , $U = f^{-1}(V)$, i $g : U \rightarrow V$ la restricció de f a U . Aleshores $\deg f = \deg g$.*
4. *Si W és una altra varietat topològica de dimensió n orientada, i $g : W \rightarrow X$ és una aplicació contínua pròpia, aleshores $\deg(fg) = \deg f \cdot \deg g$.*
5. *Si X és compacta i $g : X \rightarrow Y$ és homòtopa a f , aleshores $\deg f = \deg g$.* \square

Pel tal de tenir una idea més intuitiva del grau, és interessant observar la seva relació amb el grau local, expressada en el teorema 7.3 següent, que, a més, acosta la present definició de grau a la que es dona a Topologia Diferencial, (vegeu [11] i [13], i els problemes 2 i 3).

Teorema 7.3. *Amb les notacions anteriors, suposem que existeix un $y \in Y$, tal que $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Aleshores es verifica*

$$\deg f = \sum_{i=1}^m \deg_{x_i} f .$$

Demostració. Siguin U_i entorns coordenats dels punts x_i , $i = 1, \dots, m$, disjunts dos a dos. Notem θ_i l'orientació local de X en x_i , i f_i la restricció de f a U_i , $i = 1, \dots, m$. La composició dels morfismes

$$\bigoplus_{i=1}^m H_n(U_i, U_i - x_i) \xrightarrow{k_i} H_n(X, X - f^{-1}(y)) \longrightarrow H_n(X, X - x_j) ,$$

induits per la inclusió corresponents, aplica l'element θ_i en 0 sempre que $i \neq j$, i θ_j en θ_j . Així, $(\theta_1, \dots, \theta_m)$ té imatge θ_j , i per la unicitat de la classe fonamental de l'orientació en $f^{-1}(y)$, en resulta $\sum k_{i*}(\theta_i) = \theta_{f^{-1}(y)}$. Així es té

$$\begin{aligned} \deg f \cdot \theta_y &= f_*(\theta_{f^{-1}(y)}) \\ &= f_*\left(\sum k_{i*} \theta_i\right) \\ &= \sum f_{i*}(\theta_i) \\ &= \left(\sum \deg_{x_i} f\right) \theta_y , \end{aligned}$$

d'on se segueix el resultat. \square

Aquest resultat permet calcular el grau en algunes situacions a base de comptar punts. En efecte, si f és un homeomorfisme local en cada un dels punts x_i , el grau local $\deg_{x_i} f$ serà ± 1 , segons si f conserva o no l'orientació en x_i , i així és té

Corollari 7.4. *Sigui $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua entre varietats topològiques de dimensió n , compactes, connexes i orientades. Si existeix un punt $y \in Y$ tal que f és un homeomorfisme local en els punts de $f^{-1}(y)$, aleshores aquest conjunt és finit i el grau de f és el nombre d'anti-imatges de y en les que f conserva l'orientació menys el nombre d'anti-imatges de y en les que f inverteix l'orientació.* \square

Problemes

1. Sigui X una varietat topològica, connexa, i de dimensió n . Es diu que X és *reversible* si existeix un homeomorfisme $h : X \longrightarrow X$ que té un punt fix $x \in X$ i $h_* : H_n(X, X - x) \longrightarrow H_n(X, X - x)$ és igual a $-\text{id}$.
 - (a) Proveu que tota varietat connexa no orientable és reversible.
 - (b) Proveu que si X és una varietat topològica, connexa i orientable, X és reversible si, i només si, existeix un homeomorfisme que inverteix les orientacions.
 - (c) Proveu que si X és una varietat topològica compacta, connexa i orientada, X és reversible si, i només si, existeix un homeomorfisme de grau -1 .
 - (d) Proveu que \mathbf{S}^n és reversible per a tot n .
 - (e) Proveu que tota superfície compacta i connexa és reversible.

(No tota varietat orientable és reversible, per exemple, $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$ no és reversible, vegeu [10]).
2. Sigui $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació diferenciable entre varietats diferenciables de la mateixa dimensió, compactes i connexes. Es diu que $y \in Y$ és un valor regular de f si en els punts de la antiimatge de y , $f^{-1}(y)$, el jacobí de f és no nul. Proveu que si $y \in Y$ és un valor regular de f aleshores $f^{-1}(y)$

és un conjunt finit, i el grau de f és igual al nombre de punts de $f^{-1}(y)$ on el jacobíà és positiu menys el nombre de punts de $f^{-1}(y)$ on el jacobíà és negatiu (vegeu [11], [13]).

3. Siguin X, Y , varietats topològiques de dimensió n , compactes i connexes, i sigui $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Siguin θ'_X, θ'_Y , generadors dels grups $H_n(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ i $H_n(Y, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, respectivament. Es defineix el *grau no orientat* de f com l'únic element $\deg_2 f \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ que verifica

$$f_*(\theta'_X) = \deg_2 f \cdot \theta'_Y.$$

Generalitzeu aquesta definició de $\deg_2 f$ com en 7.1, i proveu que aquest $\deg_2 f$ verifica les propietats anàlogues, en homologia amb coeficients a $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, a les establertes a 7.2, 7.3 i 7.4, (vegeu [11], [13]).

8 Homologia i orientabilitat de les varietats amb vora

Estudiarem ara l'homologia i l'orientabilitat de les varietats topològiques amb vora i l'orientació induïda sobre la vora, encara que de fet, ens restringirem a les varietats compactes, per simplificar l'exposició.

Un dels resultats més útils sobre les varietats topològiques amb vora és el conegut com a teorema del collar de M. Brown, que enunciaré sense demostració, referint-nos per a la seva demostració a la presentada en l'apèndix de [27].

Teorema 8.1 (del collar). *Sigui $(X, \partial X)$ una varietat topològica amb vora i compacta. Aleshores existeix un entorn V de ∂X en X i un homeomorfisme $h : \partial X \times [0, 1) \rightarrow V$, tal que $h(x, 0) = x$ per a tot $x \in \partial X$. \square*

De fet, podríem obviar aquest teorema, i proposar, en el que segueix, arguments alternatius un mica més elementals, (vegeu, per exemple, la prova de 8.3). Però, creiem que això amagaria, amb detalls tècnics innecessaris, l'estreta relació que hi ha entre les varietats amb vora, compactes i connexes, i les varietats connexes no compactes, que dona el següent corollari 8.2. En efecte, si notem $V_\varepsilon = h(\partial X \times [0, \varepsilon))$, aleshores ∂X és un retracte de deformació de l'obert V_ε de X , i es té,

Corollari 8.2. *La inclusió $X - \partial X \hookrightarrow X$ és una equivalència homotòpica.*

Demostració. Com $\partial X \times [1/2, 1)$ és un retracte de deformació fort de $\partial X \times (0, 1)$ i de $\partial X \times [0, 1)$, del teorema del collar se segueix que $X - V_{1/2}$ és un retracte de deformació de $X - \partial X$ i de X . Per tant la inclusió $X - \partial X \hookrightarrow X$ és una equivalència homotòpica. \square

D'aquí resulta el següent teorema d'anul·lació de l'homologia:

Teorema 8.3. *Sigui X una varietat amb vora, de dimensió n , compacta i connexa. Aleshores, $H_q(X) = 0$, per a tot $q \geq n$.*

Demostració. Se segueix immediatament del corollari anterior i dels teoremes 4.6 i 5.1.

També podríem provar aquest teorema observant que X és del tipus d'homotopia de la varietat connexa i no compacta que s'obté identificant les vores de X i de $\partial X \times [0, 1)$, i aplicant 5.1. \square

Com a conseqüència d'aquest resultat homològic deduirem el següent teorema d'anul·lació del grau.

Teorema 8.4. *Siguin X, Y varietats topològiques de dimensió n , compactes, connexes i orientades, i sigui $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Si X és la vora d'una varietat compacta, connexa i orientable W i f s'estén a W , aleshores $\deg f = 0$.*

Demostració. En efecte, sigui $F : W \rightarrow Y$ una extensió de f . Aleshores, la factorització de f

$$X \rightarrow W \xrightarrow{F} Y,$$

indueix en homologia la factorització de f_*

$$H_n(X) \rightarrow H_n(W) \rightarrow H_n(Y),$$

que és zero, doncs $H_n(W) = 0$. \square

Podem provar ara el teorema general de no retracció que generalitza el teorema de no retracció d'una bola sobre la seva vora, demostrat a 3.6.7 (vegeu també el problema 4).

Teorema 8.5 (de no retracció). *Sigui $(X, \partial X)$ una varietat topològica amb vora, compacta i orientable. Aleshores la vora ∂X no és un retracte de X .*

Demostració. Evidentment, podem suposar X connexa. Llavors, si ∂X fos un retracte de X , aquesta vora també seria connexa, però com $\deg \text{id}_X = 1$, i una retracció de X sobre ∂X és una extensió de la identitat de ∂X , això contradiria el teorema anterior. \square

Centrem-nos ara en l'orientabilitat de les varietats amb vora.

Definició. Sigui $(X, \partial X)$ una varietat topològica amb vora. Direm que $(X, \partial X)$ és *orientable* (respectivament, que està *orientada*) si la varietat topològica $X - \partial X$ és orientable (respectivament, està orientada).

Com en el cas de les varietats topològiques, si $(X, \partial X)$ és una varietat topològica amb vora, compacta i orientada, li podem associar una classe fonamental, en aquest cas en un grup d'homologia relativa.

Proposició 8.6. *Sigui $(X, \partial X)$ una varietat topològica amb vora, de dimensió n , compacta i orientada. Existeix una única classe $\theta_X \in H_n(X, \partial X)$ tal que, per a tot $x \in X - \partial X$, el morfisme*

$$H_n(X, \partial X) \longrightarrow H_n(X, X - x)$$

aplica θ_X en l'orientació local de $X - \partial X$ en x .

Demostració. Com hem observat anteriorment, si notem $V_\varepsilon = h(\partial X \times [0, \varepsilon))$, se segueix del teorema del collar que ∂X és un retracte de deformació de V_ε , i com V_ε és un entorn obert de ∂X , $K_\varepsilon = X - V_\varepsilon$ és un subespai compacte de $X - \partial X$. Per la invariància homotòpica de l'homologia relativa, 3.7.3, es té un isomorfisme

$$H_n(X, X - K_\varepsilon) \xrightarrow{\sim} H_n(X, \partial X) .$$

Mentres que, pel teorema d'excisió es té un isomorfisme

$$H_n(X - \partial X, X - \partial X - K_\varepsilon) \xrightarrow{\sim} H_n(X, X - K_\varepsilon) .$$

Finalment, per 6.1, existeix una única classe fonamental $\theta_{K_\varepsilon} \in H_n(X - \partial X, X - \partial X - K_\varepsilon)$, tal que, per a tot $x \in K_\varepsilon$, θ_{K_ε} s'aplica en l'orientació

local θ_x . Així, és suficient definir θ_X com la imatge de θ_{K_ε} a través d'aquests isomorfismes. Aquesta classe no depen de ε , ja que si $\varepsilon' < \varepsilon$, les inclusions naturals indueixen isomorfismes $H_n(X - \partial X, X - \partial X - K_\varepsilon) \xrightarrow{\sim} H_n(X - \partial X, X - \partial X - K_{\varepsilon'})$, que envien θ_{K_ε} a $\theta_{K_{\varepsilon'}}$. \square

D'aquest resultat podem ara deduir l'orientabilitat de la vora d'una varietat topològica amb vora, orientable.

Teorema 8.7. *Sigui $(X, \partial X)$ una varietat topològica amb vora, de dimensió n , compacta i orientada. Si $\theta_{\partial X} = \partial_*(\theta_X)$, on ∂_* és el morfisme de connexió*

$$\partial_* : H_n(X, \partial X) \longrightarrow H_{n-1}(\partial X) ,$$

aleshores $\theta_{\partial X}$ és una classe fonamental de ∂X , en particular, la vora ∂X és una varietat topològica orientada.

Demostració. Hem de provar que la imatge de $\theta_{\partial X}$ pel morfisme

$$j_x : H_{n-1}(\partial X) \longrightarrow H_{n-1}(\partial X, \partial X - x) ,$$

és un generador de $H_{n-1}(\partial X, \partial X - x)$, per a tot $x \in \partial X$.

Sigui $x \in \partial X$, i considerem una parametrització

$$\varphi : \mathbf{H}^n \longrightarrow X ,$$

tal que $\varphi(0) = x$. Sigui $B \subseteq X$ la imatge per φ dels punts de \mathbf{H}^n de mòdul menor o igual a 1, i sigui ∂B la seva vora. Considerem el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X, \partial X) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X, X - \overset{\circ}{B}) & \xleftarrow{\sim} & H_n(B, \partial B) \\ \partial_* \downarrow & & \partial_* \downarrow & & \partial_* \downarrow \cong \\ H_{n-1}(\partial X) & \longrightarrow & H_{n-1}(X - \overset{\circ}{B}) & \longleftarrow & H_{n-1}(\partial B) \\ j_x \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ H_{n-1}(\partial X, \partial X - x) & \xrightarrow{\sim} & H_{n-1}(X - \overset{\circ}{B}, X - \overset{\circ}{B} - x) & \xleftarrow{\sim} & H_{n-1}(\partial B, \partial B - x) , \end{array}$$

en el que els morfismes estan induïts per les inclusions corresponents. Els morfismes horitzontals marcats com isomorfismes ho són pel teorema d'excisió, 3.8.1. D'altra banda, com B és una bola topològica, tant B com $\partial B - x$ són contràctils, i en resulten els isomorfismes verticals de la dreta.

Així, és suficient comprovar que $i_*(\theta_X)$ és un generador de $H_n(X, X - \overset{\circ}{B})$. Sigui $y \in B$ un punt interior de B que no és de la vora de X , i considerem el diagrama commutatiu de morfismes

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, \partial X) & \xrightarrow{j_y} & H_n(X, X - y) \\ & \searrow i_* & \nearrow \cong \\ & H_n(X, X - \overset{\circ}{B}) & \end{array}$$

induit per les inclusions naturals, i en el que el morfisme $H_n(X, X - \overset{\circ}{B}) \rightarrow H_n(X, X - y)$, és un isomorfisme perquè $X - \overset{\circ}{B}$ és un retracte de deformació de $X - y$. Per 7.3, $j_y(\theta_X)$ és un generador de $H_n(X, X - y)$, i per la commutativitat del diagrama resulta que $i_*(\theta_X)$ és un generador de $H_n(X, X - \overset{\circ}{B})$. \square

Problemes

1. Sigui W una varietat topològica de dimensió n , compacta i orientada, i sigui X una varietat topològica compacta de dimensió $n - 1$ continguda en W , tal que $W - X = W_1 \cup W_2$, on \overline{W}_1 i \overline{W}_2 són varietats amb vora. Proveu que $\theta_{\partial \overline{W}_1} = -\theta_{\partial \overline{W}_2}$.
2. Sigui $(X, \partial X)$ una varietat topològica amb vora. Es defineix la varietat *dobla* de X , que notarem \hat{X} , com la varietat que s'obté identificant les vores de dues còpies de X .
 - (a) Proveu que si X és orientable, aleshores també ho és \hat{X} .
 - (b) Suposem que X està orientada, i sigui $\theta_{\hat{X}}$ la classe fonamental de \hat{X} . Proveu que la imatge de $\theta_{\hat{X}}$ per la composició

$$H_n(\hat{X}) \rightarrow H_n(\hat{X}, \hat{X} - (X - \partial X)) \cong H_n(X, \partial X),$$

és la classe fonamental θ_X de X .

3. (a) Sigui X una varietat topològica, i B una bola oberta coordinada de X . Proveu que X és orientable si, i només si, $X - B$ és orientable.
- (b) Proveu que una suma connexa, $X \# Y$, és orientable si, i només si, X i Y són orientables.
- (c) Doneu una expressió de l'homologia de $X \# Y$ en termes de l'homologia de X i de Y .
- (d) Utilitzant sumes connexes d'espais producte $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ i d'espais lenticulars, proveu que si G és un grup abelià finit generat, existeix una varietat topològica de dimensió 3, compacta, connexa i orientable, X , tal que $H_1(X) \cong G$.
4. (a) Sigui R un anell commutatiu. Sigui X una varietat topològica amb vora, de dimensió n , compacta i connexa. Proveu que $H_n(X; R) = 0$.
- (b) Feu servir coeficients a $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ per provar el teorema 8.5 de no retracció sense la hipòtesis d'orientabilitat.

9 El teorema general de separació

En aquest apartat provarem un teorema de separació que generalitza el teorema de Jordan-Brouwer, i que bàsicament és conseqüència dels teoremes dels apartats anteriors, encara que convenientment estesos en dos sentits: per una banda necessitarem treballar amb espais que siguin ENR, és a dir, espais que són retractes d'entorns euclidians, i per l'altra, necessitarem treballar amb coeficients en un cos de característica arbitrària. Com a corollari deduirem un teorema general de no immersió de les varietats no orientables.

En el que segueix R denotarà un anell commutatiu i \mathbf{k} un cos. Al llarg de l'apartat utilitzarem alguns resultats de l'homologia de les varietats amb coeficients en R , que hem demostrat als apartats anteriors per l'homologia amb coeficients en \mathbf{Z} , i que hem deixat com exercici la seva extensió immediata a coeficients en R . Ens referirem a aquests resultats pel corresponent enunciat amb coeficients enters.

El teorema de retracció 3.1 prova que les varietats topològiques compactes són ENRs, més generalment, ens serà útil observar el següent resultat:

Lema 9.1. *Sigui X una varietat topològica i K un compacte de X . Aleshores existeix un entorn obert de K en X que és un ENR.*

Demostració. La prova d'aquest lema és una petita modificació de proves anteriors, pel que deixarem els detalls al lector com exercici. En efecte, a la proposició 4.3 del capítol 1, varem provar que tota varietat compacta admet una immersió homeomòrfica a un espai euclidià, una modificació evident d'aquella prova mostra que en la situació ara considerada existeix un entorn compacte de K contingut a un espai euclidià. A partir d'aquí, observant que en el lema 3.2 la hipòtesis de que X sigui una varietat topològica compacta es pot substituir per la hipòtesis de que X sigui un entorn compacte en una varietat topològica, es conclou com a 3.1. \square

Recordem que si Y és un subespai d'un espai topològic X , es diu que Y és un *retracte d'entorn* si existeix un obert U de X del que Y és un retracte, i recordem també que, aleshores, Y és un tancat de U . Per exemple, si Y és una varietat topològica compacta o un espai triangulable, aleshores Y és un retracte d'entorn en X , doncs com són ENRs això es dedueix del següent lema:

Lema 9.2. *Sigui X un espai normal, A un subespai tancat de X , Y un ENR, i $h : A \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Aleshores, h s'estén a un entorn obert de A en X .*

En particular, si Y és un subespai tancat de X , Y és un retracte d'entorn en X .

Demostració. Sigui V un obert de \mathbf{R}^N del que Y és un retracte. Pel teorema d'extensió de Tietze, l'aplicació h s'estén a una aplicació contínua, $U \rightarrow V$, on U és un entorn obert de A en X . La composició d'aquesta aplicació amb la retracció de V sobre Y , és una extensió de h a U . \square

El primer teorema que provarem per als retractes d'entorns en varietats topològiques es refereix a la seva homologia singular.

Teorema 9.3. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n , connexa, i sigui Y un retracte d'entorn en X , $Y \neq X$. Aleshores es verifica*

1. $H_q(Y; R) = 0$, per a tot $q \geq n$.
2. $H_q(X, Y; R) = 0$, per a tot $q > n$.

Demostració. 1. Sigui U un obert de X del que Y és un retracte. Podem suposar que U no és compacte, doncs si U fos compacte, seria igual a X , i com $Y \neq X$, prenent un $x \in X - Y$, tindriem que Y és retracte de l'obert $X - x$, que no és compacte. Ara, com $H_q(Y; R)$ és un subgrup de $H_q(U; R)$, el resultat se segueix de 4.6 i 5.1.

2. Es dedueix immediatament de 1. usant la successió exacta d'homologia relativa del parell (X, Y) . \square

Pel proper teorema 9.5, necessitem el següent lema:

Lema 9.4. *Sigui X un ENR, Y un retracte d'entorn en X , i Z un tancat de X disjunt amb Y . Aleshores, existeix un obert U de X que conté Y , i disjunt amb Z , i una retracció $\rho : U \rightarrow Y$, tal que la composició $U \xrightarrow{\rho} Y \rightarrow X - Z$ és homòtopa a la inclusió $U \rightarrow X - Z$.*

Demostració. Com Y és un retracte d'entorn, existeix un entorn obert W de Y en X , que podem prendre disjunt de Z , i una retracció $\rho : W \rightarrow Y$. Considerem el tancat de $W \times I$

$$F = W \times \{0\} \cup W \times \{1\} \cup Y \times I,$$

i sobre aquest tancat l'aplicació contínua $h : F \rightarrow W$ definida per

$$h(x, t) = \begin{cases} x, & \text{si } t = 0 \quad \text{o} \quad x \in Y, \\ \rho(x), & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Com W és un obert de X , també és un ENR. Així, per 9.2, h s'estén a un entorn obert de F en $W \times I$, i, en particular, a un entorn de la forma $U \times I$, amb U un obert de X , tal que $Y \subseteq U \subseteq W$. És clar que aquesta h defineix una homotopia entre les aplicacions de l'enunciat. \square

Teorema 9.5. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n , i Y un retracte d'entorn en X , $Y \neq X$. Siguin $\{C_i\}_{i \in I}$ les components connexes relativament compactes de $A = X - Y$, i, per a cada i , sigui x_i un punt de C_i .*

1. Si $[z] \in H_n(X, Y; R)$, i $j_{A, x_i}[z] = 0$ per a tot x_i , aleshores $[z] = 0$.

2. Si X és R -orientable, per a tot subconjunt finit J de I , el morfisme

$$\begin{aligned} \sum j_{A,x_i} : H_n(X,Y;R) &\longrightarrow \oplus_{i \in J} H_n(X, X - x_i; R) \\ z &\longmapsto \sum j_{A,x_i}[z] \end{aligned}$$

és exhaustiu.

Demostració. 1. Per a tot subespai W de X , notem $H_{n-1}(W;R)_0$ el nucli del morfisme $H_{n-1}(W;R) \longrightarrow H_{n-1}(X;R)$. Així, com, per 9.3, $H_n(Y;R) = 0$, es té la successió exacta

$$0 \longrightarrow H_n(X;R) \longrightarrow H_n(X,Y;R) \longrightarrow H_{n-1}(Y;R)_0 \longrightarrow 0.$$

Sigui ara U un entorn obert de Y , del que Y és un retracte.

Per la naturalitat de la definició dels grups $H_{n-1}(-)_0$, es té el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(X;R) & \longrightarrow & H_n(X,Y;R) & \longrightarrow & H_n(Y;R)_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha' \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_n(X;R) & \longrightarrow & H_n(X,U;R) & \longrightarrow & H_n(U;R)_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

en el que, pel lema dels cinc, com el morfisme de l'esquerra és un isomorfisme i el de la dreta és injectiu, α és injectiu. Ara, per 1. i 2. de 5.3, $j_{A,x}[z] = 0$, per a tot $x \in X - Y$, i com $X - U \subseteq X - Y$, $j_{A,x}[z] = 0$, per a tot $x \in X - U$. Així, per 3. de 5.3, $\alpha[z] = 0$, i com α és injectiva, $[z] = 0$.

Provem 2. Sigui J un subconjunt finit de I . Prenent un entorn obert ENR del compacte $\cup_{i \in J} \overline{C}_i$, podem suposar que X és un ENR. Posem $Z = \{x_i; i \in J\}$, pel teorema d'excisió, $H_n(X, X - Z; R) \cong \oplus_{i \in J} H_n(X, X - x_i; R)$. Provarem que el morfisme $H_n(X,Y;R) \longrightarrow H_n(X, X - Z; R)$ és exhaustiu.

Sigui ara U un entorn obert de Y , del que Y és un retracte, disjunt amb Z , i tal que la composició $U \longrightarrow Y \longrightarrow X - Z$ és homòtopa a la inclusió $U \longrightarrow X - Z$.

En aquest cas, considerem el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_n(X; R) & \longrightarrow & H_n(X, Y; R) & \longrightarrow & H_n(Y; R)_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H_n(X; R) & \longrightarrow & H_n(X, U; R) & \xrightarrow{\gamma} & H_n(U; R)_0 \xrightarrow{\gamma'} 0 \\
 & & & & \searrow \beta & & \searrow \beta' \\
 & & 0 & \longrightarrow & H_n(X; R) & \longrightarrow & H_n(X, X - Z; R) \longrightarrow H_n(X - Z; R)
 \end{array}$$

Novament pel lema dels cinc, com els morfismes de l'esquerra són isomorfismes, el morfisme β , resp. γ , és exhaustiu si, i només si, ho és β' , resp. γ' .

Com $X - U \subseteq X - Y$, la component connexa K_i de x_i en $X - U$ està continguda en C_i , i, així, és compacta. A més, $K_i \neq K_j$, per a tot $i \neq j$. Donat que X és R -orientable, de 6.5 se segueix que el morfisme β és exhaustiu, i, en conseqüència, també ho és β' .

Com les aplicacions $U \xrightarrow{i} X - Z$ i $U \xrightarrow{\rho} Y \xrightarrow{j} X - Z$ són homòtopes, es té $i_* = j_* \rho_*$. Els morfismes β' i γ' , són les restriccions dels morfismes i_* , j_* , respectivament, als grups $H_{n-1}(-)_0$, provarem que ρ_* també es restringeix a aquests grups, i així, l'anterior identitat implicarà la corresponent igualtat per a les restriccions: $\beta' = \gamma' \rho_*$. En efecte, com les aplicacions $U \rightarrow Y \rightarrow X$ i $U \rightarrow X$ també són homòtopes, es té el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc}
 H_{n-1}(U; R) & \longrightarrow & H_{n-1}(X; R) \\
 \rho_* \downarrow & & \downarrow \\
 H_{n-1}(Y; R) & \longrightarrow & H_{n-1}(X; R)
 \end{array}$$

i, per tant, ρ_* induïx un morfisme $\rho_* : H_{n-1}(U; R)_0 \rightarrow H_{n-1}(Y; R)_0$.

De la igualtat $\beta' = \gamma' \rho_*$, i com β' és exhaustiva, se segueix que γ' és exhaustiva, i en definitiva, que γ és exhaustiva. \square

Teorema 9.6. *Sigui X una varietat topològica de dimensió n , \mathbf{k} -orientable, i Y un retracte d'entorn de X . Aleshores, $H_n(X, Y; \mathbf{k})$ és un espai vectorial*

de dimensió finita si, i només si, $X - Y$ té un nombre finit de components connexes relativament compactes. En aquest cas,

$$\dim_{\mathbf{k}} H_n(X, Y; \mathbf{k}) = \# \text{comp. connexes relativament compactes de } (X - Y).$$

Demostració. Se segueix immediatament del teorema anterior. \square

Teorema 9.7. *Sigui Y un ENR compacte contingut en \mathbf{S}^{n+1} , $Y \neq \mathbf{S}^{n+1}$. Aleshores, $\mathbf{S}^{n+1} - Y$ té $b_n(Y, \mathbf{k}) + 1$ components connexes, i, així, $b_n(Y, \mathbf{k})$ no depèn del cos \mathbf{k} .*

Demostració. Com Y és un ENR, Y és retracte d'un obert de \mathbf{R}^{n+1} , així, per 9.3, $H_{n+1}(Y; \mathbf{k}) = 0$, i es té la successió exacta d'homologia relativa

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{S}^{n+1}; \mathbf{k}) \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{S}^{n+1}, Y; \mathbf{k}) \longrightarrow H_n(Y, \mathbf{k}) \longrightarrow 0.$$

Com \mathbf{S}^{n+1} és compacte, totes les components connexes de $\mathbf{S}^{n+1} - Y$ són relativament compactes, i com \mathbf{S}^{n+1} és orientable, de 9.6 i de la successió exacta anterior, se segueix

$$\# \text{comp. connexes de } (\mathbf{S}^{n+1} - Y) = b_n(Y, \mathbf{k}) + 1. \quad \square$$

Els dos teoremes següents estenen a les varietats topològiques els teoremes de no separació i de separació provats al capítol 4 per les cel·les i les esferes.

Teorema 9.8 (general de no separació). *Sigui X una varietat topològica de dimensió n amb vora, compacta, connexa, i continguda en \mathbf{S}^{n+1} . Aleshores $\mathbf{S}^{n+1} - X$ és connex.*

Demostració. Per 8.3 i 5.1, $b_n(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$. Així, com X és un ENR, el nombre de components de $\mathbf{S}^{n+1} - X$ és 1 pel teorema anterior. \square

Teorema 9.9 (general de separació). *Sigui X una varietat topològica de dimensió n , compacta, connexa, i continguda en \mathbf{S}^{n+1} . Aleshores X és orientable i $\mathbf{S}^{n+1} - X$ té dues components connexes que tenen X com a frontera.*

Demostració. Com X és un ENR, i tota varietat és $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -orientable, pel teorema 9.7 es té

$$b_n(X, \mathbf{Q}) = b_n(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 1.$$

Així, $H_n(X, \mathbf{Z}) \neq 0$, i per 6.2, X és orientable.

També, per 9.7,

$$\# \text{comp. connexes de } (\mathbf{S}^{n+1} - X) = b_n(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) + 1 = 2.$$

Finalment, la prova de que la frontera d'aquestes components connexes és X , és la mateixa que la prova d'aquesta part del teorema de Jordan-Brouwer, 4.3 del capítol 4, tenint en compte el teorema de no separació precedent. \square

Hem vist a 2.5 que les superfícies topològiques compactes no orientables no admeten inclusions a \mathbf{R}^3 . Aquest resultat també es dedueix del següent corollari que resulta immediatament de l'anterior teorema de separació.

Corollari 9.10. *Si X és una varietat topològica de dimensió n , compacta i no orientable, aleshores X no és homeomorfa a un subespai de \mathbf{S}^{n+1} .* \square

Per exemple, l'espai projectiu \mathbf{P}^{2n} no és un subespai de l'esfera \mathbf{S}^{2n+1} .

Problemes

- (a) Proveu que l'espai quocient d'un polígon de r costats al identificar tots els costats segons la paraula a^r no es pot incloure a \mathbf{R}^3 .

(b) Sigui $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ una aplicació simplicial de grau $d \geq 2$. Proveu que l'espai que resulta d'adjuntar una n -cella a \mathbf{S}^{n-1} amb aplicació d'adjunció f , és un espai triangulable de dimensió n , que no es pot incloure en \mathbf{R}^{n+1} . A aquest espai se l'anomena *l'espai pseudo-projectiu*.
- Sigui X una varietat topològica de dimensió $n + 1$, compacta i connexa, i sigui $Y \subseteq X$ una varietat topològica compacta i connexa.

(a) Proveu que si la dimensió de Y és $< n$, aleshores $X - Y$ és connex.

(b) Proveu que si X és orientable, i $X - Y$ no és connex, aleshores Y és orientable.

3. Sigui X una superfície compacta i connexa.

(a) Proveu que si X és orientable, el primer nombre de Betti de X , $b_1(X)$, és l'enter més gran h tal que existeixen subconjunts Y de X , reunió de h circumferències, que no desconnecten X , és a dir, si $Y = \cup_{1 \leq i \leq h} Y_i$ amb $Y_i \cong \mathbf{S}^1$, i $Y_i \neq Y_j$, si $i \neq j$, aleshores $X - Y$ no és connex si $h > b_1(X)$, però pot-ser connex si $h \leq b_1(X)$. Aquesta caracterització de $b_1(X)$ és, de fet, la definició clàssica de Riemann d'aquest invariant, que l'introduí sota el nom d'*ordre de connexió* de la superfície.

(b) Doneu la caracterització anàloga a l'anterior del primer nombre de Betti d'una superfície no orientable.

Bibliografia

- [1] L. Ahlfors, L. Sario: *Riemann Surfaces*. Princeton Univ. Press, 1965.
- [2] E. Artin, H. Braun: *Introduction to Algebraic Topology*. Merrill, 1969.
- [3] C.A. Berenstein, R. Gay: *Complex variables*. Springer-Verlag, 1991.
- [4] R. Bott, L.W. Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [5] G. Bredon: *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1993.
- [6] G. Chartrand, L. Lesniak: *Graphs & Digraphs*. Wadsworth & Brooks, 1986.
- [7] J. Dieudonné: *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960*. Birkhäuser, 1989.
- [8] A. Dold: *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1972.
- [9] S. Eilenberg, N. Steenrod: *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton Univ. Press, 1952.
- [10] M.J. Greenberg, J.R. Harper: *Algebraic Topology: A First Course*. Addison-Wesley, 1981.
- [11] V. Guillemin, A. Pollack: *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [12] P. Hilton, S. Wylie: *Homology Theory*. Cambridge Univ. Press, 1960.
- [13] M. Hirsch: *Differential Topology*. Springer-Verlag, 1976.

- [14] W. Hurewicz, H. Wallman: *Dimension Theory*. Princeton Univ. Press, 1941.
- [15] C. Kosniowski: *A First Course in Algebraic Topology*. Cambridge Univ. Press, 1980; versió castellana: ed. Reverté 1989.
- [16] S. Lang: *Algebra*. Addison Wesley, (1965), 1993; versió castellana: ed. Aguilar, 1971.
- [17] S. Lefschetz: *Introduction to Topology*. Princeton Univ. Press, 1949.
- [18] W. Massey: *A basic course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1991; versió castellana: ed. Reverté, 1972.
- [19] E.E. Moise: *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer-Verlag, 1977.
- [20] J.R. Munkres: *Topology, a First Course*. Prentice-Hall, 1975.
- [21] J.R. Munkres: *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, 1984.
- [22] M.H.A. Newman: *Topology of Plane Sets of Points*. Cambridge Univ. Press, 1951.
- [23] J.C. Pont: *La topologie algébrique des origines à Poincaré*. Presses Univ. de France, 1974.
- [24] J. Rotman: *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1988.
- [25] H. Seifert, W. Threfall: *Lehrbuch der Topology*. Treubner, 1934; versió anglesa: *A Textbook of Topology*. Academic Press, 1980.
- [26] E. Spanier: *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966; Springer-Verlag, 1995.
- [27] J.W. Vick: *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. Academic Press, 1973; Springer-Verlag, 1994.

Índex de matèries

- abelianitzat d'un grup, 113
- ampolla de Klein, 28, 306
- aplicació
 - antipodal, 189
 - simplicial, 10, 25
- aproximació simplicial, 38
- arc
 - de Jordan, 242
 - quasi-poligonal, 251
 - salvatge de Artin-Fox, 182
- arracada hawaiana, 19
- baricentre, 29
- barret del capsigrany, 28
- bola topològica, 179
- cadena
 - \mathcal{U} -petita, 123
 - simplicial, 54
 - singular, 100
- camí de sortida, 249
- cara
 - d'un complex simplicial, 6
 - d'un políedre abstracte, 24
 - d'un símplex, 4
- característica de Euler, 8, 106
- categoria, 47
- cella, 179
 - adjunció d'una, 203
- cicles
 - d'un complex de cadenes, 65
 - homòlegs, 57
 - simplicials, 57
- classe fonamental, 303
 - de les varietats amb vora, 313
- classificació dels grups abelians finit generats, 60
- complex
 - simplicial
 - definició, 4
 - generat per símplexs, 6
 - infinit, 5
- complex cellular, 43
- complex de cadenes
 - contràctil, 77
 - contràctil en grau $> n$, 77
 - de R -mòduls, 64
 - relatives simplicials, 86
 - relatives singulars, 137
 - simplicials, 56
 - simplicials amb coeficients en un anell, 65
 - singulars d'un espai topològic, 102
- complex esfèric, 210
- complex simplicial
 - ordenat, 54

- talla d'un, 31
- con, 16, 80, 125
 - d'un símplex singular afí, 125
- coordenades baricèntriques, 2
- corba, 19
 - amb vora, 171
 - de Jordan, 242
 - poligonal, 247
- cub de Hilbert, 137
- dimensió
 - d'un complex simplicial, 7
 - d'un espai triangulable, 173
 - d'un símplex, 4
- domini de Jordan, 242
- equivalència de categories, 51
- equivalència homotòpica de complexs, 78
- esferes
 - homologia simplicial, 88
 - homologia singular, 133
 - orientabilitat, 275
- espai
 - homogeni, 20
 - ENR, 294
 - lenticular, 18
 - homologia singular, 211
 - orientabilitat, 306
 - triangulabilitat, 37
 - projectiu, 17
 - homologia $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, 199
 - homologia singular, 206, 210
 - orientabilitat, 305, 306
 - triangulabilitat, 35, 37
 - triangulable, 17
- esquelet p -dimensional, 13
- estrella
 - d'un subcomplex, 16
 - d'un vèrtex, 13
 - oberta, 14
- fórmula
 - de Euler, 45
 - de les traces de Hopf, 212
- functor, 49
- graf, 174
- grau
 - amb coeficients en R , 195
 - d'aplicacions d'esferes, 189
 - d'una aplicació contínua, 307
- grup de Lie, 279
- grup fonamental, 110
- grups
 - d'homologia simplicial, *Veieu* homologia simplicial
- homologia
 - d'un complex de cadenes, 65
 - reduïda, 176
 - relativa simplicial, 86
 - relativa singular, 138
 - simplicial, 57
 - simplicial amb coeficients en R , 66
 - singular, 102
- homologia local, 167
- homotopia
 - relativa, 142
- homotopia de morfismes, 76
- isomorfisme, 50
- lema

- dels cinc, 68
 - dels nou, 85
- lletra de primera o segona espècie, 237
- mòdul, 90
 - lliure, 91
- morfisme
 - de complexs de cadenes, 69
 - de connexió, 83
 - induit per una aplicació contínua, 105
 - induit per una aplicació simplicial, 71
- morfismes homòtops, 76
- nombre
 - de Betti, 60, 106
 - de Lebesgue, 38
 - de Lefschetz, 211, 213, 292, 294
- nus d'un vèrtex, 14
- operador
 - de subdivisió baricèntrica, 125
 - prisma, 118
 - vora, 55, 101
- operador diferencial, 64
- orientació
 - d'un grup lliure de rang 1, 273
 - grup abelià, 273
 - local, 273
- orientacions compatibles, 274
- parametrització local, 187
- parell
 - triangulable, 22
- políedre
 - abstracte, 24
 - cellular, 43
 - simplicial geomètric, 5
- polítop convex, 42
- producte tensorial, 93
- propietat del punt fix, 136
- punt accessible, 250
- punt fix
 - d'un flux, 293
 - d'una aplicació contínua, 191
- realització geomètrica, 25
- recobridor orientable, 279
- retracte d'entorn, 316
- símplex, 2
 - diàmetre d'un, 31
 - estàndard, 4
 - homologia simplicial, 79
 - interior d'un, 10
 - obert, 10
 - singular, 100
- secció transversal, 249
- simplicialment connex, 61
- sinus del topòleg, 19
- subcomplex simplicial, 12
 - ple, 12
- subdivisió, 37
 - baricèntrica, 30
- subespai
 - dòcil, 23
 - excisiu, 146
 - salvatge, 23
- successió exacta, 64
 - d'homologia d'un parell simplicial, 87
 - d'homologia relativa d'un parell, 139

- d'un triple, 142
- de complexs, 81
- de Mayer-Vietoris en homologia reduïda, 178
- de Mayer-Vietoris en homologia relativa, 150
- de Mayer-Vietoris en homologia simplicial, 89
- de Mayer-Vietoris en homologia singular, 131
- llarga d'homologia, 83
- suma connexa, 265
 - homologia d'una, 315
 - orientabilitat, 315
- superfície, 19
 - amb vora, 171
 - associada a una paraula, 227
 - estàndard, 229
 - amb vora, 233
 - homologia d'una, 229
 - poligonal, 226
- suport
 - d'un punt d'un políedre, 10
 - d'una cadena, 182
- suspensió, 175
- teorema
 - d'anul·lació, 298
 - del grau, 311
 - de l'homologia, 311
 - d'aproximació simplicial, 38
 - d'excisió, 146
 - d'invariància de la característica de Euler, 67
 - d'invariància de la dimensió, 169
 - d'invariància de la vora, 171
 - d'invariància del domini, 187
 - d'invariància homotòpica, 116
 - de Borsuk-Ulam, 196
 - de classificació de corbes, 221
 - de classificació de superfícies, 264, 282
 - de comparació, 151
 - de morfismes, 160
 - de comparació general, 162
 - de Jordan-Brouwer, 185
 - de la corona, 244
 - de les cadenes petites, 124
 - de Lusternik-Schnirelmann, 202
 - de no retracció, 312, 315
 - de no separació, 179
 - de Poincaré, 113
 - de Radó, 260
 - de Schönflies, 242
 - de Schönflies poligonal, 247
 - de separació, 183
 - del punt fix de Brouwer, 135
 - del punt fix de Lefschetz, 214, 292
 - del sandwich, 203
- tipus d'homotopia d'un espai topològic, 116
- tor, 26
 - n -dimensional, 136
- tor n -dimensional, 20
- transformació natural, 50
- triangulació, 17
- vèrtex, 73
 - d'un políedre abstracte, 24
 - d'un símplex, 2
- varietat topològica, 19

- amb vora, 171
 - orientable, 312
- orientable, 275

- vores

- d'un complex de cadenes, 65
 - simplicials, 57