

Universidade do Minho

Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

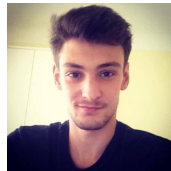
MIEI - 3º ANO - 1º SEMESTRE
UNIVERSIDADE DO MINHO

TRABALHO PRÁTICO 1

GRUPO 3



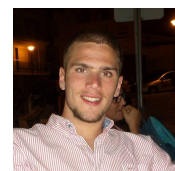
Dinis Peixoto
A75353



Ricardo Pereira
A74185



Marcelo Lima
A75210



Ricardo Certo
A75315

16 de Novembro de 2017

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Parte I	4
2.1	Formulação do problema	4
2.1.1	Variáveis de decisão	4
2.1.2	Função Objetivo	5
2.1.3	Restrições	6
2.2	Ficheiro de Input	7
2.3	Ficheiro de Output	11
2.4	Plano detalhado de produção	15
2.5	Validação do plano detalhado de produção	16
2.5.1	validação da conservação de fluxo das quantidades em cada nó da rede	16
2.5.2	validação das restrições de capacidade	17
2.6	Validação da solução ótima	18
2.6.1	Sumo de Laranja	18
2.6.2	Sumo de Maça	19
2.6.3	Sumo de Pêra	19
2.6.4	Custo total	20
3	Parte II	21
3.1	Formulação do problema	21
3.1.1	Variáveis de decisão adicionais	22
3.1.2	Função Objetivo	22
3.1.3	Restrições adicionais	23
3.2	Ficheiro de Input	23
3.3	Ficheiro de Output	29
3.4	Plano detalhado de produção	35
3.5	Validação do plano detalhado de produção	36
3.6	Validação da solução ótima	41
3.6.1	Sumo de Laranja	41
3.6.2	Sumo de Maça	42
3.6.3	Sumo de Pêra	43
3.6.4	Custo Total	43

4	Parte III	44
4.1	Formulação do problema	44
4.1.1	Função Objetivo	44
4.1.2	Restrições adicionais	45
4.2	Ficheiro de Input	45
4.3	Ficheiro de Output	52
4.4	Plano detalhado de produção	59
4.5	Validação do plano detalhado de produção	60
4.6	Validação da solução ótima	67
4.6.1	Sumo de Laranja	67
4.6.2	Sumo de Maçã	67
4.6.3	Sumo de Pêra	68
4.6.4	Custo Total	69
5	Conclusão	70

1. *Introdução*

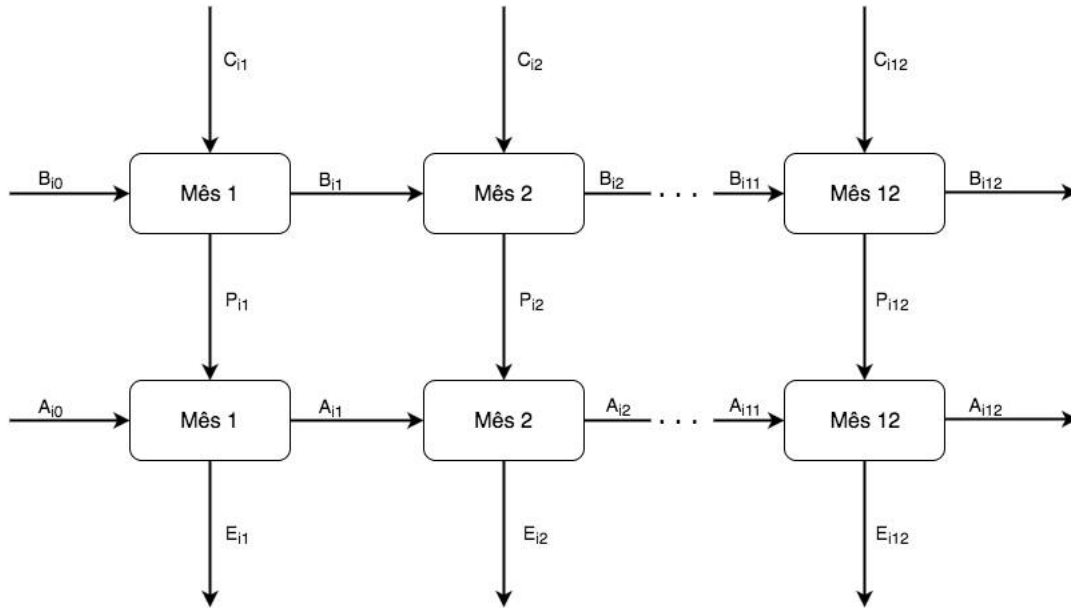
Este relatório pretende expor a solução ao problema apresentado no âmbito da disciplina de Métodos Determinísticos de Investigação Operacional, disciplina constituinte do curso Mestrado integrado em Engenharia Informática. O problema aborda o cenário de uma empresa que produz 3 tipos de sumos de fruta (laranja, maçã e pêra). A produção consiste em misturar as matérias primas, concentrado de sumo de fruta, água e açúcar (não relevantes neste problema), e encher os pacotes de sumo na única linha de engarrafamento, é de notar que o tempo de produção corresponde ao tempo de engarrafamento e é igual para os 3 tipos de sumo. É de referir ainda que existem dois armazéns, o de matérias primas, onde são guardados os tambores com os concentrados de sumo, e o de produtos finais, que guarda as paletes com os pacotes de sumo. Em cada período, se o número de unidades disponíveis, isto é, as unidades produzidas no período em questão mais as existentes em stock, for superior à procura nesse período, as unidades remanescentes podem ser armazenadas em stock para venda em períodos subsequentes. Visto que os custos de produção de sumo e os custos da compra de concentrado variam ao longo de cada período e de fruta para fruta, o objetivo deste problema é determinar as quantidades a comprar, a produzir, e armazenar, em cada período e de cada tipo de sumo, de modo a fornecer os pedidos dos clientes num horizonte de planeamento de 12 meses tendo como objetivo minimizar o custo total pago pela empresa. Durante a realização deste trabalho utilizamos como ferramenta auxiliar o programa LPSolve, visto que o número de variáveis e restrições utilizadas eram demasiado elevadas para que fosse possível uma resolução manual.

2. Parte I

2.1 Formulação do problema

O objetivo do modelo de programação linear apresentado é determinar as quantidades a comprar, produzir e a armazenar (em cada um dos dois tipos de armazéns), em cada período e de cada tipo de sumo, de modo a satisfazer a procura dos clientes num plano de atividade de 12 meses, com um custo global mínimo.

Desta forma, a nossa função objetivo pretende minimizar os custos com que a empresa tem de lidar durante todo o processamento desta, desde que a matéria-prima entra até à produção e entrega do produto final. Os dados que pretendemos determinar, referidos anteriormente, serão as nossas variáveis de decisão.



2.1.1 Variáveis de decisão

U.E.: Uma U.E. de concentrado de fruta é o peso de concentrado necessário para produzir uma tonelada de produto final (que equivale a uma U.E. de produto final).

P_{1j} : Quantidade produzida de laranjas, num determinado mês (U.E.).

P_{2j} : Quantidade produzida de maçãs, num determinado mês (U.E.).

P_{3j} : Quantidade produzida de pêras, num determinado mês (U.E.).

A_{1j} : Quantidade de laranjas armazenada no armazém de produto final, num determinado mês (U.E.).

A_{2j} : Quantidade de maçãs armazenada no armazém de produto final, num determinado mês (U.E.).

A_{3j} : Quantidade de pêras armazenada no armazém de produto final, num determinado mês (U.E.).

B_{1j} : Quantidade de laranjas armazenada no armazém de matéria-prima, num determinado mês (U.E.).

B_{2j} : Quantidade de maçãs armazenada no armazém de matéria-prima, num determinado mês (U.E.).

B_{3j} : Quantidade de pêras armazenada no armazém de matéria-prima, num determinado mês (U.E.).

C_{1j} : Quantidade de laranjas compradas, num determinado mês (U.E.).

C_{2j} : Quantidade de maçãs compradas, num determinado mês (U.E.).

C_{3j} : Quantidade de pêras compradas, num determinado mês (U.E.).

2.1.2 Função Objetivo

$$\min : \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{12} \text{CustoProducao}_j * P_{ij} + 1B_{ij} + 3A_{ij} + \text{PrecoConcentrado}_{ij} * C_{ij}$$

em que o i representa os diferentes tipos de fruta (1 - laranja, 2 - maçã e 3 - pêra) e o j o período (em meses). Está expressa em **U.M.** - Unidades Monetárias.

A função objectivo representa o custo mínimo que a empresa produtora de diversos sumos deve gastar durante 12 meses de atividade. A empresa tem o seguinte conjunto de custos:

- custo de produção dos três diferentes tipos de sumos durante o plano de atividade:

$$\text{CustoProducao}_j * P_{ij}$$

em que,

$$\text{CustoProducao}_j$$

representa os custos associados à produção de sumo, que é semelhante para os três tipos de sumo, mas que variam ao longo do tempo. É expresso em **U.M./U.E.**.

- custo de armazenamento da matéria-prima (concentrado) dos três diferentes tipos de frutos durante o plano de atividade:

$$1B_{ij}$$

O armazém de tambores de concentrado tem um custo de 1 **U.M./U.E.período**.

- custo de armazenamento do produto final, isto é, dos três diferentes tipos de sumos depois de empacotados:

$$3A_{ij}$$

O armazém de pacotes de sumo tem um custo de 3 **U.M./U.E.período**.

- por fim, o custo da matéria-prima em si, o concentrado de fruta:

$$PrecoConcentrado_{ij} * C_{ij}$$

em que,

$$PrecoConcentrado_{ij}$$

representa o custo associado ao concentrado de fruta, varia ao longo do ano para os três diferentes tipos de fruta. É expresso em **U.M./U.E..**

Desenvolvimento da função objetivo

min: $10P_{11} + 3A_{11} + 1B_{11} + 180C_{11} + 10P_{12} + 3A_{12} + 1B_{12} + 160C_{12} + 10P_{13} + 3A_{13} + 1B_{13} + 180C_{13} + 10P_{14} + 3A_{14} + 1B_{14} + 160C_{14} + 10P_{15} + 3A_{15} + 1B_{15} + 180C_{15} + 10P_{16} + 3A_{16} + 1B_{16} + 160C_{16} + 10P_{17} + 3A_{17} + 1B_{17} + 180C_{17} + 12P_{18} + 3A_{18} + 1B_{18} + 160C_{18} + 10P_{19} + 3A_{19} + 1B_{19} + 180C_{19} + 10P_{110} + 3A_{110} + 1B_{110} + 160C_{110} + 10P_{111} + 3A_{111} + 1B_{111} + 180C_{111} + 10P_{112} + 3A_{112} + 1B_{112} + 160C_{112} + 10P_{21} + 3A_{21} + 1B_{21} + 231C_{21} + 10P_{22} + 3A_{22} + 1B_{22} + 199C_{22} + 10P_{23} + 3A_{23} + 1B_{23} + 187C_{23} + 10P_{24} + 3A_{24} + 1B_{24} + 198C_{24} + 10P_{25} + 3A_{25} + 1B_{25} + 210C_{25} + 10P_{26} + 3A_{26} + 1B_{26} + 208C_{26} + 10P_{27} + 3A_{27} + 1B_{27} + 211C_{27} + 12P_{28} + 3A_{28} + 1B_{28} + 220C_{28} + 10P_{29} + 3A_{29} + 1B_{29} + 217C_{29} + 10P_{210} + 3A_{210} + 1B_{210} + 216C_{210} + 10P_{211} + 3A_{211} + 1B_{211} + 221C_{211} + 10P_{212} + 3A_{212} + 1B_{212} + 217C_{212} + 10P_{31} + 3A_{31} + 1B_{31} + 116C_{31} + 10P_{32} + 3A_{32} + 1B_{32} + 116C_{32} + 10P_{33} + 3A_{33} + 1B_{33} + 124C_{33} + 10P_{34} + 3A_{34} + 1B_{34} + 120C_{34} + 10P_{35} + 3A_{35} + 1B_{35} + 132C_{35} + 10P_{36} + 3A_{36} + 1B_{36} + 128C_{36} + 10P_{37} + 3A_{37} + 1B_{37} + 136C_{37} + 12P_{38} + 3A_{38} + 1B_{38} + 116C_{38} + 10P_{39} + 3A_{39} + 1B_{39} + 120C_{39} + 10P_{310} + 3A_{310} + 1B_{310} + 108C_{310} + 10P_{311} + 3A_{311} + 1B_{311} + 100C_{311} + 10P_{312} + 3A_{312} + 1B_{312} + 116C_{312}$; (U.M.)

2.1.3 Restrições

- $P_{ij} + A_{i(j-1)} - A_{ij} = procura_{ij}$

Nesta restrição podemos observar que a quantidade que entra de um determinado sumo de uma dada fruta (i) é igual à quantidade que sai. O A_{ij} significa o valor de stock que sobrou, o $A_{i(j-1)}$ significa o valor do stock do mês (j) passado enquanto o P_{ij} significa quantidade de sumo a ser produzida durante um mês. Nesse caso podemos concluir que $P_{ij} + A_{i(j-1)} = procura_{ij} + A_{ij}$, ou seja, a quantidade de sumo a produzir mais o stock de sumo do mês anterior é igual à procura de um dado sumo de fruta num dado mês mais o stock desse mês.

- $P_{1j} + P_{2j} + P_{3j} \leq 30$

A quantidade de sumo a produzir num dado mês tem de ser menor ou igual a 30 , pois esse é o limite de capacidade de armazenamento de um armazém. Além de que terá de ser maior ou igual que 0, tendo em conta que não existem quantidades negativas.

- $A_{1j} + A_{2j} + A_{3j} \leq 40$

O stock de sumo após um mês j tem de ser menor ou igual a 40 pois é a capacidade máxima de armazenamento de paletes de pacotes que estão em stock.

- $C_{ij} + B_{i(j-1)} - B_{ij} = procura_{ij}$

Podemos optar por ver a restrição na seguinte forma: $C_{ij} + B_{i(j-1)} = B_{ij} + procura_{ij}$

Nesta restrição podemos observar que a quantidade que é comprada(C_{ij}) de uma dada fruta (i) num dado mês (j) mais a quantidade de stock que ficou do mês (j) anterior é igual à procura dessa fruta (i) nesse mês (j) mais o stock desse mês(j). O B_{ij} significa a quantidade que sobrou nesse mês (j).

- $C_{1j} + C_{2j} + C_{3j} \geq 0$

A quantidade de sumo a comprar num dado mês j, tem de ser maior ou igual a 0 pois não podemos considerar quantidades negativas de sumo.

- $B_{1j} + B_{2j} + B_{3j} \leq 30$

O stock de concentrado após um mês j , tem de ser menor ou igual a 30 pois é a capacidade máxima do armazém de matéria-prima.

2.2 Ficheiro de Input

/* Função Objetivo */

min:

10P11 + 3A11 + 1B11 + 180C11 + 10P12 + 3A12 + 1B12 + 160C12 + 10P13 + 3A13 + 1B13 + 180C13 + 10P14 + 3A14 + 1B14 + 160C14 + 10P15 + 3A15 + 1B15 + 180C15 + 10P16 + 3A16 + 1B16 + 160C16 + 10P17 + 3A17 + 1B17 + 180C17 + 12P18 + 3A18 + 1B18 + 160C18 + 10P19 + 3A19 + 1B19 + 180C19 + 10P110 + 3A110 + 1B110 + 160C110 + 10P111 + 3A111 + 1B111 + 180C111 + 10P112 + 3A112 + 1B112 + 160C112 + 10P21 + 3A21 + 1B21 + 231C21 + 10P22 + 3A22 + 1B22 + 199C22 + 10P23 + 3A23 + 1B23 + 187C23 + 10P24 + 3A24 + 1B24 + 198C24 + 10P25 + 3A25 + 1B25 + 210C25 + 10P26 + 3A26 + 1B26 + 208C26 + 10P27 + 3A27 + 1B27 + 211C27 + 12P28 + 3A28 + 1B28 + 220C28 + 10P29 + 3A29 + 1B29 + 217C29 + 10P210 + 3A210 + 1B210 + 216C210 + 10P211 + 3A211 + 1B211 + 221C211 + 10P212 + 3A212 + 1B212 + 217C212 + 10P31 + 3A31 + 1B31 + 116C31 + 10P32 + 3A32 + 1B32 + 116C32 + 10P33 + 3A33 + 1B33 + 124C33 + 10P34 + 3A34 + 1B34 + 120C34 + 10P35 + 3A35 + 1B35 + 132C35 + 10P36 + 3A36 + 1B36 + 128C36 + 10P37 + 3A37 + 1B37 + 136C37 + 12P38 + 3A38 + 1B38 + 116C38 + 10P39 + 3A39 + 1B39 + 120C39 + 10P310 + 3A310 + 1B310 + 108C310 + 10P311 + 3A311 + 1B311 +

$100C311 + 10P312 + 3A312 + 1B312 + 116C312;$

/ Restrições */*

/ Restringir a produção para o armazém de produto final */*

$P11 + 20 - A11 = 9;$

$P21 + 10 - A21 = 5;$

$P31 + 10 - A31 = 4;$

$P12 + A11 - A12 = 9;$

$P22 + A21 - A22 = 5;$

$P32 + A31 - A32 = 4;$

$P13 + A12 - A13 = 9;$

$P23 + A22 - A23 = 5;$

$P33 + A32 - A33 = 4;$

$P14 + A13 - A14 = 12;$

$P24 + A23 - A24 = 6;$

$P34 + A33 - A34 = 5;$

$P15 + A14 - A15 = 16;$

$P25 + A24 - A25 = 8;$

$P35 + A34 - A35 = 6;$

$P16 + A15 - A16 = 17;$

$P26 + A25 - A26 = 9;$

$P36 + A35 - A36 = 7;$

$P17 + A16 - A17 = 19;$

$P27 + A26 - A27 = 10;$

$P37 + A36 - A37 = 8;$

$P18 + A17 - A18 = 19;$

$P28 + A27 - A28 = 10;$

$P38 + A37 - A38 = 8;$

$P19 + A18 - A19 = 16;$

$P29 + A28 - A29 = 8;$

$P39 + A38 - A39 = 6;$

$P110 + A19 - A110 = 12;$

$P210 + A29 - A210 = 6;$

$P310 + A39 - A310 = 5;$

$P111 + A110 - A111 = 10;$

$$\begin{aligned} P211 + A210 - A211 &= 5; \\ P311 + A310 - A311 &= 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P112 + A111 - A112 &= 9; \\ P212 + A211 - A212 &= 5; \\ P312 + A311 - A312 &= 4; \end{aligned}$$

/* Restringir a compra para o armazém de matéria-prima */

$$\begin{aligned} C11 + 16 - B11 &= P11; \\ C21 + 8 - B21 &= P21; \\ C31 + 6 - B31 &= P31; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C12 + B11 - B12 &= P12; \\ C22 + B21 - B22 &= P22; \\ C32 + B31 - B32 &= P32; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C13 + B12 - B13 &= P13; \\ C23 + B22 - B23 &= P23; \\ C33 + B32 - B33 &= P33; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C14 + B13 - B14 &= P14; \\ C24 + B23 - B24 &= P24; \\ C34 + B33 - B34 &= P34; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C15 + B14 - B15 &= P15; \\ C25 + B24 - B25 &= P25; \\ C35 + B34 - B35 &= P35; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C16 + B15 - B16 &= P16; \\ C26 + B25 - B26 &= P26; \\ C36 + B35 - B36 &= P36; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C17 + B16 - B17 &= P17; \\ C27 + B26 - B27 &= P27; \\ C37 + B36 - B37 &= P37; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C18 + B17 - B18 &= P18; \\ C28 + B27 - B28 &= P28; \\ C38 + B37 - B38 &= P38; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C19 + B18 - B19 &= P19; \\ C29 + B28 - B29 &= P29; \\ C39 + B38 - B39 &= P39; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C110 + B19 - B110 &= P110; \\ C210 + B29 - B210 &= P210; \end{aligned}$$

$$C310 + B39 - B310 = P310;$$

$$C111 + B110 - B111 = P111;$$

$$C211 + B210 - B211 = P211;$$

$$C311 + B310 - B311 = P311;$$

$$C112 + B111 - B112 = P112;$$

$$C212 + B211 - B212 = P212;$$

$$C312 + B311 - B312 = P312;$$

/* Restringir a produção no mês */

$$P11 + P21 + P31 \leq 30;$$

$$P12 + P22 + P32 \leq 30;$$

$$P13 + P23 + P33 \leq 30;$$

$$P14 + P24 + P34 \leq 30;$$

$$P15 + P25 + P35 \leq 30;$$

$$P16 + P26 + P36 \leq 30;$$

$$P17 + P27 + P37 \leq 30;$$

$$P18 + P28 + P38 \leq 30;$$

$$P19 + P29 + P39 \leq 30;$$

$$P110 + P210 + P310 \leq 30;$$

$$P111 + P211 + P311 \leq 30;$$

$$P112 + P212 + P312 \leq 30;$$

/* Restringir o armazenamento de produto final no mês */

$$A11 + A21 + A31 \leq 40;$$

$$A12 + A22 + A32 \leq 40;$$

$$A13 + A23 + A33 \leq 40;$$

$$A14 + A24 + A34 \leq 40;$$

$$A15 + A25 + A35 \leq 40;$$

$$A16 + A26 + A36 \leq 40;$$

$$A17 + A27 + A37 \leq 40;$$

$$A18 + A28 + A38 \leq 40;$$

$$A19 + A29 + A39 \leq 40;$$

$$A110 + A210 + A310 \leq 40;$$

$$A111 + A211 + A311 \leq 40;$$

$$A112 + A212 + A312 \leq 40;$$

/* Restringir o armazenamento de matéria-prima no mês */

$$B11 + B21 + B31 \leq 30;$$

$$B12 + B22 + B32 \leq 30;$$

$$B13 + B23 + B33 \leq 30;$$

$$B14 + B24 + B34 \leq 30;$$

$$B15 + B25 + B35 \leq 30;$$

```

B16 + B26 + B36 <= 30;
B17 + B27 + B37 <= 30;
B18 + B28 + B38 <= 30;
B19 + B29 + B39 <= 30;
B110 + B210 + B310 <= 30;
B111 + B211 + B311 <= 30;
B112 + B212 + B312 <= 30;

/* Restringir armazenamento final */

A112 = 20;
A212 = 10;
A312 = 10;

B112 = 16;
B212 = 8;
B312 = 6;

```

O programa *LPSolve* faz automaticamente as restrições de não-negatividade, caso contrário seria necessário adicionar tais restrições.

2.3 Ficheiro de Output

Value of objective function: 52890

Actual values of the variables:

P11	0
A11	11
B11	16
C11	0
P12	9,999999999999999
A12	12
B12	6,000000000000002
C12	0
P13	0
A13	3
B13	6,000000000000002
C13	0
P14	8,999999999999999
A14	0
B14	16
C14	19
P15	16
A15	0
B15	0
C15	0
P16	17

A16	0
B16	19
C16	36
P17	19
A17	0
B17	0
C17	0
P18	19
A18	0
B18	16
C18	35
P19	16
A19	0
B19	0
C19	0
P110	12
A110	0
B110	10
C110	22
P111	10
A111	0
B111	0
C111	0
P112	29
A112	20
B112	16
C112	45
P21	0
A21	5
B21	8
C21	0
P22	7,999999999999999
A22	8
B22	0
C22	0
P23	30
A23	33
B23	24
C23	54
P24	9,999999999999998
A24	37
B24	14
C24	0
P25	5,000000000000001
A25	34
B25	8,999999999999998
C25	0

P26	1,999999999999999
A26	27
B26	6,999999999999998
C26	0
P27	0
A27	17
B27	11
C27	4,000000000000002
P28	0
A28	6,999999999999999
B28	11
C28	0
P29	11
A29	10
B29	0
C29	0
P210	13
A210	17
B210	2
C210	15
P211	2
A211	14
B211	0
C211	0
P212	1
A212	10
B212	8
C212	9
P31	0
A31	6
B31	6
C31	0
P32	6
A32	8
B32	0
C32	0
P33	0
A33	4
B33	0
C33	0
P34	4,000000000000004
A34	3,000000000000003
B34	0
C34	4,000000000000003
P35	2,999999999999997
A35	0
B35	0

C35	2,999999999999997
P36	11
A36	4,000000000000001
B36	4
C36	15
P37	4
A37	0
B37	0
C37	0
P38	11
A38	3,000000000000001
B38	2,999999999999999
C38	14
P39	2,999999999999999
A39	0
B39	0
C39	0
P310	5
A310	0
B310	0
C310	5
P311	18
A311	14
B311	6
C311	24
P312	0
A312	10
B312	6
C312	0

2.4 Plano detalhado de produção

Laranja

Mês	Jan	Fer	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade Produzida	0	10	0	9	16	17	19	19	16	12	10	29
Quantidade Comprada	0	0	0	19	0	36	0	35	0	22	0	45
Quantidade Armazenada (matéria-prima)	16	6	6	16	0	19	0	16	0	10	0	16
Quantidade Armazenada (produto final)	11	12	3	0	0	0	0	0	0	0	0	20
Procura	9	9	9	12	16	17	19	19	16	12	10	9

Maçã

Mês	Jan	Fer	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade produzida	0	8	30	10	5	2	0	0	11	13	2	1
Quantidade comprada	0	0	54	0	0	0	4	0	0	15	0	9
Quantidade Armazenada (matéria-prima)	8	0	24	14	9	7	11	11	0	2	0	8
Quantidade Armazenada (produto final)	5	8	33	37	34	27	17	7	10	17	14	10
Procura	5	5	5	6	8	9	10	10	8	6	5	5

Pêra

Mês	Jan	Fer	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade produzida	0	6	0	4	3	11	4	11	3	5	18	0
Quantidade comprada	0	0	0	4	3	15	0	14	0	5	24	0
Quantidade Armazenada (matéria-prima)	6	0	0	0	0	4	0	3	0	0	6	6
Quantidade Armazenada (produto final)	6	8	4	3	0	4	0	3	0	0	14	10
Procura	4	4	4	5	6	7	8	8	6	5	4	4

Todos os valores apresentados nas tabelas anteriores estão expressos em U.E..

2.5 Validação do plano detalhado de produção

2.5.1 validação da conservação de fluxo das quantidades em cada nó da rede

/* Restringir a compra para o armazém de produto final */

$P11 + 20 - A11 = 9 \Leftrightarrow 0 + 20 - 11 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots$ Verdadeiro
 $P12 + A11 - A12 = 9 \Leftrightarrow 10 + 11 - 12 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots$ Verdadeiro
 $P13 + A12 - A13 = 9 \Leftrightarrow 0 + 12 - 3 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots$ Verdadeiro
 $P14 + A13 - A14 = 12 \Leftrightarrow 9 + 3 - 0 = 12 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots$ Verdadeiro
 $P15 + A14 - A15 = 16 \Leftrightarrow 16 + 0 - 0 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots$ Verdadeiro
 $P16 + A15 - A16 = 17 \Leftrightarrow 17 + 0 - 0 = 17 \Leftrightarrow 17 = 17 \dots$ Verdadeiro
 $P17 + A16 - A17 = 19 \Leftrightarrow 19 + 0 - 0 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots$ Verdadeiro
 $P18 + A17 - A18 = 19 \Leftrightarrow 19 + 0 - 0 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots$ Verdadeiro
 $P19 + A18 - A19 = 16 \Leftrightarrow 16 + 0 - 0 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots$ Verdadeiro
 $P110 + A19 - A110 = 12 \Leftrightarrow 12 + 0 - 0 = 12 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots$ Verdadeiro
 $P111 + A110 - A111 = 10 \Leftrightarrow 10 + 0 - 0 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots$ Verdadeiro
 $P112 + A111 - A112 = 9 \Leftrightarrow 29 + 0 - 20 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots$ Verdadeiro

$P21 + 10 - A21 = 5 \Leftrightarrow 0 + 10 - 5 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots$ Verdadeiro
 $P22 + A21 - A22 = 5 \Leftrightarrow 8 + 5 - 8 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots$ Verdadeiro
 $P23 + A22 - A23 = 5 \Leftrightarrow 30 + 8 - 33 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots$ Verdadeiro
 $P24 + A23 - A24 = 6 \Leftrightarrow 10 + 33 - 37 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots$ Verdadeiro
 $P25 + A24 - A25 = 8 \Leftrightarrow 5 + 37 - 34 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots$ Verdadeiro
 $P26 + A25 - A26 = 9 \Leftrightarrow 2 + 34 - 27 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots$ Verdadeiro
 $P27 + A26 - A27 = 10 \Leftrightarrow 0 + 27 - 17 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots$ Verdadeiro
 $P28 + A27 - A28 = 10 \Leftrightarrow 0 + 17 - 7 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots$ Verdadeiro
 $P29 + A28 - A29 = 8 \Leftrightarrow 11 + 7 - 10 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots$ Verdadeiro
 $P210 + A29 - A210 = 6 \Leftrightarrow 13 + 10 - 17 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots$ Verdadeiro
 $P211 + A210 - A211 = 5 \Leftrightarrow 2 + 17 - 14 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots$ Verdadeiro
 $P212 + A211 - A212 = 5 \Leftrightarrow 1 + 14 - 10 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots$ Verdadeiro

$P31 + 10 - A31 = 4 \Leftrightarrow 0 + 10 - 6 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots$ Verdadeiro
 $P32 + A31 - A32 = 4 \Leftrightarrow 6 + 6 - 8 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots$ Verdadeiro
 $P33 + A32 - A33 = 4 \Leftrightarrow 0 + 8 - 4 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots$ Verdadeiro
 $P34 + A33 - A34 = 5 \Leftrightarrow 4 + 4 - 3 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots$ Verdadeiro
 $P35 + A34 - A35 = 6 \Leftrightarrow 3 + 3 - 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots$ Verdadeiro
 $P36 + A35 - A36 = 7 \Leftrightarrow 11 + 0 - 4 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7 \dots$ Verdadeiro
 $P37 + A36 - A37 = 8 \Leftrightarrow 4 + 4 - 0 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots$ Verdadeiro
 $P38 + A37 - A38 = 8 \Leftrightarrow 11 + 0 - 3 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots$ Verdadeiro
 $P39 + A38 - A39 = 6 \Leftrightarrow 3 + 3 - 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots$ Verdadeiro
 $P310 + A39 - A310 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 - 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots$ Verdadeiro
 $P311 + A310 - A311 = 4 \Leftrightarrow 18 + 0 - 14 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots$ Verdadeiro
 $P312 + A311 - A312 = 4 \Leftrightarrow 0 + 14 - 10 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots$ Verdadeiro

/* Restringir a compra para o armazém de matéria-prima */

$C11 + 16 - B11 = P11 \Leftrightarrow 0 + 16 - 16 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C12 + B11 - B12 = P12 \Leftrightarrow 0 + 16 - 6 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C13 + B12 - B13 = P13 \Leftrightarrow 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C14 + B13 - B14 = P14 \Leftrightarrow 19 + 6 - 16 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C15 + B14 - B15 = P15 \Leftrightarrow 0 + 16 - 0 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C16 + B15 - B16 = P16 \Leftrightarrow 36 + 0 - 19 = 17 \Leftrightarrow 17 = 17 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C17 + B16 - B17 = P17 \Leftrightarrow 0 + 19 - 0 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C18 + B17 - B18 = P18 \Leftrightarrow 35 + 0 - 16 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C19 + B18 - B19 = P19 \Leftrightarrow 0 + 16 - 0 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C110 + B19 - B110 = P110 \Leftrightarrow 22 + 0 - 10 = 12 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C111 + B110 - B111 = P111 \Leftrightarrow 0 + 10 - 0 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C112 + B111 - B112 = P112 \Leftrightarrow 45 + 0 - 16 = 29 \Leftrightarrow 29 = 29 \dots \text{Verdadeiro}$

$C21 + 8 - B21 = P21 \Leftrightarrow 0 + 8 - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C22 + B21 - B22 = P22 \Leftrightarrow 0 + 8 - 0 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C23 + B22 - B23 = P23 \Leftrightarrow 54 + 0 - 24 = 30 \Leftrightarrow 30 = 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C24 + B23 - B24 = P24 \Leftrightarrow 0 + 24 - 14 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C25 + B24 - B25 = P25 \Leftrightarrow 0 + 14 - 9 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C26 + B25 - B26 = P26 \Leftrightarrow 0 + 9 - 7 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C27 + B26 - B27 = P27 \Leftrightarrow 4 + 7 - 11 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C28 + B27 - B28 = P28 \Leftrightarrow 0 + 11 - 11 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C29 + B28 - B29 = P29 \Leftrightarrow 0 + 11 - 0 = 11 \Leftrightarrow 11 = 11 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C210 + B29 - B210 = P210 \Leftrightarrow 15 + 0 - 2 = 13 \Leftrightarrow 13 = 13 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C211 + B210 - B211 = P211 \Leftrightarrow 0 + 2 - 0 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C212 + B211 - B212 = P212 \Leftrightarrow 9 + 0 - 8 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$

$C31 + 6 - B31 = P31 \Leftrightarrow 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C32 + B31 - B32 = P32 \Leftrightarrow 0 + 6 - 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C33 + B32 - B33 = P33 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C34 + B33 - B34 = P34 \Leftrightarrow 4 + 0 - 0 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C35 + B34 - B35 = P35 \Leftrightarrow 3 + 0 - 0 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C36 + B35 - B36 = P36 \Leftrightarrow 15 + 0 - 4 = 11 \Leftrightarrow 11 = 11 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C37 + B36 - B37 = P37 \Leftrightarrow 0 + 4 - 0 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C38 + B37 - B38 = P38 \Leftrightarrow 14 + 0 - 3 = 11 \Leftrightarrow 11 = 11 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C39 + B38 - B39 = P39 \Leftrightarrow 0 + 3 - 0 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C310 + B39 - B310 = P310 \Leftrightarrow 5 + 0 - 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C311 + B310 - B311 = P311 \Leftrightarrow 24 + 0 - 6 = 18 \Leftrightarrow 18 = 18 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C312 + B311 - B312 = P312 \Leftrightarrow 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

2.5.2 validação das restrições de capacidade

/* restringir a produção no mês */

$P11 + P21 + P31 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 0 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P12 + P22 + P32 \leq 30 \Leftrightarrow 10 + 8 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 24 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

```

P13 + P23 + P33 <= 30 <=> 0 + 30 + 0 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
P14 + P24 + P34 <= 30 <=> 9 + 10 + 4 <= 30 <=> 23 <= 30 ... Verdadeiro
P15 + P25 + P35 <= 30 <=> 16 + 5 + 3 <= 30 <=> 24 <= 30 ... Verdadeiro
P16 + P26 + P36 <= 30 <=> 17 + 2 + 11 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
P17 + P27 + P37 <= 30 <=> 19 + 0 + 4 <= 30 <=> 23 <= 30 ... Verdadeiro
P18 + P28 + P38 <= 30 <=> 19 + 0 + 11 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
P19 + P29 + P39 <= 30 <=> 16 + 11 + 3 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
P110 + P210 + P310 <= 30 <=> 12 + 13 + 5 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
P111 + P211 + P311 <= 30 <=> 10 + 2 + 18 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
P112 + P212 + P312 <= 30 <=> 29 + 1 + 0 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro

```

```

/* restringir o armazenamento de produto final no mês */

```

```

A11 + A21 + A31 <= 40 <=> 11 + 5 + 6 <= 40 <=> 22 <= 40 ... Verdadeiro
A12 + A22 + A32 <= 40 <=> 12 + 8 + 8 <= 40 <=> 28 <= 40 ... Verdadeiro
A13 + A23 + A33 <= 40 <=> 3 + 33 + 4 <= 40 <=> 40 <= 40 ... Verdadeiro
A14 + A24 + A34 <= 40 <=> 0 + 37 + 3 <= 40 <=> 40 <= 40 ... Verdadeiro
A15 + A25 + A35 <= 40 <=> 0 + 34 + 0 <= 40 <=> 34 <= 40 ... Verdadeiro
A16 + A26 + A36 <= 40 <=> 0 + 27 + 4 <= 40 <=> 31 <= 40 ... Verdadeiro
A17 + A27 + A37 <= 40 <=> 0 + 17 + 0 <= 40 <=> 17 <= 40 ... Verdadeiro
A18 + A28 + A38 <= 40 <=> 0 + 7 + 3 <= 40 <=> 10 <= 40 ... Verdadeiro
A19 + A29 + A39 <= 40 <=> 0 + 10 + 0 <= 40 <=> 10 <= 40 ... Verdadeiro
A110 + A210 + A310 <= 40 <=> 0 + 17 + 0 <= 40 <=> 17 <= 40 ... Verdadeiro
A111 + A211 + A311 <= 40 <=> 0 + 14 + 14 <= 40 <=> 28 <= 40 ... Verdadeiro
A112 + A212 + A312 <= 40 <=> 0 + 10 + 10 <= 40 <=> 20 <= 40 ... Verdadeiro

```

```

/* restringir o armazenamento de matéria-prima no mês */

```

```

B11 + B21 + B31 <= 30 <=> 16 + 8 + 6 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
B12 + B22 + B32 <= 30 <=> 6 + 0 + 0 <= 30 <=> 6 <= 30 ... Verdadeiro
B13 + B23 + B33 <= 30 <=> 6 + 24 + 0 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
B14 + B24 + B34 <= 30 <=> 16 + 14 + 0 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
B15 + B25 + B35 <= 30 <=> 0 + 9 + 0 <= 30 <=> 9 <= 30 ... Verdadeiro
B16 + B26 + B36 <= 30 <=> 19 + 7 + 4 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
B17 + B27 + B37 <= 30 <=> 0 + 11 + 0 <= 30 <=> 11 <= 30 ... Verdadeiro
B18 + B28 + B38 <= 30 <=> 16 + 11 + 3 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
B19 + B29 + B39 <= 30 <=> 0 + 0 + 0 <= 30 <=> 0 <= 30 ... Verdadeiro
B110 + B210 + B310 <= 30 <=> 10 + 2 + 0 <= 30 <=> 12 <= 30 ... Verdadeiro
B111 + B211 + B311 <= 30 <=> 0 + 0 + 6 <= 30 <=> 6 <= 30 ... Verdadeiro
B112 + B212 + B312 <= 30 <=> 16 + 8 + 6 <= 30 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro

```

2.6 Validação da solução ótima

2.6.1 Sumo de Laranja

```

/* Cálculo do custo de compra de concentrado */

```

```

CustoConcentradoLaranja = 180 C11 + 160 C12 + 180 C13 + 160 C14 + 180 C15 +

```

$160 C16 + 180 C17 + 160 C18 + 180 C19 + 160 C110 + 180 C111 + 160 C112 =$
 $80 \times 0 + 160 \times 0 + 180 \times 0 + 160 \times 19 + 180 \times 0 + 160 \times 36 + 180 \times 0 +$
 $160 \times 35 + 180 \times 0 + 160 \times 22 + 180 \times 0 + 160 \times 45 = 25120 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de produção */

$\text{CustoProducaoLaranja} = 10 P11 + 10 P12 + 10 P13 + 10 P14 + 10 P15 + 10 P16 +$
 $10 P17 + 12 P18 + 10 P19 + 10 P110 + 10 P111 + 10 P112 =$
 $10 \times 0 + 10 \times 10 + 10 \times 0 + 10 \times 9 + 10 \times 16 + 10 \times 17 +$
 $10 \times 19 + 12 \times 19 + 10 \times 16 + 10 \times 12 + 10 \times 10 + 10 \times 29 = 1608 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de armazenamento */

$\text{CustoStockLaranja} = 3(A11 + A12 + A13 + A14 + A15 + A16 + A17 + A18 + A19 +$
 $A110 + A111 + A112) + B11 + B12 + B13 + B14 + B15 + B16 + B17 + B18 +$
 $B19 + B110 + B111 + B112 =$
 $3(11 + 12 + 3 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 20) + 16 + 6 +$
 $6 + 16 + 0 + 19 + 0 + 16 + 0 + 10 + 0 + 16 = 243 \text{ (U.M.)}$

2.6.2 Sumo de Maçã

/* Cálculo do custo de compra de concentrado */

$\text{CustoConcentradoMaca} = 231 C21 + 199 C22 + 187 C23 + 198 C24 + 210 C25 +$
 $208 C26 + 211 C27 + 220 C28 + 217 C29 + 216 C210 + 221 C211 + 217 C212 =$
 $231 \times 0 + 199 \times 0 + 187 \times 54 + 198 \times 0 + 210 \times 0 + 208 \times 0 +$
 $211 \times 4 + 220 \times 0 + 217 \times 0 + 216 \times 15 + 221 \times 0 + 217 \times 9 = 16135 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de produção */

$\text{CustoProducaoMaca} = 10 P21 + 10 P22 + 10 P23 + 10 P24 + 10 P25 + 10 P26 +$
 $10 P27 + 12 P28 + 10 P29 + 10 P210 + 10 P211 + 10 P212 =$
 $10 \times 0 + 10 \times 8 + 10 \times 30 + 10 \times 10 + 10 \times 5 + 10 \times 2 + 10 \times 0 +$
 $12 \times 0 + 10 \times 11 + 10 \times 13 + 10 \times 2 + 10 \times 1 = 820 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de armazenamento */

$\text{CustoStockMaca} = 3(A21 + A22 + A23 + A24 + A25 + A26 + A27 + A28 + A29 +$
 $A210 + A211 + A212) + B21 + B22 + B23 + B24 + B25 + B26 + B27 + B28 + B29 +$
 $B210 + B211 + B212 =$
 $3(5 + 8 + 33 + 37 + 34 + 27 + 17 + 7 + 10 + 17 + 14 + 10) + 8 + 0 + 24 + 14 +$
 $9 + 7 + 11 + 11 + 0 + 2 + 0 + 8 = 657 + 94 = 751 \text{ (U.M.)}$

2.6.3 Sumo de Pêra

/* Cálculo do custo de compra de concentrado */

$\text{CustoConcentradoPera} = 116 C31 + 116 C32 + 124 C33 + 120 C34 + 132 C35 +$
 $128 C36 + 136 C37 + 116 C38 + 120 C39 + 108 C310 + 100 C311 + 116 C312 =$
 $116 \times 0 + 116 \times 0 + 124 \times 0 + 120 \times 4 + 132 \times 3 + 128 \times 15 + 136 \times 0 +$
 $116 \times 14 + 120 \times 0 + 108 \times 5 + 100 \times 24 + 116 \times 0 = 7360 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de produção */

$\text{CustoProducaoPera} = 10 \text{ P31} + 10 \text{ P32} + 10 \text{ P33} + 10 \text{ P34} + 10 \text{ P35} + 10 \text{ P36} +$
 $10 \text{ P37} + 12 \text{ P38} + 10 \text{ P39} + 10 \text{ P310} + 10 \text{ P311} + 10 \text{ P312} =$
 $10 \times 0 + 10 \times 6 + 10 \times 0 + 10 \times 4 + 10 \times 3 + 10 \times 11 + 10 \times 4 + 12 \times 11 +$
 $10 \times 3 + 10 \times 5 + 10 \times 18 + 10 \times 0 = 672 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de armazenamento */

$\text{CustoStockPera} = 3(\text{A31} + \text{A32} + \text{A33} + \text{A34} + \text{A35} + \text{A36} + \text{A37} + \text{A38} + \text{A39} +$
 $\text{A310} + \text{A311} + \text{A312}) + \text{B31} + \text{B32} + \text{B33} + \text{B34} + \text{B35} + \text{B36} + \text{B37} + \text{B38} +$
 $\text{B39} + \text{B310} + \text{B311} + \text{B312} =$
 $3 (6 + 8 + 4 + 3 + 0 + 4 + 0 + 3 + 0 + 0 + 14 + 10) + 6 + 0 + 0 + 0 + 0 + 4 +$
 $0 + 3 + 0 + 0 + 6 + 6 = 156 + 25 = 181 \text{ (U.M.)}$

2.6.4 Custo total

CustoTotal = *CustoConcentradoLaranja* + *CustoConcentradoMaca* + *CustoCon-*
centradoPera + *CustoProducaoLaranja* + *CustoProducaoMaca* + *CustoProducao-*
Pera + *CustoStockLaranja* + *CustoStockMaca* + *CustoStockPera* =
 $25120 + 16135 + 7360 + 1608 + 820 + 672 + 243 + 751 + 181 = \mathbf{52890 \text{ (U.M.)}}$.

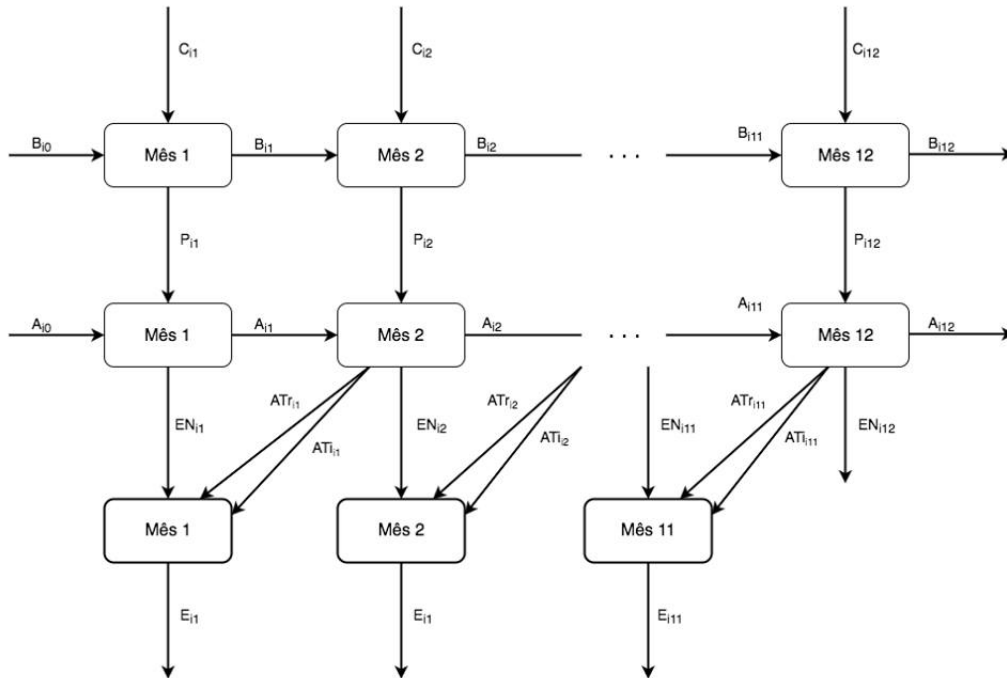
Como podemos observar, o Custo Total é igual à solução ótima obtida utilizando o *LPSolve*.

3. Parte II

3.1 Formulação do problema

Tal como no modelo de programação linear apresentado na *Parte I*, o objectivo do problema da *parte II* é determinar as quantidades a comprar, produzir e a armazenar (em cada um dos dois tipos de armazéns), em cada período e de cada tipo de sumo, com a excepção de que neste caso pode haver atrasos na entrega, apenas de 1 mês, no entanto com custos. Satisfazendo de igual maneira a procura dos clientes num plano de atividade de 12 meses, com um custo global mínimo.

Desta forma a nossa função objetivo pretende minimizar os custos com que a empresa tem de lidar. Neste problema, o atraso pode ser encarado como entregas provenientes do mês seguinte, válido apenas até o mês 11, como é visível na figura que se segue. Então, em vez de termos uma variável, ou mesmo uma constante (procura do cliente), podemos reformular o problema, alterando essa variável para a soma das entregas vindas do mês em questão, e do mês seguinte. Além disso, de forma a estruturar os custos dos atrasos, encaramos o atraso, como duas variáveis, uma para o custo 1 e outra para o custo 10. Garantindo assim que o atraso tenha custos diferentes, dependendo da quantidade atrasada.



3.1.1 Variáveis de decisão adicionais

ATi_{1j} : Variável binária que demonstra se há atraso de laranjas num determinado mês.

ATi_{2j} : Variável binária que demonstra se há atraso de maçãs num determinado mês.

ATi_{3j} : Variável binária que demonstra se há atraso de pêras num determinado mês.

ATr_{1j} : Quantidade acima de uma unidade em atraso de laranjas, num determinado mês (U.E.).

ATr_{2j} : Quantidade acima de uma unidade em atraso de maçãs, num determinado mês (U.E.).

ATr_{3j} : Quantidade acima de uma unidade em atraso de pêras, num determinado mês (U.E.).

A variável ATi_{ij} demonstra se há ou não atraso na encomenda, tendo assim o valor 1 caso tal aconteça. Esta unidade representa também a primeira unidade em atraso de cada mês, as restantes unidades são expressas na variável ATr_{ij} . Como se trata de um problema com o objetivo de minizar os custos, a variável de menor curso (ATi_{ij}) é preenchida em primeiro.

A soma das variáveis ATi_{ij} e ATr_{ij} demonstram a quantidade em atraso, em U.E. No caso de haverem 10 U.E. em atraso, a variável ATi_{ij} tem valor 1 e a variável ATr_{ij} tem valor 9, as unidades restantes.

3.1.2 Função Objetivo

$$\min : \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{12} \text{CustoProducao}_j * P_{ij} + 1B_{ij} + 3A_{ij} + \text{PrecoConcentrado}_{ij} * C_{ij} + 10ATr_{ij} * ATi_{ij}$$

em que o i representa os diferentes tipos de fruta e o j o período e ainda, $10ATr_{ij} * ATi_{ij}$, representa o custo que a empresa tem quando os produtos são entregues com um mês de atraso.

O custo de uma unidade em atraso é de 1 U.M. e a variável ATi_{ij} tem o valor 1 em caso de ir uma ou mais unidades em atraso, ou 0 se não for nenhuma, daí o $1ATi_{ij}$.

O custo por cada unidade de atraso em quantidades superiores a 1 é de 10 U.M, e como a variável ATr_{ij} representa as quantidade de produtos em atraso, acrescidos à unidade da variável ATi_{ij} , surge $10ATr_{ij}$.

Tanto ATi_{ij} como ATr_{ij} estão expressas em **U.E.**, e a função objetivo em **U.M.**.

Desenvolvimento da função objetivo

$$\begin{aligned} \min: & 10P_{11} + 3A_{11} + 1B_{11} + 180C_{11} + 10P_{12} + 3A_{12} + 1B_{12} + 160C_{12} + \\ & 10P_{13} + 3A_{13} + 1B_{13} + 180C_{13} + 10P_{14} + 3A_{14} + 1B_{14} + 160C_{14} + 10P_{15} \\ & + 3A_{15} + 1B_{15} + 180C_{15} + 10P_{16} + 3A_{16} + 1B_{16} + 160C_{16} + 10P_{17} + 3A_{17} \\ & + 1B_{17} + 180C_{17} + 12P_{18} + 3A_{18} + 1B_{18} + 160C_{18} + 10P_{19} + 3A_{19} + 1B_{19} \\ & + 180C_{19} + 10P_{110} + 3A_{110} + 1B_{110} + 160C_{110} + 10P_{111} + 3A_{111} + 1B_{111} \end{aligned}$$

$+ 180C111 + 10P112 + 3A112 + 1B112 + 160C112 + 10P21 + 3A21 + 1B21 +$
 $231C21 + 10P22 + 3A22 + 1B22 + 199C22 + 10P23 + 3A23 + 1B23 + 187C23$
 $+ 10P24 + 3A24 + 1B24 + 198C24 + 10P25 + 3A25 + 1B25 + 210C25 + 10P26$
 $+ 3A26 + 1B26 + 208C26 + 10P27 + 3A27 + 1B27 + 211C27 + 12P28 + 3A28$
 $+ 1B28 + 220C28 + 10P29 + 3A29 + 1B29 + 217C29 + 10P210 + 3A210 +$
 $1B210 + 216C210 + 10P211 + 3A211 + 1B211 + 221C211 + 10P212 + 3A212$
 $+ 1B212 + 217C212 + 10P31 + 3A31 + 1B31 + 116C31 + 10P32 + 3A32 +$
 $1B32 + 116C32 + 10P33 + 3A33 + 1B33 + 124C33 + 10P34 + 3A34 + 1B34 +$
 $120C34 + 10P35 + 3A35 + 1B35 + 132C35 + 10P36 + 3A36 + 1B36 + 128C36$
 $+ 10P37 + 3A37 + 1B37 + 136C37 + 12P38 + 3A38 + 1B38 + 116C38 + 10P39$
 $+ 3A39 + 1B39 + 120C39 + 10P310 + 3A310 + 1B310 + 108C310 + 10P311 +$
 $3A311 + 1B311 + 100C311 + 10P312 + 3A312 + 1B312 + 116C312 + 10ATr11 +$
 $ATi11 + 10ATr12 + ATi12 + 10ATr13 + ATi13 + 10ATr14 + ATi14 + 10ATr15$
 $+ ATi15 + 10ATr16 + ATi16 + 10ATr17 + ATi17 + 10ATr18 + ATi18 + 10ATr19$
 $+ ATi19 + 10ATr110 + ATi110 + 10ATr111 + ATi111 + 10ATr112 + ATi112 +$
 $10ATr21 + ATi21 + 10ATr22 + ATi22 + 10ATr23 + ATi23 + 10ATr24 + ATi24$
 $+ 10ATr25 + ATi25 + 10ATr26 + ATi26 + 10ATr27 + ATi27 + 10ATr28 + ATi28$
 $+ 10ATr29 + ATi29 + 10ATr210 + ATi210 + 10ATr211 + ATi211 + 10ATr212 +$
 $ATi212 + 10ATr31 + ATi31 + 10ATr32 + ATi32 + 10ATr33 + ATi33 + 10ATr34$
 $+ ATi34 + 10ATr35 + ATi35 + 10ATr36 + ATi36 + 10ATr37 + ATi37 + 10ATr38$
 $+ ATi38 + 10ATr39 + ATi39 + 10ATr310 + ATi310 + 10ATr311 + ATi311 +$
 $10ATr312 + ATi312;$

3.1.3 Restrições adicionais

- $P_{i1} + 20 - A_{i1} = EN_{i1}$

No mês 1, não vamos considerar as variáveis ATi_{i1} e ATr_{ij} pois no primeiro mês não temos nenhum atraso a considerar do mês passado.

- $P_{ij} + armazenadeprodutofinal + A_{ij} = ATi_{ij} + ATr_{ij} + EN_{ij}$

Esta restrição tem como objectivo limitar a produção para o armazém nesse mês (j). Sendo que a variável binária ATi_{ij} define se vamos ter ou não atraso de unidades para entrega desse produto (i) nesse dado mês (j) e ATr_{ij} define a quantidade acima de 1 unidade que ficou atrasada no mês passado (j-1) e que tem de ser entregues neste mês (j) obrigatoriamente EN_{ij} representa a quantidade entregue nesse mês (j) de uma dada fruta (i).

- $EN_{ij} + (ATi)_{ij} + (ATr)_{ij} = procura$

O objectivo desta restrição é garantir que a produção entregue (EN_{ij}) naquele mês (j) de uma dada fruta(i) mais a variável ATi_{ij} que é a variável que verifica se temos atraso ou não mais a variável ATr_{ij} que dá o que ficou atrasado do mês anterior acima de 1 unidade que ainda não foi entregue.

3.2 Ficheiro de Input

/* Função Objectivo */

min: 10P11 + 3A11 + 1B11 + 180C11 + 10P12 + 3A12 + 1B12 + 160C12 +
 10P13 + 3A13 + 1B13 + 180C13 + 10P14 + 3A14 + 1B14 + 160C14 +
 10P15 + 3A15 + 1B15 + 180C15 + 10P16 + 3A16 + 1B16 + 160C16 +
 10P17 + 3A17 + 1B17 + 180C17 + 12P18 + 3A18 + 1B18 + 160C18 +
 10P19 + 3A19 + 1B19 + 180C19 + 10P110 + 3A110 + 1B110 + 160C110 +
 10P111 + 3A111 + 1B111 + 180C111 + 10P112 + 3A112 + 1B112 +
 160C112 + 10P21 + 3A21 + 1B21 + 231C21 + 10P22 + 3A22 + 1B22 +
 199C22 + 10P23 + 3A23 + 1B23 + 187C23 + 10P24 + 3A24 + 1B24 +
 198C24 + 10P25 + 3A25 + 1B25 + 210C25 + 10P26 + 3A26 + 1B26 +
 208C26 + 10P27 + 3A27 + 1B27 + 211C27 + 12P28 + 3A28 + 1B28 +
 220C28 + 10P29 + 3A29 + 1B29 + 217C29 + 10P210 + 3A210 + 1B210 +
 216C210 + 10P211 + 3A211 + 1B211 + 221C211 + 10P212 + 3A212 +
 1B212 + 217C212 + 10P31 + 3A31 + 1B31 + 116C31 + 10P32 + 3A32 +
 1B32 + 116C32 + 10P33 + 3A33 + 1B33 + 124C33 + 10P34 + 3A34 +
 1B34 + 120C34 + 10P35 + 3A35 + 1B35 + 132C35 + 10P36 + 3A36 +
 1B36 + 128C36 + 10P37 + 3A37 + 1B37 + 136C37 + 12P38 + 3A38 +
 1B38 + 116C38 + 10P39 + 3A39 + 1B39 + 120C39 + 10P310 + 3A310 +
 1B310 + 108C310 + 10P311 + 3A311 + 1B311 + 100C311 + 10P312 +
 3A312 + 1B312 + 116C312 + 10ATr11 + ATi11 + 10ATr12 + ATi12 +
 10ATr13 + ATi13 + 10ATr14 + ATi14 + 10ATr15 + ATi15 + 10ATr16 +
 ATi16 + 10ATr17 + ATi17 + 10ATr18 + ATi18 + 10ATr19 + ATi19 +
 10ATr110 + ATi110 + 10ATr111 + ATi111 + 10ATr112 + ATi112 +
 10ATr21 + ATi21 + 10ATr22 + ATi22 + 10ATr23 + ATi23 + 10ATr24 +
 ATi24 + 10ATr25 + ATi25 + 10ATr26 + ATi26 + 10ATr27 + ATi27 +
 10ATr28 + ATi28 + 10ATr29 + ATi29 + 10ATr210 + ATi210 + 10ATr211 +
 ATi211 + 10ATr212 + ATi212 + 10ATr31 + ATi31 + 10ATr32 +
 ATi32 + 10ATr33 + ATi33 + 10ATr34 + ATi34 + 10ATr35 + ATi35 +
 10ATr36 + ATi36 + 10ATr37 + ATi37 + 10ATr38 + ATi38 +
 10ATr39 + ATi39 + 10ATr310 + ATi310 + 10ATr311 + ATi311 +
 10ATr312 + ATi312;

/* Restrições */

/* Restringir a produção para o armazém de produto final */

P11 + 20 - A11 = EN11 ;
 P21 + 10 - A21 = EN21 ;
 P31 + 10 - A31 = EN31 ;

P12 + A11 - A12 = ATi11 + ATr11 + EN12 ;
 P22 + A21 - A22 = ATi21 + ATr21 + EN22 ;
 P32 + A31 - A32 = ATi31 + ATr31 + EN32 ;

P13 + A12 - A13 = ATi12 + ATr12 + EN13 ;
 P23 + A22 - A23 = ATi22 + ATr22 + EN23 ;
 P33 + A32 - A33 = ATi32 + ATr32 + EN33 ;

$$\begin{aligned}
P14 + A13 - A14 &= ATi13 + ATr13 + EN14 ; \\
P24 + A23 - A24 &= ATi23 + ATr23 + EN24 ; \\
P34 + A33 - A34 &= ATi33 + ATr33 + EN34 ; \\
\\
P15 + A14 - A15 &= ATi14 + ATr14 + EN15 ; \\
P25 + A24 - A25 &= ATi24 + ATr24 + EN25 ; \\
P35 + A34 - A35 &= ATi34 + ATr34 + EN35 ; \\
\\
P16 + A15 - A16 &= ATi15 + ATr15 + EN16 ; \\
P26 + A25 - A26 &= ATi25 + ATr25 + EN26 ; \\
P36 + A35 - A36 &= ATi35 + ATr35 + EN36 ; \\
\\
P17 + A16 - A17 &= ATi16 + ATr16 + EN17 ; \\
P27 + A26 - A27 &= ATi26 + ATr26 + EN27 ; \\
P37 + A36 - A37 &= ATi36 + ATr36 + EN37 ; \\
\\
P18 + A17 - A18 &= ATi17 + ATr17 + EN18 ; \\
P28 + A27 - A28 &= ATi27 + ATr27 + EN28 ; \\
P38 + A37 - A38 &= ATi37 + ATr37 + EN38 ; \\
\\
P19 + A18 - A19 &= ATi18 + ATr18 + EN19 ; \\
P29 + A28 - A29 &= ATi28 + ATr28 + EN29 ; \\
P39 + A38 - A39 &= ATi38 + ATr38 + EN39 ; \\
\\
P110 + A19 - A110 &= ATi19 + ATr19 + EN110 ; \\
P210 + A29 - A210 &= ATi29 + ATr29 + EN210 ; \\
P310 + A39 - A310 &= ATi39 + ATr39 + EN310 ; \\
\\
P111 + A110 - A111 &= ATi110 + ATr110 + EN111 ; \\
P211 + A210 - A211 &= ATi210 + ATr210 + EN211 ; \\
P311 + A310 - A311 &= ATi310 + ATr310 + EN311 ; \\
\\
P112 + A111 - A112 &= ATi111 + ATr111 + EN112 ; \\
P212 + A211 - A212 &= ATi211 + ATr211 + EN212 ; \\
P312 + A311 - A312 &= ATi311 + ATr311 + EN312 ; \\
\\
/* Restrições da entrega e atraso num mês */ \\
\\
EN11 + ATi11 + ATr11 &= 9 ; \\
EN21 + ATi21 + ATr21 &= 5 ; \\
EN31 + ATi31 + ATr31 &= 4 ; \\
\\
EN12 + ATi12 + ATr12 &= 9 ; \\
EN22 + ATi22 + ATr22 &= 5 ; \\
EN32 + ATi32 + ATr32 &= 4 ;
\end{aligned}$$

EN13 + ATi13 + ATr13 = 9;
EN23 + ATi23 + ATr23 = 5;
EN33 + ATi33 + ATr33 = 4;

EN14 + ATi14 + ATr14 = 12;
EN24 + ATi24 + ATr24 = 6;
EN34 + ATi34 + ATr34 = 5;

EN15 + ATi15 + ATr15 = 16;
EN25 + ATi25 + ATr25 = 8;
EN35 + ATi35 + ATr35 = 6;

EN16 + ATi16 + ATr16 = 17;
EN26 + ATi26 + ATr26 = 9;
EN36 + ATi36 + ATr36 = 7;

EN17 + ATi17 + ATr17 = 19;
EN27 + ATi27 + ATr27 = 10;
EN37 + ATi37 + ATr37 = 8;

EN18 + ATi18 + ATr18 = 19;
EN28 + ATi28 + ATr28 = 10;
EN38 + ATi38 + ATr38 = 8;

EN19 + ATi19 + ATr19 = 16;
EN29 + ATi29 + ATr29 = 8;
EN39 + ATi39 + ATr39 = 6;

EN110 + ATi110 + ATr110 = 12;
EN210 + ATi210 + ATr210 = 6;
EN310 + ATi310 + ATr310 = 5;

EN111 + ATi111 + ATr111 = 10;
EN211 + ATi211 + ATr211 = 5;
EN311 + ATi311 + ATr311 = 4;

EN112 = 9;
EN212 = 5;
EN312 = 4;

/* Restringir a compra para o armazém de matéria-prima */

C11 + 16 - B11 = P11;
C21 + 8 - B21 = P21;
C31 + 6 - B31 = P31;

C12 + B11 - B12 = P12;

$$C22 + B21 - B22 = P22;$$

$$C32 + B31 - B32 = P32;$$

$$C13 + B12 - B13 = P13;$$

$$C23 + B22 - B23 = P23;$$

$$C33 + B32 - B33 = P33;$$

$$C14 + B13 - B14 = P14;$$

$$C24 + B23 - B24 = P24;$$

$$C34 + B33 - B34 = P34;$$

$$C15 + B14 - B15 = P15;$$

$$C25 + B24 - B25 = P25;$$

$$C35 + B34 - B35 = P35;$$

$$C16 + B15 - B16 = P16;$$

$$C26 + B25 - B26 = P26;$$

$$C36 + B35 - B36 = P36;$$

$$C17 + B16 - B17 = P17;$$

$$C27 + B26 - B27 = P27;$$

$$C37 + B36 - B37 = P37;$$

$$C18 + B17 - B18 = P18;$$

$$C28 + B27 - B28 = P28;$$

$$C38 + B37 - B38 = P38;$$

$$C19 + B18 - B19 = P19;$$

$$C29 + B28 - B29 = P29;$$

$$C39 + B38 - B39 = P39;$$

$$C110 + B19 - B110 = P110;$$

$$C210 + B29 - B210 = P210;$$

$$C310 + B39 - B310 = P310;$$

$$C111 + B110 - B111 = P111;$$

$$C211 + B210 - B211 = P211;$$

$$C311 + B310 - B311 = P311;$$

$$C112 + B111 - B112 = P112;$$

$$C212 + B211 - B212 = P212;$$

$$C312 + B311 - B312 = P312;$$

/* Restringir a produção no mês */

$$P11 + P21 + P31 \leq 30;$$

$$P12 + P22 + P32 \leq 30;$$

```

P13 + P23 + P33 <= 30;
P14 + P24 + P34 <= 30;
P15 + P25 + P35 <= 30;
P16 + P26 + P36 <= 30;
P17 + P27 + P37 <= 30;
P18 + P28 + P38 <= 30;
P19 + P29 + P39 <= 30;
P110 + P210 + P310 <= 30;
P111 + P211 + P311 <= 30;
P112 + P212 + P312 <= 30;

```

```

/* Restringir o armazenamento de produto final no mês */

```

```

A11 + A21 + A31 <= 40;
A12 + A22 + A32 <= 40;
A13 + A23 + A33 <= 40;
A14 + A24 + A34 <= 40;
A15 + A25 + A35 <= 40;
A16 + A26 + A36 <= 40;
A17 + A27 + A37 <= 40;
A18 + A28 + A38 <= 40;
A19 + A29 + A39 <= 40;
A110 + A210 + A310 <= 40;
A111 + A211 + A311 <= 40;
A112 + A212 + A312 <= 40;

```

```

/* Restringir o armazenamento de matéria-prima no mês */

```

```

B11 + B21 + B31 <= 30;
B12 + B22 + B32 <= 30;
B13 + B23 + B33 <= 30;
B14 + B24 + B34 <= 30;
B15 + B25 + B35 <= 30;
B16 + B26 + B36 <= 30;
B17 + B27 + B37 <= 30;
B18 + B28 + B38 <= 30;
B19 + B29 + B39 <= 30;
B110 + B210 + B310 <= 30;
B111 + B211 + B311 <= 30;
B112 + B212 + B312 <= 30;

```

```

/* Restringir armazenamento final */

```

```

A112 = 20;
A212 = 10;
A312 = 10;

```

```

B112 = 16;
B212 = 8;
B312 = 6;

/* Declaração das variáveis binárias */

Bin ATi11, ATi21, ATi31, ATi12, ATi22, ATi32, ATi13, ATi23,
ATi33, ATi14, ATi24, ATi34, ATi15, ATi25, ATi35, ATi16,
ATi26, ATi36, ATi17, ATi27, ATi37, ATi18, ATi28, ATi38,
ATi19, ATi29, ATi39, ATi110, ATi210, ATi310, ATi111, ATi211,
ATi311, ATi112, ATi212, ATi312;

```

3.3 Ficheiro de Output

Value of objective function: 52841

Actual values of the variables:

P11	0
A11	11
B11	16
C11	0
P12	16
A12	18
B12	0
C12	0
P13	0
A13	9
B13	0
C13	0
P14	3
A14	0
B14	14
C14	17
P15	14
A15	0
B15	0
C15	0
P16	22
A16	3
B16	16
C16	38
P17	16
A17	0
B17	0
C17	0
P18	18

A18	0
B18	17
C18	35
P19	17
A19	0
B19	0
C19	0
P110	22
A110	10
B110	0
C110	22
P111	0
A111	0
B111	0
C111	0
P112	29
A112	20
B112	16
C112	45
P21	0
A21	5
B21	8
C21	0
P22	2
A22	2
B22	6
C22	0
P23	30
A23	27
B23	30
C23	54
P24	14
A24	35
B24	16
C24	0
P25	5
A25	32
B25	11
C25	0
P26	0
A26	23
B26	11
C26	0
P27	9
A27	22
B27	7
C27	5

P28	0
A28	12
B28	7
C28	0
P29	7
A29	11
B29	0
C29	0
P210	3
A210	8
B210	11
C210	14
P211	11
A211	14
B211	0
C211	0
P212	1
A212	10
B212	8
C212	9
P31	0
A31	6
B31	6
C31	0
P32	6
A32	8
B32	0
C32	0
P33	0
A33	4
B33	0
C33	0
P34	6
A34	5
B34	0
C34	6
P35	0
A35	0
B35	0
C35	0
P36	8
A36	0
B36	3
C36	11
P37	3
A37	0
B37	0

C37	0
P38	12
A38	0
B38	6
C38	18
P39	6
A39	0
B39	0
C39	0
P310	5
A310	0
B310	0
C310	5
P311	19
A311	14
B311	6
C311	25
P312	0
A312	10
B312	6
C312	0
ATr11	0
ATi11	0
ATr12	0
ATi12	0
ATr13	0
ATi13	0
ATr14	0
ATi14	0
ATr15	1
ATi15	1
ATr16	0
ATi16	0
ATr17	0
ATi17	0
ATr18	0
ATi18	1
ATr19	0
ATi19	0
ATr110	0
ATi110	0
ATr111	0
ATi111	0
ATr112	0
ATi112	0
ATr21	0
ATi21	0

ATr22	0
ATi22	0
ATr23	0
ATi23	0
ATr24	0
ATi24	0
ATr25	0
ATi25	0
ATr26	0
ATi26	0
ATr27	0
ATi27	0
ATr28	0
ATi28	0
ATr29	0
ATi29	0
ATr210	0
ATi210	0
ATr211	0
ATi211	0
ATr212	0
ATi212	0
ATr31	0
ATi31	0
ATr32	0
ATi32	0
ATr33	0
ATi33	0
ATr34	0
ATi34	0
ATr35	0
ATi35	1
ATr36	0
ATi36	0
ATr37	4
ATi37	1
ATr38	0
ATi38	1
ATr39	0
ATi39	1
ATr310	0
ATi310	1
ATr311	0
ATi311	0
ATr312	0
ATi312	0
EN11	9

EN21	5
EN31	4
EN12	9
EN22	5
EN32	4
EN13	9
EN23	5
EN33	4
EN14	12
EN24	6
EN34	5
EN15	14
EN25	8
EN35	5
EN16	17
EN26	9
EN36	7
EN17	19
EN27	10
EN37	3
EN18	18
EN28	10
EN38	7
EN19	16
EN29	8
EN39	5
EN110	12
EN210	6
EN310	4
EN111	10
EN211	5
EN311	4
EN112	9
EN212	5
EN312	4

3.4 Plano detalhado de produção

Laranja

Mês	Jan	Fer	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade Produzida (p)	0	16	0	3	14	19	19	18	17	22	0	29
Quantidade Comprada (C)	0	0	0	17	0	38	0	35	0	22	0	45
Quantidade (b) Armazenada (matéria-prima)	16	0	0	14	0	19	0	17	0	0	0	16
Quantidade (a) Armazenada (produto final)	11	18	9	0	0	0	0	0	0	10	0	20
Quantidade de produto entregue (en)	9	9	9	12	14	17	19	18	16	12	10	9
Verifica se tem atraso ou não (ati)	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
Quantidade acima de 1 unidade que foi entregue (atr)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Procura	9	9	9	12	16	17	19	19	16	12	10	9

Maçã

Mês	Jan	Fer	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade Produzida (p)	0	2	30	14	5	3	6	0	7	3	11	1
Quantidade Comprada (c)	0	0	54	0	0	0	5	0	0	14	0	9
Quantidade Armazenada (matéria-prima) (b)	8	6	30	16	11	8	7	7	0	11	0	8
Quantidade Armazenada (produto final) (a)	5	2	27	35	32	26	22	12	11	8	14	10
Quantidade de produto entregue (en)	5	5	5	6	8	9	10	10	8	6	5	5
Verifica se tem atraso ou não (ati)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Quantidade acima de 1 unidade que foi entregue (atr)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Procura	5	5	5	6	8	9	10	10	8	6	5	5

Pêra

Mês	Jan	Fer	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade Produzida (p)	0	6	0	6	0	8	3	12	6	5	19	0
Quantidade Comprada (c)	0	0	0	6	0	11	0	18	0	5	25	0
Quantidade Armazenada (matéria-prima) (b)	6	0	0	0	0	3	0	6	0	0	6	6
Quantidade Armazenada (produto final) (a)	6	8	4	5	0	0	0	0	0	0	14	10
Quantidade de produto entregue (en)	4	4	4	5	5	7	3	7	5	4	4	4
Verifica se tem atraso ou não (ati)	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
Quantidade acima de 1 unidade que foi entregue (atr)	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0
Procura	4	4	4	5	6	7	8	8	6	5	4	4

Todos os valores apresentados nas tabelas anteriores estão expressos em U.E..

3.5 Validação do plano detalhado de produção

/* Restringir a produção no mês */

$P_{11} + P_{21} + P_{31} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 0 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{12} + P_{22} + P_{32} \leq 30 \Leftrightarrow 16 + 2 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 24 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{13} + P_{23} + P_{33} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 30 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{14} + P_{24} + P_{34} \leq 30 \Leftrightarrow 3 + 14 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 23 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{15} + P_{25} + P_{35} \leq 30 \Leftrightarrow 14 + 5 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 19 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{16} + P_{26} + P_{36} \leq 30 \Leftrightarrow 22 + 0 + 8 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{17} + P_{27} + P_{37} \leq 30 \Leftrightarrow 16 + 9 + 3 \leq 30 \Leftrightarrow 28 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{18} + P_{28} + P_{38} \leq 30 \Leftrightarrow 18 + 0 + 12 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{19} + P_{29} + P_{39} \leq 30 \Leftrightarrow 17 + 7 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{110} + P_{210} + P_{310} \leq 30 \Leftrightarrow 22 + 3 + 5 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{111} + P_{211} + P_{311} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 11 + 19 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots$ Verdadeiro
 $P_{112} + P_{212} + P_{312} \leq 30 \Leftrightarrow 29 + 1 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots$ Verdadeiro

/* Restringir o armazenamento de produto final no mês */

$A_{11} + A_{21} + A_{31} \leq 40 \Leftrightarrow 11 + 5 + 6 \leq 40 \Leftrightarrow 22 \leq 40 \dots$ Verdadeiro
 $A_{12} + A_{22} + A_{32} \leq 40 \Leftrightarrow 18 + 2 + 8 \leq 40 \Leftrightarrow 28 \leq 40 \dots$ Verdadeiro
 $A_{13} + A_{23} + A_{33} \leq 40 \Leftrightarrow 9 + 27 + 4 \leq 40 \Leftrightarrow 40 \leq 40 \dots$ Verdadeiro
 $A_{14} + A_{24} + A_{34} \leq 40 \Leftrightarrow 0 + 35 + 5 \leq 40 \Leftrightarrow 40 \leq 40 \dots$ Verdadeiro
 $A_{15} + A_{25} + A_{35} \leq 40 \Leftrightarrow 0 + 32 + 0 \leq 40 \Leftrightarrow 32 \leq 40 \dots$ Verdadeiro
 $A_{16} + A_{26} + A_{36} \leq 40 \Leftrightarrow 3 + 23 + 0 \leq 40 \Leftrightarrow 26 \leq 40 \dots$ Verdadeiro

$A17 + A27 + A37 \leq 40 \Leftrightarrow 0 + 22 + 0 \leq 40 \Leftrightarrow 22 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$
 $A18 + A28 + A38 \leq 40 \Leftrightarrow 0 + 12 + 0 \leq 40 \Leftrightarrow 12 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$
 $A19 + A29 + A39 \leq 40 \Leftrightarrow 0 + 11 + 0 \leq 40 \Leftrightarrow 11 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$
 $A110 + A210 + A310 \leq 40 \Leftrightarrow 10 + 8 + 0 \leq 40 \Leftrightarrow 18 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$
 $A111 + A211 + A311 \leq 40 \Leftrightarrow 0 + 14 + 14 \leq 40 \Leftrightarrow 28 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$
 $A112 + A212 + A312 \leq 40 \Leftrightarrow 20 + 10 + 10 \leq 40 \Leftrightarrow 40 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restringir o armazenamento de matéria-prima no mês */

$B11 + B21 + B31 \leq 30 \Leftrightarrow 16 + 8 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B12 + B22 + B32 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 6 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 6 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B13 + B23 + B33 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 30 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B14 + B24 + B34 \leq 30 \Leftrightarrow 14 + 16 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B15 + B25 + B35 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 11 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 11 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B16 + B26 + B36 \leq 30 \Leftrightarrow 16 + 11 + 3 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B17 + B27 + B37 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 7 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 7 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B18 + B28 + B38 \leq 30 \Leftrightarrow 17 + 7 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B19 + B29 + B39 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 0 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B110 + B210 + B310 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 11 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 11 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B111 + B211 + B311 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 0 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 6 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B112 + B212 + B312 \leq 30 \Leftrightarrow 16 + 8 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restringir armazenamento final */

$A112 = 20 \dots \text{Verdadeiro}$
 $A212 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $A312 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$

$B112 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B212 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B312 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restringir a produção para o armazém de produto final */

$P11 + 20 - A11 = EN11 \Leftrightarrow 0 + 20 - 11 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P21 + 10 - A21 = EN21 \Leftrightarrow 0 + 10 - 5 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P31 + 10 - A31 = EN31 \Leftrightarrow 0 + 10 - 6 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

$P12 + A11 - A12 = ATi11 + ATr11 + EN12 \Leftrightarrow$
 $16 + 11 - 18 = 0 + 0 + 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P22 + A21 - A22 = ATi21 + ATr21 + EN22 \Leftrightarrow$
 $2 + 5 - 2 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P32 + A31 - A32 = ATi31 + ATr31 + EN32 \Leftrightarrow$
 $6 + 6 - 8 = 0 + 0 + 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

$P13 + A12 - A13 = ATi12 + ATr12 + EN13 \Leftrightarrow$
 $0 + 18 - 9 = 0 + 0 + 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P23 + A22 - A23 = ATi22 + ATr22 + EN23 \Leftrightarrow$

$$30 + 2 - 27 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P33 + A32 - A33 = ATi32 + ATr32 + EN33 \Leftrightarrow$$

$$0 + 8 - 4 = 0 + 0 + 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P14 + A13 - A14 = ATi13 + ATr13 + EN14 \Leftrightarrow$$

$$3 + 9 - 0 = 0 + 0 + 12 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P24 + A23 - A24 = ATi23 + ATr23 + EN24 \Leftrightarrow$$

$$14 + 27 - 35 = 0 + 0 + 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P34 + A33 - A34 = ATi33 + ATr33 + EN34 \Leftrightarrow$$

$$6 + 4 - 5 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P15 + A14 - A15 = ATi14 + ATr14 + EN15 \Leftrightarrow$$

$$14 + 0 - 0 = 0 + 0 + 14 \Leftrightarrow 14 = 14 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P25 + A24 - A25 = ATi24 + ATr24 + EN25 \Leftrightarrow$$

$$5 + 35 - 32 = 0 + 0 + 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P35 + A34 - A35 = ATi34 + ATr34 + EN35 \Leftrightarrow$$

$$0 + 5 - 0 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P16 + A15 - A16 = ATi15 + ATr15 + EN16 \Leftrightarrow$$

$$22 + 0 - 3 = 1 + 1 + 17 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P26 + A25 - A26 = ATi25 + ATr25 + EN26 \Leftrightarrow$$

$$0 + 32 - 23 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P36 + A35 - A36 = ATi35 + ATr35 + EN36 \Leftrightarrow$$

$$8 + 0 - 0 \Leftrightarrow 1 + 0 + 7 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P17 + A16 - A17 = ATi16 + ATr16 + EN17 \Leftrightarrow$$

$$16 + 3 - 0 = 0 + 0 + 19 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P27 + A26 - A27 = ATi26 + ATr26 + EN27 \Leftrightarrow$$

$$9 + 23 - 22 = 0 + 0 + 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P37 + A36 - A37 = ATi36 + ATr36 + EN37 \Leftrightarrow$$

$$3 + 0 + 0 = 0 + 0 + 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P18 + A17 - A18 = ATi17 + ATr17 + EN18 \Leftrightarrow$$

$$18 + 0 - 0 = 0 + 0 + 18 \Leftrightarrow 18 = 18 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P28 + A27 - A28 = ATi27 + ATr27 + EN28 \Leftrightarrow$$

$$0 + 22 - 12 = 0 + 0 + 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P38 + A37 - A38 = ATi37 + ATr37 + EN38 \Leftrightarrow$$

$$12 + 0 + 0 = 1 + 4 + 7 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P19 + A18 - A19 = ATi18 + ATr18 + EN19 \Leftrightarrow$$

$$17 + 0 - 0 = 1 + 0 + 16 \Leftrightarrow 17 = 17 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P29 + A28 - A29 = ATi28 + ATr28 + EN29 \Leftrightarrow$$

$$7 + 12 - 11 = 0 + 0 + 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P39 + A38 - A39 = ATi38 + ATr38 + EN39 \Leftrightarrow$$

$$6 + 0 + 0 = 1 + 0 + 5 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P110 + A19 - A110 = ATi19 + ATr19 + EN110 \Leftrightarrow$$

$22 + 0 - 10 = 0 + 0 + 12 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P210 + A29 - A210 = ATi29 + ATr29 + EN210 \Leftrightarrow$
 $3 + 11 - 8 = 0 + 0 + 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P310 + A39 - A310 = ATi39 + ATr39 + EN310 \Leftrightarrow$
 $5 + 0 - 0 = 1 + 0 + 4 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$

$P111 + A110 - A111 = ATi110 + ATr110 + EN111 \Leftrightarrow$
 $0 + 10 - 0 = 0 + 0 + 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P211 + A210 - A211 = ATi210 + ATr210 + EN211 \Leftrightarrow$
 $11 + 8 - 14 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P311 + A310 - A311 = ATi310 + ATr310 + EN311 \Leftrightarrow$
 $19 + 0 - 14 = 1 + 0 + 4 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$

$P112 + A111 - A112 = ATi111 + ATr111 + EN112 \Leftrightarrow$
 $29 + 0 - 20 = 0 + 0 + 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P212 + A211 - A212 = ATi211 + ATr211 + EN212 \Leftrightarrow$
 $1 + 14 - 10 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P312 + A311 - A312 = ATi311 + ATr311 + EN312 \Leftrightarrow$
 $0 + 14 - 10 = 0 + 0 + 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restrições da entrega e atraso num mês */

$EN11 + ATi11 + ATr11 = 9 \Leftrightarrow 9 + 0 + 0 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN21 + ATi21 + ATr21 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 + 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN31 + ATi31 + ATr31 = 4 \Leftrightarrow 4 + 0 + 0 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN12 + ATi12 + ATr12 = 9 \Leftrightarrow 9 + 0 + 0 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN22 + ATi22 + ATr22 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 + 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN32 + ATi32 + ATr32 = 4 \Leftrightarrow 4 + 0 + 0 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN13 + ATi13 + ATr13 = 9 \Leftrightarrow 9 + 0 + 0 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN23 + ATi23 + ATr23 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 + 0 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN33 + ATi33 + ATr33 = 4 \Leftrightarrow 4 + 0 + 0 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN14 + ATi14 + ATr14 = 12 \Leftrightarrow 12 + 0 + 0 = 12 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN24 + ATi24 + ATr24 = 6 \Leftrightarrow 6 + 0 + 0 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN34 + ATi34 + ATr34 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 + 0 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN15 + ATi15 + ATr15 = 16 \Leftrightarrow 14 + 1 + 1 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN25 + ATi25 + ATr25 = 8 \Leftrightarrow 8 + 0 + 0 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN35 + ATi35 + ATr35 = 6 \Leftrightarrow 5 + 1 + 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN16 + ATi16 + ATr16 = 17 \Leftrightarrow 17 + 0 + 0 = 17 \Leftrightarrow 17 = 17 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN26 + ATi26 + ATr26 = 9 \Leftrightarrow 9 + 0 + 0 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN36 + ATi36 + ATr36 = 7 \Leftrightarrow 7 + 0 + 0 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN17 + ATi17 + ATr17 = 19 \Leftrightarrow 19 + 0 + 0 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN27 + ATi27 + ATr27 = 10 \Leftrightarrow 10 + 0 + 0 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN37 + ATi37 + ATr37 = 8 \Leftrightarrow 3 + 1 + 4 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN18 + ATi18 + ATr18 = 19 \Leftrightarrow 18 + 1 + 0 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN28 + ATi28 + ATr28 = 10 \Leftrightarrow 10 + 0 + 0 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN38 + ATi38 + ATr38 = 8 \Leftrightarrow 7 + 1 + 0 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN19 + ATi19 + ATr19 = 16 \Leftrightarrow 16 + 0 + 0 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN29 + ATi29 + ATr29 = 8 \Leftrightarrow 8 + 0 + 0 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN39 + ATi39 + ATr39 = 6 \Leftrightarrow 5 + 1 + 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN110 + ATi110 + ATr110 = 12 \Leftrightarrow 12 + 0 + 0 = 12 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN210 + ATi210 + ATr210 = 6 \Leftrightarrow 6 + 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN310 + ATi310 + ATr310 = 5 \Leftrightarrow 4 + 1 + 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN111 + ATi111 + ATr111 = 10 \Leftrightarrow 10 + 0 + 0 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN211 + ATi211 + ATr211 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 + 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN311 + ATi311 + ATr311 = 4 \Leftrightarrow 4 + 0 + 0 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN112 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN212 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN312 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restringir a compra para o armazém de matéria-prima */

$C11 + 16 - B11 = P11 \Leftrightarrow 0 + 16 - 16 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C21 + 8 - B21 = P21 \Leftrightarrow 0 + 8 - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C31 + 6 - B31 = P31 \Leftrightarrow 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C12 + B11 - B12 = P12 \Leftrightarrow 0 + 16 - 0 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C22 + B21 - B22 = P22 \Leftrightarrow 0 + 8 - 6 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C32 + B31 - B32 = P32 \Leftrightarrow 0 + 6 - 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

$C13 + B12 - B13 = P13 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C23 + B22 - B23 = P23 \Leftrightarrow 54 + 6 - 30 = 30 \Leftrightarrow 30 = 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C33 + B32 - B33 = P33 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C14 + B13 - B14 = P14 \Leftrightarrow 17 + 0 - 14 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C24 + B23 - B24 = P24 \Leftrightarrow 0 + 30 - 16 = 14 \Leftrightarrow 14 = 14 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C34 + B33 - B34 = P34 \Leftrightarrow 6 + 0 - 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

$C15 + B14 - B15 = P15 \Leftrightarrow 0 + 14 - 0 = 14 \Leftrightarrow 14 = 14 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C25 + B24 - B25 = P25 \Leftrightarrow 0 + 16 - 11 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C35 + B34 - B35 = P35 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C16 + B15 - B16 = P16 \Leftrightarrow 38 + 0 - 16 = 22 \Leftrightarrow 22 = 22 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C26 + B25 - B26 = P26 \Leftrightarrow 0 + 11 - 11 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C36 + B35 - B36 = P36 \Leftrightarrow 11 + 0 - 3 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$

$C17 + B16 - B17 = P17 \Leftrightarrow 0 + 16 - 0 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$

$C27 + B26 - B27 = P27 \Leftrightarrow 5 + 11 - 7 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$

$C37 + B36 - B37 = P37 \Leftrightarrow 0 + 3 - 0 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \dots \text{Verdadeiro}$

$C18 + B17 - B18 = P18 \Leftrightarrow 35 + 0 - 17 = 18 \Leftrightarrow 18 = 18 \dots \text{Verdadeiro}$

$C28 + B27 - B28 = P28 \Leftrightarrow 0 + 7 - 7 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C38 + B37 - B38 = P38 \Leftrightarrow 18 + 0 - 6 = 12 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots \text{Verdadeiro}$

$C19 + B18 - B19 = P19 \Leftrightarrow 0 + 17 - 0 = 17 \Leftrightarrow 17 = 17 \dots \text{Verdadeiro}$

$C29 + B28 - B29 = P29 \Leftrightarrow 0 + 7 - 0 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7 \dots \text{Verdadeiro}$

$C39 + B38 - B39 = P39 \Leftrightarrow 0 + 6 - 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

$C110 + B19 - B110 = P110 \Leftrightarrow 22 + 0 - 0 = 22 \Leftrightarrow 22 = 22 \dots \text{Verdadeiro}$

$C210 + B29 - B210 = P210 \Leftrightarrow 14 + 0 - 11 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \dots \text{Verdadeiro}$

$C310 + B39 - B310 = P310 \Leftrightarrow 5 + 0 - 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$

$C111 + B110 - B111 = P111 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C211 + B210 - B211 = P211 \Leftrightarrow 0 + 11 - 0 = 11 \Leftrightarrow 11 = 11 \dots \text{Verdadeiro}$

$C311 + B310 - B311 = P311 \Leftrightarrow 25 + 0 - 6 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots \text{Verdadeiro}$

$C112 + B111 - B112 = P112 \Leftrightarrow 45 + 0 - 16 = 29 \Leftrightarrow 29 = 29 \dots \text{Verdadeiro}$

$C212 + B211 - B212 = P212 \Leftrightarrow 9 + 0 - 8 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$

$C312 + B311 - B312 = P312 \Leftrightarrow 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

3.6 Validação da solução ótima

3.6.1 Sumo de Laranja

/ Cálculo do custo de compra de concentrado */*

$\text{CustoConcentradoLaranja} = 180 C11 + 160 C12 + 180 C13 + 160 C14 + 180 C15 + 160 C16 + 180 C17 + 160 C18 + 180 C19 + 160 C110 + 180 C111 + 160 C112 = 80 \times 0 + 160 \times 0 + 180 \times 0 + 160 \times 17 + 180 \times 0 + 160 \times 38 + 180 \times 0 + 160 \times 35 + 180 \times 0 + 160 \times 22 + 180 \times 0 + 160 \times 45 = 25120 \text{ (U.M.)}$

/ Cálculo do custo de produção */*

$\text{CustoProducaoLaranja} = 10 P11 + 10 P12 + 10 P13 + 10 P14 + 10 P15 + 10 P16 + 10 P17 + 12 P18 + 10 P19 + 10 P110 + 10 P111 + 10 P112 = 10 \times 0 + 10 \times 16 + 10 \times 0 + 10 \times 3 + 10 \times 14 + 10 \times 19 + 10 \times 19 + 12 \times 18 + 10 \times 17 + 10 \times 22 + 10 \times 0 + 10 \times 29 = 1606 \text{ (U.M.)}$

/ Cálculo do custo de armazenamento */*

$\text{CustoStockLaranja} = 3(A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{15} + A_{16} + A_{17} + A_{18} + A_{19} + A_{110} + A_{111} + A_{112}) + B_{11} + B_{12} + B_{13} + B_{14} + B_{15} + B_{16} + B_{17} + B_{18} + B_{19} + B_{110} + B_{111} + B_{112} = 3(11 + 18 + 9 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 10 + 0 + 20) + 16 + 0 + 0 + 14 + 0 + 19 + 0 + 17 + 0 + 0 + 0 + 16 = 286 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo das penalidades de atraso */

$\text{CustoAtrasoLaranja} = A_{Ti11} + A_{Ti12} + A_{Ti13} + A_{Ti14} + A_{Ti15} + A_{Ti16} + A_{Ti17} + A_{Ti18} + A_{Ti19} + A_{Ti110} + A_{Ti111} + A_{Ti112} + 10(A_{Tr11} + A_{Tr12} + A_{Tr13} + A_{Tr14} + A_{Tr15} + A_{Tr16} + A_{Tr17} + A_{Tr18} + A_{Tr19} + A_{Tr110} + A_{Tr111} + A_{Tr112}) = 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 10(0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 12 \text{ (U.M.)}$

3.6.2 Sumo de Maçã

/* Cálculo do custo de compra de concentrado */

$\text{CustoConcentradoMaca} = 231 C_{21} + 199 C_{22} + 187 C_{23} + 198 C_{24} + 210 C_{25} + 208 C_{26} + 211 C_{27} + 220 C_{28} + 217 C_{29} + 216 C_{210} + 221 C_{211} + 217 C_{212} = 231 \times 0 + 199 \times 0 + 187 \times 54 + 198 \times 0 + 210 \times 0 + 208 \times 0 + 211 \times 5 + 220 \times 0 + 217 \times 0 + 216 \times 14 + 221 \times 0 + 217 \times 9 = 16130 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de produção */

$\text{CustoProducaoMaca} = 10 P_{21} + 10 P_{22} + 10 P_{23} + 10 P_{24} + 10 P_{25} + 10 P_{26} + 10 P_{27} + 12 P_{28} + 10 P_{29} + 10 P_{210} + 10 P_{211} + 10 P_{212} = 10 \times 0 + 10 \times 2 + 10 \times 30 + 10 \times 14 + 10 \times 5 + 10 \times 3 + 10 \times 6 + 12 \times 0 + 10 \times 7 + 10 \times 3 + 10 \times 11 + 10 \times 1 = 820 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de armazenamento */

$\text{CustoStockMaca} = 3(A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} + A_{25} + A_{26} + A_{27} + A_{28} + A_{29} + A_{210} + A_{211} + A_{212}) + B_{21} + B_{22} + B_{23} + B_{24} + B_{25} + B_{26} + B_{27} + B_{28} + B_{29} + B_{210} + B_{211} + B_{212} = 3(5 + 2 + 27 + 35 + 32 + 26 + 22 + 12 + 11 + 8 + 14 + 10) + 8 + 6 + 30 + 16 + 11 + 8 + 7 + 7 + 0 + 11 + 0 + 8 = 724 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo das penalidades de atraso */

$\text{CustoAtrasoMaca} = A_{Ti21} + A_{Ti22} + A_{Ti23} + A_{Ti24} + A_{Ti25} + A_{Ti26} + A_{Ti27} + A_{Ti28} + A_{Ti29} + A_{Ti210} + A_{Ti211} + A_{Ti212} + 10(A_{Tr21} + A_{Tr22} + A_{Tr23} + A_{Tr24} + A_{Tr25} + A_{Tr26} + A_{Tr27} + A_{Tr28} + A_{Tr29} + A_{Tr210} + A_{Tr211} + A_{Tr212})$

ATr212) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 10(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 0 (U.M)

3.6.3 Sumo de Pêra

/* Cálculo do custo de compra de concentrado */

CustoConcentradoPera = 116 C31 + 116 C32 + 124 C33 + 120 C34 + 132 C35 + 128 C36 + 136 C37 + 116 C38 + 120 C39 + 108 C310 + 100 C311 + 116 C312 = 116 x 0 + 116 x 0 + 124 x 0 + 120 x 6 + 132 x 0 + 128 x 11 + 136 x 0 + 116 x 18 + 120 x 0 + 108 x 5 + 100 x 25 + 116 x 0 = 7256 (U.M)

/* Cálculo do custo de produção */

CustoProducaoPera = 10 P31 + 10 P32 + 10 P33 + 10 P34 + 10 P35 + 10 P36 + 10 P37 + 12 P38 + 10 P39 + 10 P310 + 10 P311 + 10 P312 = 10 x 0 + 10 x 6 + 10 x 0 + 10 x 6 + 10 x 0 + 10 x 8 + 10 x 3 + 12 x 12 + 10 x 6 + 10 x 5 + 10 x 19 + 10 x 0 = 674 (U.M.)

/* Cálculo do custo de armazenamento */

CustoStockPera = 3(A31 + A32 + A33 + A34 + A35 + A36 + A37 + A38 + A39 + A310 + A311 + A312) + B31 + B32 + B33 + B34 + B35 + B36 + B37 + B38 + B39 + B310 + B311 + B312 = 3(6 + 8 + 4 + 5 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 14 + 10) + 6 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 + 0 + 6 + 0 + 0 + 6 + 6 = 168 (U.M.)

/* Cálculo do custo das penalidades de atraso */

CustoAtrasoPera = ATi31 + ATi32 + ATi33 + ATi34 + ATi35 + ATi36 + ATi37 + ATi38 + ATi39 + ATi310 + ATi311 + ATi312 + 10(ATr31 + ATr32 + ATr33 + ATr34 + ATr35 + ATr36 + ATr37 + ATr38 + ATr39 + ATr310 + ATr311 + ATr312) = 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 10(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 45 (U.M)

3.6.4 Custo Total

CustoTotal = CustoConcentradoLaranja + CustoConcentradoMaca + CustoConcentradoPera + CustoProducaoLaranja + CustoProducaoMaca + CustoProducaoPera + CustoStockLaranja + CustoStockMaca + CustoStockPera + CustoAtrasoLaranja + CustoAtrasoMaca + CustoAtrasoPera = 25120 + 16130 + 7256 + 1606 + 820 + 674 + 286 + 724 + 168 + 12 + 0 + 45 = 52841 (U.M)

Como podemos observar, o Custo Total é igual à solução ótima obtida utilizando o LPSolve.

4. Parte III

4.1 Formulação do problema

Tendo em conta a sequência das partes anteriores, o modelo de programação linear apresentado nesta parte tem como objetivo, uma vez mais, determinar as quantidades a comprar, produzir e armazenar, em cada período e de cada tipo de sumo, continuando a aceitar atrasos na entrega, no entanto com a restrição adicional de que só é possível produzir um tipo de fruta por mês.

Satisfazendo igualmente a procura dos clientes num plano de atividade de 12 meses, com um custo global mínimo.

Desta forma como nas partes anteriores, a nossa função objetivo pretende minimizar os custos com que a empresa tem de lidar. Neste problema, a restrição de poder apenas uma fruta ser produzida num mês, resolve-se com a implementação de variáveis binárias, uma para cada variável decisão (correspondente à produção de uma fruta num mês). Assim sendo, se a variável é 1, existe produção daquela fruta daquele mês, caso contrário, não existe.

4.1.1 Função Objetivo

$$\min : \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{12} \text{CustoProducao}_j * P_{ij} + 1B_{ij} + 3A_{ij} + \text{PrecoConcentrado}_{ij} * C_{ij} + 10ATr_{ij} * ATi_{ij}$$

em que o i representa os diferentes tipos de fruta e o j o período. Está expressa em U.M. - Unidades Monetárias.

Desenvolvimento da função objetivo

$$\begin{aligned} \min: & 10P11 + 3A11 + 1B11 + 180C11 + 10P12 + 3A12 + 1B12 + 160C12 + \\ & 10P13 + 3A13 + 1B13 + 180C13 + 10P14 + 3A14 + 1B14 + 160C14 + 10P15 + \\ & 3A15 + 1B15 + 180C15 + 10P16 + 3A16 + 1B16 + 160C16 + 10P17 + 3A17 + \\ & 1B17 + 180C17 + 12P18 + 3A18 + 1B18 + 160C18 + 10P19 + 3A19 + 1B19 + \\ & 180C19 + 10P110 + 3A110 + 1B110 + 160C110 + 10P111 + 3A111 + 1B111 + \\ & 180C111 + 10P112 + 3A112 + 1B112 + 160C112 + 10P21 + 3A21 + 1B21 + \\ & 231C21 + 10P22 + 3A22 + 1B22 + 199C22 + 10P23 + 3A23 + 1B23 + 187C23 + \\ & 10P24 + 3A24 + 1B24 + 198C24 + 10P25 + 3A25 + 1B25 + 210C25 + 10P26 + \\ & 3A26 + 1B26 + 208C26 + 10P27 + 3A27 + 1B27 + 211C27 + 12P28 + 3A28 + \\ & 1B28 + 220C28 + 10P29 + 3A29 + 1B29 + 217C29 + 10P210 + 3A210 + \\ & 1B210 + 216C210 + 10P211 + 3A211 + 1B211 + 221C211 + 10P212 + 3A212 + \\ & 1B212 + 217C212 + 10P31 + 3A31 + 1B31 + 116C31 + 10P32 + 3A32 + \\ & 1B32 + 116C32 + 10P33 + 3A33 + 1B33 + 124C33 + 10P34 + 3A34 + 1B34 + \end{aligned}$$

$120C34 + 10P35 + 3A35 + 1B35 + 132C35 + 10P36 + 3A36 + 1B36 + 128C36$
 $+ 10P37 + 3A37 + 1B37 + 136C37 + 12P38 + 3A38 + 1B38 + 116C38 + 10P39$
 $+ 3A39 + 1B39 + 120C39 + 10P310 + 3A310 + 1B310 + 108C310 + 10P311 +$
 $3A311 + 1B311 + 100C311 + 10P312 + 3A312 + 1B312 + 116C312 + 10ATr11 +$
 $ATi11 + 10ATr12 + ATi12 + 10ATr13 + ATi13 + 10ATr14 + ATi14 + 10ATr15$
 $+ ATi15 + 10ATr16 + ATi16 + 10ATr17 + ATi17 + 10ATr18 + ATi18 + 10ATr19$
 $+ ATi19 + 10ATr110 + ATi110 + 10ATr111 + ATi111 + 10ATr112 + ATi112 +$
 $10ATr21 + ATi21 + 10ATr22 + ATi22 + 10ATr23 + ATi23 + 10ATr24 + ATi24$
 $+ 10ATr25 + ATi25 + 10ATr26 + ATi26 + 10ATr27 + ATi27 + 10ATr28 + ATi28$
 $+ 10ATr29 + ATi29 + 10ATr210 + ATi210 + 10ATr211 + ATi211 + 10ATr212 +$
 $ATi212 + 10ATr31 + ATi31 + 10ATr32 + ATi32 + 10ATr33 + ATi33 + 10ATr34$
 $+ ATi34 + 10ATr35 + ATi35 + 10ATr36 + ATi36 + 10ATr37 + ATi37 + 10ATr38$
 $+ ATi38 + 10ATr39 + ATi39 + 10ATr310 + ATi310 + 10ATr311 + ATi311 +$
 $10ATr312 + ATi312;$

4.1.2 Restrições adicionais

- $tug_{1j} + tug_{2j} + tug_{3j} = 1$

Onde tug_{ij} é uma variável binária que tem como objectivo verificar no mês (j) se uma dada fruta (i) é a única a ser produzida. O resultado desta restrição tem de dar 1, pois nesta soma, duas das variáveis têm de possuir o valor 0 enquanto a restante tem de tomar o valor 1, garantindo assim que só há produção de um tipo de fruta, durante o mês considerado.

- $P_{ij} \leq 30tug_{ij}$

Esta restrição serve para garantir que toda a produção existente de um único tipo de fruta (i) não ultrapassa o limite de produção, num determinado mês (j).

4.2 Ficheiro de Input

/* Função Objectivo */

$\text{min: } 10P11 + 3A11 + 1B11 + 180C11 + 10P12 + 3A12 + 1B12 + 160C12 +$
 $10P13 + 3A13 + 1B13 + 180C13 + 10P14 + 3A14 + 1B14 + 160C14 +$
 $10P15 + 3A15 + 1B15 + 180C15 + 10P16 + 3A16 + 1B16 + 160C16 +$
 $10P17 + 3A17 + 1B17 + 180C17 + 12P18 + 3A18 + 1B18 + 160C18 +$
 $10P19 + 3A19 + 1B19 + 180C19 + 10P110 + 3A110 + 1B110 + 160C110 +$
 $10P111 + 3A111 + 1B111 + 180C111 + 10P112 + 3A112 + 1B112 +$
 $160C112 + 10P21 + 3A21 + 1B21 + 231C21 + 10P22 + 3A22 + 1B22 +$
 $199C22 + 10P23 + 3A23 + 1B23 + 187C23 + 10P24 + 3A24 + 1B24 +$
 $198C24 + 10P25 + 3A25 + 1B25 + 210C25 + 10P26 + 3A26 + 1B26 +$
 $208C26 + 10P27 + 3A27 + 1B27 + 211C27 + 12P28 + 3A28 + 1B28 +$
 $220C28 + 10P29 + 3A29 + 1B29 + 217C29 + 10P210 + 3A210 + 1B210 +$
 $216C210 + 10P211 + 3A211 + 1B211 + 221C211 + 10P212 + 3A212 +$
 $1B212 + 217C212 + 10P31 + 3A31 + 1B31 + 116C31 + 10P32 + 3A32 +$

$1B32 + 116C32 + 10P33 + 3A33 + 1B33 + 124C33 + 10P34 + 3A34 +$
 $1B34 + 120C34 + 10P35 + 3A35 + 1B35 + 132C35 + 10P36 + 3A36 +$
 $1B36 + 128C36 + 10P37 + 3A37 + 1B37 + 136C37 + 12P38 + 3A38 +$
 $1B38 + 116C38 + 10P39 + 3A39 + 1B39 + 120C39 + 10P310 + 3A310 +$
 $1B310 + 108C310 + 10P311 + 3A311 + 1B311 + 100C311 + 10P312 +$
 $3A312 + 1B312 + 116C312 + 10ATr11 + ATi11 + 10ATr12 + ATi12 +$
 $10ATr13 + ATi13 + 10ATr14 + ATi14 + 10ATr15 + ATi15 + 10ATr16 +$
 $ATi16 + 10ATr17 + ATi17 + 10ATr18 + ATi18 + 10ATr19 + ATi19 +$
 $10ATr110 + ATi110 + 10ATr111 + ATi111 + 10ATr112 + ATi112 +$
 $10ATr21 + ATi21 + 10ATr22 + ATi22 + 10ATr23 + ATi23 + 10ATr24 +$
 $ATi24 + 10ATr25 + ATi25 + 10ATr26 + ATi26 + 10ATr27 + ATi27 +$
 $10ATr28 + ATi28 + 10ATr29 + ATi29 + 10ATr210 + ATi210 + 10ATr211 +$
 $ATi211 + 10ATr212 + ATi212 + 10ATr31 + ATi31 + 10ATr32 +$
 $ATi32 + 10ATr33 + ATi33 + 10ATr34 + ATi34 + 10ATr35 + ATi35 +$
 $10ATr36 + ATi36 + 10ATr37 + ATi37 + 10ATr38 + ATi38 +$
 $10ATr39 + ATi39 + 10ATr310 + ATi310 + 10ATr311 + ATi311 +$
 $10ATr312 + ATi312;$

/* Restrições */

/* Restringir a produção para o armazém de produto final */

$P11 + 20 - A11 = EN11 ;$

$P21 + 10 - A21 = EN21 ;$

$P31 + 10 - A31 = EN31 ;$

$P12 + A11 - A12 = ATi11 + ATr11 + EN12 ;$

$P22 + A21 - A22 = ATi21 + ATr21 + EN22 ;$

$P32 + A31 - A32 = ATi31 + ATr31 + EN32 ;$

$P13 + A12 - A13 = ATi12 + ATr12 + EN13 ;$

$P23 + A22 - A23 = ATi22 + ATr22 + EN23 ;$

$P33 + A32 - A33 = ATi32 + ATr32 + EN33 ;$

$P14 + A13 - A14 = ATi13 + ATr13 + EN14 ;$

$P24 + A23 - A24 = ATi23 + ATr23 + EN24 ;$

$P34 + A33 - A34 = ATi33 + ATr33 + EN34 ;$

$P15 + A14 - A15 = ATi14 + ATr14 + EN15 ;$

$P25 + A24 - A25 = ATi24 + ATr24 + EN25 ;$

$P35 + A34 - A35 = ATi34 + ATr34 + EN35 ;$

$P16 + A15 - A16 = ATi15 + ATr15 + EN16 ;$

$P26 + A25 - A26 = ATi25 + ATr25 + EN26 ;$

$P36 + A35 - A36 = ATi35 + ATr35 + EN36 ;$

$P17 + A16 - A17 = ATi16 + ATr16 + EN17 ;$

$$\begin{aligned}
P27 + A26 - A27 &= ATi26 + ATr26 + EN27 ; \\
P37 + A36 - A37 &= ATi36 + ATr36 + EN37 ; \\
\\
P18 + A17 - A18 &= ATi17 + ATr17 + EN18 ; \\
P28 + A27 - A28 &= ATi27 + ATr27 + EN28 ; \\
P38 + A37 - A38 &= ATi37 + ATr37 + EN38 ; \\
\\
P19 + A18 - A19 &= ATi18 + ATr18 + EN19 ; \\
P29 + A28 - A29 &= ATi28 + ATr28 + EN29 ; \\
P39 + A38 - A39 &= ATi38 + ATr38 + EN39 ; \\
\\
P110 + A19 - A110 &= ATi19 + ATr19 + EN110 ; \\
P210 + A29 - A210 &= ATi29 + ATr29 + EN210 ; \\
P310 + A39 - A310 &= ATi39 + ATr39 + EN310 ; \\
\\
P111 + A110 - A111 &= ATi110 + ATr110 + EN111 ; \\
P211 + A210 - A211 &= ATi210 + ATr210 + EN211 ; \\
P311 + A310 - A311 &= ATi310 + ATr310 + EN311 ; \\
\\
P112 + A111 - A112 &= ATi111 + ATr111 + EN112; \\
P212 + A211 - A212 &= ATi211 + ATr211 + EN212; \\
P312 + A311 - A312 &= ATi311 + ATr311 + EN312; \\
\\
/* Restrições da entrega e atraso num mês */ \\
\\
EN11 + ATi11 + ATr11 &= 9; \\
EN21 + ATi21 + ATr21 &= 5; \\
EN31 + ATi31 + ATr31 &= 4; \\
\\
EN12 + ATi12 + ATr12 &= 9; \\
EN22 + ATi22 + ATr22 &= 5; \\
EN32 + ATi32 + ATr32 &= 4; \\
\\
EN13 + ATi13 + ATr13 &= 9; \\
EN23 + ATi23 + ATr23 &= 5; \\
EN33 + ATi33 + ATr33 &= 4; \\
\\
EN14 + ATi14 + ATr14 &= 12; \\
EN24 + ATi24 + ATr24 &= 6; \\
EN34 + ATi34 + ATr34 &= 5; \\
\\
EN15 + ATi15 + ATr15 &= 16; \\
EN25 + ATi25 + ATr25 &= 8; \\
EN35 + ATi35 + ATr35 &= 6; \\
\\
EN16 + ATi16 + ATr16 &= 17; \\
EN26 + ATi26 + ATr26 &= 9;
\end{aligned}$$

$$EN36 + ATi36 + ATr36 = 7;$$

$$EN17 + ATi17 + ATr17 = 19;$$

$$EN27 + ATi27 + ATr27 = 10;$$

$$EN37 + ATi37 + ATr37 = 8;$$

$$EN18 + ATi18 + ATr18 = 19;$$

$$EN28 + ATi28 + ATr28 = 10;$$

$$EN38 + ATi38 + ATr38 = 8;$$

$$EN19 + ATi19 + ATr19 = 16;$$

$$EN29 + ATi29 + ATr29 = 8;$$

$$EN39 + ATi39 + ATr39 = 6;$$

$$EN110 + ATi110 + ATr110 = 12;$$

$$EN210 + ATi210 + ATr210 = 6;$$

$$EN310 + ATi310 + ATr310 = 5;$$

$$EN111 + ATi111 + ATr111 = 10;$$

$$EN211 + ATi211 + ATr211 = 5;$$

$$EN311 + ATi311 + ATr311 = 4;$$

$$EN112 = 9;$$

$$EN212 = 5;$$

$$EN312 = 4;$$

/* Restringir a compra para o armazém de matéria-prima */

$$C11 + 16 - B11 = P11;$$

$$C21 + 8 - B21 = P21;$$

$$C31 + 6 - B31 = P31;$$

$$C12 + B11 - B12 = P12;$$

$$C22 + B21 - B22 = P22;$$

$$C32 + B31 - B32 = P32;$$

$$C13 + B12 - B13 = P13;$$

$$C23 + B22 - B23 = P23;$$

$$C33 + B32 - B33 = P33;$$

$$C14 + B13 - B14 = P14;$$

$$C24 + B23 - B24 = P24;$$

$$C34 + B33 - B34 = P34;$$

$$C15 + B14 - B15 = P15;$$

$$C25 + B24 - B25 = P25;$$

$$C35 + B34 - B35 = P35;$$

$C16 + B15 - B16 = P16;$
 $C26 + B25 - B26 = P26;$
 $C36 + B35 - B36 = P36;$

$C17 + B16 - B17 = P17;$
 $C27 + B26 - B27 = P27;$
 $C37 + B36 - B37 = P37;$

$C18 + B17 - B18 = P18;$
 $C28 + B27 - B28 = P28;$
 $C38 + B37 - B38 = P38;$

$C19 + B18 - B19 = P19;$
 $C29 + B28 - B29 = P29;$
 $C39 + B38 - B39 = P39;$

$C110 + B19 - B110 = P110;$
 $C210 + B29 - B210 = P210;$
 $C310 + B39 - B310 = P310;$

$C111 + B110 - B111 = P111;$
 $C211 + B210 - B211 = P211;$
 $C311 + B310 - B311 = P311;$

$C112 + B111 - B112 = P112;$
 $C212 + B211 - B212 = P212;$
 $C312 + B311 - B312 = P312;$

/ Restringir a produção no mês */*

$P11 + P21 + P31 \leq 30;$
 $P12 + P22 + P32 \leq 30;$
 $P13 + P23 + P33 \leq 30;$
 $P14 + P24 + P34 \leq 30;$
 $P15 + P25 + P35 \leq 30;$
 $P16 + P26 + P36 \leq 30;$
 $P17 + P27 + P37 \leq 30;$
 $P18 + P28 + P38 \leq 30;$
 $P19 + P29 + P39 \leq 30;$
 $P110 + P210 + P310 \leq 30;$
 $P111 + P211 + P311 \leq 30;$
 $P112 + P212 + P312 \leq 30;$

/ Restringir o armazenamento de produto final no mês */*

$A11 + A21 + A31 \leq 40;$

```

A12 + A22 + A32 <= 40;
A13 + A23 + A33 <= 40;
A14 + A24 + A34 <= 40;
A15 + A25 + A35 <= 40;
A16 + A26 + A36 <= 40;
A17 + A27 + A37 <= 40;
A18 + A28 + A38 <= 40;
A19 + A29 + A39 <= 40;
A110 + A210 + A310 <= 40;
A111 + A211 + A311 <= 40;
A112 + A212 + A312 <= 40;

```

```

/* Restringir o armazenamento de matéria-prima no mês */

```

```

B11 + B21 + B31 <= 30;
B12 + B22 + B32 <= 30;
B13 + B23 + B33 <= 30;
B14 + B24 + B34 <= 30;
B15 + B25 + B35 <= 30;
B16 + B26 + B36 <= 30;
B17 + B27 + B37 <= 30;
B18 + B28 + B38 <= 30;
B19 + B29 + B39 <= 30;
B110 + B210 + B310 <= 30;
B111 + B211 + B311 <= 30;
B112 + B212 + B312 <= 30;

```

```

/* Restringir armazenamento final */

```

```

A112 = 20;
A212 = 10;
A312 = 10;

```

```

B112 = 16;
B212 = 8;
B312 = 6;

```

```

/* Restrições da produção para apenas um fruto num mês*/

```

```

tug11 + tug21 + tug31 = 1;
tug12 + tug22 + tug32 = 1;
tug13 + tug23 + tug33 = 1;
tug14 + tug24 + tug34 = 1;
tug15 + tug25 + tug35 = 1;
tug16 + tug26 + tug36 = 1;
tug17 + tug27 + tug37 = 1;
tug18 + tug28 + tug38 = 1;
tug19 + tug29 + tug39 = 1;

```

```

tug110 + tug210 + tug310 = 1;
tug111 + tug211 + tug311 = 1;
tug112 + tug212 + tug312 = 1;

/* Restrições da produção de um fruto num mês*/

P11 <= 30tug11;
P21 <= 30tug21;
P31 <= 30tug31;

P12 <= 30tug12;
P22 <= 30tug22;
P32 <= 30tug32;

P13 <= 30tug13;
P23 <= 30tug23;
P33 <= 30tug33;

P14 <= 30tug14;
P24 <= 30tug24;
P34 <= 30tug34;

P15 <= 30tug15;
P25 <= 30tug25;
P35 <= 30tug35;

P16 <= 30tug16;
P26 <= 30tug26;
P36 <= 30tug36;

P17 <= 30tug17;
P27 <= 30tug27;
P37 <= 30tug37;

P18 <= 30tug18;
P28 <= 30tug28;
P38 <= 30tug38;

P19 <= 30tug19;
P29 <= 30tug29;
P39 <= 30tug39;

P110 <= 30tug110;
P210 <= 30tug210;
P310 <= 30tug310;

P111 <= 30tug111;

```

```

P211 <= 30tug211;
P311 <= 30tug311;

P112 <= 30tug112;
P212 <= 30tug212;
P312 <= 30tug312;

/* Declaração das variáveis binárias */

Bin ATi11, ATi21, ATi31, ATi12, ATi22, ATi32, ATi13, ATi23,
ATi33, ATi14, ATi24, ATi34, ATi15, ATi25, ATi35, ATi16,
ATi26, ATi36, ATi17, ATi27, ATi37, ATi18, ATi28, ATi38,
ATi19, ATi29, ATi39, ATi110, ATi210, ATi310, ATi111, ATi211,
ATi311, ATi112, ATi212, ATi312;

Bin tug11, tug21, tug31, tug12, tug22, tug32, tug13, tug23,
tug33, tug14, tug24, tug34, tug15, tug25, tug35, tug16,
tug26, tug36, tug17, tug27, tug37, tug18, tug28, tug38,
tug19, tug29, tug39, tug110, tug210, tug310, tug111,
tug211, tug311, tug112, tug212, tug312;

```

4.3 Ficheiro de Output

Value of objective function: 53456

Actual values of the variables:

P11	14
A11	25
B11	2
C11	0
P12	0
A12	16
B12	2
C12	0
P13	0
A13	7
B13	2
C13	0
P14	23
A14	18
B14	0
C14	21
P15	0
A15	2
B15	0
C15	0
P16	30

A16	15
B16	0
C16	30
P17	0
A17	0
B17	0
C17	0
P18	30
A18	7
B18	0
C18	30
P19	0
A19	0
B19	0
C19	0
P110	30
A110	9
B110	0
C110	30
P111	0
A111	0
B111	0
C111	0
P112	30
A112	20
B112	16
C112	46
P21	0
A21	5
B21	8
C21	0
P22	0
A22	0
B22	8
C22	0
P23	25
A23	20
B23	28
C23	45
P24	0
A24	14
B24	30
C24	2
P25	27
A25	33
B25	3
C25	0

P26	0
A26	24
B26	3
C26	0
P27	0
A27	14
B27	30
C27	27
P28	0
A28	4
B28	30
C28	0
P29	30
A29	26
B29	0
C29	0
P210	0
A210	20
B210	0
C210	0
P211	0
A211	15
B211	0
C211	0
P212	0
A212	10
B212	8
C212	8
P31	0
A31	6
B31	6
C31	0
P32	15
A32	17
B32	0
C32	9
P33	0
A33	13
B33	0
C33	0
P34	0
A34	8
B34	0
C34	0
P35	0
A35	2
B35	0

C35	0
P36	0
A36	0
B36	27
C36	27
P37	27
A37	14
B37	0
C37	0
P38	0
A38	6
B38	0
C38	0
P39	0
A39	0
B39	0
C39	0
P310	0
A310	0
B310	0
C310	0
P311	23
A311	14
B311	6
C311	29
P312	0
A312	10
B312	6
C312	0
ATr11	0
ATi11	0
ATr12	0
ATi12	0
ATr13	0
ATi13	0
ATr14	0
ATi14	0
ATr15	0
ATi15	0
ATr16	0
ATi16	0
ATr17	3
ATi17	1
ATr18	0
ATi18	0
ATr19	8
ATi19	1

ATr110	0
ATi110	0
ATr111	0
ATi111	1
ATr112	0
ATi112	0
ATr21	0
ATi21	0
ATr22	0
ATi22	0
ATr23	0
ATi23	0
ATr24	0
ATi24	0
ATr25	0
ATi25	0
ATr26	0
ATi26	0
ATr27	0
ATi27	0
ATr28	0
ATi28	0
ATr29	0
ATi29	0
ATr210	0
ATi210	0
ATr211	0
ATi211	0
ATr212	0
ATi212	0
ATr31	0
ATi31	0
ATr32	0
ATi32	0
ATr33	0
ATi33	0
ATr34	0
ATi34	0
ATr35	0
ATi35	0
ATr36	4
ATi36	1
ATr37	0
ATi37	0
ATr38	0
ATi38	0
ATr39	0

ATi39	0
ATr310	4
ATi310	1
ATr311	0
ATi311	0
ATr312	0
ATi312	0
EN11	9
EN21	5
EN31	4
EN12	9
EN22	5
EN32	4
EN13	9
EN23	5
EN33	4
EN14	12
EN24	6
EN34	5
EN15	16
EN25	8
EN35	6
EN16	17
EN26	9
EN36	2
EN17	15
EN27	10
EN37	8
EN18	19
EN28	10
EN38	8
EN19	7
EN29	8
EN39	6
EN110	12
EN210	6
EN310	0
EN111	9
EN211	5
EN311	4
EN112	9
EN212	5
EN312	4
tug11	1
tug21	0
tug31	0
tug12	0

tug22	0
tug32	1
tug13	0
tug23	1
tug33	0
tug14	1
tug24	0
tug34	0
tug15	0
tug25	1
tug35	0
tug16	1
tug26	0
tug36	0
tug17	0
tug27	0
tug37	1
tug18	1
tug28	0
tug38	0
tug19	0
tug29	1
tug39	0
tug110	1
tug210	0
tug310	0
tug111	0
tug211	0
tug311	1
tug112	1
tug212	0
tug312	0

4.4 Plano detalhado de produção

Laranja

Mês	Jan	Fer	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade Produzida (p)	0	14	0	23	0	30	0	30	0	30	0	30
Quantidade Comprada (C)	0	0	0	21	0	30	0	30	0	30	0	46
Quantidade (b) Armazenada (matéria-prima)	16	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	16
Quantidade (a) Armazenada (produto final)	11	16	7	18	2	15	0	7	0	9	0	20
Quantidade de produto entregue (en)	9	9	9	12	16	17	15	19	7	12	9	9
Verifica se tem atraso ou não (ati)	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
Quantidade acima de 1 unidade que foi entregue (atr)	0	0	0	0	0	0	3	0	8	0	0	0
Verifica a quantidade produzida no mês j da fruta i (tug)	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Procura	9	9	9	12	16	17	19	19	16	12	10	9

Maçã

Mês	Jan	Fer	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade Produzida (p)	0	0	25	0	27	0	0	0	30	0	0	0
Quantidade Comprada (c)	0	0	45	2	0	0	27	0	0	0	0	8
Quantidade Armazenada (matéria-prima) (b)	8	8	28	30	3	3	30	30	0	0	0	8
Quantidade Armazenada (produto final) (a)	5	0	20	14	33	24	14	4	26	20	15	10
Quantidade de produto entregue (en)	5	5	5	6	8	9	10	10	8	6	5	5
Verifica se tem atraso ou não (ati)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Quantidade acima de 1 unidade que foi entregue (atr)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Verifica a quantidade produzida no mês j da fruta i (tug)	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Procura	5	5	5	6	8	9	10	10	8	6	5	5

Pêra

Mês	Jan	Fer	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade Produzida (p)	0	15	0	0	0	0	27	0	0	0	23	0
Quantidade Comprada (c)	0	9	0	0	0	27	0	0	0	0	29	0
Quantidade Armazenada (matéria-prima) (b)	6	0	0	0	0	27	0	0	0	0	6	6
Quantidade Armazenada (produto final) (a)	6	17	13	8	2	0	14	6	0	0	14	10
Quantidade de produto entregue (en)	4	4	4	5	6	2	8	8	6	0	4	4
Verifica se tem atraso ou não (ati)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
Quantidade acima de 1 unidade que foi entregue (atr)	0	0	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0
Verifica a quantidade produzida no mês j da fruta i (tug)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Procura	4	4	4	5	6	7	8	8	6	5	4	4

4.5 Validação do plano detalhado de produção

/* Restringir a produção para o armazém de produto final */

$$P11 + 20 - A11 = EN11 \Leftrightarrow 14 + 20 - 25 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P21 + 10 - A21 = EN21 \Leftrightarrow 0 + 10 - 5 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P31 + 10 - A31 = EN31 \Leftrightarrow 0 + 10 - 6 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P12 + A11 - A12 = ATi11 + ATr11 + EN12 \Leftrightarrow$$

$$0 + 25 - 16 = 0 + 0 + 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P22 + A21 - A22 = ATi21 + ATr21 + EN22 \Leftrightarrow$$

$$0 + 5 - 0 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P32 + A31 - A32 = ATi31 + ATr31 + EN32 \Leftrightarrow$$

$$15 + 6 - 17 = 0 + 0 + 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P13 + A12 - A13 = ATi12 + ATr12 + EN13 \Leftrightarrow$$

$$0 + 16 - 7 = 0 + 0 + 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P23 + A22 - A23 = ATi22 + ATr22 + EN23 \Leftrightarrow$$

$$25 + 0 - 20 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P33 + A32 - A33 = ATi32 + ATr32 + EN33 \Leftrightarrow$$

$$0 + 17 - 13 = 0 + 0 + 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P14 + A13 - A14 = ATi13 + ATr13 + EN14 \Leftrightarrow$$

$$23 + 7 - 18 = 0 + 0 + 12 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots \text{Verdadeiro}$$

$$P24 + A23 - A24 = ATi23 + ATr23 + EN24 \Leftrightarrow$$

$$0 + 20 - 14 = 0 + 0 + 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$$

$P34 + A33 - A34 = ATi33 + ATr33 + EN34 \Leftrightarrow$
 $0 + 13 - 8 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$

$P15 + A14 - A15 = ATi14 + ATr14 + EN15 \Leftrightarrow$
 $0 + 18 - 2 = 0 + 0 + 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P25 + A24 - A25 = ATi24 + ATr24 + EN25 \Leftrightarrow$
 $27 + 14 - 33 = 0 + 0 + 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P35 + A34 - A35 = ATi34 + ATr34 + EN35 \Leftrightarrow$
 $0 + 8 - 2 = 0 + 0 + 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

$P16 + A15 - A16 = ATi15 + ATr15 + EN16 \Leftrightarrow$
 $30 + 2 - 15 = 0 + 0 + 17 \Leftrightarrow 17 = 17 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P26 + A25 - A26 = ATi25 + ATr25 + EN26 \Leftrightarrow$
 $0 + 33 - 24 = 0 + 0 + 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P36 + A35 - A36 = ATi35 + ATr35 + EN36 \Leftrightarrow$
 $0 + 2 - 0 = 0 + 0 + 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \dots \text{Verdadeiro}$

$P17 + A16 - A17 = ATi16 + ATr16 + EN17 \Leftrightarrow$
 $0 + 15 - 0 = 0 + 0 + 15 \Leftrightarrow 15 = 15 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P27 + A26 - A27 = ATi26 + ATr26 + EN27 \Leftrightarrow$
 $0 + 24 - 14 = 0 + 0 + 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P37 + A36 - A37 = ATi36 + ATr36 + EN37 \Leftrightarrow$
 $27 + 0 - 14 = 1 + 4 + 8 \Leftrightarrow 13 = 13 \dots \text{Verdadeiro}$

$P18 + A17 - A18 = ATi17 + ATr17 + EN18 \Leftrightarrow$
 $30 + 0 - 7 = 1 + 3 + 19 \Leftrightarrow 23 = 23 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P28 + A27 - A28 = ATi27 + ATr27 + EN28 \Leftrightarrow$
 $0 + 14 - 4 = 0 + 0 + 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P38 + A37 - A38 = ATi37 + ATr37 + EN38 \Leftrightarrow$
 $0 + 14 - 6 = 0 + 0 + 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$

$P19 + A18 - A19 = ATi18 + ATr18 + EN19 \Leftrightarrow$
 $0 + 7 - 0 = 0 + 0 + 7 \Leftrightarrow 7 = 7 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P29 + A28 - A29 = ATi28 + ATr28 + EN29 \Leftrightarrow$
 $30 + 4 - 26 = 0 + 0 + 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P39 + A38 - A39 = ATi38 + ATr38 + EN39 \Leftrightarrow$
 $0 + 6 - 0 = 0 + 0 + 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

$P110 + A19 - A110 = ATi19 + ATr19 + EN110 \Leftrightarrow$
 $30 + 0 - 9 = 1 + 8 + 12 \Leftrightarrow 21 = 21 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P210 + A29 - A210 = ATi29 + ATr29 + EN210 \Leftrightarrow$
 $0 + 26 - 20 = 0 + 0 + 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P310 + A39 - A310 = ATi39 + ATr39 + EN310 \Leftrightarrow$
 $0 + 0 - 0 = 0 + 0 + 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$P111 + A110 - A111 = ATi110 + ATr110 + EN111 \Leftrightarrow$
 $0 + 9 - 0 = 0 + 0 + 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$

$P211 + A210 - A211 = ATi210 + ATr210 + EN211 \Leftrightarrow$
 $0 + 20 - 15 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P311 + A310 - A311 = ATi310 + ATr310 + EN311 \Leftrightarrow$
 $23 + 0 - 14 = 1 + 4 + 4 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$

$P112 + A111 - A112 = ATi111 + ATr111 + EN112 \Leftrightarrow$
 $30 + 0 - 20 = 1 + 0 + 9 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P212 + A211 - A212 = ATi211 + ATr211 + EN212 \Leftrightarrow$
 $0 + 15 - 10 = 0 + 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P312 + A311 - A312 = ATi311 + ATr311 + EN312 \Leftrightarrow$
 $0 + 14 - 10 = 0 + 0 + 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restrições da entrega e atraso num mês */

$EN11 + ATi11 + ATr11 = 9 \Leftrightarrow 9 + 0 + 0 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN21 + ATi21 + ATr21 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 + 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN31 + ATi31 + ATr31 = 4 \Leftrightarrow 4 + 0 + 0 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN12 + ATi12 + ATr12 = 9 \Leftrightarrow 9 + 0 + 0 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN22 + ATi22 + ATr22 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 + 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN32 + ATi32 + ATr32 = 4 \Leftrightarrow 4 + 0 + 0 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN13 + ATi13 + ATr13 = 9 \Leftrightarrow 9 + 0 + 0 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN23 + ATi23 + ATr23 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 + 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN33 + ATi33 + ATr33 = 4 \Leftrightarrow 4 + 0 + 0 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN14 + ATi14 + ATr14 = 12 \Leftrightarrow 12 + 0 + 0 = 12 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN24 + ATi24 + ATr24 = 6 \Leftrightarrow 6 + 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN34 + ATi34 + ATr34 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 + 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN15 + ATi15 + ATr15 = 16 \Leftrightarrow 16 + 0 + 0 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN25 + ATi25 + ATr25 = 8 \Leftrightarrow 8 + 0 + 0 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN35 + ATi35 + ATr35 = 6 \Leftrightarrow 6 + 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN16 + ATi16 + ATr16 = 17 \Leftrightarrow 17 + 0 + 0 = 17 \Leftrightarrow 17 = 17 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN26 + ATi26 + ATr26 = 9 \Leftrightarrow 9 + 0 + 0 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN36 + ATi36 + ATr36 = 7 \Leftrightarrow 2 + 1 + 4 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN17 + ATi17 + ATr17 = 19 \Leftrightarrow 15 + 1 + 3 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN27 + ATi27 + ATr27 = 10 \Leftrightarrow 10 + 0 + 0 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN37 + ATi37 + ATr37 = 8 \Leftrightarrow 8 + 0 + 0 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN18 + ATi18 + ATr18 = 19 \Leftrightarrow 19 + 0 + 0 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN28 + ATi28 + ATr28 = 10 \Leftrightarrow 10 + 0 + 0 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN38 + ATi38 + ATr38 = 8 \Leftrightarrow 8 + 0 + 0 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN19 + ATi19 + ATr19 = 16 \Leftrightarrow 7 + 1 + 8 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN29 + ATi29 + ATr29 = 8 \Leftrightarrow 8 + 0 + 0 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN39 + ATi39 + ATr39 = 6 \Leftrightarrow 6 + 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN110 + ATi110 + ATr110 = 12 \Leftrightarrow 12 + 0 + 0 = 12 \Leftrightarrow 12 = 12 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN210 + ATi210 + ATr210 = 6 \Leftrightarrow 6 + 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN310 + ATi310 + ATr310 = 5 \Leftrightarrow 0 + 1 + 4 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN111 + ATi111 + ATr111 = 10 \Leftrightarrow 9 + 1 + 0 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN211 + ATi211 + ATr211 = 5 \Leftrightarrow 5 + 0 + 0 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN311 + ATi311 + ATr311 = 4 \Leftrightarrow 4 + 0 + 0 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

$EN112 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN212 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \dots \text{Verdadeiro}$
 $EN312 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restringir a compra para o armazém de matéria-prima */

$C11 + 16 - B11 = P11 \Leftrightarrow 0 + 16 - 2 = 14 \Leftrightarrow 14 = 14 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C21 + 8 - B21 = P21 \Leftrightarrow 0 + 8 - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C31 + 6 - B31 = P31 \Leftrightarrow 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C12 + B11 - B12 = P12 \Leftrightarrow 0 + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C22 + B21 - B22 = P22 \Leftrightarrow 0 + 8 - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C32 + B31 - B32 = P32 \Leftrightarrow 9 + 6 - 0 = 15 \Leftrightarrow 15 = 15 \dots \text{Verdadeiro}$

$C13 + B12 - B13 = P13 \Leftrightarrow 0 + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C23 + B22 - B23 = P23 \Leftrightarrow 45 + 8 - 28 = 25 \Leftrightarrow 25 = 25 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C33 + B32 - B33 = P33 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C14 + B13 - B14 = P14 \Leftrightarrow 21 + 2 - 0 = 23 \Leftrightarrow 23 = 23 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C24 + B23 - B24 = P24 \Leftrightarrow 2 + 28 - 30 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C34 + B33 - B34 = P34 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C15 + B14 - B15 = P15 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C25 + B24 - B25 = P25 \Leftrightarrow 0 + 30 - 3 = 27 \Leftrightarrow 27 = 27 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C35 + B34 - B35 = P35 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C16 + B15 - B16 = P16 \Leftrightarrow 30 + 0 - 0 = 30 \Leftrightarrow 30 = 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C26 + B25 - B26 = P26 \Leftrightarrow 0 + 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C36 + B35 - B36 = P36 \Leftrightarrow 27 + 0 - 27 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C17 + B16 - B17 = P17 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C27 + B26 - B27 = P27 \Leftrightarrow 27 + 3 - 30 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C37 + B36 - B37 = P37 \Leftrightarrow 0 + 27 - 0 = 27 \Leftrightarrow 27 = 27 \dots \text{Verdadeiro}$

$C18 + B17 - B18 = P18 \Leftrightarrow 30 + 0 - 0 = 30 \Leftrightarrow 30 = 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $C28 + B27 - B28 = P28 \Leftrightarrow 0 + 30 - 30 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C38 + B37 - B38 = P38 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C19 + B18 - B19 = P19 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C29 + B28 - B29 = P29 \Leftrightarrow 0 + 30 - 0 = 30 \Leftrightarrow 30 = 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$C39 + B38 - B39 = P39 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C110 + B19 - B110 = P110 \Leftrightarrow 30 + 0 - 0 = 30 \Leftrightarrow 30 = 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$C210 + B29 - B210 = P210 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C310 + B39 - B310 = P310 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C111 + B110 - B111 = P111 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C211 + B210 - B211 = P211 \Leftrightarrow 0 + 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C311 + B310 - B311 = P311 \Leftrightarrow 29 + 0 - 6 = 23 \Leftrightarrow 23 = 23 \dots \text{Verdadeiro}$

$C112 + B111 - B112 = P112 \Leftrightarrow 46 + 0 - 16 = 30 \Leftrightarrow 30 = 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$C212 + B211 - B212 = P212 \Leftrightarrow 8 + 0 - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

$C312 + B311 - B312 = P312 \Leftrightarrow 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restringir a produção no mês */

$P11 + P21 + P31 \leq 30 \Leftrightarrow 14 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 14 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P12 + P22 + P32 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 0 + 15 \leq 30 \Leftrightarrow 15 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P13 + P23 + P33 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 25 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 25 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P14 + P24 + P34 \leq 30 \Leftrightarrow 23 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 23 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P15 + P25 + P35 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 27 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 27 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P16 + P26 + P36 \leq 30 \Leftrightarrow 30 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P17 + P27 + P37 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 0 + 27 \leq 30 \Leftrightarrow 27 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P18 + P28 + P38 \leq 30 \Leftrightarrow 30 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P19 + P29 + P39 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 30 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P110 + P210 + P310 \leq 30 \Leftrightarrow 30 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P111 + P211 + P311 \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 0 + 23 \leq 30 \Leftrightarrow 23 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

$P112 + P212 + P312 \leq 30 \Leftrightarrow 30 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restringir o armazenamento de produto final no mês */

$A11 + A21 + A31 \leq 40 \Leftrightarrow 25 + 5 + 6 \leq 40 \Leftrightarrow 36 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A12 + A22 + A32 \leq 40 \Leftrightarrow 16 + 0 + 17 \leq 40 \Leftrightarrow 33 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A13 + A23 + A33 \leq 40 \Leftrightarrow 7 + 20 + 13 \leq 40 \Leftrightarrow 40 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A14 + A24 + A34 \leq 40 \Leftrightarrow 18 + 14 + 8 \leq 40 \Leftrightarrow 40 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A15 + A25 + A35 \leq 40 \Leftrightarrow 2 + 33 + 2 \leq 40 \Leftrightarrow 37 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A16 + A26 + A36 \leq 40 \Leftrightarrow 15 + 24 + 0 \leq 40 \Leftrightarrow 39 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A17 + A27 + A37 \leq 40 \Leftrightarrow 0 + 14 + 14 \leq 40 \Leftrightarrow 28 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A18 + A28 + A38 \leq 40 \Leftrightarrow 7 + 4 + 6 \leq 40 \Leftrightarrow 17 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A19 + A29 + A39 \leq 40 \Leftrightarrow 0 + 26 + 0 \leq 40 \Leftrightarrow 26 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A110 + A210 + A310 \leq 40 \Leftrightarrow 9 + 20 + 0 \leq 40 \Leftrightarrow 29 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A111 + A211 + A311 \leq 40 \Leftrightarrow 0 + 15 + 14 \leq 40 \Leftrightarrow 29 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

$A112 + A212 + A312 \leq 40 \Leftrightarrow 20 + 10 + 10 \leq 40 \Leftrightarrow 40 \leq 40 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restringir o armazenamento de matéria-prima no mês */

$B_{11} + B_{21} + B_{31} \leq 30 \Leftrightarrow 2 + 8 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 16 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{12} + B_{22} + B_{32} \leq 30 \Leftrightarrow 2 + 8 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 10 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{13} + B_{23} + B_{33} \leq 30 \Leftrightarrow 2 + 28 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{14} + B_{24} + B_{34} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 30 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{15} + B_{25} + B_{35} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 3 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 3 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{16} + B_{26} + B_{36} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 3 + 27 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{17} + B_{27} + B_{37} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 30 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{18} + B_{28} + B_{38} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 30 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{19} + B_{29} + B_{39} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 0 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{110} + B_{210} + B_{310} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 \leq 30 \Leftrightarrow 0 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{111} + B_{211} + B_{311} \leq 30 \Leftrightarrow 0 + 0 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 6 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{112} + B_{212} + B_{312} \leq 30 \Leftrightarrow 16 + 8 + 6 \leq 30 \Leftrightarrow 30 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restringir armazenamento final */

$A_{112} = 20 \Leftrightarrow 20 = 20 \dots \text{Verdadeiro}$
 $A_{212} = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$
 $A_{312} = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \dots \text{Verdadeiro}$

$B_{112} = 16 \Leftrightarrow 16 = 16 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{212} = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \dots \text{Verdadeiro}$
 $B_{312} = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restrições da produção para apenas um fruto por mês */

$tug_{11} + tug_{21} + tug_{31} = 1 \Leftrightarrow 1 + 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{12} + tug_{22} + tug_{32} = 1 \Leftrightarrow 0 + 0 + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{13} + tug_{23} + tug_{33} = 1 \Leftrightarrow 0 + 1 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{14} + tug_{24} + tug_{34} = 1 \Leftrightarrow 1 + 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{15} + tug_{25} + tug_{35} = 1 \Leftrightarrow 0 + 1 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{16} + tug_{26} + tug_{36} = 1 \Leftrightarrow 1 + 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{17} + tug_{27} + tug_{37} = 1 \Leftrightarrow 0 + 0 + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{18} + tug_{28} + tug_{38} = 1 \Leftrightarrow 1 + 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{19} + tug_{29} + tug_{39} = 1 \Leftrightarrow 0 + 1 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{110} + tug_{210} + tug_{310} = 1 \Leftrightarrow 1 + 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{111} + tug_{211} + tug_{311} = 1 \Leftrightarrow 0 + 0 + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$
 $tug_{112} + tug_{212} + tug_{312} = 1 \Leftrightarrow 1 + 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \dots \text{Verdadeiro}$

/* Restrições da produção de um fruto num mês */

$P_{11} \leq 30tug_{11} \Leftrightarrow 14 \leq 30 \times 1 \Leftrightarrow 14 \leq 30 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P_{21} \leq 30tug_{21} \Leftrightarrow 0 \leq 30 \times 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0 \dots \text{Verdadeiro}$
 $P_{31} \leq 30tug_{31} \Leftrightarrow 0 \leq 30 \times 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0 \dots \text{Verdadeiro}$

P12 <= 30tug12 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P22 <= 30tug22 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P32 <= 30tug32 <=> 15 ... Verdadeiro

P13 <= 30tug13 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P23 <= 30tug23 <=> 25 <= 30 x 1 <=> 25 <= 30 ... Verdadeiro
 P33 <= 30tug33 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro

P14 <= 30tug14 <=> 23 <= 30 x 1 <=> 23 <= 30 ... Verdadeiro
 P24 <= 30tug24 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P34 <= 30tug34 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro

P15 <= 30tug15 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P25 <= 30tug25 <=> 27 <= 30 x 1 <=> 27 <= 30 ... Verdadeiro
 P35 <= 30tug35 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro

P16 <= 30tug16 <=> 30 <= 30 x 1 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
 P26 <= 30tug26 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P36 <= 30tug36 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro

P17 <= 30tug17 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P27 <= 30tug27 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P37 <= 30tug37 <=> 27 <= 30 x 1 <=> 27 <= 30 ... Verdadeiro

P18 <= 30tug18 <=> 30 <= 30 x 1 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
 P28 <= 30tug28 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P38 <= 30tug38 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro

P19 <= 30tug19 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P29 <= 30tug29 <=> 30 <= 30 x 1 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
 P39 <= 30tug39 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro

P110 <= 30tug110 <=> 30 <= 30 x 1 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
 P210 <= 30tug210 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P310 <= 30tug310 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro

P111 <= 30tug111 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P211 <= 30tug211 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P311 <= 30tug311 <=> 23 <= 30 x 1 <=> 23 <= 30 ... Verdadeiro

P112 <= 30tug112 <=> 30 <= 30 x 1 <=> 30 <= 30 ... Verdadeiro
 P212 <= 30tug212 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro
 P312 <= 30tug312 <=> 0 <= 30 x 0 <=> 0 <= 0 ... Verdadeiro

4.6 Validação da solução ótima

4.6.1 Sumo de Laranja

/* Cálculo do custo de compra de concentrado */

$\text{CustoConcentradoLaranja} = 180 C_{11} + 160 C_{12} + 180 C_{13} + 160 C_{14} + 180 C_{15} + 160 C_{16} + 180 C_{17} + 160 C_{18} + 180 C_{19} + 160 C_{110} + 180 C_{111} + 160 C_{112} = 180 \times 0 + 160 \times 0 + 180 \times 0 + 160 \times 21 + 180 \times 0 + 160 \times 30 + 180 \times 0 + 160 \times 30 + 180 \times 0 + 160 \times 46 = 25120 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de produção */

$\text{CustoProducaoLaranja} = 10 P_{11} + 10 P_{12} + 10 P_{13} + 10 P_{14} + 10 P_{15} + 10 P_{16} + 10 P_{17} + 12 P_{18} + 10 P_{19} + 10 P_{110} + 10 P_{111} + 10 P_{112} = 10 \times 14 + 10 \times 0 + 10 \times 0 + 10 \times 23 + 10 \times 0 + 10 \times 30 + 10 \times 0 + 12 \times 30 + 10 \times 0 + 10 \times 30 + 10 \times 0 + 10 \times 30 = 1630 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de armazenamento */

$\text{CustoStockLaranja} = 3(A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{15} + A_{16} + A_{17} + A_{18} + A_{19} + A_{110} + A_{111} + A_{112}) + B_{11} + B_{12} + B_{13} + B_{14} + B_{15} + B_{16} + B_{17} + B_{18} + B_{19} + B_{110} + B_{111} + B_{112} = 3(25 + 16 + 7 + 18 + 2 + 15 + 0 + 7 + 0 + 9 + 0 + 20) + 2 + 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 16 = 379 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo das penalidades de atraso */

$\text{CustoAtrasoLaranja} = A_{Ti11} + A_{Ti12} + A_{Ti13} + A_{Ti14} + A_{Ti15} + A_{Ti16} + A_{Ti17} + A_{Ti18} + A_{Ti19} + A_{Ti110} + A_{Ti111} + A_{Ti112} + 10(A_{Tr11} + A_{Tr12} + A_{Tr13} + A_{Tr14} + A_{Tr15} + A_{Tr16} + A_{Tr17} + A_{Tr18} + A_{Tr19} + A_{Tr110} + A_{Tr111} + A_{Tr112}) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 10(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 + 0 + 8 + 0 + 0 + 0) = 113 \text{ (U.M.)}$

4.6.2 Sumo de Maçã

/* Cálculo do custo de compra de concentrado */

$\text{CustoConcentradoMaca} = 231 C_{21} + 199 C_{22} + 187 C_{23} + 198 C_{24} + 210 C_{25} + 208 C_{26} + 211 C_{27} + 220 C_{28} + 217 C_{29} + 216 C_{210} +$

$221 C_{211} + 217 C_{212} = 231 \times 0 + 199 \times 0 + 187 \times 45 + 198 \times 2 +$
 $210 \times 0 + 208 \times 0 + 211 \times 27 + 220 \times 0 + 217 \times 0 + 216 \times 0 +$
 $221 \times 0 + 217 \times 8 = 16244 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de produção */

$\text{CustoProducaoMaca} = 10 P_{21} + 10 P_{22} + 10 P_{23} + 10 P_{24} + 10 P_{25} +$
 $10 P_{26} + 10 P_{27} + 12 P_{28} + 10 P_{29} + 10 P_{210} + 10 P_{211} + 10 P_{212} =$
 $10 \times 0 + 10 \times 0 + 10 \times 25 + 10 \times 0 + 10 \times 27 + 10 \times 0 + 10 \times 0 +$
 $12 \times 0 + 10 \times 30 + 10 \times 0 + 10 \times 0 + 10 \times 0 = 820 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de armazenamento */

$\text{CustoStockMaca} = 3(A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} + A_{25} + A_{26} + A_{27} + A_{28} +$
 $A_{29} + A_{210} + A_{211} + A_{212}) + B_{21} + B_{22} + B_{23} + B_{24} + B_{25} + B_{26} + B_{27} +$
 $B_{28} + B_{29} + B_{210} + B_{211} + B_{212} = 3(5 + 0 + 20 + 14 + 33 + 24 + 14 +$
 $4 + 26 + 20 + 15 + 10) + 8 + 8 + 28 + 30 + 3 + 3 + 30 + 30 + 0 + 0 +$
 $0 + 8 = 703 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo das penalidades de atraso */

$\text{CustoAtrasoMaca} = A_{Ti21} + A_{Ti22} + A_{Ti23} + A_{Ti24} + A_{Ti25} + A_{Ti26} +$
 $A_{Ti27} + A_{Ti28} + A_{Ti29} + A_{Ti210} + A_{Ti211} + A_{Ti212} + 10(A_{Tr21} + A_{Tr22} +$
 $A_{Tr23} + A_{Tr24} + A_{Tr25} + A_{Tr26} + A_{Tr27} + A_{Tr28} + A_{Tr29} + A_{Tr210} +$
 $A_{Tr211} + A_{Tr212}) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 +$
 $10(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 0 \text{ (U.M.)}$

4.6.3 Sumo de Pêra

Sumo de Pêra

/* Cálculo do custo de compra de concentrado */

$\text{CustoConcentradoPera} = 116 C_{31} + 116 C_{32} + 124 C_{33} + 120 C_{34} +$
 $132 C_{35} + 128 C_{36} + 136 C_{37} + 116 C_{38} + 120 C_{39} + 108 C_{310} +$
 $100 C_{311} + 116 C_{312} = 116 \times 0 + 116 \times 9 + 124 \times 0 + 120 \times 0 +$
 $132 \times 0 + 128 \times 27 + 136 \times 0 + 116 \times 0 + 120 \times 0 + 108 \times 0 +$
 $100 \times 29 + 116 \times 0 = 7400 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de produção */

$\text{CustoProducaoPera} = 10 P_{31} + 10 P_{32} + 10 P_{33} + 10 P_{34} + 10 P_{35} +$
 $10 P_{36} + 10 P_{37} + 12 P_{38} + 10 P_{39} + 10 P_{310} + 10 P_{311} + 10 P_{312} =$
 $10 \times 0 + 10 \times 15 + 10 \times 0 + 10 \times 0 + 10 \times 0 + 10 \times 0 +$
 $10 \times 27 + 12 \times 0 + 10 \times 0 + 10 \times 0 + 10 \times 23 + 10 \times 0 = 650 \text{ (U.M.)}$

/* Cálculo do custo de armazenamento */

$$\begin{aligned} \text{CustoStockPera} = & 3(A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} + A_{35} + A_{36} + A_{37} + A_{38} + \\ & A_{39} + A_{310} + A_{311} + A_{312}) + B_{31} + B_{32} + B_{33} + B_{34} + B_{35} + B_{36} + \\ & B_{37} + B_{38} + B_{39} + B_{310} + B_{311} + B_{312} = 3(6 + 17 + 13 + 8 + 2 + \\ & 0 + 14 + 6 + 0 + 0 + 14 + 10) + 6 + 0 + 0 + 0 + 0 + 27 + 0 + 0 + \\ & 0 + 0 + 6 + 6 = 315 \text{ (U.M.)} \end{aligned}$$

/* Cálculo do custo das penalidades de atraso */

$$\begin{aligned} \text{CustoAtrasoPera} = & A_{Ti31} + A_{Ti32} + A_{Ti33} + A_{Ti34} + A_{Ti35} + A_{Ti36} + \\ & A_{Ti37} + A_{Ti38} + A_{Ti39} + A_{Ti310} + A_{Ti311} + A_{Ti312} + 10(A_{Tr31} + \\ & A_{Tr32} + A_{Tr33} + A_{Tr34} + A_{Tr35} + A_{Tr36} + A_{Tr37} + A_{Tr38} + A_{Tr39} + \\ & A_{Tr310} + A_{Tr311} + A_{Tr312}) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + \\ & 1 + 0 + 0 + 10(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0) = \\ & 82 \text{ (U.M.)} \end{aligned}$$

4.6.4 Custo Total

$$\begin{aligned} \text{CustoTotal} = & \text{CustoConcentradoLaranja} + \text{CustoConcentradoMaca} + \\ & \text{CustoConcentradoPera} + \text{CustoProducaoLaranja} + \text{CustoProducaoMaca} + \\ & \text{CustoProducaoPera} + \text{CustoStockLaranja} + \text{CustoStockMaca} + \\ & \text{CustoStockPera} + \text{CustoAtrasoLaranja} + \text{CustoAtrasoMaca} + \text{CustoAtrasoPera} = \\ & 25120 + 16244 + 7400 + 1630 + 820 + 650 + 379 + 703 + 315 + 113 + 0 + \\ & 82 = 53456 \text{ (U.M.)} \end{aligned}$$

Como podemos observar, o Custo Total é igual à solução ótima obtida utilizando o LPSolve.

5. *Conclusão*

Tal como tínhamos mencionado na introdução, este relatório tinha como objetivo apresentar as soluções de otimização para os diferentes cenários do problema proposto.

À medida que avançamos entre as diferentes partes do problema tivemos de ir alterando os nossos modelos, tanto ao nível das variáveis de decisão, como a função objetivo e respectivas restrições. Tanto as variáveis como as restrições foram aumentando ao longo das 3 partes de modo a conseguirmos dar respostas aos novos cenários que iam surgindo mantendo de certa forma grande parte do cenário anterior. Entre os 3 cenários apresentados, foi no cenário II que obtivemos o melhor resultado pois a introdução da possibilidade de atrasar a entrega de uma determinada quantidade de produto pode abrir muitas mais opções favoráveis à empresa e consequentemente diminuir o custo total.

Concluindo, podemos afirmar que este trabalho foi bastante enriquecedor para aprofundarmos os nossos conhecimentos e assimilarmos melhor alguns temas abordados até ao momento na U.C., permitindo-nos relacionar vários conceitos e estratégias de resolução de problemas. Para além disso, a ajuda do programa *LP-Solve* foi essencial, tanto na obtenção de resultados, como na aprendizagem dos conceitos e resolução dos problemas.