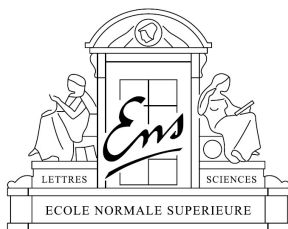


# PROJECTEUR DE SZEGÖ ET THÉORÈME DE KODAIRA

ALIX DELEPORTE



Mémoire de Master  
Septembre 2015 – version alpha



Alix Deleporte : *Projecteur de Szegő et théorème de Kodaira*, Mémoire de Master, © Septembre 2015

SUPERVISEUR :  
Nalini Anantharaman

ETABLISSEMENT D'ACCUEIL :  
Université de Strasbourg

## RÉSUMÉ

---

Les fonctions holomorphes dans un ouvert pseudoconvexe d'une variété complexe, lisses jusqu'au bord, voient leur trace vérifier une certaine EDP, appelée équation de Cauchy-Riemann ; le projecteur de Szegő est alors défini comme le projecteur orthogonal, dans l'espace des fonctions  $L^2$  sur le bord, sur le noyau de cette EDP (appelé espace de Hardy).

Boutet de Monvel et Sjöstrand ont établi que ce projecteur possède une structure analytique qui s'exprime selon un Opérateur Intégral de Fourier, avec une phase bien déterminée. Ceci permet de définir et d'étudier les opérateurs de Toeplitz, qui sont la restriction d'opérateurs pseudo-différentiels à l'espace de Hardy. Sous condition d'invariance par rapport à une action de  $S^1$ , la structure de Toeplitz donne un moyen naturel de quantification sur la variété quotient ; la caractérisation analytique permet alors une étude quantitative du spectre du hamiltonien quantique.



# TABLE DES MATIÈRES

1	OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER	1
1.1	Intégrales à phases . . . . .	1
1.1.1	Le lemme de phase non stationnaire . . . . .	1
1.1.2	Le théorème de phase stationnaire . . . . .	4
	Théorème 1 (De phase stationnaire) . . . . .	4
1.1.3	Classes d'intégrales à phases . . . . .	12
1.2	Opérateurs intégraux de Fourier à phase réelle . . . . .	15
1.2.1	Opérateurs pseudo-différentiels . . . . .	15
1.2.2	Opérations sur les opérateurs pseudodifférentiels	16
1.2.3	Front d'onde . . . . .	19
2	PROJECTEUR DE SZEGŐ	21
2.1	Espace de Hardy . . . . .	21
2.1.1	Un exemple : $\Delta$ , le disque unité de $\mathbb{C}$ . . . . .	21
2.1.2	Le cas plus général . . . . .	24
2.2	Structure du projecteur de Szegő . . . . .	26
	Théorème 2 (Boutet-Sjostrand) . . . . .	26
2.2.1	Construction d'un projecteur approximatif . . . . .	26
2.2.2	Identification avec le projecteur exact . . . . .	34
2.2.3	Développement asymptotique du symbole . . . . .	37
2.3	Fibrés positifs sur une variété kählerienne compacte . . . . .	41
2.3.1	Sections holomorphes de fibrés positifs . . . . .	41
	Théorème 3 (Zelditch) . . . . .	41
	Théorème 4 (Kodaira) . . . . .	41
2.3.2	Espaces de Hardy équivariants . . . . .	41
2.3.3	La preuve . . . . .	43
3	STRUCTURE DE TOEPLITZ	45
3.1	Construction du projecteur approximatif . . . . .	45
3.1.1	Des bonnes coordonnées locales . . . . .	45
3.1.2	Description microlocale du symbole . . . . .	46
3.1.3	Définition de l'idéal . . . . .	47
3.1.4	Paramétrisation de l'idéal . . . . .	47
3.1.5	Construction d'un projecteur de Szegő . . . . .	48
3.1.6	Opérateur pseudo-différentiel associé à $S$ . . . . .	48
3.2	Asymptotiques dans l'espace de Hardy . . . . .	49
3.2.1	Comportement du noyau près de la diagonale . . . . .	50
	Théorème 5 (Shiffman-Zelditch) . . . . .	50
3.2.2	Application à Kodaira et à Tian . . . . .	51
A	APPENDICE : NOTIONS DE GÉOMÉTRIE COMPLEXE	53
A.1	Structures de Cauchy-Riemann . . . . .	53
A.1.1	Complexification de l'espace tangent et définitions	53
A.1.2	Equation de Cauchy-Riemann et valeur au bord de fonctions holomorphes . . . . .	55

A.1.3	Structure presque complexe et presque Cauchy- Riemann . . . . .	56
	Théorème 6 (Newlander-Nirenberg) . . . . .	57
A.2	Pseudoconvexité . . . . .	57
A.2.1	Fonctions pluri-sous-harmoniques . . . . .	58
A.2.2	Ouverts pseudoconvexes . . . . .	60
A.2.3	Pseudoconvexité et Frontière . . . . .	61
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	63

# OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER

---

## 1.1 INTÉGRALES À PHASES

### 1.1.1 Le lemme de phase non stationnaire

Dans cette section, on établit un lemme d'importance fondamentale dans la construction et l'étude des intégrales dont l'un des termes oscille très rapidement. On veut étudier le comportement asymptotique, quand  $t \rightarrow +\infty$ , des intégrales du type

$$\int u e^{it\varphi},$$

où les fonctions  $u$  et  $\varphi$  sont lisses, et où évidemment  $\operatorname{Im} \varphi \geq 0$ .

Le lemme suivant montre que les seuls points intéressants sont ceux où  $d\varphi = 0$  et où  $\operatorname{Im} \varphi = 0$  :

**Lemme 1.1** (Phase non stationnaire). Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ , ainsi que  $X$  un voisinage de  $K$ , et soit  $j$  et  $k$  des entiers naturels. Soit  $\varphi \in C^{k+1}(X)$  telle que  $\operatorname{Im} \varphi \geq 0$ . Alors il existe une constante  $C$ , telle que pour tout  $t > 0$  et  $u \in C_0^k(K)$  :

$$t^{j+k} \left| \int e^{it\varphi(x)} u(x) (\operatorname{Im} \varphi(x))^j dx \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K \left[ |D^\alpha u| (|\varphi'|^2 + \operatorname{Im} \varphi)^{|\alpha|/2-k} \right]$$

De plus  $C$  est bornée lorsque  $\varphi$  varie dans un domaine borné de  $C^{k+1}(X)$ .

#### 1.1.1.1 Preuve du lemme de phase non-stationnaire

On suit ici la preuve de Hörmander, exposée dans [Hör03].

On introduit, pour des besoins de lisibilité, la notation suivante. Lorsque  $f \in C^l$ , on note, pour  $x$  dans le domaine de définition de  $f$  :

$$|f|_l(x) := \sum_{|\alpha|=l} |\partial^\alpha f|(x)$$

Lorsque  $k = 0$ , l'inégalité à démontrer devient :

$$\left| \int_K u(x) t^j (\operatorname{Im} \varphi(x))^j e^{it\varphi(x)} dx \right| \stackrel{?}{\leq} C(\varphi) \sup |u|.$$

Or la fonction  $t \mapsto t^j e^{-t}$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ , donc en fait  $C$  ne dépend même pas de  $\varphi$ .

Pour prouver le cas général par récurrence sur  $k$ , on raisonne par intégrations par parties. Posons  $N = |\varphi'|^2 + \text{Im} \varphi$ . En remplaçant  $\varphi$  par  $\varphi + i\epsilon$ , on peut supposer que  $\text{Im} N > 0$ , sous réserve de montrer que  $C$  ne dépend pas de  $\epsilon$ .

Alors on a :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N}{N} \\ &= \frac{\text{Im} \varphi}{N} + \sum_{v=1}^n \frac{(\partial_v \bar{\varphi})(\partial_v \varphi)}{N} \end{aligned}$$

En suivant cette décomposition, on définit

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{u}{N} \\ u_v &= \frac{u \partial_v \bar{\varphi}}{N}, \end{aligned}$$

et alors :

$$u = \sum_{v=1}^n u_v \partial_v \varphi + u_0 \text{Im} \varphi$$

Cette écriture est motivée par le fait que  $it(\partial_v \varphi)e^{it\varphi} = \partial_v e^{it\varphi}$ .

On a donc, en remplaçant  $u$  et en effectuant une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int u (\text{Im} \varphi)^j e^{it\varphi} &= \int u_0 (\text{Im} \varphi)^{j+1} e^{it\varphi} \\ &+ \frac{i}{t} \sum_{v=1}^n \left[ \int (\partial_v u_v) (\text{Im} \varphi)^j e^{it\varphi} + j \int u_v (\partial_v \text{Im} \varphi) (\text{Im} \varphi)^{j-1} e^{it\varphi} \right]. \end{aligned}$$

Commençons par traiter le cas  $j = 0$ . On a alors, par l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} t^{j+k} \left| \int u (\text{Im} \varphi)^j e^{it\varphi} \right| &\leq C \left[ \sum_{|\alpha| \leq k-1} \sup |D^\alpha u_0| N^{|\alpha|/2-k+1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha u_v| N^{|\alpha|/2-k+1} \right] \end{aligned}$$

Où  $C$  est bornée lorsque  $f$  varie dans un domaine borné.

En remplaçant  $u_0$  et  $u_v$  par leur valeur, il ne reste plus qu'à montrer que les puissances se compensent, c'est-à-dire, pour tout  $l$  :

$$\sqrt{N}|u_v|_l + \sqrt{N}|u_0|_l \stackrel{?}{\leq} C \sum_{|\alpha| \leq l} |D^\alpha u| N^{(|\alpha|-l)/2}.$$



Or, pour  $l = 0$ , on a  $\sqrt{N}|u/N\partial_v\varphi| + N|u/N| \leq (\sqrt{N} + 1)|u|$ . Puis par récurrence, pour  $l$  non nul, si  $|\alpha| = l$ , alors en appliquant  $\partial^\alpha$  à l'équation  $Nu_v = u\partial_v\bar{\varphi}$ , et en contrôlant toutes les dérivées d'ordre plus grand que 2 de  $N$  et de  $\varphi$  par des constantes,

$$N|u_v|_l \leq C \left( |N|_1 |u_v|_{l-1} + \sum_{l'=0}^{l-2} |u_v|_{l'} + |u|_l |\varphi|_1 + \sum_{l'=0}^{l-1} |u|_{l'} \right)$$

Pour évaluer  $|N|_1$  et  $|\varphi|_1$ , on se sert du :

**Lemme 1.2.** Si  $g \in C^2(]-1, 1[)$  vérifie  $g \geq 0$ , alors on a :

$$|g'(0)|^2 \leq g(0)(g(0) + 2\sup|g''|)$$

*Démonstration.* (du lemme) En notant  $M = \sup|g''|$  on a, pour tout  $|x| \leq 1$ , que  $g(0) + xg'(0) + Mx^2/2 \geq g(x) \geq 0$ , et l'étude des racines de ce polynôme du second degré nous fournit le résultat demandé.  $\square$

En majorant à nouveau  $|N|_2$  et  $|\varphi|_2$  par des constantes qui restent bornées lorsque  $\varphi$  varie dans un domaine borné de  $C^{l+1}$ , on trouve que  $|N|_1 \leq CN^{1/2}$ , et la même propriété pour  $\varphi$ . Alors le développement précédent devient :

$$N|u_v|_l \leq C \left( N^{1/2} |u_v|_{l-1} + \sum_{r=0}^{l-2} |u_v|_r + |u|_l |\varphi|^{1/2} + \sum_{r=0}^{l-1} |u|_r \right)$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence, car :

$$\begin{aligned} N^{1/2} |u_v|_{l-1} &\leq C \sum_{r=0}^{l-1} |u|_r N^{(r-l+1)/2} \\ |u_v|_r &\leq C \sum_{s=0}^r |u|_s N^{(s-r-1)/2} \\ &\leq C \sum_{s=0}^{n-2} |u|_s N^{(s-l+1)/2} \end{aligned}$$

En injectant ces résultats et en divisant par  $N^{1/2}$ , on obtient le résultat désiré. Pour  $u_0$ , la méthode est la même, mais il n'y a pas de termes en  $\varphi$ .

Ceci conclut le cas  $j = 0$ . On peut alors raisonner par récurrence sur  $j$ . Si on suppose que le résultat est vrai pour  $(k, j-1)$ , alors on peut traiter le dernier terme de la décomposition, qui est contrôlé par :

$$C \sum_{v=1}^n \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha(u_v \partial_v \operatorname{Im} \varphi)| N^{|\alpha|/2-k}$$

On peut alors développer  $|u_v \partial_v \operatorname{Im} \varphi|_l$  pour le contrôler en utilisant à nouveau le lemme 1.2, exactement comme précédemment.

Ceci conclut la preuve du lemme 1.1.

### 1.1.2 Le théorème de phase stationnaire

Nous nous penchons ici sur le comportement des intégrales oscillantes, mais cette fois-ci, au voisinage des points  $x_0$  qui vérifient  $\operatorname{Im} \varphi(x_0) = 0$  et  $d\varphi(x_0) = 0$ . On appelle *point critique* un tel point  $x_0$ . On suppose toujours ici que  $\varphi$  est *positive*, c'est-à-dire vérifie  $\operatorname{Im} \varphi \geq 0$ , et que tous les points critiques de  $\varphi$  sont *non-dégénérés*, et on entend par là que  $\operatorname{Hess} \varphi$  est non dégénérée. L'ensemble des points critiques est alors discret (et son intersection avec  $K$  est finie), ce qui permet de raisonner par partition de l'unité.

Remarquons que les deux conditions de positivité et de non dégénérescence impliquent que  $\operatorname{Sp}(i \operatorname{Hess} \varphi(x_0)) \subset z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \leq 0$ . Sur ce demi-plan, il existe une racine carrée. On choisit celle qui est à valeurs dans  $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ , ce qui assure un sens univoque à l'écriture  $\sqrt{\det i \operatorname{Hess} \varphi(0)}$ .

On peut alors énoncer le

**Théorème 1** (De phase stationnaire). Soit  $\varphi \in C^{2j+1}(\operatorname{Vois}(K))$  telle que 0 pour seul point critique dans le compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Il existe alors une famille  $(C_l)_{0 \leq l \leq j}$ , d'opérateurs différentiels de degré au plus  $2l$ , tels que, pour toute fonction  $u \in C_c^{2j+1}(K)$ , lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , on ait :

$$\int_K e^{it\varphi} u = t^{-n/2} \sum_{l=0}^j t^{-l} C_l u(0) + O\left(t^{-(n+1)/2-j} \|u\|_{W^{2j+1,\infty}}\right).$$

$$\text{En particulier on a } C_0 = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det i \operatorname{Hess} \varphi(0)}}.$$

#### 1.1.2.1 Preuve dans le cas d'une phase quadratique

Nous commençons par traiter le cas où  $\varphi(x) = iq(y, y)$ , où  $q$  est une forme bilinéaire définie positive ;  $\varphi$  est une phase quadratique imaginaire pure.

Quitte à faire un changement de variables par une matrice orthogonale, on peut supposer que

$$q(y, y) = \sum_v \lambda_v \frac{y_v^2}{2}$$

Soit maintenant  $u \in C_c^{2j+1}(K)$ . On dispose, sur tout  $\mathbb{R}^n$ , de l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$u(x) = u(0) + \sum_{k=1}^{2j} U_k(x) + R(x)$$

$$|R(x)| \leq \sup(|u|_{2j+1}) |x|^{2j+1}$$

où chaque  $U_k$  est  $k$ -multilinéaire. On peut alors faire le changement de variable  $y = x/\sqrt{t}$ , et remplacer  $u$  par le développement précédent. Par parité, les  $U_k$  pour  $k$  impairs ne vont pas contribuer à l'intégrale. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\varphi} u = t^{-n/2} \sum_{l=0}^j t^{-l} \int e^{-q(y,y)} U_{2l}(y) dy + O\left(t^{-(n+1)/2-j} \sup |u|_{2j+1}\right).$$

Les  $U_{2l}$  ne dépendent que des dérivées d'ordre  $2l$  de  $u$  en 0, donc on a bien la forme demandée. Toutefois, on va établir explicitement quels sont les opérateurs différentiels qui entrent en jeu.

Par intégrations par parties successives, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda \frac{x^2}{2}} x^{2l} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^{2l+1}}} \frac{(2l)!}{2^l l!}.$$

Par ailleurs, on peut expliciter les fonctions  $U_l$  par la formule de Taylor :

$$U_{2l}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha|=2l} \partial^\alpha u(0) \prod_{v=1}^n \frac{x_v^{\alpha_v}}{\alpha_v!}$$

Seuls les  $\alpha$  dont tous les coefficients sont pairs vont contribuer à l'intégrale. En conjuguant par la transformée de Fourier, on peut donc écrire :

$$\int e^{-q(y,y)} U_{2l}(y) dy = \sqrt{\frac{\pi^n}{\prod \lambda_v}} \sum_{|\alpha|=l} \int (i\xi)^{2\alpha} \hat{u}(\xi) d\xi \prod_{v=1}^n \frac{1}{(\lambda_v)^{\alpha_v} \alpha_v!}$$

On va synthétiser ce développement à l'aide de deux notations. On note  $P_l$  le projecteur qui à une fonction de classe  $C^\infty$  associe les termes d'ordre  $l$  de son développement de Taylor, on a donc  $U_{2l} = P_{2l}u$ . Par ailleurs, si  $Q = \sum Q_\alpha X^\alpha$  est un polynôme, on note  $Q(D)$  l'opérateur différentiel  $\sum Q_\alpha (i\partial)^\alpha$ , et alors on a :

$$\int e^{-q(y,y)} U_{2l}(y) dy = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det \text{Hess } u(0)}} P_j \left( e^{-\frac{1}{2} q^{-1}(D,D)} \right) u(0)$$

Nous avons donc une expression explicite de  $C_l$ . On constate qu'ici, les  $C_l$  ne font intervenir que des dérivées d'ordre exactement  $l$ .

Nous concluons par une remarque importante.

**Remarque 1.3.** Les expressions à gauche et à droite dans l'équation (1.1.2.1) sont analytiques par rapport à  $q$ , et admettent chacune une unique extension holomorphe dans l'ensemble des formes quadratiques complexes à partie réelle strictement positive. A droite, cela est dû aux

considérations sur la racine du déterminant que nous avons déjà évoquées. A gauche, l'ajout d'une partie réelle ne change pas la convergence de l'intégrale et on peut utiliser le théorème de convergence dominée.

Tout ceci a pour conséquence que lesdites extensions holomorphes sont égales. On vient donc de démontrer le lemme de phase quadratique pour des phases complexes dont la partie imaginaire pure est non dégénérée.

Il reste à examiner le cas où la  $\text{Im}\varphi$  est seulement positive (et pas définie positive comme précédemment). Seule l'intégrale sur  $\text{Ker Im}\varphi$  nous intéresse, puisqu'on peut calculer l'intégrale sur le complémentaire orthogonal par la méthode précédente, et qu'on dispose alors de bonnes conditions de domination pour assurer un comportement régulier de cette intégrale par rapport au paramètre dans  $\text{Ker Im}\varphi$ . Autrement dit, l'examen des phases quadratiques réelles convient.

On ne peut espérer qu'un contrôle asymptotique en temps si on ne perd pas de dérivées. En effet, la suite des fonctions définies par

$$u_n(x) = \chi(x)e^{-inq(x,x)}$$

est un contre-exemple à la proposition :

$$\forall(K, \varphi) \exists(C, t_0) \forall u \in \mathbb{C}_c^\infty(K), t > t_0 \left| \int_K e^{it\varphi} u \right| \leq Ct^{-n/2} \|u\|_\infty$$

On considère donc  $\varphi(x) = q(x, x)$  une phase réelle, avec  $\det \varphi \neq 0$ . La première étape consiste à calculer la transformée de Fourier de la fonction  $x \mapsto e^{itq(x,x)}$ . Pour cela on se ramène, par un changement de variables orthogonal, au cas où  $q$  est diagonale ; on peut alors séparer les variables. Il n'y a plus qu'à reporter le résultat bien connu :

$$\mathcal{F}\left(x \mapsto e^{i\frac{x^2}{2}}\right) : \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i}} \xi \mapsto e^{i\frac{\xi^2}{2}}$$

Et on obtient alors :

$$\mathcal{F}\left(x \mapsto e^{itq(x,x)}\right) : \xi \mapsto \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{t^n \det(iq)}} e^{i\frac{q^{-1}(x,x)}{4t}}$$

La seconde étape est d'appliquer ce calcul à notre problème. Pour  $u \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , la fonction  $f_t = e^{it\varphi} u$  est en particulier dans la classe de Schwartz, donc on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\varphi} u = \hat{f}_t(0)$$

Soit un entier  $j \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $t$  fixé, on peut développer l'exponentielle en série entière, et écrire de manière licite :

$$\begin{aligned} \hat{f}_t(0) = & t^{-n/2} \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det iq}} \left[ \sum_{k=0}^j \frac{t^{-k}}{k!} \left( \frac{(-1)^n}{4} q^{-1}(D, D) \right)^k u(0) \right. \\ & \left. + t^{-j-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{(k+j+1)!} \int (iq(x, x)/4)^k (iq(x, x)/4)^{j+1} u(x) dx \right] \end{aligned}$$

On voit apparaître les opérateurs différentiels qu'on recherche :

$$\frac{(-1)^{nk} \pi^{n/2}}{4^k k! \sqrt{\det iq}} \left( q^{-1}(D, D) \right)^k \quad (1)$$

Les autres termes peuvent être sommés, et on a un contrôle dans l'espace de Sobolev  $H^{-n/2}$  :

$$\begin{aligned} \left| t^{-j-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{(k+j+1)!} \int (iq/4)^k (iq/4)^{j+1} u \right| & \leq C(j, q) \|u\|_{W^{2, j+1+n/2}} \\ & \leq C(j, q, K) \|u\|_{W^{\infty, j+1+n/2}} \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve, mais avec une perte de dérivées.

### 1.1.2.2 Preuve affaiblie dans le cas général

À partir du lemme de phase quadratique, il existe deux manières de démontrer le cas général. La première est d'utiliser le lemme de Morse pour se ramener, après un changement de variable, à une phase quadratique. Cette méthode présente néanmoins de nombreuses difficultés supplémentaires dans le cas d'une phase complexe puisqu'au lieu d'intégrer le long de l'axe réel, on intègre maintenant sur une courbe tangente à l'axe réel en l'origine. Une preuve détaillée est explicitée dans [MS75].

La seconde est d'isoler, parmi la phase, le terme quadratique du reste, et c'est cette méthode que nous allons détailler.

Nous allons démontrer un résultat plus faible que le théorème originel, où on contrôle par un nombre beaucoup plus important de dérivées.

**Proposition 1.4** (Phase stationnaire faible). On suppose que  $\varphi \in C^{2j+1}(\text{Vois}(K))$  a 0 pour seul point critique dans le compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Il existe alors une famille  $(C_l)_{0 \leq l \leq j}$ , d'opérateurs différentiels de degré au plus  $2l$ , tels que, pour toute fonction  $u \in C_c^{2j+1}(K)$ , lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , on ait :

$$\int_K e^{it\varphi} u = t^{-n/2} \sum_{l=0}^j t^{-l} C_l u(0) + O\left(t^{-(n+1)/2-j} \|u\|_{W^{6j+1+n/2, \infty}}\right).$$

$$\text{En particulier on a } C_0 = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det i \text{Hess } \varphi(0)}}.$$

**Démonstration.** Soit  $\varphi \in \mathbb{C}^{j+1}(\text{Vois}(\mathbf{K}))$  une phase positive dont zéro est le seul point critique non dégénéré. On décompose :

$$\varphi(x) = iq(x) + r(x),$$

où  $q$  est une forme quadratique, ou bien de partie réelle strictement positive, ou bien de partie réelle positive et de partie imaginaire non dégénérée, et ou  $r$  vérifie :

$$\forall |\alpha| \leq 2, \partial^\alpha r(0) = 0.$$

L'utilisation directe du lemme de phase quadratique ne permet pas de conclure car on a besoin de savoir que la partie imaginaire de la phase ne s'annule pas ailleurs qu'en 0. On va donc découper l'intégrale à estimer en une intégrale sur  $\text{Vois}(\mathbf{K}) \cap B(0, t^{-1/3})$  et une intégrale sur  $\text{Vois}(\mathbf{K}) \setminus B(0, t^{-1/3})$ .

Le second morceau est le plus simple à estimer. On sait qu'il existe  $\epsilon$  tel que sur  $B(0, \epsilon)$ , on ait  $|\varphi - iq| \leq \frac{1}{4}q$ . En particulier, il existe une constante  $C$  telle que, pour  $t$  grand, sur  $B(0, \epsilon) \setminus B(0, t^{-1/3})$ , on ait :

$$\text{Im } \varphi + |\varphi|^2 > Ct^{-2/3}$$

Soient alors  $j \in \mathbb{N}$ , on peut estimer :

$$\begin{aligned} & \int_{B(0, \epsilon) \setminus B(0, t^{-1/3})} e^{i\varphi(x)} u(x) dx \\ & \leq Ct^{-2j-1} \sum_{|\alpha| \leq j+1} \sup |D^\alpha u| (\text{Im } \varphi + |\varphi'|^2)^{|\alpha|/2-2j-1} \\ & \leq Ct^{-1/3(2j+1)} \|u\|_{W^{j+1, \infty}} \end{aligned}$$

Ici, on constate déjà une perte de dérivées.

Sur  $\text{Vois}(\mathbf{K}) \setminus B(0, \epsilon)$ , on a  $\text{Im } \varphi + |\varphi|^2 > C$ , donc le lemme de phase non stationnaire s'applique directement et on a

$$\int_{\text{Vois}(\mathbf{K}) \setminus B(0, \epsilon)} e^{it\varphi} u \leq Ct^{-j-(n+1)/2} \|u\|_{W^{j+(n+1)/2, \infty}}.$$

Estimons à présent le premier morceau. On réalise d'abord un développement de  $e^{itr(x)}$  en série entière en  $t$  ; l'interversion suivante est licite pour tout  $t$ .

$$\int_{B(0, t^{-1/3})} e^{it\varphi} u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{B(0, t^{-1/3})} e^{-tq(x)} (ir(x))^k u(x) dx$$

Traitons chacune de ces intégrales séparément, de la même manière que dans le cas quadratique. On décompose d'abord :

$$(ir(x))^k u(x) = \sum_{l=3k}^{2j} U_{l,k}(x) + R_k(x).$$

Ici, chaque  $U_{l,k}$  est homogène de degré  $j$ , et s'exprime uniquement en fonction de  $\varphi$  et des dérivées de  $u$  en 0, et on a de plus

$$|R(x)| \leq C(j) \sup(|r^k u|_{2j+1}) x^{2j+1}$$

On réalise alors un changement de variable  $y = x\sqrt{t}$ , pour arriver à la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,t^{-1/3})} e^{-tq(x)} (ir(x))^k u(x) dx \\ = t^{-n/2} \sum_{l=3k}^{2j} \left( t^{-l/2} \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} U_{l,k}(y) dy \right. \\ \left. + \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} R_k(y/\sqrt{t}) dy \right) \end{aligned}$$

D'une part, on a, pour tous  $k, l$ , pour la même raison que précédemment :

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} U_{l,k}(y) dy = O\left(t^{-j-(n+1)/2} |r^k u|_l(0)\right)$$

On peut donc remplacer sans problème un nombre fini de termes :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,t^{-1/3})} e^{-tq(x)} u(x) dx \\ = t^{-n/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left( \sum_{l=3k}^{2j} t^{-l/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(y)} U_{l,k}(y) dy \right. \\ \left. + \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \right) \\ + O\left(t^{-j-(n+1)/2} \|u\|_{W^{2j+1,\infty}}\right) \end{aligned}$$

Après élimination des termes avec  $l$  impairs, on peut regrouper ces intégrales, dont on connaît un développement exact en fonction des dérivées de  $u$  en 0. On constate que seules des puissances entières de  $t$  apparaissent, et par ailleurs, dans le terme en  $t^m$ , on dérive  $u$  au plus  $2m$  fois. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,t^{-1/3})} e^{-tq(x)} u(x) dx \\ = t^{-n/2} \sum_{m=0}^{2j} A_m u(0) \\ + t^{-n/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \\ + O\left(t^{-j-(n+1)/2} \|u\|_{W^{2j+1,\infty}}\right) \end{aligned}$$

D'autre part, souvenons-nous maintenant que :

$$|R(x)| \leq C(j) \sup(|r^k u|_{2j+1}) |x|^{2j+1}$$

Traisons maintenant le cas où  $\Re \varphi$  est non dégénérée. L'autre cas se traite par un argument de transformée de Fourier, similaire à la preuve du lemme de phase quadratique.

Par une disjonction de cas, si  $2j + 1 \geq 3k$ , alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{t^k}{k!} \int_{B(0, t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \right| \\ \leq C(j) \|u\|_{W^{2j+1, \infty}} t^{-j-1/2} \int_{B(0, t^{1/6})} e^{-q(y)} |y|^{2j+1} dy \end{aligned}$$

On constate qu'avec cette méthode, on perd des dérivées :

$$\left| \frac{t^k}{k!} \int_{B(0, t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \right| \leq C(j) \|u\|_{W^{2j+1, \infty}} t^{-j/3-1/6}$$

De même, si  $2j + 1 < 3k$ , alors on a  $|r^k u|(x)_{2j+1} \leq Cx^{3k-2j-1}$ , donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{t^k}{k!} \int_{B(0, t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \right| \\ \leq C(j) \|u\|_{W^{2j+1, \infty}} t^{1/3(2j+1-3k)} t^{-j-1/2} \int_{B(0, t^{1/6})} e^{-q(y)} |y|^{2j+1} dy \end{aligned}$$

Et on a la même perte de dérivées :

$$\left| \frac{t^k}{k!} \int_{B(0, t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \right| \leq \frac{C(j)}{k!} \|u\|_{W^{2j+1, \infty}} t^{-j/3-1/6}$$

Ce terme d'erreur est plus grand que certains des termes du développement ; en éliminant ces termes et en remplaçant  $j$  par  $3j$ , on conclut la démonstration de la proposition 1.4.  $\square$

**Remarque 1.5.** Le théorème 1 est démontré dans [Hör03], en utilisant une décomposition de l'espace des fréquences.

### 1.1.2.3 Un exemple

On va calculer les premiers coefficients  $C_0, C_1, C_2$  associés à la phase réelle sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = x^2 + x^3 + x^4.$$

Cette phase est strictement positive ailleurs qu'en 0, où elle s'annule exactement à l'ordre 2, avec  $\text{Hess } \varphi(0) = 2$ .

On a donc directement

$$C_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2i}}$$



Commençons par calculer les premiers coefficients  $(C'_i)$  qui correspondent à la seule phase  $x \mapsto x^2$ , grâce à la formule (1) :

$$\begin{aligned} C'_1 &= -\frac{1}{4}C_0\partial^2 \\ C'_2 &= \frac{1}{32}C_0\partial^4 \\ C'_3 &= -\frac{1}{384}C_0\partial^6 \\ C'_4 &= \frac{1}{6144}C_0\partial^8 \\ C'_5 &= -\frac{1}{122880}C_0\partial^{10} \\ C'_6 &= \frac{1}{2949120}C_0\partial^{12} \end{aligned}$$

On sait maintenant que le développement jusqu'à l'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} &C_0u(0) + t^{-1}C'_1(u) + t^{-2}C'_2(u + tru) + t^{-3}C'_3(u + tru + \frac{t^2}{2}r^2u) \\ &+ t^{-4}C'_4(u + tru + \frac{t^2}{2}r^2u) + t^{-5}C'_5(u + tru + \frac{t^2}{2}r^2u + \frac{t^3}{6}r^3u) \\ &+ t^{-6}C'_6(u + tru + \frac{t^2}{2}r^2u + \frac{t^3}{6}r^3u + \frac{t^4}{24}r^4u) \\ &+ t^{-7}C'_7(u + tru + \frac{t^2}{2}r^2u + \frac{t^3}{6}r^3u + \frac{t^4}{24}r^4u) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Ici, on tronque à chaque fois le développement de l'exponentielle pour ne garder que les termes qui contribuent, et on réalise le développement en phase stationnaire jusqu'à ce que la compensation des puissances de  $t$  ne crée que des puissances supérieures à deux. Comme on le voit, en pratique, il est nécessaire d'aller loin dans le développement, rendant les calculs pénibles.

On peut ensuite estimer chaque terme, en ne gardant que les grandes puissances de  $t$  :

$$\begin{aligned}
t^{-2}C_2'(u + tru)/C_0 &= \frac{t^{-2}}{32}u^{(4)}(0) + \frac{3t^{-1}}{16}u'(0) + \frac{3t^{-1}}{4}u(0) \\
t^{-3}C_3'(tru + \frac{t^2}{2}r^2u)/C_0 &= -\frac{t^{-2}}{64}u^{(3)}(0) - \frac{t^{-2}}{16}u^{(2)}(0) - \frac{15t^{-1}}{16}u(0) \\
t^{-4}C_4'(\frac{t^2}{2}r^2u)/C_0 &= \frac{15t^{-2}}{256}u^{(2)}(0) + \frac{105t^{-2}}{128}u'(0) + \frac{105t^{-2}}{32}u(0) \\
t^{-5}C_5'(\frac{t^3}{6}r^3u)/C_0 &= -\frac{63t^{-2}}{128}u'(0) - \frac{945t^{-2}}{64}u(0) \\
t^{-6}C_6'(\frac{t^4}{24}r^4u)/C_0 &= \frac{3465t^{-2}}{512}u(0)
\end{aligned}$$

Finalement on peut conclure :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \sqrt{\frac{\pi}{2i}} \left( -\frac{1}{4}\partial^2 + \frac{3}{16}\partial - \frac{3}{16} \right) \\
C_2 &= \sqrt{\frac{\pi}{2i}} \left( \frac{1}{32}\partial^4 - \frac{1}{64}\partial^3 - \frac{1}{256}\partial^2 + \frac{21}{64}\partial - \frac{2415}{512} \right)
\end{aligned}$$

### 1.1.3 Classes d'intégrales à phases

Soit  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Gamma$  un cône ouvert de  $X \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ , on veut étudier des *intégrales à phase* sur  $\Gamma$ . Pour cela on introduit les définitions suivante :

**Définition 1.6.** Une fonction  $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$  est appelée *phase* lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes :

1.  $\varphi$  est 1-homogène par rapport à la seconde variable ;
2. Sur  $\Gamma$ , on a  $\text{Im} \varphi \geq 0$  ;
3. La forme  $d\varphi$  ne s'annule pas.

Cette définition va nous permettre d'appliquer les outils techniques développés précédemment.

**Définition 1.7** (Classes de symboles). Soient  $m \in \mathbb{R}$  et deux paramètres  $\rho \in ]0, 1]$ ,  $\delta \in [0, 1[$ . Pour  $\Gamma$  un cône de  $X \times \mathbb{R}^d$ , l'espace  $S_{\rho, \delta}^m(\Gamma)$  est défini comme le sous-ensemble des  $a \in C^\infty(\Gamma)$  vérifiant que, pour tout  $K \subset\subset X$ , pour tous multi-indices  $\alpha, \beta$ , il existe une constante  $C$  telle que sur tout  $\Gamma \cap (K \times \mathbb{R}^d)$ , on ait

$$|\partial_x^\beta \partial_\theta^\alpha a(x, \theta)| \leq C(1 + |\theta|)^{m + \delta|\beta| - \rho|\alpha|}$$

Ce sous-ensemble forme bien un espace vectoriel, et les constantes optimales dans l'équation précédente en font un espace de Fréchet.

On notera  $S^m(\Gamma) = S_{\rho,\delta}^m(\Gamma)$ , et encore

$$S_{\rho,\delta}^{+\infty} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} S_{\rho,\delta}^m$$

$$S_{\rho,\delta}^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} S_{\rho,\delta}^m.$$

Les symboles sont donc des fonctions dont le comportement en l'infini en fonction de  $\theta$  ressemble à celui des fractions rationnelles. Les espaces  $S_{\rho,\delta}^m$  sont croissants avec  $m$  et  $\delta$  et décroissants avec  $\rho$ .

Par exemple, les fonctions  $m$ -positivement homogènes en  $\theta$  sont dans  $S^m$ .

On peut alors adapter le lemme de Borel à cette situation :

**Lemme 1.8.** Soit  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in ]0, 1]$ ,  $\delta \in [0, 1[$ , et  $(a_j)$  une suite de fonctions dans  $C^\infty(\Gamma)$  telle que, pour tout  $j$ ,  $a_j \in S_{\rho,\delta}^{m-j}(\Gamma)$ . Alors il existe  $a \in S_{\rho,\delta}^m(\Gamma)$  tel que, pour tout entier  $K$ , on a  $a - \sum_{j=0}^K a_j \in S_{\rho,\delta}^{m-K-1}(\Gamma)$ .

La fonction  $a$  est unique modulo  $S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\Gamma)$ , et on écrit :

$$a \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_j. \quad (2)$$

Ce lemme amène à la notion de symbole classique :

**Définition 1.9.** On dit que  $a$  est un symbole classique, et on écrit  $a \in S_{clas}^m(\Gamma)$ , lorsque  $a$  s'écrit sous la forme (2) avec  $a_j \in S^m(\Gamma)$  (donc  $\rho = 1$ ,  $\delta = 0$ ), et  $a_j$  homogène de degré  $m - j$  en  $\xi$ .

Une autre caractéristique topologique des  $S_{\rho,\delta}^m$  sera très utile : la densité de  $C_c^\infty(\Gamma)$ .

Ainsi, par le théorème de Hahn-Banach, pour définir une opération linéaire sur  $S_{\rho,\delta}^m$ , il suffit de la définir sur  $C_c^\infty(\Gamma)$  puis de vérifier que la définition est continue par rapport à la topologie de  $S_{\rho,\delta}^m(\Gamma)$ .

On peut alors énoncer la proposition suivante :

**Proposition 1.10.** Soit  $\varphi$  une phase sur le cône ouvert  $\Gamma$  et  $F$  un cône fermé inclus dans  $\Gamma$ . Soit  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in ]0, 1]$ ,  $\delta \in [0, 1[$ . Alors la fonctionnelle qui à  $a \in C_c^\infty(\mathring{F})$  associe

$$I_\varphi(a) : u \in C_c^\infty(X) \mapsto \int_\Gamma e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta) u(x) dx d\theta \quad (3)$$

est continue pour la topologie  $S_{\rho,\delta}^m$  à valeurs dans l'espace des distributions d'ordre strictement plus grand que  $\frac{d+m}{\min(\rho, 1-\delta)}$ .

**Démonstration.** La démonstration originale, dans [Hör71], utilise des intégrations par parties, mais ici on va pouvoir utiliser directement le lemme de phase non stationnaire, comme dans [Hör03].

On commence par une décomposition dyadique de l'espace des phases. On pose  $\chi_0$  une fonction lisse sur  $\mathbb{R}^d$  qui vaut 1 lorsque  $|\theta| \leq 1$  et qui vaut 0 lorsque  $|\theta| \geq 2$ . On définit alors, pour  $v > 0$  :

$$\chi_v(\theta) = \chi(2^{-v}\theta) - \chi(2^{1-v}\theta).$$

Les  $\chi_v$  forment alors une partition parafinie de l'unité. Par ailleurs on a, pour une constante  $C$  indépendante de  $v$  :

$$|\partial^\alpha \chi_v(\theta)| \leq C(1 + |\theta|)^{-|\alpha|}$$

Cette décomposition est donc adaptée à notre problème puisque pour  $a \in S_{\rho, \delta}^m$ , et pour  $K, \alpha, \beta$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $v$ ,

$$|\partial_x^\beta \partial_\theta^\alpha \chi_v(\theta) a(x, \theta)| \leq C(1 + |\theta|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

Et en particulier, si  $\gamma = \max(1 - \rho, \delta) < 1$ , on a une constante  $C$  indépendante de  $v$  telle que si  $x \in K$  et  $|\theta| \in ]1/2, 2[$ , on a :

$$|\partial_{x\theta}^\alpha a(x, 2^v\theta)| \leq C 2^{v(m + \gamma|\alpha|)}$$

Or, pour  $v \geq 0$ , on peut écrire, par changement de variables

$$I_\varphi(\chi_{v+1}a)(u) = 2^{dv} \int e^{i2^v\varphi(x, \theta)} \chi_1(\theta) a(x, 2^v\theta) u(x) dx d\theta$$

Et on applique alors le lemme de phase non stationnaire pour obtenir, avec  $C$  indépendant de  $v$  :

$$|I_\varphi(\chi_{v+1}a)(u)| \leq C 2^{v(d + m - k(1 - \gamma))} \|u\|_{C^k(K)}.$$

Lorsque  $k(1 - \gamma) > d + m$  et  $k \geq 0$ , on peut sommer ces estimations et obtenir que  $I_\varphi(a)$  s'étend en une distribution d'ordre  $-k$ . Lorsque  $k < 0$ , on peut appliquer ce résultat en remplaçant  $u$  par  $u\varphi$  et raisonner par dualité. Par ailleurs les estimations qui apparaissent ne font intervenir que les semi-normes de  $a$  dans  $S_{\rho, \delta}^m$ , d'où le résultat.  $\square$

On peut alors définir des classes d'intégrales :

**Définition 1.11.** Lorsque  $\varphi$  est une phase sur  $\Gamma$ , avec  $F \subset \Gamma$  un fermé,  $m$  un réel, on note  $\mathcal{I}_\varphi^m(F)$  l'espace des distributions qui peuvent s'écrire sous la forme (3), avec un  $a \in S^m(\hat{F})$ .

**Proposition 1.12.** Soit  $\varphi$  une phase et  $a$  un symbole. Alors la distribution  $I_\varphi(a)$  définie par la formule (3) vérifie :

$$\text{sing supp } I_\varphi(a) \subset \{x \in X, \exists \theta, (x, \theta) \in F \text{ et } d_\theta \varphi(x, \theta) = 0\}.$$

**Démonstration.** Posons

$$S = \{x \in X, \exists \theta, (x, \theta) \in F \text{ et } d_\theta \varphi(x, \theta) = 0\}.$$

Pour  $x$  en-dehors de  $S$ , la fonction  $\varphi$  est une phase en  $\theta$  qui dépend du paramètre  $x$ , pour lequel toutes les expressions à l'intérieur de l'intégrale évoluent de manière lisse. On peut donc répéter la preuve précédente en incorporant un paramètre lisse  $x$  et on obtient alors une dépendance lisse de l'intégrale à  $x$  fixé, par rapport à  $x$ .  $\square$

## 1.2 OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER À PHASE RÉELLE

### 1.2.1 Opérateurs pseudo-différentiels

Nous commençons par l'étude d'un cas particulier d'opérateur à phase réelle, dont l'étude sera très utile.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R} \\ (x, y, \xi) &\mapsto \langle x - y, \xi \rangle\end{aligned}$$

est une phase réelle. En particulier, si  $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , on peut définir la distribution

$$K_a(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x-y \rangle} a(x, \xi) d\xi$$

On aimerait cependant travailler avec les classes de Schwartz, et pour cela il est nécessaire de connaître le comportement des symboles en l'infini, en espace. Le lecteur désirant se reporter à [Hör07] prendra garde au fait que nous introduisons maintenant une notation différente, dans le but d'éviter la confusion avec les espaces de symboles définis précédemment.

**Définition 1.13.** On définit  $S_{glob}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  comme l'espace des fonctions lisses sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  vérifiant que pour tous multiindices  $\alpha$  et  $\beta$ , il existe une constante  $C$  telle qu'on ait :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

Munis de cette définition globale, nous pouvons affirmer que :

**Proposition 1.14.** Si  $a \in S_{glob}^m$ , alors  $K_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

**Démonstration.** Il faut prouver que l'application  $(u, v) \mapsto \int K_a(x, y) u(x) v(y)$  est continue pour la topologie de  $\mathcal{S}$ . En conjuguant par une transformée de Fourier en la seconde variable, on se ramène au même problème pour l'application

$$(u, v) \mapsto \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) u(x) v(\xi) dx d\xi.$$

Or on a immédiatement :

$$\begin{aligned}\left| \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) u(x) v(\xi) dx d\xi \right| &\leq C \int (1 + |\xi|)^m |u(x)| |v(\xi)| dx d\xi \\ &\leq C \|x^{-n-1} u\|_\infty \|\xi^{-n-1-m} v\|_\infty,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

Par dualité,  $K_a$  induit un opérateur à noyau, noté  $a(x, D)$ , qui va de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}'$ . La notation  $a(x, D)$  est justifiée par le fait que, si  $a$  ne dépend

pas de  $\xi$ , alors  $a(x, D)$  est l'opérateur de multiplication par  $a(x)$ , et si  $a$  ne dépend pas de  $x$ , alors  $a(x, D)$  est l'opérateur de multiplication en Fourier.

Un calcul direct permet de montrer :

**Lemme 1.15.** Pour  $a \in S_{glob}^m$  on a :

$$\begin{aligned}[a(x, D), x_j] &= -i\partial_{\xi_j} a(x, D) \\ [a(x, D), -i\partial_{x_j}] &= i\partial_{x_j} a(x, D).\end{aligned}$$

**Corollaire 1.16.** On a en fait  $a(x, D) : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ . Par ailleurs l'application qui à  $a$  associe cet opérateur est continue pour la topologie de  $S_{glob}^m$ .

**Démonstration.** Soit  $u \in \mathcal{S}$ . La fonction  $x \mapsto a(x, D)u(x)$  est continue bornée, en tant qu'intégrale à paramètre convergeant absolument ; on ne fait intervenir par ailleurs qu'une des semi-normes de  $a$  dans  $S_{glob}^m$ .

Par le lemme précédent, pour contrôler les autres semi-normes dans  $\mathcal{S}$  de  $a(x, D)u$ , il suffit de contrôler les  $\|\partial^\alpha a(x, D)u\|_\infty$ , ce qui ne fait intervenir, encore une fois, que les semi-normes de  $a$  dans  $S_{glob}^m$ .  $\square$

Par dualité (en changeant  $K(x, y)$  en  $\bar{K}(y, x)$ ), on peut définir  $a(x, D) : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ .

On donne, pour terminer, quelques résultats concernant la régularité de l'opérateur  $a(x, D)$  et de son noyau.

**Proposition 1.17.** Soit  $a \in S_{glob}^m$ . Le noyau  $K_a$  est lisse hors de la diagonale.

**Démonstration.** Lorsque  $a \in C_c^\infty$ , hors de la diagonale  $x = y$ , on peut réaliser des intégrations par parties dans l'intégrale qui définit  $K_a$ . Donc dans ce cas  $K_a$  est lisse, et quitte à faire suffisamment d'intégrations par parties, les semi-normes de  $K_a$  ne dépendent que des semi-normes de  $a$  dans  $S_{glob}^m$ , donc on peut raisonner par continuité, et le résultat reste valide pour  $a$  quelconque.  $\square$

### 1.2.2 Opérations sur les opérateurs pseudodifférentiels

Nous cherchons ici à obtenir des règles de calcul sur les opérateurs pseudo-différentiels. Qu'arrive-t-il lorsqu'on essaie de composer deux opérateurs ? Ou de prendre l'adjoint d'un opérateur ?

On aurait très bien pu prendre une définition plus générale d'un opérateur pseudo-différentiel en laissant le symbole dépendre de la dernière variable. Le noyau

$$K_r(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x - y \rangle} r(x, \xi, y) d\xi$$

est défini en tant qu'intégrale de Fourier, dès lors que  $r \in S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$ . Mais on dispose du lemme suivant :

**Lemme 1.18.** Soit  $r \in S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$ , à support compact en  $x$  et  $y$ . Alors il existe  $p \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  tel que  $K_r = K_a$ . Le symbole  $p$  admet par ailleurs le développement asymptotique suivant :

$$p(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} r(x, \xi, y) \Big|_{y=x}$$

**Démonstration.** Procédons par dualité ; soit  $\varphi$  une fonction test. On commence par voir que, à  $x$  et  $\xi$  fixés :

$$\begin{aligned} \int e^{-i\langle \xi, y \rangle} r(x, \xi, y) \varphi(y) dy &= \mathcal{F}(r(x, \xi, \cdot)) \varphi(\cdot)(\xi) \\ &= (\mathcal{F}(r(x, \xi, \cdot)) * \hat{\varphi}(\cdot))(\xi) \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à  $\varphi$  on trouve :

$$\begin{aligned} \int K_r(x, y) \varphi(y) dy &= \iint e^{i\langle \xi, x-y \rangle} r(x, \xi, y) \varphi(y) d\xi dy \\ &= \int e^{i\langle \xi, x \rangle} [\mathcal{F}(r(x, \xi, \cdot)) * \hat{\varphi}(\cdot)](\xi) d\xi \\ &= \iint \mathcal{F}_3(r) x, \xi, \xi - \eta e^{i\langle \xi - \eta, x \rangle} d\xi \hat{\varphi}(\eta) e^{i\langle \eta, x \rangle} d\eta \\ &= \iint e^{i\langle \eta, x-y \rangle} p(x, \eta) \varphi(y) dy \end{aligned}$$

Ici  $\mathcal{F}_3$  désigne la transformée de Fourier en la troisième variable, et

$$p(x, \eta) = \int e^{i\langle \xi, x \rangle} \mathcal{F}_3 r(x, \xi + \eta, \xi) d\xi$$

On a alors clairement  $p \in S^m$ . Par ailleurs, en développant  $\mathcal{F}_3(r)(x, \xi + \eta, \xi)$  en série entière en la troisième variable, on trouve que  $p$  admet le développement asymptotique suivant :

$$p(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} r(x, \xi, y) \Big|_{y=x}$$

Ce qui permet de conclure.  $\square$

**Lemme 1.19.** Soit  $r \in S_{glob}^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$  et supposons qu'il existe un voisinage de  $diag(\mathbb{R}^n)$  sur lequel, pour tout  $\xi$ , on ait  $r(x, y, \xi) = 0$ . Alors  $K_r(x, y)$  est lisse.

**Démonstration.** On sait déjà que le noyau  $K_r$  est lisse hors de la diagonale, or il est nul au voisinage de la diagonale.  $\square$

**Proposition 1.20.** Pour tout symbole  $r \in S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$ , il existe un symbole  $p \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  tel que  $K_r - K_p$  soit une fonction lisse, et admettant le développement asymptotique :

$$p(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} r(x, \xi, y) \Big|_{y=x}.$$

**Démonstration.** Soit  $(\chi_j)$  une partition parafinie de l'unité sur  $\mathbb{R}^n$ , alors on a bien sûr :

$$r(x, \xi, y) = \sum_{j,k} \chi_j(x) \chi_k(y) r(x, \xi, y).$$

On sait qu'on peut retrancher de cette somme les termes dont les supports sont loin de la diagonale, car leur contribution au noyau est lisse. On écrit  $j \sim k$  lorsque  $\text{supp } \chi_j \cap \text{supp } \chi_k \neq \emptyset$ , on sait alors qu'à  $j$  fixé un nombre fini de  $k$  vérifient  $j \sim k$ , et on écrit :

$$r(x, \xi, y) = \sum_j \sum_{j \sim k} \chi_j(x) \chi_k(y) r(x, y, \xi).$$

A chacun des termes on applique le lemme, qui nous fournit des symboles  $p_{j,k}$ . On peut sans problème sommer sur le nombre fini d'indices  $k$ , en conservant le développement asymptotique, produisant des symboles  $p_j$ . Enfin, quitte à remplacer  $p_j$  par  $\tilde{\chi}_j(x) p_j$  où  $\tilde{\chi}_j$  vaut 1 sur  $\text{supp } \chi_j$ , ce qui ne change pas le développement asymptotique, on peut supposer que chaque  $p_j$  est à support compact, tel qu'en tout point seul un nombre fini de  $p_j$  soit non nul. On peut alors sommer les  $p_j$ .  $\square$

De cette proposition on retiendra deux corollaires.

**Corollaire 1.21.** Modulo un opérateur régularisant, l'adjoint de  $a(x, D)$ , où  $a \in S^m$ , est l'opérateur associé à un symbole dans  $S^m$  dont le développement asymptotique est :

$$a^\dagger(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} \bar{a}(y, \xi) \Big|_{x=y}$$

**Corollaire 1.22.** Modulo un opérateur régularisant, la composée  $a(x, D) \circ b(x, D)$ , où  $a \in S_{glob}^m$ , et  $b \in S_{glob}^{m'}$ , est l'opérateur associé à un symbole dans  $S^{m+m'}$  dont le développement asymptotique est :

$$a \# b(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} [a(x, \xi) b(y, \xi)] \Big|_{x=y}$$

**Démonstration.** On écrit

$$\begin{aligned} b(x, D) \varphi(x) &\sim (b^\dagger(x, D))^* \varphi(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left( \int e^{-i\langle \xi, y \rangle} \varphi(y) \overline{b^\dagger(y, \xi)} dy \right) (x). \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$a(x, D) \circ b(x, D) \varphi(x) \sim \iint e^{i\langle \xi, x-y \rangle} a(x, \xi) \overline{b^\dagger(y, \xi)} \varphi(y) dy d\xi,$$

Ce qui permet de conclure, une fois vérifié que  $r(x, \xi, y) = a(x, \xi) \overline{b^\dagger(y, \xi)}$  est dans  $S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$ .  $\square$



### 1.2.3 Front d'onde

Une fonction de  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  est dans  $C_0^\infty$  ssi sa transformée de Fourier décroît en l'infini plus vite que  $\xi \mapsto (1 + |\xi|)^{-n}$ . Cela nous amène à poser, lorsque  $u \in \mathcal{E}'$ , le cône  $\Sigma(u)$  des fréquences non nulles dont aucun voisinage conique ne voit  $\hat{u}$  décroître en l'infini plus vite que  $\xi \mapsto (1 + |\xi|)^{-n}$ .

Le cône  $\Sigma(u)$  donne des informations complémentaires de  $\text{sing supp } u$ . L'un décrit uniquement les directions dans lesquelles on a des irrégularités, et l'autre uniquement les points où on a des irrégularités. Pour combiner ces informations on a besoin d'un lemme de localisation.

**Lemme 1.23.** Si  $v \in \mathcal{E}'$  et  $\phi \in C_0^\infty$ , alors on a

$$\Sigma(v\phi) \subset \Sigma(v)$$

**Démonstration.** On veut regarder la décroissance en l'infini de la fonction

$$\xi \mapsto \int \hat{\phi}(\eta) \hat{v}(\xi - \eta) d\eta$$

On sait déjà que pour un certain  $m \in \mathbb{R}$  on a  $|v(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^m$ . Par ailleurs, soit  $c \in ]0, 1[$ , on va découper cette intégrale en une intégrale là où  $|\eta| \leq c|\xi|$  et une intégrale sur le complémentaire. On peut donc majorer l'expression précédente par

$$\sup_{|\xi - \eta| \leq c|\xi|} v(\eta) \|\hat{\phi}\|_{L^1} + C(c) \int_{|\eta| \leq c|\xi|} |\hat{\phi}(\eta)| (1 + |\eta|)^m d\eta$$

Le second morceau ne pose donc pas de problème puisque  $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$ . Si on a un contrôle de la décroissance de  $\hat{v}$  dans un ouvert  $\Gamma$ , on peut considérer un cône fermé  $\Gamma_0$  inclus dans  $\Gamma$ , et alors on dispose d'une constante  $c$  telle que  $\xi \in \Gamma_0, |\xi - \eta| \leq c|\xi| \Rightarrow \eta \in \Gamma$ , d'où le résultat.  $\square$

Fort de ce lemme, on peut définir la notion de front d'onde en un point en localisant.

**Définition 1.24.** Pour  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on définit :

$$\Sigma_x(u) = \bigcap_{\substack{\phi \in C_c^\infty \\ \phi(x) \neq 0}} \Sigma(u\phi)$$

On a immédiatement que  $\Sigma_x(u) = \emptyset$  ssi il existe une fonction  $\phi$  non nulle au voisinage de  $x$  telle que  $u\phi$  soit une fonction lisse.

On peut alors conclure :

**Définition 1.25.** Pour  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , on définit :

$$\text{WF}(u) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \xi \in \Sigma_x(u)\}$$

Le lecteur vérifiera que cette notion est invariante par action d'un  $C^\infty$ -difféomorphisme sur  $T^*(\mathbb{R}^d)$ , et qu'à ce titre, la notion de front d'onde se généralise aux variétés en prenant des cartes locales.

On a par exemple :

**Proposition 1.26** ([Hör03], thm 8.1.9). Soit  $\Gamma$  un cône ouvert de  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ ,  $\phi$  une phase sur  $\Gamma$ ,  $F \subset \Gamma$  un cône fermé et  $a \in S_{\phi, \delta}^m(F)$ . Alors on a :

$$\text{WF}(I_\phi(a)) \subset \{(x, d_x \phi(x, \theta)), (x, \theta) \in F \text{ et } d_\theta \phi(x, \theta) = 0\}$$

En particulier, on peut rendre plus précise la proposition 1.17 :

**Corollaire 1.27.** Soit  $a \in S_{glob}^m$ . Le noyau  $K_a$  vérifie :

$$\text{WF}(K_a) \subset \{(x, x, \xi, -\xi) \in T^*\mathbb{R}^d, (x, \xi) \in \mathbb{R}^d\}$$

Le résultat précédent se reformule du point de vue de l'opérateur :

**Proposition 1.28** (Principe microlocal). Soit  $a \in S_{glob}^m$  et  $u \in \mathcal{S}'$ . Alors :

$$\text{WF}(a(x, D)u) \subset \text{WF}(u).$$

## PROJECTEUR DE SZEGŐ

---

### 2.1 ESPACE DE HARDY

Soit  $D$  un ouvert connexe relativement compact de  $\mathbb{C}$ , dont la frontière  $\partial D$  est une sous-variété  $C^\infty$ . On dispose d'une notion de trace  $W^{2,s}(D) \rightarrow L^2(\partial D)$  pour  $s > 1/2$ . On souhaite utiliser les propriétés de régularité des fonctions holomorphes, ou harmoniques, pour définir une notion de trace depuis un sous-espace  $H^2(D)$  de fonctions holomorphes. C'est cet espace qu'on appellera *espace de Hardy*, et dont on étudiera par la suite l'image par l'application trace.

#### 2.1.1 Un exemple : $\Delta$ , le disque unité de $\mathbb{C}$

Dans  $\Delta$ , de frontière  $S^1$ , les fonctions holomorphes sont très bien caractérisées par leur développement en série entière en 0. Cependant, notre but est de généraliser les notions qu'on va définir à d'autres ouverts ; on s'efforcera donc d'oublier cette écriture, et on utilisera plutôt le noyau de Poisson  $P : S^1 \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ , qui s'écrit :

$$P(z, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} \quad (4)$$

On sera amené à noter également  $P$  l'opérateur associé, qui résout le problème de Dirichlet sur le disque.

##### 2.1.1.1 Définition

**Proposition 2.1.** Soit  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ , holomorphe. Pour  $r < 1$  on définit  $f_r : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ . Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\sup_{r < 1} \|f_r\|_{L^2} < +\infty$  ;
2. il existe  $f^* \in L^2(S^1)$  vérifiant, pour tout  $z$ ,

$$f(z) = \int_{S^1} P(z, e^{i\theta}) f^*(e^{i\theta}) d\theta ;$$

3. il existe  $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , harmonique, vérifiant  $|f|^2 \leq h$ .

Preuve :

- $1 \Rightarrow 2$  utilise des résultats de convergence faible. Il existe en effet une sous-suite  $(r_k) \rightarrow 1$  et  $f^* \in L^2(S^1)$  telles que  $f_{r_k} \rightharpoonup f^*$ . En évaluant cette convergence contre  $P(z, \cdot)$ , on a, pour tout  $z \in \Delta$ ,

$$\int P(z, e^{i\theta}) f_{r_k}(e^{i\theta}) d\theta \rightarrow \int P(z, e^{i\theta}) f^*(e^{i\theta}) d\theta.$$

Or le terme de gauche s'interprète comme l'expression d'une fonction holomorphe dans le disque selon sa valeur au bord,  $f_{r_k}$ . Par unicité, cette fonction n'est autre que  $z \mapsto f(r_k z)$ . Donc le membre de gauche vaut  $f(r_k z)$ , et cette quantité converge vers  $f(z)$ , d'où l'égalité.

– 2  $\Rightarrow$  3 utilise simplement l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |f|^2(z) &\leq \left| \int P(z, e^{i\theta}) d\theta \right| \left| \int P(z, e^{i\theta}) |f^*|^2(e^{i\theta}) d\theta \right| \\ &= \int P(z, e^{i\theta}) |f^*|^2(e^{i\theta}) d\theta =: h(x) \end{aligned}$$

– 3  $\Rightarrow$  1 utilise à nouveau les propriétés du noyau de Poisson : avec  $r_1 < 1$ , et  $r < 1$ , on a, par la formule de Poisson pour  $h(r_1 \cdot)$ , sur  $\bar{\Delta}$ ,

$$h(r_1 r e^{i\alpha}) = \int P(r e^{i\alpha}, e^{i\theta}) h(r_1 e^{i\theta}) d\theta$$

En notant  $C_r = \inf \{P(x, y), y \in S^1, |x| \leq r\} > 0$ , on a donc

$$|f_{r_1}|_{L^2}^2 \leq \int h(r_1 e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{C_r} \sup\{h(x), |x| \leq r\}$$

$r$  et  $r_1$  étant indépendants, on a bien un contrôle uniforme de  $|f_{r_1}|_{L^2}$ .

On pose  $H^2(\Delta)$ , l'espace de Hardy, comme étant l'espace des fonctions holomorphes sur  $\Delta$  vérifiant les trois conditions équivalentes de la proposition. La condition 1 implique que  $H^2(\Delta) \subset L^2(\Delta)$ .

Par ailleurs, la formule de Poisson nous donne que la norme  $L^2$  de  $f^*$  est proportionnelle à la norme  $L^2$  de  $f \in H^2$ . Ceci nous permet de compléter notre desideratum, à savoir une application trace correctement définie sur  $H^2$ .

Cette trace permet de démontrer que  $H^2$  est fermé pour la norme  $L^2$ . Le schéma de démonstration de cette affirmation est le suivant : si une suite  $(f_n)$  de fonctions de  $H^2$  converge dans  $L^2$  vers une fonction  $f$ , alors elle est en particulier  $L^2$ -bornée, donc la suite  $f_n^*$  est  $L^2$ -bornée. Il existe donc une sous-suite, que nous appellerons toujours  $f_n^*$  par commodité, qui converge faiblement vers une fonction dans  $L^2(S^1)$  que nous appelons innocemment  $f^*$ . Par définition de la convergence faible, on a  $P(f_n^*) \rightarrow P(f^*)$  ponctuellement, mais  $P(f_n^*) = f_n$  qui converge presque partout vers  $f$ . Donc  $f = P(f^*)$ , ce qui est la condition 2 de la proposition.

#### 2.1.1.2 Convergence sectorielle ou radiale

Les fonctions dans  $H^2$  vérifient certaines propriétés de régularité au bord, notamment la convergence sectorielle. Commençons par dé-

finir, pour  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé, un secteur du disque  $\Delta$ , dans lequel l'angle d'approche de  $e^{i\theta}$  n'est pas trop grand :

$$\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) = \{z \in \Delta, |z - e^{i\theta}| \leq \alpha(1 - |z|)\}$$

On a alors :

**Proposition 2.2.** Soit  $\alpha > 1$  et  $f \in H^2(\Delta)$ , alors on a, pour presque tout point  $e^{i\theta}$  du bord,

$$\lim_{x \rightarrow e^{i\theta}, x \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})} f(x) = f^*(e^{i\theta})$$

Pour démontrer cette proposition, nous allons avoir besoin des fonctions maximales de Hardy-Littlewood. Pour  $M$  une variété riemannienne (on n'utilisera que  $\mathbb{R}^d$  et  $S^1$ ),  $g \in L^1_{loc}(M)$ , on définit :

$$Mg(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |g|. \quad (5)$$

$M$  est clairement continue de  $L^\infty$  dans  $L^\infty$ , mais pas forcément de  $L^1$  dans  $L^1$  ; cependant, en vertu de l'inégalité de Markov,  $M$  est continue de  $L^1$  dans  $L^1$  faible ; par les théorèmes classiques d'interpolation,  $M$  est continue de  $L^p$  dans  $L^p$  pour tout  $p > 1$ .

On va avoir besoin d'un lemme pénible, qui se trouve exposé dans [Ste72] :

**Lemme 2.3.** On fixe  $\alpha > 1$ . Alors il existe une constante  $C_\alpha$  telle que pour tout  $f \in L^1(S^1)$ , on a :

$$\sup_{x \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})} \int_{S^1} P(x, e^{iv}) g(e^{iv}) dv \leq C_\alpha Mg(e^{i\theta})$$

A l'aide de ce lemme, on peut démontrer la proposition.

Soit  $\alpha > 1$  et  $f \in H^2(\Delta)$ . On sait que  $f^* \in L^2(X)$  vérifie  $f = Pf^*$ . Soit  $\epsilon > 0$ , et posons :

$$\Lambda_\epsilon := \{e^{i\theta} \in S^1, \limsup_{x \rightarrow e^{i\theta}, x \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})} |f(x) - f^*(e^{i\theta})| \geq \epsilon\}$$

Les ensembles  $\Lambda_\epsilon$  sont alors décroissants avec  $\epsilon$ , et on cherche à démontrer que l'union de ces ensembles quand  $\epsilon \rightarrow 0$  est de mesure nulle, il suffit donc d'avoir :

$$|\Lambda_\epsilon| = O(\epsilon).$$

Soit donc  $g \in C^\infty(S^1)$  telle que  $\|f^* - g\|_{L^2} < \epsilon^2$ . On décompose alors :

$$|f(x) - f^*(e^{i\theta})| \leq |P(f^* - g)(x)| + |Pg(x) - g(e^{i\theta})| + |g(e^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|$$

Le troisième terme se traite directement à l'aide de l'inégalité de Markov. Le deuxième terme a une contribution nulle par continuité

de  $Pg$  jusqu'au bord. La contribution du premier terme à  $\Lambda_\epsilon$  se traite grâce au lemme :

$$\begin{aligned} |\Lambda_\epsilon| &\leq |e^{i\theta}, \epsilon/3 \leq C_\alpha M(f^* - g)(e^{i\theta})| \\ &\leq 3C_\alpha \epsilon^{-1} |M(f^* - g)|_{L^1} \\ &\leq C\epsilon^{-1} \|f^* - g\|_{L^2} \\ &\leq C\epsilon \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve.

### 2.1.2 Le cas plus général

On désire étendre la définition des espaces de Hardy à des cas plus généraux. On considère  $D$  un ouvert relativement compact et fortement pseudoconvexe de  $\mathbb{C}^n$ , à bord lisse  $X$  ; on va alors pouvoir appliquer le théorème de Kohn, exposé dans l'annexe. On appelle espace de Hardy l'espace  $H^2(X)$ , et  $P$  l'opérateur inverse de la trace.

Comme l'application

$$\begin{aligned} H^2(D) \times D &\mapsto \mathbb{C} \\ (f, x) &\mapsto Pf(x) \end{aligned}$$

est continue par holomorphie (la valeur en un point vaut la valeur moyenne sur une petite boule, laquelle est continue pour la topologie  $L^2$ ), on dispose en particulier d'une application continue  $f \rightarrow f(x)$  dans  $H^2(D)$ . Par le théorème de Riesz, cette forme linéaire est associée à une fonction  $K_x \in H^2(D)$ . Posons  $K(x, y) = \overline{K_x(y)}$ . C'est une fonction antisymétrique, holomorphe par rapport à sa première variable. Par les constructions précédentes, on peut conjuguer par l'opérateur trace et obtenir une fonction  $S(x, y)$ . On aura besoin, de manière cruciale, du lemme suivant :

**Lemme 2.4.** Si  $\{e_i\}$  est une base hilbertienne de  $H^2(X)$ , alors on a  $S(x, y) = \sum e_i(x) \overline{e_i(y)}$ .

Preuve : On a  $S_x(y) = \sum \lambda_i(x) e_i(y)$ , puis par définition de  $S_x$ ,  $\lambda_i(x) = \overline{e_i(x)}$ .

On appelle noyau de Szegő la fonction  $S$ .

#### 2.1.2.1 Un exemple : le cas de la boule unité

On sait que la boule unité de  $\mathbb{C}^n$  est fortement pseudoconvexe. On peut donc appliquer ces résultats, et pour trouver le noyau de Szegő il suffit de trouver une base orthonormée de fonctions dans  $H^2(S^{2n-1})$ .

**Lemme 2.5.** Les fonctions  $z \mapsto z^\alpha$ , où  $\alpha$  parcourt tous les poly-indices, forment une base orthogonale de  $H^2(B(0, 1))$ , et leurs restrictions forment une base orthogonale de  $H^2(S^{2n-1})$ .

**Démonstration.** Ces fonctions sont clairement orthogonales sur chaque sphère centrée en l'origine. De plus, toute fonction holomorphe dans  $B(0,1)$  est développable en série entière sur cet ouvert, d'où la propriété de base orthogonale. Par l'application du théorème ??, leur restriction à la sphère unité forment une base orthogonale.  $\square$

**Lemme 2.6.** En notant  $1 = (1, 0, \dots, 0)$ , on a

$$S(z, 1) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1-z_1)^n}$$

**Démonstration.** On a :

$$\begin{aligned} S(z, 1) &= \sum_{\alpha} \frac{z^{\alpha} \cdot 1^{\alpha}}{\|z^{\alpha}\|_{L^2(S)}^2} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_1^k}{\|z_1^k\|_{L^2(S)}^2} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^n} \frac{z_1^k (k+n-1)!}{k!} \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z_1^k \binom{k+n-1}{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1-z_1)^n}. \end{aligned}$$

$\square$

On en déduit, par invariance par rotation, la forme générale suivante :

**Proposition 2.7.** Sur la sphère unité de  $\mathbb{C}^n$ , on a :

$$S(z, w) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1-z \cdot \overline{w})}$$

## 2.2 STRUCTURE DU PROJECTEUR DE SZEGŐ

Dans le cas d'un ouvert fortement pseudoconvexe relativement compact, les résultats de régularité de [Koh63], [Koh64] ont une conséquence importante : le projecteur de Szegő a une structure microlocale bien précise. En suivant la méthode originelle de Boutet et Sjöstrand, on se propose de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2** (Boutet-Sjöstrand). Soit  $X$  le bord d'un ouvert fortement pseudoconvexe et relativement compact d'une variété de dimension  $n$ . Alors le projecteur de Szegő  $S$  sur  $X$  vérifie  $S \sim S'$ , où  $S' = (S')^* \sim (S')^2$  vérifie :

$$S'(x, y) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{it\phi(x, y)} \sum_{k \geq 0} t^{n-1-k} \chi(t) a_k(x, y) dt,$$

où  $\phi$  est une phase convenable, et où  $\chi$  est une fonction lisse, nulle au voisinage de 0, et valant 1 au voisinage de l'infini.

On remarque immédiatement que le choix de  $\chi$  n'a aucune influence sur la classe d'équivalence de  $S'$  modulo opérateurs à noyau  $C_c^\infty$  ; sa présence n'est due qu'à la volonté de faire converger l'intégrale correspondante ; on omettra de l'écrire dans toute la suite de ce rapport.

### 2.2.1 Construction d'un projecteur approximatif

#### 2.2.1.1 Étude d'un modèle local

On considère provisoirement  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \{(x, y), x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q\}$ , ainsi que les deux systèmes d'opérateurs pseudodifférentiels suivants :  $(D_j^+)_{1 \leq j \leq p}$  et  $(D_j^-)_{1 \leq j \leq p}$  définis par :

$$D_j^\pm = -i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \pm x_j |D_y| \right)$$

On notera également  $s_j^\pm$  les symboles de ces opérateurs, qui vérifient, par définition :

$$s_j^\pm = \xi_j \mp x_j |\eta|.$$

Les deux systèmes  $D^+$  et  $D^-$  ont des comportements très différents lorsque considérés sur  $L^2$ . On va démontrer en particulier :

**Proposition 2.8.** Il existe un projecteur  $P$  qui est un OIF à symbole classique, et deux OIF  $L^+$  et  $L^-$ , tous deux de degré  $-1$ , vérifiant les conditions suivantes :

1.  $Id \sim L^- D^-$ .
2.  $D^+ P = 0$ .
3.  $Id \sim P + L^+ D^+$ .



4. L'idéal lagrangien positif associé à  $P$  est le plus grand idéal lagrangien qui, d'une part, contient l'idéal engendré par les fonctions  $s_j^+(x, y, \xi, \eta)$  et les fonctions  $\overline{s_j^+}(x', y', \xi', \eta')$  et qui, d'autre part, est contenu dans l'idéal des fonctions qui s'annulent lorsque  $x = x' = 0, \xi = \xi' = 0, y = y', \eta = \eta'$ .

*Démonstration.* Nous allons démontrer ces quatre points dans l'ordre où ils ont été établis. On remarque tout de suite qu'on peut conjuguer les opérateurs  $D^\pm$  par la transformée de Fourier selon la seconde variable, et c'est dans les variables  $(x, \tau)$  que nous allons travailler dorénavant.

1. L'opérateur  $D^-$  s'écrit :

$$D_j^- = -i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j |\tau| \right)$$

On peut résoudre explicitement le problème de Cauchy associé : pour  $x = (x^*, x_n)$  avec par exemple  $x_n > 0$ , si  $D_n^- f = g_n$ , on a directement par la formule de Duhamel :

$$\begin{aligned} f(x^*, x_n, \tau) &= f(x^*, 0, \tau) e^{\frac{1}{2} x_n^2 |\tau|} \\ &\quad - i \int_0^{x_n} e^{\frac{1}{2} (x_n^2 - s^2) |\tau|} g_n(x^*, s, \tau) ds \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $f$  et  $g_n$  sont  $L^2$ , alors leur trace sur la droite affine qui nous intéresse est de classe  $H^{-n+1}$ . En particulier, on a au moins le long d'une sous-suite,

$$f(x^*, x_n, \tau) e^{-\frac{1}{2} x_n^2 |\tau|} \xrightarrow{x_n \rightarrow +\infty} 0$$

et par ailleurs,  $s \mapsto e^{-\frac{1}{2} s^2 |\tau|} g_n(x^*, s, \tau)$  est intégrable en  $+\infty$ . Par conséquent, en factorisant l'expression précédente par  $e^{-\frac{1}{2} x_n^2 |\tau|}$  et en prenant la limite en l'infini le long d'une sous-suite, on a :

$$f(x^*, 0, \tau) = i \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} s^2 |\tau|} g_n(x^*, s, \tau) ds$$

Ainsi, en remplaçant dans l'expression précédente, on a :

$$f(x^*, x_n, \tau) = -i \int_{x_n}^{+\infty} e^{\frac{1}{2} (x_n^2 - s^2) |\tau|} g_n(x^*, s, \tau) ds$$

On vient de construire explicitement  $L^-$ .

2. En suivant [BdMS75], on commence par construire un opérateur  $R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^q) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par :

$$Rh(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2} |x|^2 |\tau|} \left( \frac{|\tau|}{\pi} \right)^{p/4} h(\tau)$$

Il est clair que  $D^+R = 0$ . Par ailleurs, l'adjoint formel de cet opérateur est  $R^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$ , défini par :

$$R^*h(\tau) = \int e^{-\frac{1}{2}|x|^2|\tau|} \left( \frac{|\tau|}{\pi} \right)^{p/4} h(x, \tau) dx$$

On a alors immédiatement que  $R^*R = Id$ , grâce à la formule

$$\int e^{-|x|^2|\tau|} dx = \left( \frac{\pi}{|\tau|} \right)^{p/2}.$$

Ainsi,  $P = \overline{RR^*}$  est un projecteur orthogonal dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , dont l'image est incluse dans le noyau de  $D^+$ .

3. On a, pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , l'identité :

$$\begin{aligned} f - Pf(x, \tau) &= \\ \left( \frac{\pi}{|\tau|} \right)^{p/2} \int e^{-\frac{1}{2}|y|^2|\tau|} &\left( f(x, \tau) e^{-\frac{1}{2}|y|^2|\tau|} - f(y, \tau) e^{-\frac{1}{2}|x|^2|\tau|} \right) dy \end{aligned}$$

Supposons sans perte de généralité que  $y = (y_j)$ ,  $x = (x_j)$ , avec toujours  $y_j < x_j$ . Alors par la formule de Duhamel, on peut exprimer  $f(x, \tau)$  en fonction de  $f(y, \tau)$  et des fonctions  $g_j := D_j^+ f$ , en intégrant successivement sur des arêtes du parallélépipède qui joint  $x$  à  $y$ . On écrit, sans plus de détail :

$$f(x, \tau) = f(y, \tau) e^{-\frac{1}{2}(|x|^2 - |y|^2)|\tau|} + \mathfrak{L}^- g(x, y, \tau)$$

Ici, l'opérateur  $\mathfrak{L}^-$  intègre sur un chemin entre  $x$  et  $y$ , en multipliant par une fonction dont la dépendance en  $y$  est de l'ordre de  $e^{\frac{1}{2}|y|^2|\tau|}$ .

On constate alors que le premier terme de cette décomposition annule l'autre terme de l'équation précédente, ainsi :

$$f - Pf(x, \tau) = \left( \frac{\pi}{|\tau|} \right)^{p/2} \int e^{-|y|^2|\tau|} \mathfrak{L}^- g(x, y, \tau) dy$$

Ceci est bien un opérateur pseudodifférentiel de degré  $-1$  appliqué à  $D^+f$ .

4. On a :

$$RR^*f(x, \tau) = \int e^{-\frac{1}{2}(|x|^2 + |x'|^2)|\tau|} \left( \frac{\pi}{|\tau|} \right)^{p/2} f(x', \tau) dx'$$

Cette écriture n'est pas exactement celle d'un OIF, on conjugue donc par la transformée de Fourier par rapport à la seconde variable :

$$\begin{aligned} FRR^*F^*f(x, y) &= \\ (2\pi)^{-q} \int e^{-\frac{1}{2}(|x|^2 + |x'|^2)|\tau| + i\langle y - y', \tau \rangle} &\left( \frac{\pi}{|\tau|} \right)^{p/2} f(x', y') dy' dx' d\tau \end{aligned}$$

Cet opérateur s'écrit donc comme un OIF, avec une phase positive et 1-homogène :

$$\phi(x, x', y, y', \tau) = i \frac{1}{2} (|x|^2 + |x'|^2) |\tau| + \langle y - y', \tau \rangle$$

On va maintenant décrire l'idéal lagrangien associé à  $\phi$ .

On commence par considérer l'idéal des fonctions sur  $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^q$  engendré par les fonctions :

$$\begin{aligned} \phi(x, x', y, y', \tau) &= i \frac{1}{2} (|x|^2 + |x'|^2) |\tau| + \langle y - y', \tau \rangle \\ \partial_{x_i} \phi - \xi_j &= -\xi_j + i x_j |\tau| = -s_j(x, \xi, y, \tau) \\ \partial_{x'_i} \phi + \xi'_j &= \xi'_j + i x'_j |\tau| = \overline{s}_j(x', \xi', y', \tau) \\ \partial_{y_i} \phi - \eta_j &= \tau_j - \eta_j \\ \partial_{y'_i} \phi - \eta_j &= -\tau_j + \eta'_j \\ \partial_{\tau_j} \phi &= i \frac{1}{2} (|x|^2 + |x'|^2) \frac{\tau_j}{|\tau|} + y_j - y'_j \end{aligned}$$

L'idéal associé à  $\phi$  est alors exactement l'idéal  $J_\phi$  engendré par les fonctions :

$$\begin{aligned} s_j(x, \xi, y, \eta) \\ \overline{s}_j(x', \xi', y', \eta') \\ a_j := \eta_j - \eta'_j \\ b_j := i \frac{1}{2} (|x|^2 + |x'|^2) \frac{\eta_j}{|\eta|} + y_j - y'_j \end{aligned}$$

Cet idéal contient bien l'idéal  $I$  engendré par  $s_j(x, \xi, y, \eta)$  et  $\overline{s}_j(x', \xi', y', \eta')$  ; par ailleurs, toute fonction dans cet idéal est contenue dans l'idéal  $K$  des fonctions nulles lorsque  $x = x' = 0, \xi = \xi' = 0, y = y', \eta = \eta'$ .

Réciproquement, soit  $J$  un idéal lagrangien positif tel que  $I \subset J \subset K$ , et soit  $m \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

- Si  $m$  ne vérifie pas  $x = x' = 0, \xi = \xi' = 0$ , alors l'une des fonctions qui engendrent  $I$  est non nulle au voisinage de  $m$ , donc au voisinage de ce point,  $J$  est engendré par la liste précédente de générateurs. Donc au voisinage de  $m$ , on a  $J = J_\phi$ .
- Si  $m$  vérifie  $x = x' = 0, \xi = \xi' = 0$  mais  $(y, \eta) \neq (y', \eta')$ . Dans ce cas, l'un des générateurs locaux de  $J_\phi$  est non nul, donc on a bien  $J \subset J_\phi$  au voisinage de  $m$ .
- Si  $m$  est tel que  $x = x' = 0, \xi = \xi' = 0, y = y', \eta = \eta'$ , on peut supposer qu'un système de générateurs locaux de  $J$  contient

les  $s_j(x, \xi, y, \eta)$  et les  $\overline{s_j}(x', \xi', y', \eta')$ . Alors, sans perte de généralité, les autres générateurs ne dépendent pas de  $(\xi, \xi')$ . Parmi ces  $2q$  générateurs, il est impossible que moins de  $q$  d'entre eux dépendent de  $(y, y')$ , à cause de l'inclusion  $J \subset K$ ; par ailleurs, si plus de  $q$  d'entre eux dépendent de  $(y, y')$ , on peut enlever la dépendance en  $y$  de l'un d'entre eux en formant des combinaisons linéaires, et la fonction résultante est alors nécessairement indépendante de  $y'$ , encore une fois d'après l'inclusion  $J \subset K$ .

On a donc  $q$  fonctions, notées  $\tilde{a}_j$ , qui ne dépendent que de  $(x, x', \eta, \eta')$ , et  $q$  autres fonctions, notées  $\tilde{b}_j$ , qui ne dépendent que de  $(x, x', y, y', \eta, \eta')$ . On va maintenant utiliser le fait que les générateurs locaux doivent commuter pour le crochet de Poisson.

$$\{\tilde{a}_j, s_k\} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{a}_j}{\partial x_k} = 0$$

$$\{\tilde{a}_j, \overline{s_k}\} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{a}_j}{\partial x'_k} = 0$$

Donc en réalité, les fonctions  $\tilde{a}_j$  ne dépendent que de  $(\eta, \eta')$ . Comme de plus elles sont dans  $K$  et que leurs différentielles sont indépendantes, on peut les modifier pour que  $\tilde{a}_j = a_j$ . On va appliquer le même procédé aux fonctions  $\tilde{b}_j$ . On a :

$$\{\tilde{b}_j, s_k\} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial x_k} - i \frac{x_k}{|\eta|} \langle \eta, \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial y} \rangle = 0$$

$$\{\tilde{b}_j, \overline{s_k}\} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial x'_k} + i \frac{x'_k}{\eta} \langle \eta, \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial y'} \rangle = 0$$

$$\{\tilde{b}_j, a_k\} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial y_k} - \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial y'_k} = 0$$

La dernière ligne nous fournit que  $\tilde{b}_j$  ne dépend que de  $(x, x', \eta, y - y')$ . Alors puisque les différentielles sont indépendantes et que  $J \subset K$ , en prenant des combinaisons linéaires on peut imposer :

$$\tilde{b}_j = y_j - y'_j + c_j(x, \eta, x')$$

En réinjectant dans les lignes précédentes, on trouve :

$$\frac{\partial c_j}{\partial x_k} - i x_k \frac{\eta_j}{|\eta|} = 0$$

$$\frac{\partial c_j}{\partial x'_k} - i x'_k \frac{\eta_j}{|\eta|} = 0$$

donc, puisque  $c_j \in K$

$$c_j(x, \eta) = \frac{i \eta_j}{2 |\eta|} (|x|^2 + |x'|^2)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Nous portons à l'attention du lecteur que dans [BdMS75], le résultat concerne la relation canonique complexe associée à  $\phi$ , et que l'argument donné est géométrique ; en particulier, les fonctions génératrices considérées dans cet article ne commutent pas.

□

### 2.2.1.2 Le cas général

Les calculs explicites que nous avons menés peuvent se généraliser :

**Proposition 2.9.** Soit  $(D_j)$ ,  $1 \leq j \leq p$  un système d'opérateurs pseudodifférentiels classiques de symboles  $d_j$ , sur une variété  $X$  de dimension  $n$ . On suppose que pour tous  $j$  et  $k$ , on a  $\{d_j, d_k\} = 0$ , et que par ailleurs, en chaque point d'annulation commun des  $d_j$ , la matrice  $\{d_j, \overline{d_k}\}$  est, ou bien définie positive, ou bien définie négative.

Alors il existe deux OIF  $L^-$  et  $S$ , vérifiant les conditions suivantes :

1.  $Id \sim S + L^- D$ .
2.  $DS \sim 0$ .
3.  $S = S^* \sim S^2$ .

En particulier  $S$  est un opérateur continu  $L^2(X) \mapsto L^2(X)$ .

*Démonstration.* On suit la preuve présentée par Boutet et Sjöstrand. On note  $\Sigma$  l'ensemble des zéros communs des  $d_j$  ; pour simplifier, on supposera que les  $d_j$  sont analytiques.

Cette proposition est de nature purement locale. D'une part, si on a un recouvrement paracompact de  $T^*X$  par des ouverts  $(W_j)$  tels que, sur chaque  $W_j$ , il existe des opérateurs  $L_j^-$  et  $(S_j)$  vérifiant les relations précédentes, où on remplace " $\sim$ " par "le front d'onde de la différence n'intersecte pas  $W_j$ ", alors en considérant  $(\chi_j)$  une partition de l'unité adaptée à  $(W_j)$ , les opérateurs suivants conviennent :

$$S = \sum_j \chi_j(x, \xi) S_j(x, \xi)$$

$$L = \sum_j \chi_j(x, \xi) L_j(x, \xi).$$

D'autre part, si dans un ouvert  $W$ , on a deux candidats locaux  $(S, L)$  et  $(S', L')$ , alors naturellement (encore une fois " $\sim$ " signifie "le front d'onde de la différence n'intersecte pas  $W_j$ ") :

$$S \sim (S' + L' D) S \sim S' S$$

$$S' \sim (S + L D) S' \sim S S'$$

donc

$$S = S^* \sim (S'S)^* \sim S^*S'^* \sim SS' \sim S'$$

Donc on a unicité locale de  $S$ .

On va maintenant construire  $S$  et  $L$  localement. Soit  $W$  un voisinage d'un point  $w \in T^*X$ . Si  $w \notin \Sigma$ , alors l'un des  $d_j$  est non nul sur  $W$ ; on peut donc prendre pour  $L$  une paramétrice de  $d_j$ , et  $S = 0$ .

Si en  $w \in \Sigma$ , la matrice des  $\{d_j, \overline{d_k}\}$  est définie positive, alors il existe d'une part une transformation canonique  $\phi : T^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow W$  telle que  $d_j \circ \phi = s_j$ , où on a repris les notations de la partie précédente; et d'autre part un OIF  $V$  associé à  $\phi$ , de paramétrice  $U$ , et une matrice inversible  $A$  dont les éléments sont des opérateurs pseudo-différentiels classiques, tels que, sur un ouvert  $W' \subset W$ , on ait :

$$D \sim UAD^+V$$

Cette dernière affirmation mérite une justification. À cause de l'égalité des symboles, on sait qu'on a  $D = UD^+V$  au premier ordre. Par récurrence, s'il existe une matrice elliptique  $A_n$  telle que  $D = UA_nD^+V$  à l'ordre  $n$ , alors il existe une matrice  $B_n$  d'opérateurs de degré  $-1$  telle que  $D = U(Id + B_n)A_nD^+V$  à l'ordre  $n+1$  (en regardant les symboles). Comme tous les symboles considérés sont classiques, la suite  $(A_n)$  converge au moins sur un petit ouvert autour de  $u$ . On a alors  $D = UAD^+V$  à tous les ordres; comme les symboles considérés sont analytiques, on en déduit le résultat recherché.

Lorsque les  $d_j$  ne sont pas analytiques, on ne peut pas conclure, à moins de se contenter d'une classe d'équivalence plus large entre deux OIF, à savoir "être égal à tous les ordres". Les constructions des chapitres suivants n'utilisent pas explicitement que les opérateurs construits sont égaux à un noyau  $C^\infty$  près, donc cette construction suffit. Notons que dans [BdM75], une preuve est présentée dans le cas non analytique.

En utilisant cette écriture de  $D$ , on a envie de poser :

$$S_1 = UPV$$

$$L_1 = UL^+A^{-1}V,$$

où  $P = RR^*$  est le projecteur construit précédemment. Malheureusement, l'opérateur  $S_1$  n'est alors pas symétrique, même approximativement. On remarque plutôt que  $R^*U^*UR$  est un opérateur pseudodifférentiel (parce que  $U^*U$  l'est) classique, et est elliptique. On en considère une paramétrice  $B$ , et on pose :

$$S_2 = URBR^*U^*$$

Alors  $S_2 \sim S_2^*$ , et par ailleurs,  $S_1 S_2 \sim S_2$ , ce dont on déduit que  $DS_2 \sim 0$ , et par ailleurs  $S_2 S_1 \sim S_1$ , donc  $S_2^2 \sim S_2$  et  $(Id - S_2)(Id - S_1) \sim Id - S_2$ . On peut alors poser :

$$L = (Id - S_2)L_1$$

Alors, comme par construction  $1 - S_1 \sim L_1 D$ , on a bien  $S_2 + LD \sim Id$ .

On peut alors poser  $S = (S_2 + S_2^*)/2$ , alors  $S = S^*$ , et  $S = L^2$ , finalement le couple  $(S, L)$  convient.

Enfin, si  $w \in \Sigma$  et que, dans  $W$ , la matrice des  $\{d_j, \overline{d_k}\}$  est définie négative, alors on peut appliquer un raisonnement similaire, mais cette fois

$$D \sim UAD^{-1}V$$

On peut alors prendre directement  $S = 0$  et  $L = UA^{-1}D^{-1}V$ .

□

En reprenant le raisonnement de la partie précédente, le plus grand idéal lagrangien  $J$  qui contienne l'idéal engendré par les  $d_j$  en le premier jeu de variables et les  $\overline{d_j}$  en le second jeu de variables, et qui soit contenu dans l'idéal des fonctions qui s'annulent sur  $diag(\Sigma)$ , est l'idéal associé à la phase qui définit  $S$ .

### 2.2.1.3 Application au projecteur de Sgegő

On va considérer le cas particulier où le système d'opérateurs est  $\overline{\partial}_b$ , sur le bord d'une variété pseudoconvexe.

Par une carte locale, on suppose qu'une variété  $X$ , au voisinage d'un point  $x$ , est l'intersection d'une sous-variété de  $\mathbb{C}^n$  avec un voisinage de 0 noté  $U$ , et vérifie  $X \cap U = \{\rho = 0\}$  où  $d\rho(0) = dz_n + d\overline{z}_n = 2dx_n$ , et  $\text{Hess}_{\mathbb{C}\rho} \gg 0$ . Une base de  $T^{0,1}(X \cap U)$  est alors donnée par les  $n-1$  vecteurs :

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} - \left( \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_n} \right)^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_j} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}.$$

On définit alors le système d'opérateurs  $(D_j)$  par

$$D_j f := Z_j \cdot f = df(Z_j).$$

Alors on a, d'une part,  $Df = 0 \Leftrightarrow \overline{\partial}_b f = 0$ , et d'autre part,  $D_j$  est un opérateur différentiel créé par le symbole

$$s_j = i(\xi_j - i\eta_j) - i \left( \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_n} \right)^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_j} (\xi_n - i\eta_n).$$

Ainsi, on a  $\{s_j, s_k\} = 0$ . Par ailleurs, la variété caractéristique de  $D$  est l'ensemble  $\Sigma$  des points  $(x, \xi)$  tels que  $\xi = \alpha d\rho(x)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Lorsque  $(x, \xi) \in \Sigma$ , la matrice  $\{s_j, \overline{s_k}\} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \text{Hess}_{\mathbb{C}\rho}$  est définie positive lorsque  $\alpha > 0$  et définie négative sinon.

On peut alors appliquer le théorème précédent ; on appelle  $S'$  le projecteur approximatif ainsi créé, et on a  $\overline{\partial}_b S' \sim 0$ .

### 2.2.2 Identification avec le projecteur exact

Dans cette partie,  $S$  dénote le projecteur de Szegő, et  $S'$  le projecteur approximatif qu'on vient de construire. On veut démontrer qu'en fait :

**Proposition 2.10.**  $S \sim S'$ .

#### 2.2.2.1 Le projecteur de Bergmann exact

Pour démontrer la proposition précédente, on va se servir de propriétés de régularité du problème de prolongement holomorphe d'une fonction sur le bord vérifiant  $\bar{\partial}_b = 0$ .

On note d'abord  $\gamma$  l'opérateur de trace au bord, sur les fonctions et sur les formes, de manière à avoir :

$$\gamma \bar{\partial} = \bar{\partial}_b \gamma$$

On dispose par ailleurs, comme l'ouvert dont  $X$  est le bord est relativement compact, d'un opérateur  $K$  qui résoud le problème de Dirichlet à l'intérieur :

$$\Delta K = 0$$

$$\gamma K = Id$$

On sait par ailleurs qu'il existe un noyau de Green régulier  $G_1$ , qui vérifie :

$$\Delta G_1 = Id$$

$$\gamma G_1 = 0$$

$$G_1 \Delta + K = Id$$

$K\gamma$  est un projecteur, mais il n'est pas orthogonal, on va construire un projecteur  $H$  qui corrige ce défaut.

On sait que l'opérateur  $K^*K$  est elliptique de degré  $-1$ , et inversible (cf [? ]); on note  $A = (K^*K)^{-1/2}$ . Alors  $(KA)^*KA = Id_{L^2(X)}$ , autrement dit,  $KA$  est une isométrie de  $L^2(X)$  vers l'ensemble des fonctions harmoniques dans  $U$ , de carré intégrable jusqu'au bord. On note encore  $H = KA(KA)^*$  le projecteur orthogonal sur cet ensemble.

On note encore  $G = (Id - H)G_1$  ; il satisfait aux mêmes conditions que  $G_1$  en remplaçant  $\gamma$  par  $K^*$ , simplement parce que  $K^*(Id - H) = 0$ . Alors  $G$  est régulier et auto-adjoint. Enfin, on introduit une dernière notation, le projecteur de Bergmann  $B$  sur l'espace des fonctions holomorphes dans  $U$  et de carré intégrables jusqu'au bord.

L'un des objets des articles [Koh63],[Koh64] est de démontrer l'existence, sur les ouverts fortement pseudoconvexes, d'un opérateur continu  $F : L^2 \mapsto L^2$  vérifiant  $Id = B + F\bar{\partial}$  (cf annexe). Par ailleurs, l'on y



démontre aussi l'existence d'une constante  $C$  qui ne dépend que de l'ouvert  $U$ , telle que lorsqu'une forme  $\alpha$  de degré quelconque vérifie  $\bar{\partial}\alpha = 0$  et  $\bar{\partial}^*\alpha = 0$ , alors  $\|\alpha\|_{L^2} \leq \|\gamma\alpha\|_{L^2}$ . Nous admettrons ces deux résultats.

Une fonction holomorphe est harmonique, autrement dit,  $B = HB$ . Par caractère auto-adjoint, on a donc  $B = BH = HBH$ , autrement dit :

$$B = KA^2K^*BKA^2K^*$$

$B$  est conjugué à un projecteur orthogonal dans  $L^2(X)$ , noté  $S_A = AK^*BKA$ , car alors on a  $B = KAS_AAK^*$ .

**Lemme 2.11.** On a  $\text{Im}(S_A) = \text{Ker}(\bar{\partial}_b A)$ .

*Démonstration.* L'image de  $S_A$  vaut exactement

$$AK^*\text{Im}(B) = A^{-1}\gamma\text{Im}(B).$$

En effet, si  $f$  est harmonique, on a  $AK^*f = A^{-1}\gamma f$ . Or, puisque  $U$  est strictement pseudoconvexe, on a exactement  $\gamma\text{Im}(B) = \text{Ker}\bar{\partial}_b$ .  $\square$

### 2.2.2.2 Le projecteur de Bergmann approximatif

Le système d'opérateurs  $\bar{\partial}_b A$  vérifie encore les hypothèses de la partie précédente, donc on peut construire un projecteur approximatif autoadjoint  $S'_A$  et un OIF  $L'_A$  tels que

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_b AS'_A &\sim 0 \\ S'_A + L'_A \bar{\partial}_b A &\sim \text{Id}\end{aligned}$$

On peut alors construire un projecteur de Bergmann approximatif. On va démontrer que  $B' = KAS'_A AK^*$  vérifie, par rapport à  $\bar{\partial}$ , les bonnes conditions.

**Lemme 2.12.** On a  $\bar{\partial}B' \sim 0$ . Par ailleurs, il existe un opérateur continu  $F'$  tel que  $\text{Id} = B' + F'\bar{\partial}$ .

*Démonstration.* On utilise ici les résultats de régularité démontrés dans [Koh63], [Koh64]. En effet, on a évidemment  $\bar{\partial}\bar{\partial}B' = 0$ , et par ailleurs

$$\bar{\partial}^*\bar{\partial}B' = \frac{1}{2}\Delta KAS'_A AK^* = 0$$

ainsi que

$$\gamma\bar{\partial}B' = \bar{\partial}_b \gamma KAS'_A AK^* = \bar{\partial}_b AS'_A AK^* \sim 0$$

On sait par ailleurs que si  $\bar{\partial}\alpha = 0$  et  $\bar{\partial}^*\alpha = 0$ , alors  $\|\alpha\|_2 \leq C\|\gamma\alpha\|_2$ . On en déduit que  $\bar{\partial}B' \sim 0$ .

On va évidemment construire  $F'$  à l'aide de  $L'_A$ . En multipliant l'identité  $Id = S'_A + L'_A \bar{\partial}_b A$  par  $KA$  à gauche et par  $AK^*$  à droite, on obtient :

$$H \sim B' + KAL'_A \bar{\partial}_b A^2 K$$

Et en multipliant encore par  $H$  à droite, on obtient finalement :

$$H \sim B' + KAL'_A \gamma \bar{\partial} H$$

Il faut ensuite remonter depuis cette équation ; c'est ici qu'on utilise que  $Id = H + G\Delta$ , car alors :

$$\bar{\partial} H = \bar{\partial}(Id - G\Delta) = (Id - 2\bar{\partial}G\bar{\partial}^*)\bar{\partial}$$

Finalement, l'opérateur

$$F' = 2G\bar{\partial}^* + KAL'_A \gamma (Id - 2\bar{\partial}G\bar{\partial}^*)$$

convient. □

On est près du but.  $F'$  et  $B'$  sont des opérateurs réguliers (parce qu'ils ont été construits comme tels). Cependant,  $F$  n'envoie pas forcément  $C^\infty$  dans  $C^\infty$ , mais envoie au moins  $L^2$  dans  $L^2$  ; de même, on n'a a priori aucun résultat de régularité sur  $B$ .

Néanmoins, on sait que pour  $f \in C^{-\infty}$ ,  $(Id - B')f = F'\bar{\partial}f \text{ mod. } C^\infty$ . En multipliant à gauche par  $B$ , et en exploitant le fait que  $\bar{\partial}B = 0$ , on trouve que pour toute distribution  $f$ , on a  $(B - BB')f \in L^2$ . En outre, par dualité, l'opérateur  $B - B'B$  est continu de  $L^2$  dans  $C^\infty$ .

On peut raisonner de la même façon pour l'autre opérateur : comme  $Id - B = F\bar{\partial}$ , et que  $\bar{\partial}B' \sim 0$ , l'opérateur  $B' - BB'$  est continu de  $C^{-\infty}$  vers  $L^2$ . Alors les trois opérateurs  $B'$ ,  $B - B'B$ ,  $B' - B'B$  sont en particulier continus de  $C^\infty$  dans  $C^\infty$ , donc par soustraction,  $B$  l'est aussi. En bootstrapant, on trouve que  $B - B'B \sim 0$ , ainsi que son adjoint  $B - BB'$ .

Ainsi,  $B - B'$  est la soustraction des deux opérateurs  $B' - BB'$  et  $B - BB'$ , donc envoie  $C^{-\infty}$  dans  $L^2$  ; étant aussi la soustraction de  $B' - B'B$  et  $B - B'B$ , il envoie  $L^2$  dans  $C^\infty$ . Ainsi,  $(B - B')^2 \sim 0$ . Or, en développant  $(B - B')^2$  et en réutilisant que  $B - B'B \sim B - BB' \sim 0$ , on trouve que  $(B - B')^2 \sim B - B'$ .

### 2.2.2.3 Fin de la preuve

On note  $S$  le projecteur de Szegő exact, et  $S'$  le projecteur approximatif défini précédemment. On rappelle également que  $S'_A$  est le projecteur conjugué à  $B'$ . On définit alors naturellement

$$S_1 = AS_A A^{-1}$$

Alors  $S_1$  est un projecteur sur le noyau de  $\bar{\partial}_b$  (mais pas forcément orthogonal), de sorte que  $SS_1 = S_1$  et  $S_1S = S$ .

Par ailleurs on a  $S'S_1 \sim S_1$  et  $S_1S' = S'$  en vertu de l'existence de  $L'$  et de  $L'_A$ .

$S$  n'est pas a priori un opérateur régulier, mais on peut en fait répéter le raisonnement précédent, ce qui permet de conclure.

Il s'agit maintenant, pour conclure, de trouver une phase qui engendre le bon idéal  $J$ .

On se rappelle pour cela que,  $X = \partial D$  étant lisse, il existe une fonction  $\rho$  qui définit  $X$ . Cette fonction  $\rho$  donne naissance à une phase  $\psi \in C^\infty(X \times X, \mathbb{C})$  qui vérifie :

1.  $\psi(x, x) = \frac{1}{i} \rho(x)$ .
2.  $\psi(x, y) = -\overline{\psi(y, x)}$ .
3.  $\bar{\partial}_1 \psi(x + h, x + k) = O(h^n, k^n) \forall n$ .
4.  $\text{Im } \psi(x, y) \geq C(d(x, X) + d(y, X) + |x - y|^2)$ ,

où  $\bar{\partial}_1$  désigne la dérivée antiholomorphe par rapport à la première variable. En effet, les trois premières conditions déterminent le jet de  $\psi$  le long de  $\text{diag } X$ , et n'importe quelle réalisation de ce jet vérifie la dernière condition dans un voisinage de la diagonale, par forte pseudoconvexité ; on peut alors sans peine prolonger cette réalisation loin de la diagonale en conservant cette condition.

Dans le cas où  $X$  est un  $S^1$ -fibré, on pourra ajouter la condition d'invariance de  $\psi$  par rapport au champ de vecteurs  $d/d\theta$ .

On observe alors, par un examen direct des générateurs locaux, que l'idéal de  $C^\infty(T^*(X \times X), \mathbb{C})$  associé à la phase  $(x, y, t) \mapsto t\psi(x, y)$  est exactement  $\mathcal{J}$ .

### 2.2.3 Développement asymptotique du symbole

On redonne maintenant un calcul réalisé par Boutet et Sjöstrand dans [BdMS75] et qui donne le développement asymptotique d'une composition de deux opérateurs associés à la phase  $t\psi$ .

On note  $h_\psi(x, y)$  le déterminant du double de la matrice hessienne au point critique de la fonction  $(w, s) \mapsto \psi(x, w) + s\psi(w, y)$ . Si

$$A = \int_{\mathbb{R}_+^*} a(x, y, t) e^{it\psi(x, y)} dt$$

$$B = \int_{\mathbb{R}_+^*} b(x, y, t) e^{it\psi(x, y)} dt$$

alors

$$A \circ B = \int_{\mathbb{R}_+^*} c(x, y, t) e^{it\psi(x, y)} dt$$

et le lemme de phase stationnaire nous donne

$$c = \pi^n t^{1-n} (h_\psi)^{-1/2} ab \text{ mod. } \psi$$

Par ailleurs, sur la diagonale, on a  $h_\psi(x, x) = \frac{1}{16} \text{Hess}(\rho)(x)^2 \|d\rho\|^2$ .

Puisque  $S \circ S \sim S$ , on a nécessairement  $s_0(x, x) = \frac{1}{4\pi^n} \text{Hess}(\rho)(x) \|d\rho\|$ .

On peut maintenant étudier comment se comporte la composition de deux opérateurs dans  $I(X \times X, \mathcal{J})$ . Soient  $q_1$  et  $q_2$  deux symboles, et  $Q_1$  et  $Q_2$  les opérateurs correspondants. Alors  $Q_1 \circ Q_2$  a pour noyau

$$\iiint e^{it\psi(x, w) + is\psi(w, y)} q_1(x, w, t) q_2(w, y, s) dt dw ds$$

On va intégrer par rapport à  $t$  en dernier. Par le changement de variable  $s = t\sigma$  on se ramène à l'étude de l'intégrale :

$$\iint e^{it(\psi(x, w) + \sigma\psi(w, y))} q_1(x, w, t) q_2(w, y, t\sigma) t dw d\sigma$$

On pose à cet effet :

$$\Phi(x, y, w, \sigma) = \psi(x, w) + \sigma\psi(w, y).$$

Examinons les points critiques de cette phase. On a  $\text{Im}\Phi > 0$  sauf si  $x = y = w$ , et qu'à cet endroit, on a  $d_w\Phi = i(1 - \sigma)\partial\rho|_X$ . Sachant que  $\partial\rho|_X$  est partout non nul, les seuls points critiques sont ceux qui vérifient  $x = y = w$  et  $\sigma = 1$ . Quelle est la hessienne de cette phase ?

On se souvient à cet endroit que  $D$  est fortement pseudoconvexe, et qu'à ce titre, la forme de Lévy, restreinte à  $T'X$ , est définie positive. On notera  $L_X$  cette restriction, et on appellera  $\det L_X$  le discriminant de la forme quadratique réelle  $L_X$ .

Un développement à l'ordre 2 donne alors, au voisinage des points critiques :

$$\begin{aligned} -i\Phi(x, x, w, \sigma) &= (1 - \sigma)\partial\rho(w) + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (w_j - x_j) \overline{(w_k - x_k)} + O(|w - x|^3) \\ &= -i(\sigma - 1)(-i\partial\rho)(w) + L_X(w - x) + O(|w - x|^3) \end{aligned}$$

Or  $-i\partial\rho|_X$  est réelle et vaut 0 sur  $T'X + T''X$ , et est de norme  $1/2\|d\rho\|(x)$ . Donc dans une base orthonormée de  $\mathbb{R} \times T_x X$  dont le premier vecteur est  $\sigma$  et le second vecteur est orthogonal à  $T'X + T''X$ , la matrice de la hessienne de  $\Phi$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\|d\rho\|}{4i} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\|d\rho\|}{4i} & * & * & \dots & * \\ 0 & * & \left( \begin{array}{c} \\ \\ A \end{array} \right) & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},$$

où  $A$  est la matrice de  $L_X$  dans la base en question.

Le déterminant de cette matrice est donc exactement  $\|d\rho\|^2(x) \det L_X / 16$ . De cela on peut déduire le développement asymptotique complet de l'intégrale lorsque  $t$  est grand, par le théorème de phase stationnaire. On ne peut pas l'appliquer directement, car les symboles dépendent de  $t$ , mais si les symboles sont classiques, avec  $q_1 = \sum q_{1,j}$  et  $q_2 = \sum q_{2,j}$ , alors on peut tronquer à tout ordre. On se retrouve avec des opérateurs différentiels  $(A_k)_{k>0}$  tels que, sur la diagonale :

$$\begin{aligned} & \iint e^{it(\psi(x,w)+\sigma\psi(w,x))} q_1(x,w,t) q_2(w,x,t\sigma) t dw d\sigma \\ &= t^{1-n} \frac{4\pi^n}{\|d\rho\|(x) \sqrt{\det L_X}} \left[ \sum_{j=0}^N \sum_{j'=0}^N q_{1,j}(x,x) t^{m-j} q_{2,j'}(x,x) t^{m'-j'} \right. \\ &+ \sum_{k=1}^N t^{-k} A_k \left( \sum_{j=0}^{N-k} \sum_{j'=0}^{N-k} q_{1,j}(x,\cdot) t^{m-j} q_{2,j'}(\cdot,x) (\cdot t^{m'-j'}) \right) (x,1) \left. \right] + O(t^{m+m'+1-n-N}) \end{aligned}$$

En effet, le fait de dériver  $2j$  fois un symbole par rapport à  $\sigma t$  fait gagner  $2j$  facteurs  $t$  mais améliore le comportement du symbole en l'infini du même ordre.

**Remarque 2.13.** Cette formule présente une certaine similarité surprenante avec la formule (??) de composition des opérateurs pseudo-différentiels. On pourrait en réalité montrer une formule très générale de composition des symboles pour des OIF quelconques, mais nous avons voulu éviter la lourdeur du formalisme associé et se contenter de ce cas précis où la composition de deux opérateurs paramétrés par  $\psi$  donne un nouvel opérateur paramétré par  $\psi$ .

En particulier, au premier ordre, le symbole de la composition est

$$q_1 \# q_2(x, x, t) = \frac{4\pi^n}{\|d\rho\|(x) \sqrt{\det L_X}} q_{1,0}(x, x) q_{2,0}(x, x) t^{1-n+m+m'} + O(t^{m+m'-n}).$$

On peut calculer les termes suivants à loisir.

Essayons alors de réaliser un projecteur parmi  $I(X \times X, \mathbb{C})$ , d'ordre  $m$  dont le symbole  $s$  soit classique. L'équation sur  $s_0$  est alors :

$$s_0(x, x) t^m = \frac{4\pi^n}{\|d\rho\|(x) \sqrt{\det L_X}} s_0(x, x)^2 t^{1-n+2m}.$$

Ceci implique, d'une part,  $m = n - 1$ , et d'autre part, sur la diagonale,

$$s_0(x, x) = \frac{\|d\rho\|(x) \sqrt{\det L_X}}{4\pi^n} \text{ ou } 0.$$

Cependant on sait que  $s_0$  peut aussi être retrouvée, de manière beaucoup plus compliquée, par les constructions de cette partie, en partant du symbole de  $RR^*$  qui, lui, est non nul sur la diagonale. Ceci implique que  $s_0$  est lui-même non-nul sur la diagonale.

Il n'y a en fait pas besoin des termes suivants de ce développement pour retrouver le projecteur de Szego. Notre symbole  $s_0$ , qui vérifie  $s_0 = s_0^*$  et à qui on impose sans restriction  $\bar{\partial}_b s_0 = 0$ , est le premier terme du développement de  $s$ , le symbole du projecteur de Szego. Or  $s_0^{\#2} = s_0 + r$ , où  $r$  est un symbole qui donne naissance à un opérateur d'ordre  $-1$ . On a alors  $r = r^*$  et  $\bar{\partial}_b r = 0$ . Essayons de trouver  $s = s_0 + (1 - 2s_0)E(r)$  tel que  $s\#s = s$ . On a alors (puisque  $r$  commute avec  $s_0$ ) :

$$r - E(r)(4r + 1) + (1 + 4r)E(r)^{\#2} = 0$$

On peut alors trouver une série formelle en  $r$  qui résoud cette équation à tout ordre. À cette série formelle est associée une réalisation, puisque  $r$  donne naissance à un opérateur d'ordre  $-1$ . Par cette méthode on peut construire  $S$  approximativement à tous les ordres, mais d'une part on ne peut pas réaliser  $S$  à un noyau  $C^\infty$  près, et d'autre part cette méthode *ex nihilo* ne permet pas de démontrer que  $\bar{\partial}_b S = 0$  mais seulement  $\bar{\partial}_b S \sim 0$ .

A faire : résoudre ces histoires de plus grand idéal blabla, et trouver à quoi ça peut bien servir.

## 2.3 FIBRÉS POSITIFS SUR UNE VARIÉTÉ KÄHLERIENNE COMPACTE

### 2.3.1 Sections holomorphes de fibrés positifs

On va appliquer l'analyse microlocale du projecteur de Szegő à la quantification de variétés kähleriennes compactes. On exposera ici les principaux résultats et raisonnements de [Zel00].

Soit  $M$  une variété complexe compacte, et  $(L, h)$  un fibré en droites sur  $M$  associé à une structure hermitienne. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $h$  induit une métrique  $h_N$  sur  $L^{\otimes N}$ . Notre but ici est d'étudier les espaces  $H^0(M, L^{\otimes N})$ , dont on se donne une base orthonormée  $(s_1^N, \dots, s_{d_N}^N)$  (on sait que  $H^0(M, L^{\otimes N})$  est de dimension finie car  $M$  est compacte).

On suppose que  $L$  est *strictement positif*, c'est-à-dire que  $D = \{(m, v) \in L^{-1}, h_{-1}(v, v) < 1\}$  est fortement pseudoconvexe.

On va démontrer l'existence d'un développement asymptotique :

**Théorème 3** (Zelditch). Il existe une famille de fonctions lisses  $a_j : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , pour tout  $R > 0$ ,

$$\sum_{i=1}^{d_N} \|s_i^N(z)\|_{h_N}^2 = N^n + \sum_{0 < j < R} a_j(z) N^{n-j} + O_{C^\infty}(N^{n-R})$$

Ce théorème est riche de ses corollaires. Il implique premièrement que pour  $N$  assez grand, les sections  $s_i^N$  ne s'annulent pas toutes en même temps, on peut alors définir une application projective définie par  $\varphi_N : M \mapsto \mathbb{CP}^{d_N-1}$  par  $m \mapsto [s_1^N(m) : \dots : s_{d_N}^N(m)]$ , qu'on appelle application de Kodaira. On peut par ailleurs démontrer (nous ne le ferons pas ici) :

**Théorème 4** (Kodaira). ([FG02]) Pour  $N$  assez grand,  $\varphi_N$  est un plongement.

Secondement, le produit hermitien  $h$  définit une métrique  $\omega_g$  sur  $M$ , que l'on peut comparer avec le pull-back par  $\varphi_N$  de la métrique de Fubini-Study sur  $\mathbb{CP}^{d_N-1}$ . On a alors :

**Corollaire 2.14.**

$$\left\| \frac{1}{N} \varphi_N^*(\omega_{FS}) - \omega_g \right\| = O(N^{-1})$$

Le plongement de Kodaira est donc quasiment isométrique.

### 2.3.2 Espaces de Hardy équivariants

On notera  $X$  la frontière de  $D$ ; c'est un  $S^1$ -fibré sur  $M$ , et la fonction  $\rho(z) = h_{-1}(z, z) - 1$  définit  $X$ . La fonction  $\rho$ , et l'opérateur  $\bar{\partial}_b$ , sont

alors invariants par l'action de  $S^1$ . On peut donc décomposer l'espace de Hardy  $H^2(X)$  en la somme directe des :

$$H_N^2(X) = \{f \in H^2(X), f(r_\theta x) = e^{iN\theta} f(x)\}$$

L'espace  $H_N^2(X)$  sera appelé *espace de Hardy N-équivariant*. On va maintenant relier les fonctions dans cet espace aux sections holomorphes de  $L^{\otimes N}$  :

**Proposition 2.15.** Soit  $N \in \mathbb{Z}$ . Alors l'application :

$$\begin{aligned} H^0(M, L^{\otimes N}) &\mapsto H_N^2(X) \\ s &\mapsto \left( (m, v) \mapsto \langle v^{\otimes N}, s(m) \rangle \right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme unitaire.

Etudier  $H^0(M, L^{\otimes N})$  revient donc à étudier les espaces de Hardy N-équivariants. On note  $S_N$  le projecteur orthogonal de  $L^2(X)$  sur  $H_N^2(X)$ , et encore  $S_N(x, y)$  le noyau de ce projecteur, qui n'est rien d'autre que la N-ième composante de Fourier de  $S(x, y)$  par rapport à sa première variable.

En notant  $(s_1^N, \dots, s_{d_N}^N)$  une base orthonormée de  $H^0(M, L^{\otimes N})$ , et  $(\hat{s}_1^N, \dots, \hat{s}_{d_N}^N)$  la base correspondante de  $H_N^2(X)$ , on a naturellement :

$$S_N(x, y) = \sum_{i=1}^{d_N} \hat{s}_i^N(x) \overline{\hat{s}_i^N(y)}$$

En particulier, sur la diagonale,

$$S_N(x, x) = \sum_{i=1}^{d_N} \|\hat{s}_i^N(x)\|^2$$

Par ailleurs, le lecteur géomètre se sera souvenu que, au point  $w$  défini par les coordonnées  $[w_0 : \dots : w_m]$ , la métrique de Fubini-Study s'écrit :

$$\omega_{\text{FS}}(w) = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \left( \sum_{i=0}^m |w_i|^2 \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi_N^* \omega_{\text{FS}}(m) &= N\omega_g + \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \left( \sum_{j=0}^m \|\hat{s}_j^N(m)\|_{h_N}^2 \right) \\ &= N\omega_g + \frac{i}{2\pi} \partial_b \bar{\partial}_b \log S_N(x, x) \end{aligned}$$

L'avant-dernière ligne mérite une explication. Si  $e_L$  est une section locale de  $L$ , holomorphe et non nulle, alors avec  $a = \|e_L\|_h$ , on a  $\omega_g =$



$i\partial\bar{\partial}a$  par définition. Par ailleurs on écrit localement  $s_i^N = f_i^N e_L^{\otimes N}$ , où les  $f_i^N$  sont des fonctions holomorphes au voisinage du point considéré. Alors par définition,

$$\varphi_N^* \omega_{FS}(m) = \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \left( \sum_{i=0}^m |f_i^N|^2 \right).$$

d'où le résultat.

Le lecteur sagace aura donc remarqué qu'il ne reste plus qu'à estimer  $S_N$  et  $\partial_b \bar{\partial}_b S_N$  le long de la diagonale, ce qu'on va faire grâce à la caractérisation ci-dessus.

### 2.3.3 La preuve

On part de :

$$S_N(x, y) = N \int_{\mathbb{R}_+^+} \int_{S^1} e^{iN(-\theta + t\psi(r_\theta x, y))} s(r_\theta x, y, Nt) dt d\theta$$

où on a fait le changement de variable  $t \mapsto Nt$  dans le but d'appliquer le lemme de phase stationnaire.

On définit alors la phase

$$\Phi(x, y, t, \theta) = t\psi(t_\theta x, y) - \theta,$$

qui vérifie  $\text{Im}(\Phi) \geq 0$ , Comme d'ailleurs  $\text{Im}(\psi) > 0$  hors de la diagonale, les points critiques vérifient donc  $r_\theta x = y$ . On a par ailleurs que  $\psi(r_\theta x, x) = \frac{1}{i}(1 - e^{i\theta})$  donc :

$$\psi(x, x, t, \theta) = \frac{t}{i}(1 - e^{i\theta}) - \theta$$

Les points critiques vérifient  $d_t \Psi = d_\theta \Psi = 0$ , donc  $t = 1, \theta = 0$ . Sur cet ensemble critique, le déterminant de la hessienne vaut -1.

On invoque alors le lemme de phase stationnaire : il existe des opérateurs différentiels  $L_{k,j}$ , de degré  $2k$ , indépendants de  $N$ , tels que, à tout ordre  $K > 0$ ,

$$S_N(x, x) = N^n s_0(x, x) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=0}^{K-k} N^{n-k-j} L_{k,j} s_j(x, x) + O_{C^\infty}(N^{n-K})$$

$$= N^n \frac{1}{4\pi^n} \text{Hess}(\rho)(x) \|d\rho\| + N^{n-1} a_1(x) + \dots$$

$$S_N(x, x) d\mu = N^n \frac{1}{i} \partial \rho \wedge \omega_g^n + N^{n-1} a_1(x) + \dots$$

Ici  $\mu$  est la forme volume sur  $X$  définie par  $\rho$ .

Ceci est l'estimation sur  $S_N(x, x)$  désirée. En différentiant cette expression, on obtient  $\partial_b \bar{\partial}_b \log(S_N(x, x)) = O(1)$ , d'où le corollaire. Remarquons que le corollaire implique que  $\varphi_N$  est une immersion pour  $N$  assez grand (si la différentielle n'était pas injective, le pull-back d'une forme volume serait dégénéré). Pour démontrer le théorème de Kodaira, il suffit donc de montrer que  $\varphi_N$  est injective pour  $N$  grand.

A rédiger.

## STRUCTURE DE TOEPLITZ

---

Cette partie est consacré à un exposé des raisonnements et résultats de [SZ02]. Cependant, l'auteur a préféré, pour des raisons de clarté, exposer les raisonnements sur les Opérateurs Intégraux de Fourier en terme de leurs idéaux, et non de leurs lagrangiennes. Cette différence est motivée par la définition identique des idéaux dans le cas d'une phase complexe, et par la difficulté conceptuelle que pose d'emblée l'introduction des extensions presque analytiques comme présenté dans [MS75]. On rompt donc avec la description originelle proposée par Boutet et Guillemin, de manière à proposer un exposé concis. Certains problèmes techniques ne seront donc pas exposés ici, pour le confort du lecteur.

Dans cet exposé, on reprend les outils et objets de l'exposé précédent, mais on va en présenter une construction alternative, qui n'utilise pas a priori la structure exacte de  $\bar{\partial}_b$ , telle que la caractérisation microlocale de son noyau, ni même l'existence de solutions. Le but est de pouvoir ensuite étendre cette construction, donnée par Boutet et Guillemin dans l'annexe de [BdMG81], à des cas où la structure complexe est remplacée par une structure symplectique non intégrable, dans laquelle  $\bar{\partial}_b$  a les mêmes propriétés microlocales, mais ne possède pas de solution globale.

Comme dans l'exposé précédent, on se donne  $M$  une variété complexe de dimension  $n - 1$ ,  $(L, h)$  un fibré en droites hermitien positif sur  $M$ ; on se donne également une connection  $\nabla$  sur  $L$  "compatible" : sa courbure de Ricci est égale à  $-2i\omega_g$  où  $\omega_g$  est la métrique sur  $M$  définie par  $h$ . On notera  $\alpha$  la 1-forme sur  $X$  reliée à  $\nabla$ , qui définit une structure de contact sur  $X$ .

### 3.1 CONSTRUCTION DU PROJECTEUR APPROXIMATIF

#### 3.1.1 Des bonnes coordonnées locales

On se donne un point  $P_0 \in M$ . Au voisinage de ce point, on va considérer des coordonnées locales holomorphes  $(z_1, \dots, z_{n-1})$  vérifiant que le pull-back de la métrique  $\omega_g$  par la carte locale soit la métrique euclidienne en 0 (on ne demande pas que ce soit la métrique euclidienne dans un voisinage de 0, mais uniquement en 0, et c'est toujours possible).

On se donne alors une section locale de  $L$ , notée  $e_L$ , qui vérifie  $\|e_L\|_{P_0} = 1$ ,  $\nabla e_L(P_0) = 0$ , ainsi que  $\nabla^2 e_L(P_0) = -\omega_g(P_0)$ .

Dans les coordonnées locales, ceci revient à exiger :

$$\|e_L\|(z) = 1 - \frac{|z|^2}{2} + O(|z|^3)$$

On notera  $a(z) = \|e_L(z)\|^{-2}$ , et cette notation sera à nouveau utilisée plus loin.

On peut alors définir une carte locale de  $X$  par :

$$(z_1, \dots, z_n, \theta) \mapsto e^{i\theta} a(z)^{-1/2} e_L^*(z)$$

Les coordonnées locales  $(z_1, \dots, z_n, \theta)$  sont appelées coordonnées de Heisenberg.

**Remarque 3.1.** L'introduction de la connexion  $\nabla$  peut paraître artificielle dans ce contexte. En réalité, le cadre naturel d'application de cette théorie est l'étude de la quantification au sens de Kostant dans [Kos70] et Souriau dans [Sou67], où  $\nabla$  est alors donné a priori. Il est donc rassurant de constater que dans notre version des faits, le choix arbitraire de  $\nabla$  n'a pas de conséquence.

**Remarque 3.2.** Dans le cas symplectique, les coordonnées  $z_j$  peuvent être construites à la main à partir de coordonnées symplectiques sur  $M$ , de manière à vérifier les propriétés ci-dessus.

### 3.1.2 Description microlocale du symbole

Notre but est à présent de définir un projecteur de Szegő comme un opérateur intégral de Fourier. Celui-ci sera décrit par une phase complexe, il est donc confortable de raisonner en termes d'idéaux lagrangiens. On va encore une fois utiliser les notations, constructions et résultats de [Hör85].

L'opérateur de Cauchy-Riemann est un opérateur pseudo-différentiel. Son symbole peut être décrit localement : si  $(Z_j^k)$  est la base locale de  $T''X$  définie précédemment, et  $(\zeta_j)$  est la base duale correspondante, le symbole est :

$$d_0 := \sigma_{\bar{\partial}_b}(x, \xi) = \sum_{j \neq k} \langle \xi, Z_j^k \rangle \zeta_j$$

La variété caractéristique de  $\bar{\partial}_b$  est donc exactement  $(T'X + T''X)^\perp$  ; c'est un fibré en droites, que nous noterons  $\Sigma$ .

La forte pseudoconvexité de  $D$  implique que  $\Sigma$  est orientable. Soit en effet, au voisinage d'un point  $x \in X$ , une section non nulle  $N$  de  $\Sigma$ , ainsi que la base  $(Z_j^k)$  de  $T''X$  définie précédemment. Alors  $(\bar{Z}_j^k)$  est une base locale de  $T'X$ . La condition de forte pseudoconvexité équivaut à

ce que la matrice des dérivées secondes croisées de  $\rho$  soit définie positive sur  $X$  ; un rapide calcul montre alors que la matrice  $iN([Z_i^k; Z_j^k])$  est soit hermitienne positive non dégénérée, soit hermitienne négative non dégénérée (cela dépend du choix de  $N$ ). On peut alors décomposer  $\Sigma$  en  $\Sigma^+$ , la nappe sur laquelle cette matrice est positive,  $\Sigma^-$ , la nappe sur laquelle cette matrice est négative, et bien sûr l'image de la section nulle.

### 3.1.3 Définition de l'idéal

Notons  $p_j(x, \xi) = \langle \xi, Z_j^k \rangle$ . Ces fonctions vérifient  $\{p_i, p_j\} = 0$ , et  $\Sigma$  est le lieu des zéros communs de  $p_j$ . Par ailleurs, la matrice des  $\frac{1}{i}\{p_i, \bar{p}_j\}$  est définie positive sur  $\Sigma^+$ . Définissons un idéal de fonctions complexes sur le cotangent :

$$\mathcal{I} := \{f \in C^\infty(T^*X, \mathbb{C}), \forall (x, \xi) \in \Sigma, \exists (g_1, \dots, g_k) \in C^\infty(T^*X, \mathbb{C}), f = \sum_{j \neq k} g_j p_j\}$$

Par définition,  $\mathcal{I}$  est l'idéal engendré par les  $p_i$ . Alors  $\mathcal{I}$  est stable par crochet, on peut vérifier en fait que  $\mathcal{I}$  est un idéal lagrangien. Cet idéal est même *positif*, au sens où la matrice des crochets des générateurs locaux est définie positive sur le lieu commun des zéros,  $\Sigma^+$ . C'est aussi un sous-idéal de  $\mathcal{K} = \mathcal{I} + \bar{\mathcal{I}}$ , l'idéal des fonctions complexes s'annulant sur  $\Sigma$ .

Il semble naturel que  $\mathcal{I}$  soit associé au projecteur de Szegő. Pour que la notion de projecteur orthogonal ait un sens, il faut que l'idéal associé  $\mathcal{J} \subset C^\infty(T^*(X \times X), \mathbb{C})$  vérifie que  $\mathcal{J} \circ \mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}$ , on va donc construire un tel idéal, qui devra être lagrangien.

On considère donc  $\mathcal{J} = \mathcal{I} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{\mathcal{I}}$ .  $\mathcal{J}$  vérifie trivialement que  $\mathcal{J} = \mathcal{J}^*$ . Par ailleurs, puisque  $\mathcal{I} + \bar{\mathcal{I}} = \mathcal{K}$ , on a  $\mathcal{J} \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{J} = \mathcal{I} \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \bar{\mathcal{I}} + 1 \otimes \mathcal{K} \otimes 1$ . Or,  $\mathcal{J} \circ \mathcal{J}$  est le sous-idéal de  $\mathcal{J} \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{J}$  des fonctions qui ne dépendent pas des variables du milieu. La contribution du troisième terme est nécessairement nulle (si une fonction s'annule sur  $\Sigma$  et est constante alors elle s'annule partout), donc  $\mathcal{J} \circ \mathcal{J} = \mathcal{J}$ .

### 3.1.4 Paramétrisation de l'idéal

Pour montrer que  $\mathcal{J}$  est un idéal lagrangien, on va montrer que c'est l'idéal relié à une phase complexe  $\psi$ , qu'on va construire maintenant.

L'invariance par rapport à  $S^1$  et l'antisymétrie de  $\mathcal{J}$  nous invitent à considérer une phase sur  $X \times X \times \mathbb{R}$  de la forme

$$(z, \lambda, w, \mu, t) \mapsto -it(1 - \lambda \bar{\mu} a(z, w))$$

Où  $a(z, w)$  est symétrique.

La raison de la notation  $a(z, w)$  vient du fait que  $\mathcal{J}$  est contenu dans l'idéal des fonctions qui s'annulent sur  $diag(\Sigma)$ , ce qui signifie

en particulier que  $\psi$  s'annule uniquement sur la diagonale, et donc  $a(z, z) = a(z)$ . La même inclusion donne  $d_z a$  sur la diagonale, puisqu'à cet endroit on doit avoir  $a^{-1} d_z a + \lambda^{-1} d_z \lambda = \alpha$ .

Sous ces deux conditions, on a un unique germe de  $a(z, w)$  le long de  $\text{diag}(X)$ . Dans les coordonnées de Heisenberg, la phase s'écrit :

$$\psi(x, y, t) = -it \left( 1 - e^{i(\theta - \phi)} \frac{a(z, w)}{\sqrt{a(z)} \sqrt{a(w)}} \right)$$

Cette phase est bien de type positif puisqu'on peut vérifier à la main que :

$$a(z, w) = 1 + z\bar{w} + O(|z|^3 + |w|^3)$$

### 3.1.5 Construction d'un projecteur de Szegő

On va construire  $S \in I^0(X, X, \mathcal{J})$  vérifiant  $S = S^2 = S^*$ . On commence naturellement par déterminer le premier terme du symbole : avec  $S = \int_{\mathbb{R}^+} e^{it\psi} s_0(x, y) t^{n-1} dt \text{ mod. } I^{-1}(X, X, \mathcal{J})$ , on a, grâce au lemme de phase stationnaire :

$$s_0(x, y)^2 = h(x, y) s_0(x, y) \text{ mod. } \psi$$

Ici  $h(x, y)$  est une fonction liée à la hessienne de  $\psi$ , et non nulle sur la diagonale.

Si on veut que  $s_0$  ne s'annule pas, on a un unique candidat naturel modulo  $\psi$ , à savoir  $s_0(x, y) = h(x, y)$ .

On dispose d'un projecteur approximatif, lié à un symbole  $s_0$ , qui vérifie que  $s_0 * s_0 = s_0 + r$ , avec  $r \in S^{-1}$ . Si on veut  $s = s_0 + e$  avec  $s * s = s$ , on obtient  $e = 1/2 - \sqrt{r + 1/4}$ . Cette série formelle possède une réalisation, et l'on peut construire  $S$ , qui est unique à un noyau  $C^\infty$  près.

Quitte à remplacer  $S$  par  $(S + S^*)/2 \sim S$ , on peut supposer que  $S$  est autoadjoint. Puisque  $S^2 = S + K$ , et que  $K$  est un opérateur compact, on a  $\text{spec}_{\text{ess}}(S) = \{0, 1\}$ .  $S$  possède éventuellement des valeurs propres, qui s'accumulent en 0 ou en 1. On peut donc, à un projecteur de dimension finie près, corriger  $S$  en un projecteur.

### 3.1.6 Opérateur pseudo-différentiel associé à $S$

On va remplacer  $\bar{\partial}_b$  par un opérateur  $\bar{D}_0$  tel que  $S$  est la projection sur le noyau de  $\bar{D}_0$ .

Construisons de ce pas cet opérateur, en suivant la méthode proposée dans [BdMG81]. On commence par constater que comme le symbole de  $\bar{\partial}_b$  est  $d_0$ , alors  $\bar{\partial}_b S$  est de degré au plus 0. On utilise alors le lemme suivant :

**Lemme 3.3.** Soit  $A \in \mathcal{I}^m(X, X, \mathcal{J})$ . Alors il existe un opérateur pseudo-différentiel  $Q$  de degré  $m$  tel que  $A \sim QS$ . Si  $A$  est symétrique alors on peut choisir  $Q$  symétrique.

**Démonstration.** Raisonnons d'abord localement. Au voisinage d'un point  $(x, y) \in X \times X$ , notons  $a$  un symbole de  $A$ . Si  $x \neq y$ , alors  $A(x, y)$  est  $C^\infty$  au voisinage de  $(x, y)$  donc  $Q = 0$  convient. Si  $x = y$ , on sait que  $s_0(x, y)$  est non nul au voisinage de  $(x, y)$ , donc sur ce voisinage on peut écrire  $a(x, y, t) = s_0(x, y)q_0(x, y, t)$ , où  $q_0$  est de degré  $m$ . Avec  $Q_0$  l'opérateur pseudo-différentiel de symbole  $q_0$ , on a  $A - SQ_0 \in \mathcal{I}^{m-1}(X, X, \mathcal{J})$  au voisinage de  $(x, y)$ . Récursivement, on construit une suite de symboles  $q_i$ , de degré  $m-i$ , tel que  $A - S(Q_0 + Q_1 + \dots + Q_i) \in \mathcal{I}^{m-i-1}(X, X, \mathcal{J})$  au voisinage de  $(x, y)$ . A la suite formelle  $q_i$ , on peut associer une réalisation  $Q$  par le lemme de Borel. Alors  $A - SQ$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $(x, y)$ . Si  $a$  est symétrique alors naturellement la suite  $q_i$  est symétrique donc  $Q$  est symétrique.

Par une partition de l'unité sur  $X \times X$ , on peut construire  $Q$  globalement.  $\square$

Par application du lemme, on sait alors que  $\bar{\partial}_b S \sim QS$ , où  $Q$  est un opérateur pseudo-différentiel symétrique de degré 0. Par ailleurs, on peut remplacer 0 par sa moyenne le long de l'action de  $S^1$  (qui lui est équivalente) de manière à ce que  $Q$  soit  $S^1$ -invariant.

On construit alors  $D_0 = (\bar{\partial}_b - Q)(Id - S)$ . C'est un opérateur symétrique, et pseudodifférentiel puisque  $\bar{\partial}_b$  et  $Q$  sont pseudodifférentiels et  $(\bar{\partial}_b - Q)S \sim 0$ ; par ailleurs  $D_0$  est symétrique,  $S^1$ -invariant, de symbole  $d_0$ , et  $S$  est la projection sur le noyau de  $D_0$ .

On peut en fait construire un complexe d'opérateurs qui simulent le complexe  $\bar{\partial}_b$  (agissant sur les  $(0-q)$ -formes), mais nous ne le ferons pas ici.

### 3.2 ASYMPTOTIQUES DANS L'ESPACE DE HARDY

Comme  $D_0$  commute avec l'action de  $S^1$ , on peut décomposer son noyau selon les espaces propres de  $\partial_\theta$  : pour  $N \in \mathbb{N}$ , on définit l'espace  $H_N^2(X)$  des fonctions dans  $L^2(X)$  annulant  $D_0$  et  $N$ -équivariantes. On note par ailleurs  $S_N$  la projection orthogonale sur  $H_N^2(X)$ , et encore  $S_N$  le noyau de ce projecteur, qui est la  $N$ -ième composante de Fourier de  $S(x, y)$  par rapport à sa première variable.

### 3.2.1 Comportement du noyau près de la diagonale

**Théorème 5** (Shiffman-Zelditch). Soit  $P_0 \in X$ , et  $\rho$  une carte locale de coordonnées de Heisenberg autour de  $P_0$ . On définit  $S_N^{P_0}(u, \theta, v, \varphi) = S_N(\rho(u, \theta), \rho(v, \varphi))$ . Soit  $K > 0$ , alors on a :

$$(N\pi)^{-n+1} S_N^{P_0}\left(\frac{u}{\sqrt{N}}, \frac{\theta}{N}, \frac{v}{\sqrt{N}}, \frac{\varphi}{N}\right) = e^{i(\theta-\varphi)+i\operatorname{Im}(u\bar{v})-\frac{1}{2}|u-v|^2} \left(1 + \sum_{r=1}^K N^{-r/2} b_r(u, v) + N^{-(K+1)/2} R_K(u, v, N)\right)$$

Où  $\|R_K(u, v, N)\|_{C^j(\{|u|<r, |v|<r\})} \leq C_{K,j,r}$ , indépendamment de  $P_0$ .

**Démonstration.** On expose schématiquement la preuve proposée dans [SZ02]. Pour des raisons de lourdeur, les estimations explicites sur les restes ne seront pas reprises.

Par  $S^1$ -équivariance, il suffit de considérer les cas où  $\theta = \varphi = 0$ . On a alors l'expression

$$S_N^{P_0}\left(\frac{u}{\sqrt{N}}, 0, \frac{v}{\sqrt{N}}, 0\right) = N \int_{\mathbb{R}^+} \int_0^{2\pi} e^{iN(-\theta+t\psi(u/\sqrt{N}, \theta, v/\sqrt{N}, 0))} s(u/\sqrt{N}, \theta, v/\sqrt{N}, 0) d\theta dt$$

Et on va appliquer le lemme de phase stationnaire à cette intégrale. On rappelle que

$$\psi(u, \theta, v, 0) = i \left(1 - \frac{a(u, v)}{\sqrt{a(u)}\sqrt{a(v)}} e^{i\theta}\right),$$

et qu'à ce titre, en vertu du développement asymptotique de  $a$  au voisinage de la diagonale, la phase dans l'intégrale vaut :

$$\tilde{\Psi} := t\psi\left(\frac{u}{\sqrt{N}}, \theta, \frac{v}{\sqrt{N}}, 0\right) - \theta = it(1 - e^{i\theta}) - \theta - \frac{it}{N} e^{i\theta} \left(u \cdot \bar{v} - \frac{|u|^2 + |v|^2}{2}\right) + t e^{i\theta} O(N^{-3/2})$$

On note  $\Psi(t, \theta) = it(1 - e^{i\theta}) - \theta$ . La phase dans l'intégrale définissant  $S_N^{P_0}$  se décompose donc en une phase oscillante  $e^{iN\Psi}$ , à laquelle on va appliquer le lemme de phase stationnaire, et une phase non oscillante qu'on va incorporer dans le symbole. Pour se débarrasser des ennuis quand  $t \rightarrow +\infty$ , on va également décomposer l'intégrale en une intégrale sur  $[0, 3]$  et une intégrale sur  $[2, +\infty[$ , avec une partition de l'unité  $\rho_1, \rho_2$  adaptée. Posons :

$$A(t, \theta, u, v, N) = \rho_1(t) e^{iN(\tilde{\Psi}-\Psi)} s(u/\sqrt{N}, \theta, v/\sqrt{N}, 0, Nt),$$

Et appliquons le lemme de phase stationnaire à l'intégrale :

$$N \int_0^3 \int_0^{2\pi} e^{iN\Psi(t, \theta)} A(t, \theta, u, v, N) d\theta dt$$



Le seul point critique de  $\Psi$  est en  $t = 1, \theta = 0$ , et la hessienne en ce point est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ , de déterminant  $-1$ . Le lemme de phase stationnaire donne :

$$I_1(u, v, N) = \sqrt{-2i\pi} \sum_{r=0}^K N^{-r} L_r(A)(1, 0, u, v, N) + R_K(u, v, N)$$

Ici  $L_r$  est un opérateur d'ordre  $2r$  qui n'agit que sur les variables  $t$  et  $\theta$ , et  $L_0 = Id$ .

Ceci nous donne bien le développement asymptotique souhaité, il ne reste plus qu'à vérifier que l'autre morceau,  $S_N^{P_0}$ , est d'ordre  $N^{-\infty}$ . Mais sur  $[2, +\infty[$ , la différentielle de  $\Psi$  est uniformément loin de 0 quand  $N$  est grand, d'où le résultat.  $\square$

### 3.2.2 Application à Kodaira et à Tian

Le théorème précédent nous redonne directement l'asymptotique de  $S_N$  sur la diagonale qui permet de démontrer que l'application de Kodaira existe, et qu'elle est quasi-isométrique (c'est donc a fortiori un plongement). Pour démontrer que cette application est injective, Shiffman et Zelditch citent une idée de Bouche, que nous réexposons ici. On sait qu'en particulier, pour tout point  $P \in X$ , la fonction  $x \mapsto S_N(P, x)$  est dans  $H_N^2(X)$  et de norme 1. Par ailleurs, si  $P_N$  et  $Q_N$  ont la même image par le plongement de Kodaira, alors en particulier  $S_N(P_N, x) = S_N(Q_N, x)$  pour tout  $x$ . Supposons qu'un tel couple  $(P_N, Q_N)$  existe pour une infinité de valeurs de  $N$ , quitte à extraire on peut raisonner par disjonction de cas :

- Si  $\text{dist}(P_N, Q_N)\sqrt{N} \rightarrow +\infty$ , alors par le théorème de la section précédente, on sait que  $N^{1-n} \int_{B(P_N, \text{dist}(P_N, Q_N)/2)} |S_N^{P_N}|^2 > 1 - o(1)$ , de même pour  $Q_N$ . Dans ce cas, la norme  $L^2$  de  $S_N(x, \cdot)$  est au moins  $2N^{(1-n)/2}$ , ce qui contredit l'asymptotique du théorème de Zelditch.
- Si  $\text{dist}(P_N, Q_N)\sqrt{N} \leq C$ , alors l'expression asymptotique de  $S_N$  autour de la diagonale, à l'échelle  $1/\sqrt{N}$  donne  $S_N(P_N, Q_N) \neq N^{1-n} = S_N(Q_N, Q_N)$ , et a fortiori interdit que  $S_N(P_N, \cdot) = S_N(Q_N, \cdot)$ .



## APPENDICE : NOTIONS DE GÉOMÉTRIE COMPLEXE

---

### A.1 STRUCTURES DE CAUCHY-RIEMANN

#### A.1.1 Complexification de l'espace tangent et définitions

Soit  $M$  une variété complexe, de dimension complexe  $n$ . La variété  $TM$  est un fibré vectoriel réel sur  $M$ , de dimension  $2n$ , mais on souhaite travailler sur une structure vectorielle complexe.

Pour cela on considère le complexifié de  $TM$ , que l'on note (un peu abusivement)  $TM \otimes \mathbb{C}$ . L'une des motivations est la suivante : si  $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ , seules les formes  $d\Re f$  et  $d\Im f$  ont un sens dans  $T^*M$ . La forme  $df = d\Re f + id\Im f$  agit naturellement, elle, sur  $TM \otimes \mathbb{C}$ .

Dans une carte locale, en notant  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  les coordonnées réelles dans  $\mathbb{C}^n$ , une base complexe de  $TM \otimes \mathbb{C}$  est l'ensemble :

$$\{\partial/\partial x_1, \partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial y_n\}.$$

Cette base n'est cependant pas très adaptée à la structure de variété complexe. On considère donc les vecteurs :

$$\partial/\partial z_j = \partial/\partial x_j - i\partial/\partial y_j$$

$$\partial/\partial \bar{z}_j = \partial/\partial x_j + i\partial/\partial y_j.$$

Ils forment également une base de  $TM \otimes \mathbb{C}$ , mais plus intéressante. En effet, on sait qu'une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe ssi, en tout point de  $M$ , pour tout  $j$ , on a  $df(\partial/\partial \bar{z}_j) = 0$ . Alors l'espace engendré par les  $\partial/\partial z_j$ , qu'on notera  $T^{1,0}M$ , a un sens intrinsèque, puisque les changements de cartes sont holomorphes ; on l'appelle *espace des vecteurs holomorphes*. Il est fermé pour le crochet de Lie. On notera  $T^{0,1}M$  son conjugué complexe, engendré localement par les vecteurs  $\partial/\partial \bar{z}_j$ .

On appelle  $J$  l'opérateur  $\mathbb{C}$ -linéaire sur  $TM \otimes \mathbb{C}$  qui vérifie

$$J(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j$$

$$J(\partial/\partial y_j) = -\partial/\partial x_j$$

Alors l'opérateur  $P = 1/2(Id + iJ)$  a deux valeurs propres, 0 et 1, et  $T^{1,0}M$  est l'espace propre associé à 1 tandis que  $T^{0,1}M$  est l'espace propre associé à 0.

On peut par ailleurs définir un opérateur  $\bar{\partial}$ , qui n'est rien d'autre que la restriction de  $d$  à  $T^{0,1}M$ . Une fonction est alors holomorphe ssi elle est dans le noyau de  $\bar{\partial}$ .

Si  $U$  est un ouvert de  $M$  à bord lisse, on aimerait étudier le bord  $\partial U = X$  en utilisant la structure complexe de  $M$ . Malheureusement,  $X$  ne peut pas être une variété complexe, puisque c'est une variété réelle de dimension impaire. On peut néanmoins étudier la *structure de Cauchy-Riemann* de  $f$ .

L'expression « à bord lisse » signifie par définition qu'il existe une fonction réelle  $\rho$ , lisse sur  $M$ , telle que  $U = \{\rho < 0\}$ , ainsi que  $X = \{\rho = 0\}$ , et telle que  $d\rho$  ne s'annule pas sur  $X$ . Sous ces conditions, l'espace tangent de la sous-variété réelle  $X$  vaut  $TX = \{(x, \xi) \in TM, x \in X, d\rho(\xi) = 0\}$ .

Il est alors naturel d'étudier  $TX \otimes \mathbb{C}$  selon la décomposition de  $TM \otimes \mathbb{C}$  en vecteurs holomorphes et antiholomorphes.

**Définition A.1.** On pose  $T'X = \{(x, \xi) \in T^{1,0}M, x \in X, \partial\rho(\xi) = 0\} \subset TX \otimes \mathbb{C}$ , et  $T''X = \overline{T'X}$ .

**Remarque A.2.** La variété  $T'X$  est un fibré vectoriel complexe sur  $X$ , de dimension  $n-1$ , fermé pour le crochet de Lie. En particulier,  $T'X \oplus T''X \subsetneq TX \otimes \mathbb{C}$  car il manque une dimension. L'étude du fibré quotient se révélera féconde par la suite.

#### A.1.1.1 Opérateur de Cauchy-Riemann

De même que, sur  $M$ , l'opérateur  $d$  permet de définir  $\bar{\partial}$  par restriction, on peut créer un opérateur  $\bar{\partial}_b$ .

On commence par noter  $\Omega^{p,q}(X)$ , l'ensemble des  $(p, q)$ -formes tangentées à  $X$ , comme l'espace des sections lisses du fibré dual de  $(T'X)^{\wedge p} \wedge (T''X)^{\wedge q}$ . On a envie de définir une application de restriction  $\Omega^{p,q}(\text{Vois}(U)) \mapsto \Omega^{p,q}(X)$ . Pour cela restreindre la section à  $X$  n'est pas suffisant, il faut encore restreindre la forme linéaire en  $x$  à  $(T'X_x)^{\wedge p} \wedge (T''X_x)^{\wedge q}$ . On appelle  $\Lambda$  cette restriction totale.

Bien sûr, dans le cas d'une fonction, on a  $f|_X = \Lambda f$ , mais ce n'est pas vrai pour les formes de degré quelconque, on a par exemple  $\Lambda \bar{\partial}\rho = 0$ . Précisons qu'on a  $\Lambda(\alpha \wedge \beta) = \Lambda\alpha \wedge \Lambda\beta$ . On peut alors démontrer :

**Lemme A.3.** Si  $\varphi, \psi \in \Omega^{p,q}(\text{Vois}(U))$  avec  $\varphi|_X = \psi|_X$ , alors  $\Lambda \bar{\partial}\varphi = \Lambda \bar{\partial}\psi$ .

**Démonstration.** Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont égales sur  $X$ , alors il existe une forme  $\theta$  vérifiant  $\varphi - \psi = \rho\theta$ . On a alors :

$$\Lambda \bar{\partial}(\varphi - \psi) = \Lambda(\rho \bar{\partial}\theta + \bar{\partial}\rho \wedge \theta) = 0.$$

□

On peut alors écrire de manière univoque :

**Définition A.4.** On définit l'application  $\bar{\partial}_b : \Omega^{p,q}(X) \mapsto \Omega^{p,q+1}$  de la manière suivante : à une forme  $\varphi$  on associe la forme  $\Lambda \bar{\partial}\tilde{\varphi}$  où  $\tilde{\varphi} \in \Omega^{p,q}(\text{Vois}(U))$  vérifie  $\tilde{\varphi}|_X = \varphi$ .

**Remarque A.5.** Dans le cas qui nous intéresse le plus, celui de  $C^\infty(X)$ , on a  $\bar{\partial}_b f = 0 \iff (\forall \xi \in T''X, df(\xi) = 0)$ .

### A.1.2 Equation de Cauchy-Riemann et valeur au bord de fonctions holomorphes

Le but de cette section est d'établir le lien entre les fonctions dans le noyau de  $\bar{\partial}_b$ , et les fonctions valeur au bord de fonctions holomorphes à l'intérieur.

Ici,  $U$  est un ouvert d'une variété complexe  $M$ , et son bord  $\partial U = X$  est supposé lisse. Un premier résultat est immédiat :

**Proposition A.6.** Si  $f \in C^\infty(\bar{U})$  est holomorphe dans  $U$ , alors  $g = f|_X$  vérifie  $\bar{\partial}_b g = 0$ .

**Démonstration.** Pour tout vecteur antiholomorphe  $\xi$  dont la base est dans  $U$ , on a  $df(\xi) = 0$ ; donc par continuité, c'est encore vrai pour des vecteurs antiholomorphes dont le point de base est dans  $X$ , et en particulier pour les vecteurs de  $T''X$ .  $\square$

La réciproque de cette affirmation est vraie pour des ouverts de  $\mathbb{C}^n$ , avec  $n \geq 2$ , même en n'imposant qu'une régularité  $C^1$  :

**Proposition A.7.** Supposons que  $M = \mathbb{C}^n$  avec  $n \geq 2$ , et supposons que  $X$  est connexe et que  $U$  est borné. Alors toute fonction  $f \in C^1(X)$  vérifiant  $\bar{\partial}_b f = 0$  vérifie  $f = g|_X$  avec  $g$  de classe  $C^\infty$  jusqu'au bord, et holomorphe à l'intérieur.

**Démonstration.** La preuve utilise la notion de *courant*, qui est l'équivalent des distributions pour les formes.

On commence par considérer n'importe quelle extension  $g_0$  de  $f$  dans  $\bar{U}$ , de classe  $C^1$ . On étend  $\bar{\partial}g_0$  à  $\mathbb{C}^n$  par 0 en-dehors de  $U$ . Ce courant est alors  $\bar{\partial}$ -fermé, en effet, pour toute  $(n, n-2)$ -forme  $\alpha$  à support compact sur  $\mathbb{C}^n$ , on a, par intégrations par parties :

$$\int_U \bar{\partial}g_0 \wedge \bar{\partial}\alpha = \int_X \bar{\partial}_b f \wedge \alpha - \int_U \bar{\partial}\bar{\partial}g_0 \wedge \alpha = 0.$$

Or, sur  $\mathbb{C}^n$ , les courants fermés à support compacts sont exacts, donc il existe un courant  $h$  sur  $\mathbb{C}^n$  tel que  $1_U \bar{\partial}g_0 = \bar{\partial}h$ . Plus précisément, l'opérateur  $\bar{\partial}$  admet un inverse depuis l'espace des courants fermés à support compact, inverse qui s'écrit par une formule intégrale faisant intervenir le noyau de Bochner-Martinelli.

On considère en effet l'intégrale suivante :

$$h(z) = C(n) \int_U \frac{\bar{\partial}g_0(\xi)}{|\xi - z|^{2n}} \wedge \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} (\bar{\xi}_j - \bar{z}_j) d^* \bar{\xi}_j \right) \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n,$$

où on a introduit les notations suivantes :

$$C(n) = \frac{1}{(-1)^{n(n-1)/2} (2i)^n n \operatorname{Vol}(B(0,1))}$$

$$d^* \bar{\xi}_j = d\bar{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\xi}_{j-1} \wedge d\bar{\xi}_{j+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\xi}_n.$$

Un calcul, réalisé par exemple dans [Kra13] montre qu'on a alors  $\bar{\partial}h = 1_U \bar{\partial}g$ .

On en déduit deux choses. D'une part, comme  $1_U \bar{\partial}g_0$  est un courant  $L^\infty$  à support compact, il est en fait continu pour la topologie  $C^0$ . En particulier,  $h$  est continu. D'autre part, le noyau de Bochner-Martinelli qui apparaît décroît avec la distance, donc  $h$  tend vers 0 en l'infini.

C'est ici que la condition  $n \geq 2$  est cruciale :  $h$  est holomorphe sur le complémentaire d'un ensemble borné, or  $\mathbb{C}^n \setminus B(0, R)$  est l'union de droites complexes. Sur chacune de ces droites complexes,  $h$  est holomorphe et tend vers 0 en l'infini, donc est nulle. Par unique extension holomorphe,  $h$  est nulle en-dehors de  $U$ , et en particulier,  $h$  est nulle sur  $X$ .

La fonction  $g = g_0 - h$  a donc toutes les propriétés requises : elle est continue sur  $\bar{U}$ , holomorphe à l'intérieur, et sa valeur au bord vaut  $f$ .  $\square$

Tous les arguments utilisés dans cette preuve sont assez standards ; malheureusement, la généralisation à des ouverts de variétés quelconques est impossible, car les courants fermés n'y sont pas exacts.

La généralisation à des fonctions moins régulières est également problématique : si le courant  $h$  qu'on utilise pour corriger  $g_0$  n'est pas continu, alors il peut être non nul sur  $X$ . Il existe effectivement des contre-exemples à la résolubilité de  $\bar{\partial}_b$  en faible régularité, cf [KR65].

### A.1.3 Structure presque complexe et presque Cauchy-Riemann

On souhaite généraliser les constructions précédentes dans le cas où la variété de départ  $M$  est seulement *symplectique*, et on appelle  $\omega$  la forme symplectique.

On supposera toujours (on peut toujours construire une telle structure) que  $TM$  est muni d'un opérateur  $J$  linéaire sur chaque fibre, continu transversalement, vérifiant  $J^2 = -Id$ , et tel que  $\omega(\cdot, J\cdot)$  soit définie positive. On appelle alors  $(M, \omega, J)$  une *variété symplectique presque complexe*.

On peut également complexifier  $TM$  de manière inoffensive. On observe alors que  $P = 1/2(Id + iJ)$  est un projecteur, dont le noyau et l'image ont la même dimension car ils sont l'image l'un de l'autre par la conjugaison complexe. On note  $T^{1,0}M = \operatorname{Im}(P)$  et  $T^{0,1}M = \operatorname{Ker}(P)$ . Les éléments de  $T^{1,0}M$  sont appelés *vecteurs presque holomorphes*. On peut alors construire des  $(p, q)$ -formes, et des opérateurs  $\partial$  et  $\bar{\partial}$  comme précédemment.

La différence majeure avec le cas complexe réside dans le fait qu'en général, on n'a pas  $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$ . Pour mesurer cette différence, on introduit le tenseur de Nijenhuis :

**Définition A.8.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs lisses sur  $M$ , on définit le champ de vecteurs :

$$N(X, Y) = [X, Y] + J([JX, Y] + [X, JY]) - [JX, JY].$$

Si  $J$  est défini par une structure complexe, un calcul en coordonnées locales montre que  $N(X, Y)$  est toujours nul.

Ce tenseur mesure bien le défaut d'intégrabilité du sous-fibré  $T^{1,0}X$ . En effet, si  $X$  et  $Y$  sont presque holomorphes, alors  $N(X, Y)$  est presque antiholomorphe. Il existe des exemples naturels de variétés presque complexes, dont le tenseur de Nijenhuis est non-nul. La sphère  $S^6$  s'identifie à l'ensemble des octonions imaginaires purs de norme 1. La multiplication par  $i$  donne naissance à une structure presque complexe, et le lecteur vérifiera que le tenseur de Nijenhuis est non nul dans ce cas.

On dispose du

**Théorème 6** (Newlander-Nirenberg).  $M$  est une variété complexe, et  $J$  la structure compatible, ssi  $T^{1,0}M$  est fermé pour le crochet de Lie, ssi  $N \equiv 0$ .

Les implications de la gauche vers la droite sont immédiates, de même l'implication  $N \equiv 0 \Rightarrow [T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$  ne nécessite qu'un calcul direct. La dernière implication est une conséquence des résultats sur l'opérateur  $\bar{\partial}$  démontrés dans [Koh63], nous y reviendrons.

Enfin, si  $U$  est un ouvert de  $M$  à bord lisse  $X$ , on peut munir comme précédemment  $X$  d'une structure presque Cauchy-Riemann, en définissant :

$$T'X = \{(x, \xi) \in T^{1,0}M, x \in X, d\rho(\xi) = 0\}$$

où  $\rho$  est une fonction qui définit  $X$ , dont le choix n'a pas d'importance.

La structure presque Cauchy-Riemann n'a pas d'intérêt a priori, puisque le défaut d'intégrabilité entraîne en général qu'il n'y a pas de solution non constante à l'équation  $\bar{\partial}_b f = 0$ .

## A.2 PSEUDOCONVEXITÉ

On se propose ici de redonner les définitions de base de la pseudoconvexité, et quelques lemmes utiles.

La recherche d'analogues, en structure complexe, à la convexité des fonctions et des ensembles, a mené à plusieurs notions, qui se recoupent les unes les autres ; les difficultés de traductions (de *positive* à *strictement positif*) compliquent encore la nomenclature. Le but de cette section est double : le lecteur peu familier avec ces notions pourra trouver ici les définitions de base des notions que nous utilisons dans

ce mémoire, et nous le redirigeons volontiers vers les ouvrages de référence ([Kra92], [Voi02], [Dem97]) pour un exposé plus en détail ; et nous donnons au lecteur averti une définition précise du vocabulaire utilisé.

### A.2.1 Fonctions pluri-sous-harmoniques

On abrègera systématiquement en *psh* cet adjectif ; par ailleurs,  $\Delta$  désignera systématiquement le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ .

La définition qui va suivre s'approche beaucoup de celle des fonctions convexes :

**Définition A.9.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , et  $p : U \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . On dit que  $p$  est *psh* lorsque  $p$  est semi-continue supérieurement (c'est-à-dire :  $\limsup p(u_n) \leq p(u)$  dès que  $u_n \rightarrow u$ ), et telle que pour toute application  $\mathbb{C}$ -affine  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$  telle que  $\varphi(\bar{\Delta}) \subset U$ , on ait

$$p(\varphi(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} p(\varphi(e^{i\theta})) d\theta \quad (6)$$

**Remarque A.10.** On peut remplacer (6) par une moyenne sur l'image de  $\Delta$ . Par ailleurs, si  $p$  est *psh*, la fonction suivante est croissante :

$$\begin{aligned} M_\varphi : [0, \sup\{\lambda, \varphi(\lambda\Delta) \subset \Omega\}] &\mapsto \mathbb{R} \\ &\mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} p(\varphi(re^{i\theta})) d\theta. \end{aligned}$$

D'après la définition, une limite décroissante de fonctions *psh* est *psh*. Réciproquement, on peut approcher toute fonction *psh* par une suite décroissante de fonctions *psh* régulières :

**Proposition A.11.** Soit  $p$  *psh* sur un ouvert  $U$ , non identiquement égale à  $-\infty$ . Alors il existe  $(p_n)$ , une suite décroissante de fonctions *psh* à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , vérifiant  $p = \lim p_n$ .

**Démonstration.** L'idée clé est de faire convoler  $p$  avec une fonction régularisante. Si  $f$  est positive et  $C_c^\infty$  sur  $\mathbb{C}$ , alors  $p * f$  est de classe  $C^\infty$ , et *psh* sur  $U$ . Soit alors  $f_n$  une approximation de l'unité à symétrie sphérique. Alors la suite  $p * f_n$  est décroissante, d'après la remarque précédente, et sa limite simple est bien  $p$ .  $\square$

En général, une limite croissante de fonctions *psh* n'est pas *psh*, parce qu'elle n'est pas semi-continue supérieurement.

Lorsqu'une fonction  $f$  est régulière, on sait traduire la convexité sur le comportement des dérivées d'ordre 2 de  $f$  (à savoir,  $\text{Hess } f$  est positive). Le même raisonnement s'applique pour les fonctions *psh* de classe  $C^2$ . En effet, lorsque  $p$  est *psh* sur un ouvert  $U$ , pour  $\varphi$  une appli-



cation  $\mathbb{C}$ -affine avec  $\varphi(\Delta) \subset U$ , on sait que  $p \circ \varphi$  est sous-harmonique sur  $\Delta$ . Autrement dit, en notant  $\omega = \varphi(1)$ , on a, sur l'image de  $\Delta$  :

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 p}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \omega_j \bar{\omega}_k \geq 0$$

On définit alors la hessienne complexe d'une fonction  $f$  par :

$$H_f(x)(v, \xi) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 p}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{\xi}_k$$

Une fonction régulière ssi sa hessienne complexe est positive en tout point. En appliquant la propriété de régularité, on arrive à généraliser ce résultat en :

**Proposition A.12.** Soit  $p$  une distribution sur  $U$ , alors  $p$  est psh sur  $U$ , non identiquement  $-\infty$ , ssi  $H_p$  est une mesure positive.

La hessienne complexe se comporte correctement par des biholomorphismes. En effet, un calcul direct montre que  $H_{p \circ \psi}(\xi) = H_p(d\psi(\xi))$ . Ceci permet de définir  $H_p$  sur une variété  $M$ , en tant que forme hermitienne sur  $T^{1,0}M$ . En particulier, le caractère pseudoconvexe est invariant par biholomorphisme.

**Définition A.13.** Soit  $U$  un ouvert d'une variété complexe, et  $p$  une fonction sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . On dit que  $p$  est psh lorsqu'elle est psh dans les cartes locales.

Le lemme technique suivant sera utile :

**Lemme A.14** (Cf [Dem97]). Soit  $p : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  une fonction semi-continue supérieurement. Alors  $p$  est psh ssi, pour tout disque  $K = \{z_0 + z\eta, z \in \bar{\Delta}\}$ , et pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ , on a :

$$\forall z \in S^1 \quad p(z_0 + z\eta) \leq \Re(P(z)) \Rightarrow \forall z \in \Delta \quad p(z_0 + z\eta) \leq \Re(P(z)).$$

**Démonstration.** Soit  $\varphi : z \mapsto z_0 + z\eta$ . Si  $p$  est psh, alors  $p \circ \varphi - P$  est sous-harmonique sur  $\bar{\Delta}$ , donc son maximum est atteint sur le cercle.

Réciproquement, pour  $K$  fixé, puisque  $p$  est scs, il existe une suite décroissante de polynômes trigonométriques  $p_n = \Re(P_n)|_{S^1}$ , avec  $P_n \in \mathbb{C}^n[X]$ , tels que  $p \circ \varphi = \lim p_n$  sur  $S^1$ . Alors  $p \circ \varphi \leq \Re(P_n)$ . Si l'hypothèse est vraie, alors en particulier, on a :

$$p(z_0) \leq \Re(P_n(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \Re(P_n(e^{i\theta})) d\theta.$$

En passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient bien l'inégalité de la définition.  $\square$

### A.2.2 Ouverts pseudoconvexes

**Définition A.15.** Un ouvert  $U$  d'une variété est dit *pseudoconvexe* lorsqu'il existe une fonction psh  $p$  sur  $U$  qui vérifie que pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\{p \leq c\}$  est un compact de  $U$ . Une telle fonction est appelée *fonction d'exhaustion*.

Les ouverts pseudoconvexes de  $\mathbb{C}^n$  jouissent de propriétés géométriques particulières. On note dorénavant  $d$  la distance euclidienne dans  $\mathbb{C}^n$ . Alors :

**Proposition A.16.** Soit  $U$  un ouvert pseudoconvexe de  $\mathbb{C}^n$ . Alors la fonction  $z \mapsto -\log(d(z, {}^c U))$  est psh sur  $U$ .

**Remarque A.17.** La fonction précédente ne convient pas toujours comme fonction d'exhaustion. En effet, pour  $c > 0$ , l'ensemble  $\{d(x, {}^c U) \geq c\}$  n'est pas compact en général.

**Démonstration.** Encore une fois, on suit la preuve de [Dem97]. Commençons par démontrer que la fonction suivante est pseudoconvexe sur son domaine de définition :

$$f : U \times \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$(z, \xi) \mapsto -\log(\sup\{r > 0, \forall |t| < r, z + t\xi \in U\}).$$

Pour cela on va utiliser le lemme A.14. Si  $K = (x, \xi) + (\zeta, \eta)\Delta \subset U \times \mathbb{C}^n$ , et si  $P$  est un polynôme vérifiant

$$\forall t \in S^1, f(z + t\zeta, \xi + t\eta) \leq P(t),$$

Alors on va vérifier que cette équation est vraie pour tout  $t \in \Delta$ . Pour cela on considère la fonction holomorphe auxiliaire suivante :

$$h : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^n$$

$$(t, w) \mapsto z + t\zeta + we^{-P(t)}(\xi + t\eta).$$

Par construction, d'une part,  $h(\Delta \times \{0\}) = \{z + t\zeta, |t| < 1\} \subset U$ , et d'autre part, par définition de  $f$ , on sait que  $h(S^1 \times \Delta) \subset U$ .

Soit alors  $R$  le sup des  $r \geq 0$  tels que  $h(\Delta \times r\Delta) \subset U$ . Si par l'absurde  $R < 1$ , on pose  $K = h(S^1 \times R\Delta) \subset \subset U$ ; or  $U$  est pseudoconvexe, donc en appelant  $p$  une fonction exhaustive de  $U$ , alors  $c = \sup_K(p) < +\infty$ . Par ailleurs  $p \circ h$  est psh, donc sous-harmonique par rapport à sa première variable, donc cette fonction ne peut pas être plus grande sur  $\Delta \times R\Delta$  que sur  $S^1 \times R\Delta$ . En particulier,  $h(\Delta \times R\Delta) \subset \subset U$  par connexité, donc on peut trouver un  $\epsilon > 0$  tel que  $h(\Delta \times (R + \epsilon)\Delta) \subset U$ , ce qui est absurde.

La fonction  $q : z \mapsto -\log(d(z, {}^c U))$  est continue, et vérifie par définition  $q(z) = \sup_{|\xi| < 1} f(x, \xi)$ , donc est pseudoconvexe.  $\square$

### A.2.3 Pseudoconvexité et Frontière

Le dernier résultat de la section précédente nous indique que la pseudoconvexité est une propriété qui concerne uniquement la *frontière* d'un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ . Plus précisément,

**Proposition A.18.** Un ouvert  $U \subset \mathbb{C}^n$  est pseudoconvexe ssi, pour tout point  $x \in \partial U$ , il existe un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{C}^n$  tel que  $V \cap U$  soit pseudoconvexe.

**Démonstration.** L'implication directe est immédiate (on prend  $V = \mathbb{C}^n$ ). Démontrons l'implication réciproque. Dans un petit voisinage  $W$  de  $x$ , on a  $d(\cdot, {}^c U) = d(\cdot, {}^c (U \cap V))$ ; en particulier, la fonction  $-\log(d(\cdot, {}^c U))$  est psh dans un voisinage du bord noté  $U \setminus U'$ , où  $U' \subset U$ . Mais cette fonction n'est pas nécessairement psh dans  $U'$ .

Supposons sans perte de généralité que  $0 \in U'$ , et soit  $\chi$  une fonction continue convexe sur  $\mathbb{R}^+$ , telle que :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \chi(r) \leq \sup(-\log(d(z, {}^c U)), z \in B(0, r \cap (U \setminus U'))).$$

Alors la fonction  $p : z \mapsto \max(\chi(|z|), -\log(d(z, {}^c U)))$  est continue, pseudoconvexe, car elle coïncide avec  $\chi(|\cdot|)$  sur un voisinage de  $U \setminus U'$ , et exhaustive, car elle coïncide avec  $-\log(d(\cdot, {}^c U))$  près du bord, donc convient.  $\square$

On aimerait donc trouver une caractérisation géométrique du bord de  $U$ , équivalente à la pseudoconvexité lorsque le bord est lisse.

Si un ouvert  $U \subset \mathbb{C}^n$  a un bord lisse, avec  $\rho$  est une fonction qui définit  $\partial U = X$ , alors  $X$  n'est bien sûr pas une variété complexe (sa dimension réelle est impaire). On notera respectivement  $T'X$  et  $T''X$  les espaces tangents holomorphes et antiholomorphes (cf section précédente). On rappelle également qu'on note  $J$  l'application qui envoie  $\partial/\partial x_j$  sur  $\partial/\partial y_j$  et  $\partial/\partial y_j$  sur  $-\partial/\partial x_j$ .

On peut alors définir la *forme de Lévi* :

**Définition A.19.** Soit  $x \in X$ . La forme de Lévi en  $x$  est la forme sesquilinéaire sur  $T'_x X$  définie par :

$$L_{X,x} \xi, \eta = \frac{1}{\|d\rho(x)\|} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \bar{\xi}_k \eta_j.$$

$L_x$  n'est rien d'autre que la hessienne complexe de  $\rho$ , restreinte à  $T'X$ , et normalisée. Cette normalisation rend la définition intrinsèque : elle ne dépend ni de  $\rho$  ni des coordonnées locales, comme nous allons le montrer.

On note d'abord  $\nu = d\rho/\|d\rho\|$  le champ des vecteurs normaux sortants sur  $X$ , qui ne dépend pas de  $\rho$ . On a alors :

**Proposition A.20.** Soient  $\xi$  et  $\eta$  des champs de vecteurs sur  $X$  au voisinage de  $x$ , à valeurs dans  $T'X$ . On a alors :

$$\langle J\nu, [\xi, \eta] \rangle = 4\operatorname{Im}(L_x(\xi, \eta))$$

**Démonstration.** Le calcul en coordonnées locales est direct.  $\square$  On a alors la caractérisation suivante :

**Proposition A.21.** Un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  de frontière  $C^2$  est pseudo-convexe ssi sa forme de Lévi est positive en tout point de la frontière.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [BdM75] L. Boutet de Monvel. Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (dit "Goulaouic-Schwartz")*, pages 1–13, 1974-1975.
- [BdMG81] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*. Number 99 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1981.
- [BdMS75] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand. Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö. *Journées équations aux dérivées partielles*, 34-35 :123–164, 1975.
- [Dem97] Jean-Pierre Demailly. *Complex analytic and differential geometry*. Citeseer, 1997.
- [FG02] Klaus Fritzsche and Hans Grauert. *From holomorphic functions to complex manifolds*. Number 213 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002.
- [Hör71] Lars Hörmander. Fourier integral operators. i. *Acta mathematica*, 127(1) :79–183, 1971.
- [Hör85] L Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV*. Classics in Mathematics. Springer, 1985.
- [Hör03] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis. Reprint of the second (1990) edition*. Springer, Berlin, 2003.
- [Hör07] L Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*. Classics in Mathematics. Springer, 2007.
- [Koh63] JJ Kohn. Harmonic Integrals on Strongly Pseudo-Convex Manifolds : 1. *Annals of mathematics*, pages 112–148, 1963.
- [Koh64] JJ Kohn. Harmonic Integrals on Strongly Pseudo-Convex Manifolds : 2. *Annals of mathematics*, pages 450–472, 1964.
- [Kos70] Bertram Kostant. *Quantization and unitary representations*. Springer, 1970.
- [KR65] Joseph J Kohn and Hugo Rossi. On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold. *Annals of Mathematics*, pages 451–472, 1965.

- [Kra92] Steven G Krantz. *Partial differential equations and complex analysis*, volume 6. CRC press, 1992.
- [Kra13] Steven George Krantz. *Geometric analysis of the Bergman kernel and metric*. Springer, 2013.
- [MS75] Anders Melin and Johannes Sjöstrand. Fourier integral operators with complex-valued phase functions. In *Fourier integral operators and partial differential equations*, pages 120–223. Springer, 1975.
- [Sou67] Jean-Marie Souriau. Quantification géométrique. applications. In *Annales de l’institut Henri Poincaré (A) Physique théorique*, volume 6, pages 311–341. Gauthier-villars, 1967.
- [Ste72] Elias M Stein. *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables*. Princeton University Press, 1972.
- [SZ02] B. Shiffman and S. Zelditch. Asymptotics of almost holomorphic sections on symplectic manifolds. 2002.
- [Voi02] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. 2002.
- [Zel00] S. Zelditch. Szego kernels and a theorem of Tian. 2000.