

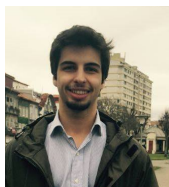
Universidade do Minho

Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

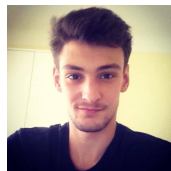
MIEI - 3º ANO - 1º SEMESTRE
UNIVERSIDADE DO MINHO

TRABALHO PRÁTICO 2

GRUPO 3



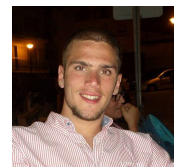
Dinis Peixoto
A75353



Ricardo Pereira
A74185



Marcelo Lima
A75210



Ricardo Certo
A75315

16 de Novembro de 2017

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Parte I	4
2.1	Formulação do problema	4
2.1.1	Variáveis de decisão	4
2.1.2	Função Objetivo	4
2.1.3	Restrições	4
2.1.4	Diagrama	5
2.2	Ficheiro de Input	5
2.3	Ficheiro de Output	7
2.4	Plano detalhado de produção	9
2.5	Validação do plano detalhado de produção	9
2.5.1	validação da conservação de fluxo das quantidades em cada nó da rede	9
2.5.2	validação das restrições de capacidade	10
2.6	Validação da solução ótima	10
2.7	Comparação com o Trabalho 1	10
2.7.1	Ficheiro de Input	10
2.7.2	Ficheiro de Output	13
2.7.3	Conclusão	14
3	Parte II	15
3.1	Formulação do problema	15
3.1.1	Variáveis de decisão adicionais	15
3.1.2	Função Objetivo	15
3.1.3	Restrições adicionais	15
3.1.4	Diagrama	16
3.2	Ficheiro de Input	16
3.3	Ficheiro de Output	19
3.4	Plano detalhado de produção	20
3.5	Validação do plano detalhado de produção	21
3.5.1	validação da conservação de fluxo das quantidades em cada nó da rede	21
3.5.2	validação das restrições de capacidade	21
3.6	Validação da solução ótima	21

4	Parte III	23
4.1	Formulação do problema	23
4.1.1	Variáveis de decisão	23
4.1.2	Função Objetivo	23
4.1.3	Restrições	23
4.1.4	Diagrama do Modelo Original	24
4.1.5	Diagrama do Modelo Transformado	25
4.2	Ficheiro de Input	25
4.3	Ficheiro de Output	27
4.4	Plano detalhado de produção do modelo transformado	29
4.5	Validação do plano detalhado de produção	29
4.5.1	validação da conservação de fluxo das quantidades em cada nó da rede	29
4.5.2	validação das restrições de capacidade	30
4.6	Validação da solução ótima	30
4.7	Plano detalhado de produção do modelo real	31
4.8	Custo do plano de produção REAL	31
5	Conclusão	32

1. *Introdução*

Este segundo relatório pretende expor a solução ao problema apresentado no âmbito da unidade curricular Modelos Determinísticos e Investigação Operacional, unidade curricular constituinte do curso Mestrado Integrado em Engenharia Informática.

O problema que nos foi proposto aborda um cenário de uma empresa responsável por produzir sumo de laranja, á base de concentrado. A produção desta empresa vai consistir em misturar a matéria prima, concentrado de sumo de laranja, água e açúcar, e encher os pacotes de sumo numa única linha de engarrafamento. O tempo de produção de um dado sumo corresponde ao tempo de engarrafamento, dado que a mistura das matérias primas é feito em tempo negligenciável. É importante fazer referência ao facto desta empresa possuir dois armazéns, o de matérias primas, onde são guardados os tambores do concentrado de sumo, e o de produtos finais, que guarda as paletes com os pacotes de sumo.

Depois de referidas todas as indicações necessárias para a realização deste trabalho, pretendemos elaborar um modelo de transportes em rede que permita determinar as quantidades a comprar, a produzir e a armazenar, em cada período, de modo a conseguirmos satisfazer os pedidos dos clientes num horizonte de planeamento de doze meses, com o objetivo de realizarmos esta tarefa de modo a obtermos o custo mínimo para a empresa.

As quantidades de concentrado vão ser expressas na forma de Unidades Equivalentes (U.E). Durante a realização deste trabalho prático utilizamos como ferramenta auxiliar o *Relax4*, tendo em conta que este nos ajuda a resolver problemas de transportes de grande dimensão, uma vez que tanto o número de variáveis de decisão e restrições utilizados eram demasiados para uma resolução manual.

2. Parte I

2.1 Formulação do problema

2.1.1 Variáveis de decisão

U.E.: Uma U.E de concentrado de laranja é o peso de concentrado necessário para produzir uma tonelada de produto final (que equivale a uma U.E de produto final).

X_{ij} : representa o fluxo no arco orientado (i,j).

2.1.2 Função Objetivo

Função que tem como objectivo minimizar o custo

$$\min : \sum_{(i,j) \in A} C_{i,j} * X_{i,j}$$

2.1.3 Restrições

- Restrição que garante a conservação do fluxo:

$$- \sum_{(i,j) \in A} X_{i,j} + \sum_{(j,i) \in A} X_{j,i} = B_j,$$

para todo,

$$j \in V$$

Esta restrição serve para garantirmos a conservação do fluxo presnete em cada nodo , ou seja vai verificar a igualdade de tudo o que entra no nodo (i,j) vai ser igual a tudo o que sai nesse nodo (i,j).

- Restrição que verifica a capacidade de cada arco:

$$0 \leq X_{i,j} \leq U_{ij}$$

para todo,

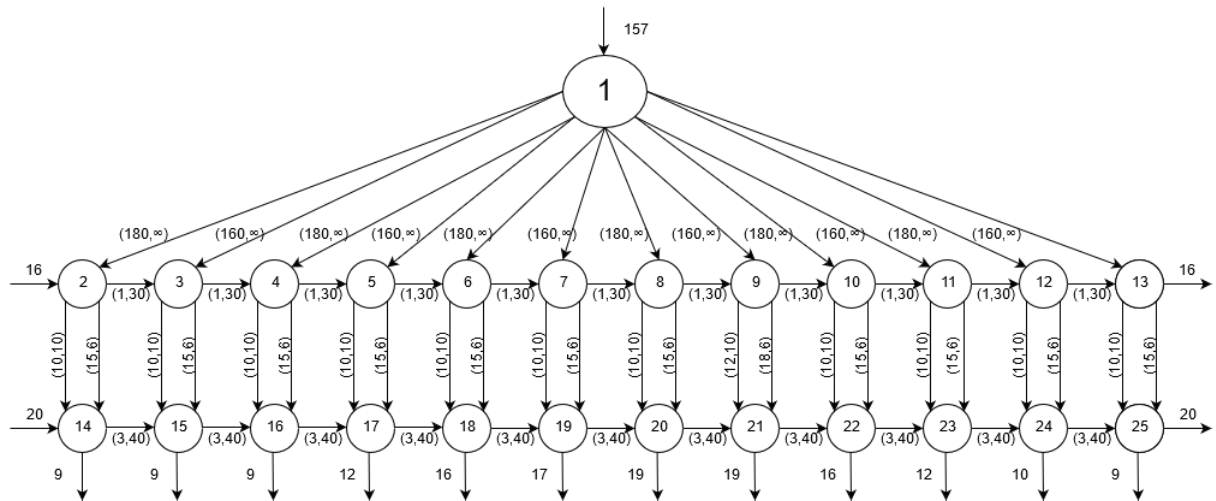
$$j \in A$$

Esta restrição serve para delimitarmos a capacidade superior e inferior de cada arco ij .

Onde:

- V corresponde ao número de vértices
- A corresponde ao número de arcos
- $X_{i,j}$ representa o fluxo no arco orientado (i,j)
- $C_{i,j}$ corresponde ao custo unitário de transporte no arco orientado (i,j) .
- $U_{i,j}$ representa a capacidade do arco oientado (i,j) .
- B_j corresponde á oferta ou procura no vértice j . Sendo que quando temos uma valor positvo vai corresponder á oferta e se for negativo vai corresponder á procura.

2.1.4 Diagrama



2.2 Ficheiro de Input

```

25
58
1 2 180 1000
1 3 160 1000
1 4 180 1000
1 5 160 1000
1 6 180 1000
1 7 160 1000
1 8 180 1000
1 9 160 1000
1 10 180 1000

```

1 11 160 1000
1 12 180 1000
1 13 160 1000
2 3 1 30
2 14 10 10
2 14 15 6
3 4 1 30
3 15 10 10
3 15 15 6
4 5 1 30
4 16 10 10
4 16 15 6
5 6 1 30
5 17 10 10
5 17 15 6
6 7 1 30
6 18 10 10
6 18 15 6
7 8 1 30
7 19 10 10
7 19 15 6
8 9 1 30
8 20 10 10
8 20 15 6
9 10 1 30
9 21 12 10
9 21 18 6
10 11 1 30
10 22 10 10
10 22 15 6
11 12 1 30
11 23 10 10
11 23 15 6
12 13 1 30
12 24 10 10
12 24 15 6
13 25 10 10
13 25 15 6
14 15 3 40
15 16 3 40
16 17 3 40
17 18 3 40
18 19 3 40
19 20 3 40
20 21 3 40
21 22 3 40
22 23 3 40

```

23 24 3 40
24 25 3 40
157
16
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
-16
11
-9
-9
-12
-16
-17
-19
-19
-16
-12
-10
-29

```

2.3 Ficheiro de Output

```

END OF READING
NUMBER OF NODES = 25, NUMBER OF ARCS = 58
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
  1 5 29.
  1 7 32.
  1 9 32.
  1 11 32.
  1 13 32.
  2 3 16.
  3 4 10.
  3 15 6.
  4 16 10.
  5 6 16.

```

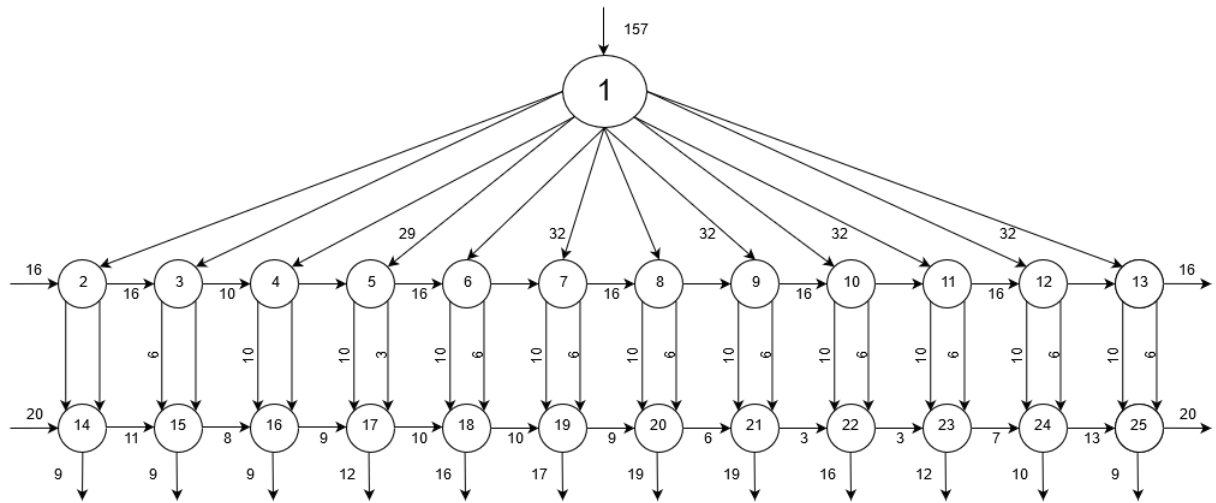


```

5 17 10.
5 17 3.
6 18 10.
6 18 6.
7 8 16.
7 19 10.
7 19 6.
8 20 10.
8 20 6.
9 10 16.
9 21 10.
9 21 6.
10 22 10.
10 22 6.
11 12 16.
11 23 10.
11 23 6.
12 24 10.
12 24 6.
13 25 10.
13 25 6.
14 15 11.
15 16 8.
16 17 9.
17 18 10.
18 19 10.
19 20 9.
20 21 6.
21 22 3.
22 23 3.
23 24 7.
24 25 13.
OPTIMAL COST = 27340.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 78
NUMBER OF ITERATIONS = 82
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 18
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 6
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 14
*****

```

2.4 Plano detalhado de produção



2.5 Validação do plano detalhado de produção

2.5.1 validação da conservação de fluxo das quantidades em cada nó da rede

VALIDAÇÃO DO MODELO PELAS RESTRIÇÕES:

NÓ 1: $157 = 29 + 32 + 32 + 32 + 32 \Leftrightarrow 157 = 157$ VERDADEIRO

NÓ 2: $16 + 0 = 16 + 0 + 0 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 3: $0 + 16 = 10 + 6 + 0 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 4: $0 + 10 = 0 + 10 + 0 \Leftrightarrow 10 = 10$ VERDADEIRO

NÓ 5: $29 + 0 = 16 + 10 + 3 \Leftrightarrow 29 = 29$ VERDADEIRO

NÓ 6: $0 + 16 = 10 + 6 + 0 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 7: $32 + 0 = 10 + 6 + 16 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO

NÓ 8: $0 + 16 = 10 + 6 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 9: $32 + 0 = 16 + 10 + 6 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO

NÓ 10: $0 + 16 = 0 + 10 + 6 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 11: $32 + 0 = 16 + 10 + 6 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO

NÓ 12: $0 + 16 = 0 + 10 + 6 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 13: $32 + 0 = 16 + 10 + 6 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO

NÓ 14: $0 + 0 + 20 = 11 + 9 \Leftrightarrow 20 = 20$ VERDADEIRO

NÓ 15: $6 + 0 + 11 = 8 + 9 \Leftrightarrow 17 = 17$ VERDADEIRO

NÓ 16: $10 + 0 + 8 = 9 + 9 \Leftrightarrow 18 = 18$ VERDADEIRO

NÓ 17: $10 + 3 + 9 = 10 + 12 \Leftrightarrow 22 = 22$ VERDADEIRO

NÓ 18: $10 + 6 + 10 = 10 + 16 \Leftrightarrow 26 = 26$ VERDADEIRO

NÓ 19: $10 + 6 + 10 = 9 + 17 \Leftrightarrow 26 = 26$ VERDADEIRO

NÓ 20: $10 + 6 + 9 = 6 + 19 \Leftrightarrow 25 = 25$ VERDADEIRO

NÓ 21: $10 + 6 + 6 = 3 + 19 \Leftrightarrow 22 = 22$ VERDADEIRO

NÓ 22: $10 + 6 + 3 = 3 + 16 \Leftrightarrow 19 = 19$ VERDADEIRO

NÓ 23: $10 + 6 + 3 = 7 + 12 \Leftrightarrow 19 = 19$ VERDADEIRO

NÓ 24: $10 + 6 + 7 = 13 + 10 \Leftrightarrow 23 = 23$ VERDADEIRO

NÓ 25: $10 + 6 + 13 = 20 + 9 \Leftrightarrow 29 = 29$ VERDADEIRO

2.5.2 validação das restrições de capacidade

Pela análise das figuras apresentadas em 2.1.4 e 2.4, verificamos, facilmente, que as restrições de capacidade foram respeitadas.

2.6 Validação da solução ótima

CUSTOS DE COMPRA DE CONCENTRADO:

$$160 * (29 + 32 + 32 + 32 + 32) + 180 * (0) = 25120$$

CUSTOS DE PRODUÇÃO:

$$\begin{aligned} &10*6 + 10*10 + 10*10 + 15*3 + 10*10 + 15*6 + 10*10 + \\ &15*6 + 10*10 + 15*6 + 12*10 + 18*6 + 10*10 + 15*6 + \\ &10*10 + 15*5 + 10*10 + 15*6 + 10*10 + 15*6 = 1863 \end{aligned}$$

CUSTO DE ARMAZENAMENTO CONCENTRADO:

$$16*1 + 10*1 + 16*1 + 16*1 + 16*1 + 16*1 = 90$$

CUSTO DE ARMAZENAMENTO PRODUTO FINAL:

$$3*(11 + 8 + 9 + 10 + 10 + 9 + 6 + 3 + 3 + 7 + 13) = 267$$

SOMATÓRIO DOS CUSTOS:

$$25120 + 1863 + 90 + 267 = 27340$$

Como podemos verificar, o custo calculado é igual ao resultado da solução ótima.

2.7 Comparação com o Trabalho 1

2.7.1 Ficheiro de Input

/* Função Objetivo */

min:

$$\begin{aligned} &10 \text{ p11} + 3 \text{ a11} + 1 \text{ b11} + 180 \text{ c11} + \\ &10 \text{ p12} + 3 \text{ a12} + 1 \text{ b12} + 160 \text{ c12} + \\ &10 \text{ p13} + 3 \text{ a13} + 1 \text{ b13} + 180 \text{ c13} + \\ &10 \text{ p14} + 3 \text{ a14} + 1 \text{ b14} + 160 \text{ c14} + \\ &10 \text{ p15} + 3 \text{ a15} + 1 \text{ b15} + 180 \text{ c15} + \\ &10 \text{ p16} + 3 \text{ a16} + 1 \text{ b16} + 160 \text{ c16} + \\ &10 \text{ p17} + 3 \text{ a17} + 1 \text{ b17} + 180 \text{ c17} + \\ &12 \text{ p18} + 3 \text{ a18} + 1 \text{ b18} + 160 \text{ c18} + \\ &10 \text{ p19} + 3 \text{ a19} + 1 \text{ b19} + 180 \text{ c19} + \end{aligned}$$

```

10 p110 + 3 a110 + 1 b110 + 160 c110 +
10 p111 + 3 a111 + 1 b111 + 180 c111 +
10 p112 + 160 c112 +
15 e11 + 15 e12 + 15 e13 + 15 e14 +
15 e15 + 15 e16 + 15 e17 + 18 e18 +
15 e19 + 15 e110 + 15 e111 + 15 e112;

```

```

/* RESTRIÇÕES */

```

```

/* Restringir a produção para o armazém de produto final */

```

```

p11 + e11 + 20 - a11 = 9;
p12 + e12 + a11 - a12 = 9;
p13 + e13 + a12 - a13 = 9;
p14 + e14 + a13 - a14 = 12;
p15 + e15 + a14 - a15 = 16;
p16 + e16 + a15 - a16 = 17;
p17 + e17 + a16 - a17 = 19;
p18 + e18 + a17 - a18 = 19;
p19 + e19 + a18 - a19 = 16;
p110 + e110 + a19 - a110 = 12;
p111 + e111 + a110 - a111 = 10;
p112 + e112 + a111 - a112 = 9;

```

```

/* Restringir a compra para o armazém de matéria-prima */

```

```

c11 + 16 - b11 = p11 + e11;
c12 + b11 - b12 = p12 + e12;
c13 + b12 - b13 = p13 + e13;
c14 + b13 - b14 = p14 + e14;
c15 + b14 - b15 = p15 + e15;
c16 + b15 - b16 = p16 + e16;
c17 + b16 - b17 = p17 + e17;
c18 + b17 - b18 = p18 + e18;
c19 + b18 - b19 = p19 + e19;
c110 + b19 - b110 = p110 + e110;
c111 + b110 - b111 = p111 + e111;
c112 + b111 - b112 = p112 + e112;

```

```

/* Restringir a produção no mês */

```

```

p11 <= 10;
p12 <= 10;
p13 <= 10;
p14 <= 10;
p15 <= 10;
p16 <= 10;

```

```
p17  <= 10;  
p18  <= 10;  
p19  <= 10;  
p110 <= 10;  
p111 <= 10;  
p112 <= 10;
```

```
/* Restringir a produção extra no mês */
```

```
e11  <= 6;  
e12  <= 6;  
e13  <= 6;  
e14  <= 6;  
e15  <= 6;  
e16  <= 6;  
e17  <= 6;  
e18  <= 6;  
e19  <= 6;  
e110 <= 6;  
e111 <= 6;  
e112 <= 6;
```

```
/* Restringir o armazenamento de produto final no mês */
```

```
a11 <= 40;  
a12 <= 40;  
a13 <= 40;  
a14 <= 40;  
a15 <= 40;  
a16 <= 40;  
a17 <= 40;  
a18 <= 40;  
a19 <= 40;  
a110 <= 40;  
a111 <= 40;  
a112 <= 40;
```

```
/* Restringir o armazenamento de matéria-prima no mês */
```

```
b11 <= 30;  
b12 <= 30;  
b13 <= 30;  
b14 <= 30;  
b15 <= 30;  
b16 <= 30;  
b17 <= 30;  
b18 <= 30;
```

```

b19 <= 30;
b110 <= 30;
b111 <= 30;
b112 <= 30;

/* Restringir armazenamento final */

a112 = 20;

b112 = 16;

```

2.7.2 Ficheiro de Output

Value of objective function: 27340.00000000

Actual values of the variables:

p11	0
a11	11
b11	16
c11	0
p12	6
a12	8
b12	10
c12	0
p13	10
a13	9
b13	0
c13	0
p14	10
a14	10
b14	16
c14	29
p15	10
a15	10
b15	0
c15	0
p16	10
a16	9
b16	16
c16	32
p17	10
a17	6
b17	0
c17	0
p18	10
a18	3
b18	16

c18	32
p19	10
a19	3
b19	0
c19	0
p110	10
a110	7
b110	16
c110	32
p111	10
a111	13
b111	0
c111	0
p112	10
c112	32
e11	0
e12	0
e13	0
e14	3
e15	6
e16	6
e17	6
e18	6
e19	6
e110	6
e111	6
e112	6
a112	20
b112	16

2.7.3 Conclusão

O valor da solução óptima obtido num modelo modificado do Trabalho 1, em *LPSolve* é de 27430, o mesmo que é obtido no modelo de transportes em rede, em *Relax4*. Desta forma podemos concluir que com dois algoritmos diferentes, obtemos a mesma solução para o problema em questão.

3. Parte II

3.1 Formulação do problema

3.1.1 Variáveis de decisão adicionais

U.E.: Uma U.E de concentrado de laranja é o peso de concentrado necessário para produzir uma tonelada de produto final (que equivale a uma U.E de produto final).

$X_{i,j}$: representa o fluxo no arco orientado (i,j).

Para resolver o problema do atraso, adicionou-se dois arcos, em cada vértice onde sai a procura, excepto o primeiro (vértice 14). O sentido dos arcos, é do mês actual para o mês anterior. Um dos arcos corresponde ao atraso de 1 U.E. com custo de 1 U.M., e o outro arco com o mesmo sentido, corresponde as restantes U.E., com um custo de 10 U.M. por cada unidade. Desta forma garantimos que é possível aceitar atrasos na entrega do produto, pois caso um mês não produza o suficiente para completar a procura, o mês seguinte pode produzir a quantidade em falta, completando a procura. As variáveis de decisão adicionais correspondem ao fluxo existente nestes novos arcos.

3.1.2 Função Objectivo

Função que tem como objectivo minimizar o custo

$$\min : \sum_{(i,j) \in A} C_{i,j} * X_{i,j}$$

3.1.3 Restrições adicionais

Restrição que garante a conservação do fluxo:

$$- \sum_{(i,j) \in A} X_{i,j} + \sum_{(j,i) \in A} X_{j,i} = B_j,$$

para todo,

$$j \in V$$

Com esta restrição garantimos a conservação de fluxo, isto é, a quantidade que sai no vértice j (somatório dos arcos com sentido de j para i) menos a quantidade que

entre no vértice (somatório dos arcos com sentido de i para j) é igual ao valor de B_j (vértice j).

Restrição que verifica a capacidade de cada arco:

$$0 \leq X_{i,j} \leq U_{i,j}$$

para todo,

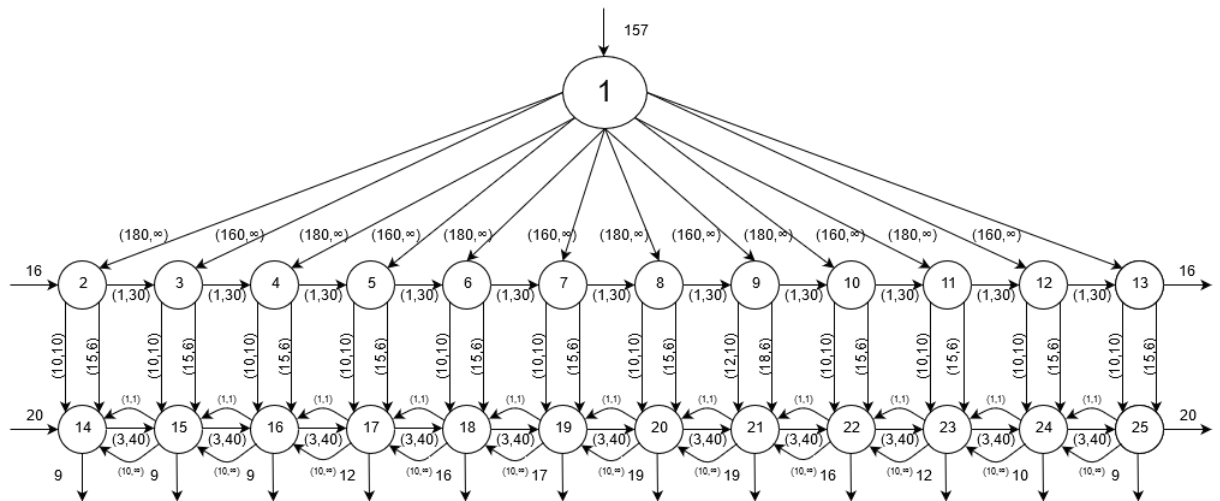
$$j \in A$$

Com esta restrição garantimos que a capacidade em cada arco, está limitada pelo valor $U_{i,j}$ (capacidade máxima), isto é, o fluxo num arco ($X_{i,j}$) é inferior ou igual a capacidade máxima desse arco ($U_{i,j}$).

Onde:

- V corresponde ao número de vértices.
- A corresponde ao número de arcos.
- $X_{i,j}$ representa o fluxo no arco orientado (i,j).
- $C_{i,j}$ corresponde ao custo unitário de transporte no arco orientado (i,j).
- $U_{i,j}$ representa a capacidade máxima do arco orientado (i,j).
- B_j representa a oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) para o vértice j. Caso o B_j seja 0, significa que a quantidade que entre é igual a que sai.

3.1.4 Diagrama



3.2 Ficheiro de Input

25

80

1 2 180 1000
1 3 160 1000
1 4 180 1000
1 5 160 1000
1 6 180 1000
1 7 160 1000
1 8 180 1000
1 9 160 1000
1 10 180 1000
1 11 160 1000
1 12 180 1000
1 13 160 1000
2 3 1 30
2 14 10 10
2 14 15 6
3 4 1 30
3 15 10 10
3 15 15 6
4 5 1 30
4 16 10 10
4 16 15 6
5 6 1 30
5 17 10 10
5 17 15 6
6 7 1 30
6 18 10 10
6 18 15 6
7 8 1 30
7 19 10 10
7 19 15 6
8 9 1 30
8 20 10 10
8 20 15 6
9 10 1 30
9 21 12 10
9 21 18 6
10 11 1 30
10 22 10 10
10 22 15 6
11 12 1 30
11 23 10 10
11 23 15 6
12 13 1 30
12 24 10 10
12 24 15 6
13 25 10 10

13 25 15 6
14 15 3 40
15 16 3 40
15 14 1 1
15 14 10 1000
16 17 3 40
16 15 1 1
16 15 10 1000
17 18 3 40
17 16 1 1
17 16 10 1000
18 19 3 40
18 17 1 1
18 17 10 1000
19 20 3 40
19 18 1 1
19 18 10 1000
20 21 3 40
20 19 1 1
20 19 10 1000
21 22 3 40
21 20 1 1
21 20 10 1000
22 23 3 40
22 21 1 1
22 21 10 1000
23 24 3 40
23 22 1 1
23 22 10 1000
24 25 3 40
24 23 1 1
24 23 10 1000
25 24 1 1
25 24 10 1000
157
16
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
-16

11
-9
-9
-12
-16
-17
-19
-19
-16
-12
-10
-29

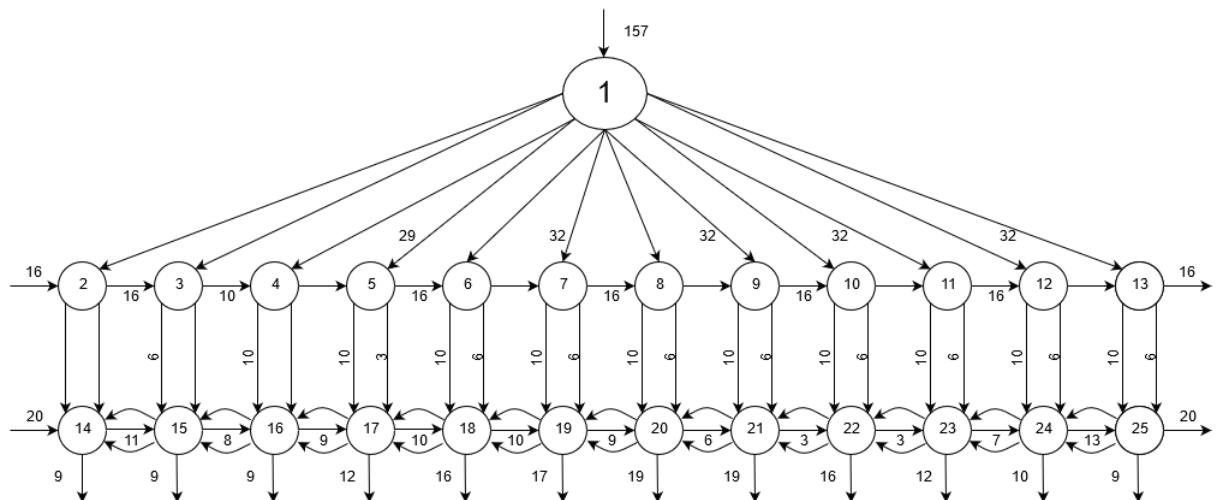
3.3 Ficheiro de Output

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 25, NUMBER OF ARCS = 80
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
 1 5 29.
 1 7 32.
 1 9 32.
 1 11 32.
 1 13 32.
 2 3 16.
 3 4 10.
 3 15 6.
 4 16 10.
 5 6 16.
 5 17 10.
 5 17 3.
 6 18 10.
 6 18 6.
 7 8 16.
 7 19 10.
 7 19 6.
 8 20 10.
 8 20 6.
 9 10 16.
 9 21 10.
 9 21 6.
10 22 10.
10 22 6.
11 12 16.
```

11 23 10.
 11 23 6.
 12 24 10.
 12 24 6.
 13 25 10.
 13 25 6.
 14 15 11.
 15 16 8.
 16 17 9.
 17 18 10.
 18 19 10.
 19 20 9.
 20 21 6.
 21 22 3.
 22 23 3.
 23 24 7.
 24 25 13.
 OPTIMAL COST = 27340.
 NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 85
 NUMBER OF ITERATIONS = 96
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 28
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 12
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 18

3.4 Plano detalhado de produção

O plano detalhado de produção nesta situação é o mesmo que na situação da **Parte I**, uma vez que nenhum dos arcos de atraso é utilizado.



3.5 Validação do plano detalhado de produção

3.5.1 validação da conservação de fluxo das quantidades em cada nó da rede

VALIDAÇÃO DO MODELO PELAS RESTRIÇÕES:

NÓ 1: $157 = 29 + 32 + 32 + 32 + 32 \Leftrightarrow 157 = 157$ VERDADEIRO

NÓ 2: $16 + 0 = 16 + 0 + 0 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 3: $0 + 16 = 10 + 6 + 0 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 4: $0 + 10 = 0 + 10 + 0 \Leftrightarrow 10 = 10$ VERDADEIRO

NÓ 5: $29 + 0 = 16 + 10 + 3 \Leftrightarrow 29 = 29$ VERDADEIRO

NÓ 6: $0 + 16 = 10 + 6 + 0 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 7: $32 + 0 = 10 + 6 + 16 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO

NÓ 8: $0 + 16 = 10 + 6 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 9: $32 + 0 = 16 + 10 + 6 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO

NÓ 10: $0 + 16 = 0 + 10 + 6 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 11: $32 + 0 = 16 + 10 + 6 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO

NÓ 12: $0 + 16 = 0 + 10 + 6 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO

NÓ 13: $32 + 0 = 16 + 10 + 6 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO

NÓ 14: $0 + 0 + 20 = 11 + 9 \Leftrightarrow 20 = 20$ VERDADEIRO

NÓ 15: $6 + 0 + 11 = 8 + 9 \Leftrightarrow 17 = 17$ VERDADEIRO

NÓ 16: $10 + 0 + 8 = 9 + 9 \Leftrightarrow 18 = 18$ VERDADEIRO

NÓ 17: $10 + 3 + 9 = 10 + 12 \Leftrightarrow 22 = 22$ VERDADEIRO

NÓ 18: $10 + 6 + 10 = 10 + 16 \Leftrightarrow 26 = 26$ VERDADEIRO

NÓ 19: $10 + 6 + 10 = 9 + 17 \Leftrightarrow 26 = 26$ VERDADEIRO

NÓ 20: $10 + 6 + 9 = 6 + 19 \Leftrightarrow 25 = 25$ VERDADEIRO

NÓ 21: $10 + 6 + 6 = 3 + 19 \Leftrightarrow 22 = 22$ VERDADEIRO

NÓ 22: $10 + 6 + 3 = 3 + 16 \Leftrightarrow 19 = 19$ VERDADEIRO

NÓ 23: $10 + 6 + 3 = 7 + 12 \Leftrightarrow 19 = 19$ VERDADEIRO

NÓ 24: $10 + 6 + 7 = 13 + 10 \Leftrightarrow 23 = 23$ VERDADEIRO

NÓ 25: $10 + 6 + 13 = 20 + 9 \Leftrightarrow 29 = 29$ VERDADEIRO

3.5.2 validação das restrições de capacidade

Pela análise das figuras apresentadas em 3.1.4 e 3.4, verificamos que as restrições de capacidade foram respeitadas.

3.6 Validação da solução ótima

CUSTOS DE COMPRA DE CONCENTRADO:

$160 * (29 + 32 + 32 + 32 + 32) + 180 * (0) = 25120$

CUSTOS DE PRODUÇÃO:

$10*6 + 10*10 + 10*10 + 15*3 + 10*10 + 15*6 + 10*10 +$
 $15*6 + 10*10 + 15*6 + 12*10 + 18*6 + 10*10 + 15*6 +$
 $10*10 + 15*5 + 10*10 + 15*6 + 10*10 + 15*6 = 1863$

CUSTO DE ARMAZENAMENTO CONCENTRADO:

$$16*1 + 10*1 + 16*1 + 16*1 + 16*1 + 16*1 = 90$$

CUSTO DE ARMAZENAMENTO PRODUTO FINAL:

$$3*(11 + 8 + 9 + 10 + 10 + 9 + 6 + 3 + 3 + 7 + 13) = 267$$

SOMATÓRIO DOS CUSTOS:

$$25120 + 1863 + 90 + 267 = 27340$$

Como podemos verificar, o custo calculado é igual ao resultado da solução ótima.

4. Parte III

4.1 Formulação do problema

4.1.1 Variáveis de decisão

U.E.: Uma U.E de concentrado de laranja é o peso de concentrado necessário para produzir uma tonelada de produto final (que equivale a uma U.E de produto final).

$X_{i,j}$: representa o fluxo no arco orientado (i,j).

4.1.2 Função Objetivo

Função que tem como objectivo minimizar o custo.

- Modelo Real

$$\min : \sum_{(i,j) \in A} C_{i,j} * X_{i,j}$$

- Modelo Transformado

$$\min : \sum_{(i,j) \in A} C_{i,j} * X'_{i,j}$$

4.1.3 Restrições

- Restrição que garante a conservação do fluxo:

$$- \sum_{(i,j) \in A} X_{i,j} + \sum_{(j,i) \in A} X_{j,i} = B_j,$$

para todo,

$$j \in V$$

Com esta restrição garantimos a conservação de fluxo, isto é, a quantidade que sai no vértice j (somatório dos arcos com sentido de j para i) menos a quantidade que entre no vértice (somatório dos arcos com sentido de i para j) é igual ao valor de B_j (vértice j).

- Restrições que verificam a capacidade de cada arco:

$$L_{i,j} \leq X_{i,j} \leq U_{i,j} , \text{ para qualquer, } (i,j) \in A \equiv$$

$$0 \leq X_{i,j} - L_{i,j} \leq U_{i,j} , \text{ para qualquer, } (i,j) \in A \equiv$$

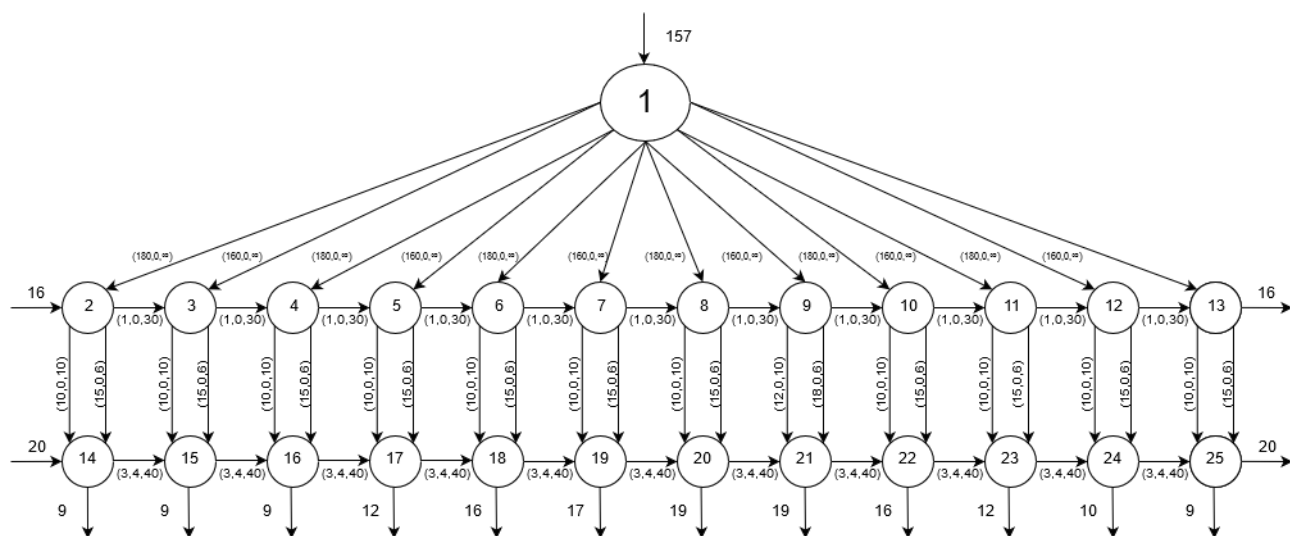
$$0 \leq X'_{i,j} \leq U_{i,j} , \text{ para qualquer, } (i,j) \in A$$

Todas estas três restrições tem como função garantir que a capacidade máxima não seja excedida. Os valores da oferta (ou procura) nos vértices i e j devem ser reajustados: a procura do vértice i é aumentada de $L_{i,j}$ unidades e a oferta do vértice j é aumentada de $L_{i,j}$ unidades. Esta transformação é equivalente a efectuar uma mudança de variável $X'_{i,j} = X_{i,j} - L_{i,j}$ no modelo de programação linear apresentado, ficando com um modelo transformado.

Onde:

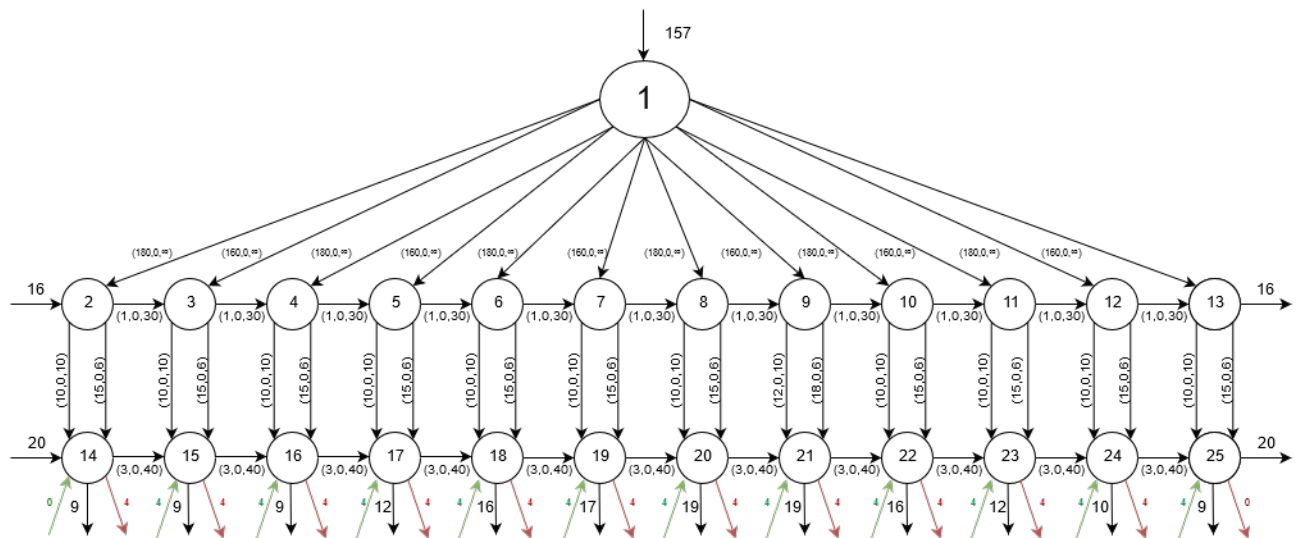
- V corresponde ao número de vértices.
- A corresponde ao número de arcos.
- $X_{i,j}$ representa o fluxo no arco orientado (i,j) .
- $C_{i,j}$ corresponde ao custo unitário de transporte no arco orientado (i,j) .
- $U_{i,j}$ representa a capacidade máxima do arco orientado (i,j) .
- B_j representa a oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) para o vértice j . Caso o B_j seja 0, significa que a quantidade que entre é igual a que sai.
- $L_{i,j}$ corresponde ao limite inferior do arco orientado (i,j) .
- $X'_{i,j}$ corresponde a uma mudança de variável de $X_{i,j}$ para $L_{i,j}$.

4.1.4 Diagrama do Modelo Original



Tal como é dito no enunciado, agora passa a haver um inventário de segurança de 4 unidades, isto é, passa a ser obrigatório o armazenamento de 4 unidades de produto final ao fim de cada mês. Para isso basta adicionar a cada arco relativo ao armazenamento de produto final um limite inferior, que neste caso seria de 4.

4.1.5 Diagrama do Modelo Transformado



Visto que o Relax4 não aceita limites inferiores nos arcos, é necessário fazer um modelo transformado que torne possível o seu uso. A maneira mais simples de criar este novo modelo é adicionar a cada vértice de produção final duas arestas com sentidos opostos e com valores fixos 4, exceto a primeira e última aresta (primeiro e último mês). Ao mesmo tempo, é necessário diminuir o limite superior em 4 unidades das arestas de armazenamento, uma vez que já estamos a supor que existem sempre 4 unidades no inventário.

4.2 Ficheiro de Input

```

25
58
1 2 180 1000
1 3 160 1000
1 4 180 1000
1 5 160 1000
1 6 180 1000
1 7 160 1000
1 8 180 1000
1 9 160 1000
1 10 180 1000
1 11 160 1000
1 12 180 1000

```

1 13 160 1000
2 3 1 30
2 14 10 10
2 14 15 6
3 4 1 30
3 15 10 10
3 15 15 6
4 5 1 30
4 16 10 10
4 16 15 6
5 6 1 30
5 17 10 10
5 17 15 6
6 7 1 30
6 18 10 10
6 18 15 6
7 8 1 30
7 19 10 10
7 19 15 6
8 9 1 30
8 20 10 10
8 20 15 6
9 10 1 30
9 21 12 10
9 21 18 6
10 11 1 30
10 22 10 10
10 22 15 6
11 12 1 30
11 23 10 10
11 23 15 6
12 13 1 30
12 24 10 10
12 24 15 6
13 25 10 10
13 25 15 6
14 15 3 36
15 16 3 36
16 17 3 36
17 18 3 36
18 19 3 36
19 20 3 36
20 21 3 36
21 22 3 36
22 23 3 36
23 24 3 36
24 25 3 36

157
 16
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 -16
 7
 -9
 -9
 -12
 -16
 -17
 -19
 -19
 -16
 -12
 -10
 -25

4.3 Ficheiro de Output

```

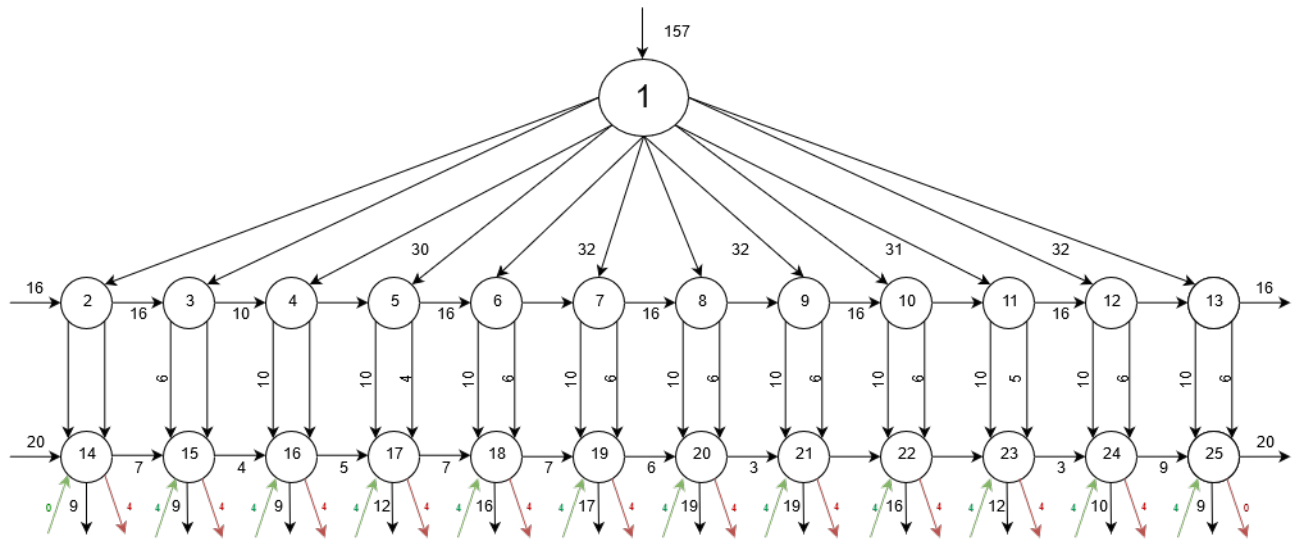
END OF READING
NUMBER OF NODES = 25, NUMBER OF ARCS = 58
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
  1 5  30.
  1 7  32.
  1 9  32.
  1 11 31.
  1 13 32.
  2 3  16.
  3 4  10.
  3 15 6.
  4 16 10.
  5 6  16.
  5 17 10.
  5 17 4.
  
```

```

6 18 10.
6 18 6.
7 8 16.
7 19 10.
7 19 6.
8 20 10.
8 20 6.
9 10 16.
9 21 10.
9 21 6.
10 22 10.
10 22 6.
11 12 16.
11 23 10.
11 23 5.
12 24 10.
12 24 6.
13 25 10.
13 25 6.
14 15 7.
15 16 4.
16 17 5.
17 18 7.
18 19 7.
19 20 6.
20 21 3.
23 24 3.
24 25 9.
OPTIMAL COST = 27226.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 66
NUMBER OF ITERATIONS = 132
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 38
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 17
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 23
*****

```

4.4 Plano detalhado de produção do modelo transformado



4.5 Validação do plano detalhado de produção

4.5.1 validação da conservação de fluxo das quantidades em cada nó da rede

VALIDAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DO FLUXO

NÓ 1: $157 = 0 + 0 + 0 + 30 + 0 + 32 + 0 + 32 + 0 + 31 + 0 + 32 \Leftrightarrow 157 = 157$ VERDADEIRO
 NÓ 2: $16 + 0 = 16 + 0 + 0 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO
 NÓ 3: $0 + 16 = 10 + 6 + 0 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO
 NÓ 4: $0 + 10 = 0 + 10 + 0 \Leftrightarrow 10 = 10$ VERDADEIRO
 NÓ 5: $30 + 0 = 16 + 10 + 4 \Leftrightarrow 29 = 29$ VERDADEIRO
 NÓ 6: $0 + 16 = 0 + 10 + 6 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO
 NÓ 7: $32 + 0 = 16 + 10 + 6 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO
 NÓ 8: $0 + 16 = 0 + 10 + 6 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO
 NÓ 9: $32 + 0 = 16 + 10 + 6 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO
 NÓ 10: $0 + 16 = 0 + 10 + 6 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO
 NÓ 11: $31 + 0 = 16 + 10 + 5 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO
 NÓ 12: $0 + 16 = 0 + 10 + 6 \Leftrightarrow 16 = 16$ VERDADEIRO
 NÓ 13: $32 + 0 = 16 + 10 + 6 \Leftrightarrow 32 = 32$ VERDADEIRO
 NÓ 14: $0 + 0 + 20 + 0 = 7 + 4 + 9 \Leftrightarrow 20 = 20$ VERDADEIRO
 NÓ 15: $6 + 0 + 7 + 4 = 4 + 4 + 9 \Leftrightarrow 17 = 17$ VERDADEIRO
 NÓ 16: $10 + 0 + 4 + 4 = 5 + 4 + 9 \Leftrightarrow 18 = 18$ VERDADEIRO
 NÓ 17: $10 + 4 + 5 + 4 = 7 + 4 + 12 \Leftrightarrow 23 = 23$ VERDADEIRO
 NÓ 18: $10 + 6 + 7 + 4 = 7 + 4 + 16 \Leftrightarrow 27 = 27$ VERDADEIRO

NÓ 19: $10 + 6 + 7 + 4 = 6 + 4 + 17 \Leftrightarrow 27 = 27$ VERDADEIRO
 NÓ 20: $10 + 6 + 6 + 4 = 3 + 4 + 19 \Leftrightarrow 26 = 26$ VERDADEIRO
 NÓ 21: $10 + 6 + 3 + 4 = 0 + 4 + 19 \Leftrightarrow 23 = 23$ VERDADEIRO
 NÓ 22: $10 + 6 + 4 = 0 + 4 + 16 \Leftrightarrow 20 = 20$ VERDADEIRO
 NÓ 23: $10 + 5 + 0 + 4 = 3 + 4 + 12 \Leftrightarrow 19 = 19$ VERDADEIRO
 NÓ 24: $10 + 6 + 3 + 4 = 9 + 4 + 10 \Leftrightarrow 23 = 23$ VERDADEIRO
 NÓ 25: $10 + 6 + 9 + 4 = 20 + 9 \Leftrightarrow 29 = 29$ VERDADEIRO

4.5.2 validação das restrições de capacidade

Pela análise das figuras apresentadas em 4.1.4, 4.1.5 e 4.4, verificamos, que as restrições de capacidade foram respeitadas.

4.6 Validação da solução ótima

CUSTOS DE COMPRA DE CONCENTRADO:

$$160 * (30 + 32 + 32 + 31 + 32) + 160 * (0) = 25120$$

CUSTOS DE PRODUÇÃO:

$$\begin{aligned}
 &10*6 + 10*10 + 10*10 + 15*4 + 10*10 + 15*6 + 10*10 + \\
 &15*6 + 10*10 + 15*6 + 12*10 + 18*6 + 10*10 + 15*6 + \\
 &10*10 + 15*5 + 10*10 + 15*6 + 10*10 + 15*6 = 1863
 \end{aligned}$$

CUSTO DE ARMAZENAMENTO CONCENTRADO:

$$16*1 + 10*1 + 16*1 + 16*1 + 16*1 + 16*1 = 90$$

CUSTO DE ARMAZENAMENTO PRODUTO FINAL:

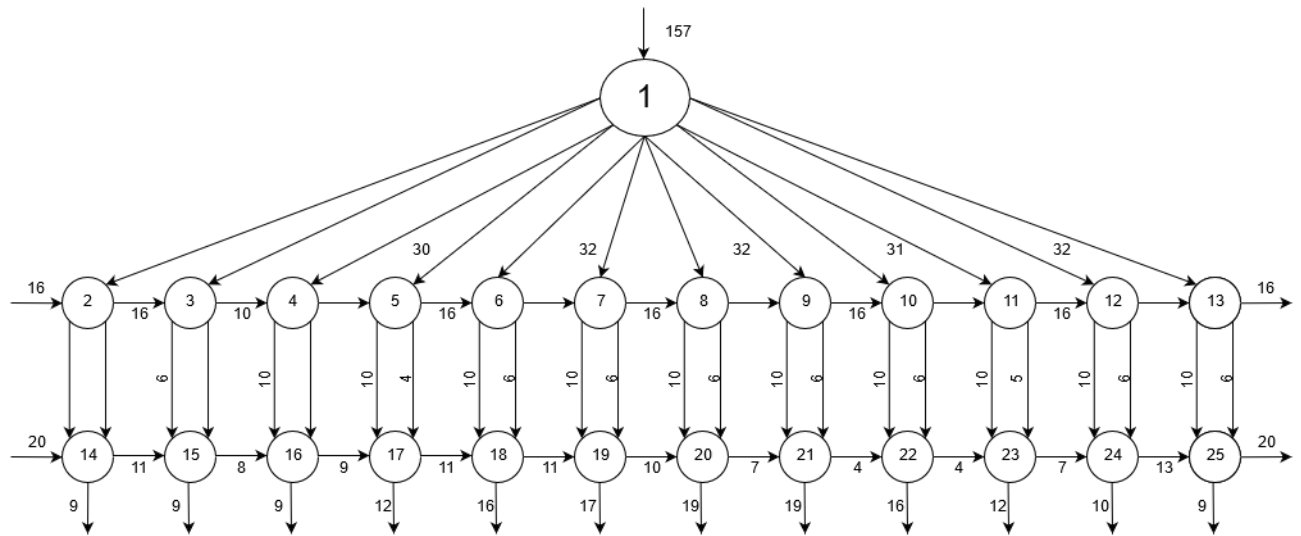
$$3*(7 + 4 + 5 + 7 + 7 + 6 + 3 + 3 + 9) = 153$$

SOMATÓRIO DOS CUSTOS:

$$25120 + 1863 + 90 + 153 = 27266$$

Como podemos verificar, o custo calculado é igual ao resultado da solução ótima.

4.7 Plano detalhado de produção do modelo real



4.8 Custo do plano de produção REAL

Para calcular o custo do plano de produção real, basta adicionar os custos do armazenamento de 4 unidades de produto final em cada mês ao custo total do modelo transformado.

$$\text{CUSTO TOTAL} = 3 \cdot (11 \cdot 4) + 27226 = 132 + 27226 = 27358$$

Como podemos verificar, o valor da solução obtido é superior ao valor da solução obtido na questão 1. Isto acontece porque na versão sem inventário de segurança, o fluxo nos arcos (21,22) e (22,23) é inferior a 4 U.E. Quando passamos para a versão com inventário de segurança, ao limitar inferiormente os arcos em 4 U.E., a solução anterior torna-se impossível de obter. Logo obtemos uma solução com custos maiores.

5. *Conclusão*

Este trabalho tinha como principal objetivo aplicar os conceitos associados aos transportes em redes com limite superior e inferior, que foram lecionados durante as aulas.

À medida que avançamos entre as várias partes do trabalho tivemos de ir alterando os diagramas de transportes em redes de modo a conseguirmos dar resposta aos novos cenários que iam surgindo, mantendo de certa forma grande parte do cenário anterior. Entre os 3 cenários apresentados, foi no cenário I que obtivemos o melhor resultado (menor custo).

Verificamos assim que para o nosso caso a possibilidade de atrasar a entrega para o mês seguinte em nada vai influenciar os resultados, visto que não vai haver alteração da solução ótima. Já a introdução do inventário de segurança (Parte 3) vai aumentar ligeiramente o custo associado à solução ótima, uma vez que estamos a impor um limite mínimo no armazenamento do produto final.

Concluindo, podemos afirmar que este trabalho foi bastante enriquecedor no que toca ao aprofundamento dos conhecimentos e melhor assimilação de alguns temas abordados até ao momento na U.C., permitindo-nos relacionar vários conceitos e estratégias de resolução de problemas. Para além disso, a ajuda do programa Relax4 foi essencial, tanto na obtenção de resultados, como na aplicação dos conceitos adquiridos.