

Experimentelle Methoden der Teilchenphysik

Vorlesungsskript Sommersemester 2014
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Karl Jakobs
Leena Diehl

7. Juli 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	4
1.1 Anwendungsgebiete von Detektoren	4
1.2 Messgrößen	7
1.3 Bedeutung von statistischen Methoden	9
1.4 Strahlungsquellen	14
1.4.1 Natürliche Strahlungsquellen	14
2 Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie	18
2.1 Energieverlust durch Ionisation und Anregung, Bethe-Bloch-Formel	18
2.2 Bremsstrahlung	24
2.3 Cherenkov-Strahlung	28
2.4 Übergangsstrahlung	32
2.5 Starke Wechselwirkung von Hadronen	34
3 Wechselwirkung von Photonen mit Materie	35
3.1 Photoeffekt	36
3.2 Compton-Streuung	37
3.3 Paarerzeugung	39
3.4 Photonen-Wechselwirkungsquerschnitte	40
3.5 Anwendungen	41
4 Ionisationsmessung	44
4.1 Ionisationskammer	44
4.2 Ionsisationsausbeute	48
4.3 Proportionalzählrohr	50
4.4 Auslösezähler, Geiger-Müller-Zähler	50
4.5 Anwendung zur Ortsmessung	51
4.5.1 Vieldrahtproportionalitätskammer	51
4.5.2 Driftkammern	52
4.5.3 Silizium-Halbleiter-Detektor	53
5 Szintillatoren und Photovervielfacher	58
5.1 Messprinzip von Szintillatoren	58
5.2 Szintillatoren in anorganischen Kristallen	59
5.3 Organische Szintillatoren	61
5.4 Photomultiplier (PM)	64
5.5 Anwendungen im Detektorsystem	66
6 Energiemessung	68
6.1 Messprinzip	68
6.2 Energiemessung mit Halbleiterdetektoren	69
6.3 Energiemessung in Kalorimetern	71
6.3.1 Elektromagnetische Schauer	72

6.3.2	Hadronische Schauer	75
6.3.3	Layout und Auslese von Kalorimetern	76
6.3.4	Energieauflösung von Kalorimetern	78
7	Pulsformung und Übertragung von Signalen auf Leitungen	80
7.1	RC-, RL- und RCL-Netzwerke	80
7.1.1	RC-Tiefpass	80
7.1.2	RC-Hochpass	84
7.1.3	RLC-Netzwerk	86
7.2	Übertragung von Signalen auf Leitungen	88
8	Halbleiter-Bauelemente	92
8.1	Reine und dotierte Halbleiter	92
8.2	Der pn-Übergang	97
8.2.1	Grundlagen	97
8.2.2	Strom durch einen pn-Übergang	101
8.3	Diode	103
8.4	Schaltungen mit Dioden	104
8.5	Bipolarer Transistor	105
8.5.1	Transistoreffekt	105
8.5.2	Einstellung des dc-Arbeitspunktes	108
8.6	Transistorschaltungen	108
9	Verstärkerschaltungen, ADGs und DACs	111
9.1	Differenzverstärker	111
9.2	Operationsverstärker	115
9.3	Anwendungen von Operationsverstärkern	119
9.3.1	Addierer	119
9.3.2	Differentiator	119
9.3.3	Integrator	120
9.3.4	Spannungsfolger	121
9.3.5	Komparator	121
9.4	Analog-Digital-Wandler (ADC)	123
9.4.1	Flash-ADC, Parallelverfahren	123

1 Einführung

1.1 Anwendungsgebiete von Detektoren

Detektoren haben vielfältige Anwendungen in Wissenschaft und Technik. Um experimentelle Messungen in der Physik durchzuführen, braucht man verschiedene Instrumente.

Zum Nachweis von Photonen (Licht= benötigt man einen Photovervielfacher (Photoeffekt), wodurch ein elektrisches Signal entsteht.

Der Nachweis von direkten elektrischen Signalen wird beispielsweise durch Ionisation von Gasen, Flüssigkeiten oder Festkörpern vorgenommen.

Nachweis von ionisierender Strahlung wird beispielsweise mit dem Geiger-Müller-Zählrohr vollzogen.

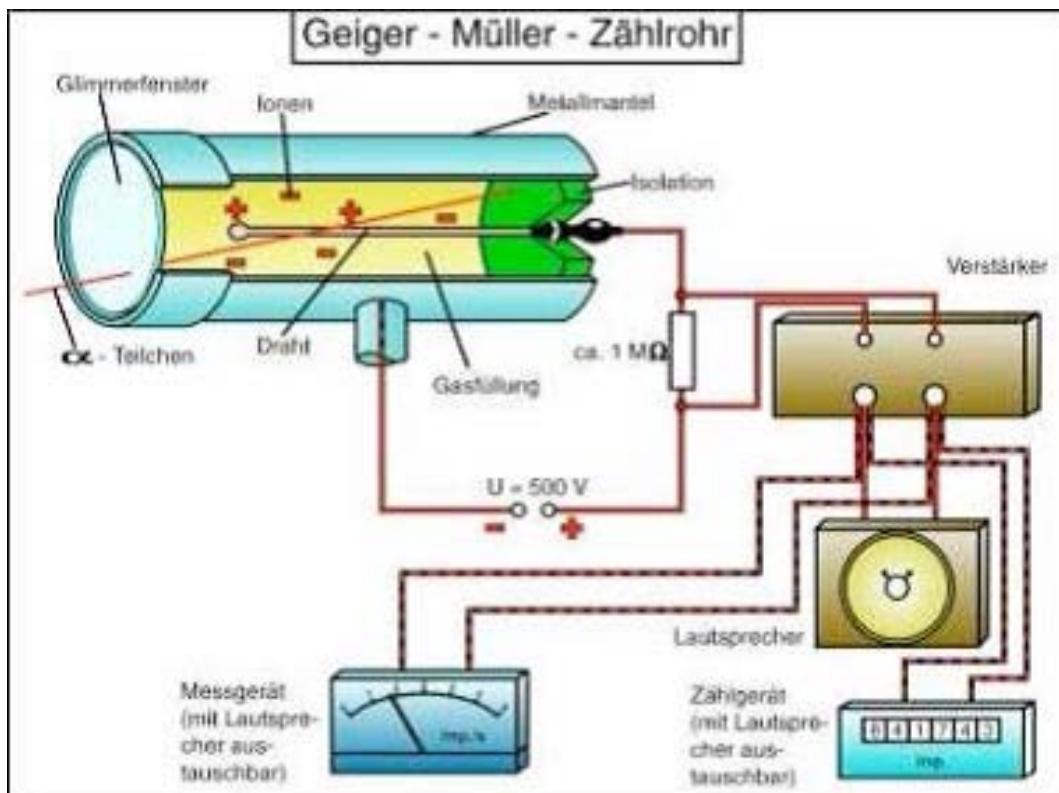


Abbildung 1: Geiger-Müller-Zähler

Größere Detektorsysteme werden in der Elementarteilchenphysik verwendet, beispielsweise zum Nachweis von Teilchenreaktionen an Beschleunigern. Dabei werden die wichtigen Größen wie Impuls, Energie und Identität der entstandenen Teilchen vermessen. Der Energiebereich liegt dabei zwischen 1GeV bis etwa 5TeV (hohe Energien. Hochenergiephysik).

Detektorsysteme finden zudem Anwendung in der Astro- und Astroteilchenphysik, zum Beispiel bei der Vermessung kosmischer Höhenstrahlung, von Röntgenstrahlung

(ROSAT-Detektor), hochenergetischen Photonen (γ -ray bursts), hochenergetischen Neutrinos (Sonne und andere extragalaktische Quellen) und kosmische Hintergrundstrahlung (Planck-Satellit). Der Energiebereich hier liegt bei etwa 100 μeV -1000TeV.

Die **Medizin** ist ein weiterer großer Anwendungsbereich der Detektoren.

Bekanntestes Beispiel sind die Röntgenuntersuchungen mithilfe der γ -Strahlen und Photoplatten. Auch in der Nuklearmedizin finden Detektoren Anwendungen, zum Nachweis der γ -Strahlung, z.B. nach Anreicherung von entsprechenden radioaktiven Isotopen in bestimmten Organen (z.B. Schilddrüse).

Ein weiterer Bereich ist die Positronen-Emissions-Tomographie, welche ein bildgebendes Verfahren ist, es handelt sich also um die Sichtbarmachung der Verteilung von radioaktiven Substanzen (Radiopharmaka, β^+ -Strahler) im Organismus über die Vernichtungsreaktion $e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma$. Dadurch lassen sich Rückschlüsse auf biochemische und physiologische Reaktionen ziehen.

Eine recht neue Anwendung ist die Tumorthерапия mit Hadronen (π^+ oder p) oder Ionen, beispielsweise in Heidelberg. Sie ermöglicht eine Energiedeposition am Ort des Tumors, erfordert jedoch einen Beschleuniger, der die Strahlen exakt geeigneter Energien zur Verfügung stellt.

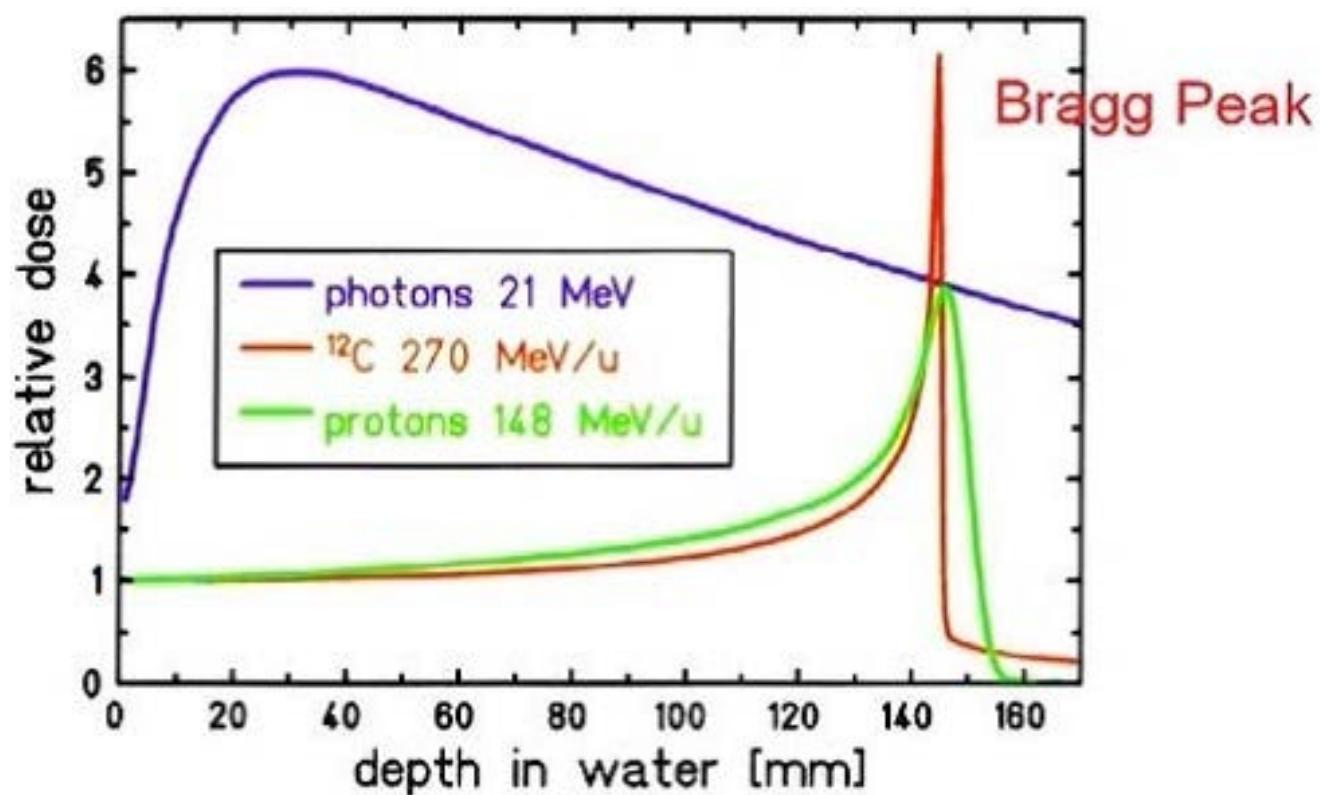


Abbildung 2: Strahlendosis

Neben der Medizin benutzt man auch in der **Archäologie** Detektoren, beispielsweise zur Altersbestimmung mithilfe der C^{14} -Methode oder dem „Röntgen“ von Pyramiden im „Licht kosmischer Myonen“.

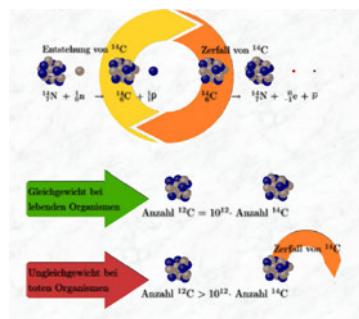


Abbildung 3: C14-Methode

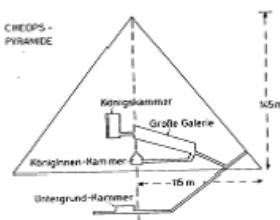


Abbildung 4: Pyramidenmessung

1.2 Messgrößen

Ein kurzer Überblick über die wichtigen Messgrößen der Physik:

Der **Impuls** von Teilchen wird mit der Vermessung der Bahnkurve elektrisch geladener Teilchen in einem bekannten Magnetfeld mithilfe der Lorentzkraft $F_L = q * (v \times B)$ bestimmt. Im Spezialfall eines homogenen Magnetfelds erhält man eine Helixbahn und somit Ortsinformationen und den Krümmungsradius ρ . Der Impuls lässt sich dann bestimmen mittels $p = 0.3 * B * \rho$.

Die **Energie** von Teilchen kann mithilfe einer Deposition der totalen Energie in einem sensitiven Detektormedium wie einem Szintillator, Halbleiter oder flüssigem Argon bestimmt werden. Durch die Energie kommt es zur Wechselwirkung des Teilchens mit dem Medium (vollständige Absorption des Teilchens) und somit zur Anregungsenergie des Mediums und einem messbaren Signal.

Die **Identität der Teilchen** ist durch ihre Masse und Ladung eindeutig bestimmt. Ein kleiner Exkurs zu den Bausteinen der Materie:

- Leptonen sind beispielsweise Elektronen und Positronen ($m_e = 0.000511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$) und Myonen ($m_\mu = 105.7 \frac{\text{MeV}}{c^2}$)
- Die Ladung der Leptonen ist $Q(u) = \frac{2}{3}e; Q(d) = -\frac{1}{3}e$
- Die Hadronen sind aus Quarks aufgebaut.
- Die Baryonen sind:
 - Proton: $P = (u, u, d), Q = +1e, m_P = 938.3 \frac{\text{MeV}}{c^2}$
 - Neutron: $n = (u, d, d), Q = 0, m_n = 939.6 \frac{\text{MeV}}{c^2}$
- Baryonen sind schwere Teilchen, deren Bindungszustände aus drei Quarks bestehen.

Die Mesonen sind:

$$\pi^+ = (u, \bar{d}), Q = +1e$$

$$\pi^- = (\bar{u}, d), Q = -1e$$

Die Masse ist dabei $m(\pi^\pm) = 139.6 \frac{\text{MeV}}{c^2}$.

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), Q = 0e$$

Die Masse dieser Pionen ist $m(\pi^0) = 135.0 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ Mesonen haben Bindungszustände aus einem Quark und einem Antiquark.

In der Elementarteilchenphysik müssen aufgrund der hohen Impulse und Energien relativistische Energie-Impulsbeziehungen benutzt werden, für die $\hbar = c = 1$ gilt. Es folgt

$$m = \sqrt{E^2 - p^2}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{p}{E} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}}}$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 * c^2)^2}, E(e) \approx pc \text{ für } p \gg m_0 = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E}{mc^2} = \frac{E}{m_0}, (c = 1)$$

Die Identifizierung/ Massenbestimmung ist möglich durch Messung zweier Größen, z.B. Impuls und Geschwindigkeit β oder Impuls und γ -Faktor. Benötigt werden dazu physikalische Prozesse, die sensitiv auf β und γ sind und Detektoren, die diese Signaturen nachweisen können, beispielsweise Flugzeitmessung, Cherenkov- und Übergangsstrahlungssignatur. Die Kombinationen der Signaturen verschiedener Detektoren wird zu komplexen Detektorsystemen wie Spurdetektoren und Kalorimetern zusammengefügt.

Zur **Zeitmessung** ist zu sagen, dass viele physikalische Prozesse eine direkte Zeitmessung erfordern, bei denen Zeitauflösungen im Nano- bis Pico-Sekundenbereich benötigt werden. Das bedeutet es sind schnelle Signale (durch Szintillatoren oder Halbleiterzählern) und schnelle Elektronik erforderlich.

1.3 Bedeutung von statistischen Methoden

Statistische Methoden werden zur Beschreibung und Auswertung von in physikalischen Experimenten gewonnenen Messdaten eingesetzt.

1. Zur Beschreibung von Daten (Deskriptive Statistik)

Hierbei handelt es sich um eine Beschreibung ohne Rücksicht auf die Erklärung möglicher Ursachen, die Daten werden durch wenige, aussagekräftige Parameter charakterisiert. Ein Beispiel dafür ist die wiederholte Messung einer Größe wie dem elektrischen Widerstand.

Messwerte (el. Widerstände)										
Block of data:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
505.42	487.30	491.94	499.78	521.37	494.36	512.02	512.26	517.57	494	
503.44	505.54	492.76	505.66	495.54	506.99	499.85	480.63	525.16	508	
493.68	506.28	499.33	517.24	500.61	495.30	491.51	499.76	511.15	505	
479.62	492.39	489.60	490.10	511.28	499.35	515.29	488.60	491.66	511	
484.19	493.20	489.30	490.00	511.28	499.35	515.29	488.60	491.66	511	
510.62	505.71	483.03	502.24	494.78	512.13	500.34	486.66	512.44	485	
494.87	502.96	496.43	503.18	517.63	497.85	501.23	486.20	502.59	502.17	527
495.36	495.22	498.31	486.73	489.93	506.61	504.34	508.97	502.17	502.17	523
493.18	507.16	515.40	509.00	518.10	499.88	502.25	510.12	506.10	502	
498.29	504.29	502.11	503.30	508.00	500.78	500.78	500.78	500.78	500	
508.22	507.67	504.99	493.12	501.83	491.35	500.76	493.36	487.70	488
498.11	512.23	498.09	503.71	488.03	508.81	499.09	484.99	517.49	479	
497.67	493.75	504.78	494.82	506.33	514.90	489.18	497.20	491.68	500	
507.43	498.40	504.00	509.00	509.00	500.00	500.00	495.91	497.07	490	
512.17	491.95	497.17	493.57	489.25	505.13	494.41	500.24	500.73	500	
518.59	493.24	494.19	494.49	512.69	517.68	513.76	505.54	484.86	494	
495.07	506.42	486.97	480.57	509.46	507.11	491.63	500.41	490.90	411	
513.18	491.88	502.44	494.44	497.44	475.80	512.20	508.57	500.59	518	
501.99	491.76	503.44	502.64	494.99	494.94	512.11	501.11	506	506	
496.54	495.76	497.30	485.76	497.29	487.12	491.24	508.52	497.27	499	
496.77	487.33	489.50	505.15	489.76	491.52	498.74	491.10	489.33	498	

Abbildung 5: Messwerte el. Widerstände

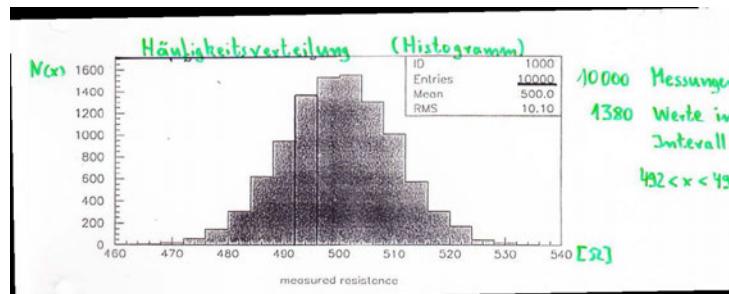


Abbildung 6: Häufigkeitsverteilung

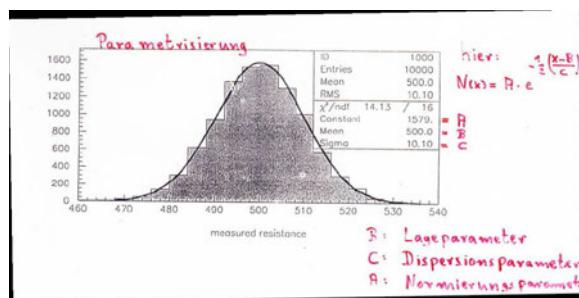


Abbildung 7: Parametrisierung

2. Die physikalische Messung

Jede physikalische Messung ist mit einer Ungenauigkeit (Fehler) behaftet, beispielsweise aus der experimentellen Auflösung der Messapparatur resultierend. Das Messergebnis ist somit eine Zufallsgröße, die Einzelergebnisse sind entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, im Allgemeinen einer Gaußschen Verteilungsfunktion, verteilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

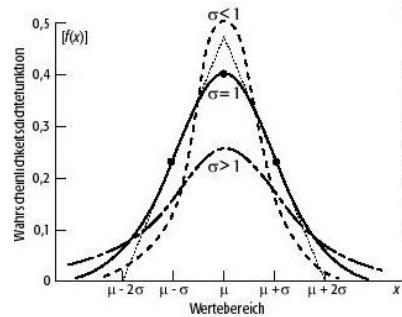


Abbildung 8: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Der Mittelwert der Verteilung ist dabei ein Schätzwert für den wahren Wert und die Breite der Kurve ein Maß für die experimentelle Auflösung.

N Messungen entsprechen einer Stichprobe entsprechend der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung, die Stichprobe wird zum Erhalten einer Schätzung des wahren Werts genutzt. Dabei gibt es Messwert mit zugehörigem Fehler, sodass Konfidenzintervalle angegeben werden können, die den wahren Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit enthalten.

3. Parameterbestimmung

Durch experimentelle Messungen werden physikalisch relevante Parameter bestimmt, die ein theoretisches Modell erfordern. Ein Beispiel ist die Messung der Lebensdauer radioaktiver Isotope, für die gilt

$$N(t) = N_0 * e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Wichtig dabei ist, dass die Parameter nur bestimmt werden können, wenn das Mo-

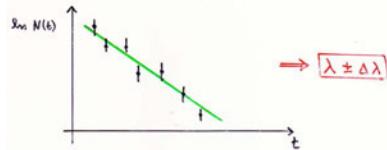


Abbildung 9: Logarithmischer Zerfallsverlauf

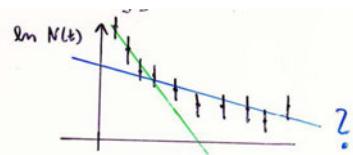


Abbildung 10: Ausgleichsgerade

dell die Daten beschreibt, es muss also zusammen mit dem bestimmten Parameter ein Maß für die Güte der Anpassung angegeben werden.

4. Hypothesentests

Hier sucht man nach Abweichungen von einem vorgegebenen Modell, bzw. testet, wie gut ein Modell (Hypothese) die Daten beschreibt, beispielsweise in der Elementarteilchenphysik bei der Suche nach einem neuen Teilchen.

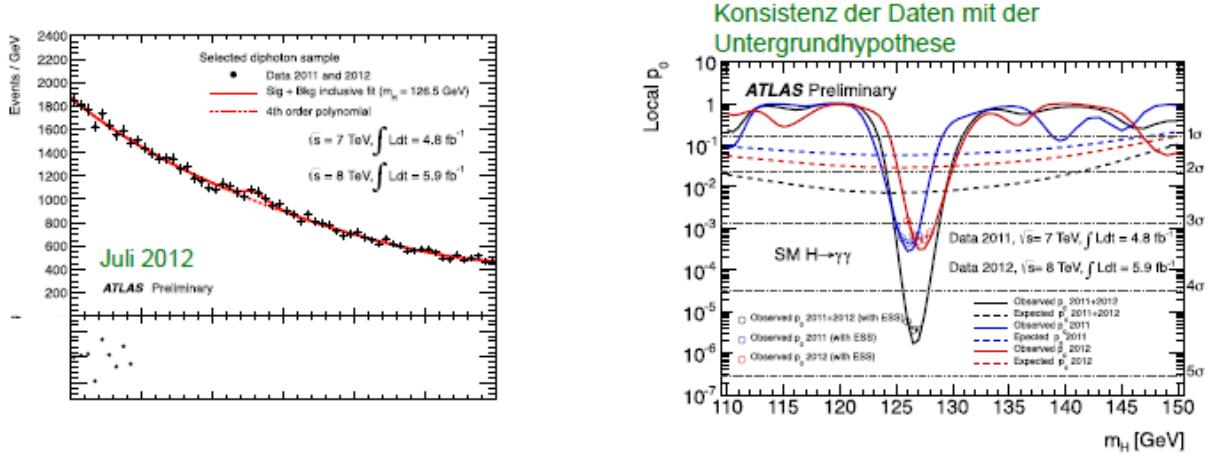


Abbildung 11: Hypothesentests

Hier stellt sich die Frage, ob es sich um eine statistische Fluktuation des Untergrunds handelt, oder um die Evidenz für ein neues Teilchen.

5. Monte Carlo Simulationen

Komplexe Vorgänge mit Zufallseinflüssen müssen mithilfe der Monte Carlo Methoden simuliert werden, beispielsweise die Wechselwirkungen eines Teilchens in einem Detektor, da für elektrisch geladene Teilchen zahlreiche Wechselwirkungsprozesse möglich sind, wie Ionisation und Anregung (Energieverlust, statistischer Prozess), Coulomb-Vielfachstreuung, Bremsstrahlung oder Emission von Cherenkov-Strahlung.

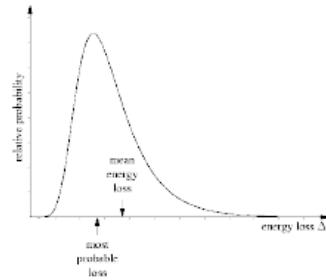


Abbildung 12: Statistische Wahrscheinlichkeit

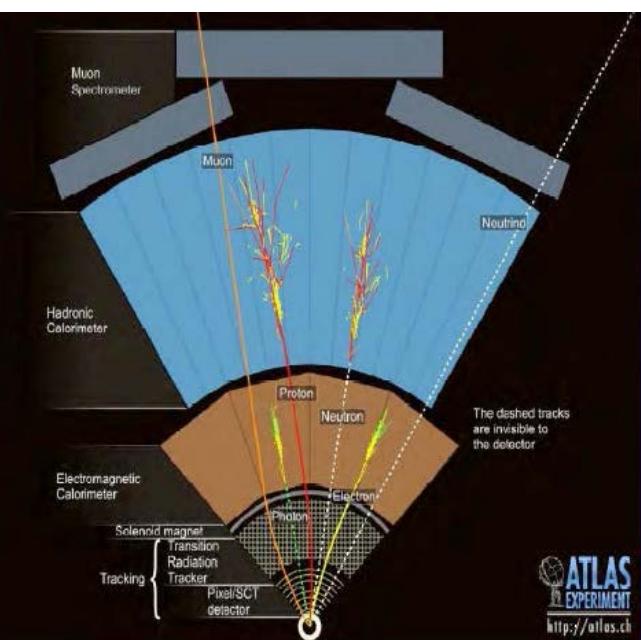


Abbildung 13: ATLAS-Experiment

1.4 Strahlungsquellen

Natürliche Quellen sind beispielsweise die kosmische Strahlung, die Sonne und natürlich auftretende radioaktive Elemente. Künstliche Quellen, in denen die Strahlung erzeugt wird sind Kernreaktoren bzw. Kernprozesse sowie Teilchenbeschleuniger.

1.4.1 Natürliche Strahlungsquellen

Kosmische Strahlung ist Teilchenstrahlung aus dem Universum, das Spektrum reicht bis zu 10^{20} eV auf der Erde. Die Strahlung entsteht bei Supernova-Explosionen und aktiven galaktischen Kernen. Auf der Erdoberfläche kann die Strahlung gesehen und genutzt werden, sie besteht zu 80 % aus Myonen. In der Atmosphäre hingegen besteht sie hauptsächlich aus Protonen und schweren Teilchen, welche jedoch stark wechselwirken und somit auf der Erde nicht mehr so stark vertreten sind.

Der Myonenfluss beträgt $\frac{1}{\text{cm}^2 \text{min}}$.

Im FP werden Effizienzen, also die Ansprechwahrscheinlichkeit, gemessen und die Alignierung bestimmt, zudem helfen die Myonen bei der Kalibrierung.

Die Kernreaktionen (Fusionen) in der Sonne liefern uns Energie, die in Form von γ -Strahlung und Neutrino-Strahlung auftritt.

Radioaktivität wird genutzt als Referenzstrahlung, beispielsweise als Test und zur Eichung von Detektoren und Messapparaturen. Dies ist ein statistischer Prozess, das heißt die Zerfälle pro Zeiteinheit ist proportional zur Zahl der vorhanden Atomkerne N

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (3)$$

, wobei λ die Zerfallskonstante ist. Es folgt:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (4)$$

Dabei ist $N_0 = N(t_0)$ die Anfangszahl der Kerne. Die mittlere Lebensdauer τ ist bestimmt durch $\tau = \frac{1}{\lambda}$, sodass gilt

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

Das Zeitverhalten zum Zeitpunkt $t = \tau$ ist somit

$$N(\tau) = N_0 e^{-1} \quad (6)$$

Die Bedingung an die Halbwertszeit lautet

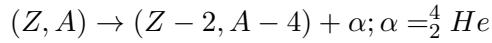
$$N(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{N_0}{2} \quad (7)$$

Somit gilt:

$$t_{\frac{1}{2}} = \ln(2) * \tau \quad (8)$$

Folgende radioaktive Strahlungen treten auf:

α -Strahlung: Der Kern ist charakterisiert durch die Kernladungszahl (Anzahl Protonen) Z, die Anzahl der Neutronen N und die Massenzahl A. Das Z ist dabei entscheidend, denn es legt das chemische Element fest. Die Massenzahl ist hierbei nicht unabhängig, es gilt $A = Z + N$. Es läuft die folgende Reaktion ab:



Es werden also stabile Heliumkerne emittiert. Es handelt sich um eine 2-Körper-Reaktion, die monoenergetisch ist, sodass die Energie des α -Teilchens $E(\alpha)$ festgelegt ist.

Es handelt sich um geladene Teilchen

$$Q(\alpha) = +2e$$

, wodurch sie stark ionisierend wirken. Es tritt somit auch eine starke Energieabgabe auf, welche zu einer geringen Reichweite der α -Strahlen führt. Der Energieverlust ist immer proportional zu Z^2 , die α -Strahlung verliert somit viermal mehr Energie als z.B. Myonen. Beispiel:

$$\alpha(5\text{MeV}) \rightarrow R(\text{Luft}) \sim \text{cm}$$

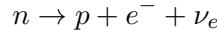
Somit ist α -Strahlung deutlich weniger gefährlich als beispielsweise β -oder γ -Strahlung.

Table 1.2. Characteristics of some alpha emitters

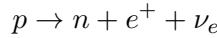
Isotope	Half-life	Energies [MeV]	Branching
^{241}Am	433 yrs.	5.486	85%
		5.443	12.8%
^{210}Po	138 days	5.305	100%
^{242}Cm	163 days	6.113	74%
		6.070	26%

Abbildung 14: Charakteristika einiger Alpha-Strahler

β -Strahlung: Es handelt sich hierbei um die Umwandlung von Quarks, es treten nur schwache Wechselwirkungen auf. Ein Beispiel ist die Umwandlung eines Neutrons in ein Proton (freier Neutronenzerfall, β^- -Zerfall)



Ein weiteres Beispiel ist der Zerfall eines Protons in ein Neutron (β^+ -Zerfall), welcher jedoch nur innerhalb eines Kernverbundes möglich ist.



Hierbei handelt es sich um 3-Körperzerfall, sodass ein kontinuierliches Energiespektrum des Elektrons bzw. Positrons entsteht. β -Strahlung ist häufig von γ -Strahlung begleitet, dass also ein Isotop entsteht welches sich im angeregten Zustand befindet, was unter Aussendung von γ -Strahlung in den Grundzustand fällt.

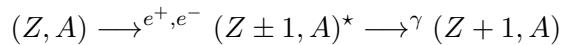


Tabelle 1.1. Reine β -Quellen

<u>Isotop Endpunktsenergie (keV) Halbwertszeit $t_{1/2}$</u>		
^3H	18.6	12.26 a
^{14}C	156.0	5730.0 a
^{33}P	248.0	24.4 d
^{90}Sr	546.0	27.7 a
^{90}Y	2270.0	64.0 h
^{99}Tc	292.0	2.1×10^5 a

Abbildung 15: Reine β -Strahler

γ -Strahlung: Hierbei handelt es sich um Übergänge von angeregten Kernzuständen in niedrigere Energiezustände unter Emission von elektromagnetischer Strahlung. Der Energiebereich liegt auch hier in der Größenordnung von MeV bzw. einigen hundert keV. Ein Sonderfall ist unter Anderem die innere Konversion, das bedeutet, dass die Energie vom Kern auf ein Hüllenelektron übertragen wird. Dadurch erfolgt die Emission eines monoenergetischen Elektrons für das gilt

$$E(e) = E_\gamma^\star - E_B(e)$$

Die innere Konversion wird somit als Quelle für monoenergetische Elektronen zur Kalibrierung verwendet. Dies tritt auf, wenn γ -Übergänge durch Auswahlregeln verboten sind, beispielsweise der Übergang von Kernspin $I = 0$ zu $I = 0$ ($\Delta I = 0$), was aus Impulserhaltungsgründen nicht möglich ist.

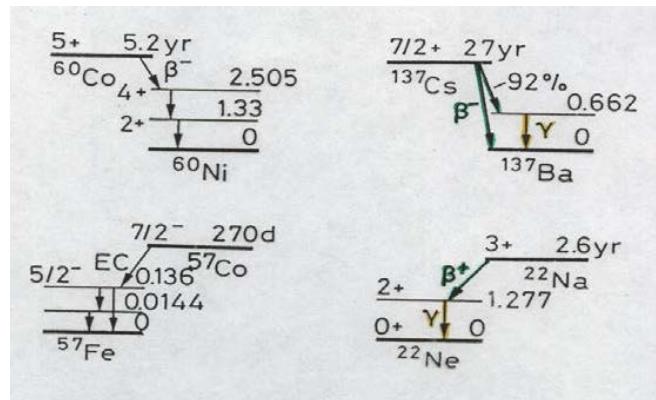


Abbildung 16: γ -Zerfall

Tabelle 1.2. γ -Quellen nach Größenordnungen

Mutterkern des β -Zerfalls	$t_{1/2}$	Tochterkern E_γ (keV)
^{22}Na	2.60 a	^{22}Ne 1274.0
^{57}Co	272.00 d	^{57}Fe 14.4
		122.1
^{60}Co	5.27 a	^{60}Ni 1173.2
		1332.5
^{137}Cs	30.00 a	^{137}Ba 661.6
^{55}Fe	2.70 a	^{55}Mn 5.89X
		6.49X
^{207}Bi	32.20 a	^{207}Pb 570.0

Abbildung 17: γ -Strahler

2 Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie

Die Detektion erfolgt durch Wechselwirkungen der Teilchen mit Materie und somit Energieverlust im Medium. Der Energieverlust wird hauptsächlich durch elektrische oder Lichtsignale detektiert.

Eine fundamentale Wechselwirkung für geladene Teilchen ist die elektromagnetische Wechselwirkung, die Energie wird hauptsächlich durch Wechselwirkungen der Teilchen mit den Elektronen der Atome des Mediums verloren. Die Wirkungsquerschnitte sind dabei sehr groß. Weniger Energie wird durch Teilchenkollision verloren, obwohl die Anzahl der Teilchen in dichter Materie natürlich groß ist. Der Energieverlust wirkt störend für die Messungen und beschränkt ihre Genauigkeit.

Für geladene Teilchen diskutieren wir Ionisation und Anregung sowie die Bremsstrahlung und kurz die Cherenkov Strahlung und Übergangsstrahlung. Für nichtgeladene Teilchen wie Photonen wird der Photoelektrische Effekt und die Compton-Streuung, sowie die Paarbildung behandelt.

2.1 Energieverlust durch Ionisation und Anregung, Bethe-Bloch-Formel

Wir betrachten ein elektrisch geladenes Teilchen mit der Ladung $z * e$, der Masse m_0 und dem Impuls $\vec{p} \rightarrow P(E, \vec{p})$. Diese Teilchen tritt nun in ein Medium ein, sodass elektromagnetische Wechselwirkungen mit Elektronen und Atomkernen auftreten. Wir betrachten den Fall, dass die Masse des Teilchen deutlich größer als die Elektronenmasse ist ($m_0 \gg m_e$). Im Allgemeinen ist die Masse jedoch kleiner als die Masse der Atome ($m_0 \ll m_{Atom}$), sodass es zur Richtungsänderung kommt. Es handelt sich somit um elastische Stöße der Teilchen mit den Atomkernen, dies wird als Coulomb-Vielfachstreuung bezeichnet.

Gleichzeitig findet eine Energieübertragung und somit ein Energieverlust der Teilchen bei der Streuung mit Elektronen statt. Es treten nun zwei verschiedene Prozesse auf, entweder die Ionisation oder die Anregung. Ionisation:

$$P(E, \vec{p}) + (\text{Atom}) \rightarrow P(E', \vec{p}') + e^- + (\text{Atom}^+)$$

Anregung:

$$P(E, \vec{p}) + (\text{Atom}) \rightarrow P(E', \vec{p}') + (\text{Atom}^*)$$

Atom^*) bezeichnet dabei ein niederenergetisches Atom, das durch Aussendung eines γ -Quants entsteht.

Der wichtigere Fall ist dabei jedoch die Ionisation.

Die maximal übertragbare Energie, die beim zentralen Stoß auftritt, lässt sich berechnen durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{2m_e p^2}{m_0^2 + m_e^2 + 2m_e \frac{E}{c^2}} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + (\frac{m_e}{m_0})^2 + 2\gamma \frac{m_e}{m_0}} \quad (9)$$

Dabei gilt $\beta = \frac{pc}{E}$; $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$; $p = mv = \gamma m_0 \beta c$.

Als Beispiel betrachten wir ein Myon, dessen Ruhemasse bekannt ist.

$$m_0 = 0.106\text{GeV}; E = 1.06\text{GeV} \rightarrow \gamma = 10$$

Somit ist die maximal übertragbare Energie

$$E_{\text{kin}}^{\max} \sim 100\text{MeV}$$

- Näherungen für schwere Teilchen und niedrige Energien Kleine Energien bedeutet, dass $2\gamma \frac{m_e}{m_0} \ll 1 \Leftrightarrow 2\gamma m_e \ll m_0$, ist dies erfüllt, so gilt

$$E_{\text{kin}}^{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

- Hochenergetische Näherung

Diese gilt für den Fall, dass $2\gamma m_e \gg m_0$ und lautet

$$E_{\text{kin}}^{\max} = m_0 c^2 \beta^2 \gamma = \beta^2 E$$

Wie bereits gesagt, handelt es sich um einen statistischen Prozess, das bedeutet wir können keine genauen deterministischen Vorhersagen treffen, sondern es ist die Betrachtung des **mittleren Energieverlusts** relevant.

$$\langle \frac{-dE}{dx} \rangle$$

Im Folgenden schreiben wir dies einfach als $\frac{-dE}{dx}$. Die Berechnungen dazu kann man klassisch ansetzen (siehe z.B. Jackson), wie es 1915 bereits Niels Bohr tat. Quantenmechanisch wurde dies 1930 von Hans Bethe berechnet, er 1932 noch relativistische Korrekturen vornahm. Im Jahr 1954 führte Felix Bloch dann Korrekturen höherer Ordnungen ein (quantenmechanische Störungstheorie). Insgesamt ergibt sich dies zu der Bethe-Bloch-Formel, wofür folgende Annahmen gemacht werden:

1. $m_0 \gg m_e; E = z * e$
2. Die Geschwindigkeit $v = \beta c$ des Teilchens ist groß gegen die Geschwindigkeit des Elektrons auf seiner Bahn. Die Formel gilt also nicht für Elektronen selbst.

$$\frac{-dE}{dx} = K \rho \frac{Z}{A} z^2 \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2M_e c^2 \beta^2 \gamma^2 E_{\text{kin}}^{\max}}{I^2 - 2\beta^2 - \delta(\beta\gamma)} \right) \right] \quad (10)$$

„Legende“: Vom Absorber:

- ρ Dichte
- Z Kernladungszahl, A Massenzahl (außer für Wasserstoff und schwere Elemente in Näherung $\sim \frac{1}{2}$)

- I die Ionisationskonstante, die charakteristisch für das Material ist

Vom Teilchen:

- z entspricht der Ladung des einlaufenden Teilchens in Einheiten der Elektronenladung e
- β ist die relative Geschwindigkeit des Teilchens
- E_{kin}^{\max} ist die maximal übertragbare kinetische Energie

Die auftretende Konstante K ist gegeben durch

$$K = 2\pi N_A \left[\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left(\frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 m_e c^2 \right] = 9.1535 \frac{\text{MeVcm}^2}{\text{g}} \quad (11)$$

Der Term in eckigen Klammern entspricht dabei dem Elektronenradius r_e . Der Term $\delta(\beta\gamma)$ ist zudem ein dichteabhängiger Korrekturterm. Zu beachten ist also, dass der mittlere Energieverlust dichteabhängig ist, aber sonst kaum abhängig vom Material ist $\frac{-dE}{dx} \sim \rho$. Im Wesentlichen erhält man eine materialunabhängige Relation, wenn man betrachtet:

$$-\frac{1}{\rho} * \frac{dE}{dx} = -\frac{dE}{dx'} \quad (12)$$

Die Einheiten sind dabei

$$\begin{aligned} \left[\frac{dE}{dx} \right] &= \frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \\ \left[\frac{dE}{dx'} \right] &= \frac{\text{MeVcm}^2}{\text{g}} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für die Kurve nun

$$-\frac{dE}{dx'} = K \frac{Z}{A} z^2 \frac{1}{\beta^2} \ln(f(\beta\gamma) - 2\gamma^2 - \delta(\beta\gamma)) \quad (13)$$

Dies entspricht einer universellen Kurve, die nur noch von β und γ abhängt:

$$-\frac{dE}{dc'} = -\frac{dE}{dx'}(\beta\gamma)$$

Wichtige Eigenschaften dieser Formel

- Der Energieverlust ist unabhängig von der Masse des Teilchens m_0 .
- Es gibt eine quadratische Abhängigkeit von der Ladung und der Relativgeschwindigkeit β

$$\sim z^2; \sim \frac{1}{\beta^2}$$

- Dabei wird für zwei Bereiche unterschieden: Für kleine Werte von $(\beta\gamma) : \sim \frac{1}{\beta^2}$ Für große Werte von $(\beta\gamma) : \sim \ln((\beta\gamma)^2)$ (logarithmischer Anstieg)

Es existiert also ein Minimum für $\beta\gamma = 3.5$. Teilchen, die dies erfüllen, werden als **minimal ionisierend** bezeichnet (mips).

$$\frac{dE}{dx'}|_{\min} \approx 1.5 \frac{\text{MeVcm}^2}{g}$$

1. die $\frac{1}{\beta^2}$ -Abhängigkeit lässt sich bereits klassisch erklären [siehe Leo, Kapitel 2.2.1] Bohr verwendete zur Erklärung die Impulsübertragung

$$\Delta p = \int \vec{F} dt = e \int \vec{E} \frac{dt}{dx} dx = e \int \vec{E} \frac{dx}{v} \quad (14)$$

und erhielt die Energieabgabe

$$\Delta E(b) = \frac{\Delta p^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^4}{m_e v^2 b^2} \quad (15)$$

Die Integration über b liefert dann $\frac{1}{v^2}, \sim z^2$.

2. Der logarithmische Anstieg für große $(\beta\gamma)$ entsteht, da der transversale Anteil des E-Felds wichtiger wird.
3. Die Dichte-Korrektur $\delta(\gamma\beta)$ dämpft den Anstieg in dichteren Medien, da der relative Anstieg von der Dichte des Mediums abhängt. Dies ist auf Polarisationseffekte zurückzuführen. Es treten atomare Abschirmungseffekte durch die Polarisierung der Atome entlang der zurückgelegten Wegstrecke des Teilchens auf. Diese sind nur für hochrelativistische Teilchen mit $(\beta\gamma) \gg 1$ relevant.

Die Bethe-Bloch-Formel ist nicht anwendbar für kleine Geschwindigkeiten ($\beta \leq 0.05$), es kommt zu einem Abfall und einem geringeren Energieverlust am Ende der Bahn, das Teilchen stoppt. Dies wird verwendet z.B. in der Medizin, um die maximale Energie an einer bestimmten Stelle freisetzen zu können (Bragg-Peak in der Energieabgabe-Kurve). Die Teilchen besitzen also eine bestimmt Reichweite:

$$R(E) = \int_E^0 \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE \quad (16)$$

Außerdem ist die Formel nicht anwendbar für Elektronen ($m_E = m_0$), da für identische Teilchen quantenmechanische Effekte auftreten. Zudem ist hier die Bremsstrahlung erheblich und somit nicht mehr vernachlässigbar. Als Beispiel betrachten wir das BaBar-Experiment am SLAC:

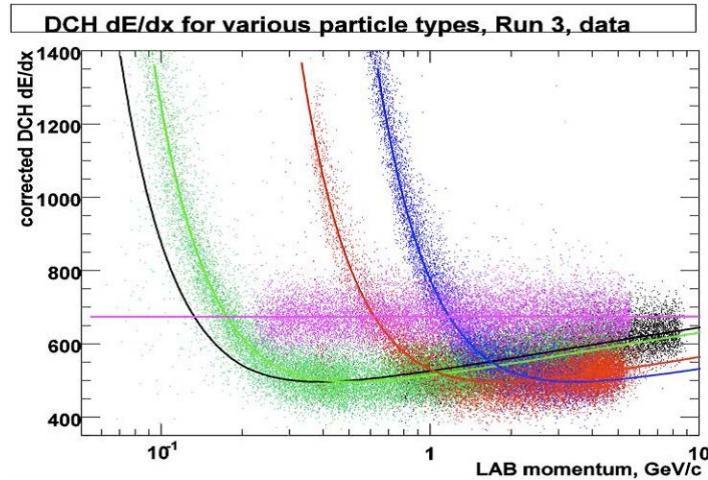


Abbildung 18: Energieverlust verschiedener Teilchen

Eine simultane Messung von $\frac{dE}{dx}$ und Impuls p kann die Teilchen identifizieren, dies funktioniert vor allem im niedrigen Energiebereich unter 1 GeV.

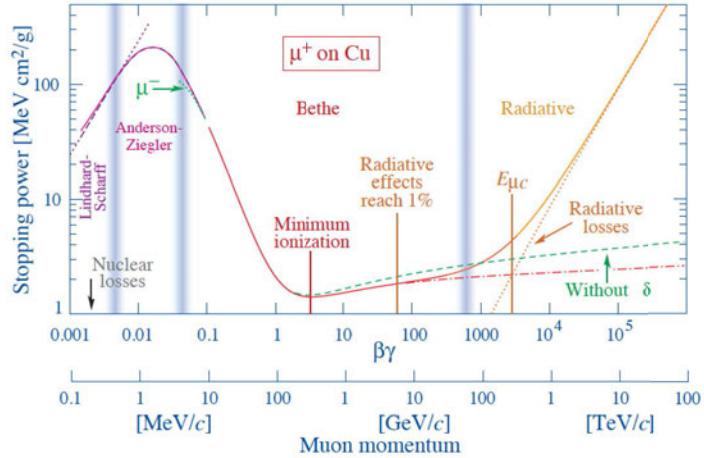


Abbildung 19: Stopping Power [Particle Data Group, 2013]

Der Hauptenergieverlust $\sim \frac{dE}{dx}$ für positive Myonen ist hier über 9 Größenordnungen dargestellt als eine Funktion $\beta\gamma = \frac{p}{m_0 c}$. In der folgenden Grafik sieht man die Anordnung schwerer geladener Teilchen in Wasser, Helium Gas, Eisen und Blei.

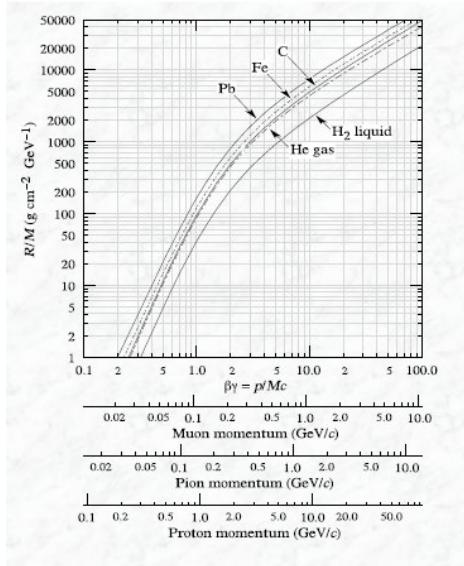


Abbildung 20: Anordnung verschiedener Teilchen [Particle Data Group, 2013]

2.2 Bremsstrahlung

Alle (elektrisch) geladenen Teilchen verlieren zusätzliche Energie aufgrund von Bremsstrahlung in der Nähe von Atomkernen. Dies liegt am starken Coulomb-Feld.

$$-\frac{dE}{dx} = -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Ion}} - \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Brems}}$$

$$\rightarrow f(E, m_0)$$
(17)

Für kleine Energien unter 100 GeV ist nur die Bremsstrahlung für die Elektronen relevant.

Bremsstrahlung ist ein Wechselwirkungsprozess, die zugrunde liegende Wechselwirkung ist erneut die Elektromagnetische aufgrund des Coulombfeldes. Dies kann als Quantenfluktuation betrachtet werden. Dabei zerfällt das Photon kurzzeitig zu einem e^- und einem e^+ und fügt sich danach wieder zu einem Photon zusammen – dies ist durch die Heisenbergsche Unschärferelation als Erklärung möglich. Umgekehrt ist dies auch mit einem einfallenden Elektron möglich, wobei unter Abspaltung eines Photons ein virtuelles Teilchen, dessen Masse ungleich der Elektronenmasse ist, entsteht. Nach kurzer Zeit fügen sich diese wieder zusammen.

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$$
(18)

Geschieht dies nun in der Nähe eines Atomkerns, so wechselwirkt das entstandene Teilchen mit den Kernen und das Photon bleibt abgespalten, da aus dem Kern die Energie für die Wiederherstellung des „normalen“ Elektrons erhalten wird. Beschrieben werden diese Vorgänge durch Feynmann-Diagramme: Der Prozess wird folgendermaßen

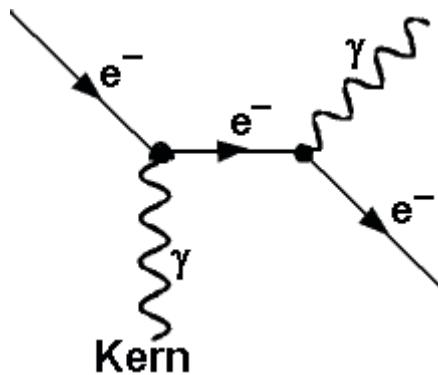
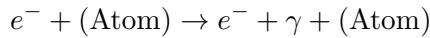


Abbildung 21: Wechselwirkung in Kernnähe [Quelle]

beschrieben:



Nun lässt sich der Wirkungsquerschnitt berechnen, aus dem wir die Energie-Verlust-Beziehung $\frac{dE}{dx}$ erhalten. Diese Rechnung lässt sich jedoch nicht klassisch machen, sondern

man benötigt dazu die Quantenelektrodynamik. Wir beschränken uns deswegen auf eine kurze Diskussion des Ergebnisses.

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Brems}} = 4\alpha N_A \left(\frac{e^2}{m_0 c^2}\right)^2 \ln\left(\frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}}\right) \frac{Z(Z+1)}{A} z^2 E \quad (19)$$

Zum Absorber gehören dabei Z und A. Zum Teilchen gehören:

- Ladung $Q = z * e$
- Ruhemasse m_0
- Energie E

α ist die Feinstrukturkonstante, gegeben durch $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ und N_A die Avogardozahl. Wir definieren nun die sogenannte Strahlungslänge X_0 . Für Elektronen gilt nun $m_0 = m_e$

$$\frac{1}{X_0} = 4\alpha N_A \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \ln\left(\frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}}\right) \frac{Z(Z+1)}{A} \quad (20)$$

Für Elektronen ist die Ladung $Q = -e$, außerdem $z = 1$ und $m_0 = m_e$. Die Formel vereinfacht sich somit zu

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Brems}} = \frac{1}{X_0} E \quad (21)$$

X_0 charakterisiert somit die Strahlung von Elektronen in Materie.

Wir betrachten nun wichtige Abhängigkeiten:

- Es besteht im Gegensatz zu Bethe-Block-Formel eine stärkere Materialabhängigkeit.

$$-\frac{dE}{dx} \sim \frac{Z(Z+1)}{A}$$

- Sehr wesentlich ist zudem die Masse des einlaufenden Teilchens m_0

$$-\frac{dE}{dx} \sim \frac{1}{m_0^2}$$

Schon für die beiden leichtesten bekannten Teilchen, Elektron und Myon, ist dieser Unterschied deutlich sichtbar:

$$\frac{\left(\frac{dE}{dx}\right)_\mu}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_e} \sim \frac{1}{40000}$$

- Des Weiteren spielt die Energie E des Teilchens eine Rolle.

$$-\frac{dE}{dx} \sim E$$

Für Elektronen erhalten wir

$$E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{x_0}} \quad (22)$$

, das bedeutet für die Energie des Elektrons nach Durchlaufen der Strahlungslänge

$$E(X_0) = \frac{E_0}{e} = 0.37 E_0 \quad (23)$$

Vergleichen wir dies nun mit dem Energieverlust durch Ionisation:

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{Ion}} (E_c) = \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{Brems}} (E_c) \quad (24)$$

Wir definieren E_c als kritische Energie, für die Energieverlust durch Bremsstrahlung und Ionisation gleich sind. Nach dem Erreichen dieser kritischen Energie dominiert der Energieverlust durch Bremsstrahlung. Dies lässt sich in folgender Grafik gut veranschaulichen: Die kritischen Energien in Kupfer ($Z=29$) sind dabei $E_c(e) \approx 19 \text{ MeV}$; $E_c(\mu) \approx$

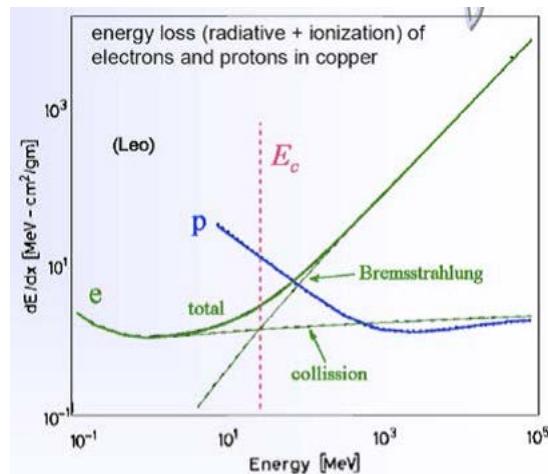


Abbildung 22: Energieverlauf

1TeV. Myonen mit einer Energie von über 10GeV können also dicke Schichten von Materie durchdringen, dies ist das Hauptmerkmal für die Identifikation dieser. In Eisen liegt die kritische Energie bei etwa 870 GeV, bei hohen Energien werden jedoch zusätzlich die Paarbildungen $\mu(\text{Atom}) \rightarrow \gamma e^+ e^- (\text{Atom})$ relevant.

Der Energieverlust verläuft folgendermaßen: Abschließend sind in dieser Tabelle sind

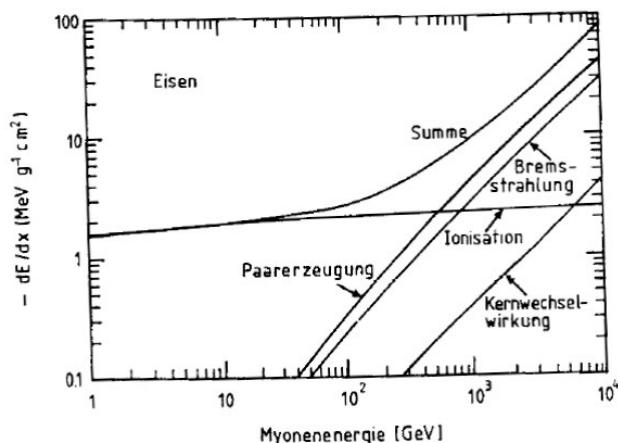


Abbildung 23: Energieverlustverlauf

die Strahlungslängen und kritischen Energien zusammengefasst:

Material	Z	X ₀ (cm)	E _c (MeV)
H ₂ Gas	1	700000	350
He	2	530000	250
Li	3	156	180
C	6	18.8	90
Fe	26	1.76	20.7
Cu	29	1.43	18.8
W	74	0.35	8.0
Pb	82	0.56	7.4
Air	7.3	30000	84
SiO ₂	11.2	12	57
Water	7.5	36	83

Abbildung 24: Strahlungslängen und kritische Energien

2.3 Cherenkov-Strahlung

Ein geladenes Teilchen, dass sich in einem dielektrischen Medium mit einer Geschwindigkeit $v > \frac{c}{n}$ bewegt, also eine Geschwindigkeit über der Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium besitzt, sendet eine charakteristische Strahlung aus, die Cherenkov-Strahlung. Diese wurde 1934 in von P. Cherenkov experimentell entdeckt und 1937 von Frank und Tamm theoretisch erklärt. Sie führt zu einer Erweiterung der Formel (17) zu

$$-\frac{dE}{dx} = -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Ion}} - \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Brems}} - \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Cherenkov}} \quad (25)$$

Verglichen mit der Korrektur durch Bremsstrahlung bewirkt die Cherenkov-Strahlung nur eine kleine Korrektur.

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Ch}} &\sim 0.01 \rightarrow 0.02 \frac{\text{MeV}}{\text{gcm}^{-2}} \\ -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Ion}}^{\min} &\approx 1.5 \frac{\text{MeV}}{\text{gcm}^{-2}} \end{aligned}$$

Die für Cherenkov-Strahlung erforderliche Bedingung lautet

$$v > \frac{c}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\beta} \quad (26)$$

Dies führt somit zu einer Begrenzung des Bereichs, in dem die Emission von Cherenkov-Strahlung möglich ist. Erklärt wird dies durch die Dispersionsrelation.

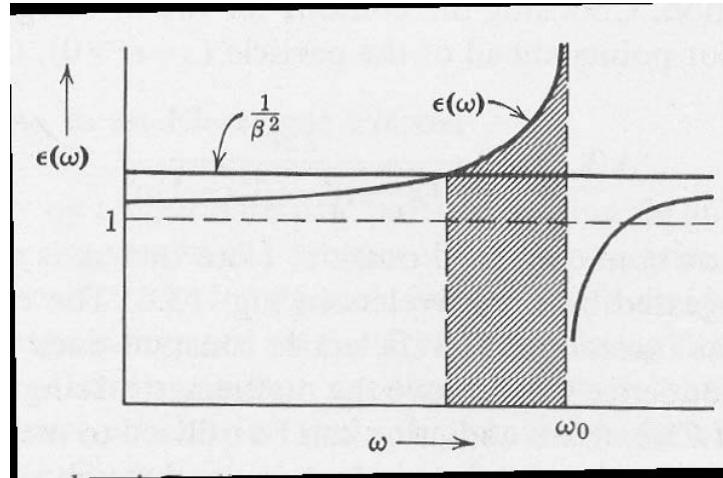


Abbildung 25: Emission im optischen bis ultravioletten Bereich

Für den Energieverlust durch Cherenkov-Strahlung gilt die folgende Formel.

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Ch}} = z^2 \frac{\alpha \hbar}{c} \int_{n(\omega)^{\frac{1}{\beta}}} 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} d\omega \quad (27)$$

Der Ursprung der Strahlung liegt in der Polarisation des Mediums. Für $v < \frac{c}{n}$ polarisiert das Teilchen das Medium mit $v_{\text{Pol}} = \frac{c}{n} > v$ symmetrisch in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung, sodass kein resultierende Dipolmoment entsteht.

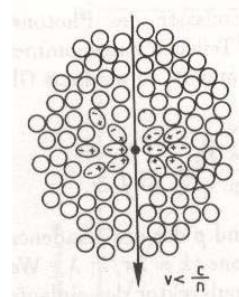


Abbildung 26: $v < \frac{c}{n}$

Ist nun $v > \frac{c}{n}$, so bleiben die Atome hinter dem Teilchen polarisiert, es gibt jedoch keine Polarisation in Vorwärtsrichtung. Somit gibt es ein resultierendes Dipolmoment am Ort des Teilchens, was zur Cherenkov-Strahlung führt.

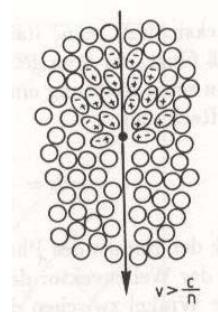


Abbildung 27: $v > \frac{c}{n}$

Geometrisch überlegen wir dazu:

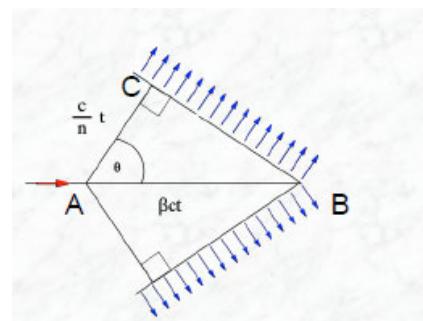


Abbildung 28: Geometrische Betrachtung

Hier gilt $s_1 = (\overline{AB}) = t\beta c$; $s_2 = (\overline{AC}) = t\frac{c}{n}$, woraus wir den Cherenkov-Winkel θ_c erhalten:

$$\cos \theta_C = \frac{s_2}{s_1} = \frac{1}{n\beta} \quad (28)$$

Der Effekt der Cherenkov-Strahlung tritt auf, wenn $\cos \theta_C < 1 \rightarrow \beta > \frac{1}{n}$ ist.

Die Abhängigkeit des Cherenkov-Winkels von β ist in der folgenden Grafik abgebildet:

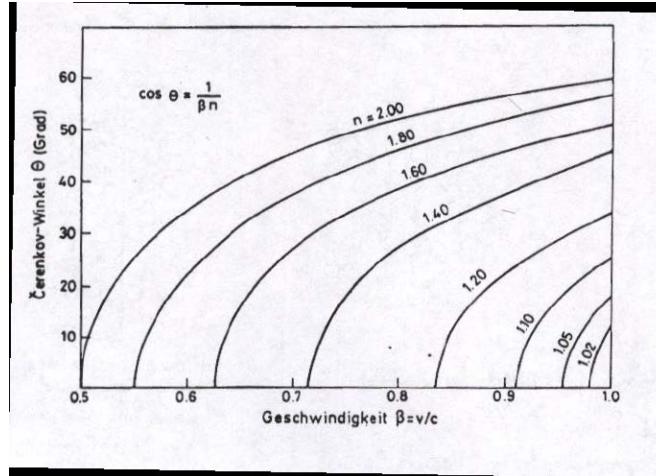


Abbildung 29: Winkel in Abhängigkeit der Geschwindigkeit

Der minimale Cherenkov-Winkel ist 0, für den maximalen Cherenkov-Winkel gilt:

$$\theta_c^{\max} = \arccos\left(\frac{1}{n}\right) \quad (29)$$

Anwendung findet diese Strahlung zur Identifikation von Teilchen.

1. Grenzverhalten: Leichte Teilchen wie Elektronen emittieren diese Strahlung, schwere Teilchen wie die Mesonen tun dies nicht.
2. Es ist eine Messung über den Cherenkov-Winkel möglich, mit dem die Geschwindigkeit β bestimmt werden kann.

In Verbindung mit der zusätzlichen Messung des Impulses p kann somit die Masse des Teilchens bestimmt werden.

Abschließend sind in folgender Tabelle verschiedene Cherenkov-Radiatoren abgebildet.

Material	$n - 1$	β -Schwelle	γ -Schwelle
festes Natrium	3.22	0.24	1.029
Bleisulfit	2.91	0.26	1.034
Diamant	1.42	0.41	1.10
Zinksulfid ($ZnS(Ag)$)	1.37	0.42	1.10
Silberchlorid	1.07	0.48	1.14
Flintglas (SFS1)	0.92	0.52	1.17
Bleifluorid	0.80	0.55	1.20
Clerici-Lösung	0.69	0.59	1.24
Bleiglas	0.67	0.60	1.25
Thalliumformiat-Lösung	0.59	0.63	1.29
Szintillator	0.58	0.63	1.29
Plexiglas	0.48	0.66	1.33
Borsilikatglas	0.47	0.68	1.36
Wasser	0.33	0.75	1.52
Aerogel	0.025 - 0.075	0.93 - 0.976	4.5 - 2.7
Pentan (STP)	$1.7 \cdot 10^{-3}$	0.9983	17.2
CO_2 (STP)	$4.3 \cdot 10^{-4}$	0.9996	34.1
Luft (STP)	$2.93 \cdot 10^{-4}$	0.9997	41.2
H_2 (STP)	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.99986	59.8
He (STP)	$3.3 \cdot 10^{-5}$	0.99997	123

Tabelle 6.2: Cherenkov-Radiatoren [94, 32, 313]. Der Brechungsindex für Gase bezieht sich auf $0^\circ C$ und 1 atm (STP). Festes Natrium ist für Wellenlängen unterhalb von 2000 \AA transparent [373, 209].

Abbildung 30: Cherenkov-Strahler

2.4 Übergangsstrahlung

Durchkreuzt ein geladenes Teilchen die Grenze zweier Medien mit unterschiedlichen dielektrischen Konstanten, so emittiert zusätzlich zur elektromagnetischen Strahlung auch Übergangsstrahlung. Der Grund dafür ist die Anpassung des elektrischen Feldes. Dies wurde 1946 von Ginsburg und Frank entdeckt und erklärt (genauere theoretische Beschreibung: siehe Jackson, Klassische Elektrodynamik) Wir erweitern die Gleichung (17) somit erneut um einen Term, der die Übergangsstrahlung beschreibt.

$$-\frac{dE}{dx} = -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Ion}} - \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Brems}} - \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Cherenkov}} - \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Übergang}} \quad (30)$$

Die Bildung von Übergangsstrahlung geschieht in einer kleinen Region an der Grenzfläche, die Bildungslänge ist

$$D = \gamma * 10^{-6} \text{ cm} \quad (31)$$

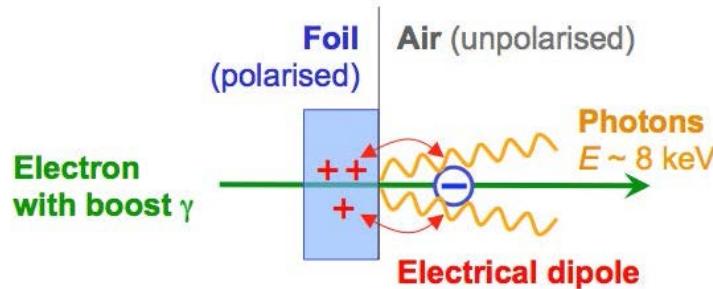


Abbildung 31: Skizze zum Ablauf

Die gesamte durch Übergangsstrahlung emittierte Energie ist proportional zum Lorentz-Faktor γ :

$$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{m} \approx \frac{p}{m}; (c = 1) \quad (32)$$

Besonders wichtig ist dies für die Identifikation von Teilchen im Hochenergiebereich, für den $\beta \approx 1$ ist.

Die Betrachtung der Übergangsstrahlung ist hauptsächlich für die Identifikation von Elektronen relevant. Für einen bekannten Impuls p ist deren γ -Faktor deutlich größer als der von Hadronen (Faktor 273 für das leichteste Hadron π^\pm).

Für einen γ -Bereich von 10^3 (z.B. Elektron mit Impuls $p = 0.5\text{GeV}$ und Hadron π^\pm mit $p \approx 140\text{GeV}$) ist ungefähr die Hälfte der abgestrahlten Energie im Bereich von Röntgenstrahlung angesiedelt (2-20keV γ -Strahlung). Um diese γ -Quanten zu detektieren werden Absorbermaterialien mit hohen Ladungszahlen Z verwendet, die mittels des photoelektrischen Effekts absorbieren (z.B. Xenon-Gas).

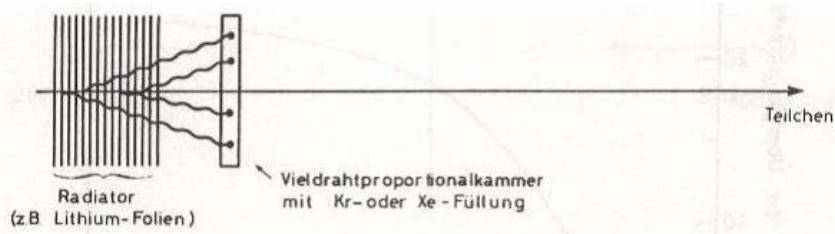


Abbildung 32: Aufbau

An den Grenzflächen werden somit Photonen emittiert, die absorbiert werden müssen, sodass ein elektrisches Signal messbar wird.

2.5 Starke Wechselwirkung von Hadronen

Bisher haben wir hauptsächlich Elektronen betrachtet. Gehen wir nun zu Protonen, so stellen wir folgende Wechselwirkungen fest:

1. elektromagnetische Wechselwirkung – diese stoppt die Protonen jedoch nicht
2. starke Wechselwirkung über Austausch von Pionen

$$P + (N) \rightarrow n\pi^+\pi^0\pi^-\pi^+ \dots \quad (33)$$

Diese ist inelastisch, es werden neue Teilchen aufgrund der starken Wechselwirkungen produziert.

Wir erinnern uns daran, dass Elektronen elektromagnetische, aber keine starken Wechselwirkungen hat, das Neutron starke, aber keine elektromagnetischen Wechselwirkungen und das Proton beide Arten der Wechselwirkungen.

Hadronische Wechselwirkungen werden durch die hadronische Wechselwirkungslänge λ_{had} charakterisiert. Die Abschwächung eines Hadronen-Strahls in Materie wird beschrieben durch

$$I(x) = I_0 e^{-\frac{x}{\lambda_{\text{had}}}} \quad (34)$$

Dabei ist x die Tiefe im Material. Die hadronische Wechselwirkungslänge ist eine Materialkonstante und hängt mit dem inelastischen Wirkungsquerschnitt σ_{inel} verknüpft:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{had}}} = \sigma_{\text{inel}} \frac{N_A \rho}{A} \quad (35)$$

Im Vergleich zur Strahlungslänge X_0 ist λ_{had} sehr groß.

Die Stärke der Wechselwirkungen, die Strahlungslängen und die hadronischen Wellenlängen werden in folgender Tabelle verglichen:

Material	X_0 (cm)	λ_{had} (cm)
H ₂ Gas	865	718
He	755	520
Be	35.3	40.7
C	18.8	38.1
Fe	1.76	16.76
Cu	1.43	15.06
W	0.35	9.59
Pb	0.56	17.09

Abbildung 33: Strahlungs- und Wellenlängen

3 Wechselwirkung von Photonen mit Materie

Die elektromagnetische Wechselwirkung ist proportional zur Ladung, das bedeutet, dass diese Wechselwirkung für die ungeladene Photonen nicht möglich sind. Dementsprechend unterscheidet sich die Wechselwirkung von Photonen extrem von den bekannten Wechselwirkungen geladener Teilchen.

Photonen tragen keine elektrische Ladung, also sind auch keine Ionisationsprozesse möglich. Die Wechselwirkung mit dem Detektormaterial erfolgt über „diskrete“ Prozesse:

1. Den Photoeffekt: $\gamma + (\text{Atom}) \rightarrow e^- + (\text{Atom})^+$
2. Die Compton-Streuung, diese ist am wenigsten diskret, da das Photon überlebt:

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$
3. Die Paarbildung $\gamma + (\text{Atom}) \rightarrow e^+e^- + (\text{Atom})$

Es kommt somit zur Abschwächung der Intensität des Photonenstrahls. Diese wird beschrieben durch

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad (36)$$

Dabei ist x die Schichtdicke und μ der Abschwächungskoeffizient.

Oft wird dabei der Massenabschwächungskoeffizient $\mu' = \frac{\mu}{\rho}$; $[\mu'] = \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$ angegeben. Die Abschwächungskoeffizienten stehen in Relation zu dem Wirkungsquerschnitt σ_i für die ersten drei Prozesse:

$$\mu' = \frac{N_A}{A} \sum_i \sigma_i; \mu = \frac{N_A}{A} \rho \sum_i \sigma_i \quad (37)$$

Die Wirkungsquerschnitte hängen dabei von der Photonenenergie E ab und dem Absorbermaterial über die Kernladungszahl Z .

3.1 Photoeffekt

Die stattfindende Reaktion wird beschrieben durch

$$\gamma + (\text{Atom}) \rightarrow e^- + (\text{Atom})^+ \quad (38)$$

Die Energie des Elektrons ist dabei festgelegt auf

$$E_{e^-} = E_\gamma - E_B(e) \quad (39)$$

, wobei E_B die Bindungsenergie des Elektrons darstellt.

Der Wirkungsquerschnitt W' zeigt eine starke Energieabhängigkeit:

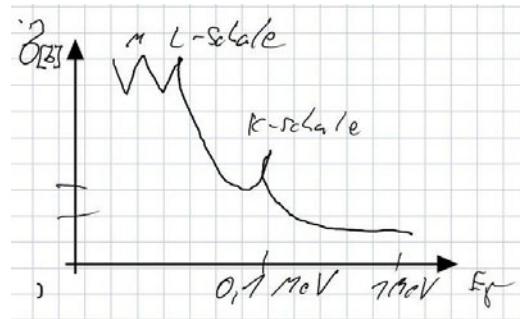


Abbildung 34: Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts

σ ist dabei in der Größenordnung von 10^{-24}cm^{-2} ~, es ist in der Quantenelektrodynamik berechenbar. Der Wirkungsquerschnitt der Photonen lässt sich hier in Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von Thompson für die elastische Streuung von Photonen an Elektronen

$$\sigma_{\text{Th}}^e = \frac{8}{3}\pi r_e^2 = 6.65 * 10^{25}\text{cm}^2 = 0.665b \quad (40)$$

schreiben als

$$\sigma_{\text{Photon}} \sim \alpha^4 Z^5 \sigma_{\text{Th}}^e \quad (41)$$

Wichtig ist dabei die starke Z-Abhängigkeit, besonders in einem Energiebereich von $0.1\text{MeV} < E_\gamma < 5\text{MeV}$, wo der Exponent im Bereich von 4 und 5 variiert. Es treten zudem Sekundäreffekte auf: Zum Einen eine begleitende γ -Strahlung durch Elektronenübergänge im Atom und zum Anderen die Auger-Elektronen, das bedeutet es wird ein weiteres Elektron emittiert.

3.2 Compton-Streuung

Die Compton-Streuung beschreibt eine elastische Streuung von Photonen an einem quasifreien Elektronen, das bedeutet die Bindungsenergie des Elektrons ist vernachlässigbar. Die Streuung findet wie folgt statt:

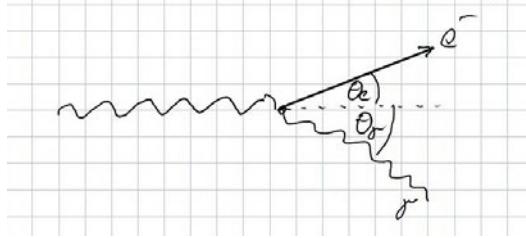


Abbildung 35: Compton-Streuung

Der Wirkungsquerschnitt ist in der Quantenelektrodynamik berechenbar durch die Klein-Nishina-Formel

$$\frac{d\sigma_C^e}{d\Omega} = f(\theta_e, \epsilon) \quad (42)$$

Dabei ist ϵ die reduzierte Photonenergie, für die gilt

$$\epsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2} \quad (43)$$

σ_C^e ist dabei der Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem einzelnen Elektron. Es gilt für ein Atom:

$$\sigma_C^A = Z \sigma_C^e \quad (44)$$

Eine wichtige Näherung der Klein-Nishina-Formel ist dabei für $\epsilon \gg 1$

$$\sigma_C^e \sim \frac{\ln \epsilon}{\epsilon} \quad (45)$$

Die Berechnung der Kinematik des Streuprozesses (siehe Übung) ist, wenn θ_γ der Streuwinkel des Photons im Laborsystem ist:

$$\frac{E_{\gamma'}}{E_\gamma} = \frac{1}{1 + \epsilon(1 - \cos \theta_\gamma)} \quad (46)$$

Die maximale Energieübertragung erfolgt bei der Rückstreuung, bei der der Streuwinkel $\theta_\gamma = \pi$ ist.

$$E_{\gamma'} = E_\gamma \frac{1}{1 + 2\epsilon} \quad (47)$$

Die Energie wird beschrieben durch

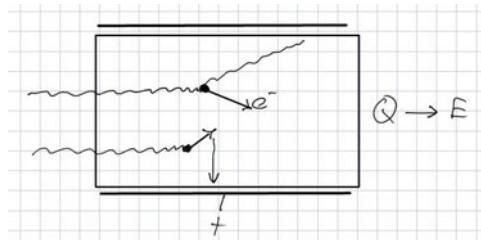


Abbildung 36: Streuprozess

$$E_\gamma = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \quad (48)$$

, woraus folgt

$$\Delta\lambda = \lambda' = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta_\gamma) \quad (49)$$

Daraus lässt sich die Compton-Wellenlänge definieren.

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} \quad (50)$$

Der Verlauf der Energie sieht folgendermaßen aus:

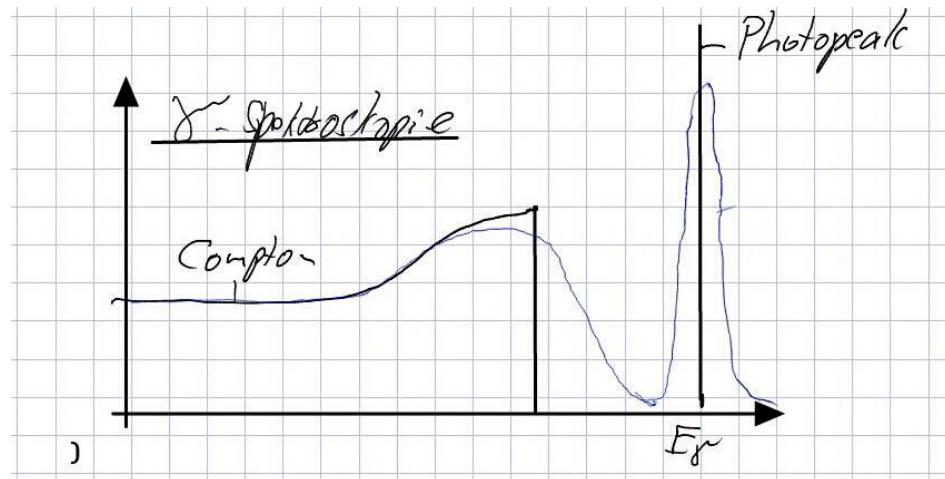


Abbildung 37: Energieverlauf

3.3 Paarerzeugung

Im Coulomb-Feld des Atomkerns kann ein Photon in ein reelles e^+e^- - Paar übergehen.

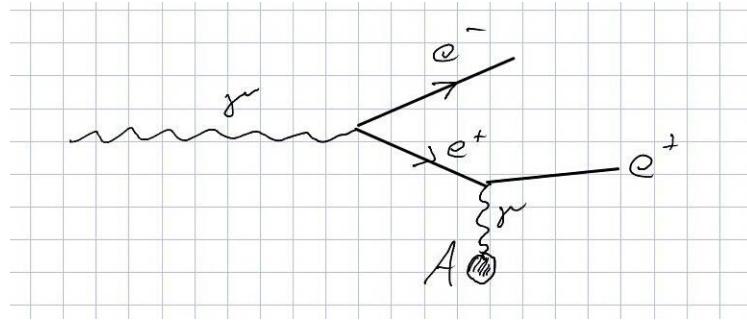


Abbildung 38: Übergang im Kernfeld

Für hohe Energien $\epsilon \gg 1$ gilt nun wieder

$$\sigma_{\text{Paar}} = 4\alpha r_e^2 Z^2 \frac{7}{9} \ln \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} \approx \frac{7}{9} \frac{A}{N_A} \frac{1}{X_0} \quad (51)$$

Auch hier tritt somit wieder die charakteristische Strahlungslänge X_0 auf. Die Energie wird verteilt auf e^- und e^+ . Diese Energieverteilung ist für kleine Energien E_γ symmetrisch, aber für hohe E_γ jedoch asymmetrisch.



Abbildung 39: B-Feld

Es gilt:

$$\sigma_{\text{Paar}} = \frac{7}{9} \frac{A}{N_A} \frac{1}{X_0} \quad (52)$$

$$\mu_{\text{Paar}} = \sigma_{\text{Paar}} \frac{N_A}{A} = \frac{7}{9} \frac{1}{X_0} \quad (53)$$

Nach Durchlaufen einer Schichtdicke von $\frac{9}{7}X_0$ ist die Intensität eines Photonenstrahls aufgrund von Paarbildung auf $\frac{1}{e}$ abgefallen. Anders ausgedrückt besteht nach dem Durchlaufen von $X = X_0$ eine Wahrscheinlichkeit für Paarbildung von

$$P = 1 - e^{-\frac{7}{9}} = 0.54 \quad (54)$$

3.4 Photonen-Wechselwirkungsquerschnitte

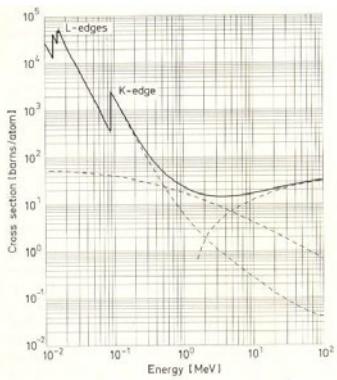


Abbildung 40: Photonabsorption im Grenzbereich als Funktion der Photonenergie,
[Ref. Leo]

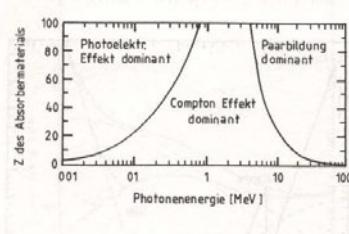


Abbildung 41: Dominante Anteile in Abhängigkeit der Photonenergie und Kernladungszahl, [Ref. Grupen]

Die Absorptionskurven sind nicht universell, sondern wie auf den folgenden Bildern sichtbar wird, stark abhängig von den Absorbermaterialien.

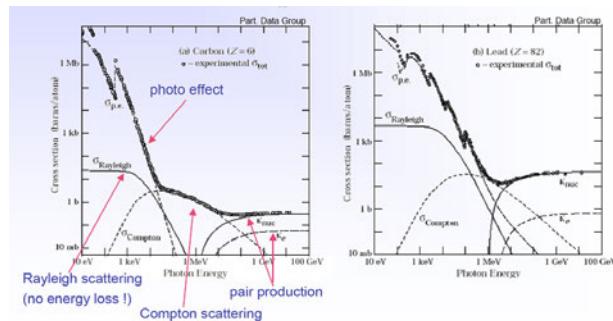


Abbildung 42: Verschiedene Absorptionskurven

3.5 Anwendungen

Die wohl bekannteste Anwendung ist das Röntgen, bei dem im Prinzip nur geprüft wird, wo die Absorption am stärksten ist. Eine weitere Anwendung in der Medizin ist die Tumorthерапie, bei der Patienten γ -Strahlung ausgesetzt werden.

In der Physik findet man Anwendung in elektromagnetischen Kalorimetern zum Messen der Energie von Elektronen. Dabei werden sogenannte elektromagnetische Schauer erzeugt durch Bremsstrahlung und Paarbildung.

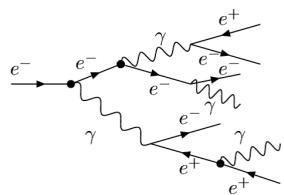


Abbildung 43: Elektromagnetischer Schauer

Das Konzept dieser elektromagnetischen Kalorimeter funktioniert folgendermaßen:

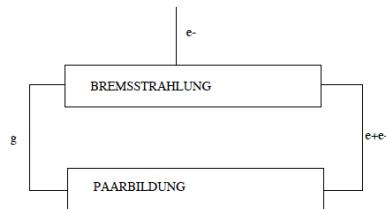


Abbildung 44: Aufbau Kalorimeter

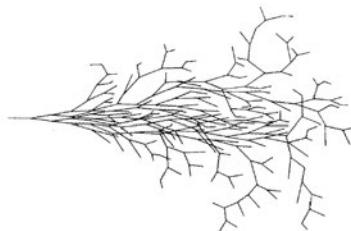


Abbildung 45: Schauer

Charakterisiert wird dieser Vorgang durch die Strahlungslänge X_0 . Die Anzahl der Teilchen in diesem Schauer skaliert direkt mit der Energie, die Eindringtiefe in den Block skaliert logarithmisch mit der Energie, bis die kritische Energie E_C erreicht ist.

Hadronen erzeugen ihre Energieschauer (Hadronenschauer) durch inelastische hadronische Wechselwirkungen (starke Wechselwirkungen). Hadronische Schauer sind wesentlich

komplexer als elektromagnetische Schauer.

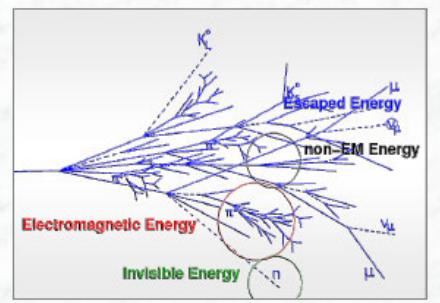


Abbildung 46: Hadronischer Schauer

Durch die π^0 -Komponenten kommt es durch den Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ zu elektromagnetischen Unter-Schauern, der Teil der elektromagnetischen Komponente wächst dabei mit der Energie.

$$f_{\text{EM}} = 0.1 \ln E \quad (55)$$

Die Energie ist dabei im Bereich von 10-100 GeV.

Während der hadronischen Wechselwirkungen werden Atomkerne aufgebrochen oder verbleiben in angeregten Zuständen. Die zugehörigen Energien (Anregungs- bzw. Bindungsenergie) kommt von der ursprünglichen Teilchenenergie, was keinen oder nur partiellen Teil zur sichtbaren Energie beiträgt.

Zusätzlich ist die Neutronen-Komponente wichtig, deren Wechselwirkung stark von ihrer Energie abhängt.

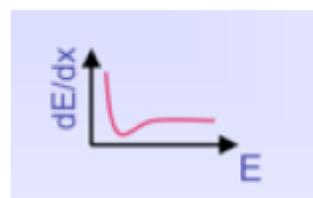
Zerfälle von Teilchen (langsame Teilchen am Ende des Schauers) führen zu entkommenden Teilchen und somit fehlender Energie.

Die Energieverluste haben wichtige Folgen, im Allgemein ist die Reaktion des Kalorimeters auf Elektronen/ Photonen und Hadronen unterschiedlich. Das Signal für Hadronen ist nicht linear und kleiner als das e / γ - Signal bei gleicher Teilchenenergie.

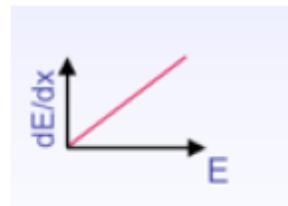
Überblick über Wechselwirkungsprozesse von Elektronen und Photonen

Energy loss due to excitation and ionisation

Bethe Bloch formula



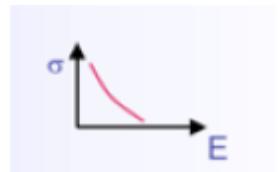
Bremsstrahlung



Cherenkov radiation

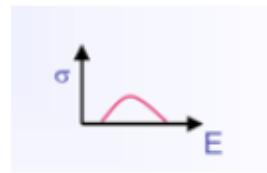
Photo effect

(dominant in \sim keV energy range)



Compton effect

(dominant in MeV energy range)



Pair creation

(threshold energy = $2 m_e = 1,022$ MeV)

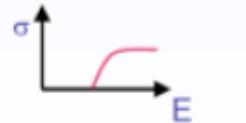


Abbildung 47: Überblick Wechselwirkungen

4 Ionisationsmessung

Prinzipiell wird Ionisation zum Nachweis von Strahlung genutzt. Historisch gesehen waren die ersten Instrumente zur Messung der Ladung die Ionisationskammer und das Geiger-Müller-Zählrohr, welches bereits vor 1940 entworfen wurde. Im Jahr 1965 wurde die Vieldrahtproportionalkammer erfunden, wo zusätzlich zur Ladung auch die Ortsinformation gemessen werden kann. 1970 wurde dann die Driftkammer, mit der ebenfalls Ort- und Ladungsinformationen erhalten werden, erfunden. Mit der Erfindung des Siliziumstreifenzählers um 1985 herum und der Siliziumpixelzählern 1990 wurde die Genauigkeit der Messung von Ortsinformationen deutlich gesteigert.

4.1 Ionisationskammer

Das Ziel einer Messung mit der Ionisationskammer ist die Ionisationsladung, jedoch keine Ortsinformationen. Das Messprinzip erfolgt mithilfe eines Plattenkondensators:

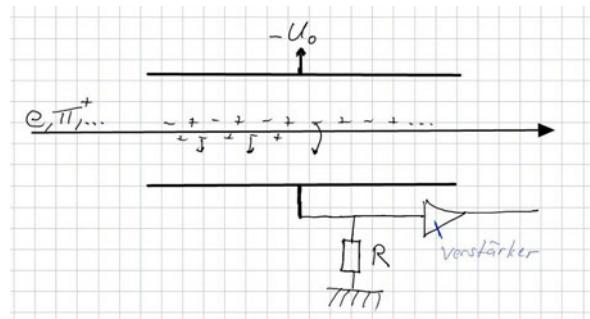


Abbildung 48: Plattenkondensator

Ionisierende Teilchen sind Elektronen und positive Ionen. Es erfolgt ein Drift der freien Ladungsträger (Gase), sodass Ströme $I^-(t)$ und $I^+(t)$ entstehen. Es kommt zu einer Influenz einer Ladung auf den beiden Kondensatorplatten. Somit ergibt sich eine Änderung des Potentials am Kondensator, wodurch man einen messbaren Spannungspuls ΔU erhält.

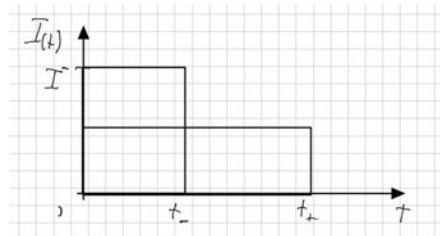


Abbildung 49: Stromstärke

$$I^-(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta v^-}{\Delta X_1} \quad (56)$$

Dabei ist v^- die Driftgeschwindigkeit der Elektronen. Das elektrische Feld am Plattenkondensator ist gegeben durch

$$E = \frac{U}{d} \quad (57)$$

Das Potential lässt sich also schreiben als

$$\phi = \frac{U}{d}x \quad (58)$$

, woraus wir die potentielle Energie einer Ladung im Punkt x_0 erhalten.

$$W = q * \phi(x_0) \quad (59)$$

Die Bewegung der Ladung im elektrischen Feld führt zu einer Änderung der potentiellen Energie. Die potentielle Energie des Kondensators ist gegeben als

$$W = \frac{1}{2}CU^2 \quad (60)$$

Die Änderung ergibt sich zu

$$dW = C * U * dU = q \frac{d\phi}{dx} dx = q \frac{U}{d} dx \quad (61)$$

$$\rightarrow \frac{dU}{dx} = \frac{q}{Cd} \rightarrow U(x_1) - U(x_0) = \frac{q}{Cd}(x_1 - x_0) \quad (62)$$

Der Elektronpuls ist nun:

$$\Delta U^- = -\frac{Ne}{Cd}v_D^-t^- \quad (63)$$

$$\Delta U^+ = -\frac{Ne}{Cd}v_D^+t^+ \quad (64)$$

Dabei sind v_D^- , v_D^+ die Driftgeschwindigkeiten der Elektronen bzw. der positiven Ionen im Gas, t^- , t^+ sind die Driftzeiten. Der totale Spannungspuls ist

$$\Delta U = \Delta U^- + \Delta U^+ = \frac{Ne}{Cd}x_0 + \frac{Ne}{Cd}(d - x_0) = \frac{Ne}{C} \quad (65)$$

Somit ist der Spannungspuls proportional zur Ionisationsladung.

$$\Delta U = \frac{Ne}{C} \sim Q \quad (66)$$

Typische Zeiten sind zum Beispiel für Argon-Gas:

$$P = P_0, E = 500 \frac{\text{V}}{\text{cm}}, d = 5\text{cm}; v_D^- = v_D^-(E, P, \text{Gas})$$

$$\rightarrow v_D^- = 5 \frac{\text{cm}}{\mu\text{s}}; v_D^+ = 10^{-3} v_D^- \quad (67)$$

In der Literatur findet man für die Driftgeschwindigkeit die Definition:

$$\vec{v}_D = \mu \vec{E} \quad (68)$$

, dabei ist μ die Beweglichkeit der Ladungsträger, die Einheit ist $[\mu] = \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$. Die Beiträge zum Gesamtsignal sind ortsabhängig!

$$\frac{\Delta U^-}{\Delta U^+} = \frac{v_D^- t^-}{v_D^+ t^+} = \frac{x_0}{|d - x_0|} \quad (69)$$

Die Probleme sind nun, dass das Gesamtsignal proportional zur Ionisationsladung ist, jedoch nur, wenn $t_{EI} \approx t^+$ ist, also für lange Zeiten. Außerdem gibt es Probleme bei der Signalverarbeitung, da das Differenzieren schwer ist. Gelöst werden diese Probleme mithilfe zweier Tricks: Es werden sogenannte Frisch-Gitter verwendet, die teilweise durchlässig für Elektronen sind.

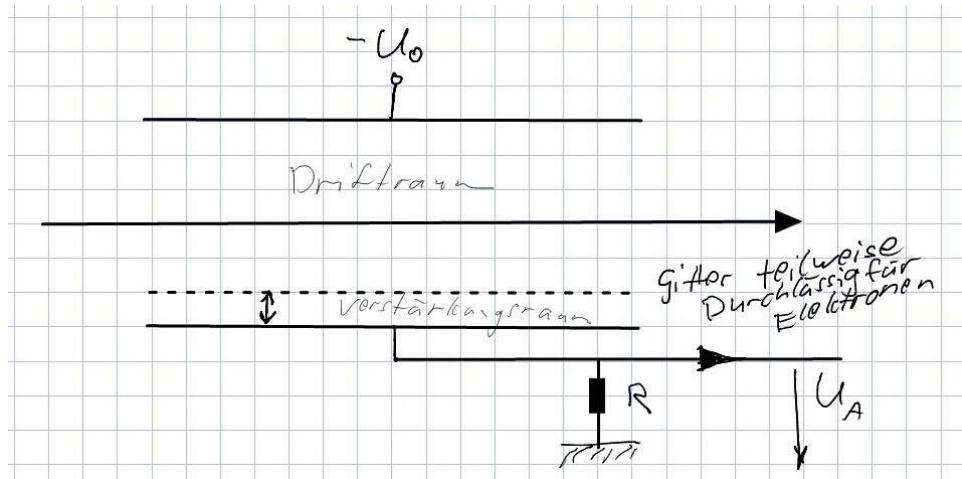


Abbildung 50: Frisch-Gitter

Dadurch erhalten wir ein konstantes, ortsunabhängiges Signal, sofern die Ionisation im sogenannten Driftraum stattfindet.

Die zweite Methode ist das Wechseln der Geometrie, indem man eine zylindrische Propotionalkammer verwendet.

Ionisationskammer mit zylindrischer Geometrie

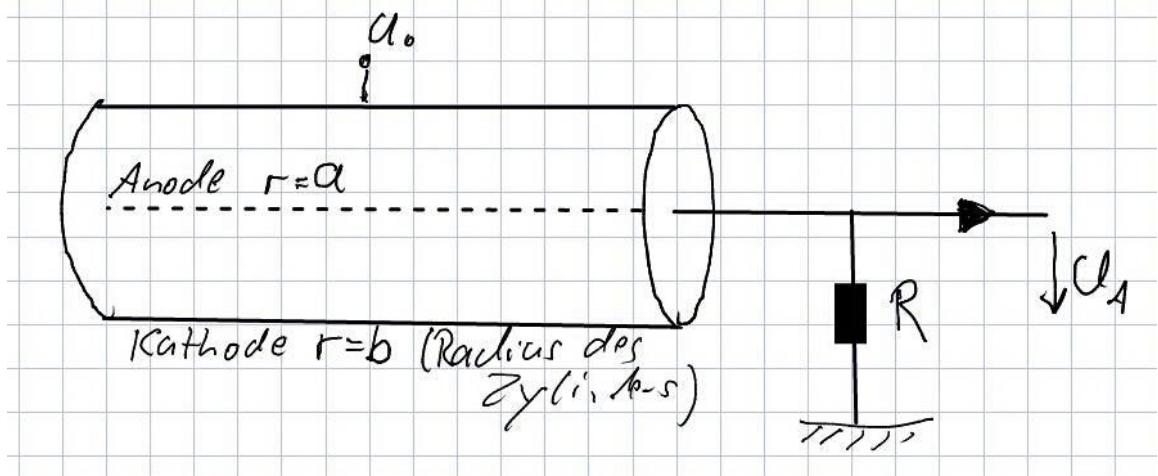


Abbildung 51: Zylindrische Ionisationskammer

Die elektrische Feldstärke ist proportional zu $\frac{1}{r}$:

$$E(r) = \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} \quad (70)$$

$$\phi(r) = \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{a} \quad (71)$$

Die Rechnung ist dabei analog zum Plattenkondensator, die Ionisation findet bei dem Radius $r = r'$ statt. Es folgt:

$$\Delta U^- = -\frac{q}{C} \frac{\ln \frac{a+r'}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \quad (72)$$

$$\Delta U^+ = -\frac{q}{C} \frac{\ln \frac{b}{a+r'}}{\ln \frac{b}{a}} \quad (73)$$

Somit:

$$\frac{\Delta U^-}{\Delta U^+} = \frac{\ln \frac{a+r'}{a}}{\ln \frac{b}{a+r'}} \quad (74)$$

Die Anode ist bei $r = a$, die Kathode bei $r = b$, was dem Radius des Zylinders entspricht. Im Allgemeinen ist $b \gg a$, z.B. $a = 10\mu\text{m}$, $b = 1\text{cm}$. Nach wie vor hängt der Beitrag der Elektronen-Komponente vom Ionisationsort ab.

Beispiel: Die Ionisation findet in der Mitte des Volumens statt, also $a + r' = \frac{b}{2}$. Es folgt

$$\frac{\Delta U^-}{\Delta U^+} = \frac{\ln \frac{b}{2a}}{\ln \frac{2b}{a}} \sim 9.0 \quad (75)$$

Findet die Ionisation in der Nähe des Drahtes statt, ist $r' = a + \epsilon$, wobei ϵ mit $1\mu\text{m}$ klein ist.

$$\frac{\Delta U^-}{\Delta U^+} = 0(1\%) \quad (76)$$

Anwendung findet die Ionisationskammer in folgenden Bereichen:

- Zur Messung der Ionisation/ Ionisationsladung, als Dosimeter
- Zur Messung der Energie von Teilchen, die ihre komplette Energie im Gas depo-nieren, hauptsächlich zur α -Spektroskopie ($Q \sim E(\alpha)$).

4.2 Ionsisationsausbeute

Der mittlere Energieverlust setzt sich zusammen aus Ionisation und Anregung (Fluoreszenzstrahlung, niederenergetisch). Die Mittlere Energie zur Erzeugung eines Elektronen- oder Ionen-Paars ist höher als die Ionisationsenergie des Gases, welcher als W-Wert bezeichnet. Typische Wert für die Gase sind ungefähr 30eV.

Gas	Dichte $\varrho[\text{g}/\text{cm}^3]$	$I_0[\text{eV}]$	$W[\text{eV}]$	$n_p[\text{cm}^{-1}]$	$n_T[\text{cm}^{-1}]$
H_2	$8.99 \cdot 10^{-5}$	15.4	37	5.2	9.2
He	$1.78 \cdot 10^{-4}$	24.6	41	5.9	7.8
N_2	$1.25 \cdot 10^{-3}$	15.5	35	10	56
O_2	$1.43 \cdot 10^{-3}$	12.2	31	22	73
Ne	$9.00 \cdot 10^{-4}$	21.6	36	12	39
Ar	$1.78 \cdot 10^{-3}$	15.8	26	29	94
Kr	$3.74 \cdot 10^{-3}$	14.0	24	22	192
Xe	$5.89 \cdot 10^{-3}$	12.1	22	44	307
CO_2	$1.98 \cdot 10^{-3}$	13.7	33	34	91
CH_4	$7.17 \cdot 10^{-4}$	13.1	28	16	53
C_4H_{10}	$2.67 \cdot 10^{-3}$	10.8	23	46	195

Tabelle 1.2: Zusammenstellung einiger Eigenschaften von Gasen. Angegeben sind der mittlere Energieverlust W pro erzeugtes Ionena paar, das mittlere effektive Ionisationspotential pro Hüllen-Elektron I_0 , die Anzahl der primär (n_p) und insgesamt (n_T) gebildeten Elektron-Ion-Paare pro cm bei Normaldruck für minimalionisierende Teilchen [94, 32, 104, 8].

Abbildung 52: Eigenschaften von Gasen

Verglichen mit einem Halbleiterdetektor ist dieser Wert sehr groß, ein Siliziumhalbleiterdetektor hat einen W-Wert von 3,6eV, bei Germanium ist der Wert 2,85 eV.

Zur Tabelle: n_p ist die Anzahl der primär erzeugten Ladungsträger, n_t die Anzahl der total erzeugten Ladungsträger. Zum Beispiel eine Erhöhung durch sogenannte δ -Elektronen, welche selbst ionisierend sind.

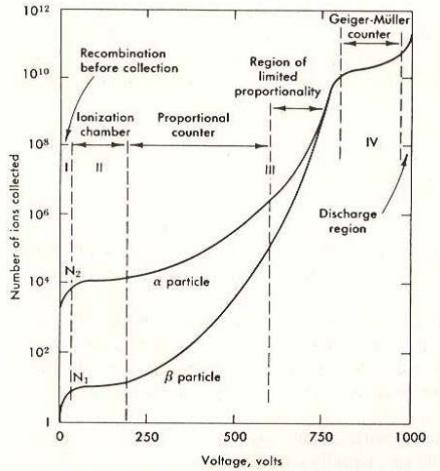


Abbildung 53: Ladungsträger als Funktion der angelegten Spannung im Gas-Zählrohr
[Ref. W.R.Leo]

Die gesammelte Ladung ist abhängig von der Spannung U.

1. In der Ionisationskammer:

Die Spannung wird so gewählt, dass alle erzeugten Elektronen- bzw. Ionen-Paare gesammelt werden, bevor sie rekombinieren. Es kommt zu einer Sättigung und somit zu einem Plateau, das Signal ist jedoch sehr klein.

2. Proportionalzähler:

Eine höhere Spannung führt dazu, dass die Elektronen so viel kinetische Energie dazugewinnen, dass sie selbst ionisieren. Es kommt zu einer Ladungsvervielfachung und somit zu einer Lawine in der Nähe des Anodendrahtes (hohe elektrische Feldstärken). Man erhält eine Anzahl an Ladungsträgern $n = A * N_{\text{prim}}$. Die Verstärkung, die erreicht werden kann liegt im Bereich zwischen 10^3 und 10^6 . Es ergibt sich also ein großes Signal ΔU .

3. Bereich begrenzter Proportionalität

Die Ionisationsladung ist bereits groß, wodurch es zu einer Verzerrung des elektrischen Feldes durch eine hohe Konzentration von positiven Ionen in der Nähe des Drahtes kommt. Die Proportionalität geht somit verloren.

4. Geiger-Müller-Bereich

Es gibt keine einzelne Lawine mehr, sondern mehrere Lawinen, die durch Photonen hervorgerufen werden, die von angeregten Molekülen/ Atomen emittiert werden und in andere Bereiche des Zählrohrs laufen.

Dort kommt es zu weiteren Ionisationsprozessen wie dem Photoeffekt oder der Compton-Streuung.

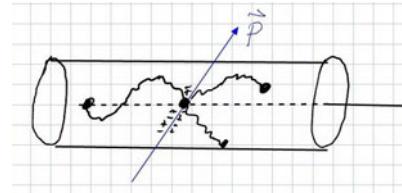


Abbildung 54: Ionisationsprozesse

Die Ausgangsspannung wird somit unabhängig von der Primärionisation, was zu hohen Spannungspulsen führt.

4.3 Proportionalzählrohr

In der folgenden Grafik ist der Spannungspuls in einem zylindrischen Proportionalzählrohr dargestellt. Die unterschiedlichen Zeitkonstanten ergeben sich durch Unterschiede in der nachfolgenden Elektronik.

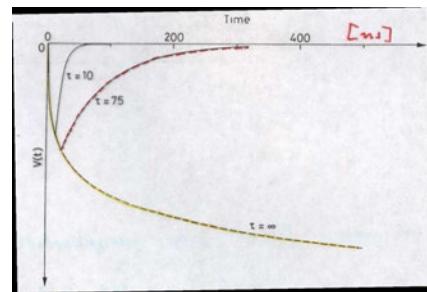


Abbildung 55: Spannungspuls im Proportionalzählrohr [Ref. W.R.Leo]

4.4 Auslösezähler, Geiger-Müller-Zähler

Da der Geiger-Müller-Zähler aus dem AP bereits hinreichend bekannt sein sollt, folgt hier nur eine kurze Skizze zur Veranschaulichung der transversalen Lawinenausbreitung in einem Geiger-Müller-Zählrohr:

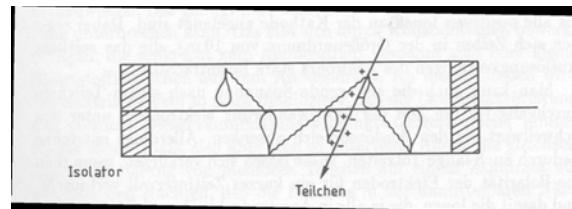


Abbildung 56: Geiger-Müller-Zählrohr [Ref. C.Grupen]

4.5 Anwendung zur Ortsmessung

In diesem Abschnitt geht es um die verschiedenen Möglichkeiten den Ort eines geladenen, reagierenden Teilchens zu bestimmen.

4.5.1 Vieldrahtproportionalitätskammer

Für eine lange Zeit wurden Vieldrahtproportionalkammern zur exakten Ortsmessung verwendet, für die Charpak 1992 den Nobelpreis bekam.

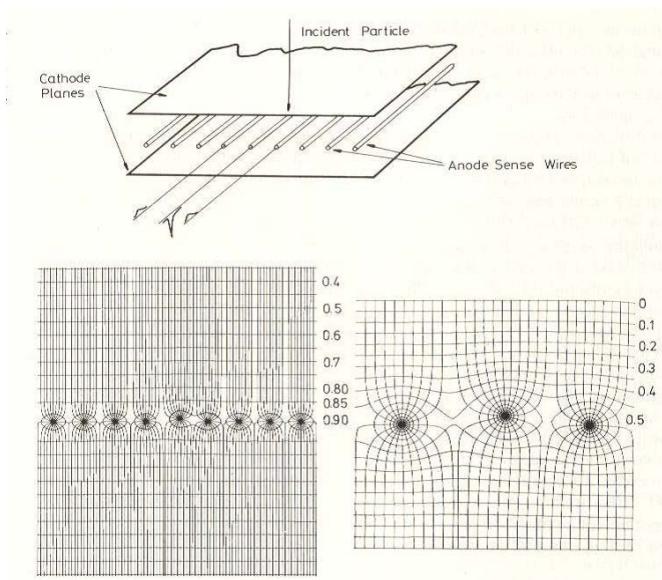


Fig. 6.8. Electric field lines and potentials in a multiwire proportional chamber. The effect of a slice displacement on the field lines is also shown (from Charpak et al. [6.16])

Abbildung 57: Elektrische Feldlinien in der Vieldrahtproportionalitätskammer

Das Prinzip dabei ist, viele parallele Anodendrähte in einem Volumen zu verwenden. Jeder dieser Drähte kann unabhängig von den Anderen ausgewertet werden, da sie als eigenständige, proportionale Röhren agieren. Dadurch erhält man Ortsinformationen, da sichtbar wird, welchen Draht das Signal erreicht.

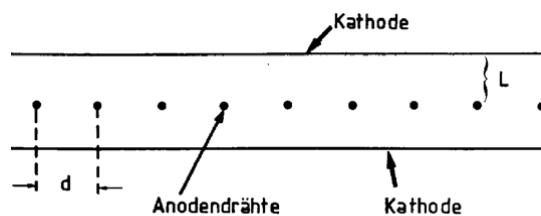


Abbildung 58: Prinzip der Vieldrahtproportionalitätskammer

Typische Parameter sind dabei ungefähr:

- für den Abstand d zwischen den Anodendrähten: $d = 2\text{mm}$
- für den Abstand L zwischen Anode und Kathode: $L = 7 - 8\text{mm}$
- für den Durchmesser der Anodendrähte: $10 - 30\mu\text{m}$

Die damit erreichbare Ortsauflösung beträgt $\sigma = \frac{d}{\sqrt{12}} \approx 600\mu\text{m}$. Für die LHC kann ist diese Methode jedoch nicht anwendbar, da die Teilchen zu langsam sind und die Auflösung nicht groß genug ist.

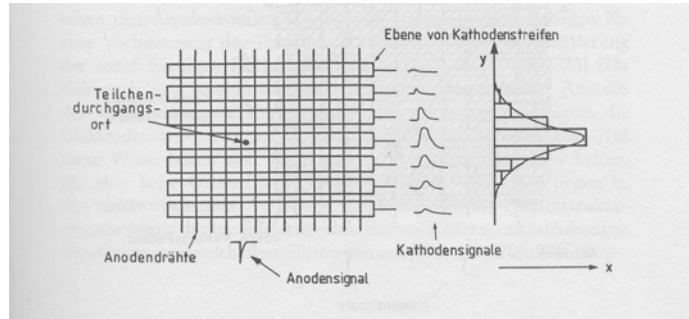


Abbildung 59: Kathodenauslesung in der Vieldrahtproportionalitätskammer [Ref. C.Grupen]

4.5.2 Driftkammern

In Driftkammern wird ein Startsignal benötigt, ein sogenannter Trigger. Hier ist zusätzlich zur Messung der Höhe des Impulses die Messung der „Drift“-Zeit möglich.

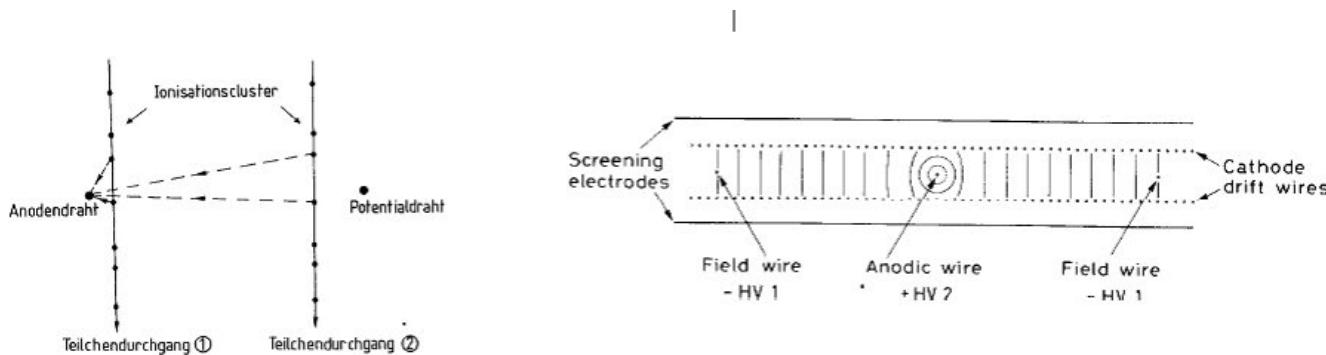


Abbildung 60: Driftkammern

4.5.3 Silizium-Halbleiter-Detektor

Silizium-Detektoren sind eine Art Festkörper – Ionisationskammern. Das Konzept entstand in den 80er Jahren, war jedoch zu Beginn sehr teuer und schwer zu realisieren.

In den 90er Jahren stieg die kommerzielle Verwendung der Silizium Photolithographie und der Verfügbarkeit von VLSI-Elektronik, was zu einem starken Wachstum der Anzahl der Silizium-Halbleiterdetektoren führte.

Heute werden Silizium-Detektoren in nahezu alle Hochenergiephysik-Experimenten als innerstes hochpräzise Ortungsgeräte verwendet. Hochenergiephysik-Experimente bringen damit die Silizium-Technologie zurück in die kommerzielle Welt.

Grundlegende Eigenschaften des Siliziums

Silizium ist ein Typ IV-Element, welches eine Bandlücke von 1,1 eV besitzt. Die Eigenleitfähigkeit ist dabei sehr gering: $\sigma_i = en_i(\mu_e + \mu_h)$. Die Trägerdichte bei einer Temperatur von 300K beträgt $1.5 * 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ verglichen mit $5 * 10^{22}$ Silizium-Atomen pro cm^{-3} , häufig dominiert von Unreinheiten.

Es gibt die Möglichkeit des „Dopings“, hierbei werden kleine Mengen von Typ III- oder Typ 5- Elementen hinzugefügt, was die Leitfähigkeit des Materials deutlich steigert. Donatoren wie Phosphor stellen ein Extra-Elektron zur Verfügung, man spricht von n-dotiertem Silizium.

Akzeptoren wie Boron bewirken eine zusätzliche Fehlstelle, man erhält ein p-dotiertem Silizium. Bringt man nun p- und n-Silizium zusammen, so erhält man einen p-n-Übergang. Das „Doping“ dominiert die Leitfähigkeit, da $n_i \ll n_D$, für n-Typ-Silizium beispielsweise $\sigma_D = en_D\mu_e$.

Der p-n-Übergang

p-n-Streifendetektoren sind sehr gebräuchlich in der Physik. Anschaulich:

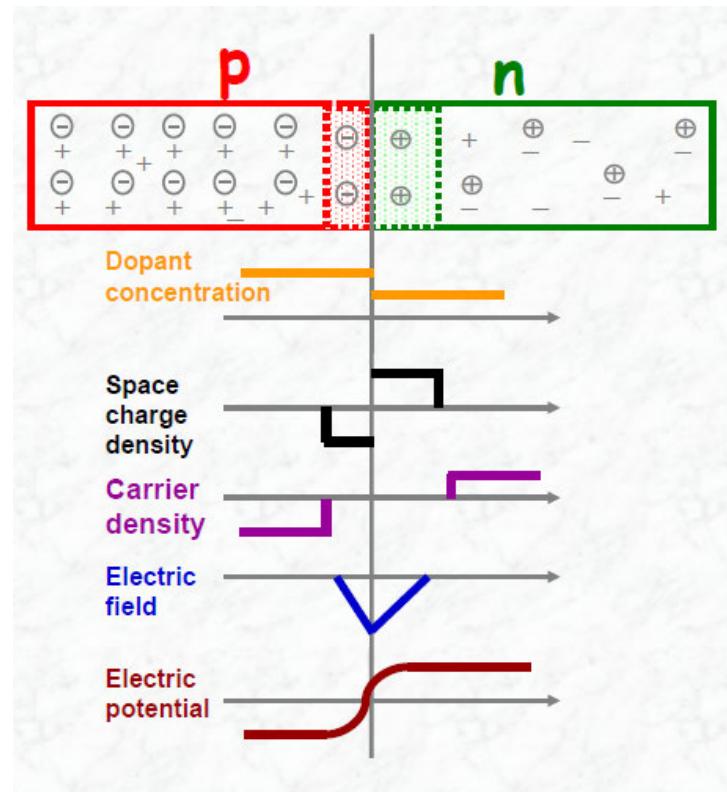


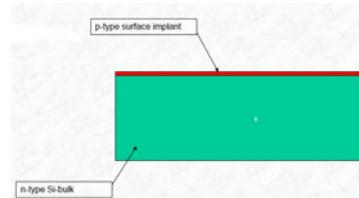
Abbildung 61: p-n-Übergang

Es kommt zur Diffusion der Elektronen von der n-Seite und der h^+ von der p-Seite. Auf der jeweiligen anderen Seite rekombinieren diese, es verschwinden freie Ladungen rund um die Verbindungsstelle (Ausbeutung). Das vormals neutral p- oder n-Silizium wird dadurch geladen und es entsteht ein elektrisches Feld. Ein extern angelegtes Feld kann die Ausbeutung entweder steigern oder schmälern. Die maximale Ausbeutung ist das, was wir für Detektoren erreichen möchten.

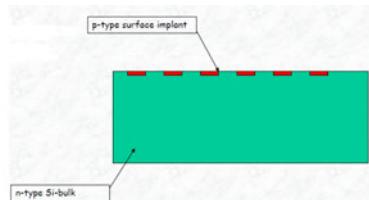
Silizium-Streifen-Detektor

Auch hier wird die Ladung gemessen, sowie der Ort (x, y) mit einer Genauigkeit von etwa $\sigma \sim 15\mu m$. Hier wird direkt der Übergang zwischen p- und n- Diode ausgenutzt. Ein einfacher Detektor ist prinzipiell folgendermaßen aufgebaut:

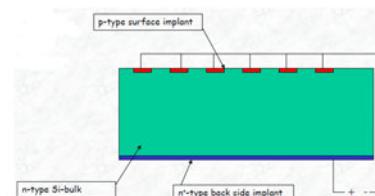
- Man nimmt eine p-n-Diode



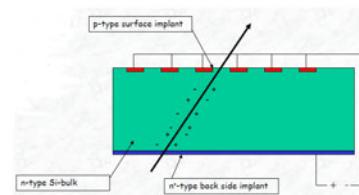
- Man segmentiert diese



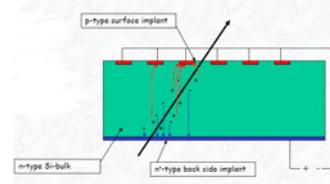
- Legt eine Spannung an



- Man wartet auf ein MIP (minimal ionisierendes Teilchen), das seine Ladung abgibt



- Die Ladungen trennen sich und driften im elektrischen Feld



Dies gibt ein Signal zu den p-Streifen und man kann die Teilchen orten

Ausbeutung

Die Ladung der MIPs in $300 \mu\text{m}$ Silizium ist 4 fC , was 22000 Elektronen-Loch-Paaren entspricht. Die freie Ladung in einem einen Quadratzentimeter großen Siliziumdetektor ist 104 mal größer (Temperatur von 300K), also ist das Signal unsichtbar. Die Optionen sind nun, entweder eine kühlende Anwendung hinzuzufügen oder mithilfe eines elektrischen Feldes die freie Ladung zu entfernen. Dies wird durch das Hinzufügen einer externen Spannung getan, der Ausbeutungsbereich wächst von der p-n-Verbindungsstelle bis zur Rückseite.

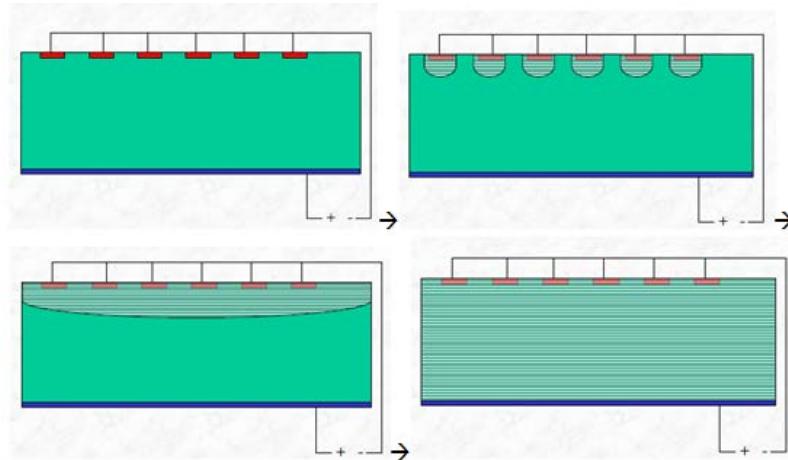


Abbildung 62: Vergrößerung des Ausbeutungsbereichs

Es gilt:

$$w_{\text{depletion}} = \sqrt{2\epsilon\rho\mu V_{\text{bias}}} \quad (77)$$

Signal

Im ausgebeuteten Teil des Siliziums erzeugt ein MIP Elektronen-Loch-Paare, welche durch das E-Feld getrennt werden und zu den Elektroden driften. Die sich bewegenden Ladungen führen zu einem elektrischen Stromimpuls. Kleine Stromsignale werden in ASICs (Chips) verstärkt, geformt und verarbeitet und von der Elektronik gelesen.

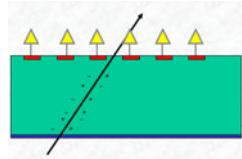


Abbildung 63: Signalauslesung

Die bisher behandelten Detektoren liefern zweidimensionale Informationen, wir benötigen somit eine weitere Koordinate. Dieses Problem wird gelöst durch einen weiteren Detektor, welcher mit senkrecht stehenden Streifen über dem Ersten platziert wird. Eine andere Möglichkeit ist, die n-Seite (Rückseite) ebenfalls zu segmentieren, was zu einem doppelseitigen Detektor führt.

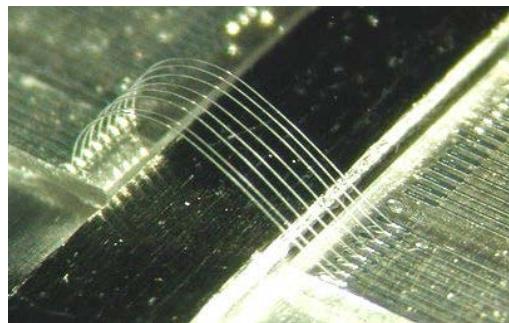


Abbildung 64: Drahtverbindungen

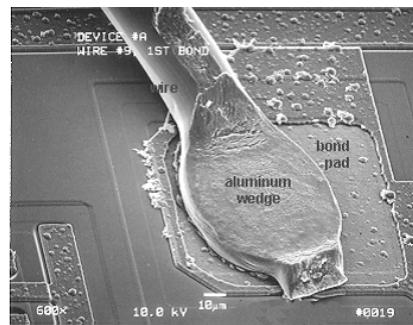


Abbildung 65: Einzelne Drahtverbindung

5 Szintillatoren und Photovervielfacher

Szintillatoren führen zur Anregung und Lichtausstrahlung, der Nachweis erfolgt mit Photovervielfächern, welche wieder in ein elektronisches Signal überführt werden.

5.1 Messprinzip von Szintillatoren

Bei Szintillatoren wird die Anregung eines Festkörpers oder den Molekülen einer Flüssigkeit ausgenutzt, die durch Energieabgabe von Teilchen erzeugt wird.

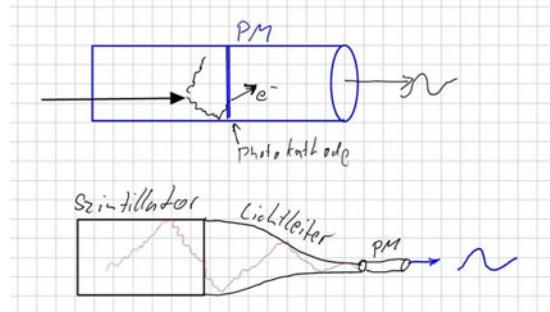


Abbildung 66: Szintillator Prinzip

Szintillatormaterialien sind zum Beispiel: Anorganische Kristalle wie Natrium-Jodid, Cäsium-Jodid oder Lithium-Jodid (allgemein Halogenidkristalle) Organische Stoffe wie Moleküle, polymerische Festkörper und Plastiksintillatoren.

Die Anregung wird durch sogenannte Lumineszenzstrahlung wieder abgegeben, somit ist damit eine Zeitkonstante τ_d verbundenen, die Abklingzeit genannt wird. Typische Zeiten liegen hier zwischen 0,01 und 1 μs , sind also sehr gering. Es gibt jedoch auch schnellere Szintillatoren, die Abklingzeiten $\tau_d < 10^{-8}\text{s}$ besitzen, hier spricht man auch von Fluoreszenzstrahlung. Zusätzlich können länger-lebige Komponenten auftreten, aufgrund von „metastabilen“ Zuständen. Das Abklingverhalten ist somit materialabhängig. Ist nun $N(t)$ die Zahl emittierter Photonen und N_0 die Gesamtzahl der emittierten Photonen, so gilt:

$$N(t) = \frac{N_0}{\tau_d} e^{-\frac{t}{\tau_d}} \quad (78)$$

Für langlebige Komponenten erhalten wir einen zusätzlichen Term:

$$N(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_f}} + B e^{-\frac{t}{\tau_s}} \quad (79)$$

Die Anforderungen für ein effizientes System sind folgende:

1. Eine hohe Lichtausbeute (hohe Photostatistik)
2. Eine hohe Transparenz

3. Die Emission der Photonen erfolgt in einem Wellenlängenbereich, der auf der Empfindlichkeit der Photokathode des Photovervielfachers angepasst ist.
4. Möglichst schnelle Signale, also eine kleine Abklingzeit τ_d und keine langlebigen Komponenten

5.2 Szintillatoren in anorganischen Kristallen

Halogenidkristalle sind Isolatoren, haben also eine große Bandlücke von 4-5eV.

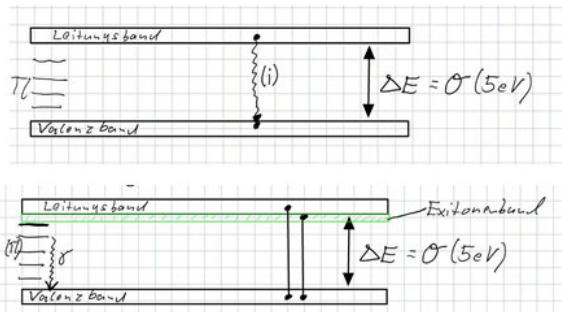


Abbildung 67: Vorgänge zwischen den Bändern

Durch Fremdatome im Kristallgitter wie Tali um kommt es zu Energieniveaus zwischen den Valenz- und Leitungsbändern. Die Lichterzeugung entsteht folgendermaßen:

1. Es erfolgt eine Energieabgabe durch „Ionisationsstöße“, bei denen Elektronen ins Leitungsband gehoben werden.
2. Es findet eine Anregung von „Exitonen“ statt, dies sind Elektronen-Loch-Paare, die als Paar innerhalb des Kristalls frei beweglich sind.

Eine Energieabgabe an das Aktivatoratom (Fremdatom) ist möglich, die Aktivatoratome geben die Energie wieder ab in Form von Gitterschwingungen (Phononen) oder Emission von Licht (Lumineszenzstrahlung), für das jetzt jedoch $\Delta E < \Delta E_g$ gilt.

Vor- und Nachteile von anorganischen Szintillatoren sind:

- Die hohe Lichtausbeute, wodurch man eine gute Energieauflösung hat, was z.B. für γ -Spektroskopie von Vorteil ist.
- Die hohe Dichte, die zu einer vollständigen Absorption auf kompaktem Raum führt ist ebenfalls von Vorteil.
- Die Zeitkonstanten liegen hier im Mikrosekundenbereich, was kein echter Vorteil ist, da dies für einige Anwendungen zu langsam ist.
- Ein Nachteil ist, dass viele Materialien hygroskopisch sind.

In der folgenden Tabelle sind einige anorganische Szintillatoren mit ihren Eigenschaften dargestellt:

Scintillator	Density [g/cm ³]	X _e [cm]	Light Yield γ/MeV (rel. yield*)	τ ₁ [ns]	λ ₁ [nm]	Rad. Dam. [Gy]	Comments
NaI (Tl)	3.67	2.59	4×10 ⁴	230	415	≥10	hydroscopic, fragile
CsI (Tl)	4.51	1.86	5×10 ⁴ (0.49)	1005	565	≥10	Slightly hygroscopic
CsI pure	4.51	1.86	4×10 ⁴ (0.04)	10	310	10 ⁵	Slightly hygroscopic
BaF ₂	4.87	2.03	10 ⁴ (0.13)	0.6	220	10 ²	
				620	310		
BGO	7.13	1.13	8×10 ³	300	480	10	
PbWO ₄	8.28	0.89	≈100	440 broad band 530 broad band		10 ⁴	light yield =f(T)

Abbildung 68: Eigenschaften anorganischer Szintillatoren

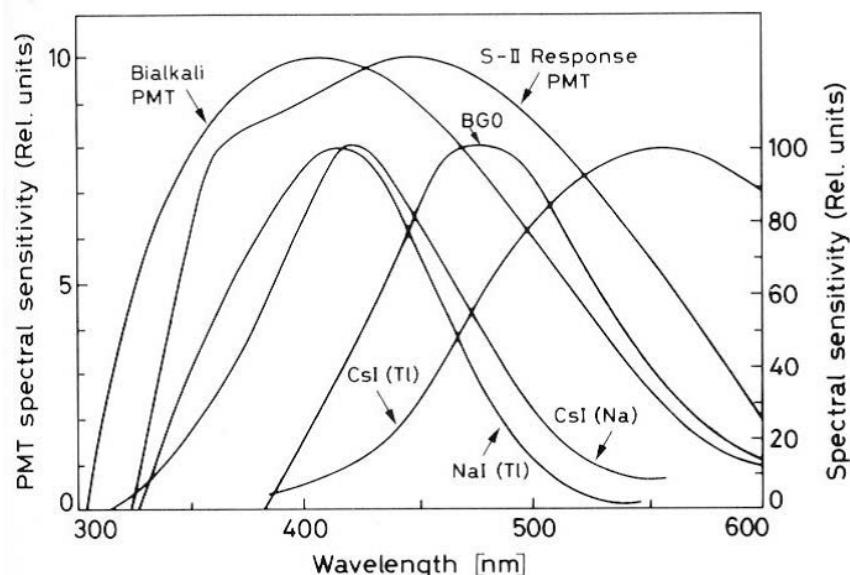


Abbildung 69: Lichtemissionsspektrum anorg. Szintillatorkristalle [Ref.W.R.Leo]

5.3 Organische Szintillatoren

Die Lichterzeugung erfolgt über Anregung und Lichtabgabe in komplexen organischen Molekülen wie z.B. Kohlenwasserstoffverbindungen als Fluoreszenzstoff: - Anthracen $C_{14}H_{10}$ - Naphtalen $C_{10}H_8$ - PBD $C_{20}H_{14}N_2O$

Die Lichtabgabe nach Abregung liefert ein breites Frequenzspektrum. In organischen Szintillatoren werden meist 3 Komponenten verwendet:

1. ein organisches Trägermaterial
 2. einen primären Fluoreszenzstoff
 3. einen weiteren organischen Stoff, der als Wellenlängenschieber dient
- 2 und 3 sind hierbei die aktiven Komponenten.

Der Wellenlängenschieber wird für eine Erhöhung der Transparenz für das vom primären Fluoreszenzstoff abgegebene Licht verwendet. Er absorbiert dabei das Licht und gibt es mit einer veränderten, geringeren Frequenz wieder ab. Technisch wird dies folgendermaßen realisiert:

(i) In Flüssigszintillatoren werden die aktiven Komponenten in organischen Flüssigkeiten gelöst

(ii) In Plastiksintillatoren werden die aktiven Stoffe mit organischem Material vermischt und polymerisiert.

Das am häufigsten als Trägersubstanz verwendete Material ist Polyphenylbenzen, als Fluoreszenzstoff wird meist PBD und als Wellenlängenschieber POPP verwendet.

Vor/Nachteile:

- Die Realisierung vielfältiger Geometrien ist möglich (Plastik) (+)
- Es sind große Volumen möglich (Flüssigszintillatoren) (+)
- Hohe Schnelligkeit, es sind Abklingzeiten τ_d im Bereich von 2-3 ns möglich (+)

$$N(t) = N_0 f(\sigma, t) e^{-\frac{t}{\tau_d}} \quad (80)$$

- Gegenüber den anorganischen Szintillatoren ist die Lichtausbeute deutlich geringer (-)
- Alterung - die zeitliche Lichtausbeute nimmt ab. (-)

Die folgende Grafik zeigt die Emissionsspektren eines primären Fluoreszenzstoffes und eines Wellenlängenschiebers, verglichen mit der spektralen Empfindlichkeit der Photokathode eines gängigen Photomultiplikers:

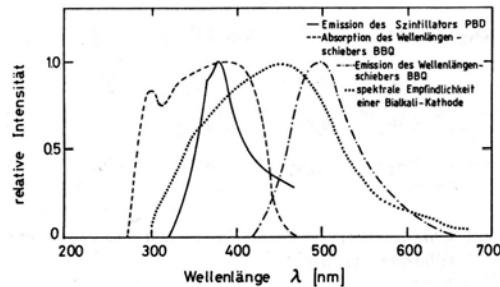


Abbildung 70: Emissionsspektren [Ref.C. Grupen]

In der folgenden Tabelle sind zudem die wichtigen Parameter organischer Fluoreszenzstoffe und Wellenlängenschieber zusammengefasst, wobei die angegebene Lichtausbeute auf diejenige eines Natrium-Jodid Szintillators normiert ist.

Fluoreszenzstoffe	$\lambda_{\text{max}}[\text{nm}]$ Emission	Abklingzeit [ns]	Ausbeute Ausbeute NaJ
Naphthalen	348	96	0.12
Anthracen	440	30	0.5
p-Therphenyl	440	5	0.25
PBD	360	1.2	
Wellenlängenschieber			
POPOP	420	1.6	
bis-MSB	420	1.2	

Abbildung 71: Parameter organischer Stoffe [Ref.C.Grupen]

Die Gauß-Standardabweichungen und exponentielle n Zeitkonstanten für Lichtpulse häufig verwendeter Plastiksintillatoren sind

Scintillator	σ [ns]	τ [ns]
NE102A	0.7	2.4
NE111	0.2	1.7
Naton 136	0.5	1.87

Abbildung 72: Standardabweichungen [Ref.W.R.Leo]

Die folgende Grafik zeigt Lichtemissionsspektren einiger häufig verwendeter Plastikszintillatoren der Fa. Nuclear Enterprises:

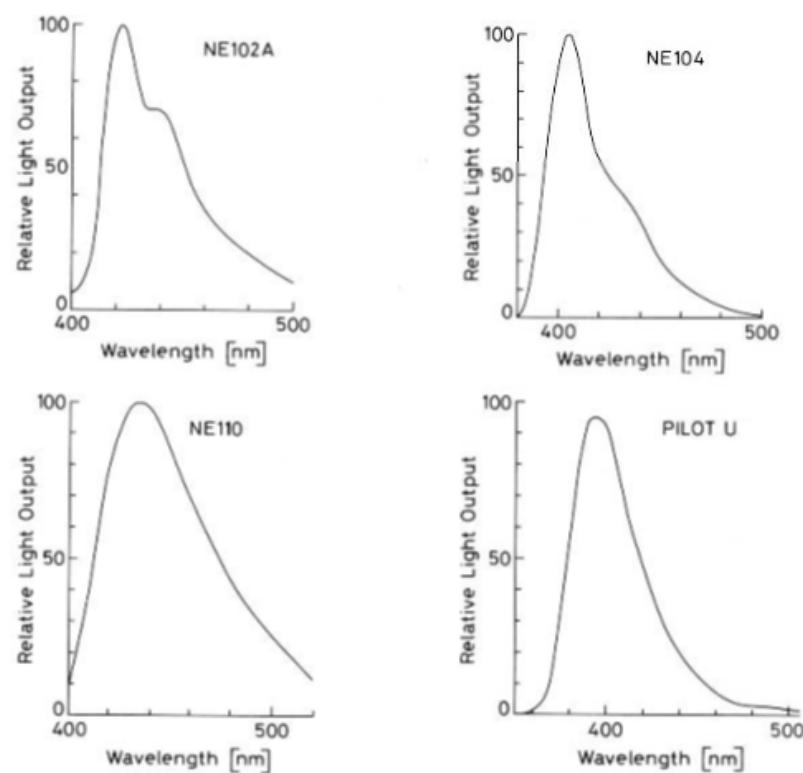


Abbildung 73: Lichtemissionsspektren Plastik-Szintillatoren [Ref.W.R.Leo]

5.4 Photomultiplier (PM)

Die Aufgabe eines Photovervielfachers ist es, Licht in ein elektrisches Signal zu wandeln. Das Prinzip dabei ist, dass Photonen (z.B. UV-Licht) aus einem Szintillators fliegen und mit dem Photoeffekt auf der Alkali-Metall Photokathode registriert werden. Aufbau und Funktionsweise eines Photovervielfachers lassen sich mit folgender schematischen Zeichnung veranschaulichen:

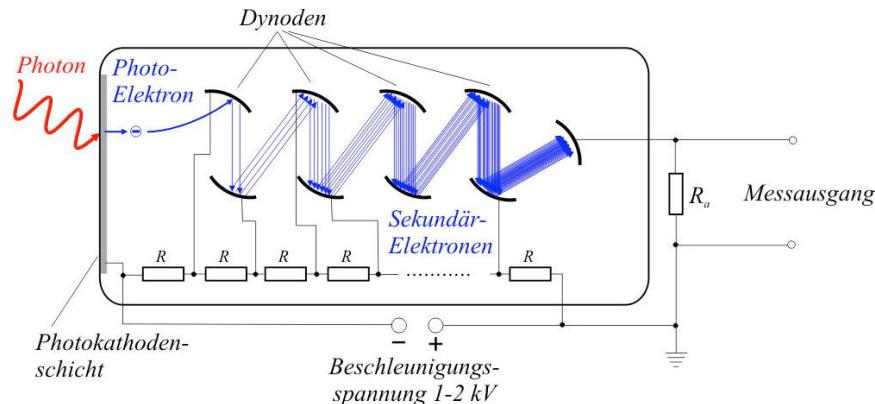


Abbildung 74: Aufbau und Prinzip Photomultiplier

Dynodenstruktur:

Die Beschleunigungsspannung von 1-2 kV fällt über n Dynoden ab (bis zur Anode). Dies führt zur Verstärkung des elektrischen Signals durch eine Elektronenvervielfachung. Typische Werte sind:

- Für die Quantenausbeute bei einer Bi-Alkali-Kathode (Cs-Sb, K-Sb) $\epsilon \sim 25\%$ für eine Wellenlänge von 400 nm
- Der Sekundärelektronenemissionskoeffizient für typische Spannungsdifferenzen von etwa 150V $\rightarrow \Delta E = 150\text{eV}$ ist $P = 3 - 5$. Wählt man nun die Anzahl der Dioden hoch genug (typischer Wert $n=13$) erhält man eine Stromverstärkung

$$A = P^n \quad (81)$$

Hier ($n = 13, P = 4$): $A = 7 * 10^7$

- Die sichtbare Ladung ist $Q = eA = 1.1 * 10^{-11}\text{C}$, dies führt zu einem Anodenstrom von $I = \frac{dQ}{dt} = 1.1 * 10^{-11} \frac{\text{C}}{5\text{ns}} = 2.2\text{mA}$ Wir erhalten also für einen Widerstand von $R = 50\Omega$ einen Spannungspuls von $\Delta U = R * I \approx 110\text{mV}$

Eine wichtige Anwendung ist die Zeitmessung. Typische Zeitauflösungen sind $\Delta t \sim 500\text{ps} = 0.5\text{ns}$ Ein wichtiger Beitrag zur Zeitauflösung stellt die Schwankung der Ankunftszeit der Elektronen an der Anode dar. Die besten Werte, die Optimierung der Flugbahnen ist $O(200\text{ ps})$.

Die folgenden Bilder zeigen verschiedene Photomultiplier:



Abbildung 75: Standard-Photomultiplier (Detektorphysik)



Abbildung 76: Verschiedene PM-Typen von Hamamatsu Photonics (J)

Die Quantenausbeute einer Bialkali-Kathode ist in der folgenden Grafik als Funktion der Wellenlänge dargestellt:

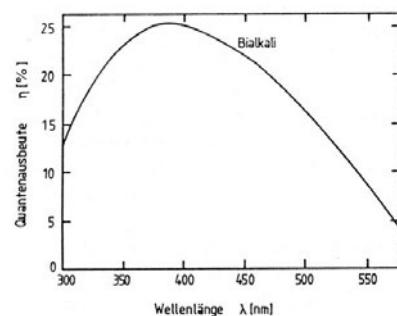


Abbildung 77: Quantenausbeute in Abhängigkeit der Wellenlänge [Ref.C.Grupen]

5.5 Anwendungen im Detektorsystem

Zuerst betrachten wir das Schema eines Szintillationszählers, welcher folgendermaßen aufgebaut ist:

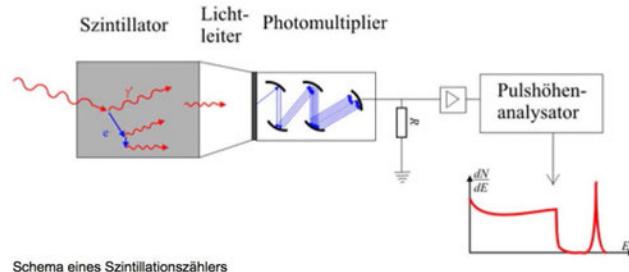


Abbildung 78: Aufbau Szintillationszähler

Verwendet werden solche Systeme häufig in der γ -Spektroskopie. Das Prinzipschaltbild einer Zählapparatur für Teilchendurchgänge ist wie folgt:

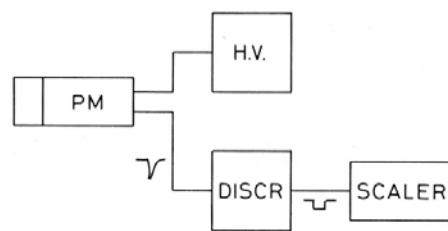


Abbildung 79: Prinzipschaltbild

Eine Kalorimeterauslese mithilfe eines Szintillators, eines Wellenlängenschiebers und einer Photomultipliers wird nach folgendem Prinzip durchgeführt:

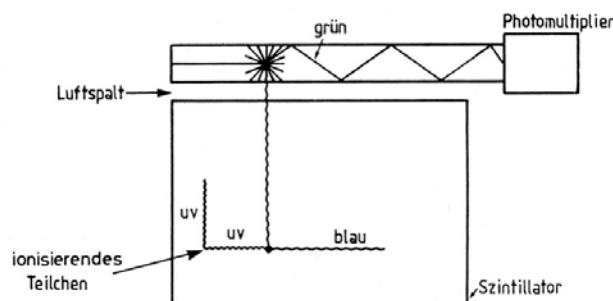


Abbildung 80: Ausleseprinzip (1)

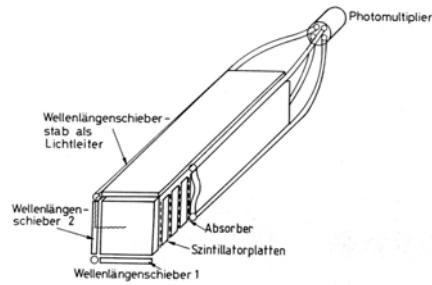


Abbildung 81: Ausleseprinzip (2)

Photomultiplier werden dabei über Lichtleiter an die Szintillatoren angekoppelt.

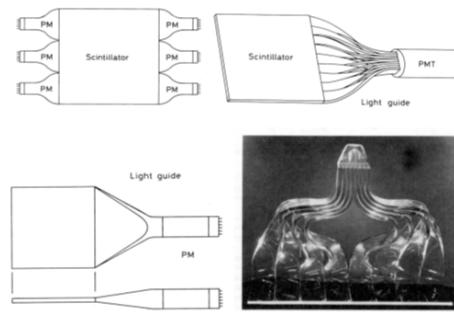


Abbildung 82: Kopplung

Abschließend sind noch Blei-Wolframat-Szintillatorkristalle zur Energiemessung im CMS-Experiment am LHC abgebildet:

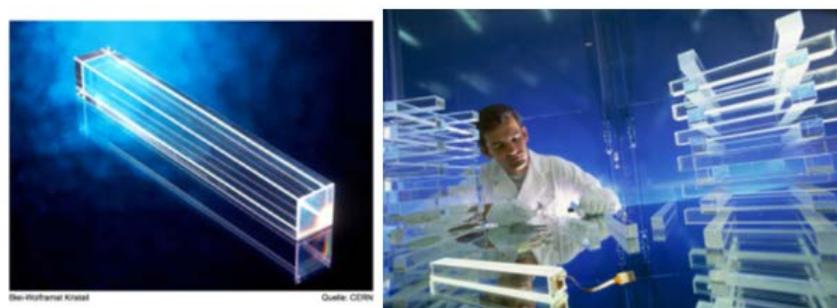


Abbildung 83: CMS-Experiment

6 Energiemessung

6.1 Messprinzip

Energiemessung kann dann durchgeführt werden, wenn Teilchen ihre Energie in Detektoren komplett deponieren. Dabei unterscheidet man:

- Niederenergiebereich (weniger als etwa 1 MeV):
 - Ionisationsdetektoren (α -Spektroskopie)
 - Szintillatoren (γ - Spektroskopie)
 - Halbleiterzähler (γ - Spektroskopie)
- Hohe Energien: Hier werden Kalorimeter verwendet, elektromagnetische für Elektronen und Photonen, hadronische für stark wechselwirkende Teilchen.

Die Energie des Teilchens wird in ein elektrisches Signal (Ionisationsladung) oder in ein Lichtsignal (Szintillator-oder Cherenkov-Licht) umgewandelt. Dieses Signal sollte proportional zur ursprünglichen Energie: $E = \alpha S$ sein. Die Kalibration α ist dabei in $\frac{\text{MeV}}{\text{S}}$ gegeben. • Die Energie kann auch stichprobenartig gemessen werden („sampling Detektor“), dies funktioniert, solange die Proportionalität von E und S erhalten bleibt.

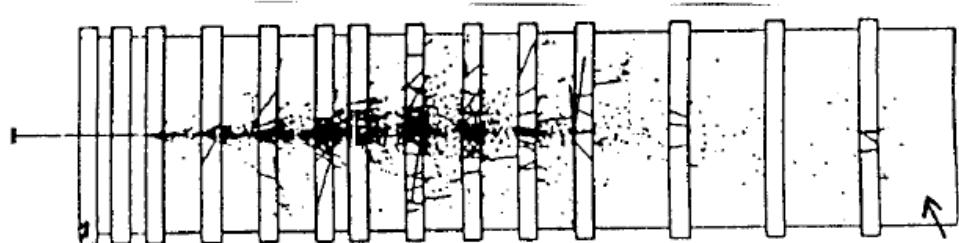


Abbildung 84: Messprinzip

6.2 Energiemessung mit Halbleiterdetektoren

Durch die Bildung von Elektron-Loch-Paaren entstehen in Halbleitern freie Ladungsträger

Kleiner W-Wert:

- Silizium: 3.6 eV
- Germanium: 2.8 eV
- Gas (zum Vergleich): ≈ 30 eV
- Szintillatoren: $\sim 400 - 1000$ eV (zur Erzeugung eines Photoelektrons)

Dies bringt somit enorme Vorteile in der erreichbaren Energieauflösung für Halbleiterdetektoren.

Silizium und Germanium stellen die für Energiemessungen am häufigsten verwendeten Halbleiterzähler dar. Die Bandlücken sind dabei für Silizium 1.14 eV und für Germanium 0.67 eV. Die geringe Bandlücke von Germanium erfordert dabei Kühlung des Detektors, um das thermische Rauschen zu reduzieren. Zur Ladungssammlung müssen die Halbleiterzähler in Sperrrichtung betrieben werden (vgl. Kap. 5).

Kommen wir noch einmal auf die bereits angesprochene Energieauflösung zurück. Die Zahl N der erzeugten freien Ladungsträger ist in Halbleiterdetektoren wesentlich größer, E ist proportional zu N. Die relativen „statistischen“ Schwankungen in der Zahl der erzeugten Ladungsträger und damit der „statistische“ Anteil der Energieauflösung sind in Halbleiterzählern also wesentlich kleiner.

$$\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{HLZ}}{\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{Sz}} = \frac{\sqrt{E}}{700\text{eV}} = 6 * 10^{-2} \quad (82)$$

Die folgende Grafik zeigt den Vergleich des $^{60}\text{Co} - \gamma$ -Spektrums, aufgenommen mit einem NaJ(Tl)-Szintillator und einem Germanium-Halbleiterdetektor

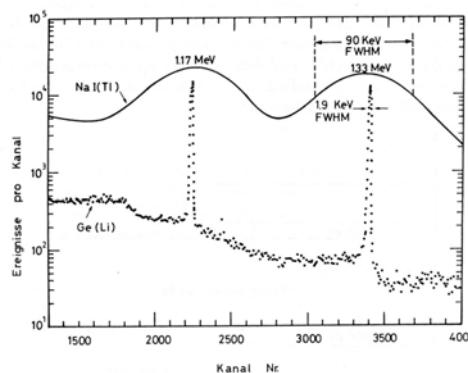


Abbildung 85: Vergleich Szintillator und Halbleiterdetektor [Ref. C. Grupen]

Zur Veranschaulichung betrachten wir zwei weitere Elektron-Spektren als Beispiel. Es wurden hier ^{207}Bi -Konversionselektronen vermessen.

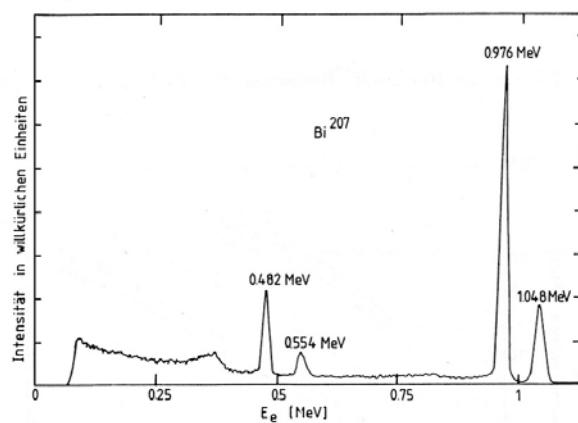


Abbildung 86: Messung mit Si(Li)-Halbleiterzähler

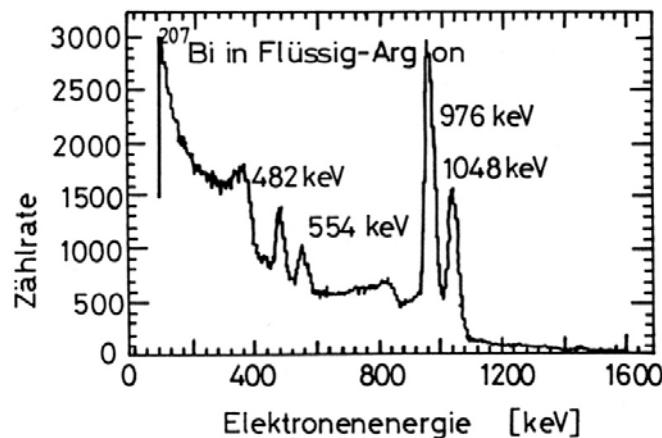


Abbildung 87: Messung mit Flüssig-Argon-Ionisationsdetektor

6.3 Energiemessung in Kalorimetern

Die folgende Grafik zeigt zur Veranschaulichung von Kalorimetern das System aus den ATLAS-Experiment.

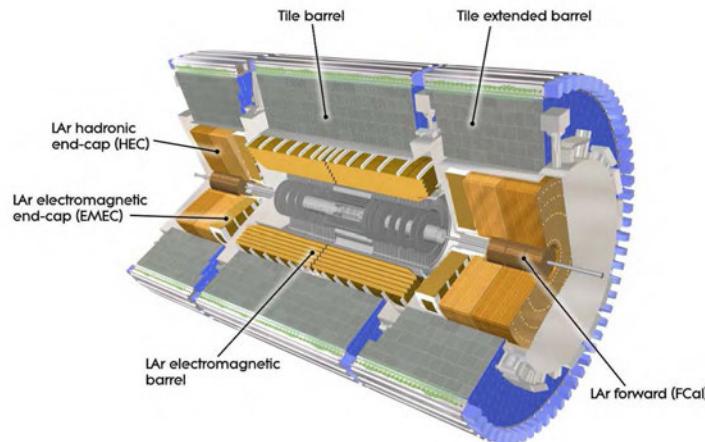


Abbildung 88: Kalorimeter im ATLAS-Experiment

Allgemein handelt es sich bei der Kalorimetrie um die Energiemessung durch totale Absorption, üblicherweise verbunden mit räumlichen Informationen/ Rekonstruktionen. Das Kalorimetrie lässt sich dabei aus dem Lateinischen ableiten: Calor= Wärme. Aber: Die Kalorimetrie in der Teilchenphysik entspricht nicht der Messung einer Temperaturdifferenz ΔT .

Die Temperaturänderung von einem Liter Wasser bei 20° bei der Energieabgabe eines 1 GeV-Teilchens beträgt nur $3.8 \times 10^{-14} K$, ist also kaum messbar.

Im LHC ist die gesamte deponierte Energie $E = 10^{14} \text{Protonen} * 14 TeV \approx 10^8 J$. Überträgt man dies auf die erzeugte Wärme, so würde diese Energie grade ausreichen, um 239 kg Wasser von einer Temperatur von 0° auf 100° zu erhitzten.

$$(c_{\text{Wasser}} = 4.18 \frac{J}{gK}; m = \frac{\Delta E}{c_{\text{Wasser}} \Delta T})$$

Wichtige Eigenschaften eines Kalorimeters

- Linearität der Energiemessung
- Präzision der Energiemessung (Auflösung, $\frac{\Delta E}{E}$), im Allgemeinen begrenzt durch die Fluktuation in den Schauervorgängen, schlechter für zusammengesetzte Kalorimeter verglichen mit homogenen Kalorimetern.
- Einheitlichkeit der Reaktion auf verschiedene Teilchen (e / h Reaktion), im Allgemeinen ist die Reaktion von Kalorimeter unterschiedlich für sogenannte elektromagnetische Teilchen (e, γ) und Hadronen (h).

6.3.1 Elektromagnetische Schauer

Teilchenschauer, die von Elektronen bzw. Positronen oder Photonen erzeugt werden, werden elektromagnetische Schauer genannt, da nur elektromagnetische Wechselwirkungen beteiligt sind. Grundlegende Prozesse für die Erzeugung von Teilchen sind Bremsstrahlung und Paarbildung.



Abbildung 89: Teilchenentstehung

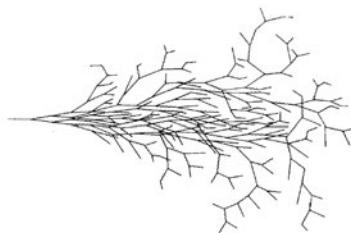


Abbildung 90: Schauer

Die charakteristische Wechselwirkungslänge ist die Strahlungslänge X_0 . Die Anzahl der Teilchen in dem Schauer steigt, bis die kritische Energie E_c erreicht ist. Für Energien größer als E_c ist der Energieverlust aufgrund von Ionisation und Anregung dominant, die Anzahl der sinkt aufgrund des Anhaltens im Material.

Longitudinale Schauerparametrisierung ($t[X_0]$ = Dicke in Einheiten X_0)

Die Schauertiefe (Schauermaximum) skaliert logarithmisch mit der Teilchenenergie, die Größe des Kalorimeters wächst nur logarithmisch mit der Energie.

$$\frac{dE}{dt} = \text{const} * t^a * e^{-bt} \quad (83)$$

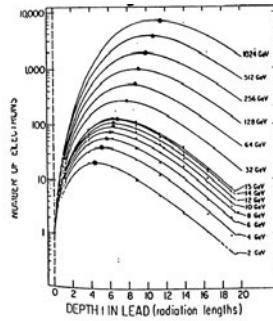


Abbildung 91: Abhängigkeit der Teilchenzahl von der Materialdicke

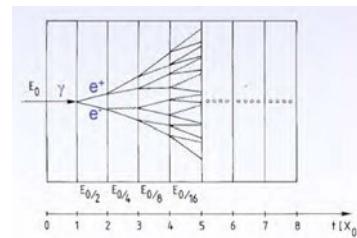


Abbildung 92: Veranschaulichung Schauerprozess

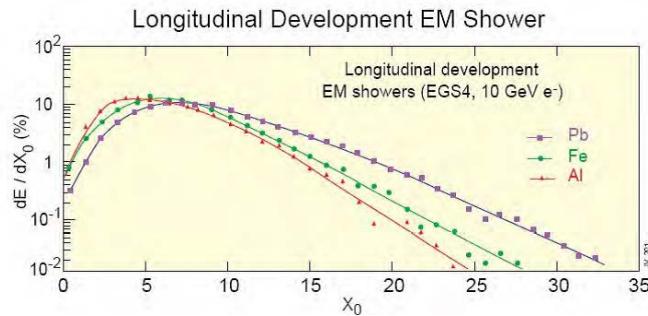


Abbildung 93: Longitudinale Entwicklung des Schauers

Laterales Schauerprofil

Das laterale Schauerprofil wird von zwei Prozessen dominiert:

- Der Vielfach-Coulomb-Streuung
- Den relativ langen freien Weglängen der niederenergetischen Photonen.

Es wird charakterisiert von dem sogenannten Moliére Radius ρ_M :

$$\rho_M = \frac{21\text{MeV}}{E_C} X_0 \approx 7 \frac{A}{Z} \left[\frac{g}{\text{cm}^2} \right] \quad (84)$$

Ungefähr 95% der Energie des Schauers befinden sich innerhalb eines Zylinders mit dem Radius $r = 2\rho_M$, im Allgemeinen gut kollimiert.

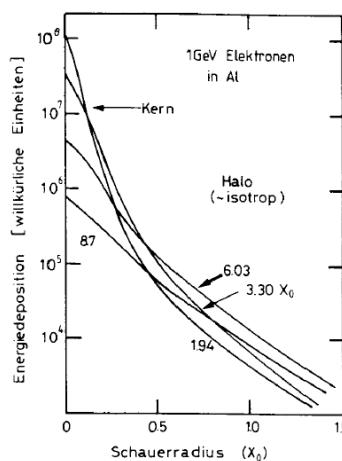


Abbildung 94: Energiedeposition in Abhängigkeit des Schauerradius

Example: $E_0 = 100 \text{ GeV}$ in lead glass

$$E_c = 11.8 \text{ MeV} \rightarrow l_{max} \approx 13, \quad l_{95\%} \approx 23$$

$$X_0 \approx 2 \text{ cm}, \quad R_M = 1.8 \cdot X_0 \approx 3.6 \text{ cm}$$

Abbildung 95: Beispielrechnung

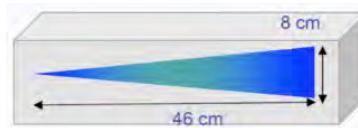


Abbildung 96: Veranschaulichung

6.3.2 Hadronische Schauer

Hadronen initiieren ihre Energieschauer durch inelastische hadronische Wechselwirkungen. (Sind starke Wechselwirkungen verantwortlich, so werden die Schauer hadronische Schauer genannt.) Hadronische Schauer sind dabei weitaus komplexer als Elektromagnetische:

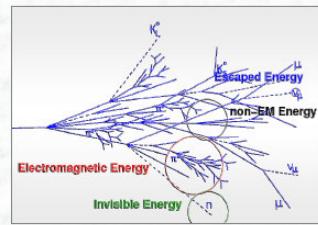


Abbildung 97: Hadronischer Schauer

Es gibt einige sekundäre Teilchen, es werden Mesonen produziert und die Vervielfachung ist proportional zum Logarithmus der Energie $\ln(E)$.

Die π_0 -Komponenten zerfallen in Photonen ($\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$), wodurch elektromagnetische Sub-Schauer entstehen.

Der Anteil der elektromagnetischen Komponente wächst mit der Energie $f_{EM} = 0.1 \ln E$. Die Energie ist dabei in GeV angegeben, im Größenbereich $10 \text{ GeV} < E < 100 \text{ GeV}$.

Während den hadronischen Wechselwirkungen werden Atome aufgebrochen oder in angeregten Zuständen zurückgelassen. Die zugehörige Energie (Anregungsenergie, Bindungsenergie) kommt dabei von der ursprünglichen Teilchenenergie. Es gibt also keinen oder nur einen partiellen Anteil zur sichtbaren Energie.

Zusätzlich gibt es eine wichtige Neutronen-Komponente. Die Wechselwirkung von Neutronen hängt stark von ihrer Energie ab. Die Extremfälle sind:

- Kernreaktion, im Allgemeinen Kernspaltungen → Energie wiederhergestellt
- Verlassen des Kalorimeters (erfahren nur elastische Streuung, ohne inelastische Wechselwirkungen)

Zerfälle von Teilchen (langsame Teilchen am Ende des Schauers) wie beispielsweise $\pi \rightarrow \mu\nu_\mu$ führen zu entkommenden Teilchen und somit fehlender Energie.

Diese Energieverlustprozesse haben wichtige Konsequenzen: Im Allgemeinen ist die Reaktion des Kalorimeters auf Elektronen/ Photonen anders als bei Hadronen! Das Signal für die Hadronen ist nicht linear und bei gleicher Teilchenenergie kleiner als das e/ γ -Signal.

Hadronische Schauer zeigen sehr große Fluktuationen von einem Ereignis zum nächsten, die Energieauflösung ist schlechter als bei elektromagnetischen Schauern.

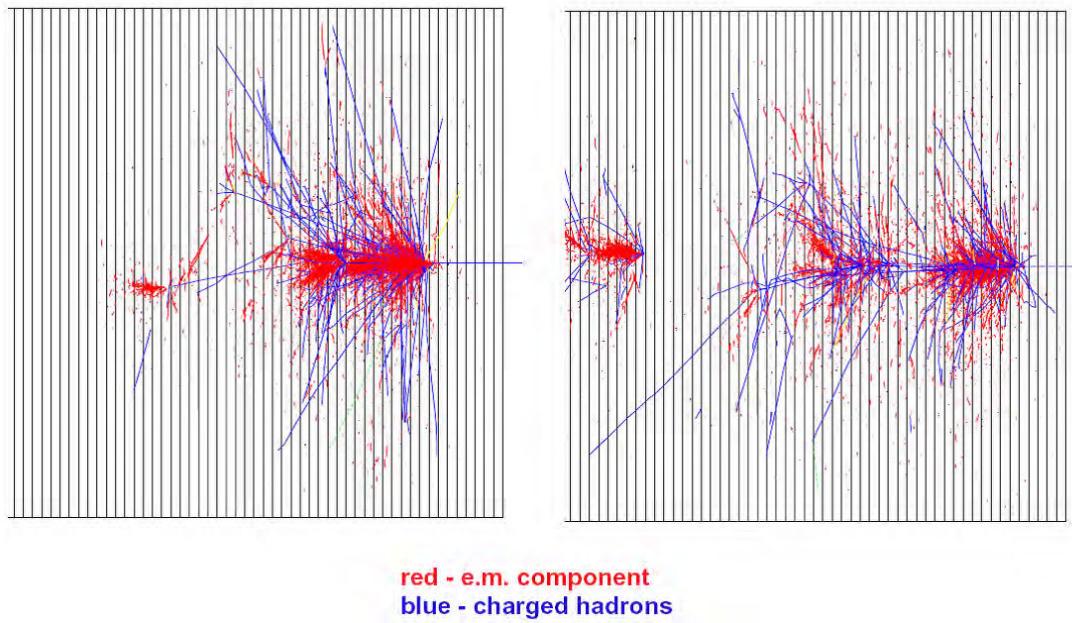


Abbildung 98: Zwei hadronische Schauer in einem Sampling-Kalorimeter

6.3.3 Layout und Auslese von Kalorimetern

Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen homogenen Kalorimetern und Sampling-Kalorimetern. Bei homogenen Kalorimetern entspricht das Absorbermaterial dem aktiven (empfindlichen) Medium.

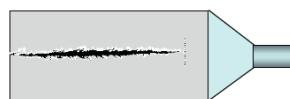


Abbildung 99: Homogenes Kalorimeter (1)

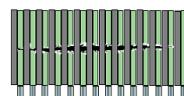
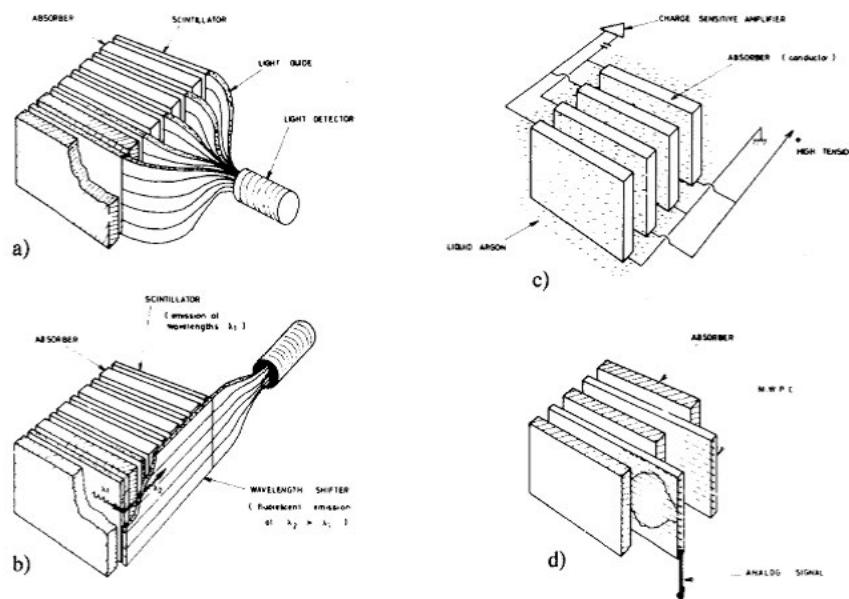


Abbildung 100: Homogenes Kalorimeter (2)

Beispiele dafür sind:

- NatriumJodid und andere Kristalle (Szintillationslicht)
- Bleiglas (Cherenkov-Licht)
- Flüssiges Argon oder flüssiges Krypton (Ionisationsladung)

Bei Sampling-Kalorimetern erfolgen Absorption und hadronische Wechselwirkungen hauptsächlich in zugeordneten Absorbermaterialien (dichte Materialien mit hohem Z, passive Materialien). Das Signal jedoch wird im aktiven Medium erzeugt, nur ein Teil der Energie trägt zum gemessenen Energiesignal bei.



- Szintillatoren, optisch an Photomultiplier gekoppelt
- Szintillatoren, Wellenlängenschieber-Auslese
- Ionisationsladung in Flüssigkeiten
- Ionisationsladung in Vieldrahtproportionalkammern

Abbildung 101: Beispiele für Sampling-Kalorimeter

6.3.4 Energieauflösung von Kalorimetern

Die Energieauflösung von Kalorimetern ist abhängig von den Fluktuationen des gemessenen Signals (für die gleiche Energie E_0), das heißt von der Fluktuation des gemessenen Signals entstanden durch die geladenen Teilchen. Beispiel: Flüssiges Argon mit der Ionisationsladung $Q = \langle N \rangle \langle T_0 \rangle \sim E_0$, wobei: $\langle N \rangle$ die durchschnittliche Anzahl der produzierten geladenen Teilchen ist, proportional zu $\frac{E_0}{E_c}$, und $\langle T_0 \rangle$ die durchschnittliche Spurlänge im aktiven Medium.

Für Sampling-Kalorimeter ist nur ein Teil f von der gesamten Spurlänge relevant, der im aktiven Medium; ebenso wenn es dort eine Schwelle zur Detektion gibt (z.B. Cherenkov-Licht).

Die Energieauflösung ist determiniert durch die statistischen Fluktuationen:

- Anzahl der entstehenden geladenen Teilchen (Elektronen bei elektromagnetischen Schauern)
- Fluktuationen im Energieverlust (Landau-Distribution des Bethe-Bloch-Samplings)

Für die Lösung erhält man:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta Q}{Q} \propto \frac{\sqrt{N}}{N} \propto \frac{\alpha}{\sqrt{E}} \quad (85)$$

Die Energieauflösung eines Kalorimeters kann ausgedrückt werden als:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\alpha}{\sqrt{E}} \oplus \beta \oplus \frac{\gamma}{E} \quad (86)$$

- α ist dabei der sogenannte stochastische Term (statistische Fluktuationen)
- β ist der konstante Term, der bei hohen Energien dominiert. Wichtige Beiträge dazu sind:
 - Stabilität der Kalibration (Temperatur, Strahlung, ...)
 - Verlusteffekte (longitudinal und lateral)
 - Einheitlichkeit des Signals
 - Energiverlust in dichtem Material
 - ...
- γ ist der Rausch-Term (Elektronisches Rauschen, ...)

Außerdem skalieren Orts- und Winkelauflösung mit $\frac{1}{\sqrt{E}}$

Die folgende Tabelle zeigt Beispiele für Energieauflösungen von elektromagnetischen Kalorimetern in großen Detektorsystemen.

Experiment	Calorimeter	α	β	γ	
L3	BGO	< 2.0%	0.3%		homogeneous calorimeters
BaBar	Csl (Tl)	(*) 1.3%	2.1%	0.4 MeV	
OPAL	Lead glass	(**) 5% (++) 3%			
NA48	Liquid krypton	3.2%	0.5%	125 MeV	
UA2	Pb /Szintillator	15%	1.0%		sampling calorimeters
ALEPH	Pb / Prop.chamb.	18%	0.9%		
ZEUS	U / Szintillator	18%	1.0%		
H1	Pb / Liquid argon	11.0%	0.6%	154 MeV	
D0	U / Liquid argon	15.7 %	0.3%	140 MeV	

(*) scaling according to $E^{-1/4}$ rather than $E^{-1/2}$
 (**) at 10 GeV
 (++) at 45 GeV

Abbildung 102: Beispiele Energieauflösung Elektromagnetisch
Hadronische Energieauflösung:

Experiment	Kalorimeter	α	β	γ
ALEPH	Fe/Streamer Rohre	85%		-
ZEUS (*)	U/Szintillator	35%	2.0%	-
H1 (+)	Fe/Flüssig - Argon	51%	1.6%	900 MeV
D0	U/Flüssig - Argon	41%	3.2%	1380 MeV

(*) compensating calorimeter
 (+) weighting technique

Abbildung 103: Beispiele Energieauflösung Hadronisch

Im Allgemeinen ist die Energieraktion des Kalorimeters unterschiedlich für e/γ und Hadronen, eine Messung davon ist die sogenannte e/h -Ratio.

In sogenannten „kompensierenden“ Kalorimetern versucht man die Energieverluste in hadronischen Schauern zu kompensieren (und bringt e/h nahe zu 1). Die physikalischen Prozesse sind:

- Energiegewinn von Kernspaltung, initiiert von langsamen Neutronen (Uranium-Kalorimeter)
- Übertragung von Energie von Neutronen zu Protonen (gleiche Masse) durch die Verwendung von angereicherten Materialien/ freien Protonen

7 Pulsformung und Übertragung von Signalen auf Leitungen

7.1 RC-, RL- und RCL-Netzwerke

Kleine Erinnerung: Die Impedanz eines Kondensators ist frequenzabhängig.

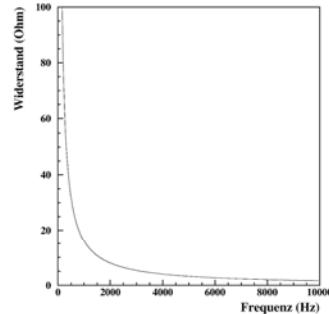


Abbildung 104: Frequenzabhängigkeit Kondensator

7.1.1 RC-Tiefpass

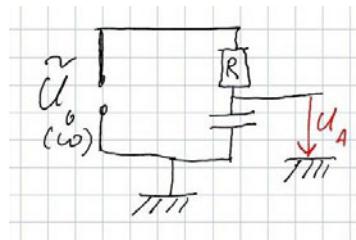


Abbildung 105: Schaltkreis Tiefpass

$$\text{Für die Spannung gilt: } U_A U_0 \frac{Z_C}{R + Z_C} = U_0 \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (87)$$

Dabei ist $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$

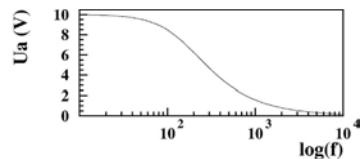


Abbildung 106: Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz

Die Übertragungsfunktion lautet:

$$\omega) = \frac{|U_A|}{|U_0|} \quad (88)$$

Es gilt:

$$U_A = U_0 \left\{ \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - i \frac{\omega R C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right\} \rightarrow |U_A| = |U_0| \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (89)$$

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich somit:

$$\rightarrow q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (90)$$

Die Phasenlage ϕ zwischen U_A und U_0 wird beschrieben durch

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}(U_A)}{\text{Re}(U_A)} = -\omega R C \quad (91)$$

, es folgt also

$$\phi = \arctan -\omega R C \quad (92)$$

= Die logarithmische Übertragungsfunktion lautet:

$$g^*(\omega) = \log \frac{U_A^2}{U_0^2} [\text{bel}] = 2 \log \left| \frac{U_A}{U_0} \right| = 20 \log \left| \frac{U_A}{U_0} \right| [\text{dezibel}] \quad (93)$$

Bei einem Tiefpass ergibt sich nun also mit (90) :

$$g^*(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = -10 \log 1 + \omega^2 R^2 C^2 \quad (94)$$

Die Grenzfrequenz (charakteristische Frequenz) eines Tiefpass wird beschrieben durch

$$\omega_G = \frac{1}{RC} \quad (95)$$

Für die Übertragungsfunktion bei der Grenzfrequenz ergibt sich:

$$g^*(\omega_G) = -10 \log 2 [dB] = -3 [dB] \quad (96)$$

Der Amplitudenwert beträgt

$$\left| \frac{U_A(\omega_G)}{U_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 = -3 [dB] \quad (97)$$

Betrachten wir kurz die Grenzfälle:

- $\lim_{\omega \rightarrow 0} g^*(\omega) = 0 \rightarrow |U_A| = U_0$

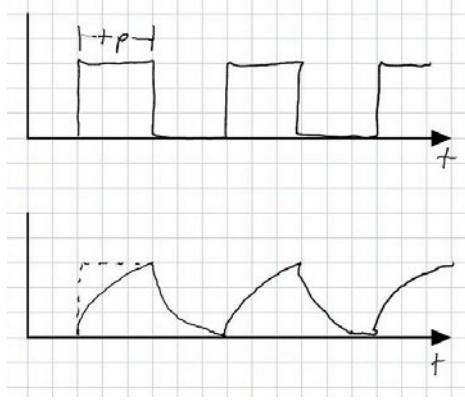


Abbildung 107: Pulsverformung

- $\omega \gg \omega_G : g^*(\omega) = \lim -10 \log 1 + (\frac{\omega}{\omega_G})^2 = -20 \log \frac{\omega}{\omega_G} = -20 \log \omega + 20 \log \omega_G$

Die Pulsverformung durch einen Tiefpass hängt von der Zeitkonstanten

$$\tau = R * C \quad (98)$$

und der Pulsdauer t_P ab.

Dies ist vergleichbar mit der Fourierzerlegung der Frequenz ω_i . Man spricht von der „glättenden“, integrierenden Wirkung eines Tiefpasses. Die Pulse werden umso stärker verformt, je kleiner die Pulsdauer im Vergleich zur Zeitkonstanten ist:

$$U_A(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = \text{Taylor} \quad U_0(1 - (1 - \frac{t}{\tau}) + \dots) \quad (99)$$

Somit folgt:

$$U_A(t) = U_0 \frac{t}{\tau} \quad (100)$$

Die allgemeine Integrative Wirkung ist $U_0 = U_R + U_C \approx U_R$. Der Ladestrom wird beschrieben durch

$$I = \frac{U_0}{R} = C \frac{dU_A}{dt} \quad (101)$$

Somit folgt:

$$U_A = \frac{1}{RC} \int_0^t U_0 dt \quad (102)$$

Die logarithmische Übertragungsfunktion und Phase eines RC-Tiefpasses werden mithilfe des Bode-Plots beschrieben.

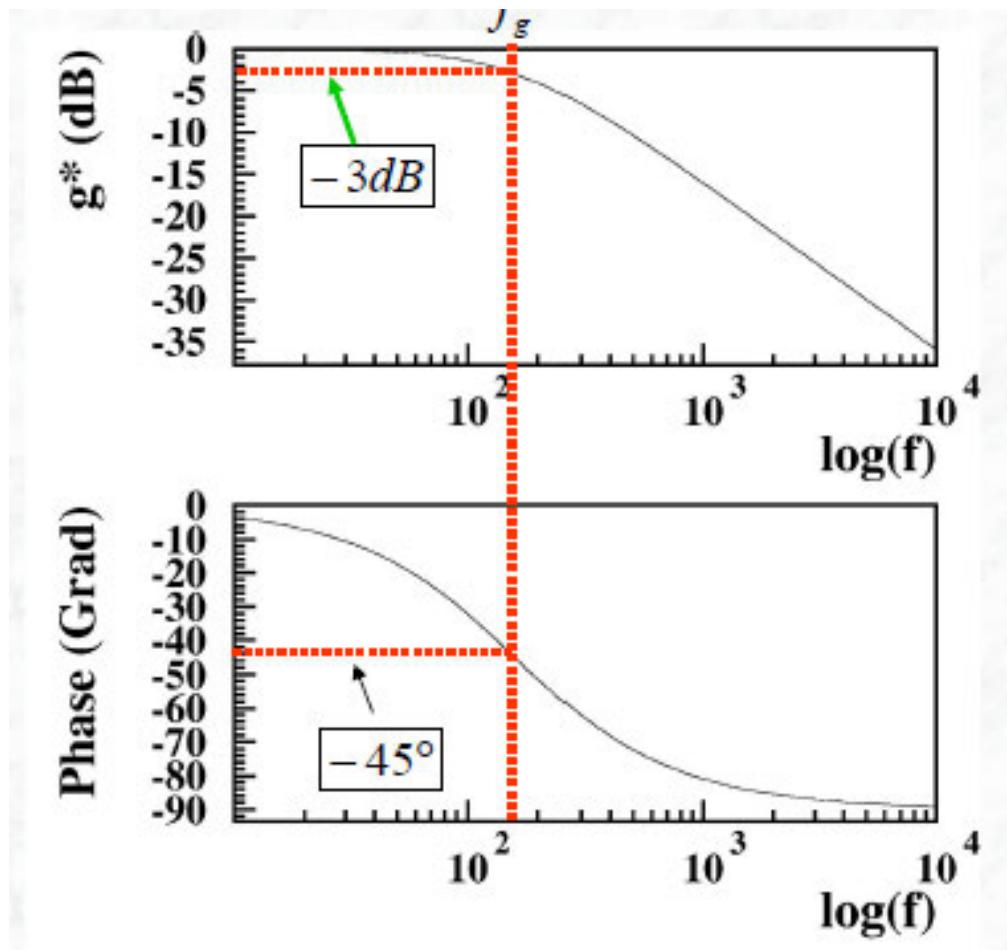


Abbildung 108: $R = 1k\Omega$, $C = 1\mu F$, $\omega_G = \frac{1}{RC} = 1000Hz$, $f_g = \frac{1}{2\pi RC} = 167Hz$

7.1.2 RC-Hochpass

Wir haben folgenden Schaltkreis für einen Hochpass:

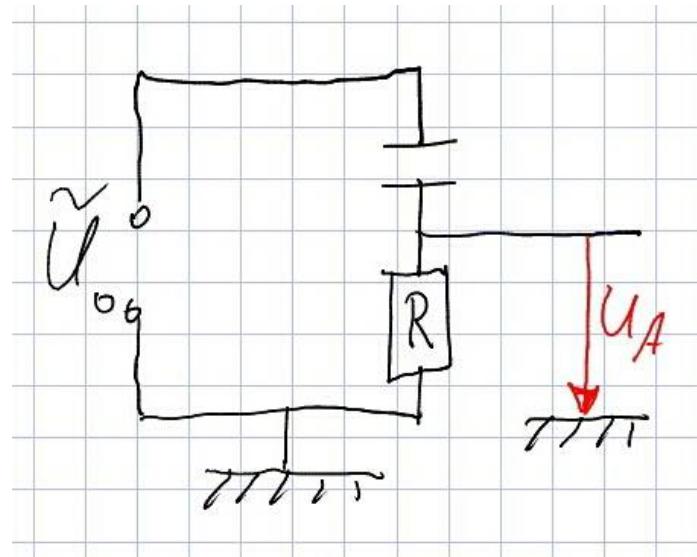


Abbildung 109: Schaltkreis Hochpass

Analog zum Tiefpass gilt für die Übertragungsfunktion

$$g(\omega) = \left| \frac{U_A}{U_0} \right| = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} \quad (103)$$

und

$$g(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (104)$$

Die geht gegen 1, wenn die Frequenz gegen Unendlich geht und gegen Null, wenn die Frequenz gegen Null strebt. Wir erhalten eine differenzierende Wirkung für eine Zeitkonstante deutlich größer als die Pulsdauer.

Der Bode-Plot für die logarithmische Übertragungsfunktion und Phase für einen RC-Hochpass:

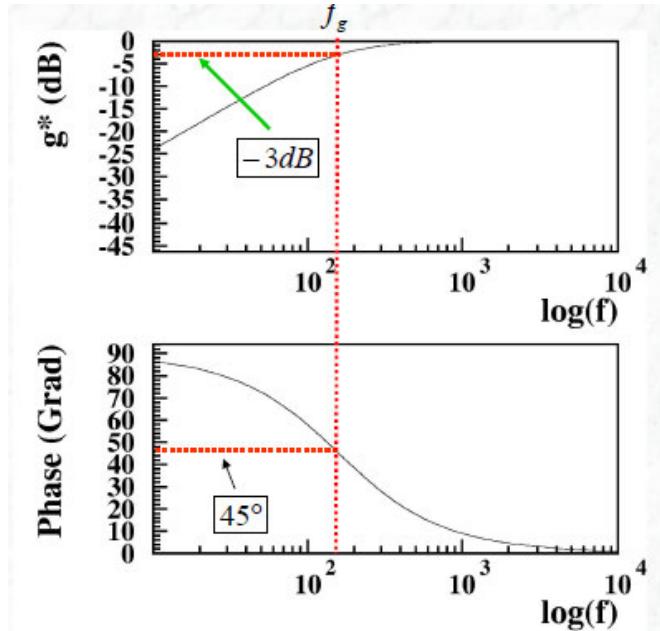


Abbildung 110: $R = 1k\Omega$, $C = 1\mu F$, $\omega_G = \frac{1}{RC} = 1000Hz$, $f_g = \frac{1}{2\pi RC} = 167Hz$

Die Pulsfolge durch einen Hochpass sieht folgendermaßen aus:

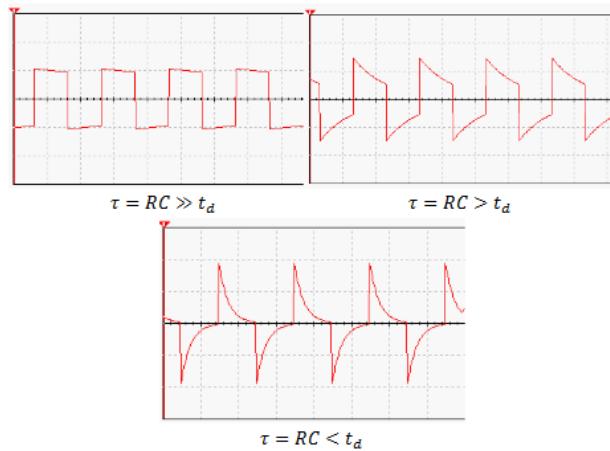


Abbildung 111: Pulsfolge durch Hochpass

7.1.3 RLC-Netzwerk

Die Schaltskizze eines RLC-Schaltkreises ist:

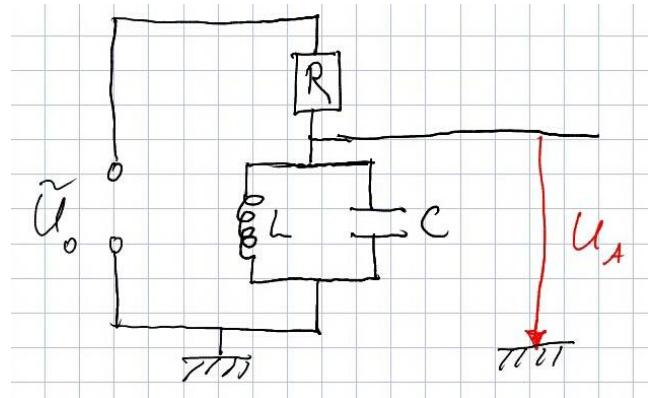


Abbildung 112: Schaltkreis RLC

Für eine Parallel-Schaltung von Spule und Kondensator gilt:

$$\frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1}{i\omega L} - \frac{\omega C}{i} \rightarrow Z_{LC} = \frac{i}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} \quad (105)$$

Die Resonanzfrequenz ist bestimmt durch

$$\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (106)$$

Die Güte Q ist ein Maß für die „Schärfe der Resonanz“ und wird beschrieben durch

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega(3dB)} = \omega_0 RC \quad (107)$$

Anschaulich:

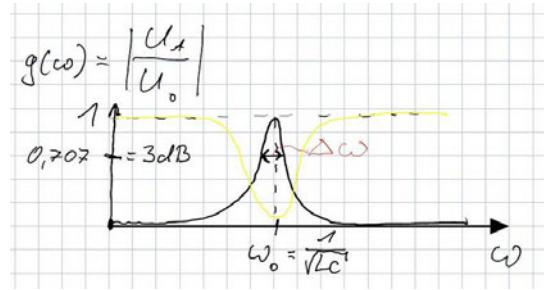


Abbildung 113: Veranschaulichung

Die gelbe Linie stellt dabei die Frequenz dar, wenn Kondensator und Spule in Reihe geschaltet sind.

Die Resonanzkurve eines RLC-Netzwerkes ist

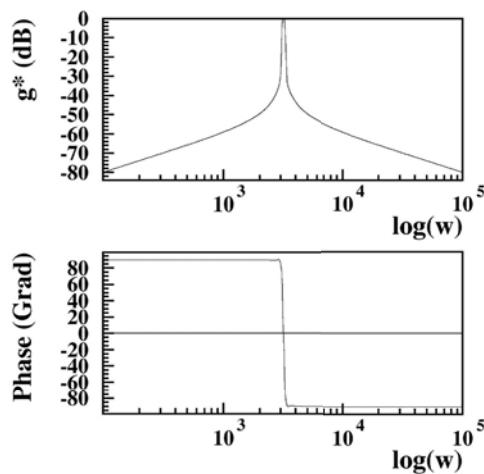


Abbildung 114: Resonanzkurve

Dabei gilt:

$$g^* = -10 \log 1 + R^2 \left(\frac{1}{\omega L - \omega C} \right)^2 \phi = \arctan R \frac{1}{\omega L - \omega C} \quad (108)$$

In der Grafik ist dabei $R = 1k\Omega$, $C = 100\mu F$ und $L = 1mH$.

7.2 Übertragung von Signalen auf Leitungen

Wir haben nun einen Generator (z.B. Detektor) und eine Signalquelle, die Elektronik ist zwischen 1-100 m entfernt. Ziel ist es nun, das Signal möglichst genau und verlustfrei bis zur Elektronik zu transportieren. Betrachten wir als Beispiel einen Puls der Dauer $\tau = 2ns$, die Frequenz beträgt somit $f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2*10^{-9}} \text{Hz} = 500\text{MHz}$. Im Idealfall werden alle Frequenzen gleichmäßig übertragen Eine periodische Pulsfolge führt zu einem diskreten Spektrum

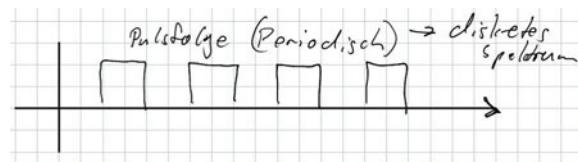


Abbildung 115: diskretes Spektrum

,ein Einzelpuls hingegen zu einer Fourier-Spektralfunktion.

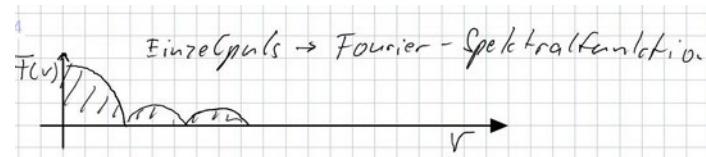


Abbildung 116: Fourier-Spektralfunktion

Bei einem realen Kabel ist ein Ohmscher Widerstand R , eine Kapazität und eine Induktivität vorhanden, die es im idealen Kabel nicht geben würde. Das Standard-Übertragungskabel ist ein Koaxialkabel, welches aus zwei konzentrischen zylindrischen Leitern besteht, welche durch ein Dielektrikum (charakterisiert durch μ, ϵ) getrennt sind wie beispielsweise Polyethylen oder Teflon.

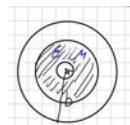


Abbildung 117: Koaxialkabel

Das Kabel besitzt eine Eigenkapazität pro Längeneinheit:

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad (109)$$

Dabei sind b und a die Radien. Für die Induktivität gilt:

$$L = \frac{\mu\mu_0}{2\pi \ln \frac{b}{a}} \quad (110)$$

Somit können wir nun ein Ersatzschaltbild erstellen:

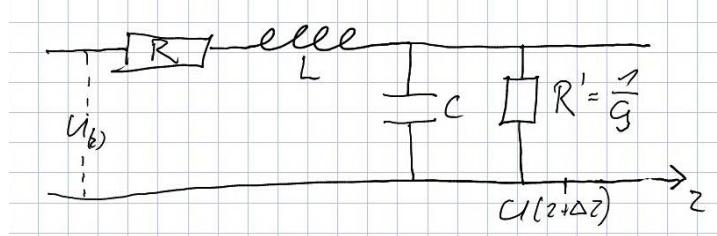


Abbildung 118: Ersatzschaltbild

$$\Delta U(z, t) = -R\Delta z I(z, t) - L\Delta z \frac{\partial I}{\partial t}(z, t) \quad (111)$$

$$\Delta I(z, t) = -G\Delta z U(z, t) - C \frac{\partial U}{\partial z}(z, t) \quad (112)$$

Dividiert man nun durch Δz und lässt es gegen Null gehen, so ergibt sich:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = -RI - L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (113)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -GU - C \frac{dU}{dt} \quad (114)$$

Differenziert man nun (113) nach x und (114) nach t und setzt ein, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = LC \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} t(RC + LG) \frac{\partial U}{\partial t} + RGU \quad (115)$$

Dies wird „Telegraphengleichung“ genannt. Für ein ideales Kabel ist nun $R=0$ und $G=0$, somit folgt:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (116)$$

Dies entspricht den bereits bekannten Wellengleichungen, die Lösung ist somit:

$$U(z, t) = U_1 e^{i(\omega t - kz)} + U_2 e^{i(\omega t + kz)} \quad (117)$$

Für ein unendlich langes Kabel gilt:

$$U(z, t) = U_1 e^{i(\omega t - kz)} \quad (118)$$

Dabei entspricht k der Wellenzahl und die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

C,L für ein Koaxialkabel werden beschrieben mit den Charakteristika $(\epsilon, \mu, \epsilon_0, \mu_0, b, a)$, somit erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (119)$$

$$T = \frac{1}{v} = \sqrt{LC} \quad (120)$$

wird als „Verzögerung“ des Kabels bezeichnet. Typische Werte für ein Koaxialkabel sind dabei $\sim 5 \frac{\text{ns}}{\text{m}}$, im Vakuum $3.3 \frac{\text{ns}}{\text{m}}$. Betrachten wir die Telegrafengleichung nun für ein reales Kabel, so sind $R, G \neq 0$, es gibt also eine Dämpfung. Der Lösungsansatz ist nun:

$$U(z, t) = U_1 e^{i\omega t} e^{-\gamma z} \text{ mit } \gamma = \alpha + ik \quad (121)$$

Setzt man dies nun in die Differentialgleichungen (113) und (114) ein, so erhalten wir:

$$\gamma U = (R + i\omega L)I$$

$$\gamma I = (G + i\omega C)U$$

Es folgt somit:

$$\gamma^2 = (R + i\omega L)(G + i\omega C) = (\alpha + ik)^2 \quad (122)$$

Der Spezialfall $R=G=0$ liefert $\gamma = i\omega\sqrt{LC} = ik$ und die verlustfreie Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v_0 = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Wellenwiderstand

Z ist definiert als das Verhältnis von Spannung und Strom im Kabel:

$$Z = \frac{U(z, t)}{I(z, t)} = \frac{R + i\omega L}{\gamma} = \frac{\sqrt{R + i\omega L}}{G + i\omega C} \quad (123)$$

Im idealen Kabel ist nun erneut $R=G=0$, sodass wir für Z

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

erhalten. Der Wellenwiderstand ist somit unabhängig von der Kabellänge, er hängt nur von Geometrieparametern ab.

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{\mu\mu_0}}{\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (124)$$

Für ein Standardkabel (RG58) hat Werte von $\frac{b}{a} = 3.6$ und $\epsilon = 2.3; \mu \sim 10$, also besitzt es etwa einen Wellenwiderstand Z von 50Ω . Der gebräuchliche Bereich allgemein liegt zwischen $35\Omega < Z < 150\Omega$. Wir nehmen nun ein unendlich langes Kabel des Wellenwiderstands von $Z = \frac{U}{I} = 50\Omega$ an. Ein Oszillatator, der das Signal aufnimmt, hat jedoch einen Eingangswiderstand von etwa $1\text{ M}\Omega$. Um nun eine Reflektion des Pulses zu vermeiden, wird ein Abschlusswiderstand parallel geschaltet, der der Größe des Wellenwiderstands entspricht ($R_{abs} = 50\Omega$).

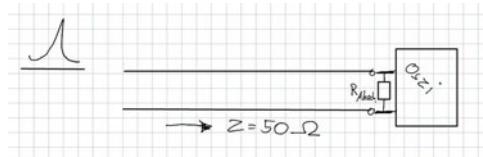


Abbildung 119: Abschlusswiderstand

Kommen wir nun zurück zu realen Kabeln, die einen Dämpfungsanteil besitzen.

$$\gamma^2 = (R + i\omega L)(G + i\omega C) = (\alpha + ik)^2$$

Mithilfe einer Rechnung, die wir nicht näher betrachten wollen (siehe Tietze-Schenk) erhalten wir

$$k = \frac{\omega}{v_0} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}} \right)} \quad (125)$$

Für den Spezialfall $R \gg G$, also $G \sim 0$ gilt:

$$\alpha = \frac{\omega RC}{2k}$$

Die Dämpfung ist also abhängig von der verwendeten Frequenz. Generell ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit definiert als

$$v = \frac{\omega}{k} = v_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}} \right)}} \quad (126)$$

, es gibt also eine Dispersion.

Für $\omega \rightarrow \infty$ ist $v = v_0$, für $\omega = \frac{R}{L}$ ist $v = 0.91v_0$ und für $\omega \rightarrow 0$ geht die Geschwindigkeit ebenfalls gegen Null. Folgen und weitere frequenzabhängige Effekte:

1. Dämpfung und Dispersion führen zu einer Verzerrung der Pulse
2. Der Widerstand R zeigt eine Frequenzabhängigkeit aufgrund des Skin-Effekts: $R = R(\omega) \sim \sqrt{\omega}$
3. Es gibt Leckströme durch das Dielektrikum, ebenfalls proportional zu $\omega \rightarrow \alpha(\omega) = c_1\sqrt{\omega} + c_2\omega$ ist stark frequenzabhängig.

8 Halbleiter-Bauelemente

8.1 Reine und dotierte Halbleiter

Zunächst betrachten wir die zweidimensionale Veranschaulichung der kovalenten Bindungen eines intrinsischen Halbleiters:

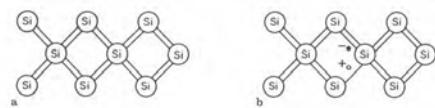


Abbildung 120: a) $T = 0K$, b) $T > 0K$ [Ref: P. Horowitz, W. Hill]

Man sieht, dass für größere Temperaturen einzelne kovalente Bindungen aufbrechen. Weiterhin betrachten wir das Valenz- und Leitungsbandschema eines intrinsischen Halbleiters:

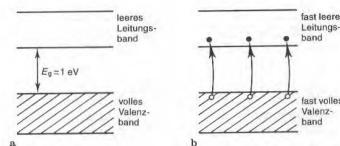


Abbildung 121: a) $T = 0K$, b) $T > 0K$ [Ref: P. Horowitz, W. Hill]

Hier werden durch thermische Anregung Elektron-Loch-Paare erzeugt.

Als nächstes betrachten wir den Aufbau von dotierten Halbleitern:

n-dotierter Halbleiter:

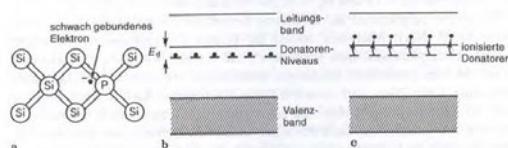


Abbildung 122: a) Kristallgitter (schematisch), b) Donatoren-Niveaus bei $T=0K$, c) Donatoren-Niveaus bei Raumtemperatur [Ref: P. Horowitz, W. Hill]

p-dotierter Halbleiter:

Die Fermi-Energie E_F beschreibt das am absoluten Nullpunkt oberste besetzte Energieniveau. Es sind alle Energiezustände mit $E < E_F$ am absoluten Nullpunkt besetzt, alle Energiezustände mit $E > E_F$ sind somit unbesetzt.

$$F(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} \quad (127)$$

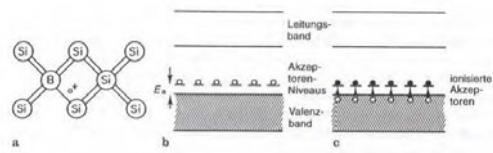


Abbildung 123: a) Kristallgitter (schematisch), b) Akzeptoren-Niveaus bei $T=0\text{K}$, c) Akzeptoren-Niveaus bei Raumtemperatur [Ref: P. Horowitz, W. Hill]

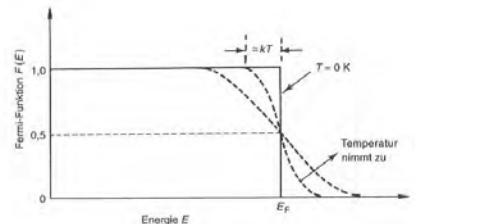


Abbildung 124: Fermi-Energie-Funktion

Dabei ist k die Boltzmann-Konstante und E_F die Fermi-Energie. Für $T > 0$ gibt es thermische Bewegungen und somit keinen scharfen Übergang. Die Verteilung auf die Energieniveaus wird durch die Fermi-Funktion $F(E)$ beschreiben. Diese berücksichtigt, dass ein einzelner Quantenzustand nur mit einem Elektron besetzt werden darf. Die Ausdehnung des Übergangsbereiches ist von der Größenordnung $kT \sim 0.025\text{eV} = \frac{1}{40}\text{eV}$ bei Zimmertemperatur.

Die Fermi-Energie E_F entspricht bei jeder Temperatur derjenigen Energie, für die $F(E)$ den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt.

Die Breite der Energiebänder, die Breite der Bandlücke und die Lage des Fermi-Niveaus sind wichtige Parameter des Bändermodells, sie sind relevant für die Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit eines Festkörpers.

Breite und Lage der Bänder für verschiedene Festkörper

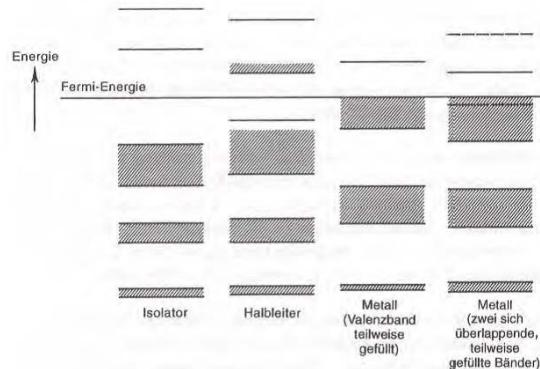


Abbildung 125: Übersicht Anordnung der Bänder

- Isolatoren
 - Das Valenzband ist am absoluten Nullpunkt vollständig gefüllt
 - Vom Leitungsband durch eine Bandlücke getrennt, die Bandlücke beträgt etwa 4 eV
- Halbleiter
 - Das Valenzband ist am absoluten Nullpunkt vollständig gefüllt
 - Vom Leitungsband durch eine Bandlücke getrennt, die Bandlücke beträgt etwa 1 eV
 - Aufgrund der thermischen Energie ist eine Anregung von Elektronen und ihr Übergang in das Leitungsband schon bei Zimmertemperatur möglich
- Metalle
 1. Das Valenzband ist nur teilweise gefüllt, die Elektronen können kinetische Energie aufnehmen, das heißt sie können sich durch den Festkörper bewegen und zur Leitfähigkeit beitragen.
 2. Das Valenzband und Leitungsband überlappen (zum Beispiel für zweiwertige Metalle wie Calcium oder Magnesium)

Vollständig gefüllte Bänder

Hier ist kein makroskopischer Stromfluss möglich. Im äußeren E-Feld erfahren die Elektronen eine äußere Kraft, sie können sich jedoch nicht in Bewegung setzen, d.h. keine kinetische Energie aufnehmen. Der Grund dafür ist, dass zusätzliche kinetische Energie zu einer höheren Gesamtenergie führen würde, was nicht möglich ist, da bereits alle Energiezustände im Band besetzt sind.

Teilweise gefüllte Bänder

Diese tragen zur Leitfähigkeit bei, da es viele Elektronen und viele unbesetzte Zustände gibt. Im äußeren E-Feld können die Elektronen Energie aufnehmen und dadurch höher liegende Energiezustände besetzen. Man spricht von quasi-freien Elektronen.

Zum Abschluss betrachten wir noch kurz die Lage der Fermi-Energie-Niveaus für verschiedene Halbleiter.

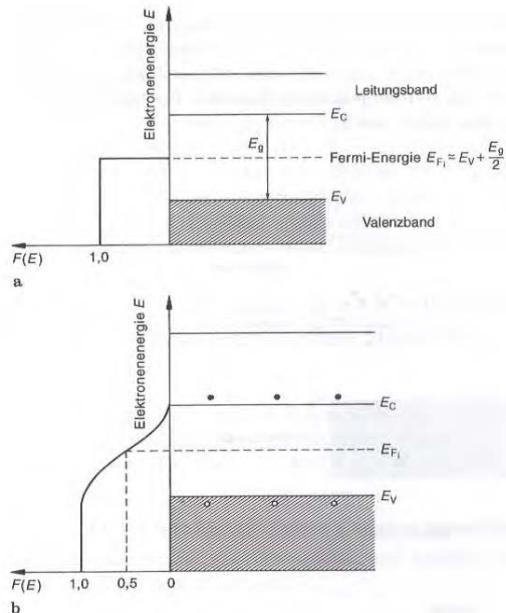


Abbildung 126: Lage in einem intrinsischen Halbleiter, a) $T=0\text{K}$; b) $T>0\text{K}$ [Ref.: P. Horowitz, W. Hill]

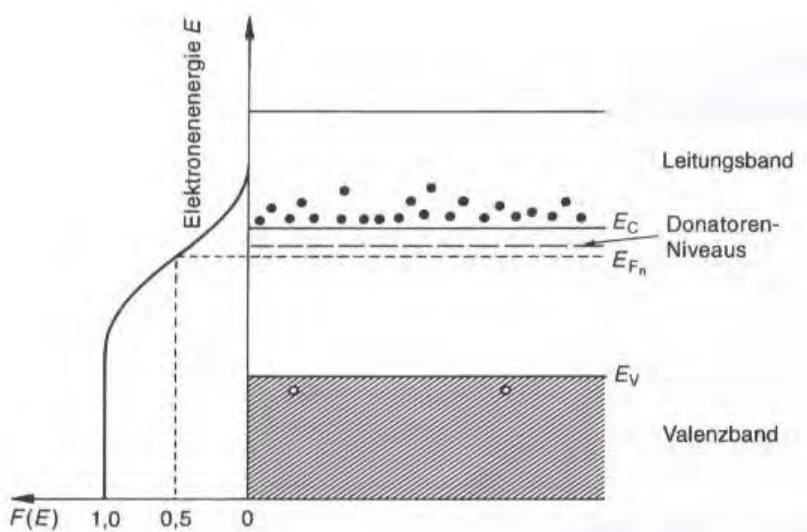


Abbildung 127: Lage in einem n-dotierten Halbleiter bei $T > 0\text{K}$

Die Verschiebung des Fermi-Energie-Niveaus mit steigender Temperatur sieht folgendermaßen aus:

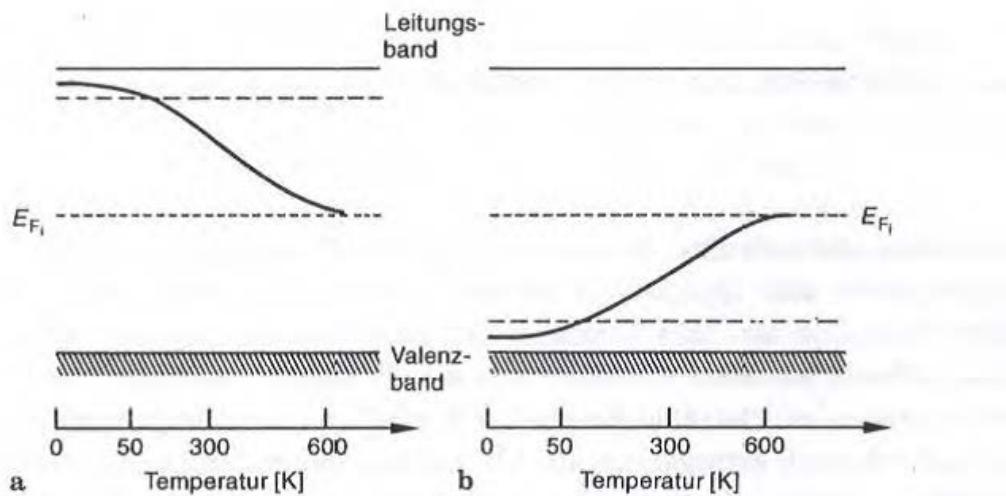


Abbildung 128: a) für einen n-dotierten Halbleiter ; b) für einen p-dotierten Halbleiter

8.2 Der pn-Übergang

8.2.1 Grundlagen

Es erfolgt ein abrupter Übergang zwischen p- und n-dotierten Bereichen in einem Halbleitermaterial. Die Übergangszone ist dabei etwa $0.1\mu\text{m}$.

Bei einem Kontakt diffundieren Elektronen aus dem n-Bereich (Elektronenüberschuss) in den p-Bereich (Elektronenmangel). Das Konzentrationsgefälle führt somit zu einem Diffusionsstrom. Gleichzeitig diffundieren Löcher aus dem p-Bereich in den n-Bereich.

Im n-Bereich bleiben somit positive Donator-Atome zurück, was zu einer positiven Raumladung führt. Im p-Bereich hingegen bleiben negative Akzeptor-Atome zurück, welche eine negative Raumladung darstellen.

Es gibt eine Raumladungsschicht, die arm ist an freien Ladungsträgern, jene wird Verarmungsschicht genannt.

Die Diffusionsbewegung wird durch das elektrische Feld, das sich aufgrund dieser Raumladungen in der Verarmungsschicht aufbaut, abgebremst.

Die folgende Grafik zeigt den pn-Übergang im thermischen Gleichgewicht:

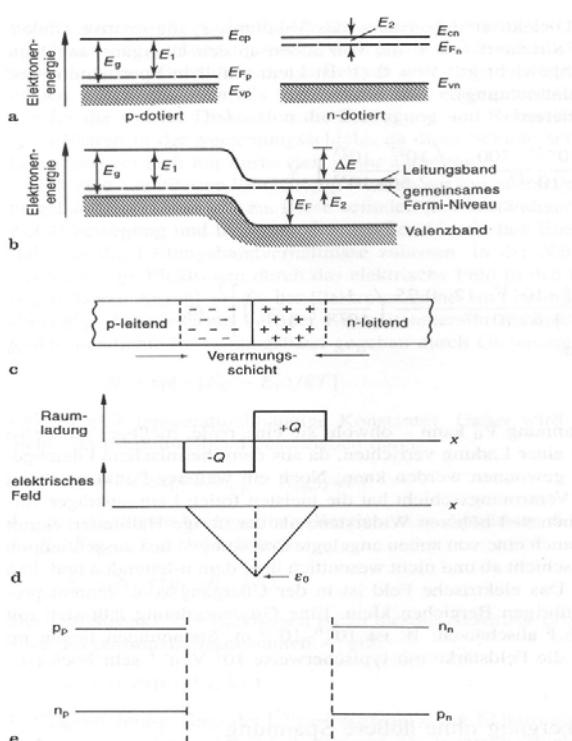


Abbildung 129: a) Bandstruktur im p- und im n-Halbleiter vor Kontakt; b) Bandstruktur Übergangsbereich nach Kontakt; c) Verarmungsschicht; d) Raumladungen und elektrisches Feld; e) Ladungsdichten in Bereichen außerhalb Verarmungsschicht [Ref: P. Horowitz, W. Hill]

Das elektrische Feld führt zu einer Kontakt-oder Diffusionsspannung, bis sich ein Gleichgewicht eingestellt hat und es keinen Stromfluss mehr gibt.

Das Fermi-Niveau wird über die Kontaktzone hinweg angeglichen, das heißt die Energieniveaus des p-Bereiches werden relativ zu denen des n-Bereichs angehoben.

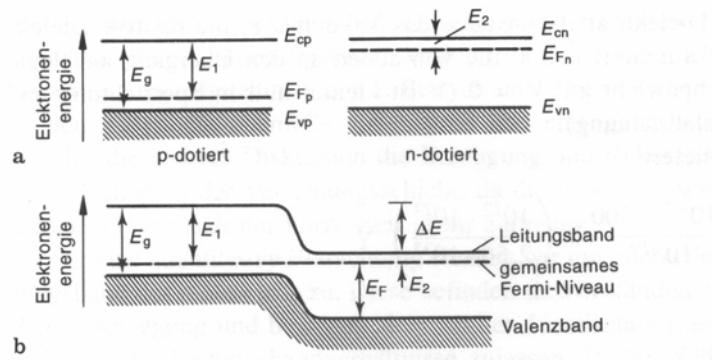


Abbildung 130: Energie-Niveaus

Die folgenden Grafiken zeigen den schematischen Aufbau einer pn-Diode mit angelegter Sperr- bzw. Durchlassspannung. Außerdem sind das Bandschema und der Potentialverlauf im Bereich des Übergangs dargestellt.

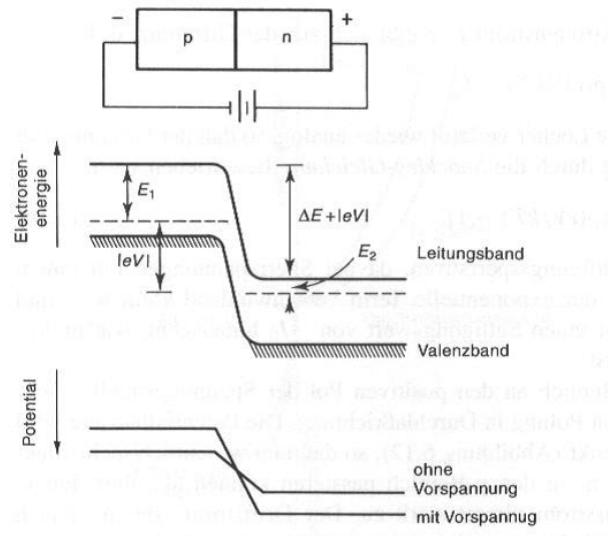


Abbildung 131: pn-Diode mit angelegter Sperrspannung [Ref: P. Horowitz, W. Hill]

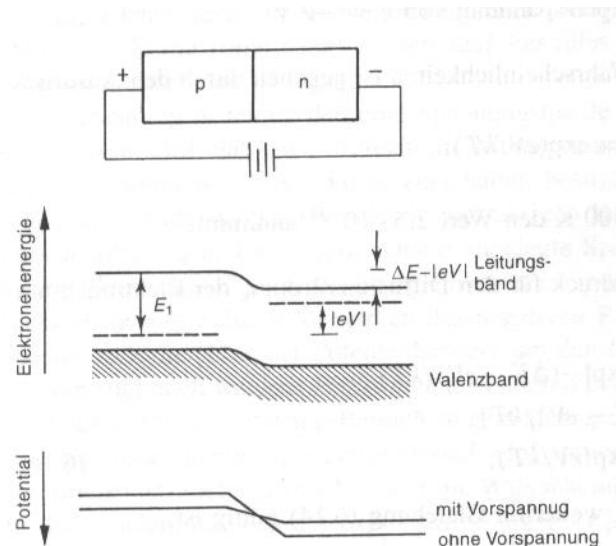


Abbildung 132: pn-Diode mit angelegter Durchlassspannung [Ref: P. Horowitz, W. Hill]

Das folgende Diagramm zeigt eine typische Kennlinie eines pn-Übergangs in Silizium. Zu beachten sind dabei die unterschiedlichen Einteilungen der Achsenabschnitte.

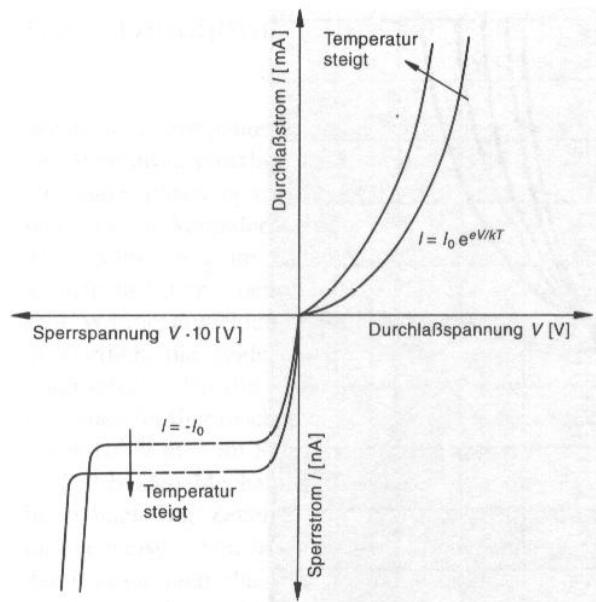


Abbildung 133: Kennlinie pn-Übergang Silizium [Ref: P. Horowitz, W. Hill]

Zum Schluss betrachten wir noch zwei verschiedene Arten von Durchbrüchen:
 Den Avalanche-Durchbruch, bei dem eine Ladungsträgerverteilung durch ionisierende Stöße in der Verarmungsschicht erzeugt wird:

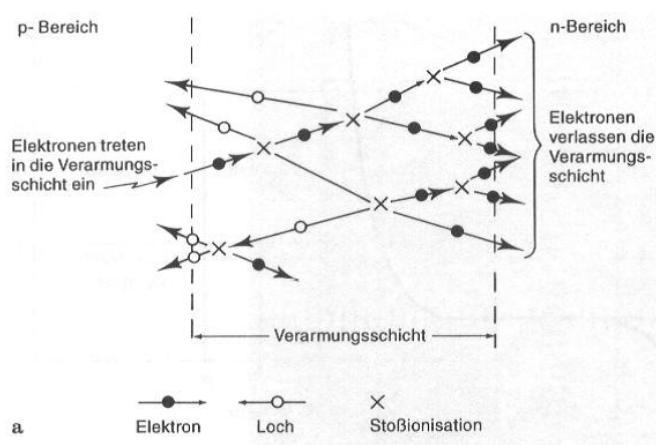


Abbildung 134: Avalanche-Durchbruch [Ref: P. Horowitz, W. Hill]

Außerdem den Zener-Durchbruch, in a) ist der pn-Übergang zwischen stark dotierten Halbleitern im thermischen Gleichgewicht dargestellt, in b) ist dargestellt, wie Elektronen durch Anlegen einer Sperrspannung vom p-in den n-Bereich tunneln können.

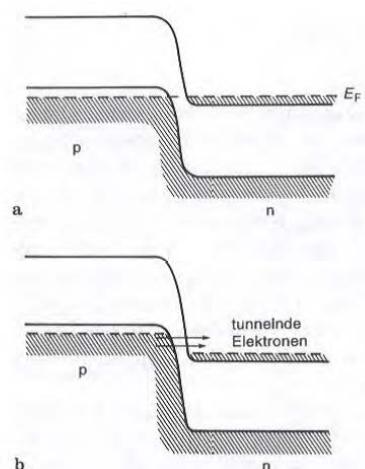


Abbildung 135: Zener-Durchbruch [Ref: P. Horowitz, W. Hill]

8.2.2 Strom durch einen pn-Übergang

- Ohne eine äußere Spannung treten zwei Ströme auf:
 - Der Diffusionsstrom der Majoritätsladungsträger entgegen des durch die Raumladungen erzeugten elektrischen Feldes

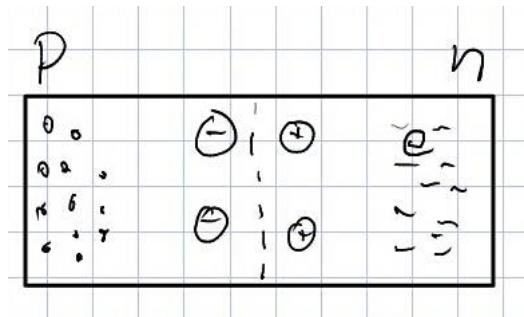


Abbildung 136: Driftstrom nach rechts, Diffusionsstrom nach links

- Den Driftstrom, der durch die frei beweglichen Elektronen im p-Bereich entsteht (\rightarrow Valenz \rightarrow Leitungsband). Die thermische Anregung führt hier zu einem Dunkelstrom. Hat sich ein Gleichgewichtszustand ausgebildet, so ist der Gesamtstrom $I_{ges} = 0$:

$$I_{e,ges} = I_{e,diff} + I_{e,drift} = 0 \quad (128)$$

Der Driftstrom wird beschrieben durch

$$I_{e,drift} = A * e^{-\frac{E_1}{kT}} \quad (129)$$

, wobei der Exponentialterm der Wahrscheinlichkeit ein Elektron auf der p-Seite zu finden entspricht.

Der Diffusionsstrom wird beschrieben durch

$$I_{e,diff} = A' * \left(e^{-\frac{E_2}{kT}} \right) \left(e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \right) \quad (130)$$

, dabei ist $(E_2 + \Delta E) = E_1$, somit muss $A = -A'$ sein, damit der Gesamtstrom Null wird.

- Bei dem pn-Übergang in Sperrrichtung wird die Spannung als negativ angenommen. Es sind positive Ladungen an der n-Seite und Elektronen an der p-Seite vorhanden, es wird $\Delta E \rightarrow \Delta E + |eU|$. Es gilt für den Diffusionsstrom nun

$$I_{e,\text{diff}} = A * e^{-\frac{E_1}{kT}} e^{\frac{eU}{kT}} \quad (131)$$

Und für den Driftstrom

$$I_{e,\text{drift}} = -A e^{-\frac{E_1}{kT}} \quad (132)$$

Somit wird der Gesamtstrom zu

$$I_{e,\text{ges}} = A * \left(e^{-\frac{E_1}{kT}} \right) \left(e^{-\frac{eU}{kT}} - 1 \right) \quad (133)$$

Analog ergibt sich nun der Löcherstrom I_h :

$$I_{\text{ges}} = I_{e,\text{ges}} + I_{h,\text{ges}} = I_0 \left(e^{\frac{eU}{kT}} - 1 \right) \quad (134)$$

Diese Gleichung heißt Shockley-Gleichung.

Für die Sperrrichtung ist $U < 0$ und der Diffusionsstrom wird vernachlässigbar. Es gilt also $e^{\frac{e|U|}{kT}} \ll 1$

Für den Gesamtstrom folgt also $I_{\text{ges}} = -I_0$

Dabei ist $I_0 = A'' * e^{-\frac{E_1}{kT}}$ der Dunkelstrom von (e, h) und somit der einzige Strom der fließt, der durch thermische Anregung entsteht. Dieser Strom ist verantwortlich für das thermische Rauschen und kann nur durch Kühlen verringert werden.

- Als Drittes betrachten wir den pn-Übergang in Durchlassrichtung. Hier wird nun die Spannung als positiv betrachtet und $\Delta E \rightarrow \Delta E - eU$.

Der Diffusionsstrom, der durch die Majoritätsladungsträger entsteht, steigt nun exponentiell an:

$$I = I_0 \left(e^{\frac{eU}{kT}} - 1 \right) = I_0 \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right) \quad (135)$$

, wobei $U_T = \frac{kT}{e}$ der Temperaturspannung entspricht.

8.3 Diode

Die Diode ist ein Halbleiterbauelement, sie entspricht der technischen Realisierung des pn-Übergangs. Kennzeichen:

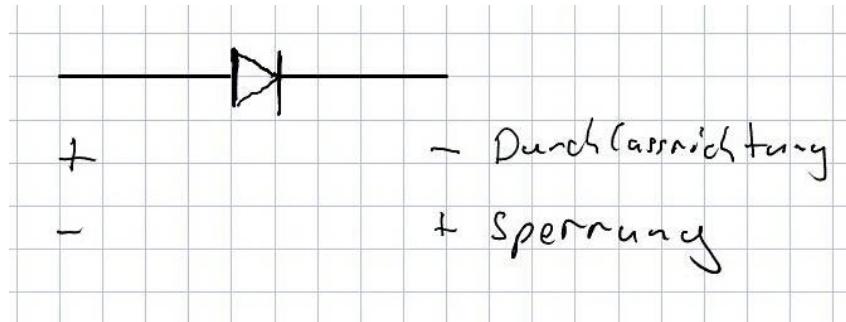


Abbildung 137: Kennzeichen

Die Diodenkennlinie wird berechnet durch

$$I(U) = I_0 \left(e^{\frac{U}{UT}} - 1 \right) \quad (136)$$

Und sieht etwa folgendermaßen aus:

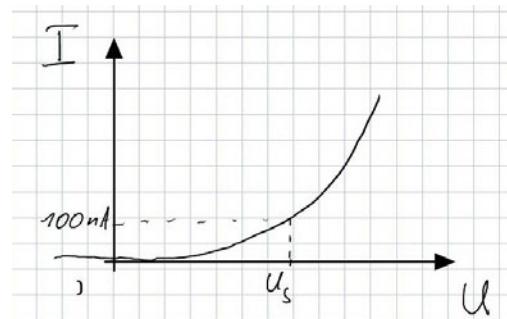


Abbildung 138: Dioden-Kennlinie

Charakteristische Größen sind

- Die Schwellenspannung U_S (typische Werte: $U_S(Si) \sim 0.6 - 0.7V$; $(Ge) \sim 0.3V$)
- Der Dunkelstrom I_0
- Die Durchbruchsspannung
- Der differentielle Widerstand

$$r_d = \frac{dU}{dI}; \frac{1}{r_d} = \frac{dI}{dU} = \frac{e}{kT} I_0 e^{\frac{eU}{kT}} = \frac{I}{U_T} \quad (137)$$

$$\rightarrow r_d = \frac{U_T}{I} \quad (138)$$

8.4 Schaltungen mit Dioden

Betrachten wir nun folgende Schaltung:

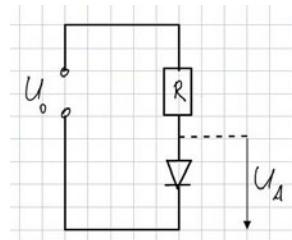


Abbildung 139: Dioden-Schaltung

Es gilt:

$$I_D = I_0 e^{\frac{U_A}{V_T}} \quad (139)$$

$$I_R = I_D = \frac{U_0 - U_A}{R} \quad (140)$$

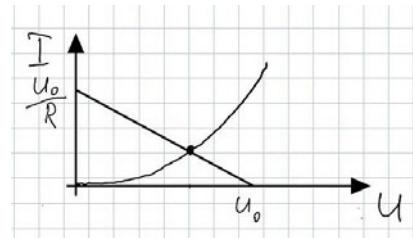


Abbildung 140: Stromverlauf

Daraus folgt als gute Näherung ein so genanntes Diodenmodell, welches folgendermaßen aussieht:

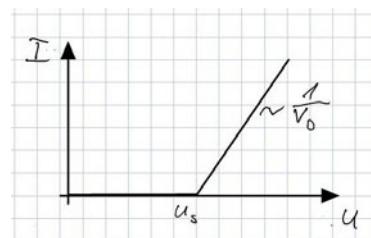


Abbildung 141: Diodenmodell

8.5 Bipolarer Transistor

8.5.1 Transistoreffekt

1948: J. Bardeen, W. Shockley Bipolarer Transistor: n-p-n-Transistor ; p-n-p-Transistor Der n-p-n-Transistor wird bevorzugt, da Elektronen gegenüber Löchern eine größere Beweglichkeit als Minoritätsladungsträger in der mittleren p-Schicht besitzen. Der Transistor arbeitet somit schneller für Hochfrequenz-Anwendungen.

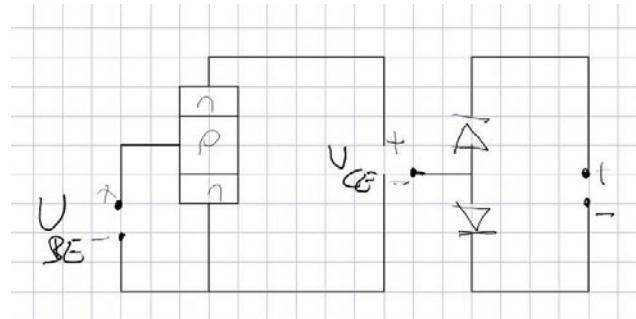


Abbildung 142: Schaltkizze npn-Transistor

Die technischen Besonderheiten sind:

- Die mittlere Schicht (Basis) ist sehr dünn $\sigma(10\mu m)$
- Die mittlere Schicht ist nur schwach dotiert, im Vergleich zur Emitterzone. Typische Werte sind:
 - $N_D(E) = 10^{19} cm^{-3}$
 - $N_D(B) = 10^{17} cm^{-3}$

Transistor-Effekt

1. Bei Anlegen von $U_{CE} > 0$ fließt ein Sperrstrom durch den BC-Übergang

$$I_C = I_C(U_{CE}) = I_0 \quad (141)$$

2. Durch Anlegen einer zweiten Spannung U_{BE} kann die Konzentration der Minoritätsladungsträger in der p-Schicht erhöht werden. $U_{BE} > 0 \rightarrow$ Diode (B,E) ist in Durchlassrichtung gepolt, sodass die Elektronen vom Emitter in Richtung Basis fließen.

Eine geringe Dotierung führt zu einer kleinen Rekombinationswahrscheinlichkeit mit den Löchern, die mittlere freie Weglänge λ ist größer als die Dicke der Schicht. Die Elektronen diffundieren somit fast ohne Abschwächung zur BC-Grenzschicht. Die äußere Spannung U_{CE} sorgt dafür, dass der Strom I_{BC} vergrößert wird.

Der Kollektorstrom $I_C = I_C(U_{BE}, U_{CE})$

Kleine Ströme im BE-Kreis (I_B) führen zu großen Strömen im CE-Kreis (I_C), es gibt eine Stromverstärkung.

$$I_E = I_B + I_C \approx I_C$$

$$\frac{I_C}{I_E} \sim 0.98 - 0.995 = \alpha \quad (142)$$

$$\frac{I_C}{I_B} = \beta \quad (143)$$

Die Stromverstärkung ist somit $20 < \beta < 500$.

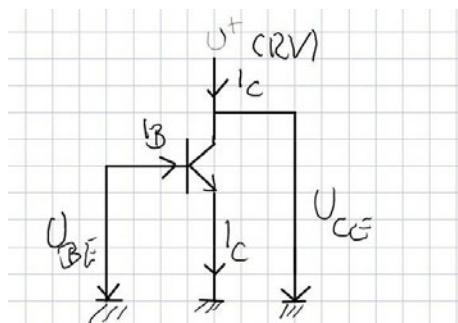


Abbildung 143: Stromverstärkung

- Eingangsseite: U_{BE}, I_B Die Diode ist in Durchlassrichtung geschaltet.

$$I_B = I_S e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$$

Der differentielle Eingangswiderstand ist gering:

$$\nu_{BE} = \frac{\partial U_{BE}}{\partial I_{BE}} = \frac{U_T}{I_B} \quad (144)$$

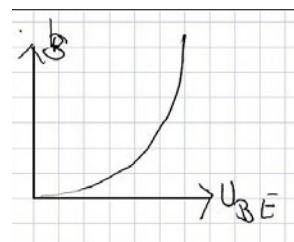


Abbildung 144: Stromverlauf

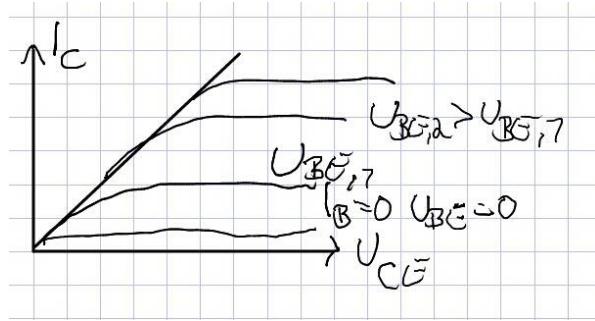


Abbildung 145: Kennlinienfeld

- Ausgangsseite: U_{CE}, I_C

Es gibt einen zusätzlichen Effekt im aktiven Bereich ($U_{CB} > 0, U_{BE} > 0$), den Early-Effekt (benannt nach J.M. Early). Dieser Effekt besteht darin, dass der Kollektorstrom im aktiven Bereich leicht mit U_{CE} ansteigt. Die Ursache dafür ist, dass sich die effektive Verarmungszone (Dicke der Basis) mit steigender Spannung verkleinert.

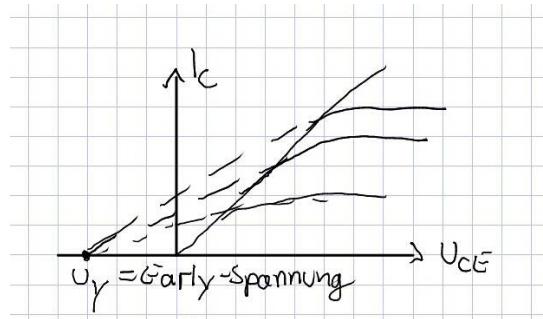


Abbildung 146: Kennlinienfeld mit Early-Spannung U_γ

- wichtiger Parameter: Steilheit S:

$$S = \frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}} = \frac{\partial}{\partial U_{BE}} (\beta I_s e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}) = \frac{I_C}{U_T} \quad (145)$$

Wichtige Gleichungen sind: Für die Diode:

$$dI_B = \frac{1}{\nu_{BE}} dU_{CE} \quad (146)$$

Für den Early-Effekt:

$$dI_C = S dU_{BE} + \frac{1}{\nu_{CE}} dU_{CE} \quad (147)$$

8.5.2 Einstellung des dc-Arbeitspunktes

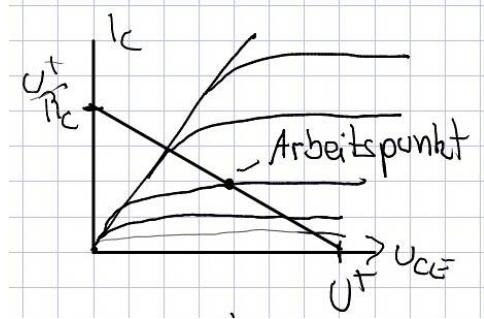


Abbildung 147: Arbeitspunkt

- Versorgungsspannung $U^+ \approx 12V$
- Arbeitswiderstand R_C

$$U_A = U_{CE} = U^+ - I_C R_C \quad (148)$$

$$I_C = -\frac{U_{CE}}{R_C} + \frac{U^+}{R_C} \quad (149)$$

- Limitierungen sind zum Beispiel die maximale Leistungsabgabe $P_{\max} = (U_{CE} I_C)_{\max}$

8.6 Transistororschaltungen

Das Ziel ist die Spannungsverstärkung der Eingangsspannung $U_E \rightarrow U_E + \Delta U_E$ zur Ausgangsspannung $U_A \rightarrow U_A + \Delta U_A$

$$V_u = \frac{\Delta U_A}{\Delta U_E}$$

$$U_A = U_{CE} = U^+ - R_C I_C \rightarrow \Delta U_{CE} = -R_C \Delta I_C \quad (150)$$

$$\Delta I_C = \beta \Delta I_B = \beta \frac{\Delta U_{BE}}{\nu_{BE,A}} \quad (151)$$

Setzt man nun (X) und (X) in (X) ein, so ergibt sich

$$V_u = \frac{\Delta U_A}{\Delta U_E} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta U_{BE}} = -\frac{\beta R_C}{\nu_{BE}} = -SRC \quad (152)$$

Der Vorteil ist, dass eine große Verstärkung möglich ist, der Nachteil aber, dass es eine starke Abhängigkeit von den Transistorparametern β, ν_{BE} gibt, es besteht also eine Temperatur- und Exemplarabhängigkeit. Das Ziel ist nun, die Stärkung besser von außen kontrollieren zu können. Dazu wird eine Schaltungsverbesserung durch eine sogenannte „Gegenkopplung“ vorgenommen.

1. Stromgegenkopplung Hierzu bauen wir einen Widerstand R_E in die Emitterleitung, vorher war $U_E = U_{BE}$, dies ist nun nicht mehr der Fall.

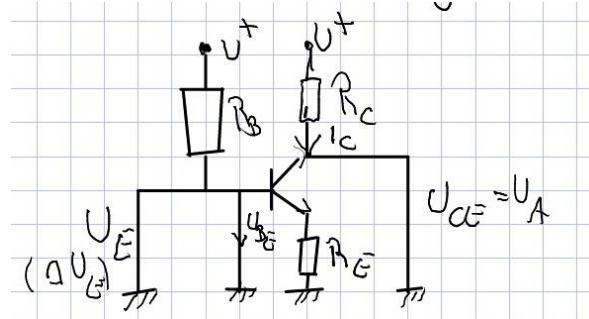


Abbildung 148: Stromgegenkopplung

$$U_{BE} = U_E - U_{RE} = U_E - R_E I_E; U_A = U^+ - I_C R_C \quad (153)$$

$$\Delta U_A = -R_C \Delta I_C \approx \gamma R_C \Delta I_E = -R_C \frac{\Delta U_{RE}}{R_E} = -\frac{R_C}{R_E} (\Delta U_E - \Delta U_{BE}) \quad (154)$$

$$\rightarrow \frac{\Delta U_E}{\Delta U_A} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta U_A} \frac{R_E}{R_C} \quad (155)$$

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta U_A} = \frac{1}{v_u} \text{ (mit Gegenkopplung)}; \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta U_A} = \frac{1}{v_u} \quad (156)$$

Es folgt also:

$$V'_u = -\frac{R_C}{R_E} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{v_u}} \frac{R_C}{R_E} \right) \approx -\frac{R_C}{R_E} \quad (157)$$

$$V'_u = -\frac{R_C}{R_E} \quad (158)$$

2. Spannungskopplung

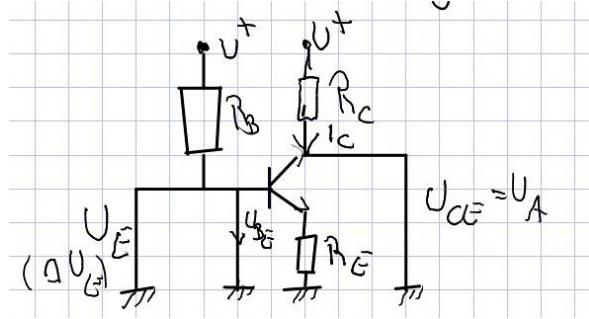


Abbildung 149: Spannungskopplung

$$U_{BE} = U_{CE,A} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_u = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (159)$$

Bisher haben wir recht idealisierte Fälle betrachtet, nun wollen wir die Frequenzabhängigkeit der Stromverstärkung berücksichtigen.

- Die Stromverstärkung β des Transistors zeigt eine Frequenzabhängigkeit $\beta(\nu)$.
- Es zeigt sich ein Tiefpassverhalten bedingt durch Verluste in Leitungen und durch die Kapazitäten der Dioden C_{BE}

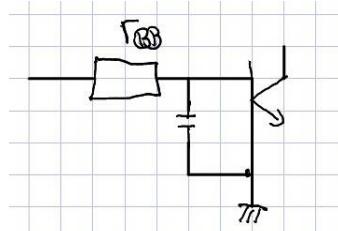


Abbildung 150: Tiefpassverhalten

$$\frac{|U_{BE}|}{|U_{BE}|} = g(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\nu}{\nu_G})^2}} \quad (160)$$

Dabei ist:

- $\beta_0 = \beta(\nu = 0)$ = Gleichstromverstärkung
- $\beta(\nu = \nu_G) = \frac{\beta_0}{\sqrt{2}}$ = Def. Grenzfrequenz
- $\beta(\nu_T) = 1$ = Transitfrequenz

9 Verstärkerschaltungen, ADGs und DACs

9.1 Differenzverstärker

Ein Differenzverstärker ist symmetrisch aufgebaut, er besitzt zwei Transistoren T_1, T_2 , zwei Eingänge E_1, E_2 und zwei Ausgänge A_1, A_2

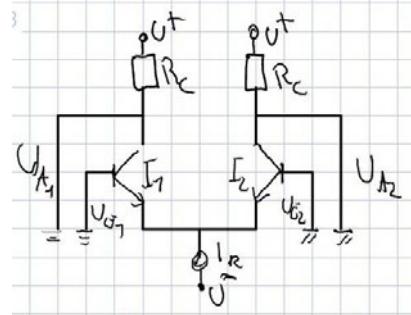


Abbildung 151: Schaltskizze

Der Vorteil von dieser Schaltung ist, dass die Differenz $\Delta U_E = (U_{E_1} - U_{E_2})$ kann verstärkt werden kann, was Temperatureffekte vernachlässigbar klein werden lässt.

$$U_{A_1} = V_D(U_{E_1} + U_\vartheta) \quad U_{A_2} = V_D(U_{E_2} + U_\vartheta) \quad (161)$$

Dabei ist U_ϑ die Spannungsänderung aufgrund von Temperaturänderungen- Es folgt also:

$$\Delta U_A = U_{A_1} - U_{A_2} = V_D * \Delta U_E \quad (162)$$

Folgende Dinge spielen eine wichtige Rolle:

1. Gleichtaktaussteuerung

$$U_{E_1} = U_{E_2} = 0$$

$$I_{E_1} = I_{E_2} = \frac{I_k}{2}; I_{C_1} \approx I_{C_2} \approx \frac{I_k}{2}$$

$$U_{A_1} = U_+ - R_C I_{C_1} = U_{A_2}$$

$$\rightarrow \Delta U_A = 0 \quad (163)$$

Dabei ist $U_{E_1} = U_{E_2} > 0$. Betrachten wir nun eine reale Stromquelle mit dem Innenwiderstand r_K so ergibt sich:

$$dI_k = \frac{dU_{GL}}{r_K} \rightarrow dU_{A_1} = dU_{A_2} = -\frac{1}{2} \frac{R_C}{r_K} dU_{GL} > \Delta U_A = 0 \quad (164)$$

r_K ist im Allgemeinen groß für gute Stromquellen.

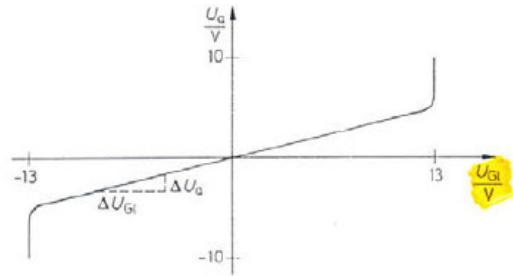


Abbildung 152: Gleichtaktaussteuerung

2. Differenzaussteuerung

$$U_{E_1} > U_{E_2} \rightarrow U_{BE,1} > U_{BE,2}; I_{E_1} + I_{E_2} = I_k \rightarrow \Delta I_{E_1} = -\Delta I_{E_2}$$

$$\Delta U_{A_1} = -R_C \Delta I_{C_1} = -R_C \beta \Delta I_{B_1}$$

$$\Delta U_{B_1} = -\frac{R_c \beta}{r_{BE}} \Delta U_{BE,1}$$

$$\Delta U_A = -\frac{R_C \beta}{r_K} U_E \quad (165)$$

Es gilt somit $\Delta U_E = V_D \Delta U_A$, woraus folgt

$$V_D = -\frac{R_C \beta}{r_{BE}} \quad (166)$$

Die Verstärkung V_D bewegt sich dabei im Bereich zwischen 10^2 und 10^4 .

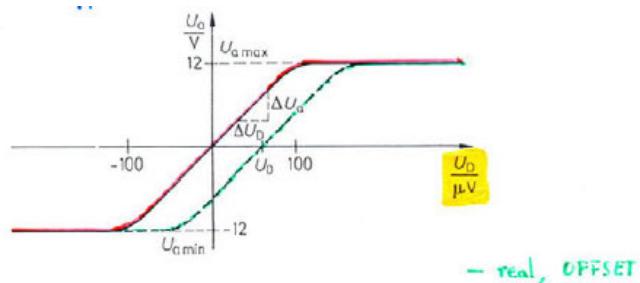


Abbildung 153: Differenzaussteuerung

3. Gleichtaktunterdrückung

$$R_{GL} = \frac{VD}{V_{GL}} \quad (167)$$

Diese befindet sich im Bereich $10^5 \sim 10^6$. Dies ist ein Qualitätsmerkmal eines Differenzverstärkers, entscheidend ist die Qualität der Stromquelle.

Der Frequenzgang des Differenzverstärkers sieht folgendermaßen aus:

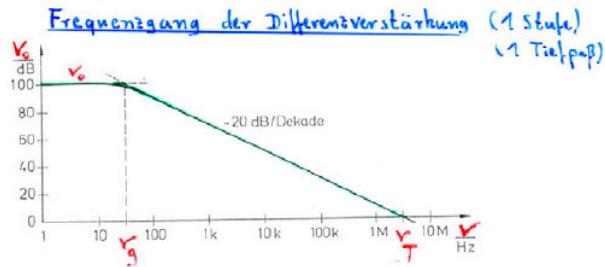


Abbildung 154: Frequenzgang

4. Offset-Spannung Die beiden Transistoren unterscheiden sich bei gleicher Stromstärke $I_C(I_E)$ in der Spannung U_{BE} (Exemplarstreuung). Es ergibt sich:

$$U_{E_1} = U_{E_2} \rightarrow \Delta U_A > 0$$

Es folgt

$$U_{E_1} + U_{Off} = U_{E_2} \quad (168)$$

U_{Off} ist dabei die Offsetspannung.

Eine kurze Zusammenfassung der Differenzverstärker:

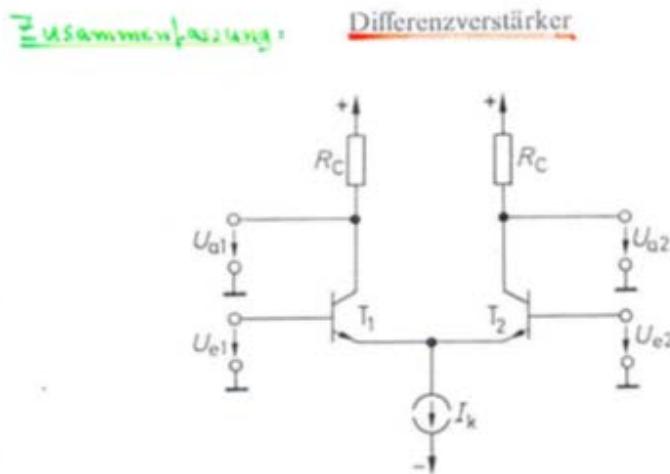


Abb. 4.41 Grundschaltung des Differenzverstärkers

$$\text{Differenzverstärkung: } A_D = \frac{dU_{a1}}{dU_D} = -\frac{dU_{a2}}{dU_D} = -\frac{1}{2} S(R_C \| r_{CE}) \text{ mit } U_D = U_{e1} - U_{e2}$$

$$\text{Gleichaktverstärkung: } A_{GI} = \frac{dU_{a1}}{dU_{GI}} = \frac{dU_{a2}}{dU_{GI}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R_C}{r_k} \text{ mit } U_{GI} = \frac{1}{2}(U_{e1} + U_{e2})$$

$$\text{Gleichaktunterdrückung: } G = \frac{A_D}{A_{GI}} \approx S r_k \quad (r_k = \text{Innenwiderstand der Stromquelle})$$

$$\text{Differenzeingangswiderstand: } r_D = \frac{dU_D}{dI_{e1}} = -\frac{dU_D}{dI_{e2}} = 2r_{BE}$$

$$\text{Gleichakteingangswiderstand: } r_{GI} = \frac{dU_{GI}}{dI_{e1}} = \frac{dU_{GI}}{dI_{e2}} = 2\beta r_k$$

$$\text{Ausgangswiderstand: } r_a = R_C \| r_{CE}$$

$$\text{Eingangsruhestrom: } I_B = \frac{1}{2}(I_{e1} + I_{e2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_k}{B}$$

Abbildung 155: Zusammenfassung

9.2 Operationsverstärker

Ein Operationsverstärker ist ein integriertes Bauelement, es handelt sich um einen universellen Verstärker. Das bedeutet, man kann ihn überall einsetzen, er ist so allgemein gehalten, dass gewünschte Schaltungseigenschaften von außen kontrollierbar sind. Der Aufbau besteht im Wesentlichen aus folgenden Bereichen:

1. Einer Eingangsstufe, bestehend aus einem Differenzverstärker und einer Konstantstromquelle
2. Einer Zwischenstufe, bestehend aus einer weiteren Verstärkung und einer Frequenzgangkorrektur
3. Einer Endstufe, bestehend aus einer dritten Verstärkung und einer Impedanzpassung

Die Eigenschaften eines Operationsverstärkers sind:

- Leerlaufverstärkung: V_0 (open-loop-gain)

$$U_A = V_0 U_D = V_0(U_+ - U_-)$$

Typische Verstärkungsfaktoren sind hierbei im Bereich $10^2 - 10^4$, was etwa 40dB - 120dB entspricht.

- Positive und negative Betriebsspannung von $\pm 15V$

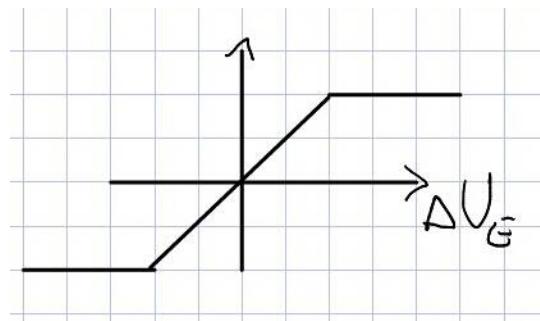


Abbildung 156: Betriebsspannung

- Gleichtaktüberbrückung: $R_{GL} = \frac{V_D}{V_{GL}} = 10^{2.5} \sim 10^6$, was 50-120 dB entspricht
- Eingangswiderstände: $r_d = 10k\Omega \rightarrow M\Omega$ für bipolare Transistoren, für Feldefektftransistoren sogar im Bereich $10^1 1\Omega \rightarrow 20^1 3\Omega$ Ideal wäre ein unendlich großer Eingangswiderstand.
- Ausgangswiderstand: Dieser sollte möglichst gering sein, im Bereich von $10\Omega \rightarrow 10k\Omega$.

Ein idealer Operationsverstärker wäre:

- $V_0 \rightarrow \infty$
- $r_d \rightarrow \infty$
- $r_A \rightarrow 0$

Tabellarischer Überblick typische Daten von Operationsverstärkern:

Parameter	Symbol	Standardverstärker		Spezialverstärker	
		$\mu\text{A } 741$ (bipolar)	TL051 (Fet)	OP177 (präzise)	EL2038 (schnell)
Differenzverstärkung	A_D	10^5	$2 \cdot 10^5$	10^7	$2 \cdot 10^4$
Gleichtaktunterdrückung	G	$3 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	10^7	$3 \cdot 10^4$
Differenzeingangswiderstand	r_D	$10^6 \Omega$	$10^{12} \Omega$	$5 \cdot 10^7 \Omega$	$10^4 \Omega$
Gleichtakteingangswiderstand	r_{GI}	$10^9 \Omega$	$10^{14} \Omega$	$2 \cdot 10^{11} \Omega$	$10^7 \Omega$
Eingangsruhestrom	I_B	80 nA	5 pA	1 nA	5 μA
Offsetspannung	U_0	1 mV	0,5 mV	10 μV	0,5 mV
Offsetspannungsdrift	$\Delta U_0 / \Delta T$	6 $\mu\text{V/K}$	10 $\mu\text{V/K}$	0,1 $\mu\text{V/K}$	20 $\mu\text{V/K}$
Gleichtaktaussteuerbarkeit	$U_{G1\max}$	$\pm 13 \text{ V}$	$+14,5 \text{ V}$ -12 V	$\pm 13 \text{ V}$	$\pm 12 \text{ V}$
Ausgangsaussteuerbarkeit	$U_{a\max}$	$\pm 13 \text{ V}$	$\pm 13 \text{ V}$	$\pm 14 \text{ V}$	$\pm 12 \text{ V}$
Maximaler Ausgangsstrom	$I_{a\max}$	$\pm 20 \text{ mA}$	$\pm 20 \text{ mA}$	$\pm 20 \text{ mA}$	$\pm 50 \text{ mA}$
Ausgangswiderstand	r_a	1 k Ω	100 Ω	60 Ω	30 Ω
Betriebsstromaufnahme	I_b	1,7 mA	1,4 mA	1,6 mA	13 mA
3 dB-Bandbreite	f_{gA}	10 Hz	30 Hz	0,06 Hz	50 kHz
Verstärkungs-Bandbreite-Produkt	f_T	1 MHz	3 MHz	0,6 MHz	1 GHz
w rate	dU_a/dt	0,6 V/ μs	18 V/ μs	0,3 V/ μs	1000 V/μs
Leistungsbandbreite	f_p	10 kHz	290 kHz	5 kHz	16 MHz

Abb. 7.6 Typische Daten integrierter Operationsverstärker ohne äußere Beschaltung bei $\pm 15 \text{ V}$ Betriebsspannung

Abbildung 157: Daten integrierter Operationsverstärker

Nicht-Invertierender Verstärker

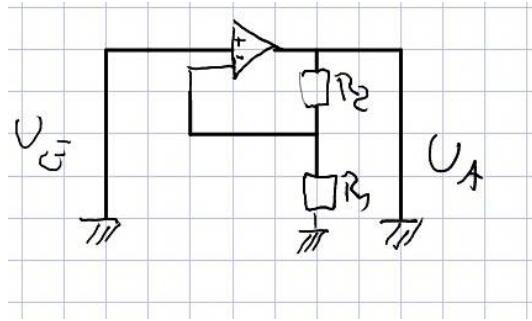


Abbildung 158: Schaltskizze Nicht-Invertierender Verstärker

Die Verstärkung beträgt $\frac{U_A}{U_E}$. Dabei ist:

$$U_A = V_0 U_D = V_0(U_+ - U_-); U_+ = U_E \text{ und } U_- = U_A \frac{R_1}{R_1 + R_2} = k U_A$$

k ist dabei der Kopplungsfaktor $k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$. Es ergibt sich somit für die Ausgangsspannung:

$$U_A = V_0(U_E - k U_A) \rightarrow \frac{U_A}{U_E} = \frac{V_0}{1 + k V_0}$$

Für $V_0 \gg 1$ folgt:

$$\frac{U_A}{U_E} \approx \frac{1}{k} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (169)$$

Invertierender Verstärker

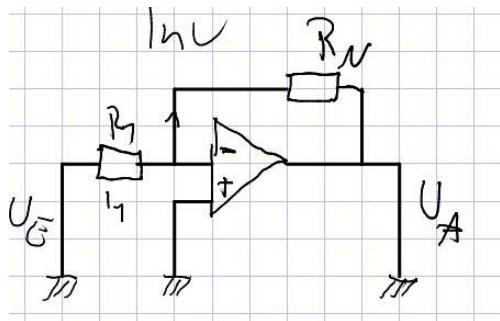


Abbildung 159: Schaltskizze Invertierender Verstärker

Es gilt:

$$U_A = V_0(U_+ - U_-), U_+ = 0; U_- = U_E - U_{R_1} = U_E - I_1 R_1$$

Mit der Summenregel folgt $\frac{I_1 + I_2 + I_3}{3}, I_3 \approx 0$

$$I_1 = \frac{U_A - U_E}{R_1 + R_N} \quad (170)$$

Setzt man dies nun ein ergibt sich:

$$U_A = U_E \frac{V_0}{1 - V_0 k} (1 - k) \quad (171)$$

Der idealisierte Fall ist, dass die Verstärkung gegen unendlich geht, dann gilt:

$$\Delta u = u_+ - u_- = \frac{U_A V_0}{R_N} \rightarrow 0; U_+ \approx U_-$$

Für die virtuelle Masse ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_E}{R_1}; I_2 = \frac{U_A}{R_N}; I_1 = -I_2 \\ \rightarrow U_A &= -\frac{R_N}{R_1} U_E \end{aligned} \quad (172)$$

Beispielhaft sieht man in der folgenden Grafik die interne Schaltung des Operationsverstärkers 741.

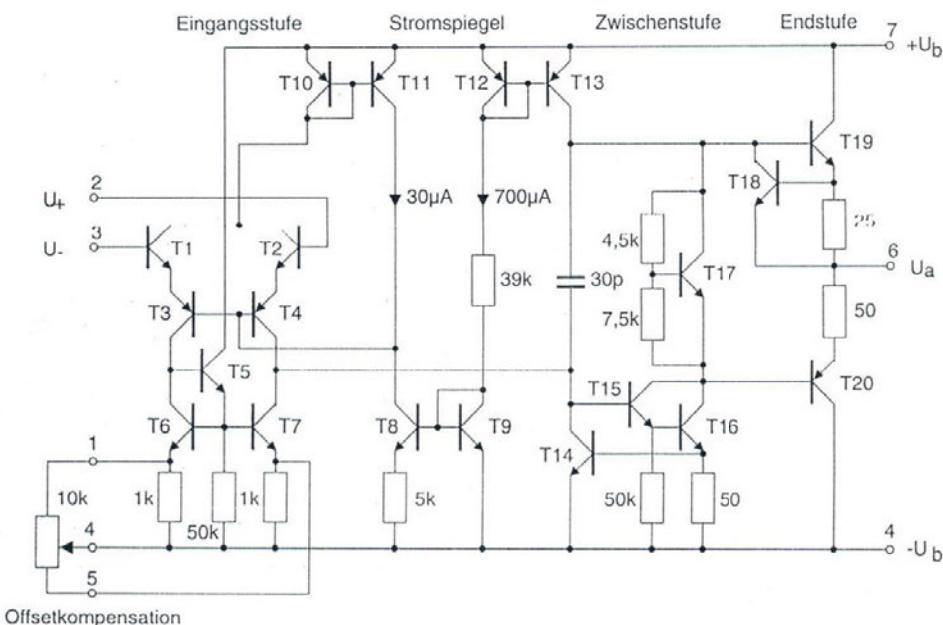


Abb. 14.1. Die interne Schaltung des Operationsverstärkers 741

Abbildung 160: Interne Schaltung OV 741

9.3 Anwendungen von Operationsverstärkern

9.3.1 Addierer

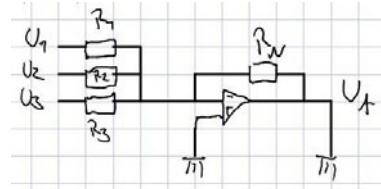


Abbildung 161: Schaltskizze Addierer

Es gilt $I_1 + I_2 + \dots + I_N = 0$ und somit $(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \dots) = -\frac{U_A}{R_N}$

$$U_A = -R_N(U_1R_1 + \frac{U_2}{R_2} + \dots)$$

$$R_1 = R_2 = \dots = R_E$$

$$\rightarrow U_A = -\frac{R_N}{R_E}(U_1 + U_2 + \dots) \quad (173)$$

9.3.2 Differentiator

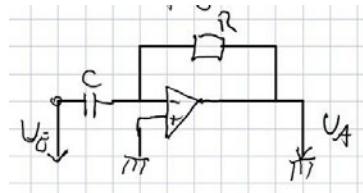


Abbildung 162: Schaltskizze Differentiator

Hier ist V_0 groß, es folgt also mit $I_1 = c \frac{dU_E}{dt}; I_2 = \frac{U_A}{R}$ sowie $I_1 = -I_2$:

$$U_A = -RC \frac{dU_E}{dt} \quad (174)$$

Außerdem gilt

$$\frac{U_A}{U_E} \approx -\frac{1-k}{k} = -\frac{R_N}{R_1} \quad (175)$$

Die Eingangsspannung wird beschrieben durch

$$U_E = U_0 \sin \omega t; U_A = -RC\omega U_0 \cos \omega t$$

Es entsteht also eine Phasenverschiebung und eine Amplitude $\sim \omega$. Der Differentiator zeigt ein Hochpassverhalten.

9.3.3 Integrator

Um vom Differentiator auf den Integrator zu kommen, muss man nur Kondensator und Widerstand vertauschen:

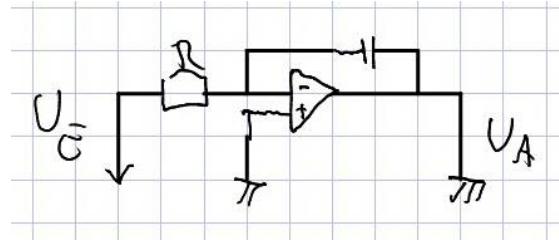


Abbildung 163: Schaltskizze Integrator

Es gilt hier also $I_1 = \frac{U_E}{R} = -C \frac{dU_A}{dt} = -I_2$ woraus wir eine Ausgangsspannung von

$$U_A(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_E dt \quad (176)$$

erhalten. Es gibt wieder ein sinusförmiges Signal $U_E = U_0 \sin \omega t$ und somit eine sinusförmige Ausgangsspannung

$$U_A = -\frac{1}{\omega RC} U_0 \sin \omega t + 90^\circ \quad (177)$$

Die Amplitude ist somit proportional zu $\frac{1}{\omega}$, was einem Tiefpassverhalten entspricht. Stellen wir nun den Bezug zur Detektorphysik her: „Ladungsempfindliche Verstärker“ (Ionisationsladung), die einen Strom I_E am Eingang liefern.

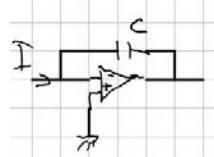


Abbildung 164: Schaltskizze OV

Es gilt: $I_E = -I_A = -C \frac{dU_A}{dt}$ und somit

$$U_A = -\frac{1}{C} \int I_E dt = -\frac{Q(t)}{C} \quad (178)$$

Außerdem: Stromempfindliche Verstärker:

$$U_A = -I_E * R$$

9.3.4 Spannungsfolger

Ist der Schalter S geschlossen, so folgt $U_C = U_E$ und es gilt $U_A = U_C = U_E$. Zum Zeitpunkt t_0 ist der Schalter S geöffnet, also gilt $U_A = U_E(t_0)$. Die Anwendung von Spannungsfolgern ist die Digitalisierung eines Spannungspulses und die Analog – Digital-Konvertierung.

Die Schaltskizze für einen Spannungsfolger mit Verstärkung 1 sieht folgendermaßen aus:

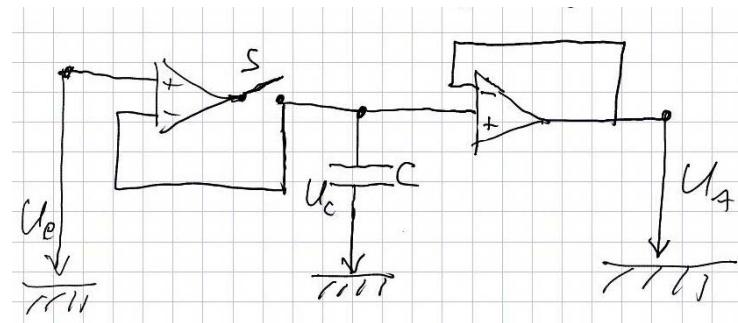


Abbildung 165: Schaltskizze Spannungsfolger

9.3.5 Komparator

Der Komparator ist eine Operationsverstärkerschaltung, bei der eine externe Referenzspannung U_{Ref} benutzt wird.

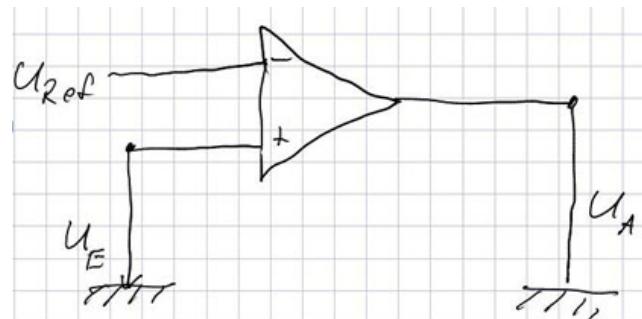


Abbildung 166: Schaltskizze Komparator

V_0 ist dabei sehr groß.

Signalverlauf:

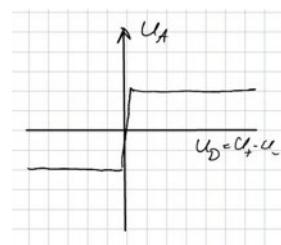


Abbildung 167: Signalverlauf

Die folgende Grafik zeigt den Zusammenhang zwischen Eingangs-, Referenz- und Ausgangsspannung:

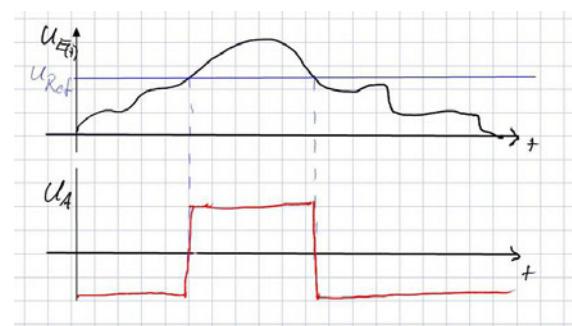


Abbildung 168: Spannungszusammenhang

9.4 Analog-Digital-Wandler (ADC)

Die Messapparatur liefert ein analoges Signal, um eine gute Informationsübertragung und Speicherung zu erhalten, muss das Signal einer Digitalwandlung unterzogen werden. Dabei wird der analoge Puls in einen ADC geleitet, der das Signal in Binärzahlen umwandelt, die einfach gespeichert werden können.

Um die Zeitstruktur des Analogpulses abzuspeichern, muss das Signal mit gegebener Taktfrequenz abgetastet werden, zum Beispiel 100 MHz → 10 ns. Der Satz an Abtastwerten (Binärzahlen) wird mit f_m bezeichnet.

9.4.1 Flash-ADC, Parallelverfahren

Die Eingangsspannung wird nun mit n verschiedenen Referenzspannungen verglichen, die eine Widerstandskette bilden. Dazu benötigt man jedoch auch n Komparatoren, was einen sehr großen Schaltungsaufwand und einen hohen Leistungsaufwand erfordert.

Die Werte der Komparatoren sind dabei ± 12 (logisch als 0,1 definiert) lassen sich leicht als Binärzahlen ausdrücken. Für einen ADC sind einige Kenngrößen wichtig: Der Quantisierungsfehler, der abhängig ist von n und der Zahl der Bits des ADCs.

$$\rightarrow O(U) = \frac{1}{2}n$$

Typische Werte sind:

- 8bit → 255 (billig)
- 12bit → 4096 (Standard)
- 26 bit (teuer)

Der Aufbau eines Flash-ADC sieht folgendermaßen aus:

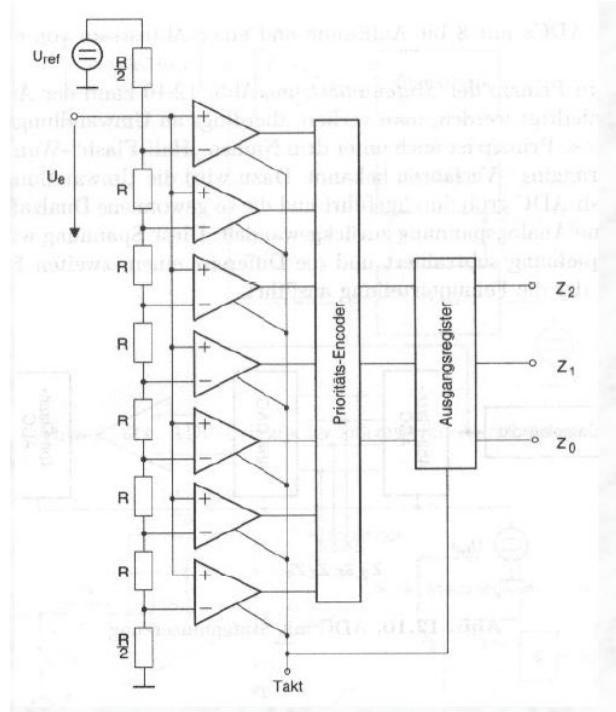


Abbildung 169: Aufbau Flash-ADC [Ref: H. Hinsch]

Variante (Zur Verringerung der Zahl der Komparatoren)

Stufenweiser Vergleich, z.B. Hintereinanderschaltung mehrerer 4-bit ADCs:

1. Schritt: grobe Umwandlung mit einem 4-Bit ADC, was einen neuen Spannungsbereich U_2 und eine Differenzspannung ($U_E - U_2$) liefert, die weiter verstärkt bzw. verglichen wird. Der Vorteil ist der geringere Schaltungsaufwand, der Nachteil jedoch der höhere Zeitaufwand.

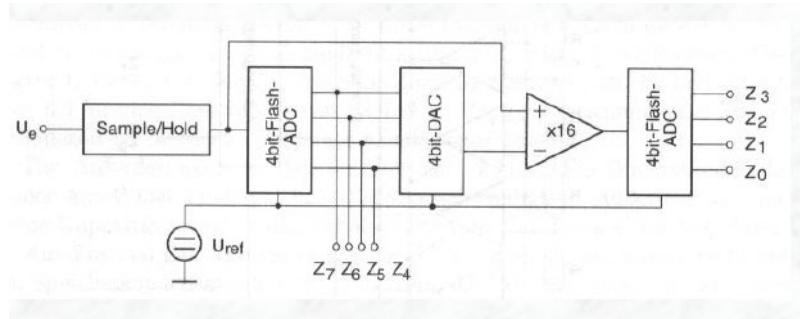


Abbildung 170: Zwei-Stufen-Digitalisierung [Ref: H. Hinsch]

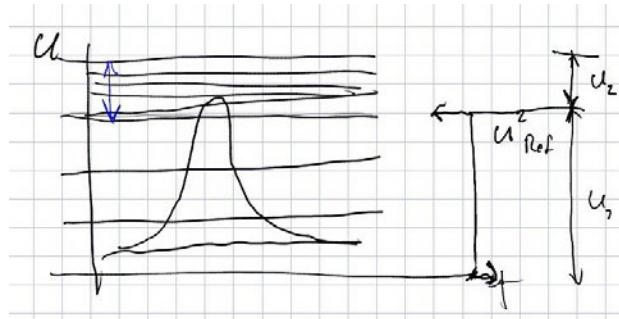


Abbildung 171: Spannungsverlauf

Prinzip der sukzessiven Annäherung

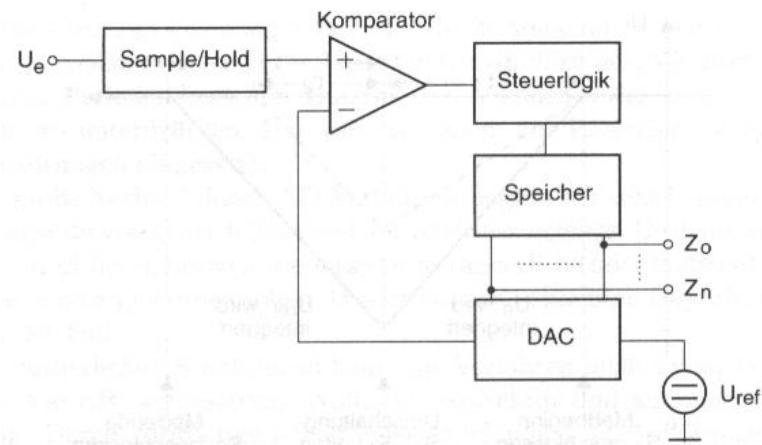


Abbildung 172: ADC-Prinzip der sukzessiven Annäherung [Ref: H. Hinsch]

Hier folgt man dem Prinzip der Intervallschachtelung mit einer Sample-and-Hold-Schaltung. Es gibt nur noch einen Komparator, der mit verschiedenen Referenzspannungen vergleicht. Man verschafft sich also eine Referenzspannung über einen Digital-Analog-Konverter (DAC), der eine Binärzahl hat und diese vergleicht.

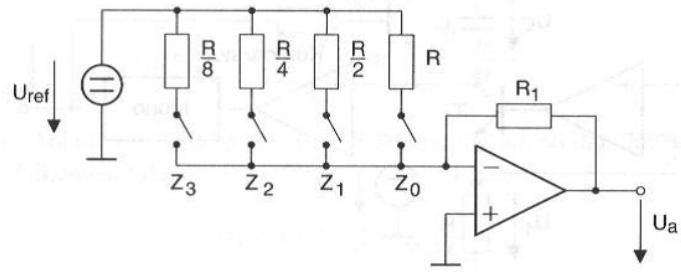


Abbildung 173: Aufbau eines DACs [Ref: H. Hinsch]

Ist das Signal größer, so wird mit der nächstgrößeren Binärzahl verglichen, ist das Signal kleiner, so wird mit der nächstkleineren Zahl verglichen.

Der Vorteil ist, dass nur noch ein Komparator benötigt wird, der Nachteil jedoch, dass man n Stufen messen muss um die genauen Werte zu erhalten, was einen großen Zeitaufwand bedeutet.

Zählverfahren

Es wird ein Kondensator für eine vorgegebene Zeit t_1 mit U_E geladen. Dann wird der Kondensator entladen und mit einer negativen Referenzspannung verglichen. Es gilt:

$$U_E = U_{Ref} \frac{n_e}{n_1} \quad (179)$$

Dabei sind die n_i die Taktzyklen (Zeit).

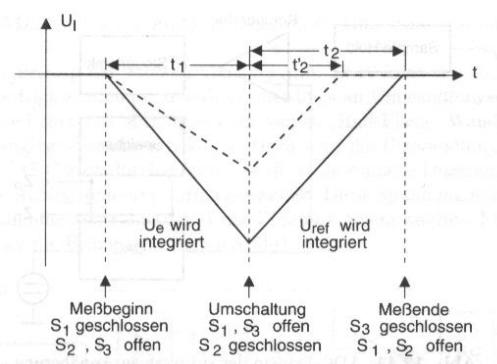


Abbildung 174: Zeitverlauf bei einem Messzyklus