

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Данило Ђокић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА
**СИГНАЛИ И СИСТЕМИ У
ИНЖЕЊЕРСТВУ**

Развојна верзија

14. септембар 2025.

Предговор

Збирка задатака „Сигнали и системи у инжењерству“ намењена је предмету „Сигнали и системи“ на Електротехничком факултету Универзитета у Београду на одсеку за Електронику и дигиталне системе. На основу материјала са рачунских вежби, као и испитних задатака, Аутор је почео израду збирке задатака која треба да у неком тренутку прође и званичну процедуру и рецензију и постане званично наставно средство на предмету. Аутор се труди да збирка буде методичка, односно, да се задаци надовезују један на други, сложенији након једноставнијих. Такође, велики број задатака има тежњу да илуструје примену градива предмета на различитим поједностављеним инжењерским проблемима, претежно у електротехници. Аутор нарочито моли студенте који примете да недостаје неки „степеник“ у овом низу задатака, макар и на свом личном примеру, да му то и пренесу.

Због идеолошких убеђења, Аутор објављује збирку задатака онлајн бесплатно, отвореног кода. Студенти могу слободно да користе овај садржај као најажурнији облик материјала за вежбе на Предмету, за потребе припремања предиспитних обавеза и испита.

Изворни код збирке је постављен на *GitHub* где сви заинтересовани могу да пренесу своје замерке или предлоге помоћу интегрисаног система *Issues* који прати све досадашње измене и на једном месту чува све већ стављене примедбе. Детаљно објашњење овог процеса постоји на интернет адреси на којој се збирка налази:

<https://github.com/djokicd/zbirka-sis>

Аутор ће бити веома захваљан свима који помогну развој збирке јер ово заједнички пројекат чији је циљ квалитетнији наставни материјал за један веома прагматичан инжењерски предмет. Аутор ће се трудити да одржава стање ажурним у складу са датим примедбама, и захваљује се свима који су помогли збирку својим идејама или пријављивањем постојећих грешака. Ова збирка не би исто изгледала без вас.

Поред неких задатака, на маргинама, постоје нарочите методичке ознаке које служе да нагласе природу тих задатака, то су

- ♣ – Задаци који представљају нарочито важне фундаменталне основе, које се често користе у осталим задацима;
- ⚠ – Сложенији задаци, у рангу испитних задатака, на које треба обратити нарочиту пажњу; и
- 🚫 – Задаци који нису у оквиру градива предмета, али се служе релевантном тематиком. Служе за продубљивање знања, и не спадају у градиво за испите.



Збирка се објављује под лиценцом *Creative Commons 4.0 Ауторство*
- делимично под истим условима.

Садржај

1	Основне особине сигнала и система	6
1.1	Континуални и дискретни сигнали	6
1.2	Континуални системи	27
1.3	Дискретни системи	61
2	Примене Фуријеових редова	73
2.1	Фуријеови редови континуалног сигнала	73
2.2	Фуријеови редови дискретног сигнала	96
3	Примене Фуријеових трансформација	99
3.1	Фуријеова трансформација континуалног сигнала	99
3.2	Фуријеова трансформација дискретног сигнала	109
4	Примене Лапласове трансформације	114
4.1	Системи диференцијалних једначина	114
4.2	Преносне функције LTI система	118
5	Одабирање и реконструкција сигнала	140
5.1	„Памти-прати“ (SH) кола	140
6	Примене \mathcal{Z} -трансформације	142
6.1	Одзиви дискретних система	142
6.2	Системи диференцијалних једначина	156
A	Решавање диференцијалних једначина	159
B	Формуле за експоненцијалну побуду	165
B	Операциони појачавач и индуктивни елементи	169
Г	Одређивање импулсног одзива континуалних LTI система	175
Д	Преглед коришћених симбола у блок дијаграмима	181
Ђ	Растављање преносне функције на парцијалне разломке	185
S	Важна својства трансформација	191

Т	Таблице	199
1	Конволуција континуалних сигнала	199
2	Конволуција дискретних сигнала	200
3	Неки формални развоји	200
4	Неки таблични интегрални	200
5	Фуријеови редови континуалних сигнала	202
6	Фуријеове трансформације континуалних сигнала	203
7	Унилатерална Лапласова трансформација	204
8	Фуријеова трансформација дискретног сигнала	206
9	\mathcal{Z} трансформација	207

1 Основне особине сигнала и система

1.1 Континуални и дискретни сигнали

1. Нацртати континуалне сигнале: (а) јединични правоугаони импулс, $\text{rect}(t)$, (б) јединични троугаони импулс, $\text{tri}(t)$, (в) функцију $\text{sinc}(t)$; и дискретне сигнале (г) дискретан јединични импулс, $\delta[n]$, (д) дискретан јединични низ, $u[n]$, и (ђ) дискретну правоугаону функцију полуширине 2, $\text{rect}_2[n]$.

РЕЗУЛТАТ



Слика 1.1

♣ 2. Поједноставити следеће изразе (а) $\delta(at)$, и (б) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)dt$, где су $a, \tau \in \mathbb{R}$ познати реални параметри, а $x(t)$ је непрекидан сигнал.

РЕШЕЊЕ

Строга анализа Дираковог импулса¹ захтева залажење у математичку теорију дистрибуција. Ипак, за инжењерске потребе, овај импулс има изузетан значај и биће присутан кроз цео наставак ове збирке. Ми ћемо га третирати на инжењерски начин, полазећи од његова два основна својства, и то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \text{ и} \quad (2.1)$$

$$\delta(t \neq 0) = 0 \quad (2.2)$$

Ова два услова су, гледано са становишта класичне математичке анализе, противречна. Не постоји таква функција да је равна нули у свим тачкама осим једне, а да је њен интеграл различит од нуле. Ипак, уколико кажемо да је понашање Делта импулса у околини нуле „необично“ (недефинисано), онда можемо доћи до веома корисних закључака. На пример, посматрајмо правоугаони импулс који се произвољно сужава, при чему се његова амплитуда повећава тако да његова површина остаје јединична. Такав сигнал назовимо језгром Делта импулса $\delta_a(t) = \frac{1}{a} \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)$, где је a реални параметар који описује ширину импулса. Уколико узмемо да произвољно смањујемо ширину a можемо да закључимо да је увек

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) dt = 1 \text{ за свако } a, \text{ а да постепено само језгро постаје све „концентрисаније“ око}$$

нуле, односно да тим процесом све вредности осим нуле теже нули. Такође, то не зависи од иницијално одабира језгра, слично би се десило и са јединичним троугаоним и са јединичним sinc сигналом. Резултат тог процеса јесте Дираков импулс, као што је илустровано на слици:

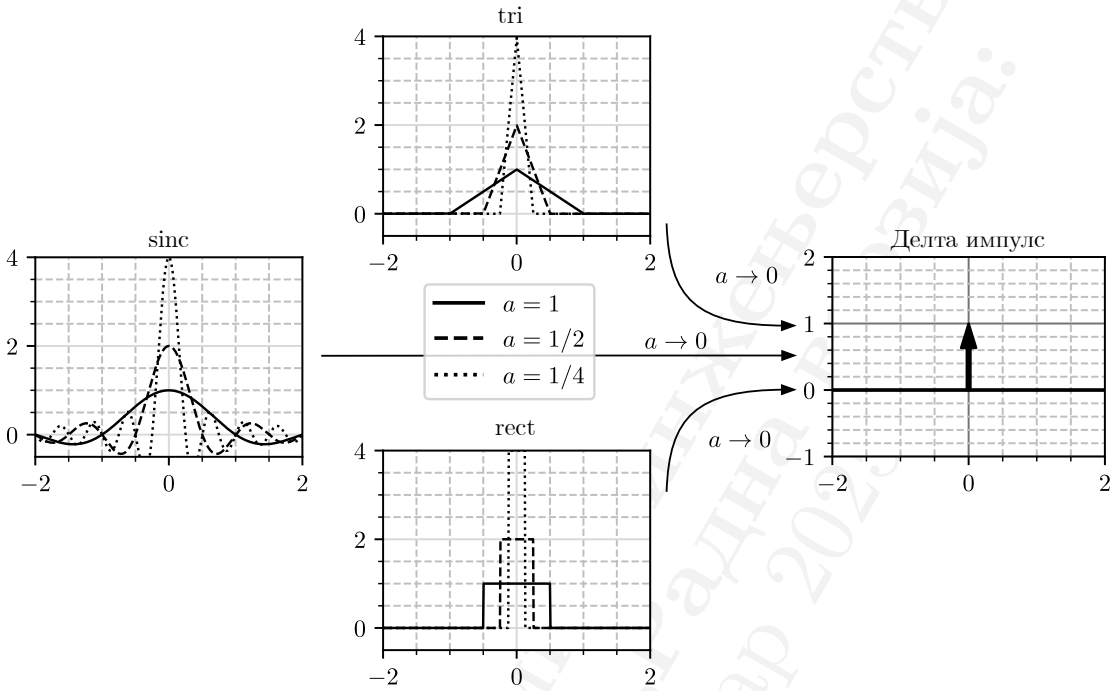
Може се писати и $\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t)$, али треба бити пажљив када је употреба овог израза у питању, јер гранична вредност није дефинисана у нули. Када год се анализира утицај Дираковог импулса, треба размишљати о утицају било ког језгра Делта импулса, па уочити шта се дешава када се спроведе описани гранични процес.

(а) Анализу $\delta(at)$ ћемо спровести на основу дефиниционих релација (2.1) и (2.2), пре свега, размотримо интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) dt$, који се може решити сменом $u = at \Rightarrow du = a dt$.

Том приликом, треба повести рачуна да су у случају када је $a < 0$ границе интеграције окренуте, па је онда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) dt = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(u) \frac{du}{a} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) du & , a > 0, \\ \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} \delta(u) du & , a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|}. \quad (2.3)$$

¹Поред овог назива који ће бити коришћен у овом тексту, присутни су и делта импулс, Дираков делта импулс, Диракова делта функција. Пошто овај математички објект строго није функција, тај назив ћемо избегавати.



Слика 2.1: Илустрација процеса настајања Дираковог импулса. Језгро одабрано полазећи од три различита јединична сигнала, процесом $a \rightarrow 0$ постаје Дираков импулс.

Такође, приметимо да је $\delta(at \neq 0) = 0$ еквивалентно са $\delta(t \neq 0) = 0$ па је тиме задовољен и услов (2.2). Коначно, закључујемо да сигнал $\delta(at)$ има површину $1/|a|$ док је раван нули свуда осим за $t = 0$, то значи да се може писати:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad (2.4)$$

што се назива својством скалирања Делта импулса.

(б) У датом интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt$ јавља се Делта импулс померен на тренутак $t = \tau$.

Овај проблем можемо третирати раздвајањем овог интеграла на три дела, издвајајући инфинитезималну околину $[\tau^-, \tau^+]$ на тај начин,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\tau^-} x(t) \delta(t - \tau) dt + \int_{\tau^-}^{\tau^+} x(t) \delta(t - \tau) dt + \int_{\tau^+}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt \quad (2.5)$$

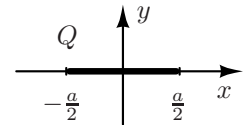
Први и трећи интеграл равни су нули јер је домен интеграције ван непосредне околине вредности $t = \tau$ па су Диракови импулси у тим интегралима увек равни нули. Средњи интеграл, у околини те вредности, решићемо знајући да је $x(t)$ непрекидан сигнал. Наиме, пошто се разматра произвољно уска околина око параметра τ то се може писати да је $x(\tau^- < t < \tau^+) \rightarrow x(\tau)$, односно сигнал $x(t)$ је на том интервалу практично константа, па је

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} x(t) \delta(t - \tau) dt = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \underbrace{x(t)}_{\text{const}} \delta(t - \tau) dt = x(\tau) \int_{\tau^-}^{\tau^+} \delta(t - \tau) dt = x(\tau). \quad (2.6)$$

Добијени резултат представља веома важно тзв. *својство одабирања* или *својство селекције* Дираковог импулса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = x(\tau). \quad (2.7)$$

3. Танка нит дужине a хомогено је наелектрисана укупним наелектрисањем Q постављена је дуж x -осе, као на слици. Аналитички описати (а) функцију подужне густине наелектрисања $Q'(x)$. Одредити и (б) исту функцију за $a \rightarrow 0$.



Слика 3.1

РЕШЕЊЕ

(а) Подужна густина наелектрисања ван области нити је онда $Q'(|x| > a/2) = 0$ док је у области нити константна, $Q'(|x| < a/2) = Q/a$. Ово се може записати као²

$$Q'(x) = \frac{Q}{a} \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right). \quad (3.1)$$

(б) Када је $a \rightarrow 0$, нит суштински постаје тачка, па је подужна густина наелектрисања $Q'(x) = Q\delta(x)$, где је $\delta(x)$ Дираков импулс. Такође, ово се може третирати као да је

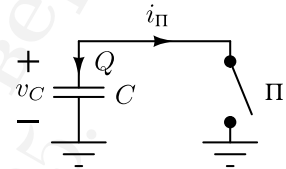
$$\text{Јединична правоугаона функција дефинише се као } \text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 1/2 & |x| = \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ па се правоугаона функција у}$$

интервалу $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ може дефинисати као $\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$.

$\delta_a(x) = \frac{1}{a} \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$ језгро Дираковог импулса, па у граничном процесу када је $a \rightarrow 0$ постаје $\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x)$.

Слично као у задатку 4, димензија мере Дираковог импулса је укупно наелектрисање, будући да је мера самог импулса дефинисаног у просторном домену димензије реципрочне дужине. У електромагнетици, тачкаста наелектрисања се третирају као Диракови импулси густине наелектрисања у простору, чиме се омогућава аналитичко решавање проблема са тачкастим наелектрисањима у простору.

- ♣ 4. У колу са слике познато је $C = 1 \text{ [}\mu\text{F]}$. Идеалан прекидач П је отворен, а кондензатор је оптерећен количином наелектрисања $Q = 1 \text{ [}\mu\text{C]}$. У тренутку $t_0 = 0$ затвара се прекидач. Одредити $v_C = v_C(t)$ и $i_P = i_P(t)$, за $-\infty < t < \infty$.



Слика 4.1

РЕЗУЛТАТ

Према услову задатка је $v_C(t < 0) = \frac{Q}{C} = 1 \text{ [V]}$. Према карактеристици идеалног прекидача након затварања прекидача је $v_C(t > 0) = 0$, обједињено ово се може записати у условном облику као $v_C(t) = \begin{cases} 1 \text{ [V]}, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$. Добијени израз се може записати и помоћу Хевисајдове одскочне функције као

$$v_C = 1 \text{ [V]} (1 - u(t)). \quad (4.1)$$

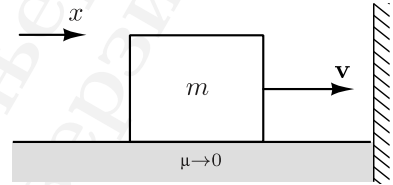
Тако записан израз је нарочито користан за одређивање тражене струје, пошто је струја кондензатора, за референтни смер усклађен са напоном, константне капацитивности дата изразом $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$, она се може потражити као $i_C = C \frac{dv_C}{dt} = -1 \text{ [}\mu\text{C]} \frac{du(t)}{dt} = -1 \text{ [}\mu\text{C]} \delta(t)$. Пошто је добијена струја кондензатора у супротном референтном смеру од струје прекидача, коначан резултат за струју прекидача је $i_P(t) = 1 \text{ [}\mu\text{C]} \delta(t)$.

Важно је прокоментарисати две ствари у вези са овим резултатом. Прво, физички сми-сао Дираковог импулса може се потражити у свим појавама које трају веома кратко а које имају коначан утицај. У овом случају, за „бесконечно кратко“ време кроз прекидач протек-не целокупно наелектрисање кондензатора. Са друге стране, приметимо да је димензија сигнала $\delta(t)$ заправо $[\text{s}^{-1}]$, па је мера Дираковог импулса који одговара струји запра-

во количина наелектрисања. Ово је конзистентно са дефиниционим својством Дираковог

$$\text{импулса према } \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t)}_{[s^{-1}]} \underbrace{dt}_{[s]} = \underbrace{1}_{[.]}$$

5. На слици је приказано круто тело масе m које може да се креће по подлози без трења. Брзина тела дата је као $\mathbf{v} = v(t)\mathbf{i}_x$. У тренутку $t_0 = 0$ блок се апсолутно еластично судара са непокретним зидом након чега се креће брзином алгебарског интензитета $v(t) = -v_0$. (а) Одредити и изразити $v(t)$ за $-\infty < t < \infty$. (б) Одредити и нацртати временски дијаграм алгебарског интензитета силе којом зид делује на блок $\mathbf{N} = N(t)\mathbf{i}_x$.



Слика 5.1

РЕЗУЛТАТ

(а) $v(t) = v_0(1 - 2u(t))$. (б) Тражени дијаграм приказан је на слици 5.2. Временски облик силе нормалне реакције зида дат је у облику $N(t) = -2mv_0\delta(t)$. Нагласимо да је у овом случају димензија мере Дираковог импулса механички импулс (количина кретања). Односно, може се рећи да механичком импулсу, који је тело примило приликом краткотрајног дејства силе, одговара мера Дираковог импулса силе која је на њега том приликом деловала.



Слика 5.2

6. Скицирати временски дијаграм сигнала датог изразом $x(t) = \delta(f(t))$ где је $f(t) = t^2 - 1$, а $\delta(t)$ Дираков импулс.

РЕШЕЊЕ

Строга анализа проблема композиције Дираковог импулса са датом функцијом, $\delta(t) \circ f(t) = \delta(f(t))$ спроводи се у математичкој теорији дистрибуција. Проблем ћемо анализирати са инжењерског становишта, тумачећи га на следећи начин. Пре свега, уочимо да је за $f(t) \neq 0$ тада $\delta(f(t)) = 0$, по дефиницији. Са друге стране, тачке $f(t) = 0$ представљају нуле функције $f(t)$. Уочимо једну нулу те функције, t_0 , и распишимо функцију $f(t)$ у Тејлоров ред око тачке t_0 :

$$f(t) = \cancel{f(t_0)}^0 + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \dots \quad (6.1)$$

онда приметимо да нас интересује резултат само у веома непосредној околини тачке t_0 , те можемо занемарити све чланове реда који су већи од првог, чиме преостаје $f(t) \approx f'(t_0)(t - t_0)$. Одавде у околини тачке t_0 вреди:

$$\delta(f(t)) = \delta(f'(t_0)(t - t_0)) = \frac{\delta(t - t_0)}{|f'(t_0)|}, \quad (6.2)$$

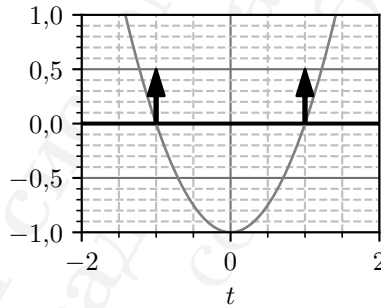
при чему је искоришћено својство скалирања аргумента Дираковог импулса³. Закључујемо да се у тачки t_0 , таквој да је $f(t_0) = 0$, дешава појава Дираковог импулса чија је мера $1/|f'(t_0)|$. Пошто се по један импулс налази у свакој тачки нуле функције $f(t)$ коначно се може писати:

$$\delta(f(t)) = \sum_{\substack{t_i \\ f(t_i)=0}} \frac{\delta(t - t_i)}{|f'(t_i)|}, \quad (6.3)$$

У конкретном датом случају, нуле функције $f(t)$ су $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$, па је:

$$\delta(f(t)) = \frac{\delta(t + 1)}{2} + \frac{\delta(t - 1)}{2}, \quad (6.4)$$

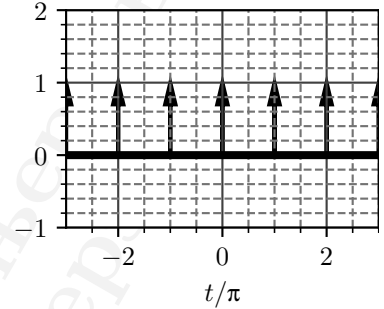
што је и тражени резултат који је приказан на слици 6.1. Функција $f(t)$ је учртана сивом бојом, а сигнал $\delta(f(t))$ црном бојом.



Слика 6.1: Уз резултат.

³Својство скалирања аргумента Дираковог импулса: $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.

7. Континуални сигнал $\delta(\sin(t))$ расписати преко скалираних и померених Диракових импулса и скицирати његов временски дијаграм.



Слика 7.1

РЕЗУЛТАТ

Сигнал се може изразити као поворка Диракових импулса у облику $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\pi) = \text{III}_{\pi}(t)$. Тражена скица приказана је на слици 7.1.

8. Нека је дат континуалан сигнал $x(t) = e^{\sigma t} \text{III}_T(t) u(t + \epsilon)$, где је $0 < \epsilon < T$. (а) Одредити услов које треба да задовољава параметар $\sigma \in \mathbb{R}$ тако да интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$ конвергира, и у том случају (б) израчунати тај интеграл.

РЕШЕЊЕ

(а) Дата поворка Диракових импулса се може расписати по дефиницији, а затим се може применити особина еквиваленције⁴ Дираковог импулса према

$$x(t) = e^{\sigma t} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)}_{\text{III}_T(t)} u(t + \epsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{\sigma t} \delta(t - kT)}_{\text{особина екв.}} u(t + \epsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\sigma kT} \delta(t - kT) u(t + \epsilon). \quad (8.1)$$

Интеграл датог израза се онда може израчунати заменом редоследа интеграције и сумирања⁵ према поступку:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\sigma kT} \delta(t - kT)}_{\text{замена}} u(t + \epsilon) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{\sigma kT}}_{\text{const}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) u(t + \epsilon) dt. \quad (8.2)$$

⁴Особина еквиваленције је $x(t)\delta(t - \tau) = x(\tau)\delta(t - \tau)$, $\tau = \text{const}$.

⁵Строго оправдање замене интеграла и суме је сложено. Ипак, у инжењерским применама, користимо то без оправдања будући да се *математички* случајеви где то није оправдано у пракси практично не јављају. Практично сматрамо да је $\sum \int \equiv \int \sum$.

У последњем написаном интегралу, члан $u(t + \epsilon)$ ограничава интеграл са леве стране чиме се онда интеграл решава провером да ли Делта импулс $\delta(t - kT)$ постоји у домену интеграције $t \in (-\epsilon, \infty)$. као

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) u(t + \epsilon) dt = \int_{-\epsilon}^{\infty} \delta(t - kT) dt = \begin{cases} 0 & , k < 0 \\ 1 & , k \geq 0 \end{cases} = u[k] \quad (\text{дискретан јединични низ}) \quad (8.3)$$

Сменом добијеног резултата у (8.2) добија се геометријски ред⁶ ограничен са леве стране

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\sigma kT} u[k] = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{\sigma T})^k = \frac{1}{1 - e^{\sigma T}}, \quad \text{под условом конвергенције: } |e^{\sigma T}| < 1. \quad (8.4)$$

Добијени услов конвергенције последица је суме геометријског реда и даје услов па је тражени услов $\sigma < 0$, а тражени интеграл дат је резултатом у изразу (8.4).

Читаоцу се препоручује да понови задатак у случају да је $\sigma \in \mathbb{C}$.

⁶Сума геометријског реда је облика $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$, под условом да је $|q| < 1$.

9. Одредити следеће интеграле:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_{-\infty}^t \cos(\tau) u(\tau) d\tau & \text{(b)} \int_{-\infty}^t \cos(\tau) \delta(\tau) d\tau & \text{(д)} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau) u(\tau - 1) \delta(\tau) d\tau \\
 \text{(б)} \int_{-\infty}^t \sin(\tau) u(\tau) d\tau & \text{(г)} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau) \delta(\tau) d\tau & \text{(ђ)} \int_{-\infty}^2 e^{\tau^2 - 3\tau + 2} \delta(\tau - 1) d\tau
 \end{array}$$

Скицирати сигнале из тачака (а) и (б).

РЕЗУЛТАТ

$$\text{(a)} \sin(t) u(t); \quad \text{(б)} (1 - \cos(t)) u(t); \quad \text{(в)} u(t); \quad \text{(г)} 1; \quad \text{(д)} 0; \quad \text{(ђ)} 1.$$

10. Нацртати следеће континуалне сигнале:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} x(t) = 2u(t) - u(t - 1), \text{ и } \frac{dx}{dt}(t); & \text{(в)} x(t) = \cos(\pi t)[\delta(t + 1) + \delta(t - 1)], \text{ и } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau; \\
 \text{(б)} x(t) = u(t + 2) - 2u(t) + u(t - 1), \text{ и } \frac{dx}{dt}(t); & \text{(г)} x(t) = \text{III}\left(\frac{t}{2}\right),
 \end{array}$$

где су $u(t)$ и $\delta(t)$ јединична одскачна функција и Дираков импулс редом.

РЕЗУЛТАТ

Тражени дијаграми приказани су на слици 10.1.

11. Нацртати следеће дискретне сигнале $x = x[n]$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} x[n] = u[n] - 2u[n - 4], & \text{(в)} x[n] = (1 - n)(u[n + 2] - u[n - 3]) \\
 \text{и } y[n] = \nabla x[n]; & \\
 \text{(б)} x[n] = n^2(\delta[n + 2] - 2\delta[n - 2]), & \text{(г)} x[n] = \cos \frac{\pi n}{N} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \right) u[n], \\
 \text{и } y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]; & \text{за } N = 3;
 \end{array}$$



Слика 10.1

где су $u[t]$ и $\delta[n]$ дискретни јединични низ и дискретни јединични импулс редом, а $\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$ је диференца уназад,

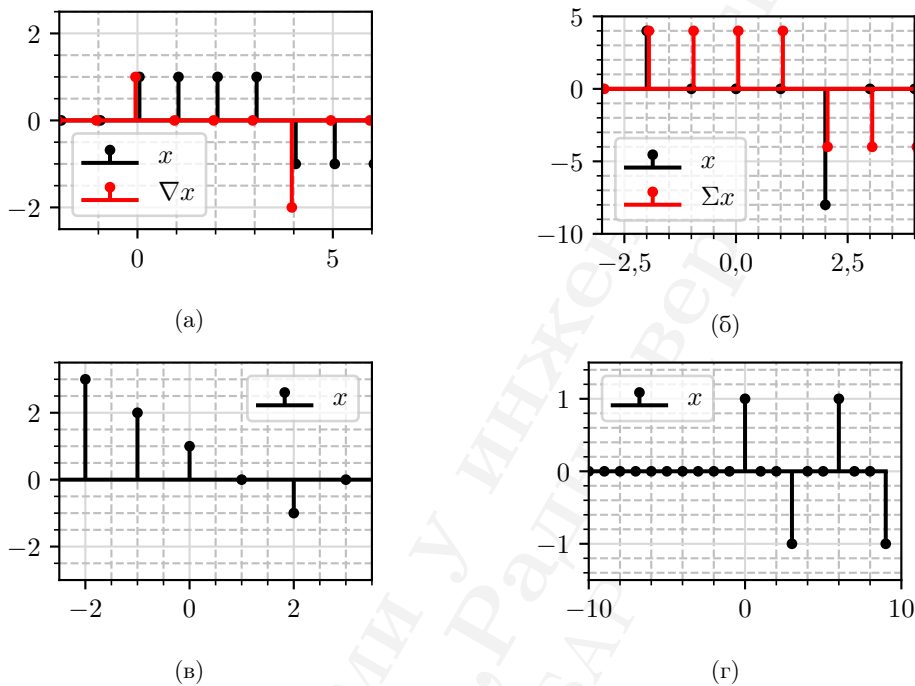
РЕЗУЛТАТ

Тражени дијаграми приказани су на слици 11.1.

12. Изразити периодичну поворку Диракових импулса $\text{Ш}_T(t)$ сложенем трансформацијом јединичне периодичне поворке Диракових импулса $\text{Ш}(t) = \text{Ш}_1(t)$.

РЕШЕЊЕ

Период тражене поворке једнак је T док је период јединичне поворке једнак јединици. Јасно је потребно онда прво обавити скалирање временске осе тако да се од јединичног импулса добије импулс одговарајуће ширине. Том приликом је потребно обавити скалирање



Слика 11.1: Уз задатак 11. На апсциси је n , а на ординати су означене величине.

временске осе појединачног Дираковог импулса⁷ па се има:

$$\text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t - kT}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\delta(t - kT) = T\text{Ш}_T(t) \quad (12.1)$$

Коначно, из добијеног резултата је тражени израз $\text{Ш}_T(t) = \frac{1}{T}\text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right)$.

⁷Користи се резултат $\delta(a(t - t_0)) = \frac{1}{|a|}\delta(t - t_0)$

13. Одредити парну и непарну компоненту континуалних сигнала $x = x(t)$ за: ♣

$$(a) \ x(t) = e^{kt}; \text{ и} \quad (b) \ x(t) = e^{j\omega_0 t},$$

где су k и ω_0 познате реалне константе.

РЕШЕЊЕ

Сваки континуални сигнал $x(t)$ може се, на *jegunsiwen* начин, представити преко његове парне и непарне компоненте, $x_e(t) = \text{Ev } x(t)$ и $x_o(t) = \text{Od } x(t)$ редом, као

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t). \quad (13.1)$$

Парна и непарна компонента сигнала могу се одредити разматрањем израза за $x(-t)$ као и његове парне и непарне компоненте. Наиме,

$$x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t) \Rightarrow x(-t) = x_e(t) - x_o(t), \quad (13.2)$$

при чему су искоришћени $x_e(-t) = x_e(t)$ и $x_o(t) = -x_o(-t)$, према дефиницији парне и непарне компоненте. Одатле се онда из система једначина (13.1) и (13.2) налазе изрази за парну и непарну компоненту сигнала датог као $x(t)$:

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}, \quad \text{и} \quad (13.3)$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}. \quad (13.4)$$

На основу добијеног резултата (13.4), онда се могу непосредно одредити парна и непарна компонента датих израза

$$(a) \ \text{Ev}\{e^{kt}\} = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} = \cosh(kx), \text{ и } \text{Od}\{e^{kt}\} = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} = \sinh(kx);$$

$$(b) \ \text{Ev}\{e^{j\omega_0 t}\} = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = \cos(\omega_0 t), \text{ и } \text{Od}\{e^{j\omega_0 t}\} = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2} = j \sin(\omega_0 t);$$

14. Одредити парну и непарну компоненту континуалног простопериодичног сигнала, облика $x(t) = \sin(\omega_0 t + \theta)$, где су ω_0 и θ познате константе.

РЕШЕЊЕ

Решење се може потражити поступком описаним у задатку 13, ипак, у случају овог задатка, али и разних других сродних примера, резултат се може пронаћи *идентификацијом* парног и непарног дела сигнала, трансформацијом полазног израза. Применимо израз за синус збира⁸ чиме се добија

$$x(t) = \sin(\omega_0 t + \theta) = \underbrace{\cos \theta}_{\text{const}} \cdot \sin \omega_0 t + \underbrace{\sin \theta}_{\text{const}} \cdot \cos \omega_0 t. \quad (14.1)$$

Пошто је познато да су $\sin(\omega_0 t)$ и $\cos(\omega_0 t)$ непаран и паран сигнал редом, а знамо да се сигнал $x(t)$ може на јединствен начин представити као збир његових парних и непарних компоненти, онда морају бити

$$\text{Od}\{x(t)\} = \cos \theta \cdot \sin \omega_0 t, \quad \text{и} \quad (14.2)$$

$$\text{Ev}\{x(t)\} = \sin \theta \cdot \cos \omega_0 t. \quad (14.3)$$

Овакав поступак идентификације компоненти сигнала, често може брже довести до резултата од поступка описаног у задатку 13.

15. Полазећи од дефиниција парног и непарног сигнала извести услов за парност сигнала

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \cdot x_3(t) \cdots x_n(t) = \prod_{k=1}^n x_k(t),$$

где је сваки од сигнала $x_k(t)$ за $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ или паран или непаран.

РЕЗУЛТАТ

Сигнал је паран ако и само ако је број непарних сигнала из скупа $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ паран.

16. Применом својстава парних и непарних сигнала израчунати вредности одређених интеграла

$$(a) \quad I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + e^{\sin 2t}} dt;$$

$$(b) \quad I_2 = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1 - t + 2t^3 - t^5 + 2t^7}{\cos^2(t)} dt.$$

⁸Синус збира углова $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

РЕШЕЊЕ

Пошто су границе интеграла парне, може се користити својство да је

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a \text{Ev}\{f(t)\}dt, \quad (16.1)$$

односно, потребно је потражити парне компоненте датих подинтегралних величина.

(а) Парна компоненте подинтегралне величине налази се применом особина парности простопериодичних функција, применом поступка из задатка 13, као

$$\text{Ev} \left\{ \frac{\cos t}{1 + e^{\sin 2t}} \right\} = \frac{\frac{\cos t}{1 + e^{\sin 2t}} + \frac{\cos(-t)}{1 + e^{\sin 2(-t)}}}{2} = \frac{\frac{\cos t}{1 + e^{\sin 2t}} + \frac{\cos t}{1 + e^{-\sin 2t}}}{2} = \quad (16.2)$$

$$= \frac{\cos(t)(2 + e^{\sin 2t} + e^{-\sin 2t})}{2 + e^{\sin 2t} + e^{-\sin 2t}} = \frac{1}{2} \cos(t). \quad (16.3)$$

Заменом добијеног резултата у (16.1), коначно се налази, $I_1 = 1$.

(б) Сличним поступком се налази резултат $I_2 = 2\sqrt{3}$.

Периодичност, снага и енергија сигнала

17. Утврдити да ли су следећи сигнали периодични и за оне који то јесу израчунати основни период:

(а) $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$;

(в) $x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + e^{j2t}$.

(б) $x(t) = \cos(6t) + \sin(\pi t)$;

РЕШЕЊЕ

Периодичност збира континуалних сигнала $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., и $f_n(t)$ може се дискутовати на основу њихових основних периода T_1 , T_2 , ..., и T_n . Претпоставимо да је основни период сигнала $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$ једнак T . Тада је јасно да се период сваког од сигнала сабирака мора садржати цео број пута у сигналу збира, односно $T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = \dots = n_n T_n$, где су n_1 , n_2 , ..., и n_n цели бројеви. Пошто је основни период најмањи такав период, то значи да је T најмањи број који се цео број пута садржи у сваком од периода сигнала сабирака, односно је

$$T = \text{NZS}\{T_1, T_2, \dots, T_n\}. \quad (17.1)$$

Такав резултат ће постојати уколико је $\frac{T_i}{T_j} = \frac{n_i}{n_j} \in \mathbb{Q}, \forall i, j$, односно, ако је однос сваког пара периода рационалан број. За такве периоде кажемо да су *рационално самерљиви*.

- (а) Сигнал $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$ је периодичан, јер су основни периоди⁹ сабирака рационално самерљиви, односно, $T = \text{NZS} \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5} \right\} = 2\pi$.
- (б) Сигнал $x(t) = \cos(6t) + \sin(\pi t)$ је аперидичан јер периоди сабирака, $\frac{2\pi}{6}$ и 2 , нису рационално самерљиви пошто је $\pi \notin \mathbb{Q}$.
- (в) Сигнал $x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + e^{j2t}$ је периодичан, јер су основни периоди сабирака $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, и π рационално самерљиви, а период је $T = \text{NZS} \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \pi \right\} = \pi$.

18. Реална дискретна синусоида дефинисана је у облику $x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$, где је $A \geq 0$, $|\Omega_0| \leq \pi$ и $|\phi| \leq \pi$. Ако дата секвенца

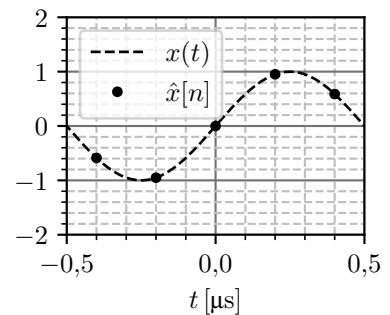
- (а) $\{0, 1, 0, -1\}$; (в) $\{1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$
 (б) $\{0, 1, 1, 0, -1, -1\}$;

представља основни период ове синусоиде, при чему је први члан $x[0]$, одредити параметре A , Ω_0 и ϕ .

РЕЗУЛТАТ

- (а) $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$, $\phi = -\frac{\pi}{2}$, $A = 1$, (б) $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$, $\phi = -\frac{\pi}{2}$, $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, (в) $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$, $A = \sqrt{2}$

19. Континуални сигнал $x_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$, учестаности $f_1 = 1$ [MHz], измерен је дигиталним осцилоскопом у тренуцима времена $t = kT_s$, где је $T_s = 0,2$ [μs], чиме је добијен дискретан сигнал $\hat{x}_1[n] = x_1(nT_s)$, као на слици. Затим је мерен простопериодични сигнал $x_2(t)$, учестаности f_2 , измерен истим поступком са истом вредношћу T_s , чиме је добијен дискретан сигнал $\hat{x}_2[n] = x_2(nT_s)$. Установљено је да је $\hat{x}_1[n] = \hat{x}_2[n]$. На основу тог резултата, одредити могуће вредности учестаности f_2 .



Слика 19.1

⁹Основни период синусоиде $\sin(\omega_0 t + \theta)$ је $T = 2\pi/\omega_0$.

РЕШЕЊЕ

Дискретни сигнал $\hat{x}_1[n]$, добијен од континуалног сигнала $x_1(t)$, је дат изразом $\hat{x}_1[n] = \sin(2\pi f_1 n T_s)$. Нека је учестаност простопериодичног сигнала $x_2(t)$ записана као $f_2 = f_1 + \Delta f$, онда се за дискретан сигнал $\hat{x}_2[n]$ може писати

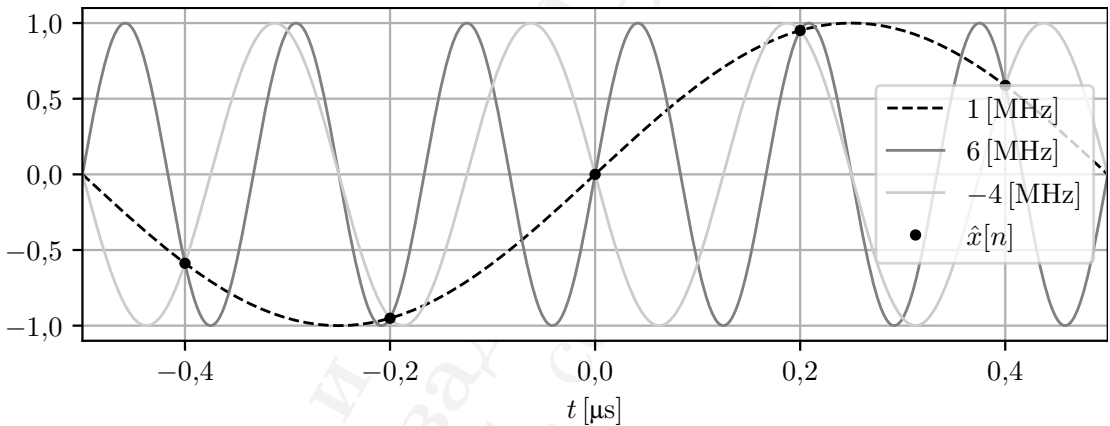
$$\hat{x}_2[n] = \sin(2\pi f_2 n T_s) = \sin(2\pi(f_1 + \Delta f)n T_s) = \sin(2\pi f_1 n T_s + \underbrace{2\pi \Delta f n T_s}_{2\pi k[n]}) \quad (19.1)$$

$$= \sin(2\pi f_1 n T_s) = \hat{x}_1[n] \quad (19.2)$$

Због периодичности континуалне синусоиде, довољан је услов да је $2\pi \Delta f n T_s = 2\pi k[n]$, за целобројне вредности $k[n]$. Односно, услов да је $\Delta f = k[n]/n T_s$. Пошто је Δf константа, онда мора бити $k[n] = k_0 n$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, односно, $\Delta f = k_0/T_s$. Закључујемо да су могуће учестаности сигнала x_2 из скупа

$$f_2 = \{\dots, f_1 - 2f_s, f_1 - f_s, f_1, f_1 + f_s, f_1 + 2f_s, \dots\}, \quad f_s = \frac{1}{T_s}. \quad (19.3)$$

Пошто су у конкретном случају $f_s = 5$ [MHz], то су могућа решења из скупа f_2 [MHz] $\in \{\dots, -4, 1, 6, 11, \dots\}$.



Слика 19.2: Синусоиде различитих учестаности које одговарају истом дискретном низу.

Резултат овог задатка је веома важан јер наговештава проблем да је дискретизацијом континуалног сигнала, у општем случају, немогуће једнозначно реконструисати полазни сигнал. Ипак, у наставку курса, изучићемо који квалитети континуалног сигнала, и одабир времена T_s , могу довести до једнозначне реконструкције и много сложенијих сигнала од простопериодичног.

20. Познато је да су енергије реалних сигнала $x = x(t)$ и $y = y(t)$, W_x и W_y редом, коначне. Одредити (а) услов, који треба да задовољавају сигнали x и y , под којим је снага сигнала $z(t) = x(t) + y(t)$ једнака $W_z = W_x + W_y$. На основу резултата из претходне тачке (б) доказати једнакост:

$$W\{x\} = W\{\text{Ev}\{x\}\} + W\{\text{Od}\{x\}\},$$

где $W\{x\}$ означава енергију сигнала x .

РЕШЕЊЕ

(а) Енергија сигнала $z(t) = x(t) + y(t)$ може се изразити као

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + y(t))^2 dt}_{W_z} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt}_{W_x} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt}_{W_y} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt. \quad (20.1)$$

Да би се остварио услов $W_z = W_x + W_y$, потребно је да буде $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt = 0$. За реалне сигнале $x(t)$ и $y(t)$ који овај услов задовољавају каже се да су *ортогонални*¹⁰.

(б) На основу резултата претходне тачке, једнакост коју треба доказати је тачна, будући да је услов интеграл непарне функције у симетричним границама, $\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\text{Ev}\{x\} \cdot \text{Od}\{x\}}_{\text{Непарна функција}} dt = 0$.

Односно, кажемо да су парна и непарна компонента сигнала ортогонални сигнали.

21. Нека дат периодичан сигнал $x(t)$, чија је основна периода T . Такав сигнал се може једнозначно представити преко своје сталне (DC) компоненте и наизменичне (AC) компоненте као $x(t) = \tilde{x}(t) + X$. Стална компонента је константна, док је средња вредност наизменичне компоненте равна нули. Одредити израз за средњу снагу, P , сигнала $x(t)$, у зависности од средњих снага његових DC и AC компоненти, P_{DC} и P_{AC} , редом.

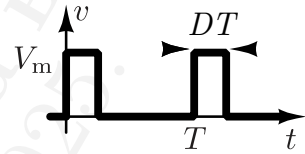
¹⁰Ортогоналност сигнала строго је дефинисана у векторском простору над скупом свих комплексних сигнала, на коначном интервалу $[a, b]$, у коме се скаларни производ дефинише као $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)y^*(t) dt$. Сигнали $x(t)$ и $y(t)$ су онда у том смислу ортогонални ако је $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$. Ова идеја ће бити коришћена приликом увођења Фуријеових редова.

РЕШЕЊЕ: Пошто је средња вредност производа сталне и наизменичне компоненте сигнала једнака $\frac{1}{T} \int_T \tilde{x}(t) X dt = \frac{1}{T} X \underbrace{\int_T \tilde{x}(t) dt}_{=0, \text{ по деф.}} = 0$, закључује се да су стална и наизменична

компонента ортогоналне у смислу дефинисаном у задатку 20а, па је на основу става из тог задатка снага комплетног сигнала једнака збиру сигнала компоненти:

$$P = P_{\text{DC}} + P_{\text{AC}}. \quad (21.1)$$

22. Дат је напонски сигнал $v = v(t)$ облика периодичне поворке униполарних правоугаоних импулса амплитуде $V_m = 5 \text{ [V]}$, као на слици. Трајање импулса је DT где је $0 \leq D \leq 1$ (тзв. *фактор исцјуне*), а учестаност сигнала је f . Одредити средњу снагу наизменичне компоненте тог сигнала у функцији фактора испуне $P_{\text{AC}} = P_{\text{AC}}(D)$.



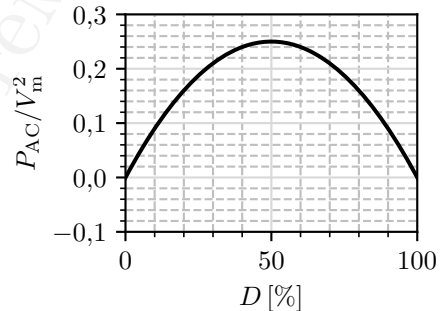
Слика 22.1

РЕШЕЊЕ: На основу става доказаног у задатку 21 средња снага комплетног сигнала једнака је збиру средњих снага наизменичне и сталне компоненте, $P = P_{\text{AC}} + P_{\text{DC}}$. Стална

компонента сигнала једнака је $V = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{DT} V_m dt = DV_m$, па је снага сталне

компоненте $P_{\text{DC}} = D^2 V_m^2$.

Средња снага комплетног сигнала је $P = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{DT} V_m^2 dt = DV_m^2$, одакле је средња снага наизменичне компоненте $P_{\text{AC}} = V_m^2 D(1 - D)$, што представља параболу по D , као што је илустровано на слици 22.2.



Слика 22.2

♣ **23.** Одредити израз за снагу сигнала:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + a_n \cos(n\omega_0 t), \quad (n \in \mathbb{N})$$

где су $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ познате реалне константе.

РЕШЕЊЕ

Периоди сигнала $x(t)$ су $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ и $T_k = \frac{T_0}{k}$, где је $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, па је укупни период сигнала $x(t)$ једнак T_0 . Снага сигнала $x(t)$ може се изразити као

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} (a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + a_n \cos(n\omega_0 t))^2 dt \quad (23.1)$$

Подинтегрална величина се може поделити на чланове у две различите врсте, квадрат сваког члана у изразу, и производ различитих чланова у изразу, чиме се добија израз

$$T_0 P_x = \int_{T_0} a_0^2 dt + \int_{T_0} a_1^2 \cos^2(\omega_0 t) dt + \int_{T_0} a_2^2 \cos^2(2\omega_0 t) dt + \dots + \int_{T_0} a_n^2 \cos^2(n\omega_0 t) dt + \quad (23.2)$$


$$+ 2a_0 a_1 \int_{T_0} \cos(\omega_0 t) dt + 2a_0 a_2 \int_{T_0} \cos(2\omega_0 t) dt + \dots + 2a_0 a_n \int_{T_0} \cos(n\omega_0 t) dt + \quad (23.3)$$

$$+ 2a_1 a_2 \int_{T_0} \cos(\omega_0 t) \cos(2\omega_0 t) dt + \dots + 2a_{n-1} a_n \int_{T_0} \cos((n-1)\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt + \dots \quad (23.4)$$

Интеграли у изразу (23.2) су квадрати прстопериодичних величина¹¹, па је њихова вредност једнака $T_0/2$. У реду (23.3) су интеграли прстопериодичних функција па су они сви равни нули, док су у реду (23.4) сви интеграли типа¹² $\int_T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt$, за $n \neq m$ равни нули. На основу тога, коначно се има

$$P_x = a_0^2 + \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{2} \quad (23.5)$$

Резултат се може добити и уопштењем става из задатка 20. Будући да су сабирци израза у задатку облика да је, интеграл на периоду производа свака два од њих раван нули, то је снага тог сигнала једнака збиру снага сваког од сигнала понаособ. Сигнал a_0 је константни сигнал, па је његова снага једнака квадрату амплитуде a_0^2 , док је снага сигнала $a_n \cos(n\omega_0 t)$, $n \in \mathbb{N}$, једнака $a_n^2/2$ (квадрат ефективне вредности $a_n/\sqrt{2}$). Сабирањем таквих снага, добија се исти коначан резултат.

24. Позната је отпорност отпорника $R = 3 \text{ [k}\Omega\text{]}$ и струја успостављена на његовим при- 

¹¹За сигнале $\cos^2(n\omega t)$, са периодом T , средња вредност је $\frac{1}{2}$ па је $\int_{T_0} \cos^2(n\omega t) dt = \frac{T}{2}$.

¹²Доказ овог става следи из чињенице да су сигнали $\cos(n\omega_0 t)$ и $\cos(m\omega_0 t)$ ортогонални за $m \neq n$ у смислу дефинисаном у задатку 20а. Овај став је од нарочитог интереса за увођење Фуријеових редова.

кључцима $i = \frac{0,75 I_0}{1,25 - \cos(\omega t)}$, где су $I_0 = 1$ [mA] и $\omega = 10^3$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$. Израчунати средњу снагу Цулових губитака на том отпорнику, P_R .

РЕШЕЊЕ

Средња снага отпорника одређује се рачунањем израза $P_R = \frac{1}{T} \int_T i^2(t) R dt$. Односно, $P_R = \frac{RI_0^2}{T} \int_0^T \left(\frac{0,75}{1,25 - \cos(\omega t)} \right)^2 dt$. Ради једноставности, у добијеном интегралу се може увести смена која има смисао тренутне фазе, $\phi = \omega t$, након чега се има $P_R = \frac{RI_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{0,75}{1,25 - \cos(\phi)} \right)^2 d\phi$. Добијени интеграл

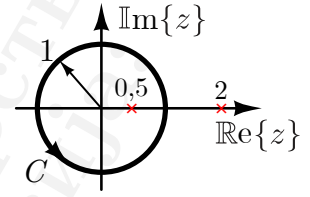
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{0,75^2}{(1,25 - \cos(\phi))^2} d\phi \quad (24.1)$$

може се решити методама *комплексне анализе*.

Косинусна функција се пре свега изражава у експоненцијалној форми $\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$ и замењује у израз (24.1), након чега се сређује добијени израз и елиминишу негативни експоненти:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{0,75^2}{\left(1,25 - \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}\right)^2} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{2,25 e^{j2\phi}}{(2,5e^{j\phi} - e^{j2\phi} - 1)^2} d\phi. \quad (24.2)$$

У добијеном изразу уводи се смена $z = e^{j\phi}$, односно $dz = j e^{j\phi} d\phi$. Пошто су границе интеграције за ϕ од 0 до 2π то тачка z у комплексној равни описује контуру C јединичне кружнице у позитивном математичком смеру (слика 24.1). Трансформацијом бројиоца $e^{j2\phi} d\phi = \frac{z dz}{j}$ и сменом $e^{jk\pi} = z^k$ ($k \in \mathbb{N}$) интеграл из (24.2) се може записати као



Слика 24.1

$$I = \frac{1}{j} \oint_C \underbrace{\frac{2,25z}{(2,5z - z^2 - 1)^2}}_{f(z)} dz \quad (24.3)$$

Контурни интеграл I' се може решити израчунавањем резидуума полова подинтегралне функције, $f(z)$, који се налазе унутар контуре интеграције (Кошијева теорема о резидуумима):

$$I' = j2\pi \sum_{z_{pk} \in C} \text{Res}_{z=z_{pk}} f(z). \quad (24.4)$$

Добијена функција $f(z)$ има полове који одговарају коренима полинома из имениоца $p(z) = (2,5z - z^2 - 1)^2 = (z - 0,5)^2(z - 2)^2$. Полином има два двострука корена, 0,5 и 2, који представљају двоструке полове подинтегралне функције (слика 24.1). Од ових полова, само двоструки пол у 0,5 је унутар контуре интеграције. Резидуум пола другог реда је у општем случају дат изразом $\text{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z \rightarrow c} \frac{d}{dz} (z - c)^2 f(z)$. Израчунавањем јединог потребног резидуума се налази

$$\text{Res}_{z=0,5} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{d}{dz} \left(\frac{2,25z(z-0,5)^2}{(z-0,5)^2(z-2)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0,5} \left(-\frac{2,25z + 4,5}{(z-2)^3} \right) = \frac{5}{3}. \quad (24.5)$$

Заменом добијеног резултата у (24.4) и (24.3) добија се $I = 2\pi \frac{5}{3}$ одакле се коначно заменом у израз за снагу добија $P_R = \frac{RI_0^2}{2\pi} \cdot 2\pi \frac{5}{3} = 5 \text{ [mW]}$.

1.2 Континуални системи

25. За следеће системе испитати да ли су стабилни у *BIBO* смислу, линеарни, временски инваријантни, са меморијом и каузални:

$$\begin{aligned}
(\text{а}) \quad y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(t - kT), & (\text{в}) \quad y(t) &= t(x(t-1))^2, & (\text{д}) \quad y(t) &= \frac{dx(t)}{dt}, \\
(\text{б}) \quad y(t) &= \sqrt{2}x(t), & (\text{г}) \quad y(t) &= \int_{\tau=-\infty}^t x(\tau) \sin(\tau) d\tau, & (\text{ђ}) \quad y(t) &= te^{x(t)-t} u(t),
\end{aligned}$$

где је $y(t) = O\{x(t)\}$ одзив посматраног система.

РЕШЕЊЕ

Поновимо особине система и њихове дефиниције

- Систем је *линеаран* уколико је *адитиван* и *хомоген*. Систем је адитиван уколико је одзив на збир два улаза једнак збиру одзива на сваки од улаза појединачно, $O\{x_1(t) + x_2(t)\} = O\{x_1(t)\} + O\{x_2(t)\}$. Систем је хомоген ако је одзив на умножак улаза и константе једнак производу одзива и константе, односно $O\{kx(t)\} = kO\{x(t)\}$, $k = \text{const}$. У општем случају, систем је линеаран уколико важи принцип суперпозиције

$$O\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aO\{x_1(t)\} + bO\{x_2(t)\}, \quad \forall a, b = \text{const}. \quad (25.1)$$

- Систем је *стабилан у BIBO смислу* (енг. *Bounded Input Bounded Output*) уколико сваки ограничен улаз доводи до ограниченог излаза. Односно, уколико је побуда ограничена са $B_x \geq 0$, тако да је $|x(t)| < B_x, \forall t$, онда је систем стабилан у BIBO смислу ако је и одзив ограничен, односно постоји B_y такво да је $|y(t)| < B_y, \forall t$. Предикатском логиком ово се може записати и као

$$(\exists B_x)(\forall t)(|x(t)| < B_x) \Rightarrow (\exists B_y)(\forall t)(|O\{x(t)\}| < B_y). \quad (25.2)$$

Важно је нагласити да је дати исказ импликација, односно код *BIBO* стабилних система може се десити да неограничена побуда доводи до неограниченог одзива или да неограничена побуда доводи до ограниченог одзива. Такође, често је могуће показати да систем није стабилан одређивањем контрапримера, односно, испитивањем исказа контрапозиције.

- Систем је *стационаран* (тј. временски инваријантан/непроменљив) уколико транслација побуде у времену доводи до исте транслације одзива у времену:

$$y(t) = O\{x(t)\} \Rightarrow y(t - \tau) = O\{x(t - \tau)\}. \quad (25.3)$$

Стационарност система се често може испитати уверавањем да ли систем на неки начин препознаје апсолутно време - односно да ли његов одзив експлицитно зависи од времена.

- За систем се каже да *нема меморију* уколико тренутна вредност одзива зависи само од тренутне вредности улаза, односно, нема особину *меморисања* претходних вредности улаза. Иначе, систем је са меморијом.
 - За систем се каже да је *каузалан* уколико тренутна вредност одзива не зависи од будућих вредности улаза. Сваки систем који постоји у природи, или који може да се реализује у реалном времену, је каузалан.
- (а) • Линеарност испитујемо испитивањем суперпозиције $O\{ax_1(t)+bx_2(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} ax_1(t-kT) + bx_2(t-kT) = a \sum_{k=0}^{\infty} x_1(t-kT) + b \sum_{k=0}^{\infty} x_2(t-kT) = aO\{x_1(t)\} + bO\{x_2(t)\}$, што значи да систем јесте линеаран. ✓
- Претпоставимо да је ограничена побуда $x(t) = 1$, онда је одзив $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \rightarrow \infty$, па је одзив неограничен па систем није стабилан у *BIBO* смислу. ✗
- Пошто чланови суме за $k > 0$ за вредност одзива у тренутку t користе вредност побуде у тренуцима $t - kT < t$ (односно у прошлости), систем је са меморијом. ✓
- Пошто су сви чланови суме такви да је $t - kT \leq t$, систем је каузалан. Обратите пажњу да је ово последица одабира доње границе сумирања. ✓
- (б) • Испитивањем суперпозиције, $O\{ax_1(t)+bx_2(t)\} = \sqrt{2}(ax_1(t)+bx_2(t)) = a\sqrt{2}x_1(t) + b\sqrt{2}x_2(t) = aO\{x_1(t)\} + bO\{x_2(t)\}$, закључује се да је систем линеаран. ✓
- Пошто је систем множење константом, ограниченост побуде имплицира ограниченост одзива, $B_y = \sqrt{2}B_x$, па је систем стабилан у *BIBO* смислу. ✓
- Пошто translација побуде доводи до translације одзива, систем је стационаран. ✓
- Пошто је одзив у тренутку t пропорционалан вредности побуде у тренутку t , систем нема меморију. ✗
- Пошто систем за рачунање тренутне вредности одзива „види“ само тренутну вредност побуде, он је каузалан. ✓
- (в) • Линеарност система не важи, будући да постоји квадрирање сигнала, што је нити адитивна нити хомогена операција. ✗
- Размотримо сигнал $x(t) = 1$, тада је $y(t) = t$, па је $y(\infty) \rightarrow \infty$ одзив неограничен, па систем није стабилан у *BIBO* смислу. ✗
- Одзив у тренутку t зависи од тренутка $t - 1$ тако да је дати систем са меморијом. ✓

- Пошто одзив у тренутку t не зависи од будућности, систем је каузалан. ✓

Примери (г), (д) и (ђ) се читаоцу остављају за вежбу. Коначни резултат приказан је табеларно.

	(а)	(б)	(в)	(г)	(д)	(ђ)
Линеаран	✓	✓		✓	✓	
Временски инваријантан	✓	✓			✓	
Са меморијом	✓		✓	✓	✓	
Стабилан		✓				✓
Каузалан	✓	✓	✓	✓		✓

- ♣ 26. Нека је дат континуалан систем диференцијалном једначином облика $\frac{dy}{dt} - ay = x$, где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ побуда и одзив тога система редом, а a је позната реална константа. Одредити одзив на експоненцијалну побуду облика $e^{bt} u(t)$, (а) ако је $b \neq a$ и (б) $b = a$.

РЕШЕЊЕ

За $t < 0$ је одзив на побуду једнак нули, док се за $t > 0$ решава диференцијална једначина $y'(t) - ay(t) = e^{bt}$. У општем случају, решење се састоји из *хомогеног* и *партикуларног* дела¹³. Хомогени део се налази одређивањем корена карактеристичног полинома $P(\lambda) = \lambda - a$ па је $\lambda_0 = a$. Постоји само једна карактеристична функција па је облик хомогеног дела одзива $y_h(t) = Ae^{at}$, за произвољну вредност константе A . Партикуларни део експоненцијалне побуде се тражи у експоненцијалном облику¹⁴, па је $y_p = Be^{bt}$, заменом у полазну једначину добија се:

$$Bbe^{bt} - aBe^{bt} = e^{bt} \Rightarrow B = \frac{1}{b - a}. \quad (26.1)$$

Комплетан облик одзива је онда облика $y(t) = Ae^{at} + \frac{1}{b - a}e^{bt}$. Будући да је побуда ограничена то је одзив непрекидан па је $y(0^+) = 0$ одакле се налази константа A , па је $A = \frac{1}{a - b}$, коначно се добија да је одзив на тражену побуду:

$$y(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a}. \quad (26.2)$$

¹³Овом приликом треба да нагласити да, код стабилних система, хомогени део решења одговара *сопственом* одзиву система на почетне услове док партикуларни део представља *успљели* одзив система за задату побуду. Ово тумачење онда оправдава да партикуларни део треба тражити сигнаlima учестаности побуде (јер линеарни системи не могу да мењају учестаност улазног сигнала, нпр. кола простопериодичних струја), а да резонантни сигнали доводе до алгебарске дегенерације решења – множење са t .

¹⁴То је природно за очекивати, будући да је експоненцијална функција једина сразмерна своме изводу.

(б) Проблем дељења нулом када је $b = a$ се може решити тражењем граничне вредности. Узмимо да је $b = a + \varepsilon$ и заменимо у резултат 26.2, одатле се сређивањем даље има

$$y(t) = \frac{e^{(a+\varepsilon)t} - e^{at}}{\varepsilon} = e^{at} \frac{e^{\varepsilon t} - 1}{\varepsilon}. \quad (26.3)$$

Будући да је $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon t} - 1}{\varepsilon} = t$ одзив у траженом случају ће бити коначно $y(t) = te^{at}$.

У општем случају, генерализацијом поступка који је дат у овом задатку, показује се да је партикуларни део решења диференцијалне једначине $P(D)y(t) = x(t)$, за експоненцијалну побуду $x(t) = e^{at}u(t)$, дат у облику $y_p(t) = \frac{e^{at}}{P(a)}$, ако је $P(a) \neq 0$.

Уколико је a једноструки корен полинома P , онда је партикуларни део у облику $y_p = \frac{te^{at}}{P'(a)}$, а кажемо да побуда „погађа“ резонансу система првог реда.

Ако је a вишеструки корен полинома P , вишеструкости s , онда је партикуларни део у облику $y_p = \frac{t^s e^{at}}{P^{(s)}(a)}$. Ове формуле и дискретне системе дате су у додатку Б.

27. Нека је систем описан диференцијалном једначином у облику $P(D)y(t) = x(t)$, где су $x(t)$ и $y(t)$ побуда и одзив тог система редом, а $P(D)$ је оператор дат полиномом са реалним коефицијентима по оператору диференцирања $D = \frac{d}{dt}$. Полазећи од формуле

одзива за експоненцијалну побуду, облика $y_p = \frac{e^{at}}{P(a)}$, одредити партикуларни део одзива на нерезонантну побуду када је она простопериодична, облика (а) $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ и (б) $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.

РЕШЕЊЕ: Приметимо да је $e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$. Мотивисани том примедбом, размотримо побуду комплексним сигналом облика: $\underline{x}(t) = x_r(t) + jx_i(t)$. Заменом је одзив на такву побуду у облику: $P(D)\underline{y}(t) = \underline{x}(t) \iff P(D)(y_r(t) + jy_i(t)) = x_r(t) + jx_i(t)$, односно, може се тврдити да је $\Re\{P(D)\underline{y}(t)\} = \Re\{\underline{x}(t)\}$, односно, $\Im\{P(D)\underline{y}(t)\} = \Im\{\underline{x}(t)\}$. Другим речима, реални део побуде побуђује само реални део одзива, док имагинарни део побуде побуђује само имагинарни део одзива.

На овом резултату можемо да темељимо поступак одређивања одзива на побуде облика $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$, полазећи од одзива на експоненцијалну побуду e^{st} , $s = j\omega_0$, користећи резултат да је $\underline{y}_p(t) = \frac{e^{st}}{P(s)} = \frac{e^{j\omega_0 t}}{P(j\omega_0)}$, одакле се налазе партикуларни делови одзива за

побуде облика $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$ као:

$$y_p^{(\cos)}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j\omega_0 t}}{P(j\omega_0)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j\omega_0 t}}{|P(j\omega_0)| e^{j \arg P(j\omega_0)}} \right\} = \frac{\cos(\omega_0 t - \arg P(j\omega_0))}{|P(j\omega_0)|}; \text{ и } \quad (27.1)$$

$$y_p^{(\sin)}(t) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{j\omega_0 t}}{P(j\omega_0)} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{j\omega_0 t}}{|P(j\omega_0)| e^{j \arg P(j\omega_0)}} \right\} = \frac{\sin(\omega_0 t - \arg P(j\omega_0))}{|P(j\omega_0)|}, \quad (27.2)$$

којом приликом је расписан карактеристични полином у комплексном поларном облику, $P(j\omega_0) = |P(j\omega_0)| e^{j \arg P(j\omega_0)}$, а коришћено је и $e^{j\omega_0 t} / e^{j \arg P(j\omega_0)} = e^{j(\omega_0 t - \arg P(j\omega_0))}$.

28. Нека је дат сигнал $x = x(t)$. Одредити облик сигнала $y(t) = \frac{1}{D+a} x(t)$ у временском домену, где је $D = \frac{d}{dt}$ оператор диференцирања, а a је позната реална константа. Односно, у овом задатку, потребно је одредити утицај оператора $\frac{1}{D+a}$ на произвољни сигнал.

РЕШЕЊЕ

По услову задатка је $y(t) = \frac{1}{D+a} x(t)$, односно је

$$x(t) = (D+a)y(t). \quad (28.1)$$

У овом изразу постоје диференцирање и множење константом. Користећи то као инспирацију, одредимо дејство оператора D на сигнал облика $x(t)e^{at}$, где можемо очекивати диференцирање и множење константом као последице правила о изводу производа.

$$Dy(t)e^{at} = e^{at} Dy(t) + ae^{at} y(t) = e^{at} (a + D)y(t). \quad (28.2)$$

Полазећи од овог израза, заменимо примедбу 28.1 у добијени облик, а затим се добијена једначина решава по y као

$$Dy(t)e^{at} = e^{at} x(t) \quad | \cdot D^{-1} = \int_0^t \quad (28.3)$$

$$y(t)e^{at} = \int_0^t x(\tau) e^{a\tau} d\tau \quad | \cdot e^{-at} \quad (28.4)$$

$$y(t) = e^{-at} \int_0^t x(\tau) e^{a\tau} d\tau = \int_0^t x(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau. \quad (28.5)$$

Читаоцу скрећемо пажњу да је овакав резултат од великог интереса будући да представља операцију конволуције, $y(t) = x(t) * e^{-at} u(t)$, која ће бити касније уведена.

29. На слици 29.1 је приказана једна конструкција балистичког галванометра (БГ), инструмента за мерење протока наелектрисања. Казаљка инструмента може да прави угаони отклон у границама $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Веза између струје, $i = i(t)$, на једином електричном приступу БГ и угаоног отклона казаљке, $\phi = \phi(t)$, дата је диференцијалном једначином $J \frac{d^2\phi}{dt^2} + F \frac{d\phi}{dt} + K\phi = \alpha i$, при чему је познато

то $J = 6 \text{ [s}^2\text{]}, F = 24 \text{ [s]}, K = 24$ и $\alpha = \pi e \left[\frac{1}{\mu\text{A}} \right]$,

где је e основа природног логаритма. Сматрати да се тај приступ БГ, у електричном смислу, понаша као савршен кратак спој. Инструмент се калибрише на основу огледа са слике 2. Непосредно пре затварања прекидача, кондензатор је оптерећен количином наелектрисања $Q_0 = 1 \text{ [}\mu\text{C]}$ а казаљка БГ мирује у нултом положају, $\phi = 0$. (а) Решавањем у временском домену одредити кретање казаљке, $\phi(t)$, по затварању прекидача до успостављања новог стационарног стања. (б) Скицирати временски дијаграм $\phi(t)$.

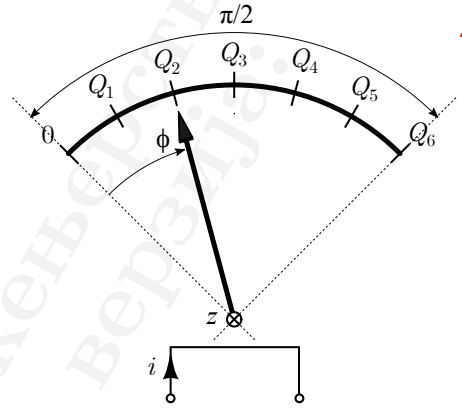
(в) Израчунати вредности једнако размакнутих подеока са слике 1, Q_1, Q_2, \dots, Q_6 , ако се као показивање инструмента (односно, количина наелектрисања протекла у импулсу) читава вредност на коју показује казаљка у тренутку када је најдаље од нултог подеока током свог кретања.

РЕШЕЊЕ: На основу резултата задатка 4, струја која протиче кроз БГ по затварању прекидача је $i(t) = Q_0 \delta(t)$. Та импулсна побуа побуђује разматрани систем па је потребно потражити одзив на побуду.

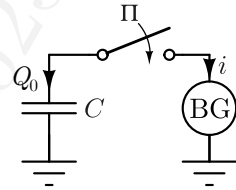
Карактеристични полином диференцијалне једначине система је $P(\lambda) = J\lambda^2 + F\lambda + K$, корени карактеристичног полинома потражују се из обрасца решења квадратне једначине као $\lambda_{1,2} = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4JK}}{2J}$. Заменом бројних вредности установљава се да постоји *двослурки* реални корен $\lambda_0 = -2 \text{ [s}^{-1}\text{]}$. На основу тога, општи облик одзива на импулсну побуду се може записати у облику

$$\phi(t) = (\Phi_0 + \Phi_1 t)e^{\lambda_0 t}, \quad \text{где су } \Phi_0 \text{ и } \Phi_1 \text{ произвољне константе} \quad (29.1)$$

Користећи поступак за одређивање одзива на импулсну побуду из додатка Г, закључујемо



Слика 29.1

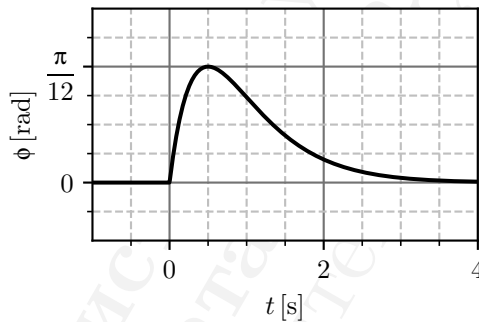


Слика 29.2

да одзив треба да има прекид у изводу првог реда, а да су остали изводи непрекидни. На основу тога је $\phi(0^+) = 0$ и $\phi'(0^+) = \frac{\alpha Q_0}{J}$.

Из израза (29.1) је $\phi(0^+) = \Phi_0$ па је $\Phi_0 = 0$. Имајући то у виду, први извод отклоне казаљке у нули је $\phi'(t) = \Phi_1 e^{\lambda_0 t} (\lambda_0 t + 1) \Rightarrow \phi'(0^+) = \Phi_1$, одакле се налази да је $\Phi_1 = \frac{\alpha Q_0}{J}$, па је $\Phi_1 = \frac{\pi e}{6} [\text{s}^{-1}]$. Коначно је тражени облик угаоног отклоне казаљке дат изразом, $\phi(t) = \frac{\alpha Q_0}{J} t e^{\lambda_0 t}$, односно бројевно $\phi(t) = \frac{\pi e}{6} [\text{s}^{-1}] t e^{-2 [\text{s}^{-1}] t}$.

(б) За цртање временског дијаграма најважнија је максималну тренутну вредност сигнала, будући да се она користи у другом делу задатка. нуле првог извода налазе се из ранијег резултата $\phi'(t) = \Phi_1 e^{\lambda_0 t_m} (\lambda_0 t_m + 1) = 0$ одакле је $t_m = -\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{2} [\text{s}]$ а максимална вредност је $\phi_m = \frac{\pi}{12} [\text{rad}]$. Додатно, могуће је одредити и тачку превоја за прецизније цртање, решавањем $\phi''(t) = 0$ добија се да је тренутак превоја $t_\pi = 1 [\text{s}]$. Временски дијаграм тог резултата приказан је на слици 29.3.



Слика 29.3

(в) Пошто је дати систем линеаран (описан је линеарном диференцијалном једначином), важи да уколико је побуда $1 [\mu\text{C}] \delta(t)$ произвела одзив $\phi(t)$, онда ће побуда облика $k [\mu\text{C}] \delta(t)$ произвести одзив облика $k\phi(t)$. Пошто је $\max k\phi(t) = k \max \phi(t) = \frac{k\pi}{12}$, а подеоци су размакнути за по тачно $\frac{\pi}{12}$, то подеоци треба да буду $Q_k = k [\mu\text{C}]$.

30. У колу са слике познато је $L = 1$ [mH] и $R = 50$ [Ω]. У почетном тренутку струја калема је $i_L(0^-) = 0,5$ [mA]. Напон побудног генератора је облика $v_g(t) = V_m \sin(\omega t) u(t)$, где су $V_m = 1$ [V] и $\omega = 10^6$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$. Као одзив се посматра струја калема на отпорнику $i_L = i_L(t)$. Одредити (а) одзив на почетне услове, (б) одзив на побуду, (в) комплетан одзив и (г) устаљени одзив.



Слика 30.1

РЕШЕЊЕ

Диференцијална једначина која описује систем је

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = v_g. \quad (30.1)$$

Њој одговара карактеристични полином $P(\lambda) = R + L\lambda$ који има само један реалан корен $\lambda_0 = -\frac{R}{L} = -5 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$. Хомогени део решења ове диференцијалне једначине је стога $i_{L,h}(t) = I_0 e^{\lambda_0 t}$, где је I_0 произвољна константа. Партикуларни део се може одредити помоћу поступка показаног за нерезонантну синусоидалну побуду у задатку 27, према

$$i_{L,p} = \text{Im} \left\{ \frac{V_m e^{j\omega t}}{P(j\omega)} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{V_m e^{j\omega t}}{R + j\omega L} \right\} = V_m \frac{R \sin(\omega t) - \omega L \cos(\omega t)}{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (30.2)$$

Коначно, опште решење за струју калема је

$$i_L(t) = \underbrace{I_0 e^{\lambda_0 t}}_{\text{Хомогени део}} + \underbrace{V_m \frac{R \sin(\omega t) - \omega L \cos(\omega t)}{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Партикуларни део}}. \quad (30.3)$$

(а) Одзив на почетне услове налази се само на основу хомогеног дела, помоћу почетних услова. Добија се

$$i_{L1}(t) = I_{01} e^{\lambda_0 t} \Rightarrow i_{L1}(0^-) = I_{01} e^{\lambda_0 \cdot 0} \Rightarrow I_{01} = 0,5 \text{ [mA]}.$$

Тако да је одзив на почетне услове $i_{L1}(t) = 0,5 \text{ [mA]} e^{\lambda_0 t}$.

(б) Одзив на побуду, одређује се заменом постиницијалних почетних услова у опште решење диференцијалне једначине. Приликом тражења одзива на побуду претпоставља се да су сви преиницијални услови равни нули. Додатно, уколико у десној страни нема Диракових импулса онда су све функције $i_L(t), i'_L(t), i''_L(t), \dots, i_L^{(n-1)}(t)$ непрекидне, па су стога и постиницијални услови равни нули. У том облику тражи се *група* константа за

хомогени део.

$$\underbrace{i_{L2}(0^+) = 0}_{\text{Постиницијални услов}} = \underbrace{I_{02}e^{\lambda_0 \cdot 0}}_{\text{Хомогени део}} + V_m \underbrace{\frac{R \sin(\omega \cdot 0) - \omega L \cos(\omega \cdot 0)}{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Партикуларни део}} = I_{02} - \frac{\omega L V_m}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow \quad (30.4)$$

$$= I_{02} \approx 1 \text{ [mA]}.$$

Тако да је одзив побуду: $i_{L2}(t) \approx 1 \text{ [mA]} e^{\lambda_0 t} + 50 \text{ [}\mu\text{A]} \sin(\omega t) - 1 \text{ [mA]} \cos(\omega t)$.

(в) На основу суперпозиције, комплетан одзив добија се сабирањем одзива на почетне услове и одзива на побуду. Коначан резултат је валидан од тренутка $t = 0$ услед чега се дописује одскочна функција. Коначно је комплетан одзив:

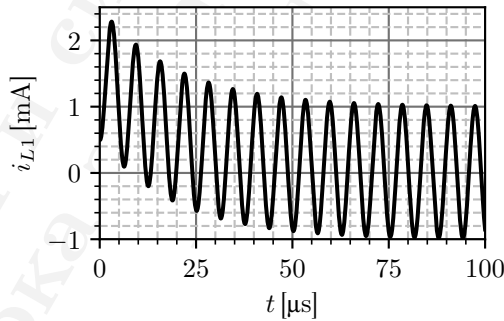
$$i_L(t) \approx (1,5 \text{ [mA]} e^{\lambda_0 t} + 50 \text{ [}\mu\text{A]} \sin(\omega t) - 1 \text{ [mA]} \cos(\omega t)) u(t). \quad (30.5)$$



(а) Сопствени одзив.



(б) Одзив на побуду.



(в) Комплетан одзив

Слика 30.2

Приметимо да у овом изразу постоји члан добијен из хомогеног дела који је побуђен напонским генератором.

(г) Након довољно дугог времена, чланови хомогеног дела који представљају прелазни режим ишчежавају будући да је $e^{\lambda_0 t} \rightarrow 0$ јер је $\lambda_0 < 0$, након чега преостаје устаљени одзив

$$i_{L,ss}(t) \approx 50 \text{ } [\mu\text{A}] \sin(\omega t) - 1 \text{ } [\text{mA}] \cos(\omega t). \quad (30.6)$$

Добијени резултати су нацртани на дијаграмима на слици 30.2.

31. Континуалан систем је диференцијалном једначином у облику

$$(D + 1)y(t) = x(t),$$

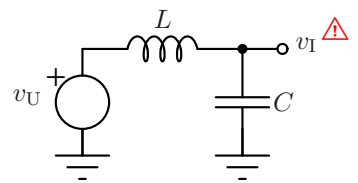
где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ побуда и одзив тога система, а $D = \frac{d}{dt}$ је оператор диференцирања.

Познат је преиницијални услов одзива $y(0^-) = 1$. Побуда је дата изразом $x(t) = \cos(t)u(t)$. Одредити сопствени (y_a), принудни (y_f), комплетни (y), прелазни (y_t), и устаљени (y_{ss}) одзив система за задату побуду.

РЕЗУЛТАТ

$$\begin{aligned} \text{Видети и задатак 30. } y_a &= e^{-t} u(t), y_f = \left(-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right) u(t), \\ y &= \left(\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right) u(t), y_t = \frac{1}{2}e^{-t} u(t), y_{ss} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

32. У колу са слике познати су $L = 100 \text{ } [\mu\text{H}]$ и $C = 1 \text{ } [\mu\text{F}]$. У почетном тренутку у колу нема акумулисане енергије. Посматра се систем чији је улаз напон побудног генератора $v_U = v_U(t)$ а излаз напон у колу $v_I = v_I(t)$. Познато је $v_I(t < 0) = 0$ а побуда је у облику $v_U(t) = V_m \sin(\omega t) u(t)$, где је $V_m = 10 \text{ } [\text{mV}]$. Одредити и скицирати напон на излазу система када је кружна учестаност побудног генератора (а) $\omega = 10^3 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ и (б) $\omega = 10^5 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$. За учестаност из тачке (б) скицирати и (в) дијаграм снаге коју улаже напонски генератор у колу $p_g = p_g(t)$.



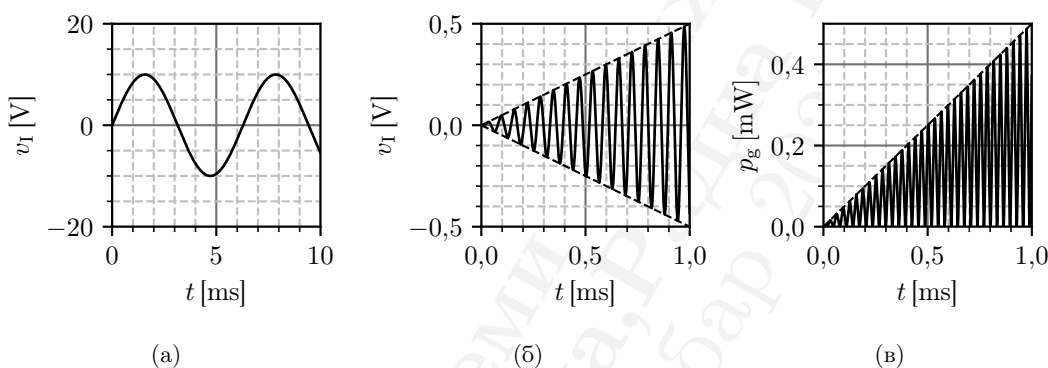
Слика 32.1

РЕЗУЛТАТ

(а) Тражени одзив је $v_I(t) = 10 \text{ [mV]} \sin(\omega t)$. Резултат је приказан на слици 32.2а.

(б) Тражени одзив је $v_I(t) = -0,5 \left[\frac{\text{V}}{\text{ms}} \right] t \cos(\omega t)$. Резултат је приказан на слици 32.2б.

(в) Тражена снага је $p_g \approx 250 \left[\frac{\mu\text{W}}{\text{ms}} \right] t(1 + \cos(2\omega t))$. Резултат је приказан на слици 32.2в.



Слика 32.2

33. Нека је дат систем једначина
$$\begin{cases} \left(D^2 + \frac{1}{25} \right) g(t) = x(t) \\ y(t) = g(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT - \tau) \end{cases}, \text{ где је } T = 10\pi, \text{ а } D$$

је оператор диференцирања. Дати систем једначина описује каузалан *LTI* систем чији је једини улаз $x(t)$ а једини излаз $y(t)$. Израчунати **минималну** вредност параметра $\tau > 0$ тако да је посматрани систем стабилан у *BIBO* смислу.

РЕШЕЊЕ

Стабилност система испитујемо испитивањем апсолутне интеграбилности импулсног

одзива $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$, дакле за $x(t) = \delta(t)$. Прво одређујемо одзив $g(t)$ у том случају, решавањем $(D^2 + \frac{1}{25})g(t) = \delta(t)$, чиме се добија $g(t) = 5 \sin\left(\frac{t}{5}\right) u(t)$, одакле се заменом у израз за $y(t)$ добија импулсни одзив:

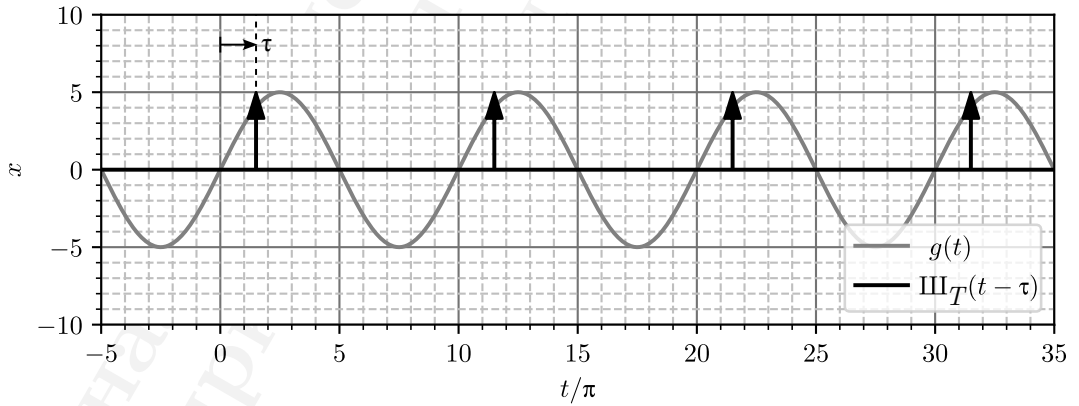
$$h(t) = 5 \sin\left(\frac{t}{5}\right) u(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \sin\left(\frac{kT + \tau}{5}\right) \delta(t - kT - \tau). \quad (33.1)$$

Услов стабилности се може онда изразити као

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \left| \sum_{k=0}^{\infty} 5 \sin\left(\frac{kT + \tau}{5}\right) \right| < \infty. \quad (33.2)$$

Једини начин на који је могуће да добијена сума конвергира јесте да је $\sin\left(\frac{kT + \tau}{5}\right) = \sin\left(2\pi k + \frac{\tau}{5}\right) = 0$ за све $k \in \mathbb{N}$, односно, треба да буде $\frac{\tau}{5} = m\pi$, где је $m \in \mathbb{Z}$. Коначно, минимално $\tau > 0$ које задовољава наведени услов јесте $\tau = 5\pi$, а минимално позитивно решење је када је $\tau = 5\pi$.

Други део поступка може се размотрити и графички. На слици 33.1 приказан је одређени импулсни одзив $g(t)$. У изразу (33.1) може се препознати други члан као $\Pi_T(t - \tau)$, односно, импулсни одзив система је $h(t) = g(t) \cdot \Pi_T(t - \tau)$, што је илустровано на слици



Слика 33.1

33.1. Пошто су периоди функције $g(t)$ и функције $\Pi_T(t - \tau)$ исти, прираштај интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$ је увек исти за сваки Дираков импулс, то значи да ће тај интеграл бити коначан само ако Диракови импулси „гађају“ нуле функције $g(t)$, што се дешава када је $\tau = kT/2 = 5k\pi$.

Конволуција континуалних сигнала

34. Дати су сигнали $x = x(t)$ који се доводе на улаз система чији је импулсни одзив дат изразом $h = h(t)$. Одредити принудни одзив у случајевима:

- (а) $x(t) = u(t)$, $h(t) = \delta(t - T)$, $T \in \mathbb{R}$
- (б) $x(t) = e^{-at} u(t)$, $h(t) = e^{-bt} u(t)$, где су $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ и $a \neq b$
- (в) $x(t) = t^k u(t)$, $h(t) = u(t)$, где је $k \neq -1$.
- (г) $x(t) = u(t) - u(t - T)$, $h(t) = x(t)$, где је $T \in \mathbb{R}^+$.

РЕШЕЊЕ: Принудни одзив система (одзив система на побуду) одређен је конволуцијом побуде $x(t)$ и импулсног одзива $h(t)$, што је одређено конволуционим интегралом

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (34.1)$$

(а) Заменом датих сигнала у (34.1) добија се $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \underbrace{\delta(t - \tau - T)}_{\tau=t-T} d\tau$. Овај интеграл је исказ својства еквиваленције Дираковог импулса, па је $y(t) = u(t - T)$. Такође, приметимо да је систем чији је импулсни одзив $\delta(t - T)$ систем за кашњење за време T , што је конзистентно са добијеним резултатом.

(б) Заменом датих сигнала у (34.1) добија се $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) e^{-b(t-\tau)} u(t - \tau) d\tau$. У овом интегралу, Хевисајдова одскочна функција намеће границе интеграције, будући да је $u(\tau) \cdot u(t - \tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Одатле се има, да је подинтегрална величина једнака

нули за $t < 0$, па је $y(t < 0) = 0$, док је за $t > 0$ одзив једнак $y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)} d\tau =$

$$\int_0^t e^{-bt} e^{(b-a)\tau} d\tau = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a - b}. \text{ Узимајући у обзир оба резултата (и за } t < 0 \text{ и за } t > 0),$$

коначно се може записати $y(t) = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a - b} u(t)$.

Читаоцу се препоручује да тачку понови у случају када је $a = b$.

(в) Слично као у претходној тачки, и у овом случају Хевисајдова одскочна функција намеће границе интеграције, па се има $y(t) = \int_{-\infty}^t \tau^k u(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t \tau^k d\tau = \frac{t^{k+1}}{k+1} u(t)$.

Такође, приметимо да, пошто је $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$, то онда систем чији је импулсни одзив $u(t)$ мора представљати интегратор.

(г) Тачка се оставља читаоцу за вежбу, коначан резултат је $y(t) = T \operatorname{tri} \left(\frac{t}{T} - 1 \right)$.

35. Нека су познати импулсни одзови LTI система $h_1 = h_1(t) = e^{-t}u(t)$, и $h_2 = h_2(t) = e^{-2t}u(t)$. Одредити импулсни одзив система у целини $h(t)$, у случају (а) серијске/редне/каскадне и (б) паралелне везе.



Слика 35.1

РЕШЕЊЕ

За графичку представу структуре сложених система сачињених из више елементарних система примењују се тзв. *структурни блок дијаграми* (или скраћено, *блок дијаграми*). У таквим дијаграмима, везе између блокова представљају појединачне сигнале а сами блокови системе. Ток сигнала се може интерпретирати из контекста или се може експлицитно назначити стрелицама. Често коришћене ознаке система у оваквим дијаграмима представљене су у додатку Д.

(а) Излаз првог система одређује се конволуцијом $x * h_1$, па тај сигнал онда представља побуду наредног (то је и смисао серијске везе система), па је укупан одзив $y = (x * h_1) *$

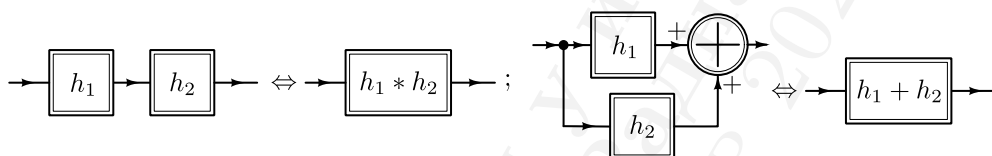
h_2 . Применом својства *асоцијативности* операције конволуције (премештање заграда је могуће) се онда може писати $y = (x * h_1) * h_2 = x * \underbrace{(h_1 * h_2)}_h$. Укупан импулсни одзив целог

система је $h = h_1 * h_2$, па је на основу резултата задатка 34 $h = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$.

(б) Излази појединачних система су $x * h_1$ и $x * h_2$, па је због блока за сумирање импулсни одзив: $y = (x * h_1) + (x * h_2)$. На основу *дистрибутивности* конволуције у односу на сабирање је онда $y = x * \underbrace{(h_1 + h_2)}_h$, односно $h = (e^{-t} + e^{-2t})u(t)$.

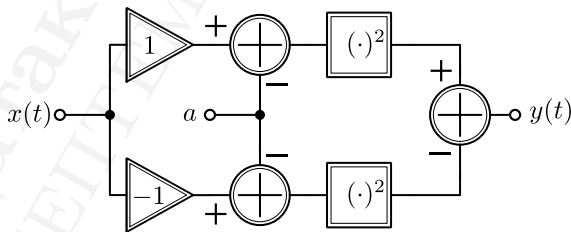
Нагласимо на крају, још једном, да су општи резултати овог задатка који су важни за наставак, да серијска веза два система даје конволуцију импулсних одзива, а да паралелна веза представља збир. Сликковита представа овог резултата представљена је на слици 35.2.

Читаоцу се препоручује да размотри какво правило услед својства комутативности, и асоцијативности у односу на скаларно множење.



Слика 35.2: Уз резултат задатка.

36. У систему са слике употребљени су идеални појачавачи сигнала, суматори и блокови за квадрирање, а a је позната реална константа. Одредити (а) везу између излаза и улаза система. Испитати да ли је тај систем (б) линеаран, (в) са меморијом и (г) стабилан у *BIBO* смислу.



Слика 36.1

РЕЗУЛТАТ

(а) Тражена веза је $y(t) = 4ax(t)$. (б) Систем је линеаран, без меморије и стабилан.

Нагласимо још да је овај задатак пример једног линеарног система који се реализује помоћу нелинеарних система. Постоје примери аналогних кола које користе овај принцип, нпр. диференцијални појачавач са MOS транзисторима, или симетрични појачавач снаге у класи А са MOS транзисторима.

- ♣ **37.** Нека је познат импулсни одзив $h(t)$ неког линеарног временски инваријантног система. У зависности од тог импулсног одзива, дискутовати стабилност тог система у BIBO смислу.

РЕШЕЊЕ

Одзив LTI система на произвољну побуду $x(t)$ може се изразити помоћу конволуције као $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$. Претпоставимо да је побудни сигнал апсолутно ограничен као $|x(t)| \leq B_x$, за неко ограничење B_x , онда се има¹⁵

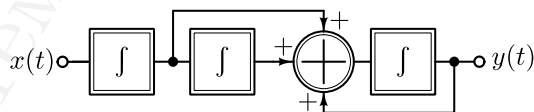
$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t - \tau)| d\tau \leq B_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau = B_y. \quad (37.1)$$

Одатле се има да је потребан и довољан услов да је и одзив ограничен $B_y < \infty$, дат у облику

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty. \quad (37.2)$$

Коначно, LTI систем чији је импулсни одзив $h(t)$ је стабилан у BIBO смислу ако и само ако је импулсни одзив апсолутно интеграбилан, односно ако важи услов (37.2).

- 38.** У систему са слике употребљени су идеални блокови за интеграљење и суматори. Улаз система је континуалан сигнал $x = x(t)$ а излаз је континуалан сигнал $y = y(t)$.



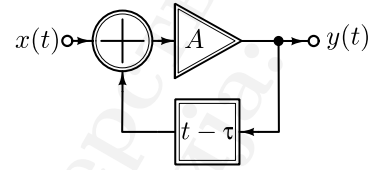
Слика 38.1

- Описати систем одговарајућом диференцијалном једначином,
- одредити импулсни одзив тог система, $h(t)$, и
- испитати стабилност тог система у BIBO смислу.

РЕЗУЛТАТ (а) $(D^3 - D^2)y(t) = (D + 1)x(t)$, (б) $h(t) = (-2 - t + 2e^t)u(t)$. (в) Систем није BIBO стабилан.

¹⁵Примењује се и неједнакост Шварца у интегралној форми $\left| \int_I f(x)dx \right| \leq \int_I |f(x)|dx$.

39. На слици је приказан континуалан систем у коме је употребљен идеални појачаваач појачања $A \in \mathbb{R}$ и идеални блок за кашњење кашњења $\tau > 0$. Посматра се систем чији је једини улаз сигнал $x = x(t)$ а једини излаз сигнал $y = y(t)$.



Слика 39.1

- (а) Одредити израз за импулсни одзив посматраног система, $h(t)$, и скицирати његов временски дијаграм у интервалу $0 \leq t \leq 5\tau$.
- (б) Полазећи од резултата претходне тачке, испитати ВІВО стабилност посматраног система у зависности од параметара A и τ .
- (в) За вредност параметра $A = 1$, скицирати временски дијаграм одзива датог система на побуду $x(t) = \sin(\omega_0 t) u(t)$, где је $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$.

РЕШЕЊЕ: (а) Означимо оператор кашњења за време τ са T_τ , односно $T_\tau x(t) = x(t - \tau)$. Веза између улазног и излазног сигнала се може онда записати као $y = A(x + T_\tau y)$, одакле се сређивањем добија $y = \frac{A}{1 - AT_\tau} x$, одакле је оператор система непосредно $L = \frac{A}{1 - AT_\tau}$.

I начин Добијени оператор се може итеративно развити у ред по оператору T_τ , поступком:

$$L = \frac{A}{1 - AT_\tau} = \frac{\overbrace{A - A^2 T_\tau + A^2 T_\tau}^{+0}}{1 - AT_\tau} = A + AT_\tau \overbrace{\frac{A}{1 - AT_\tau}}^L \dots \quad (39.1)$$

$$= A + A^2 T_\tau^2 + A^3 T_\tau^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} A^k T_\tau^{k-1} \quad (39.2)$$

II начин по аналогји са изразом за суму геометријског реда,

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}, \quad (39.3)$$

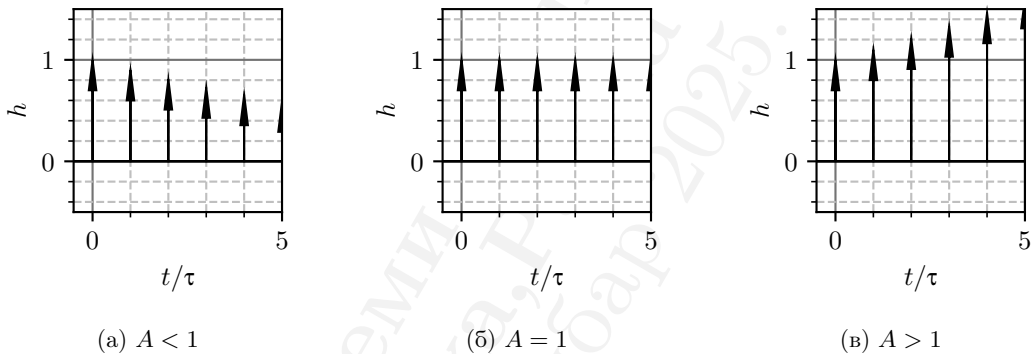
без упуштања у питања конвергенције, може се приметити да се добијени оператор може изразити као:

$$L = A \cdot \frac{1}{\underbrace{1 - AT_\tau}_q} = A(1 + AT_\tau + A^2 T_\tau^2 + \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k T_\tau^{k-1} \quad (39.4)$$

Оба предложена начина, дати изразима (39.2) и (39.4) дају исти резултат, па се импулсни одзив на основу тога може добити непосредно директном применом оператора као

$$h(t) = L\delta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k T_{\tau}^{k-1} \delta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k \delta(t - (k-1)\tau), \quad (39.5)$$

којом приликом је искоришћено да је $T_{\tau}^k = T_{k\tau}$, што је тачно у конкретном случају система за кашњење. Импулсни одзив стога представља поворку Диракових импулса на положајима $(k-1)\tau$, сваки мере A^k , за $k \in \mathbb{N}$. У зависности од тога да ли је параметар $A > 0$ већи, мањи, или једнак 1, разликују се три случаја за скицирање графика.



Слика 39.2

У случају када је $A < 0$ такође раздвајамо ова три случаја, али онда су импулсни на непарним местима усмерени наниже.

(б) Стабилност датог система може се испитати на начин описан у задатку 37, испитивањем конвергенције интеграла апсолутне вредности импулсног одзива, односно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} A^k \delta(t - (k-1)\tau) \right| dt = \sum_{k=1}^{\infty} |A|^k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - (k-1)\tau) t dt \quad (39.6)$$

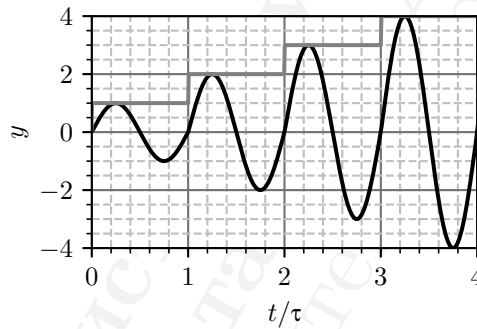
Систем је ВІВО стабилан дакле у случају да је израз $\sum_{k=1}^{\infty} |A|^k$ конвергентан, што је сума геометријског реда, па је услов конвергенције да је $|A| < 1$. Закључујемо, систем је стабилан у ВІВО смислу ако је $|A| < 1$, а нестабилан уколико је $|A| \geq 1$.

(в) У случају када је $A = 1$, оператор таквог система има облик $L = \sum_{k=0}^{\infty} T_{\tau}^k$, па се одзив на побуду $x(t) = \sin(2\pi t/\tau) u(t)$ може добити као:

$$y(t) = Lx(t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{\tau}^k \sin(2\pi t/\tau) u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(2\pi(t - k\tau)/\tau) u(t - k\tau) \quad (39.7)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sin(2\pi t/\tau - 2\pi k)}_{\text{Периодичност } \sin} u(t - k\tau) = \sin(2\pi t/\tau) \sum_{k=0}^{\infty} u(t - k\tau). \quad (39.8)$$

Добијени члан који представља амплитуду синусоиде, периоде τ , мења се степенасто у тренуцима $k\tau$, тако да се график одзива може скицирати као што је приказано на слици 39.3. На слици је сивом бојом приказан сигнал $\sum_{k=0}^{\infty} u(t - k\tau)$ који представља степенасто мењање амплитуде синусоиде.



Слика 39.3

- ▲ 40. Посматра се систем првог реда чији је импулсни одзив дат изразом $h(t) = e^{-at}u(t)$, где је $a > 0$ позната константа. Одредити принудни одзив овог система на простопериодичну побуду облика (а) $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$, односно (б) $x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$.

РЕШЕЊЕ: (а) Слична идеја се може искористити као у задатку 27, потраживањем одзива на комплексну експоненцијалну побуду $\underline{x}(t) = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t) = e^{j\omega_0 t}$, помоћу конволуције $\underline{y}(t) = \underline{x}(t) * h(t) = e^{j\omega_0 t} * e^{-at}$. Добијена конволуција експоненцијалних сигнала одређују се као у задатку 34б, одакле се има $e^{j\omega_0 t} * e^{-at} = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-at}}{j\omega_0 + a}$, па се онда појединачни одзиви простопериодичне побуде одређују растављањем овог израза до реалног и имагинарног дела. Израз у имениоцу запишимо у поларном облику¹⁶ као $j\omega_0 + a = \sqrt{\omega_0^2 + a^2} \exp(j\psi)$, где је $\psi = \arctg \frac{\omega_0}{a}$. Заменом и даљим сређивањем добија се коначно

$$\underline{y}(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-at}}{j\omega_0 + a} = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-at}}{\sqrt{\omega_0^2 + a^2} e^{-j\psi}} = \frac{\cos(\omega_0 t + \psi) + j \sin(\omega_0 t + \psi) - e^{-at} \exp(-j\psi)}{\sqrt{\omega_0^2 + a^2}} \quad (40.1)$$

$$= \underbrace{\frac{\cos(\omega_0 t + \psi) - e^{-at} \cos(\psi)}{\sqrt{\omega_0^2 + a^2}}}_{\text{Реални део, Одзив на cos}} + j \underbrace{\frac{\sin(\omega_0 t + \psi) + e^{-at} \sin(\psi)}{\sqrt{\omega_0^2 + a^2}}}_{\text{Имагинарни део, Одзив на sin}}, \quad \psi = \arctg \frac{\omega_0}{a}. \quad (40.2)$$

Уколико за тиме постоји потреба, члан уз e^{-at} може се даље расписати применом тригонометријских идентитета $\cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Преостало сређивање израза препушта се читаоцу.

41. Полазећи од дефиниције конволуције два континуална сигнала, $x = x(t)$ и $y = y(t)$, доказати да је $\int_{-\infty}^{\infty} (x * y) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y dt \right)$, под условом да оба интеграла са десне стране конвергирају.

РЕШЕЊЕ: Конволуција по дефиницији је $x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$, па се заменом

¹⁶Користи се растављање комплексног броја у поларни облик $a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \exp(j \arctg b/a)$, за $a > 0$.

у дати интеграл има: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau dt$. Добијени двојни интеграл може се решити техником раздвајања променљивих будући да су τ и t међусобно независни, чиме се има

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x * y) dt = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \int_{t=-\infty}^{\infty} y(t-\tau)dt = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \int_{t=-\infty}^{\infty} y(t-\tau)d(t-\tau) \quad (41.1)$$

У првом интегралу у добијеном изразу може се извршити преименовање променљиве $\tau \mapsto t$, док је други интеграл заправо исказ смене $u = t - \tau$ чиме се не мењају границе интеграције па се добија коначно:

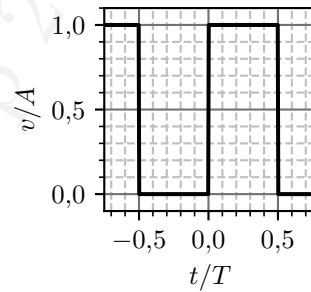
$$\int_{-\infty}^{\infty} (x * y) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt, \quad (41.2)$$

што је и требало доказати.

42. За периодичне сигнале са основним периодом T може се дефинисати операција *периодичне конволуције* као

$$x \circledast y = \int_{t_0}^{t_0+T} x(\tau)y(t-\tau) d\tau,$$

где је t_0 произвољна константа. Периодична поворка униполарних правоугаоних импулса једнаког трајања импулса и паузе, $v = v(t)$, приказана је на слици. Параметре A и T сматрати познатим. Одредити $v \circledast v$.

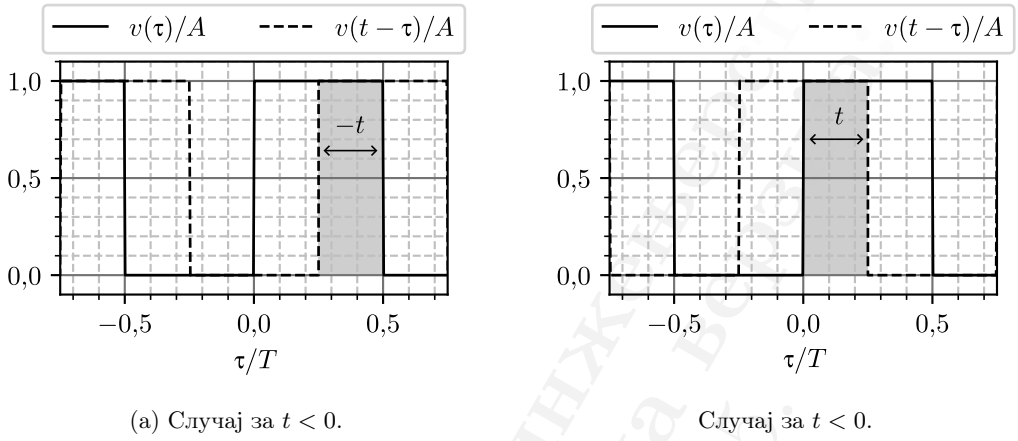


Слика 42.1

РЕШЕЊЕ

Због трансляторне симетрије граница интеграције, период сигнала $v \circledast v$ је такође T . Аналитичко решење датог интеграла је сложено због компликованих преклапања правоугаоних импулса који постоје у сигналу, па га је из тог разлога једноставније дискутовати графички. Израз $v(t-\tau)$, посматрајући τ на апсциси, представља сигнал пресликан око ординате па затим закашњен за t . Разликујемо два случаја, када је $t > 0$ и када је $t < 0$, као што је приказано на слици 42.2, према чему је

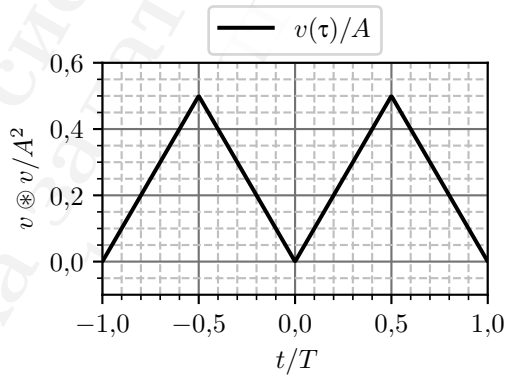
$$v \circledast v = \begin{cases} A^2 t, & t > 0 \\ -A^2 t & t < 0 \end{cases}. \quad (42.1)$$



Слика 42.2: Уз израчунавање дефиниционог интеграла.

График добијеног сигнала представљен је на слици 42.3. На основу добијене слике може се закључити да тај резултат представља поворку троугаоних импулса ширине T и висине $A^2/2$, што се може записати скалирањем аргумента и множењем константом као

$$v \otimes v = \frac{A^2 T}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{tri} \left(\frac{2(t - kT)}{T} - 1 \right). \quad (42.2)$$

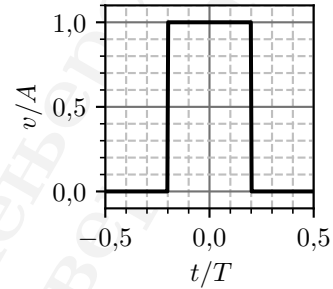


Слика 42.3: Уз резултат.

43. Поновити задатак 42 за сигнал $v(t)$ дефинисан на слици. Параметри A и T су познати. Ширина правоугаоног импулса на основном периоду износи $\frac{2T}{5}$.

РЕЗУЛТАТ

$$v \circledast v = \frac{2TA^2}{5} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{tri}\left(\frac{5t}{4T}\right), \text{ на осн. периоду } |t| < T.$$



Слика 43.1

- 44.** Отпорник отпорности $R = 50 \text{ } [\Omega]$ прикључен је на идеалан генератор простопериодичног напона облика $v_g(t) = V_m \cos(\omega_0 t) u(t)$, где су $V_m = 10 \text{ [V]}$, $\omega_0 = 2\pi f$, и $f = 5 \text{ [Hz]}$. Загревање отпорника описано је термичким процесом као ЛТИ систем првог реда описан диференцијалном једначином $\tau \frac{d(\theta - \theta_0)}{dt} + (\theta - \theta_0) = R_\theta p_R$, где је $\theta = \theta(t)$ тренутна температура отпорника, $p_R = p_R(t)$ тренутна снага отпорника, параметар $\tau = 100 \text{ [ms]}$ је временска константа тог термичког процеса, параметар $R_\theta = 20 \text{ } [^\circ\text{C/W}]$ назива се термичком отпорношћу отпорника, а θ_0 је температура амбијента. (а) Ако је у почетном тренутку температура отпорника једнака температури амбијента $\theta(0) = \theta_0 = 25 \text{ } [^\circ\text{C}]$, одредити температуру отпорника у зависности од времена, и скицирати њен график. (б) Израчунати амплитуду варијације температуре отпорника по успостављању устаљеног режима.

РЕШЕЊЕ: Тренутна снага отпорника одређена је изразом $p_R(t) = \frac{v_g^2(t)}{R} = \frac{V_m^2 \cos^2(\omega_0 t)}{R} u(t)$,

што се може записати¹⁷ као

$$p_R(t) = P_m (1 + \cos(2\omega_0 t)) u(t), \quad (44.1)$$

где је $P_m = \frac{V_m^2}{2R} = 1 \text{ [W]}$. Овај сигнал представља побуду система датог диференцијалном једначином у задатку. Том приликом, за одзив система сматраћемо прираштај температуре отпорника у односу на температуру амбијента $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. У наставку потражићемо импулсни одзив тог система.

Карактеристични полином дате диференцијалне једначине је $\tau\lambda + 1$, чији је једини корен $\lambda_0 = -1/\tau$, па је одговарајући импулсни одзив облика $h(t) = Ae^{-t/\tau} u(t)$. На основу поступка

¹⁷Користи се тригонометријски идентитет: $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.

описаног у додатку Г имамо да је $A = \frac{R_\theta}{\tau}$, одакле је импулсни одзив

$$h(t) = \frac{R_\theta}{\tau} e^{-t/\tau} u(t). \quad (44.2)$$

Одзив система на побуду налази се конволуцијом побуде (44.1) са одређеним импулсним одзивом (44.2) чиме се применом својстава дистрибутивности конволуције налази¹⁸:

$$\Delta\theta(t > 0) = p_R(t) * h(t) = P_m (1 + \cos(2\omega_0 t)) * \frac{R_\theta}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (44.3)$$

$$= \frac{P_m R_\theta}{\tau} \left[(1 + \cos(2\omega_0 t)) * e^{-t/\tau} \right] \quad (44.4)$$

$$= \frac{P_m R_\theta}{\tau} \left[1 * e^{-t/\tau} + \cos(2\omega_0 t) * e^{-t/\tau} \right]. \quad (44.5)$$

Добијени конволуциони интеграли могу се израчунати на начин како је показано у задацима 34 и 40, чиме се добијају међурезултати

$$1 * e^{-t/\tau} = e^{0t} * e^{-t/\tau} = \frac{e^{0t} * e^{-t/\tau}}{0 - (-1/\tau)} = \tau(1 - e^{-t/\tau}) \quad (44.6)$$

$$\cos(2\omega_0 t) * e^{-t/\tau} = \frac{\cos(2\omega_0 t + \psi) - e^{-t/\tau} \cos(\psi)}{\sqrt{4\omega_0^2 + \tau^{-2}}}, \quad \psi = \arctg 2\omega_0 \tau. \quad (44.7)$$

Коначно, заменом у резултат (44.5) и даљим сређивањем има се:

$$\Delta\theta(t) = \frac{P_m R_\theta}{\tau} \left[\tau(1 - e^{-t/\tau}) + \frac{\cos(2\omega_0 t + \psi) - e^{-t/\tau} \cos(\psi)}{\sqrt{4\omega_0^2 + \tau^{-2}}} \right] u(t) \quad (44.8)$$

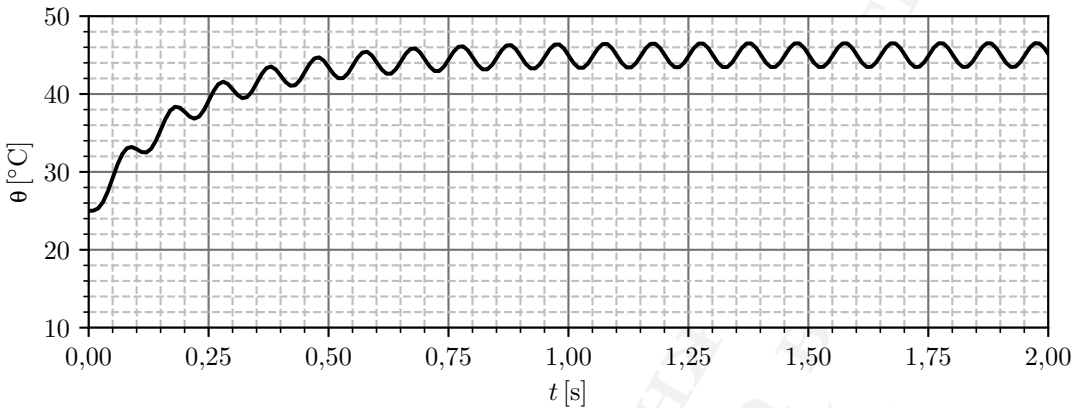
$$= P_m R_\theta \left[(1 - e^{-t/\tau}) + \frac{\cos(2\omega_0 t + \psi) - e^{-t/\tau} \cos(\psi)}{\underbrace{\tau \sqrt{4\omega_0^2 + \tau^{-2}}}_{1/n}} \right] u(t) \quad (44.9)$$

$$= P_m R_\theta \left[(1 - (1 + n \cos(\psi))e^{-t/\tau}) + n \cos(2\omega_0 t + \psi) \right] u(t), \quad n = \frac{1}{\sqrt{(2\omega_0 \tau)^2 + 1}}. \quad (44.10)$$

Заменом вредности датих у задатку су $P_m R_\theta = 20^\circ \text{C}$, $\cos(\psi) \approx n \approx 8\%$, добија се приближни израз¹⁹ за температуру отпорника $\theta(t) \approx 25^\circ \text{C} + 20^\circ \text{C}(1 - e^{-t/\tau} - 8\% \sin(2\omega_0 t + \psi))$, чији график је приказан на слици 44.1.

¹⁸Подразумевамо да су сви сигнали каузални, и да су све конволуције због тога са границама интеграције \int_0^∞

¹⁹Коришћене су апроксимације: $1 + 0,08 \approx 1$; $0,08^2 \approx 0$; $\psi = 85^\circ \approx 90^\circ$.



Слика 44.1: График температуре отпорника у зависности од времена

(б) У усталењем режиму, сматрамо да је $e^{-at} \rightarrow 0$, док преостаје простопериодична компонента, тако да је усталењени одзив посматраног система дат као

$$\Delta\theta_{ss}(t) = 20^\circ\text{C}(1 - 8\% \sin(2\omega_0 t + \psi)). \quad (44.11)$$

па је амплитуда ове варијације једнака $\theta_m = 20^\circ\text{C} \cdot 8\% = 1,6^\circ\text{C}$.

- **45.** Отпорност отпорника чија је толеранција 5% представља насумичну променљиву функције расподеле густине вероватноће, која се може сматрати да је униформна, у опсегу $\pm 5\%$ своје средње вредности R_0 . (а) Одредити функцију расподеле густине вероватноће отпорности два таква редно везана отпорника, отпорности $R_0 = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$. (б) Упоредити добијену расподелу са расподелом једног отпорника отпорности $2R_0 = 2 \text{ [k}\Omega\text{]}$.

РЕШЕЊЕ: Функција расподеле густине вероватноће једног отпорника је дата изразом $p(R) = \text{rect}\left(\frac{R - R_0}{0,1 R_0}\right)$. Отпорност редне везе једнака је збиру појединачних отпорности $R = R_1 + R_2$. Да бисмо одредити функцију расподеле густине ове вероватноће запишимо то као $R = r + \underbrace{(R - r)}_{R_2}$, где је r једна реализација отпорности првог отпорника. Одатле за густину вероватноће збира важи

$$dp_\Sigma(R) = \underbrace{p(r)dr}_{\text{Први отпорник}} \cdot \underbrace{p(R - r)dr}_{\text{Други отпорник}}, \quad (45.1)$$

при чему се вероватноће множе јер су то међусобно независни догађаји. Даље се дељењем

обе стране са dr па потом интеграцијом по r налази:

$$\frac{dp_{\Sigma}(R)}{dR} = p(r) \cdot p(R-r)dr \Rightarrow p_{\Sigma}(R) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p(r) \cdot p(R-r)dr}_{\text{Конволуциони интеграл}}, \quad (45.2)$$

где идентификујемо *конволуциони интеграл* па се овај резултат може записати и као $p_{\Sigma}(R) = p(R) * p(R)$.

Сада функцију густине вероватноће можемо одредити применом особина конволуције. Приметимо да је $p(R) = \frac{1}{0,1R_0} \text{rect}\left(\frac{R-R_0}{0,1R_0}\right) = \text{rect}\left(\frac{R}{0,1R_0}\right) * \delta(R-R_0)$, па се даље има

$$p_{\Sigma}(R) = \underbrace{\frac{1}{0,1R_0} \text{rect}\left(\frac{R}{0,1R_0}\right) * \delta(R-R_0)}_{p(R)} * \underbrace{\frac{1}{0,1R_0} \text{rect}\left(\frac{R}{0,1R_0}\right) * \delta(R-R_0)}_{p(R)} \quad (45.3)$$

$$= \left(\frac{1}{0,1R_0}\right)^2 \text{rect}\left(\frac{R}{0,1R_0}\right) * \text{rect}\left(\frac{R}{0,1R_0}\right) * \underbrace{\delta(R-R_0) * \delta(R-R_0)}_{\delta(R-2R_0)}, \quad (45.4)$$

$$= \left(\frac{1}{0,1R_0}\right) \text{tri}\left(\frac{R}{0,1R_0}\right) * \delta(R-2R_0) = \left(\frac{1}{0,1R_0}\right) \text{tri}\left(\frac{R-2R_0}{0,1R_0}\right) \quad (45.5)$$

пре чему је у првом кораку употребљена асоцијативност конволуције а у другом је примењено својство скалирања аргумента $x(t) * x(t) = y(t) \Rightarrow x(kt) * x(kt) = \frac{1}{k}y(kt)$, уз табличну трансформацију²⁰ $\text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \text{tri}(t)$.

(б) Тражено поређење је приказано на слици 45.1.

46. Испитати асимптотску стабилност система који су дефинисани датом диференцијал-ном једначином у операторском облику

(а) $(D+1)^2(D+2)y(t) = x(t);$

(в) $(D^2+9)^2y(t) = x(t);$

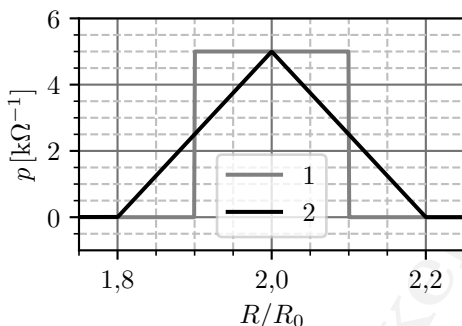
(б) $(D^2+4)y(t) = x(t);$

(г) $(D^2-4D+5)y(t) = x(t).$

РЕШЕЊЕ

Асимптотска стабилност зависи од могућих понашања одзива система услед његовог унутрашњег стања које је одређено почетним условима, односно, зависи од његовог сопственог одзива. Уколико сопствени одзив система тежи нули након довољно дуго времена,

²⁰Видети и таблицу Т.1.3



Слика 45.1: Расподела густине вероватноће за: 1 – један отпорник отпорности 2 [кΩ]; и 2 – редну везу два отпорника отпорности 1 [кΩ].

без обзира на почетне услове, за такав систем кажемо да је *асимптотски стабилан*. Уколико сопствени одзив система тежи бесконачности, за неке почетне услове, онда кажемо да је он *асимптотски нестабилан*. Уколико систем није асимптотски нестабилан, али постоје почетни услови који доводе до осцилаторног карактера сопственог одзива, за такав систем кажемо да је *гранично стабилан* (или еквивалентно *маргинално стабилан*).

Пошто ово понашање зависи од облика сопственог одзива, који зависи од структуре карактеристичних функција система, а које зависе од коренова карактеристичног полинома, испитивањем структуре скупа коренова карактеристичног полинома можемо закључити о асимптотској стабилности система.

У табели 1 приказано је понашање карактеристичних функција (к.ф.) које потичу од коренова карактеристичног полинома (к.п.)

Кажемо да је лева комплексна полураван *област стабилности*, а имагинарна оса *граница стабилности* за континуалне системе, како је илустровано на слици 46.1, систем асимптотски стабилан уколико има корене који се налазе искључиво у области стабилности. Маргинално је стабилан уколико има једноструке корене на граници стабилности, а асимптотски је нестабилан уколико има корене потпуно ван области стабилности.

(а) Корени карактеристичног полинома су $\lambda_1 = -1$ (двоструки) и $\lambda_2 = -2$. Пошто се оба корена налазе у области стабилности, дати систем је асимптотски стабилан.

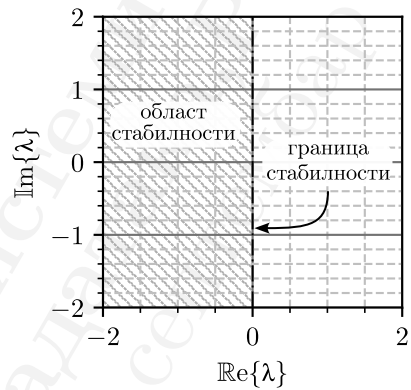
(б) Корени карактеристичног полинома су $\lambda_{12} = \pm j2$. Пошто постоји једноструки пар комплексно конјугованих коренова на граници стабилности систем је гранично стабилан.

(в) Корени карактеристичног полинома су $\lambda_{12} = \pm j3$ (двоструки пар). Пошто постоје двоструки корени на граници стабилности, дати систем је асимптотски нестабилан.

(г) Корени карактеристичног полинома налазе се решавањем квадратне једначине

Корен к. п.	Понашање к. ф.
$\lambda \in \mathbb{R}$, једноструки корен	$e^{\lambda t} \begin{cases} \rightarrow 0, & \text{ако је } \lambda < 0 \\ = 1, & \text{ако је } \lambda = 0 \\ \rightarrow \infty, & \text{ако је } \lambda > 0 \end{cases}$
$\lambda \in \mathbb{R}$, k -тоструки корен	$e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t} \begin{cases} \rightarrow 0, & \text{ако је } \lambda < 0 \\ \rightarrow \infty, & \text{ако је } \lambda \geq 0 \end{cases}$
$\lambda = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$, једноструки корен	$e^{\sigma t} \sin(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t) \begin{cases} \rightarrow 0, & \text{ако је } \sigma < 0 \\ \text{осцилаторно}, & \text{ако је } \sigma = 0 \\ \rightarrow \infty, & \text{ако је } \sigma > 0 \end{cases}$
$\lambda = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$, k -тоструки корен	$\begin{matrix} e^{\sigma t} \sin(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ \vdots \\ t^{k-1}e^{\sigma t} \sin(\omega t), t^{k-1}e^{\sigma t} \cos(\omega t) \end{matrix} \begin{cases} \rightarrow 0, & \text{ако је } \sigma < 0 \\ \rightarrow \infty, & \text{ако је } \sigma \geq 0 \end{cases}$

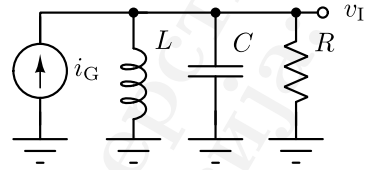
Табела 1: Асимптотско понашање карактеристичних функција, преглед.



Слика 46.1: Илустрација области и границе стабилности

$\lambda_{12} = 2 \pm j$. Пошто се пар коренова налази ван области стабилности систем је асимптотски нестабилан.

47. У колу приказаном на слици познато је $L = 1 \text{ } [\mu\text{H}]$, $C = 1 \text{ } [\mu\text{F}]$, и $R = 10 \text{ } [\text{k}\Omega]$. Једини улаз посматраног система је струја $i_G = i_G(t)$, а једини излаз је напон $v_I = v_I(t)$. сматрати да је $\sqrt{LC} \gg \frac{L}{R}$.



Слика 47.1

(а) Одредити импулсни одзив датог система, $h(t)$, и скицирати његов график.

(б) Одредити сопствени одзив датог система, ако су $v_I(0^-) = 2 \text{ [V]}$ и $\frac{dv_I}{dt}(0^-) = 1 \left[\frac{\text{V}}{\text{ms}} \right]$.

(в) Дати систем се користи за реализацију осцилатора (уређаја који генерише осцилације), заснованог на природном понашању LC кола, док отпорност R моделује неизбежне губитке. Улаз система (струја струјног извора) се може користити да те губитке надокнади, додавањем одређене количине наелектрисања у сваком периоду током веома кратког времена. Тај процес се може представити као $i_G(t) = Q \text{ Ш}_{T_0}(t)$, где T_0 одговара периоду простопериодичног члана хомогеног дела одзива. Приближно одредити зависност амплитуде (максималне тренутне вредности) устаљеног одзива система од количине наелектрисања Q .

РЕШЕЊЕ

(а) Диференцијална једначина система налази се писањем Кирхофовог закона за струје у задатом колу као $i_G = \underbrace{C \frac{dv_C}{dt}}_{i_C} + \underbrace{\frac{v_I}{R}}_{i_R}$. Додатним диференцирањем обе стране једна-

кости по времену па затим сређивањем даље се има погодан облик

$$\frac{di_G}{dt} = C \frac{d^2 v_I}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{R} \frac{dv_I}{dt} \Rightarrow L \frac{di_G}{dt} = LC \frac{d^2 v_I}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dv_I}{dt} + v_I \quad (47.1)$$

Добијена диференцијална једначина се може представити и у операторском облику као

$$P(D)v_I = Q(D)i_G, \quad Q(D) = L, \quad P(D) = LC D^2 + \frac{L}{R} D + 1. \quad (47.2)$$

Ради поједностављења записа, уведемо смене у виду временских параметара $T^2 = LC = 1 \text{ } [\mu\text{s}]$ и $\tau = L/R = 100 \text{ } [\text{ps}]$, па је онда карактеристични полином диференцијалне једначине система $P(\lambda) = T^2 D^2 + \tau D + 1$, чији су одговарајући корени

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\tau \pm \sqrt{\tau^4 - 4T^2}}{2T^2}. \quad (47.3)$$

Пошто је $T \gg \tau$ онда се може писати $\lambda_{1,2} = \frac{-\tau^2}{2T^2} \pm \frac{\sqrt{\tau^2 - 4T^2}}{2T^2} \approx \frac{-\tau^2}{2T^2} \pm \frac{\sqrt{-4T^2}}{2T^2} = -\frac{\tau^2}{2T^2} \pm j\frac{1}{T}$.
Заменом израза за τ и T добијају се корени у облику

$$\lambda_{1,2} \approx \sigma \pm j\omega, \quad \sigma = -\frac{\tau}{2T^2} = -\frac{L/R}{2LC} = -\frac{1}{2RC}, \quad \omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (47.4)$$

Заменом бројних вредности налази се $\sigma = -50 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ и $\omega = 1 \left[\frac{\text{Mrad}}{\text{s}} \right]$.

Импулсни одзив датог система одређује на начин описан у додатку Г, решавањем помоћне једначине $\delta(t) = P(D)p(t)$, па је онда $h(t) = Q(D)p(t)$. Облик решења помоћне једначине је изграђен од карактеристичних функција које потичу од коренова карактеристичног полинома па је облика

$$p(t) = e^{\sigma t} (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)). \quad (47.5)$$

Постиницијални услови услед Дираковог импулса су $p(0^+) = 0$, $p'(0^+) = \frac{1}{T^2}$, па је онда

$$p(0) = e^{\sigma \cdot 0} (A \sin(\omega \cdot 0) + B \cos(\omega \cdot 0)) = B \Rightarrow B = 0 \quad (47.6)$$

Диференцирањем остатка решења се налази

$$\frac{dp}{dt} = A (\sigma e^{\sigma t} \sin(\omega t) + \omega e^{\sigma t} \cos(\omega t)) = A e^{\sigma t} (\sigma \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)) \quad (47.7)$$

Одговарајућом заменом се онда налази

$$\frac{dp}{dt}(t=0) = A\omega = \frac{1}{T^2} \Rightarrow A = \frac{1}{\omega T^2} = \frac{1}{T}. \quad (47.8)$$

Коначно, импулсни одзив се налази као

$$h(t) = L \frac{dp}{dt} \Rightarrow h(t) = \frac{L}{T} e^{\sigma t} (\sigma \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)) = \sqrt{\frac{L}{C}} (\sigma \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)) e^{\sigma t}, \quad (47.9)$$

Заменом бројних вредности, апроксимацијом да је $\omega \gg \sigma$, и узимањем у обзир област важења импулсног одзива $t > 0$, коначно је²¹

$$h(t) = e^{-50 \text{ [s}^{-1}\text{]} t} \cos(\omega t) u(t) \left[\frac{\text{V}}{\mu\text{C}} \right] \quad (47.10)$$

²¹Побуда за коју одзив има димензију напона је облика $Q\delta(t)$, тако да побуда $\delta(t)$ даје одзив који се природно може изразити у јединици која је однос напона и наелектрисања, а има физички смисао напона по јединици наелектрисања у импулсу побуде.

(в) Озив на побуду може се изразити конволуцијом са импулсним одзивом, па се применом својстава конволуције добија

$$v_1(t) = i_G(t) * h(t) = Q \text{Ш}_{T_0}(t) * \frac{1}{C} e^{\sigma t} \cos(\omega t) \quad (47.11)$$

$$= \frac{Q}{C} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) * e^{\sigma t} \cos(\omega t) u(t) \right) \quad (47.12)$$

$$= \frac{Q}{C} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{\sigma(t-kT_0)} u(t - kT_0) \cos(\omega(t - kT_0)) \right) \quad (47.13)$$

$$= \frac{Q}{C} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{\sigma(t-kT_0)} u(t - kT_0) \right)}_{V_m(t)} \cos(\omega t), \quad (47.14)$$

при чему је у последњем кораку употребљена периодичност косинусне функције $\cos(\omega(t - kT_0)) = \cos(\omega t)$, чиме је изолован израз за варирајућу амплитуду $V_m(t)$. Природно, одзив ће такође бити периодичан са периодом T_0 , па је ту амплитуду довољно испитати у интервалу времена $0 < t < T_0$, у том случају је

$$V_m(t) = \frac{Q}{C} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\sigma(t-kT_0)} \underbrace{u(t - kT_0)}_{=1 \text{ за } k < t/T_0 < 1} = \frac{Q}{C} \left(\sum_{k=-\infty}^0 (e^{-\sigma T_0})^k \right) e^{\sigma t} \quad (47.15)$$

Сума добијена у последњем кораку може се израчунати применом израза за суму геометријског реда²², па је коначно

$$V_m(0 < t < T_0) = \frac{Q}{C} \frac{1}{1 - e^{\sigma T_0}} e^{\sigma t}, \quad (47.16)$$

Уколико приметимо да је $\sigma T_0 = \frac{2\pi\sigma}{\omega} = -\frac{\pi}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \ll 1$, може се искористити апроксимација линеарним чланом Тејлоровог реда $e^x \approx 1 + x$ ($x \ll 1$) па је

$$V_m = \frac{Q}{\sqrt{LC}} \frac{R}{\pi} e^{\sigma t} = \frac{10}{\pi} \left[\frac{V}{\text{nC}} \right] Q e^{-\sigma t}. \quad (47.17)$$

На слици 47.2 приказан је временски дијаграм релативне амплитуде $V_m/V_{m,\max}$ на неколико периода. Амплитуда се веома споро мења јер је $\sigma \ll \omega$, па тако може да се усвоји да је амплитудска вредност практично константна и износи

$$V_m \approx \frac{10}{\pi} \left[\frac{V}{\text{nC}} \right] Q. \quad (47.18)$$

²²Сума геометријског реда је облика $\sum_{k=-\infty}^0 q^k = \frac{1}{1 - q^{-1}}$, под условом да је $|q| < 1$.



Слика 47.2: Релативна амплитуда у зависности од времена.

48. У колу са слике познати су $R_1 = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$, $R_2 = R_3 = R_4 = \frac{1}{3} \text{ [k}\Omega\text{]}$ и $C = 1 \text{ [}\mu\text{F]}$, а операциони појачавач је идеалан. Посматра се систем чији је једини улаз напон v_U а једини излаз напон v_I . Одредити (а) диференцијалну једначину тог система. Решавањем у временском домену одредити (б) импулсни одзив $h(t)$ тог система. Испитати (в) стабилност посматраног система, у ВІВО смислу, полазећи од добијеног импулног одзива $h(t)$. Израчунаати (г) максималну и (д) минималну тренутну вредност устаљеног сложенепериодичног одзива при побуди $v_U(t) = -\Phi_0 \text{III}(t)$, при чему су $\Phi_0 = 20 \text{ [mWb]}$ и $T = \ln(2) \text{ [ms]}$.

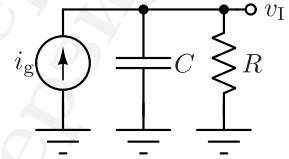


Слика 48.1

РЕЗУЛТАТ: (а) Диференцијална једначина система је $-v_I - \tau \frac{dv_I}{dt} = v_U$, где је временска константа $\tau = 1 \text{ [ms]}$. (а) Импулсни одзив је $h(t) = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$. (в) Будући да је

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ систем је *BIBO* стабилан. (г) Максимална вредност устаљеног сложеное-
риодичног одзива је $V_{I,\max} = 40$ [V] а (д) минимална је $V_{I,\min} = 20$ [V].

- ⚠ **49.** У колу са слике познато је $R = 1$ [kΩ] и $C = 100$ [nF]. Посма-
тра се континуални систем, чији је једини улаз струја идеалног
струјног генератора $i_g = i_g(t)$, а једини излаз напон $v_I = v_I(t)$.
(а) Одредити диференцијалну једначину тог система, у обли-
ку $P(D)v_I = Q(D)i_g$, где је $D = \frac{d}{dt}$. (б) Испитати асимптотску
стабилност датог система.



Слика 49.1

Тако одређен систем потребно је симулирати на дигиталном рачунару, зарад чега је неоп-
ходно дати систем дискретизовати у времену. Дискретизација се обавља заменом оператора
диференцирања у времену скалираним оператором диференце унапред $\frac{d}{dt} \mapsto \frac{\Delta}{T}$, а дискре-
тизовани систем онда апроксимира еквивалентна диференцна једначина, $P\left(\frac{\Delta}{T}\right)\hat{v}_I[n] =$
 $Q\left(\frac{\Delta}{T}\right)\hat{i}_g[n]$, по низовима $\hat{v}_I[n] = v_I(nT)$ и $\hat{i}_g[n] = i_g(nT)$, где је $T > 0$ период дискрети-
зације. У зависности од параметра T (в) испитати стабилност дискретизованог система у
асимптотском смислу.

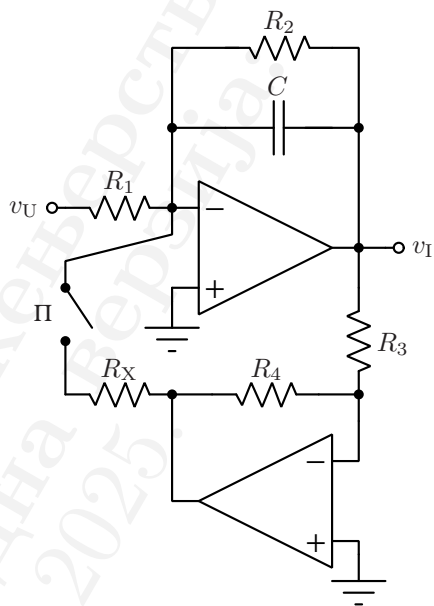
РЕЗУЛТАТ: (а) Диференцијална једначина система је $Ri_g = (\tau D + 1)v_I$, где је $\tau = 200$ [μs].

- (б) Систем је асимптотски стабилан. (в) Дискретизовани систем је $\begin{cases} \text{стабилан} \\ \text{гранично стабилан} \\ \text{нестабилан} \end{cases}$

за $\begin{cases} T < 200 \text{ [μs]} \\ T = 200 \text{ [μs]} \\ T > 200 \text{ [μs]} \end{cases}$.

50. У колу са слике познато је $R_1 = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$, $R_2 = R_3 = R_4 = 2 \text{ [k}\Omega\text{]}$ и $C = 100 \text{ [}\mu\text{F]}$ а операциони појачавачи и прекидач П су идеални. Прекидач П је отворен а у колу нема почетне енергије. Једини улаз посматраног система је улазни напон, v_U а једини излаз је напон v_I .

- Одредити диференцијалну једначину тог система, а затим решавањем у временском домену одредити одзив датог система на одскочну побуду $v_U^{(a)} = 1 \text{ [V]} u(t)$.
- Полазећи од резултата претходне тачке, применом својстава *LTI* система, одредити одзив на импулсну побуду $v_U^{(b)} = 100 \text{ [mWb]} \delta(t)$.
- Методом по избору, испитати асимптотску и *BIBO* стабилност датог система.



Слика 50.1

- Прекидач П се затвори. Израчунати отпорност R_X тако да добијени систем у целини буде маргинално стабилан. За тако добијену вредност одредити резонантан одзив на побуду облика $v_U^{(r)} = 1 \text{ [V]} e^{-at} u(t)$ за одговарајућу вредност параметра a .

РЕЗУЛТАТ: (а) Диференцијална једначина система је $\tau \frac{dv_I}{dt} + v_I = -av_U$, где су $\tau = R_2 C = 0,2 \text{ [s]}$ и $a = -\frac{R_2}{R_1} = -2$. Одзив на одскочну побуду је $v_I^{(a)} = -2 \text{ [V]} (1 - e^{-t/\tau}) u(t)$. (б)

Пошто важи веза $v_U^{(b)} = 100 \text{ [ms]} \frac{dv_U^{(a)}}{dt}$ применом својства *LTI* система има се да је $v_I^{(b)} = 100 \text{ [ms]} \frac{dv_I^{(a)}}{dt}$ односно $v_I^{(b)} = -1 \text{ [V]} e^{-t/\tau} u(t)$. (в) Систем јесте и асимптотски и *BIBO* стабилан. (г) Треба да буде $R_X = R_2 = 2 \text{ [k}\Omega\text{]}$ у том случају резонантни одзив наступа за $a = 0$ а дат је изразом $v_I^{(r)} = -\frac{1 \text{ [V]}}{R_1 C} t u(t) = -10 \left[\frac{\text{V}}{\text{s}} \right] t u(t)$.

1.3 Дискретни системи

51. Дат је дискретан систем описан диференцном једначином

$$Dy[n] = \Delta x[n-1] + 3x[n+4] + Dx[n-3], \quad (51.1)$$

где су D и Δ оператори кашњења и диференце унапред редом. (а) Одредити импулсни одзив тог система, $h[n]$. (б) Испитати да ли је такав систем каузалан.

РЕШЕЊЕ

Импулсни одзив одређује се као одзив на импулсну побуду $x[n] = \delta[n]$, односно, може се наћи сређивањем операторског израза:

$$Dh[n] = \Delta\delta[n-1] + 3\delta[n+4] + Dh[n-3] = (\Delta D + 3D^{-4} + D^4)\delta[n], \quad (51.2)$$

одакле се импулсни одзив може изразити као $h[n] = \frac{\Delta D + 3D^{-4} + D^4}{D}\delta[n]$. Уколико приметимо да је $\Delta = D^{-1} - 1$, онда се може добити $h[n] = \frac{1 - D + 3D^{-4} + D^4}{D}\delta[n]$, па се даљим сређивањем има $h[n] = (D^{-1} - 1 + 3D^{-5} + D^3)\delta[n]$, односно у временском домену $h[n] = \delta[n+1] - \delta[n] + 3\delta[n+5] + \delta[n-3]$.

(б) Пошто у импулсном одзиву постоје чланови у тренуцима $n < 0$ такав систем није каузалан.

♣ **52.** Каузални систем описан је диференцом једначином

$$y[n] - \sqrt{3}y[n-1] + y[n-2] = x[n], \quad (52.1)$$

где су познати помоћни услови $y[-1] = 1$ и $y[-2] = 0$. (а) Испитати асимптотску стабилност датог система. (б) Одредити сопствени одзив, $y_a[n]$, датог система за задате помоћне услове. (в) Одредити принудни одзив, $y_f^{(b)}[n]$, датог система за побуду $x[n] = \delta[n]$.

РЕШЕЊЕ: Дата диференцна једначина се може записати у операторском облику као $P(E)y[n] = Q(E)x[n]$, где су $P(E) = 1 - \sqrt{3}E + E^2$ и $Q(E) = E^2$, где је $E = n \mapsto n+1$ дискретни оператор предикције.

(а) Асимптотска стабилност система одређује се испитивањем структуре корена карактеристичног полинома $P(E)$. Пошто дати систем има корене карактеристичног полинома

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm j}{2} = \exp\left(\pm j\frac{\pi}{6}\right), \quad (52.2)$$

односно они представљају комплексно конјуговани пар $\rho e^{\pm j\phi}$, где су $\rho = 1$, $\phi = \pi/6$. Пошто постоје само једноструки корени на јединичној кружници комплексне равни, систем је гранично стабилан.

(б) Према резултату додатка А, на основу добијених корена карактеристичног полинома имају се карактеристичне функције из скупа $\{\cos(n\pi/6), \sin(n\pi/6)\}$, па је хомогено решење

одзива у облику $y[n] = \overset{1}{\cancel{\rho^n}} (A \cos(n\pi/6) + B \sin(n\pi/6))$, а коефицијенти A и B се одређују из датих помоћних услова:

$$y[-1] = 1 = \cos(-\pi/6)A + \sin(-\pi/6)B = \frac{\sqrt{3}}{2}A - \frac{1}{2}B, \quad (52.3)$$

$$y[-2] = 0 = \cos(-2\pi/6)A + \sin(-2\pi/6)B = \frac{1}{2}A - \frac{\sqrt{3}}{2}B. \quad (52.4)$$

Решавањем добијеног система једначина налазе се непознати коефицијенти $A = \sqrt{3}$, $B = 1$, па је тражени сопствени одзив у облику

$$y_a[n] = \sqrt{3} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right), \quad n \geq -2. \quad (52.5)$$

(в) Импулсни одзив се такође тражи у хомогеном облику за неки други избор коефицијената испред карактеристичних функција, под претпоставком нултих преиницијалних услова $y[n < 0] = 0$, као

$$h[n] = \overset{1}{\cancel{\rho^n}} (C \cos(n\pi/6) + D \sin(n\pi/6)) \quad (52.6)$$

Том приликом, коефицијенти се могу пронаћи рекурзивним израчунавањем вредности одзива за задату побуду, преуређивањем дате диференце једначине $y[n] = x[n] + \sqrt{3}y[n-1] - y[n-2]$, препознајући да је $y[n < 0] = 0$, за побуду у облику $x[n] = \delta[n]$, на основу поступка:

$$y[0] = \delta[0] + \overset{0}{\cancel{\sqrt{3}y[-1]}} - \overset{0}{\cancel{y[-2]}} = \delta[0] = 1, \quad \text{замена у наредни корак} \leftarrow \quad (52.7)$$

$$y[1] = \delta[1] + \overset{0}{\cancel{\sqrt{3}y[0]}} - \overset{1}{\cancel{y[-1]}} = \sqrt{3}, \quad \text{замена у наредни корак} \leftarrow \quad (52.8)$$

$$y[2] = \delta[2] + \overset{0}{\cancel{\sqrt{3}y[1]}} - \overset{\sqrt{3}}{\cancel{y[0]}} = 2, \quad \text{замена у наредни корак} \leftarrow \quad (52.9)$$

$$(52.10)$$

Примећујемо да оваквим итеративним поступком можемо одредити одзив $y[m]$ у произвољном тренутку m , након m израчунавања. Међутим, будући да познајемо аналитички облик решења као 52.6 онда су нам ова два резултата довољни за израчунавање коефицијената.

$$h[1] = C \cos(\pi/6) + D \sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}C + \frac{1}{2}D = \sqrt{3}, \quad (52.11)$$

$$h[2] = C \cos(2\pi/6) + D \sin(2\pi/6) = \frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}D = 2 \quad (52.12)$$

одакле се налазе коефицијенти $C = 1$, $D = \sqrt{3}$, па се одзив на задату побуду може изразити у облику

$$y_f^{(b)}[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right), \quad n \geq 1. \quad (52.13)$$

Важно је нагласити да дати израз има смисла само у наведеном опсегу, ван њега, тај резултат строго нема смисла. На пример, за $n = 0$ је према њему $y_f^{(b)}[n = 0] = 4 - \sqrt{3}$ док на основу (52.7) треба да буде $y_f^{(b)}[n = 0] = 1$. Ова несагласност потиче од чињенице да је *фишовање* коефицијената C и D оправдано само у случају хомогене диференцне једначине, што строго важи за $n > 0$ јер је $x[n = 0] \neq 0$, у овом конкретном случају.

53. Нека је дат каузалан дискретан систем описан диференцом једначином

$$y[n + 2] - 5y[n + 1] + 6y[n] = x[n],$$

где је побуда система дата изразом (а) $x[n] = 3 \cdot 4^{-n}u[n]$, (б) $x[n] = 2 \cdot 3^n u[n]$. Одредити одзив датог система на побуду.

РЕШЕЊЕ

Дата диференцијална једначина може се записати у облику $P(E)y[n] = x[n]$, где је $P(E) = E^2 - 5E + 6$. Одређивање одзива система налази се решавањем дате диференцне једначине. Пошто се тражи одзив система на побуду, сматрамо да су одговарајући помоћни услови пре дејства побуде дати као $y[-1] = y[-2] = 0$ (јер побуда делује од тренутка $n = 0$). Одређивањем корена полинома $P(E)$, нпр. обрасцем за решења квадратне једначине, добијају се једноструки корени $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 2$, па је хомогени део решења у општем облику:

$$y_h = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n. \quad (53.1)$$

Помоћни услови могу се одредити рекурентно, на сличан начин као у задатку 52, размотримо дату једначину за $n = 0$ и $n = 1$, па је

$$n = 0 \Rightarrow y[2] - \overset{0}{\cancel{5y[1]}} + \overset{0}{\cancel{6y[0]}} = x[0] \Rightarrow y[2] = x[0] \quad (53.2)$$

$$n = 1 \Rightarrow y[3] - \overset{0}{\cancel{5y[2]}} + \overset{0}{\cancel{6y[1]}} = x[1] \Rightarrow y[3] = x[1] + 5y[2] = x[1] + 5x[0]. \quad (53.3)$$

На основу тих услова, биће могуће одредити потребне коефицијенте, када је познат побудни сигнал $x[n]$ и када се одреди партикуларни део одзива.

(а) Партикуларни део може се одредити на основу формуле дате у додатку Б, на основу чега је

$$y_p[n] = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n}{P\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{48}{77} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n. \quad (53.4)$$

Одавде је облик одзива, за који треба наћи одговарајуће константе, на побуду дат изразом

$$y[n] = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n + \frac{48}{77} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n. \quad (53.5)$$

Помоћне услове рачунамо на основу (53.2) и (53.3) па је онда

$$y[2] = x[0] = 3, \quad y[3] = x[1] + 5x[0] = \frac{63}{4} \quad (53.6)$$

па се решавањем система једначина на основу помоћних услова налазе $C_1 = \frac{12}{11}$ и $C_2 = -\frac{12}{7}$.

(б) Пошто је у овом случају вредност $a = 3$ једноструки корен полинома $P(D)$, побуђен је резонантни одзив система. Партикуларни део у том случају је дат формулом из додатка Б,

$$y_p[n] = \frac{2n \cdot 3^{n-1}}{P'(3)}, \quad P'(E) = 2E - 5 \Rightarrow P'(3) = 1 \quad (53.7)$$

$$= \frac{2}{3}n \cdot 3^n, \quad (53.8)$$

па је на сличан начин као у претходној тачки укупан облик одзива

$$y[n] = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n + \frac{2}{3}n \cdot 3^n. \quad (53.9)$$

На основу истих помоћних услова као у претходној тачки, решавањем система једначина одређују се коефицијенти $C_1 = -\frac{9}{4}$, и $C_2 = \frac{45}{16}$.

54. За систем дефинисан у задатку 52 одредити принудни одзив $y_f[n]$ датог система за побуду $x[n] = \cos(n\pi)u[n]$.

РЕШЕЊЕ

Принудни одзив збир је хомогеног и партикуларног дела

$$y_f = y_h + y_p. \quad (54.1)$$

Хомогени део већ је одређен у задатку 52,

$$y_h = \left(A \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + B \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right) u[n]. \quad (54.2)$$

Партикуларни део се може наћи на сличан начин како је описано у задатку 27, на основу формуле за експоненцијалну побуду из додатка Б као

$$y_p[n] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j\pi n}}{P(e^{j\pi})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j\pi n}}{|P(-1)|e^{\arg P(-1)}} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j(\pi n - \arg P(-1))}}{|P(-1)|} \right\} = \frac{\cos(\pi n - \arg P(-1))}{|P(-1)|}. \quad (54.3)$$

Релевантна вредност карактеристичног полинома је $P(-1) = 2 + \sqrt{3}$, одакле је $|P(-1)| = 2 + \sqrt{3}$ и $\arg P(-1) = 0$ па се заменом у (54.3) налази

$$y_p[n] = \frac{\cos(\pi n)}{2 + \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})(-1)^n. \quad (54.4)$$

Заменом добијеног израза и (54.2) у (54.1) је онда

$$y_f[n] = \left(A \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + B \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) + (2 - \sqrt{3})(-1)^n \right) u[n], \quad (54.5)$$

Имајући у виду каузалност система је $y[n < 0] = 0$ па се итеративним поступком налазе одговарајући помоћни услови

$$y[0] = x[0] + \sqrt{3}y[-1] - y[-2] \stackrel{0}{=} x[0] = 1, \quad \text{замена у наредни корак} \leftarrow \quad (54.6)$$

$$y[1] = x[1] + \sqrt{3}y[0] - y[-1] \stackrel{0}{=} \sqrt{3} - 1, \quad (54.7)$$

Заменом добијених помоћних услова у облик принудног одзива 54.5 добија се систем једначина којим се налазе непознати коефицијенти

$$n = 0: \quad A + (2 - \sqrt{3}) = 1 \quad (54.8)$$

$$n = 1: \quad A \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + B \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1, \quad (54.9)$$

чијим се решавањем налазе коефицијенти $A = B = \sqrt{3} - 1$, одакле се заменом у израз 54.5 и сређивањем²³ добија коначни резултат

$$y_f[n] = \left((\sqrt{3} - 1) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right) + (2 - \sqrt{3})(-1)^n \right) u[n] \quad (54.10)$$

$$= \left(\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \cos\left(\frac{n\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + (2 - \sqrt{3})(-1)^n \right) u[n]. \quad (54.11)$$

♣ **55.** Испитати асимптотску стабилност система који су дефинисани датом диференцном једначином у операторском облику

²³ Користи се резултат $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(x - \pi/4)$.

$$(a) \left(E + \frac{1}{4}\right)^2 \left(E - \frac{1}{2}\right) y[n] = x[n];$$

$$(b) (E^2 + 1)^2 y[n] = x[n];$$

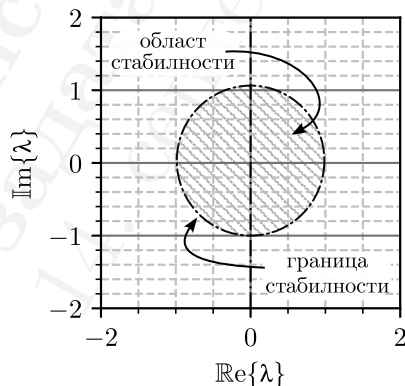
$$(b) (E^2 - E\sqrt{2} + 1)y[n] = x[n];$$

$$(r) \left(E - \frac{1}{2}\right) (E - 2)y[n] = x[n].$$

РЕШЕЊЕ

Појам асимптотске стабилности код дискретних система потпуно је еквивалентан оном како је дефинисан за континуалне системе, односно како је описано у задатку 46. На сличан начин, У табели 2 приказано је понашање карактеристичних функција (к.ф.) које потичу од коренова карактеристичног полинома (к.п.) код дискретних система. У табели се препознају сличности али и значајне разлике код утицаја коренова карактеристичног полинома на стабилност система. Област стабилности у комплексној равни јесте отворени јединични круг $|\lambda| < 1$, а граница стабилности је јединична кружница $|\lambda| = 1$, као што је илустровано на слици 55.1. На тај начин, критеријум стабилности се може исказати на исти начин као за континуалне системе, односно: систем је асимптотски стабилан уколико има корене који се налазе искључиво у области стабилности; маргинално је стабилан уколико има једноструке корене на граници стабилности, а асимптотски је нестабилан уколико има корене потпуно ван области стабилности. (а) Корени карактеристичног полинома су $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$ (двоструки) и $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Пошто се оба корена налазе у области стабилности, дати систем је асимптотски стабилан.

(б) Корени карактеристичног полинома су $\lambda_{12} = e^{\pm j\pi/4}$. Пошто постоји једноструки пар комплексно конјугованих коренова на граници стабилности систем је гранично стабилан.



Слика 55.1: Уз стабилност дискретних система.

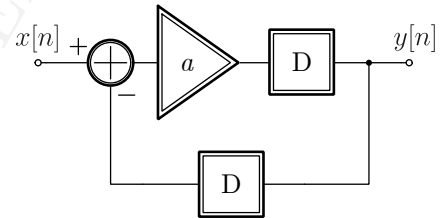
Корен к. п.	Понашање к. ф.
$\lambda \in \mathbb{R}$, једноструки корен	$\lambda^n \begin{cases} \rightarrow 0, & \text{ако је } \lambda < 1 \\ = 1, & \text{ако је } \lambda = 1 \\ \rightarrow \infty, & \text{ако је } \lambda > 1 \end{cases}$
$\lambda \in \mathbb{R}$, k -тоструки корен	$\lambda^n, \dots, n^{k-1} \lambda^n \begin{cases} \rightarrow 0, & \text{ако је } \lambda < 1 \\ \rightarrow \infty, & \text{ако је } \lambda \geq 1 \end{cases}$
$\lambda = \rho e^{j\Omega} \in \mathbb{C}$, једноструки корен	$\rho^n \sin(\Omega n), \rho^n \cos(\Omega n) \begin{cases} \rightarrow 0, & \text{ако је } \rho < 1 \\ \text{осцилаторно}, & \text{ако је } \rho = 1 \\ \rightarrow \infty, & \text{ако је } \rho > 1 \end{cases}$
$\lambda = \rho e^{j\Omega} \in \mathbb{C}$, k -тоструки корен	$\begin{matrix} \rho^n \sin(\Omega n), \rho^n \cos(\Omega n) \\ \vdots \\ \rho^n n^{k-1} \sin(\Omega n), \rho^n n^{k-1} \cos(\Omega n) \end{matrix} \begin{cases} \rightarrow 0, & \text{ако је } \rho < 1 \\ \rightarrow \infty, & \text{ако је } \rho \geq 1 \end{cases}$

Табела 2: Асимптотско понашање карактеристичних функција, преглед.

(в) Корени карактеристичног полинома су $\lambda_{1,2} = -13$ (двоструки пар). Пошто постоје двоструки корени на граници стабилности, дати систем је асимптотски нестабилан.

(г) Корени карактеристичног полинома су $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, и $\lambda_2 = 2$. Пошто постоји барем један корен потпуно ван области стабилности, систем је нестабилан.

56. У дискретном систему са слике употребљени су идеални блокови за кашњење, суматор и појачавач непознатог појачања $a \in \mathbb{R}$. Једини улаз посматраног система је дискретан сигнал $x = x[n]$, а једини излаз је дискретан сигнал $y = y[n]$.



Слика 56.1

- Написати диференцу једначину датог система.
- Испитати асимптотску стабилност датог система у зависности од параметра a .
- Израчунати вредност параметра a за коју је систем маргинално стабилан.
- Одредити израз за импулсни одзив датог система, за произвољну вредност параметра a .

РЕШЕЊЕ

(а) Диференцна једначина система одређује се помоћу датог блок дијаграма. На „+“ улаз блока за сумирање доводи се сигнал x док се на његов „-“ улаз доводи закашњени излазни сигнал Dy . Након што тај сигнал прође кроз појачање и кашњење добија се излазни сигнал одакле се може писати једначина $aD(x - Dy) = y$, чијим се сређивањем налази диференцна једначина

$$(1 + aD^2)y = aDx. \quad (56.1)$$

(б) Уколико се добијена диференцна једначина (56.1) помножи са E^2 са обе стране добија се $(E^2 + a)y = aEx$, па је карактеристични полином дате диференцне једначине дат у облику $P(\lambda) = \lambda^2 + a$, а његови корени су $\lambda_{12} = \pm\sqrt{-a}$. Да би дискретан систем био асимптотски стабилан, потребно је да се сви његови корени λ , налазе унутар јединичног круга $|\lambda| < 1$. Уколико постоје само једноструки корени на јединичној кружници $|\lambda| = 1$ систем ће бити маргинално стабилан. Дакле, систем ће бити асимптотски стабилан за $|a| < 1$, маргинално стабилан за $|a| = 1$ док ће иначе систем бити асимптотски нестабилан.

(в) Систем ће бити у маргинално стабилан у два случаја, односно за $a^{(1)} = 1$ и $a^{(2)} = -1$.

(г) Импулсни одзив потребно је одредити у два случаја, $a \in \{1, -1\}$ према резултату претходне тачке. Рекурзивно, за диференцну једначину (56.1), за $x[n] = \delta[n]$ и $y[n] = h[n]$, може се писати

$$n = 1 \Rightarrow h[1] + \cancel{ah[1]} = a\delta[0] \Rightarrow h[1] = a, \quad (56.2)$$

$$n = 2 \Rightarrow h[2] + \cancel{ah[0]} = a\delta[1] \Rightarrow h[2] = 0, \quad (56.3)$$

$$n = 3 \Rightarrow h[3] + \cancel{ah[1]} = a\delta[2] \Rightarrow h[3] = -ah[1] = -a^2 \quad (56.4)$$

$$n = 4 \Rightarrow h[4] + \cancel{ah[2]} = a\delta[3] \Rightarrow h[4] = 0 \quad (56.5)$$

$$n = 5 \Rightarrow h[5] + \cancel{ah[3]} = a\delta[4] \Rightarrow h[5] = -ah[3] = a^3 \quad (56.6)$$

$$(56.7)$$

На основу добијених међурезултата, индуктивно се може закључити о општем резултату за импулсни одзив у облику

$$h[n] = \begin{cases} 0 & , n = 2m, m \in \mathbb{N}_0, \\ (-1)^m a^m & , n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}. \quad (56.8)$$

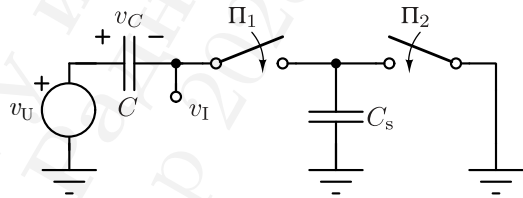
Читаоцу се препоручује да исти резултат изведе помоћу поступка са коренима карактеристичног полинома. Заинтересованом читаоцу се саветује и да испита како се могу одредити

решења диференчне једначине $P(E^2)y[n] = Q(E^2)x[n]$ полазећи од решења диференчне једначине $P(E)y[n] = Q(E)x[n]$. Односно, на који начин се замена $E \mapsto E^2$ одражава на импулсни одзив система.

57. Каузални систем је описан диференцном једначином $\nabla(\Delta - 2)^2 y[n] = Dx[n - 1]$, где су D , ∇ и Δ оператори кашњења, диференце уназад и диференце унапред респективно. Одредити (а) импулсни одзив тога система и испитати (б) његову стабилност. Одредити његов сопствени одзив ако су за систем без побуде дати почетни (помоћни) услови $y[0] = y[2] = 0$, $y[1] = 1$.

РЕЗУЛТАТ: (а) $h[n] = \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}(n-4) \right) \cdot 3^{n-4} \right) u[n-4]$. (б) Систем је асимптотски нестабилан. (в) $y_a[n] = \left(-\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}n \right) 3^n \right) u[n]$.

58. У колу са слике познато је $C = C_s = 100$ [pF]. У почетном тренутку оба кондензатора су неоптерећена. Прекидачи су идеални и затварају се наизменично, краткотрајно, и то прво прекидач Π_1 па прекидач Π_2 . Напон генератора v_U не мења вредност осим када је прекидач Π_2 затворен.



Слика 58.1

- (а) Одредити диференцну једначину система чија је једини улаз напон побудног генератора $v_U[k]$ а једини излаз напон $v_I[k]$ одређени након $k > 0$ затварања прекидача Π_1 .
- (б) Одредити одзив добијеног система на побуду $v_U[k] = V_0 u[k]$ и испитати његову асимптотску стабилност.
- (в \ominus) Одредити отпорност отпорника R који може да замени структуру десно од кондензатора C тако да се одбирци одскочног одзива континуалног система одговарају добијеном дискретном одзиву у тренуцима одабирања. У том случају, усвојити да се прекидачи затварају периодично, учестаношћу f .

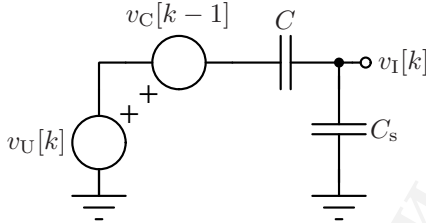
РЕШЕЊЕ: Приликом затварања прекидача Π_2 кондензатор C_s се врло брзо (практично тренутно) испразни, а приликом затварања прекидача Π_1 у колу се деси проток наелектрисања, у грани са побудним генератором, који мења наелектрисање, односно напон, кондензатора C . Будући да се процес наизменичног краткотрајног затварања прекидача Π_1 па Π_2 периодично понавља, тренутни напон тог кондензатора представља меморију овог система, што је описано дискретним сигналом $v_C = v_C[k]$. Када се прекидач затвори k -ти пут, напон генератора је $v_U = v_U[k]$. Непосредно пре тога, почетни напон кондензатора је

$v_C[k-1] = v_U[k-1] - v_I[k-1]$, а може се представити заменском шемом као што је приказано на слици 58.2а. На основу те шеме, излазни напон ће бити одређен капацитивним разделником, као

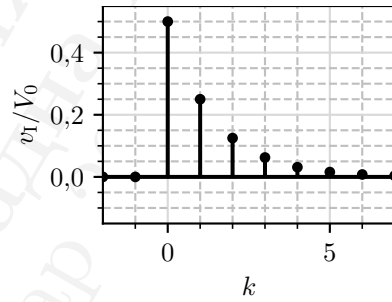
$$v_I[k] = \alpha(v_U[k] + v_I[k-1] - v_U[k-1]), \quad (58.1)$$

где је $\alpha = \frac{C}{C + C_s}$ коефицијент капацитивног разделника напона. Одавде се налази тражена диференцна једначина у облику

$$v_I[k] - \alpha v_I[k-1] = \alpha(v_U[k] - v_U[k-1]) \Leftrightarrow \underbrace{(1 - D\alpha)}_{P(D)} v_I[k] = \underbrace{\alpha(1 - D)}_{Q(D)} v_U[k] \quad (58.2)$$



(а) Са уведеном заменском шемом.



(б) График дискретног излазног напона.

(б) Израз са десне стране диференчне једначине може се поједноставити као $\underbrace{(1 - D)}_{Q(D)} v_U[k] = \underbrace{\alpha(1 - D)}_{Q(D)} V_0 u[k] = \alpha V_0 \delta[k]$, па је потребно решити диференцну једначину облика

$$v_I[k] - \alpha v_I[k-1] = \alpha V_0 \delta[k], \quad (58.3)$$

што се може учинити на сличан начин као у задатку 52. Карактеристични полином дате диференчне једначине је $P(\lambda) = \lambda - \alpha$ чији је једини корен $\lambda = \alpha$ па је у овом случају једина карактеристична функција α^k , односно је $v_I[k] = A\alpha^k u[k]$. Разматрајући израз (58.3) за $k = 0$, усвајајући да је $v_I[k < 0] = 0$, има се $v_I[0] = \alpha V_0$, на основу чега мора бити коначно

$$v_I[k] = V_0 \alpha^{k+1} u[k]. \quad (58.4)$$

За конкретно задате бројеве је $\alpha = \frac{1}{2}$ па је временски дијаграм тог сигнала дат на слици 58.2б.

(в) Треба да буде $R = \frac{1}{fC_s}$.

59. Нека је $x[n]$ дискретан сигнал ограничен у времену. Ако је дужина (број ненултих одбирака) сигнала $x[n] * x[n] * x[n]$ једнака 13. Израчунати дужину, N_x сигнала $x[n]$.

РЕЗУЛТАТ: $N_x = 5$.

60. Нека су побуда дискретног система $x[n]$ и његов импулсни одзив $h[n]$ дати таблично као:

(а)	n	≤ -1	0	1	2	≥ 3
	$x[n]$	0	1	2	1	0
	$h[n]$	0	1	4	9	0

(б)	n	≤ -1	0	1	2	3	4	≥ 3
	$x[n]$	0	1	2	3	2	1	0
	$h[n]$	0	1	-1	1	0	0	0

Одредити принудни одзив датих система у задатим случајевима.

РЕЗУЛТАТ: Тражени одзиви добијају се дискретном конволуцијом као $y[n] = \sum_{i+j=n} x[i]h[j]$.

Добијају се резултати (а) $y[n] = \delta[n] + 6\delta[n-1] + 18\delta[n-2] + 22\delta[n-3] + 9\delta[n-4]$, и (б) $y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5] + \delta[n-6]$.

61. Дати су дискретни низови $a[k]$ за $0 \leq k \leq N$ и $b[k]$ за $0 \leq k \leq M$. Нека су дефинисани полиноми помоћу тих низова као $P(x) = \sum_{k=0}^N a[k]x^k$ и $Q(x) = \sum_{k=0}^M b[k]x^k$. Одредити коефицијенте полинома $R(x) = P(x) \cdot Q(x)$.

РЕШЕЊЕ

У нади да мотивишемо општи поступак, спроведимо процедуру множења два полинома другог степена:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) = \begin{matrix} a_0b_0x^0 & + & a_0b_1x^1 & + & a_0b_2x^2 \\ + & a_1b_0x^1 & + & a_1b_1x^2 & + & a_1b_2x^3 \\ + & a_2b_0x^2 & + & a_2b_1x^3 & + & a_2b_2x^4 \end{matrix} \quad (61.1)$$

Приметимо да се коефицијенти испред x^n , добијају сабирањем свих производа коефицијената чији се индекси сабирају до n (уоквирени случај $n = 3$) Са тим у виду, поступак се може уопштити.

Изразимо полином преко сличног низа $R(x) = \sum_{k=0}^L c[k]x^k$, онда се може писати

$$R(x) = \sum_{k=0}^N a[k]x^k \cdot \sum_{m=0}^M b[m]x^m = \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^M a[k]b[m]x^{k+m} \quad (61.2)$$

Приметимо онда, да се се коефицијент испред x^n добија у свим сабирцима где је $k + m = n$. Односно, то се може записати као

$$R(x) = \sum_{n=0}^{N+M} \underbrace{\left(\sum_{k+m=n} a[k]b[m] \right)}_{c[n]} x^n. \quad (61.3)$$

Облик коефицијента можемо да препознамо као интерпретацију *дискретне конволуције*, на начин како је описано у задатку 60, односно, коначно можемо изразити

$$c[k] = a[k] * b[k]. \quad (61.4)$$

2 Примене Фуријеових редова

2.1 Фуријеови редови континуалног сигнала

62. Дат је континуалан сигнал

$$x(t) = 1 - 2 \sin(\omega_0 t) + 3 \cos(\omega_0 t) - 4 \cos(4\omega_0 t),$$

где је ω_0 константа. Израчунати коефицијенте развоја тог сигнала у (а) тригонометријски и (б) комплексни Фуријеов ред, на основном периоду. (в) У колу са слике познато је $R_1 = 10R_2 = 5 \text{ [k}\Omega\text{]}$, $L \rightarrow \infty$, а струја струјног генератора је $i_G = 1 \text{ [mA]} \cdot x(t)$. Израчунати ефективне вредности напона на отпорницима V_{R_1} и V_{R_2} .

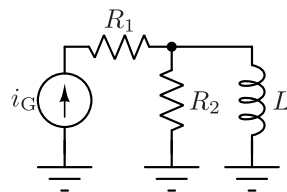
РЕШЕЊЕ

Општа форма развоја у тригонометријски Фуријеов ред је

$$x(t) = A[0] + \sum_{k=1}^{\infty} A[k] \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B[k] \sin(k\omega_0 t), \quad (62.1)$$

па се чланови тригонометријског Фуријеовог реда могу директно препознати идентификацијом. Поређењем са формом датом у поставци задатка има се:

$$x(t) = \underbrace{1}_{A[0]} - \underbrace{2}_{B[1]} \sin(\underbrace{1}_{A[1]}\omega_0 t) + \underbrace{3}_{A[1]} \cos(\underbrace{1}_{A[1]}\omega_0 t) - \underbrace{4}_{A[4]} \cos(\underbrace{4}_{A[4]}\omega_0 t), \quad (62.2)$$



Слика 62.1

односно:

$$A[0] = 1, A[1] = 3, A[4] = -4 \Rightarrow A[k] = \delta[k] + 3\delta[k-1] - 4\delta[k-4] \quad (62.3)$$

$$B[1] = -2 \Rightarrow B[k] = -2\delta[k-1] \quad (62.4)$$

(б) Коефицијенти комплексног Фуријеовог реда могу се изразити преко тригонометријских помоћу веза $X[0] = A[0]$, $X[k > 0] = \frac{A[k] - jB[k]}{2}$, $X[k < 0] = X^*[-k]$, па је

$$X[0] = 1 \quad (62.5)$$

$$X[1] = \frac{A[1] - jB[1]}{2} = \frac{3 + j2}{2} \Rightarrow X[-1] = \frac{3 - j2}{2} \quad (62.6)$$

$$X[4] = -2 \Rightarrow X[-4] = -2 \quad (62.7)$$

$$(62.8)$$

Па се коначно може записати

$$X[k] = -2\delta[k+4] + \frac{3-j2}{2}\delta[k+1] + \delta[k] + \frac{3+j2}{2}\delta[k-1] - 2\delta[k-4]. \quad (62.9)$$

(б) Ефективна вредност напона отпорника може се изразити као

$$V_R = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} v_R^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} R^2 i_R^2 dt} = R \sqrt{\overline{i_R^2}}, \quad (62.10)$$

Снага сигнала струје отпорника $\overline{i_R^2}$ може се рачунати помоћу Парсевалове теореме, која даје везу између снаге израчунате у временском домену и снаге одређене у фреквенцијском домену. Према изразу S.10 из додатка S се може тумачити да је снага расподељена по хармоницима, односно да k -том хармонику одговара снага $|X[k]|^2$ (узимајући у обзир $k \in \mathbb{Z}$). Укупна снага добија се онда сабирањем снага појединачних хармоника. Овај резултат последица је поступка који је показан у задатку 23.

Струја отпорника R_1 једнака је струји генератора па је

$$I_{R_1}[k] = 1 \text{ [mA]} \cdot X[k] \quad (62.11)$$

па се снага тог сигнала налази као

$$\overline{i_{R_1}^2} = 1 \text{ [mA}^2] \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2 = \frac{31}{2} \text{ [mA}^2]. \quad (62.12)$$

па је онда $V_{R_1} = 5\sqrt{\frac{31}{2}} \text{ [V]} \approx 19,7 \text{ [V]}$. За отпорник R_2 , пошто је $L \rightarrow \infty$, само стална компонента струје генератора се успоставља на калему, односно, спектрални садржај струје отпорника R_2 исти је као и спектрални садржај струје отпорника R_1 са изузетком сталне

компоненте која је код њега једнака нули. Снага сигнала струје тог отпорника се онда може потражити као

$$\overline{i_{R_2}^2} = 1 \text{ [mA}^2\text{]} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |X[k]|^2 = \frac{29}{2} \text{ [mA}^2\text{]}. \quad (62.13)$$

па је онда $V_{R_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{29}{2}} \text{ [V]} \approx 1,9 \text{ [V]}$.

63. Нека је дат напон облика биполарне поворке симетричних правоугаоних импулса, периода T и амплитуде V_0 , на свом основном периоду изразом

$$v(t) = \begin{cases} -V_0 & , -\frac{T}{2} < t < 0 \\ V_0 & , 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}, \text{ као што је илустро-$$

вано на слици. Одредити развој овога напона у његов тригонометријски Фуријеов ред.



Слика 63.1

РЕШЕЊЕ

У општем случају, тригонометријски облик Фуријеовог реда дат је изразом (62.1). Нарочито, члан $A[0]$ представља средњу вредност сигнала, док чланови $A[k]$ и $B[k]$ представљају парне односно непарне компоненте тог сигнала респективно. Приметимо да је дати сигнал непаран, па су на основу тога средња вредност тог сигнала као и његове парне компоненте сви једнаки нули, $A[k] = 0, k \in \mathbb{N}_0$. Преостаје да се израчунају непарне компоненте што се може обавити по дефиницији према изразу (S.7) из додатка:

$$B[k] = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad (63.1)$$

где су замењени $T_F = T$, односно $\omega_F = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Будући да је подинтегрална величина

парна функција даље се може писати²⁴

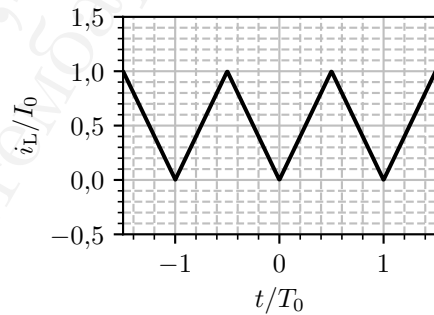
$$B[k] = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} V_0 \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_{t=0}^{T/2} V_0 \sin(k\omega_0 t) \frac{d(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \quad (63.2)$$

$$= \frac{4V_0}{\underbrace{k\omega_0 T}_{2\pi}} \left(1 - \cos \left(k \underbrace{\omega_0 \frac{T}{2}}_{\pi} \right) \right) = \frac{2V_0}{k\pi} (1 - (-1)^k) \quad (63.3)$$

Резултат се може дискутовати раздвајањем на парне и непарне хармонике будући да је $1 - (-1)^k = \begin{cases} 2, & k \text{ непарно} \\ 0, & k \text{ парно} \end{cases}$. Коначно закључујемо да дати сигнал има само непарне хармонике, и то

$$B[k] = \begin{cases} \frac{4V_0}{k\pi}, & k \text{ непарно} \\ 0, & k \text{ парно} \end{cases}. \quad (63.4)$$

- ♣ **64.** Нека је дата струја облика униполарне поворке симетричних троугаоних импулса, периода T и амплитуде I_0 , на свом основном периоду изразом $i(t) = \left| 2\frac{I_0}{T}t \right|$ као што је илустровано на слици. Одредити развој овога напона у његов тригонометријски Фуријеов ред.



Слика 64.1

РЕШЕЊЕ

Задатак се може решити полазећи од дефиниције што се препушта заинтересованом читаоцу. Ефикасније решење може се добити применом својства о изводу, односно интегралу, сигнала. Приметимо да се диференцирањем дате струје добија $\frac{di}{dt} = \frac{2I_0}{T} \operatorname{sgn}(t)$, што је облик који одговара сигналу добијеном у задатку 63. Уколико тај сигнал означимо са

²⁴Користи се таблични интеграл $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$.

$v = v(t)$, као у том задатку, онда можемо изразити $\frac{di}{dt} = \frac{2I_0}{T} \frac{v}{V_0}$, односно, водећи рачуна о средњој вредности струје, можемо писати

$$i(t) = \frac{I_0}{2} + \frac{2I_0}{TV_0} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau. \quad (64.1)$$

Применом особине интегралења Фуријеовог реда континуалног сигнала²⁵ даље се могу одредити комплексни коефицијенти Фуријеовог реда струје $i(t)$ као

$$I[k] = \frac{I_0}{2} \delta[k] + \frac{2I_0}{TV_0} \frac{1}{jk\omega_0} V[k]. \quad (64.2)$$

Комплексни коефицијенти напона $V[k]$ могу се изразити на основу релације S.8 из додатка $V[k] = \frac{B_v[k] - jA[k]}{2} = \frac{1}{2} B_v[k] = \frac{2V_0}{k\pi} \cdot \begin{cases} 1, k \text{ непарно} \\ 0, k \text{ парно} \end{cases}$. Заменом тако добијеног резултата у 64.2 даље се добија:

$$I[k] = \frac{I_0}{2} \delta[k] + \frac{2I_0}{TV_0} \frac{1}{jk\omega_0} \frac{2V_0}{k\pi} n[k] = \frac{I_0}{2} \delta[k] - j \frac{2I_0}{k^2\pi^2} \cdot \begin{cases} 1, k \text{ непарно} \\ 0, k \text{ парно} \end{cases}, \quad (64.3)$$

при чему је искоришћено $\omega_0 T = 2\pi$. Трансформисање у тригонометријске коефицијенте може се обавити помоћу релације (S.9) чиме се има

$$A_i[0] = \frac{I_0}{2}, \quad (64.4)$$

$$A_i[k > 0] = 0, \quad (64.5)$$

$$B_i[k > 0] = \frac{4I_0}{k^2\pi^2} \cdot \begin{cases} 1, k \text{ непарно} \\ 0, k \text{ парно} \end{cases}. \quad (64.6)$$

65. Нека су познати коефицијенти развоја сигнала $x(t)$ у тригонометријски Фуријеов ред на његовом основном периоду, $A[k]$ и $B[k]$. Одредити коефицијенте развоја сигнала $y(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(\tau) d\tau$, у тригонометријски Фуријеов ред на основном периоду, где је $T > 0$ познати параметар.

²⁵ $\mathcal{FS} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{jk\omega_0} X[k]$

РЕШЕЊЕ

На основу датих коефицијената, сигнал $x(t)$ се може изразити синтетичком релацијом као

$$x(t) = A[0] + \sum_{k=1}^{\infty} A[k] \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B[k] \sin(k\omega_0 t). \quad (65.1)$$

Заменом тог израза у израз за сигнал $y(t)$ добија се²⁶

$$y(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \left(A[0] + \sum_{k=1}^{\infty} A[k] \cos(k\omega_0 \tau) + \sum_{k=1}^{\infty} B[k] \sin(k\omega_0 \tau) \right) d\tau \quad (65.2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} A[0] d\tau}_{=A[0]} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A[k]}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \cos(k\omega_0 \tau) d\tau \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B[k]}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \sin(k\omega_0 \tau) d\tau \right) \quad (65.3)$$

Добијени интеграли су практично таблични²⁷, па се применом одговарајућих тригонометријских идентитета за производ синуса односно косинуса²⁸ добија

$$\int_{t-T}^{t+T} \cos(k\omega_0 \tau) d\tau = \frac{1}{k} (\sin(k\omega_0(t+T)) - \sin(k\omega_0(t-T))) = \frac{2 \sin(k\omega_0 T) \cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0}, \quad (65.4)$$

односно

$$\int_{t-T}^{t+T} \sin(k\omega_0 \tau) d\tau = \frac{1}{k} (\cos(k\omega_0(t-T)) - \cos(k\omega_0(t+T))) = \frac{2 \sin(k\omega_0 T) \sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0}. \quad (65.5)$$

Заменом добијених резултата (65.4) и (65.5) у (65.3) има се

$$y(t) = A[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A[k]}{2T} \frac{2 \sin(k\omega_0 T) \cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B[k]}{2T} \frac{2 \sin(k\omega_0 T) \sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \right) \quad (65.6)$$

$$= \underbrace{A[0]}_{A'[0]} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{A[k] \sin(k\omega_0 T)}{k\omega_0 T}}_{A'[k]} \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{B[k] \sin(k\omega_0 T)}{k\omega_0 T}}_{B'[k]} \sin(k\omega_0 t). \quad (65.7)$$

²⁶ Овом приликом користи се замена места интеграла и суме, у доказ чије се оправданости на овом предмету не упуштамо.

²⁷ Таблични интеграли су $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$, односно $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$

²⁸ Тригонометријски идентитети су $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos(x) \sin(y)$, односно $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin(x) \sin(y)$.

Коефицијенте развоја $y(t)$ непосредно идентификујемо као што је указано у резултату, чиме се добија

$$A'[0] = A[0], \quad A'[k] = \frac{\sin(k\omega_0 T)}{k\omega_0 T} A[k], \text{ и } B'[k] = \frac{\sin(k\omega_0 T)}{k\omega_0 T} B[k]. \quad (65.8)$$

Заинтересованом читаоцу се препоручује да задатак уради и уколико су познати комплексни коефицијенти сигнала $x(t)$ а траже се комплексни коефицијенти сигнала $y(t)$.

66. Нека је дата поворка Диракових импулса у облику $x(t) = \text{III}_T(t)$, где је позната кон-
станта. Одредити развој тог сигнала у комплексан Фуријеов ред на (а) основном периоду $T_F = T$ и (б) на умношку m основног периода $T_F = mT$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

РЕШЕЊЕ

Развој у комплексан облик Фуријеовог реда може се спровести по применом аналитичке релације, на сличан начин као и у задатку 67, има се

$$\mathcal{FS}\{\text{III}_T(t)\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_F t} dt. \quad (66.1)$$

У границама интеграције постоји само један Дираков импулс, $\delta(t)$, па се онда на основу својства одабирања Дираковог импулса има

$$\mathcal{FS}\{\text{III}_T(t)\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_F t} dt = \frac{1}{T} e^{-jk\omega_F \cdot 0} = \frac{1}{T}. \quad (66.2)$$

Односно, добијени спектар представља константни дискретан сигнал $\mathcal{FS}\{\text{III}_T(t)\} = \frac{1}{T}$.

(б) У случају када се развој ради на умношку основног периода, тада ће под интегралом остати више Диракових импулса. Границе интеграције треба да покрију интервал $[0, T_F = mT]$, па ћемо разматрати интервал $\left[-\frac{T}{2}, \left(m - \frac{1}{2}\right)T\right]$ унутар кога се налазе импулси $\delta(t)$, $\delta(t - T)$, \dots , $\delta(t - (m - 1)T)$, па из интеграла (66.1) тада остаје

$$\mathcal{FS}\{\text{III}_T(t)\} = \frac{1}{T_F} \int_{-T/2}^{(m-1/2)T} \delta(t) e^{-jk\omega_F t} dt + \dots + \frac{1}{T_F} \int_{-T/2}^{(m-1/2)T} \delta(t - (m - 1)T) e^{-jk\omega_F t} dt \quad (66.3)$$

$$= e^{-jk\omega_F \cdot 0} + e^{-jk\omega_F \cdot 1} + \dots + e^{-jk\omega_F \cdot (m-1)}. \quad (66.4)$$

Добијена сума представља суму геометријске прогресије²⁹ са параметром $q = e^{-jk\omega_F}$, па је онда

$$\mathcal{FS}\{\text{Ш}_T(t)\} = \frac{1}{T_F} \begin{cases} \frac{1 - e^{-jk\omega_F m}}{1 - e^{-jk\omega_F}} & , k \nmid m \\ m & , k|m \end{cases} = \frac{1}{T} \begin{cases} 0 & , k \nmid m \\ 1 & , k|m \end{cases} = \text{Ш}_m[k]. \quad (66.5)$$

Односно резултат представља дискретну поворку дискретних импулса између којих су уметнути $m - 1$ нула.

Резултат овог задатка доступан је у табlici као унос Т.5.1.

67. За сигнал описан у задатку 22 познато је $D = 25\%$ и $f = 1$ [kHz]. Одредити средњу снагу сигнала $v(t)$. Одредити развој овог сигнала у комплексан Фуријеов ред, $V[k]$, на основном периоду T .

РЕШЕЊЕ

Развој у Фуријеов ред се може потражити по дефиницији применом аналитичке релације $V[k] = \int_{\langle T \rangle} v(t) e^{-jk\omega_F t} dt$, поступком³⁰

$$V[k] = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{DT} V_m e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt = -\frac{1}{T} \frac{V_m}{jk \frac{2\pi}{T}} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} \Big|_{t=0}^{t=DT} = \frac{V_m}{T} \frac{1 - e^{-jk 2\pi D}}{jk \frac{2\pi}{T}} \quad (67.1)$$

Добијени облик може се поједноставити примедбом $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2} = e^{jx} \frac{1 - e^{-j2x}}{j2}$, односно, $\frac{1 - e^{-j2x}}{j2} = e^{-jx} \sin(x)$, одакле се може писати

$$V[k] = V_m D \underbrace{\frac{1 - e^{-j2(k\pi D)}}{j2}}_{=e^{-jk\pi D} \sin(k\pi D)} \cdot \frac{1}{k\pi D} = V_m D \frac{\sin(k\pi D)}{k\pi D} e^{-jk\pi D} = V_m D \text{sinc}(kD) e^{-jk\pi D}. \quad (67.2)$$

²⁹ Користи се у облику $1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ када је $|q| < 1$. У нарочитом случају када је $q = 1$ сума је једнака n .

³⁰ Користи се резултат $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^x + C$

II начин. Исти резултат може се одредити и помоћу трансформација поворке Диракових импулса. Приметимо да је $v(t) = V_m \int_{-\infty}^t (\text{Ш}_T(t) - \text{Ш}_T(t - DT)) dt$. Применом особина померања у времену³¹ и интеграције³² Фуријеовог реда континуалног сигнала, уз резултат задатка 66 добија се

$$\mathcal{FS}\{v(t)\} = V_m \frac{1}{jk\omega} \left(\frac{1}{T} - \frac{e^{-jk\omega DT}}{T} \right) = \frac{V_m}{\pi k} \frac{1 - e^{-jk\omega DT}}{j2}, \quad \omega T = 2\pi, \quad (67.3)$$

што је исти облик који је добијен и као (67.2), па се истим поступком долази до истог коначног резултата.

Добијени резултат може се одредити и помоћу таблице, којом приликом ће се члан $e^{-jk\pi D}$ појавити услед кашњења у времену уноса у таблицу доступног као Т.5.2.

68. Поновити задатак 24 применом формалног развоја у Фуријеов ред.

РЕШЕЊЕ

Формални развој у Фуријеов ред подразумева развој датог сигнала у степени ред облика $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]z^k$, где је $z = e^{j\omega t}$, изражавањем датог израза по z па формалним сређивањем израза и развојем у редове помоћу познатих развоја. У овом случају, може се искористити $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$ па се након замене и сређивања у дати израз за струју добија

$$i(t) = I_0 \frac{0,75}{1,25 - \frac{z + z^{-1}}{2}} = I_0 \frac{1,5}{2,5 - z - z^{-1}} \cdot \frac{z}{z} = I_0 \frac{1,5z}{-z^2 + 2,5z - 1} = -I_0 \frac{1,5z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)} \quad (68.1)$$

Добијени израз може се раставити на парцијалне разломке по параметру z , одакле се применом техника описаних у додатку Ђ добија $i(t) = -I_0 \left(\frac{1}{\frac{1}{2}z - 1} - \frac{1}{2z - 1} \right)$. Леви члан

³¹ $\mathcal{FS}\{x(t - \tau)\} = \mathcal{FS}\{x(t)\} e^{-jk\omega_0 \tau}$, $\tau = \text{const}$

³² $\mathcal{FS}\left\{\int_{\tau=-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{jk\omega_0} X[k]$

у добијеном изразу може се развити директно у геометријски ред³³ по параметру z , будући да је $\left|\frac{1}{2}z\right| = \frac{1}{2}|z| < 1$, док је за други члан није могуће извести исто јер није задовољен услов $|2z| < 1$. Да би се и он развио потребно је приметити $\frac{1}{2z-1} = \frac{1}{2}z^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$, па је њега могуће развити у геометријски ред по $\frac{1}{2}z^{-1}$. Имајући наведено у виду, даље се може заменом у (68.1) писати

$$i(t) = -I_0 \left(\frac{1}{\frac{1}{2}z - 1} - \frac{1}{2}z^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \quad (68.2)$$

$$= I_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z \right)^k + \frac{1}{2}z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1} \right)^k \right) \quad (68.3)$$

$$= I_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k z^k + \frac{1}{2}z^{-1} \sum_{k=-\infty}^0 \left(\frac{1}{2} \right)^{-k} z^k \right) \quad (68.4)$$

$$= I_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k z^k + \sum_{k=-\infty}^0 \left(\frac{1}{2} \right)^{-(k-1)} z^{k-1} \right) \quad (68.5)$$

$$= I_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{-k} z^k \right) \quad (68.6)$$

Коначним обједињавањем добијених сума добија се $i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{I_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{|k|}}_{I[k]} z^k$. Снага пријем-

ника онда је одређена као $P_p = R_p \overline{i^2}$, а снага сигнала $i(t)$ може се израчунати онда помоћу Парсевалове теореме

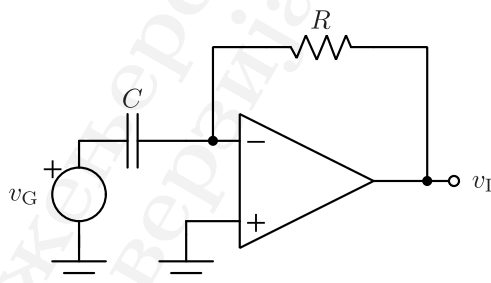
$$\overline{i^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |I[k]|^2 = |I[0]|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |I[k]|^2 = I_0^2 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2k} \right) = \frac{5}{3} [\text{mA}^2], \quad (68.7)$$

па се коначно израчунава $R_p = 5 [\text{mW}]$.

³³Израз за суму геометријског реда $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$

Дати сигнал припада нарочитој групи сигнала чији Фуријеови редови образују различите геометријске низове, а који су доступни и кроз таблицу Т.3

69. У колу са слике познато је R и C а операциони појачаваач је идеалан. Побудни напонски генератор је идеалан, а позната је и његова емс $v_G = \frac{\alpha \sin(\omega t) V_m}{1 - 2\alpha \cos(\omega t) + \alpha^2}$, где су V_m и α познате константе, при чему је $|\alpha| < 1$. Одредити спектралне коефицијенте излазног напона $V_I[k]$ у комплексном облику.

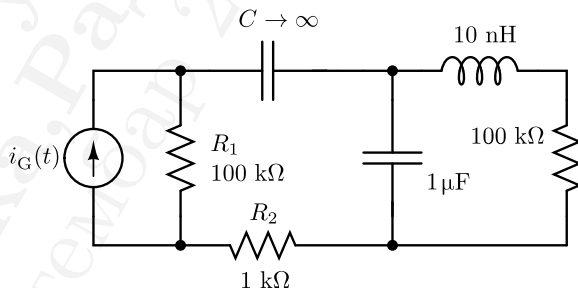


Слика 69.1

РЕЗУЛТАТ

Тражени спектрални коефицијенти су $V_I[k] = -\frac{1}{2}\alpha^{|k|}k\omega RCV_m$.

70. У колу са слике позната је струја струјног генератора у дата облику $i_G(t) = I_m(1 + \cos(\omega_0 t) \sin^2(\omega_0 t))$, где су $I_m = 1$ [mA] и $\omega_0 = 200\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$. (а) Одредити развој струје i_G у Фуријеов ред на основном периоду. (б) Израчунати средње снаге отпорника R_1 и R_2 . У колу је успостављен сложенопериодичан режим.



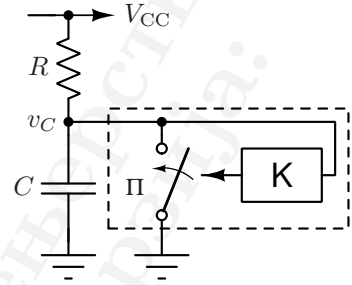
Слика 70.1

РЕЗУЛТАТ

(а) Тражени развој је $I[k] = I_m \left(\delta[k] - \frac{1}{8} (\delta[k-3] - \delta[k-1] - \delta[k+1] + \delta[k+3]) \right)$. (б)

Снаге отпорника су $P_{R_1} \approx 100$ [mW], и $P_{R_2} \approx \frac{1}{16}$ [mW].

71. У колу са слике познато је $R = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$, $C = 1 \text{ [}\mu\text{F]}$ и напон напајања $V_{CC} = 5 \text{ [V]}$. Систем „К“ управља идеалним прекидачем П на основу напона v_C . Прекидач П је иначе отворен, уколико напон v_C достигне вредност mV_{CC} , где је $0 \leq m \leq 1$ позната константа, контролни систем „К“ тренутно и *крайкошрајно* затвара прекидач. У почетном тренутку је $v_C(0) = 0$.



Слика 71.1

- (а) Одредити напон на кондензатору у зависности од времена, и нацртати његов временски дијаграм за $m = \frac{1}{2}$; и

- (б) одредити спектралне коефицијенте тог напона на његовом основном периоду у установљеном сложенопериодичном режиму.

РЕШЕЊЕ:

(а) Кондензатор се пуни струјом из извора напајања, напона V_{CC} , преко отпорника отпорности R . Израз за напон кондензатора у том случају је

$$v_C(t) = V_{CC} \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad (71.1)$$

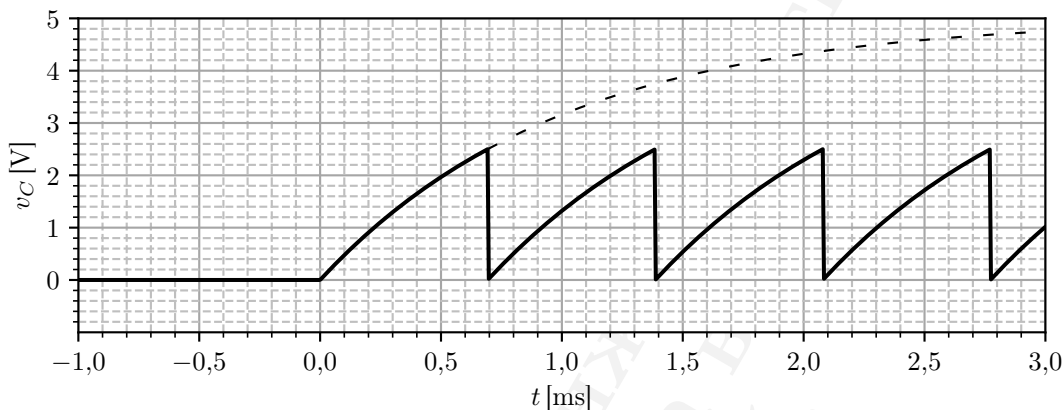
где је $\tau = RC$ временска константа посматраног система првог реда. Пуњење кондензатора траје све док је $v_C(t) < mV_{CC}$. У граничном случају је, $v_C(T) = mV_{CC}$, одатле се може одредити тренутак T када се први пут затвара прекидач. Има се резултат

$$V_{CC} \left(1 - e^{-T/\tau}\right) = mV_{CC} \Rightarrow \ln(1 - m) = -\frac{T}{\tau} \Rightarrow T = \tau \ln \left(\frac{1}{1 - m}\right). \quad (71.2)$$

Након затварања прекидача је $v_C(T^+) = 0$, односно, краткотрајно затварање идеалног прекидача у потпуности растеређује кондензатор, након чега се пређашњи процес понавља. Односно, процес описан изразом (71.1) у домену $0 < t < T = \tau \ln \left(\frac{1}{1 - m}\right)$, представља основни период напона на кондензатору.

Уколико се замене дате вредности има се да је временска константа $\tau = 1 \text{ [ms]}$, и да је $T = \tau \ln 2 \approx 0,69 \text{ [ms]}$. Тражени временски дијаграм приказан је на слици 71.2. На истом дијаграму, испрекиданом линијом приказан је и продужетак дијаграма првобитног пуњења кондензатора – који илуструје да би у недостатку прекидача тај напон асимптотски растао до напона напајања.

(б) Развој у Фуријеов ред може се поједноставити применом особине суперпозиције $\mathcal{FS}\{v_C(t)\} = \mathcal{FS}\left\{V_{CC} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right\} = V_{CC} \left(\mathcal{FS}\{1\} - \mathcal{FS}\left\{e^{-t/\tau}\right\}\right) = V_{CC} \left(\delta[k] - \mathcal{FS}\left\{e^{-t/\tau}\right\}\right)$. Развој преосталог члана, експоненцијалног сигнала, у Фуријеов ред може се обавити по



Слика 71.2: Пример временског дијаграма за $m = \frac{1}{2}$, $V_{CC} = 5$ [V].

дефиницији³⁴, за $\omega_F = \omega_0$ решавањем интеграла³⁵

$$\mathcal{FS}\{e^{-t/\tau}\} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-t/\tau} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-(jk\omega_0 + 1/\tau)t} dt = -\frac{e^{-\left(jk\omega_0 T + T/\tau\right)} - 1}{jk\omega_0 T + T/\tau}. \quad (71.3)$$

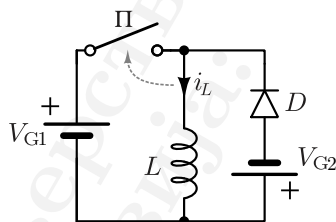
Приметимо да је $e^{-(j2\pi k + T/\tau)} = e^{j2\pi k} + 1 - m = 2 - m$, па се коначно има: $\mathcal{FS}\{e^{-t/\tau}\} = \frac{m-1}{j2\pi k - \ln(1-m)}$. Коначно, добија се да је развој траженог сигнала у Фуријеов ред дат изразом $V_C[k] = V_{CC} \left(\delta[k] - \frac{m-1}{j2\pi k - \ln(1-m)} \right)$.

Представљени систем представља једно принципско решење за пројектовање осцилатора (тзв. *релаксациони осцилатор*). Променом границе укључења контролера који практично ресетује напон кондензатора, односно променом параметра m , мења се учестаност осциловања. Систем за контролу „K“ може се реализовати са једним операционим појачавачем који се понаша као компаратор, док је прекидач могуће реализовати као нпр. MOS транзистор.

³⁴Развој у Фуријеов ред по дефиницији $\mathcal{FS}\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_F t} dt$.

³⁵Користи се интеграл $\int e^{kx} dx = e^{kx}/k + C$.

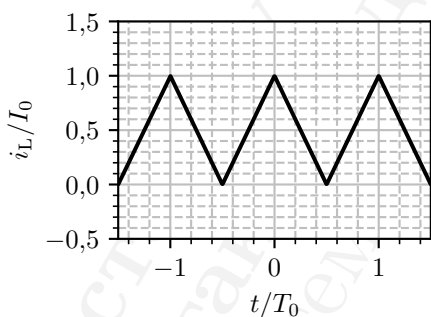
72. У колу са слике познато је $L = 100 \text{ } [\mu\text{H}]$ и $V_{G1} = V_{G2} = 10 \text{ } [\text{V}]$. Диода и прекидач су идеални. Прекидач се управља на основу тренутне вредности струје калема. Када струја калема достигне нулту вредност прекидач се затвара, а када струја калема достигне вредност $I_0 = 1 \text{ } [\text{A}]$ прекидач се отвара. У колу је успостављен периодичан режим. Одредити (а) струју калема $i_L = i_L(t)$ и скицирати њен дијаграм. (б) Одредити амплитудски спектар те струје, $|I_L[k]|$.



Слика 72.1

РЕЗУЛТАТ

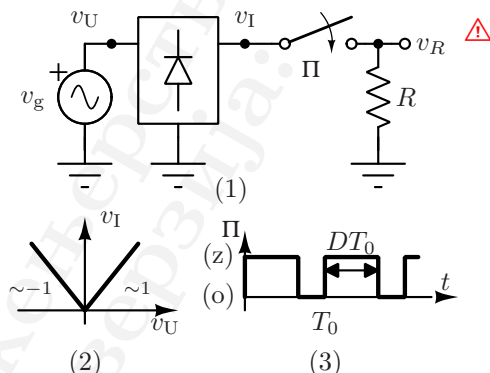
(а) Тражена струја је периодична са основним периодом $T_0 = 20 \text{ } [\mu\text{s}]$ на ком је дефинисана као $i_L = 1 \text{ } [\text{A}] \text{ tri} \left(\frac{2t}{T_0} \right)$ што је приказано на слици 72.2. (б) Амплитудски спектар струје калема је $|I[k]| = \frac{1}{2} \text{ } [\text{A}] \text{ sinc}^2 \left(\frac{k}{2} \right)$.



Слика 72.2: Временски дијаграм струје калема

73. У колу са слике (1) познат је напон побудног генератора $v_g = V_m \sin(\omega_0 t)$ где су $V_m = 12$ [V] и $\omega_0 = 100\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$, а прекидач је идеалан. Преносна карактеристика нелинеарног кола са диодама приказана је на слици (2). Прекидач се управља као што је приказано на слици (3) при чему је фактор испуне $0 < D < 1$ а T_0 је основни период напона v_I .

- (а) Скицирати напоне у тачкама v_U , v_I и v_R .
 (б) Одредити спектралне коефицијенте напона v_R , $V_R[k]$.



Слика 73.1

- (в) Укупна хармонијска изобличења сигнала (енг. *Total Harmonic Distortion*) рачунају се као $\text{THD} = 1 - \frac{P_1}{P}$, где је P_1 средња снага првог хармоника а P је средња снага комплетног сигнала. Израчунати THD када је $D = 50\%$.

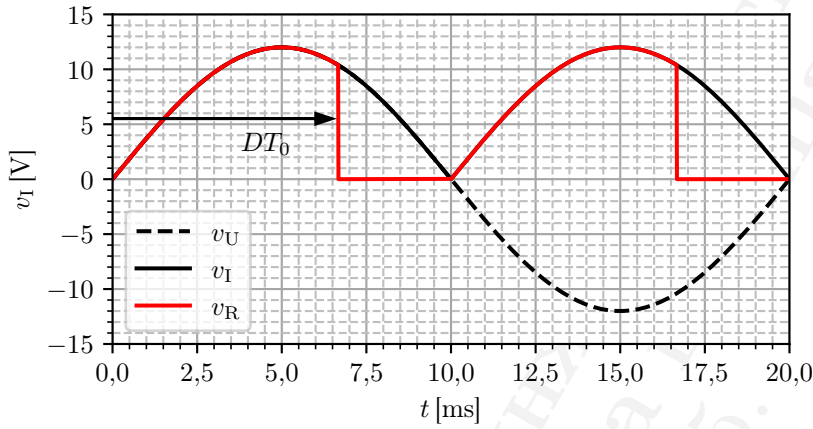
РЕШЕЊЕ: (а) На основу статичке преносне карактеристике кола са диодама је $v_I = |v_U| = V_m \sin(\omega_0 t)$. Период тог напона је двоструко мањи од периода напона v_U , па се време $T_0 = \frac{2\pi}{2\omega} = 10$ [ms]. Због начина на који се управља прекидачем, када је он затворен тада је $v_R = v_I$, а када је отворен тада је $v_R = 0$. На основу тога је, на основном периоду, $v_R = \begin{cases} V_m \sin(\omega_0 t) & , t < DT_0 \\ 0 & , \text{ иначе} \end{cases}$. Тражени временски дијаграми, на две периоде, дати су на слици 73.2.

(б) Спектрални коефицијенти напона могу се одредити на основу дефиниције, за основну учестаност $\omega_F = 2\omega_0$ према

$$V_I[k] = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{D\pi} v_R e^{-jk \overbrace{2\omega_0}^{\omega_F} t} d(\omega_0 t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{D\pi} V_m \sin(\omega_0 t) e^{-jk 2\omega_0 t} d(\omega_0 t) \quad (73.1)$$

Добијени интеграл може се решити применом технике парцијалне интеграције, или користећи се табличним резултатом Т.4.3 Сређивањем и израчунавањем граница интеграла налази се крајњи резултат

$$V_I[k] = V_m \frac{(\cos(\pi D) + j2k \sin(\pi D))e^{-j2\pi k D} - 1}{\pi(4k^2 - 1)} \quad (73.2)$$



Слика 73.2: Временски дијаграми напона у систему.

(в) Средња снага сигнала може се израчунати усредњавањем по времену $P = \frac{1}{T} \int_0^T v_R^2(t) dt$,

односно еквивалентно, усредњавањем по фази као $P = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} v_R^2(\omega t) d(\omega t)$, одакле се има

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{D\pi} V_m^2 \sin^2(\omega t) d(\omega t) = V_m^2 \frac{2\pi D - \sin(2\pi D)}{4\pi} = \frac{V_m^2}{4}.$$

Снага првог хармоника налази се урачунавањем снага компоненти спектра $V_R[1]$ и $V_R[-1]$, чиме се налази

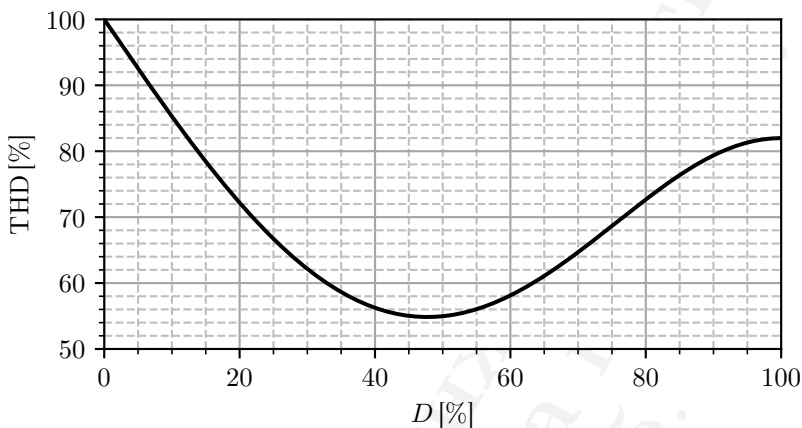
$$P_1 = |V_R[1]|^2 + |V_R[-1]|^2 = 2|V_R[1]|^2 = \frac{10V_m^2}{9\pi^2}. \quad (73.3)$$

Одакле се налази да је $\text{THD} \approx 55\%$.

Ради комплетности, нагласимо да се истим поступком, са сложенијим рачунањем (које је обављено рачунарским алатом), може се доћи до општег израза за THD у функцији фактора испуне D , у облику израза

$$\text{THD} = \frac{8 \left(\left(\frac{2 \sin(\pi D) \sin(2\pi D)}{3} + \frac{\cos(\pi D) \cos(2\pi D)}{3} - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{(2 \sin(\pi D) \cos(2\pi D) - \cos(\pi D) \sin(2\pi D))^2}{9} \right)}{\pi (\sin(2\pi D) - 2\pi D)} + 1. \quad (73.4)$$

Дијаграм дате мере у функцији фактора испуне приказан је на слици 73.3.



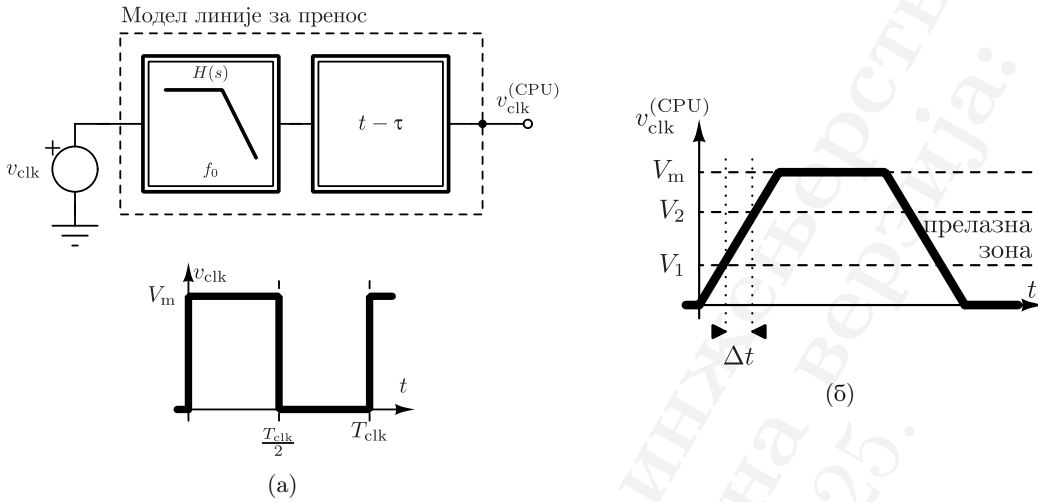
Слика 73.3: Уз коментар решења.

74. На слици 74.1a је представљена принципска шема система за генерисање и довођење сигнала такта до одговарајућег прикључка дигиталног процесора. Генератор такта је идеалан напонски генератор симетричне униполарне поворке правоугаоних импулса учестаности $f_{\text{clk}} = \frac{1}{T_{\text{clk}}} = 4$ [MHz] и амплитуде $V_m = 5$ [V]. Линија за пренос такта моделује се као каскадна веза идеалног блока за кашњење, кашњења $\tau = 125$ [ns], и идеалног филтра пропусника ниских учестаности, чија је фреквенцијска преносна карактеристика $H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$, где је ω_0 непознати параметар. Према спецификацији употребљеног процесора, при преласку напона такта са ниског на високи ниво, дозвољено је да у прелазној зони између $V_1 = 1,5$ [V] и $V_2 = 3,5$ [V], доведени сигнал такта проведе највише $\Delta t_{\text{max}} = 5$ [ns], као што је илустровано на слици 74.1b.

(а) Одредити развоје генерисаног сигнала такта, $v_{\text{clk}}(t)$, и сигнала такта на улазу у процесор $v_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}(t)$ у комплексан Фуријеов ред у зависности од параметра ω_0 . (б) Одредити коефицијенте развоја сигнала $\frac{dv_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}(t)}{dt}$ у комплексан Фуријеов ред. (в) Одредити параметар ω_0 тако да буде задовољена наведена спецификација датог процесора.

Напомена. Приликом прорачуна времена које сигнал такта проводи у прелазној зони, претпоставити да је нагиб сигнала такта $\frac{dv_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}(t)}{dt}$ практично константан и да има максималну вредност.

РЕШЕЊЕ



Слика 74.1

Генерисани сигнал такта јесте периодична поворка правоугаоних импулса. Спектар такве поворке, на основном периоду T_{clk} , на основу табличног резултата Т.5.2, је $V_{\text{clk}}[k] = (-j)^k \frac{V_m}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$. Модел линије за пренос сачињен је из каскадне везе идеалног филтра и линије за кашњење $T[k] = \text{rect}\left(\frac{k\omega_{\text{clk}}}{2\omega_0}\right) \cdot e^{-jk\omega_{\text{clk}}\tau} = \text{rect}\left(\frac{k\omega_{\text{clk}}}{2\omega_0}\right) \cdot (-1)^k$. Спектар напона на улазу у процесор онда је коначног облика

$$V_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}[k] = T[k] \cdot V_{\text{clk}}[k] = \frac{j^k V_m}{2} \text{rect}\left(\frac{k\omega_{\text{clk}}}{2\omega_0}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \quad (74.1)$$

(б) Применом правила извода³⁶ добија се резултат

$$\mathcal{FS}\left\{\frac{v_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}}{dt}\right\}[k] = \frac{j^{k+1} k\omega_{\text{clk}} V_m}{2} \text{rect}\left(\frac{k\omega_{\text{clk}}}{2\omega_0}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \quad (74.2)$$

(в) Због симетрије, током преласка кроз средину прелазне зоне, сигнал има максималан нагиб у тренутку $t = \tau$, будући да је и ивица сигнала за толико закашњена. По претпоставци из напомене са таквим нагибом нагибом треба да пређе целу прелазну зону за највише

³⁶Правило извода је $\mathcal{FS}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = jk\omega_0 \mathcal{FS}\{x(t)\}$

време Δt_{\max} . Односно треба да важи

$$\frac{v_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}}{dt}(\tau) > \frac{\Delta V}{\Delta t_{\max}} = 0,4 \left[\frac{\text{V}}{\text{ns}} \right] \quad (74.3)$$

Вредност извода у том тренутку потражује се на основу синтетичке релације³⁷ Фуријеовог реда као

$$\frac{v_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}}{dt}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{FS} \left\{ \frac{v_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}}{dt} \right\} [k] e^{jk\omega_{\text{clk}}\tau} = \mathcal{FS} \left\{ \frac{v_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}}{dt} \right\} [k] (-1)^k \quad (74.4)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k j^{k+1} k \omega_{\text{clk}} V_m}{2} \text{rect} \left(\frac{k \omega_{\text{clk}}}{2\omega_0} \right) \cdot \text{sinc} \left(\frac{k}{2} \right). \quad (74.5)$$

За израчунавање суме распишимо да је $k \text{sinc} \frac{k}{2} = k \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{\frac{k\pi}{2}}$, те приметимо да је

$$\sin \left(\frac{k\pi}{2} \right) = \begin{cases} (-1)^m, & k = 2m + 1 \\ 0, & k = 2m \end{cases}. \text{ Заменом добијених резултата у (74.5) и сређивањем по-}$$

моћу $(-1)^k j^{k+1} \Big|_{k=2m+1} = (-1)^{2m+1} j^{2m+2} = (-1)^m$, има се

$$\frac{v_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}}{dt}(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k=2m+1}}^{\infty} \frac{\omega_{\text{clk}} V_m}{\pi} \text{rect} \left(\frac{k \omega_{\text{clk}}}{2\omega_0} \right). \quad (74.6)$$

Величина под сумом је парна функција па се може одговарајућа³⁸ трансформација. До-бијена сума се онда може може средити изражавањем правоугаоног импулса у облику

$$\text{rect} \left(\frac{k \omega_{\text{clk}}}{2\omega_0} \right) = \begin{cases} 1, & k < \frac{\omega_0}{\omega_{\text{clk}}} \\ 0, & k > \frac{\omega_0}{\omega_{\text{clk}}} \end{cases}, \text{ што се може искористити за постављање горње границе}$$

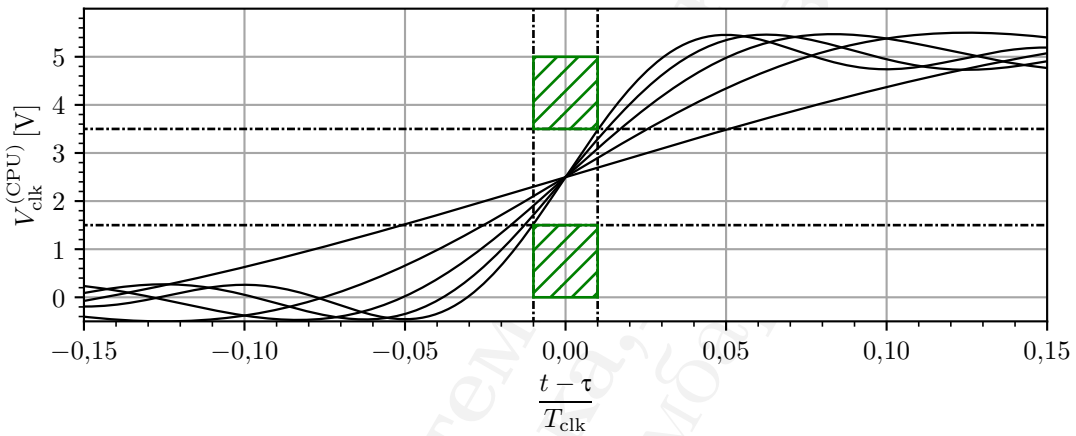
коначне суме: $\frac{v_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}}{dt}(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k=2m+1}}^{k < \omega_0 / \omega_{\text{clk}}} \frac{2\omega_{\text{clk}} V_m}{\pi}$. Број чланова добијене суме јесте M , број не-парних бројева између 0 и $\frac{\omega_0}{\omega_{\text{clk}}}$, а који има смисао броја непарних хармоника сигнала такта

³⁷Користи се у облику $x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_F \tau}$

³⁸Трансформација за парни сигнал $a[k]$ је $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k] = a[0] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a[k]$.

које пропушта филтар.

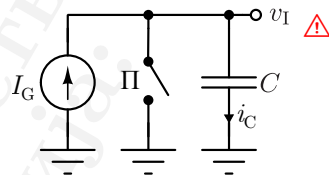
Одавде се има $\frac{dv_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}}{dt}(\tau) = M \frac{2\omega_{\text{clk}} V_m}{\pi}$, на основу услова из (74.3), заменом бројевних вредности налази се услов за број непарних хармоника које филтар треба да пропусти. Одавде се има услов да је $M = \frac{\pi}{2\omega_{\text{clk}} V_m} \frac{dv_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}}{dt}(\tau) > 12,5 \left[\frac{\text{ns}}{\text{V}} \right] \cdot 0,4 \left[\frac{\text{nV}}{\text{s}} \right] = 5$. Односно, филтар мора да пропусти *барем 5 непарних* хармоника побудног сигнала, а то су ω_{clk} , $3\omega_{\text{clk}}$, $5\omega_{\text{clk}}$, $7\omega_{\text{clk}}$, и $9\omega_{\text{clk}}$, односно, мора бити да је $\omega_0 > 9\omega_{\text{clk}}$, или $f_0 > 9f_{\text{clk}} = 36 \text{ [MHz]}$.



Слика 74.2

У овом задатку је илустровано, да је стрмина ивице правоугаоних импулса сразмерна броју хармоника које пропушта филтар. На слици 74.3 илустрован је резултат. Црвеним областима обележени су габарити унутар којих сигнал не сме да пролази, односно назначене су границе прелазне зоне по времењу и по напону. Нацртани су сигнали са 1–5 непарних хармоника, и на слици може да се види да су са најмање 5 непарних хармоника задовољени тражени габарити.

75. У систему са слике, позната је струја идеалног струјног генератора $I_G = 100 \text{ } [\mu\text{A}]$ и капацитивност $C = 1 \text{ } [\mu\text{F}]$, а прекидач Π се може сматрати идеалним. Прекидач је отворен, осим у тренуцима $t = kT$, $k \in \mathbb{Z}$, где је $T = 1 \text{ } [\text{ms}]$, када се *крајњо-шрајно* затвара.



Слика 75.1

- Одредити устаљене облике напона на излазу система $v_I(t)$ и струје кондензатора $i_C(t)$ према референтном смеру са слике, и скицирати временске дијаграме тих сигнала.
- Израчунати средњу снагу сигнала $v_I(t)$, средњу снагу коју улаже струјни генератор, P_{I_G} , и средњу вредност струје кондензатора $\overline{i_C}$.
- Одредити развоје сигнала $v_I(t)$ у комплексан и тригонометријски Фуријеов ред на основном периоду, $V_I[k]$, односно $A[k]$ и $B[k]$.

РЕШЕЊЕ

(а) Када је прекидач отворен, тада је $i_C = I_G$ па се онда на основу карактеристике кондензатора може писати

$$I_G = i_C = C \frac{dv_I}{dt}, \quad (75.1)$$

пошто је $v_C = v_I$. Одавде се онда интеграљењем обе стране карактеристике има

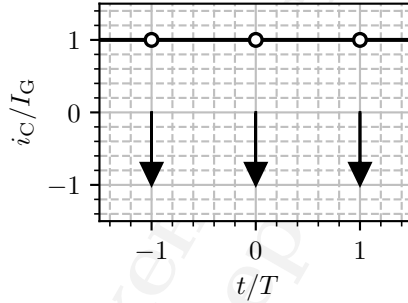
$$v_I = \frac{I_G}{C}t + K, \quad K = \text{const}, \quad (75.2)$$

при чему је константа K важећа у оквиру једног интервала док је прекидач отворен. Пошто се прекидач затвара у тренуцима $t = kT$ то је онда на основу резултата задатка 4 у тренуцима kT^+ кондензатор испразњен, односно је $v_I(t = kT^+) = 0$. На тај начин, закључује се да је излазни напон рампа, константног нагиба $\frac{I_G}{C} = 0,1 \left[\frac{\text{V}}{\text{ms}} \right]$, који се у тренуцима $t = kT$ „враћа“ на вредност 0, чиме формира тестерасти облик напона као што је приказано на слици 75.2а, где је амплитуда напона $V_m = \frac{I_G T}{C} = 100 \text{ } [\text{mV}]$. Као што је већ наглашено, струја кондензатора када је прекидач затворен износи $i_C = I_G$. У кратким тренуцима када је прекидач затворен, кондензатор се тренутно празни Дираковим импулсном струје којом приликом кроз његове прикључке протекне наелектрисање $Q = CV_m = 100 \text{ } [\text{nC}]$, што представља Дираков импулс чија је мера $-100 \text{ } [\text{nC}]$ у тренуцима kT , што је приказано на слици 75.2б. Аналитички, струја кондензатора се може записати као

$$i_C(t) = I_G(1 - T\text{Ш}_T(t)). \quad (75.3)$$



(а) Излазни напон.



(б) Струја кондензатора.

Слика 75.2: Тражени графици.

(б) Средња снага сигнала $v_I(t)$ може се израчунати према дефиницији у временском домену, на пример на основном периоду $0 < t < T$, помоћу (75.2), као

$$P_{v_I} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T v_I^2 dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \left(\frac{I_G t}{C} \right)^2 dt = \frac{1}{T} \frac{I_G^2}{C^2} \frac{T^3}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{I_G T}{C} \right)^2 = \frac{1}{300} [\text{V}^2] \quad (75.4)$$

(б) Снага струјног генератора може се израчунати помоћу средње вредности напона на излазу као

$$P_{I_G} = \overline{I_G \cdot v_I} = I_G \cdot \overline{v_I} = \frac{I_G V_m}{2} = 5 [\mu\text{W}]. \quad (75.5)$$

Средња вредност струје кондензатора може се наћи директно, или усредњавањем на основу карактеристике³⁹

$$\overline{i_C} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i_C dt = \frac{C}{T} \underbrace{(v(t-T) - v(t))}_{=0, \text{ због периодичности}} = 0. \quad (75.6)$$

(в) Тражени спектар може се одредити полазећи од спектра струје кондензатора, а који

³⁹ Добијени резултат да је у периодичном режиму средња струја кондензатора $\overline{i_C} = 0$, представља и еквивалентан исказ да је у усталином режиму једносмерна компонента струје кондензатора равна нули, еквивалентно кондензатор је отворена веза за сталне струје. Овај исказ такође има велику примену у Енергетској електроници где је познат и под именом ампер-секунд баланс.

се одређује на основу израза (75.3), одакле се има

$$I_C[k] = \mathcal{FS}\{i_C(t)\} = \mathcal{FS}\{I_G(1 - T\Psi_T(t))\} \quad (75.7)$$

$$= I_G \left(\mathcal{FS}\{1\} - T \underbrace{\mathcal{FS}\{\Psi_T(t)\}}_{\text{Задатак 66}} \right) = I_G(\delta[k] - 1). \quad (75.8)$$

Пошто важи карактеристика кондензатора (75.1), за одговарајуће спектре ће важити⁴⁰

$$V_I[k] = \frac{1}{jk\omega_0 C} I_C[k] = -\frac{I_G}{jk\omega_0 C}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{осим за } k = 0. \quad (75.9)$$

Члан $V_I[0]$ се може одредити као средња вредност сигнала, односно $V_I[0] = \frac{V_m}{2}$, па је коначно

$$V_I[k] = \begin{cases} \frac{I_G T}{2C}, & k = 0 \\ \frac{jI_G}{k\omega_0 C}, & k \neq 0 \end{cases} \quad (75.10)$$

Примећујемо да је добијени спектар чисто непаран (са изузетком члана $k = 0$) па ће све косинусне компоненте сигнала бити $A[k > 0] = 0$, док се синусне компоненте могу наћи као⁴¹

$$B[k > 0] = -2 \operatorname{Im}\{V_I[k]\} = -\frac{2I_G}{k\omega_0 C}, \quad (75.11)$$

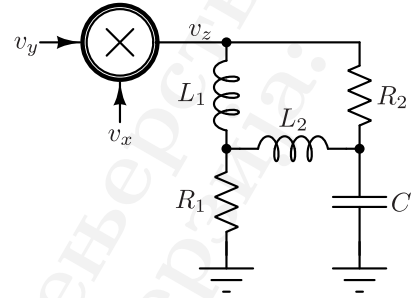
па је коначно $v_I(t) = \frac{I_G T}{2C} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2I_G}{k\omega_0 C} \sin(k\omega_0 t)$, што се може преуредити у једноставнији облик

$$v_I = \frac{I_G T}{C} \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin(k\omega_0 t) \right) \quad (75.12)$$

⁴⁰Применом својства дејства Фуријеовог реда на интеграл: $\int \mapsto \cdot \frac{1}{jk\omega_F}$.

⁴¹Видети и додаток S.

76. У колу са слике познато је $L_1 = L_2 \rightarrow \infty$, $R_1 = 2R_2 = 100 [\Omega]$ и $C \rightarrow \infty$. Употребљен је идеални множач (тзв. мешач), нелинеаран систем без меморије са два улаза и једним излазом, чија је карактеристика преноса одређена изразом $v_z = \frac{v_x \cdot v_y}{V_0}$ где је $V_0 = 1 [\text{V}]$. Познати су спектри улазних напона $V_x[k] = V_0(u[k+2] - u[k-3])$ и $V_y[k] = V_0(\delta[k+2] + \delta[k-2])$ чији су основни периоди једнаки. Израчунати средње снаге отпорника R_1 и R_2 .



Слика 76.1

РЕЗУЛТАТ

Снаге отпорника су $P_{R_1} = 40 [\text{mW}]$, и $P_{R_2} = 160 [\text{mW}]$.

2.2 Фуријеови редови дискретног сигнала

77. Дат је дискретан сигнал $x[n] = \cos\left(\frac{6\pi n}{17} + \frac{\pi}{3}\right)$. Одредити развој тог сигнала у дискретан Фуријеов ред на основном периоду.

РЕЗУЛТАТ: $X[k] = \frac{1}{2} \left(\exp\left(\frac{j\pi}{3}\right) \delta[k-3] + \exp\left(\frac{-j\pi}{3}\right) \delta[k+3] \right)$.

78. Нека је дат сигнал $x[n]$ чији је развој у дискретан Фуријеов ред $X[k] = \mathcal{FS}\{x[n]\}$. Одредити изразе за коефицијенте развоја у Фуријеов ред на истом периоду, сигнала (а) $\nabla x[n]$, и (б) $\Sigma x[n]$.

РЕЗУЛТАТ

(а) $\mathcal{FS}\{\nabla x[n]\} = (1 - e^{-j\Omega_F k}) X[k]$, (б) $\mathcal{FS}\{\Sigma x[n]\} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega_F k}} X[k]$

79. Одредити такав дискретан сигнал $x[n]$, са периодом $N = 6$ за који важе $\sum_{n=0}^5 x[n] = 2$ и

$\sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = 1$ такав да је његова средња снага минимална.

РЕЗУЛТАТ: $x[n] = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n$

80. Дата су два дискретна сигнала $x[n]$ и $y[n]$ чији су основни периоди $N_x = 2$ и $N_y = 3$ редом. Познати су спектри $\mathcal{FS}\{x[n]\} = X[k]$ и $\mathcal{FS}\{y[n]\} = Y[k]$ на основним периодима тих сигнала. Одредити развој сигнала $z[n] = x[n] + y[n]$ у Фуријеов ред над периодом $N_F = 6$.

РЕЗУЛТАТ: $Z[k] = X[0] + Y[0], 0, Y[1], X[1], Y[2], 0$

81. Нека је дат дискретан сигнал $x[n]$, чија је основна периода N . Полазећи од тог сигнала, два пута је одређен развој у Фуријеов ред на основном периоду $y[n] = \mathcal{FS}\{\mathcal{FS}\{x[n]\}\}$. Одредити $y[n]$.

РЕШЕЊЕ

По дефиницији развоја у дискретан Фуријеов ред, може се писати

$$\mathcal{FS}\{x[n]\}[k] = X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_F n}, \quad \Omega_F = \frac{2\pi}{N}, \quad (81.1)$$

па се поново на основу дефиниције има

$$\mathcal{FS}\{X[k]\}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-jm\Omega_F k}. \quad (81.2)$$

Заменом резултата (81.1) у (81.2) и сређивањем израза заменом редоследа сумирања добија се

$$\mathcal{FS}\{\mathcal{FS}\{x[n]\}\} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_F n}}_{X[k]} e^{-jm\Omega_F k} \quad (81.3)$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_F n} e^{-jm\Omega_F k} \quad (81.4)$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\Omega_F n} e^{-jm\Omega_F k} \quad (81.5)$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\Omega_F (n+m)} \quad (81.6)$$

Добијена сума у последњем кораку представља суму геометријске прогресије па се на сличан начин као и у задатку 66 налази

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\Omega_F (n+m)} = \begin{cases} N & , n = -m \\ 0 & , n \neq -m \end{cases}, \quad (81.7)$$

одакле се заменом у (81.6) коначно добија⁴² $\mathcal{FS}\{\mathcal{FS}\{x[n]\}\} = \frac{x[-n]}{N}$.

82. Нека су дати дискретни сигнали

$$x[n] = 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right), \quad y[n] = \sin^2\left(\frac{2\pi n}{8} + \frac{\pi}{3}\right), \quad z[n] = x[n] \cdot y[n], \quad \text{и} \quad w[n] = x[n] \otimes y[n]$$

- (а) Одредити основни период сигнала $x[n]$ и његов развој у Фуријеов ред на његовом основном периоду $X[k]$.
- (б) Одредити основни период сигнала $y[n]$ и његов развој у Фуријеов ред на његовом основном периоду $Y[k]$.
- (в) Применом резултата претходних тачака, и одговарајућих особина Фуријеових редова дискретних сигнала, одредити основни период сигнала $z[n]$ и његов развој у Фуријеов ред на његовом основном периоду $Z[k]$.

РЕШЕЊЕ: Простопериодична компонента сигнала је кружне учестаности $\Omega = \frac{2\pi}{3}$, па је одговарајући основни период тога сигнала $N_x = \frac{2\pi}{\Omega} = 3$. Дати сигнал се може расписати као $x[n] = 1 - \frac{2\pi n}{3} = 1 - \frac{z + z^{-1}}{2} = -\frac{1}{2}z^{-1} + 1 - \frac{1}{2}z$, где је $z = e^{j\Omega_x n}$. Будући да је развој у Фуријеов ред заправо степени ред по z , као $x[n] = \sum_{\langle N_x \rangle} X[k] z^k$, идентификацијом налазимо основни период спектра, чији је период $N_x = 3$, као

$$X[k] = -\frac{1}{2}\delta[k+1] + \delta[k] - \frac{1}{2}\delta[k-1]. \quad (82.1)$$

(б) На сличан начин као у претходној тачки, приметимо да је $\sin^2(\Omega_0 n) = \frac{1 - \cos(2\Omega_0 n)}{2}$. Пошто фаза не улази у разматрање, а важи $\Omega_0 = \frac{2\pi}{8}$, период овог сигнала износи $N_y = \frac{2\pi}{2\Omega_y} = 4$. Дати сигнал се онда може расписати као

$$x[n] = \frac{1 - \cos(\Omega_0 n)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z + z^{-1}}{2} \right) = -\frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z, \quad (82.2)$$

⁴²Добијени резултат представља множење и инверзију временске осе. У многим софтверским алатима, развој у Фуријеов ред се обавља применом Брзе Фуријеове трансформације (енг. *FFT – Fast Fourier Transform*) која је један од најважнијих алгоритама савременог доба са веома широким спектром примена у науци и инжењерству. У различитим имплементацијама, коефицијент испред суме, који је по конвенцији на овом курсу усвојен да је $\frac{1}{N_F}$, не мора бити такав. На пример, у програмском пакету **GNU Octave** функција **fft** рачуна овај ред без тог коефицијента. У том случају, константа која множи резултат ће бити другачија, али фундаментална је ствар, независна од ове конвенције, појава инверзије временске осе.

где је $z = e^{j\Omega_y n}$. На основу тога је основни период спектра овог сигнала

$$Y[k] = -\frac{1}{4}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k] - \frac{1}{4}\delta[k-1] + \underbrace{0 \cdot \delta[k-2]}_{\text{Наглашавање периода}}. \quad (82.3)$$

(в) Период сигнала $z[n]$ је $N_z = \text{NZS}(N_x, N_y) = 12$. Применом својства производа дискретног Фуријеовог реда може се писати $\mathcal{FS}\{x[n] \cdot y[n]\} = X[k] \otimes Y[k]$, којом приликом се Фуријеови редови морају рачунати на једнаком броју одбирака. У овом случају, спектре треба рачунати на $N_z = 12$ одбирака. Односно, спектре рачунате у тачкама (а) и (б) треба проширити на ту дужину. Подсетимо да се спектар сигнала рачуна на M основних периода уметањем $M - 1$ нула у спектар израчунат на основном периоду. Тако се добијају спектри сигнала израчунати на периоду 12, дати у табlici

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$X_{12}[k]$	$X[0]$	0	0	0	$X[1]$	0	0	0	$X[2]$	0	0	0
$Y_{12}[k]$	$Y[0]$	0	0	$Y[1]$	0	0	$Y[2]$	0	0	$Y[3]$	0	0

Спектар сигнала $z[n]$ се онда налази као

$$Z[k] = \sum_{i+j \equiv k \pmod{12}} X_{12}[i]Y_{12}[j]. \quad (82.4)$$

Директним израчунавањем одређује се коначни резултат.

3 Примене Фуријеових трансформација

3.1 Фуријеова трансформација континуалног сигнала

83. Одредити Фуријеову трансформацију комплексног сигнала $x(t) = \begin{cases} e^{j\omega_0 t} & , t < |T| \\ 0 & , t \geq |T| \end{cases}$, 

где су ω_0 и T познате реалне ненегативне константе. Полазећи од добијеног резултата, показати да је $\mathcal{FT}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$.

РЕШЕЊЕ: По дефиницији је $\mathcal{FT}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$. Заменом датог сигнала, вред-

ност T поставља границе интеграције, па је⁴³

$$\mathcal{FT}\{x(t)\} = \int_{t=-T}^T x(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{t>|T|} \underbrace{x(t)}_{=0} e^{-j\omega t} dt = \int_{t=-T}^T e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \quad (83.1)$$

$$= \int_{t=-T}^T e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt \quad (83.2)$$

$$= \frac{1}{j(\omega_0 - \omega)} e^{j(\omega_0 - \omega)t} \Big|_{t=-T}^T = \frac{e^{j(\omega_0 - \omega)T} - e^{-j(\omega_0 - \omega)T}}{j(\omega_0 - \omega)} \quad (83.3)$$

$$= \frac{2j \sin((\omega_0 - \omega)T)}{j(\omega_0 - \omega)} = \frac{2 \sin((\omega_0 - \omega)T)}{\omega_0 - \omega} \quad (83.4)$$

Да гранични процес представља Делта импулс може се показати на основу два дефинициона својства Дираковог импулса, односно показивањем нормираности $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$, и провером да је $\delta(t \neq 0) = 0$. У конкретно разматраном случају, гранични процес којим се од $x(t)$ тежи ка сигналу $e^{j\omega_0 t}$ би био $T \rightarrow \infty$, па се може писати $\mathcal{FT}\{e^{j\omega t}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 \sin((\omega_0 - \omega)T)}{\omega_0 - \omega}$. Приметимо да се добијени излаз може трансформисати у израз који садржи нормирани сигнал $\text{sinc}(t)$ помоћу поступка

$$\mathcal{FT}\{e^{j\omega t}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 \sin((\omega_0 - \omega)T)}{\omega_0 - \omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 \sin((\omega_0 - \omega)T)}{(\omega_0 - \omega)T} T = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \text{sinc}\left(\frac{(\omega_0 - \omega)T}{\pi}\right) \quad (83.5)$$

Покажимо да добијена форма задовољава наведена својства Делта импулса. Када је $\omega_0 \neq \omega$ тада је

$$\mathcal{FT}\{e^{j\omega t}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \text{sinc}\left(\frac{(\omega_0 - \omega)T}{\pi}\right) \lim_{T \rightarrow \infty} \sim \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\sin(\text{const } T)}^{\text{ограничена}}}{\text{const } T} \sim \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0. \quad (83.6)$$

Покажимо и да је интеграл добијене функције по параметру ω конвергира када $T \rightarrow \infty$,

⁴³ Користи се таблични интеграл $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$, као и идентитет $e^{jx} - e^{-jx} = j2 \sin(x)$

односно

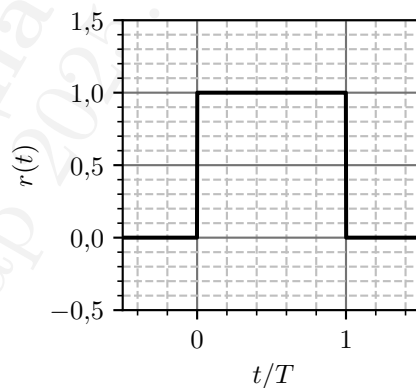
$$\int_{\omega=-\infty}^{\infty} 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega_0 - \omega)T}{\pi}\right) d\omega = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{\pi}\right) \underbrace{\frac{\pi}{T} d\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{\pi}\right)}_{d\omega} = 2\pi, \quad (83.7)$$

којом приликом су искоришћена парност, $\operatorname{sinc}(x) = \operatorname{sinc}(-x)$, и нормираност $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(x) dx =$

1. На основу резултата (83.7) и (83.6), може се тврдити да је $\mathcal{FT}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, што је требало и показати.

84. На слици 84.1 приказан је правоугаони импулс јединичне амплитуде ширине T , са почетком у нули. Одредити Фуријеову трансформацију тог сигнала.

РЕШЕЊЕ: Дати сигнал се може записати у облику $x(t) = u(t) - u(t - T)$. Применом особине померања у времену Фуријеове трансформације из додатка S, и табличног резултата Т.6.3, има се резултат $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) - \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega} - \pi e^{-j\omega T}\delta(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} + \pi \underbrace{(1 - e^{-j\omega T})}_{=0 \text{ за } \omega=0} \delta(\omega)$, где је у последњем кораку примењено својство еквиваленције Дираковог импулса. Коначно је $X(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$



Слика 84.1

85. Континуални сигнал $x(t) = e^{-at}u(t)$, где је $a > 0$ позната константа, доводи се на филтар пропусник ниских учестаности као на слици. Амплитудска фреквенцијска карактеристика филтра је $|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, где је $\omega_0 > 0$ гранична учестаност тог филтра. Одредити израз за енергију сигнала $y(t)$ на излазу филтра, W_y . Добијени резултат графички представити.

РЕШЕЊЕ

Одзив система у временском домену одређује се конволуцијом као $y(t) = x(t) * h(t)$, применом својства Фуријеове трансформације о конволуцији из додатка S има се veza $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$, где су $Y(j\omega) = \mathcal{FT}\{y(t)\}$, $X(j\omega) = \mathcal{FT}\{x(t)\}$, и $H(j\omega) = \mathcal{FT}\{h(t)\}$.

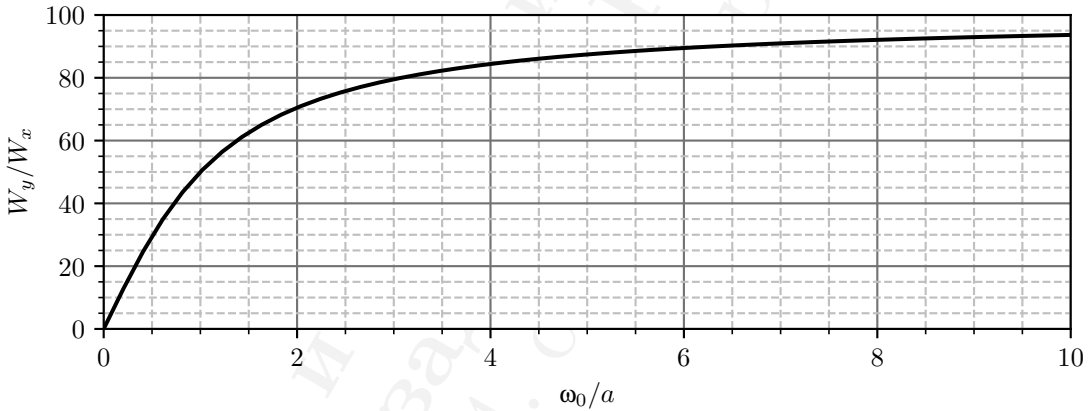
Фуријеова трансформација импулсног одзива филтра стога се назива и *функцијом преноса* филтра.

Амплитудски спектар представља модул Фуријеове трансформације, а амплитудска фреквенцијска карактеристика модул функције преноса па је $|Y(j\omega)| = |X(j\omega)| \cdot |H(j\omega)|$. На основу Парсевалове теореме за Фуријеову трансформацију континуалног сигнала (S.15) је

$$W_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y^2(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega. \quad (85.1)$$

На основу датог израза има смисла величину $|Y(j\omega)|^2$ назвати и *спектралном густином енергије* датог сигнала. На основу табличне трансформације Т.6.12 је $X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$, па се за спектралну гуштину снаге излазног сигнала може писати⁴⁴

$$|Y(j\omega)|^2 = |X(j\omega)|^2 \cdot |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{a^2 + \omega^2} \cdot \begin{cases} 1, & \omega < \omega_0 \\ 0, & \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (85.2)$$



Слика 85.1: Уз решење задатка.

⁴⁴ Користе се идентитети $|z/v| = |z|/|v|$, $(z, v \in \mathbb{C})$ и $|a + jb|^2 = a^2 + b^2$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

Тражени резултат добија се заменом у 85.1 и применом табличног интеграла⁴⁵

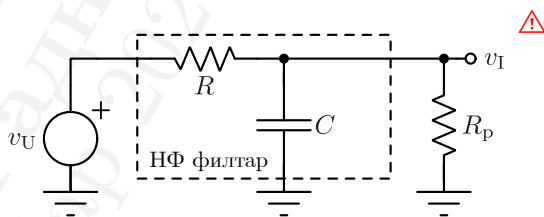
$$W_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi a} \int_{\omega=0}^{\omega_0} \frac{1}{1 + (\omega/a)^2} d(\omega/a) = \frac{1}{\pi a} \arctan\left(\frac{\omega_0}{a}\right) \quad (85.3)$$

Приметимо да је у случају $\omega_0 \rightarrow \infty$ онда $H(j\omega) = 1$, односно, $Y(j\omega) = X(j\omega)$. Природно, бесконачно широк НФ филтар пропушта све учестаности, па је погодно резултат (85.3) изразити у облику

$$W_y = \underbrace{\frac{1}{2a}}_{W_x} \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\omega_0}{a}\right). \quad (85.4)$$

Добијени резултат се онда смислено може графички представити како је приказано на слици 85.1.

86. У електричном колу са слике приказан је нископропусни филтар (НФ) за који је познато $R = 60 \text{ } [\Omega]$, и $C = \frac{5}{3} \text{ } [\text{mF}]$, а који је оптерећен резистивним потрошачем отпорности $R_p = 20 \text{ } [\Omega]$. На улазу филтра прикључен је идеални напонски генератор чији је напон облика $v_U(t) = V_0 e^{-t/\tau} u(t)$, где су $V_0 = 64 \text{ } [\text{V}]$ и $\tau = 25 \text{ } [\text{ms}]$. У почетном тренутку кондензатор је неоптерећен.



Слика 86.1

- Одредити преносну функцију система $H(s) = \frac{V_I(s)}{V_U(s)}$, $s = j\omega$.
- Израчунати граничну учестаност оптерећеног нископропусног филтра ω_f , као $|H(j\omega_f)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |H(j\omega)|_{\max}$.
- Применом Парсевалове теореме израчунати укупну енергију предату потрошачу у интервалу времена $0 \leq t < \infty$

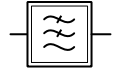
РЕЗУЛТАТ: Задатак се може решити применом Тевененове теореме, у односу на кондензатор. Том приликом је $v_T = \alpha_T v_U$ и $R_T = R \parallel R_p = 15 \text{ } [\Omega]$, где је $\alpha_T = \frac{R_p}{R + R_p} = \frac{1}{4}$. Пре-

носна функција је $H(s) = \frac{\alpha_T}{R_T C s + 1} = \frac{\frac{R_p}{R + R_p}}{(R \parallel R_p) C s + 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(25 \text{ } [\text{ms}]) s + 1}$. (б) Гранична

⁴⁵Таблични интеграл који се користи је $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$.

учестаност филтра је $\omega_f = 40 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$. (в) Укупна енергија ослобођена на потрошачу налази се Парсеваловом теоремом и износи $W_p = \frac{1}{R_p} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |H(j\omega) V_U(j\omega)|^2 d\omega = \frac{V_0^2 \alpha_1^2 \tau^2}{2(R_T C + \tau) R_p} = 128 \text{ [mJ]}$.

87. Фреквенцијска карактеристика идеалног филтра пропусника ниских учестаности је $H(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < \omega_0 \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$. Одредити импулсни одзив тог филтра.



Слика 87.1

РЕШЕЊЕ

Дата функција преноса може се записати као правоугаони прозор полуширине ω_0 , у облику $\text{rect}_{\omega_0}(\omega)$. Такав правоугаони прозор може се изразити помоћу јединичног правоугаоног прозора коначно $\text{rect}_{\omega_0}(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$. Помоћу табличне трансформације Т.6.6 и особине скалирања аргумента⁴⁶ може се писати

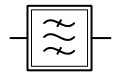
$$\mathcal{FT}\{\text{sinc}(t)\} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \Rightarrow \mathcal{FT}\{a \text{sinc}(at)\} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right) \quad (87.1)$$

$$a = \frac{\omega_0}{\pi} \Rightarrow \mathcal{FT}\left\{\frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{\pi}\right)\right\} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) = \text{rect}_{\omega_0}(\omega) \quad (87.2)$$

$$h(t) = \mathcal{FT}^{-1}\{\text{rect}_{\omega_0}(\omega)\} = \frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{\pi}\right), \quad (87.3)$$

што је требало и одредити.

88. Фреквенцијска карактеристика идеалног филтра пропусника опсега учестаности је $H(j\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega_0 < |\omega| < 3\omega_0 \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$. Одредити импулсни одзив тог филтра.



Слика 88.1

РЕШЕЊЕ

Фреквенцијска карактеристика састоји се од два правоугаона прозора полуширине ω_0 центриране на кружним учестаностима $\pm 2\omega_0$, што се може записати као

$$H(j\omega) = \text{rect}_{\omega_0}(\omega - 2\omega_0) + \text{rect}_{\omega_0}(\omega + 2\omega_0). \quad (88.1)$$

⁴⁶ $\mathcal{FT}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right);$

Добијена померања у учестаности могу се изразити конволуцијом са одговарајућим Дираковим импулсима одакле се може писати

$$H(j\omega) = \text{rect}_{\omega_0}(\omega) * (\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)). \quad (88.2)$$

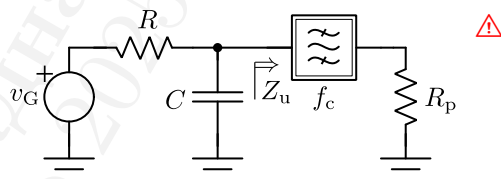
Инверзна Фуријеова трансформација одређује се применом теореме о конволуцији по учестаности⁴⁷, одакле се има

$$h(t) = \underbrace{2\pi \mathcal{FT}^{-1}\{\text{rect}_{\omega_0}(\omega)\}}_{\text{Задатак 87}} \cdot \underbrace{\mathcal{FT}^{-1}\{\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)\}}_{\text{Таблица, Т.6.8: } \frac{1}{\pi} \cos(2\omega_0 t)} \quad (88.3)$$

$$= 2\pi \frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{\pi}\right) \cdot \frac{1}{\pi} \cos(2\omega_0 t) = \frac{2\omega_0}{\pi} \cos(2\omega_0 t) \text{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{\pi}\right), \quad (88.4)$$

што је и требало одредити.

89. У колу са слике познато је $R = 25 [\Omega]$ и $C = \frac{1}{\pi} [\mu\text{F}]$. Напон побудног генератора је $v_G = \Phi_0 \text{Ш}_T(t)$, где су $T = 100 [\mu\text{s}]$ и $\Phi_0 = 1 [\mu\text{Wb}]$. У колу је употребљен и идеалан филтар пропусник опсега учестаности чија су централна учестаност $f_c = 20 [\text{kHz}]$, ширина пропусног опсега $\Delta f = 1 [\text{kHz}]$ и улазна импеданса $Z_u \rightarrow \infty$.



Слика 89.1

- Одредити амплитудски спектар сигнала $v_X(t)$ и скицирати га.
- Одредити напон на пријемнику $R_p = 50 [\Omega]$ у временском домену $v_p(t)$, и израчунати средњу снагу која се на њему ослобађа.

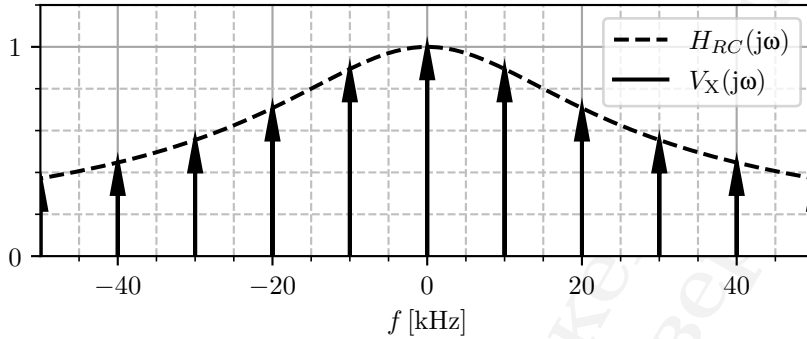
РЕШЕЊЕ

Фуријеова трансформација побудног сигнала, може се одредити помоћу развоја у Фуријеов ред из задатка 66, $\mathcal{FS}\{\text{Ш}_T(t)\} = \frac{1}{T}$, и применом везе Фуријеовог реда и трансформације периодичног сигнала⁴⁸, у облику

$$\mathcal{FT}\{v_G\} = V_g(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\Phi_0}{T}}_{\mathcal{FS}\{v_G\}} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \Phi_0 \text{Ш}_{\omega_0}(\omega), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (89.1)$$

⁴⁷ $\mathcal{FT}\{x(t) \cdot y(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$

⁴⁸ Из додатка S, $X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$



Слика 89.2: Дијаграм функције преноса RC кола, и амплитудски спектар $|V_X(j\omega)|$

Такав побудни сигнал побуђује RC коло па се одзив може наћи множењем спектра. Функција преноса RC кола налази решавањем кола у комплексном домену, као разделник две комплексне импедансе, на основу чега је

$$V_X(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} V_G(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{j\omega RC + 1}}_{H_{RC}(j\omega)} V_G(j\omega) = \frac{\omega_0 \Phi_0}{j\omega RC + 1} \text{III}_{\omega_0}(\omega) \quad (89.2)$$

Тражени дијаграм представљен је на слици 89.2. На истој слици приказана је и функција преноса RC кола $H_{RC}(j\omega)$ која „обликује“ периодичну поворку импулса која представља спектар побудног напона $v_G(t)$.

(б) Спектар напона на потрошачу одређује се множењем спектра $V_X(j\omega)$ са преносном функцијом идеалног филтра пропусника опсега учестаности⁴⁹ $G(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega - \omega_c| < \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$.

Пошто је пропусни опсег филтра довољно узак тако да може обухватити највише један хармоник улазног сигнала (јер јер $\Delta\omega < \omega_0$), филтар селекује само простопериодична компонента на централној учестаности филтра, чиме се има

$$V_X(j\omega)G(j\omega) = \frac{\omega_0 \Phi_0}{j\omega RC + 1} \text{III}_{\omega_0}(\omega) \cdot \begin{cases} 1 & , |\omega - \omega_c| < \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases} \quad (89.3)$$

$$= \frac{\omega_0 \Phi_0}{1 + j2\omega_0 RC} \delta(\omega - 2\omega_0) + \frac{\omega_0 \Phi_0}{1 - j2\omega_0 RC} \delta(\omega + 2\omega_0), \quad (89.4)$$

⁴⁹ Централна учестаност и пропусни опсег изражени су као кружне учестаности, $\omega_c = 2\pi f_c$ и $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$.

при чему је искоришћено својство одабирања Дираковог импулса. Заменом датих бројних вредности налази се $2\omega_0 RC = 1$ па се добијени израз може уредити у одговарајући облик табличних трансформација

$$V_p(j\omega) = 20\pi \text{ [mV]} \left(\underbrace{\frac{1}{1+j}}_{\frac{1-j}{2}} \delta(\omega - 2\omega_0) + \underbrace{\frac{1}{1-j}}_{\frac{1+j}{2}} \delta(\omega + 2\omega_0) \right) \quad (89.5)$$

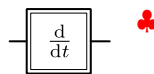
$$= 10 \text{ [mV]} \left[\underbrace{\pi(\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0))}_{\text{T.6.8 : } \cos(2\omega_0 t)} + j\pi(\delta(\omega + 2\omega_0) - \delta(\omega - 2\omega_0)) \right], \quad (89.6)$$

T.6.9 : $\sin(2\omega_0 t)$

па је онда коначно⁵⁰ $v_p(t) = 10\sqrt{2} \text{ [mV]} \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$. Тражена снага потрошача онда се може израчунати као $P_p = \frac{V_p^2}{2R_p} = 2 \text{ [}\mu\text{W]}$, где је V_p амплитуда простопериодичног напона.

Систем илустрован у овом задатку може се користити за умножавање учестаности. Полазећи од прецизног осцилатора познате учестаности тај сигнал се може пропустити кроз неки нелинеарни систем чиме ће се добити богат фреквенцијски садржај излазног сигнала. Ускопојасним филтрирањем неког од тих хармоника, може се добити прецизан сигнал на вишој учестаности. На пример, генерисањем сигнала на учестаности 100 [MHz] филтрирањем десетог хармоника добија се сигнал учестаности 1 [GHz]. Овај принцип користи се код неких појачавача и генератора сигнала на високим учестаностима.

90. Одредити функцију преноса $H(j\omega)$ диференцијатора чија је шематска ознака приказана на слици.



Слика 90.1

РЕШЕЊЕ

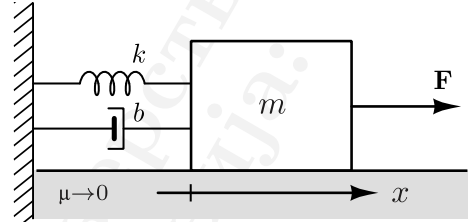
Преносна функција диференцијатора одређује се Фуријеовом трансформацијом његовог импулсног одзива $h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$, која се може одредити применом веома важног правила о изводу⁵¹,

$$H(j\omega) = \mathcal{FT}\{h(t)\} = \mathcal{FT}\left\{\frac{d\delta(t)}{dt}\right\} = j\omega \underbrace{\mathcal{FT}\{\delta(t)\}}_{=1, \text{ T.6.2}} = j\omega \quad (90.1)$$

⁵⁰ Користи се $A \sin(x) + B \cos(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(x - \arctg \frac{B}{A}\right)$.

⁵¹ Дејство о изводу Фуријеове трансформације, $\mathcal{FT}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)$

92. У механичком систему са слике блок масе m може да клиза по подлози без трења. Блок је везан за непокретан зид опругом коефицијента крутости k , и амортизером коефицијента пригушења b . Побуда посматраног система је алгебарски интензитет принудне силе $\mathbf{F}(t) = F(t) \cdot \mathbf{i}_x$. Одзив система $x(t)$ је отклон блока у односу на равнотежни положај $x_0 = 0$.



Слика 92.1

- Одредити функцију преноса овог система.
- Одредити кружну учестаност ω простопериодичне побуде $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ тако да амплитуда осцилација колица буде максимална применом Фуријеове трансформације.

РЕЗУЛТАТ

- Функција преноса посматраног система је $H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega b}$.
- Учестаност при којој се остварује максимална амплитуда осциловања колица је $\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m}}$.

3.2 Фуријеова трансформација дискретног сигнала

93. Нека је дат дискретан сигнал који представља правоугаони прозор полуширине N , ♣

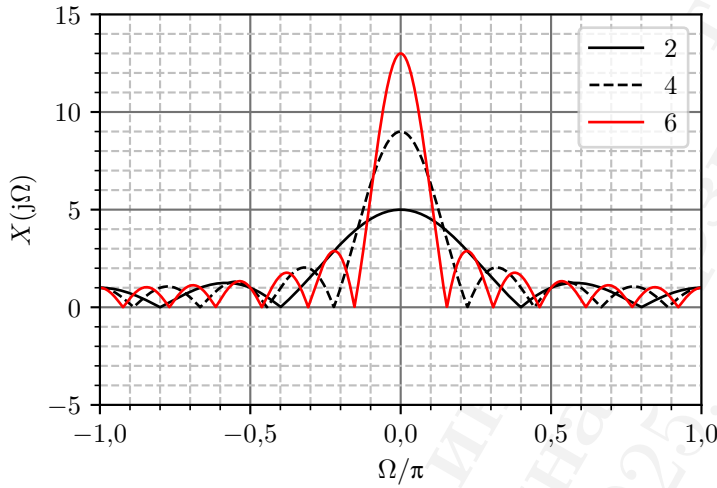
$$x[n] = \text{rect}_N[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & |n| > N \end{cases}.$$

- Одредити и скицирати амплитудски спектар тога сигнала $|X(j\Omega)|$.
- Уколико се ширина главног лука дефинише као растојање $\Delta\Omega$ између две нуле функције најближе максимуму модула функције. Одредити ширину главног лука.

РЕШЕЊЕ: Дискретна Фуријеова трансформација сигнала $x[n]$ се може одредити по дефиницији као $X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$, где је $z = e^{j\Omega}$. Заменом датог облика сигнала у дефиницију има се⁵²

$$X[j\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}_N[n]z^{-n} = \sum_{n=-N}^N z^{-n} = \frac{z^{-(-N)} - z^{-(N+1)}}{1 - z} = \frac{z^N - z^{-N-1}}{1 - z}. \quad (93.1)$$

⁵²Користи се општији облик суме геометријске прогресије $\sum_{k=m}^n aq^k = a \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q}$.



Слика 93.1: Амплитудски спектар правоугаоног прозора за разне ширине N

Да бисмо даље упростили дати резултат, потребно је да израз у бројиоцу изразимо у облику

$$z^a(z^b - z^{-b}) = z^N - z^{-N-1} \quad (93.2)$$

$$z^{a+b} - z^{a-b} = z^N - z^{-N-1} \Rightarrow a+b = N \quad a-b = -N-1 \Rightarrow \quad (93.3)$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = N + \frac{1}{2}. \quad (93.4)$$

На основу чега поједностављујемо израз 93.1, помоћу идентитета $z^n - z^{-n} = j2 \sin(\Omega n)$, у облик

$$X(j\Omega) = \frac{z^{\frac{N+1}{2}}(z^{N+\frac{1}{2}} - z^{-(N+\frac{1}{2})})}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{N}{2}} - z^{-\frac{N}{2}})} \Rightarrow X(j\Omega) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\Omega)}{\sin(\frac{1}{2}\Omega)} \quad (93.5)$$

Добијена функција има облик познате *Дирихлеове функције* и као таква се може наћи у софтверским алатима под називима **drcl** или **diric**. За неколико различитих вредности полуширине прозора, $N \in \{2, 4, 6\}$, на слици 93.1 нацртани су амплитудски спектри на њиховом основном периоду. Максимална вредност амплитудског спектра постоји за $\Omega = 0$, када је на основу (93.5), $\max |X(0)| = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\Omega)}{\sin(\frac{1}{2}\Omega)} = 2N+1$, односно расте линеарно са ширином прозора.

(б) Максимална вредност постоји за $\Omega = 0$, а границе главног лука су на месту где су најближе нуле амплитудског спектра. То се дешава када је аргумент синусне функције у

бројиоцу једнак $\pm\pi$. На основу тога је

$$\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta\Omega}{2} = \pi \Rightarrow \Delta\Omega = \frac{2\pi}{N + \frac{1}{2}}. \quad (93.6)$$

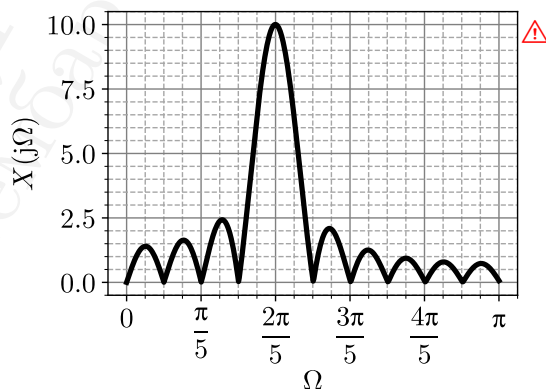
Дакле, као што се може видети на слици 93.1 ширина главног лука се сужава са повећањем ширине прозора.

94. Дискретан филтар, познат под називом *moving average* филтар, се реализује тако што се за одређивање текућег члана одзива усредње текућа и пређашњих четири вредности побуде. Одредити импулсни одзив овог филтра. Одредити (б) дискретне кружне учестаности Ω_0 ($0 \leq \Omega_0 \leq \pi$) које овај филтар у потпуности потискује (уклања).

РЕЗУЛТАТ

(а) $h[n] = \frac{1}{5}(u[n] - u[n-5])$. (б) Дискретне учестаности које филтар у потпуности уклања су $\Omega_0 \in \left\{\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$.

95. Дигиталним осцилоскопом снима се континуалан простопериодичан напон, $v = v(t)$, непознате амплитуде V_m и непознате учестаности f_0 . Сигнал је снимљен учестаношћу одабирања $f_s = 0,5$ [GHz] $> 2f_0$, чиме је у меморији осцилоскопа добијен дискретан представник мереног сигнала коначног трајања $x[n] = \begin{cases} \frac{v(nT_s)}{V_0}, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, где је $V_0 = 10$ [mV], а $2N + 1 \in \mathbb{N}$ је непозната дужина снимка. У обради добијеног сигнала на рачунару израчуната је Фуријеова трансформација дискретног сигнала $x[n]$.



Слика 95.1

Амплитудски спектар је приказан у опсегу дискретних кружних учестаности $0 \leq \Omega \leq \pi$ на слици.

- (а) Проценити учестаност f_0 улазног сигнала,
- (б) Проценити дужину снимка $2N + 1$.
- (в) Проценити амплитуду V_m улазног сигнала.

РЕШЕЊЕ: Нека је облик побудног напона $v(t) = V_m \cos(\omega t)$. Приметимо да се акција одсецања снимка коначног трајања може имитирати множењем са прозором коначне дужине у виду $x[n] = \underbrace{\frac{V_m}{V_0}}_{X_m} \underbrace{\cos(\omega T_s n)}_{\Omega_0} \cdot \text{rect}_N[n]$. Фуријеова трансформација датог сигнала може се добити помоћу табличног резултата

$$\mathcal{FT}\{\text{rect}_N[n]\} = \frac{\sin(\Omega(N+0,5))}{\sin(\Omega/2)}, \quad (\text{Видети и задатак 93}). \quad (95.1)$$

применом правила о модулацији дискретне Фуријеове трансформације $\mathcal{FT}\{x[n]\} = X(j\Omega) \Rightarrow \mathcal{FT}\{x[n] \cos(\Omega_0 n)\} = \frac{1}{2} (X(j(\Omega + \Omega_0)) + X(j(\Omega - \Omega_0)))$. Ипак, рачунање кружне конволуције може бити компликовано, па се као једноставнији начин показује примена теореме о модулацији дискретне Фуријеове трансформације, на основу чега се добија

$$X(j\Omega) = \frac{X_m}{2} \left(\frac{\sin((\Omega - \Omega_0)(N+0,5))}{\sin((\Omega - \Omega_0)/2)} + \frac{\sin((\Omega + \Omega_0)(N+0,5))}{\sin((\Omega + \Omega_0)/2)} \right) \quad (95.2)$$

(а) Приметимо сада да је синусна функција померила спектар правоугаоног импулса у десно и у лево за Ω_0 , израз (95.2). Одатле, природно је очекивати да се максимум спектра сада налази на дискретној учестаности Ω_0 . На основу тога, са графика читавамо резултат

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{5} \text{ па је } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\Omega}{2\pi T_s} = \frac{\frac{2\pi}{5}}{2\pi T_s} = \frac{1}{5T_s} = 100 \text{ [MHz]}.$$

(б) Претпоставимо, на основу облика спектра, да су Дирихлеове функције у спектру довољно размакнуте тако да за $\Omega \approx +\Omega_0$ важи $X(j\Omega) \approx \frac{X_m \sin((\Omega - \Omega_0)(N+0,5))}{2 \sin((\Omega - \Omega_0)/2)}$, (односно, занемаримо лик који постоји у негативним учестаностима). На основу тога, можемо очекивати нуле спектра, Ω_z , на местима где је $(\Omega_z - \Omega_0)(N+0,5) \approx \pi$, односно је $N \approx \frac{\pi}{\Omega_z - \Omega_0} - 0,5$. Са графика читавамо да је $\Omega_z - \Omega_0 \approx \frac{\pi}{10}$, па на крају закључујемо да је $N \approx 9,5$, па заокружујемо на ближу непарну вредност $N = 9$, па може да се процени да је снимак дугачак ≈ 19 одбирака.

(в) Познајући резултате претходних тачака, размотримо максималну вредност функције у тачки $\Omega \approx \Omega_0$. На том месту је $X(j\Omega_0) \approx \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_0} \frac{X_m \sin((\Omega - \Omega_0)(N+0,5))}{2 \sin((\Omega - \Omega_0)/2)} = \frac{X_m}{2} 2(N+0,5) \approx 19 \frac{X_m}{2}$. Са графика читавамо да је максимална вредност 10 па се онда има $X_m \approx 2 \frac{10}{19} \approx 1,09$. Одавде закључујемо да је $V_m = V_0 \cdot X_m \approx 10,9 \text{ [mV]}$.

96. Нека је дат дискретан сигнал $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$, чији је основни период $N_0 = 10$. Применом Фуријеове трансформације дискретног сигнала, скицирати развој датог сигнала у

Фуријеов ред $X[k] = \mathcal{FS}\{x[n]\}$ на дужини (а) $N_F = N_0$ и (б) $N_F = N_0 - 1$.

РЕШЕЊЕ: Веза између Фуријеове трансформације сигнала $x[n]$, дужине N_F , и Фуријеовог реда периодичног продужења истог сигнала, $\hat{x}[n]$, дата је у облику

$$\hat{X}[k] = \frac{1}{N_F} X(jk\Omega_F), \quad \Omega_F = \frac{2\pi}{N_F} \quad (96.1)$$

На сличан начин као у задатку 95, представимо дати сигнал као $x[n] = \cos(\Omega_0 n) \text{rect} \frac{N_F - 1}{2} [n]$.

Онда је Фуријеова трансформација тог сигнала (према резултату истог задатка) једнака

$$X(j\Omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((\Omega - \Omega_0)(N + 0,5))}{\sin((\Omega - \Omega_0)/2)} + \frac{\sin((\Omega + \Omega_0)(N + 0,5))}{\sin((\Omega + \Omega_0)/2)} \right), \quad N = \frac{N_F - 1}{2} \quad (96.2)$$

На основу резултата 96.1, добија се тражени Фуријеов ред

$$\hat{X}[k] = X(jk\Omega_F) = \frac{1}{2N_F} \left(\frac{\sin((k\Omega_F - \Omega_0)(N + 0,5))}{\sin((k\Omega_F - \Omega_0)/2)} + \frac{\sin((k\Omega_F + \Omega_0)(N + 0,5))}{\sin((k\Omega_F + \Omega_0)/2)} \right). \quad (96.3)$$

(а) Када је $N_F = N_0$, односно $\Omega_F = \Omega_0$, може се даље писати да је

$$\frac{\sin((k\Omega_F \pm \Omega_0)(N + 0,5))}{\sin((k\Omega_F \pm \Omega_0)/2)} = \frac{\sin\left((k\Omega_0 \pm \Omega_0) \frac{\pi}{\Omega_0}\right)}{\sin((k\Omega_0 \pm \Omega_0)/2)} = \frac{\sin((k \pm 1)\pi)}{\sin\left((k \pm 1) \frac{\Omega_0}{2}\right)}, \quad (96.4)$$

којом приликом знак „−“ одговара првом а знак „+“ другом сабирку у коначном изразу. Са друге стране, у интервалу од интереса $0 \leq k < N_0$ (основни период дискретног спектра) важи да је

$$\frac{\sin((k \pm 1)\pi)}{\sin\left((k \pm 1) \frac{\Omega_0}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\Omega_0} = N_0, & k \pm 1 = 0, \\ 0, & k \pm 1 \neq 0. \end{cases} \quad (96.5)$$

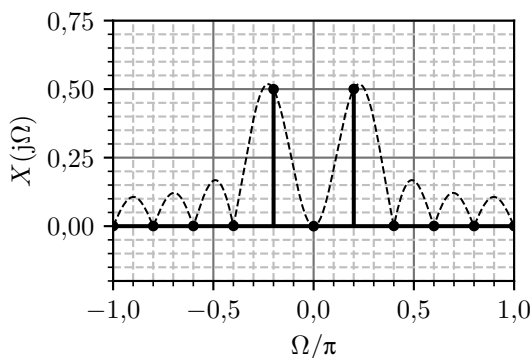
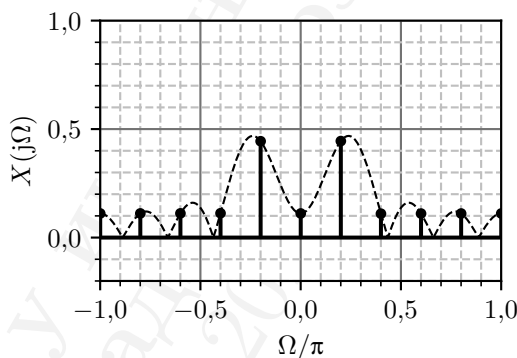
На основу добијеног резултата, наведени сабирак представља дискретан јединични импулс, $N_0\delta[k \pm 1]$, па је у овом случају тражени спектар

$$\hat{X}[k] = \frac{1}{2}\delta[k + 1] + \frac{1}{2}\delta[k - 1], \quad (96.6)$$

што је исти резултат који се може добити на сличан начин као и у задатку 77 на основу непосредне примене резултата $\sin(\Omega n) = \frac{1}{2}e^{j\Omega n} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega n}$.

(б) Сличан поступак се може спровести и у случају када $N_F \neq N_0$. У том случају, ипак, решење неће имати нуле на местима када је $k \pm 1 = 0$. Поједностављење добијеног израза препуштамо читаоцу.

Резултати (а) и (б) приказани су на сликама 96.1а и 96.1б. Појава која се може видети јесте *цурење спектра*, које је значајна последица јер се увек помоћу дигиталног рачунара може вршити само израчунавање Фуријеовог реда коначно дугачке секвенце.

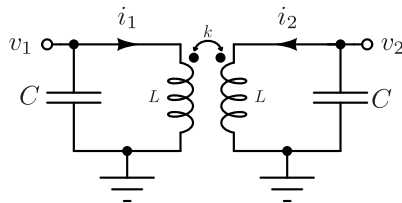
(а) $N_F = N_0$ (б) $N_F = N_0 - 1$

Слика 96.1: Графички приказ одабирања спектра.

4 Примене Лапласове трансформације

4.1 Системи диференцијалних једначина

- ⚠ **97.** У колу са слике познати су L , C и коефицијент магнетске спреге $k \ll 1$. У почетном тренутку су познати $i_2(0) = v_1(0) = v_2(0) = 0$ и $i_1(0) = I_0$. Поставити (а) систем интегро-диференцијалних једначина кола по струјама i_1 и i_2 . Помоћу Лапласове трансформације (б) одредити струју $i_1(t)$. Скицирати (в) временски дијаграм добијеног одзива $i_1(t)$ за $t > 0$.



Слика 97.1

РЕШЕЊЕ

Напоне v_1 и v_2 са једне стране повезују струјно-напонске карактеристике спрегнутих калемова дата је системом једначина

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (97.1)$$

$$v_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}, \quad (97.2)$$

При чему су, по услову задатка, $L_1 = L_2 = L$ и $L_{12} = L_{21} = kL$. Са друге стране, напон и струја су повезани према карактеристици кондензатора⁵³ при неусклађеним референтним смеровима резултата, у систем једначина спрегнутих калемова и даљим сређивањем добија се

$$-\frac{1}{C} \int_0^t i_1 d\tau = L \frac{di_1}{dt} + kL \frac{di_2}{dt}; \Rightarrow \frac{di_1}{dt} + k \frac{di_2}{dt} + \omega_0^2 \int_0^t i_1 d\tau = 0 \quad (97.3)$$

$$-\frac{1}{C} \int_0^t i_2 d\tau = kL \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt} \Rightarrow k \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \omega_0^2 \int_0^t i_2 d\tau = 0, \quad (97.4)$$

где је $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Добијени систем интегро-диференцијалних једначина описује понашање посматраног система

(б) Добијени систем једначина преводи се у фреквенцијски домен применом правила диференцирања уз почетни услов и правила интеграљења⁵⁴. Нека су $I_1 = I_1(s)$ и $I_2 = I_2(s)$, онда је

$$sI_1 - I_0 + ksI_2 + \frac{\omega_0^2}{s} I_1 = 0 \Rightarrow (s^2 + \omega_0^2)I_1 + ks^2 I_2 = I_0 s \quad (97.5)$$

$$ksI_1 - kI_0 + sI_2 + \frac{\omega_0^2}{s} I_2 = 0 \Rightarrow ks^2 I_1 + (s^2 + \omega_0^2)I_2 = kI_0 s \quad (97.6)$$

⁵³Полазећи од израза за струја што се може записати у интегралној форми као $v_1 = -\frac{1}{C} \int_0^t i_1 d\tau$, односно

$v_2 = -\frac{1}{C} \int_0^t i_2 d\tau$. Заменом у израз за струју кондензатора $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$, интеграљењем обе стране се добија коришћена напонско-струјна карактеристика.

⁵⁴Правило диференцирања $\mathcal{L} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = sX(s) - x(0^-)$; Правило интеграљења $\mathcal{L} \left\{ \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s)$.

Решавањем добијеног система једначина по непознатим струјама добијају се резултати:

$$I_1 = \frac{I_0 s (s^2 (k^2 - 1) - \omega_0^2)}{(s^2 (k - 1) - \omega_0^2) (s^2 (k + 1) + \omega_0^2)} \quad (97.7)$$

$$I_2 = -\frac{I_0 \omega_0^2 k s}{(s^2 (k - 1) - \omega_0^2) (s^2 (k + 1) + \omega_0^2)} \quad (97.8)$$

Добијени резултати за струје се растављају на парцијалне разломке у односу на променљиву s^2 (практично се уводи смена). Прво се раставља израз за струју I_1 на парцијалне разломке као

$$I_1 = \frac{A}{s^2(1-k) + \omega_0^2} + \frac{B}{s^2(1+k) + \omega_0^2} \quad (97.9)$$

$$\begin{cases} A = \frac{I_0 s (s^2 (k^2 - 1) - \omega_0^2)}{(s^2 (k - 1) - \omega_0^2) (s^2 (k + 1) + \omega_0^2)} \Big|_{s^2 = \frac{\omega_0^2}{k-1}} = -I_0 s \frac{1-k}{2} \\ B = \frac{I_0 s (s^2 (k^2 - 1) - \omega_0^2)}{(s^2 (k - 1) - \omega_0^2) (s^2 (k + 1) + \omega_0^2)} \Big|_{s^2 = -\frac{\omega_0^2}{1+k}} = I_0 s \frac{1+k}{2} \end{cases} \quad (97.10)$$

Коначно се добија поједностављен облик струје $I_1 = \frac{I_0}{2} \left(\frac{s}{s^2 + \frac{\omega_0^2}{k+1}} + \frac{s}{s^2 + \frac{\omega_0^2}{1-k}} \right)$, а

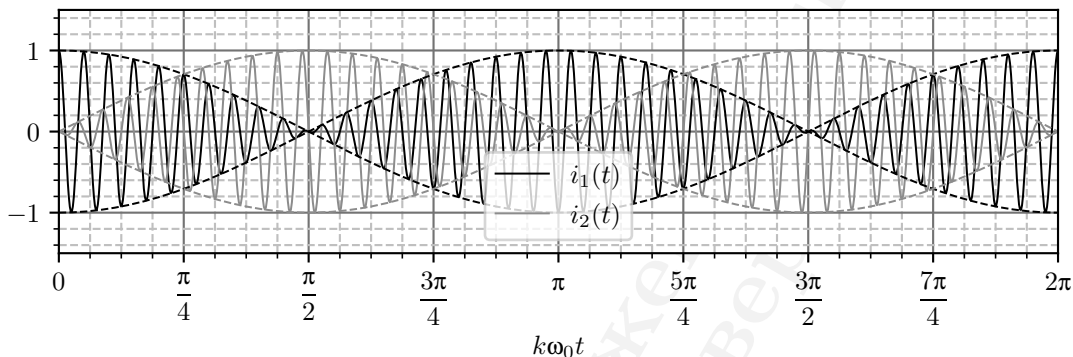
облик у временском домену се одређује непосредном идентификацијом табличних трансформација⁵⁵ $i_1(t) = \frac{I_0}{2} \left(\cos \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} t \right) + \cos \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} t \right) \right)$.

Друга струја се налази на сличан аналоган начина растављањем израза (97.8) на парцијалне разломке:

$$I_2 = \frac{A}{s^2(1-k) + \omega_0^2} + \frac{B}{s^2(1+k) + \omega_0^2} \quad (97.11)$$

$$\begin{cases} A = \frac{I_0 \omega_0^2 k s}{(s^2 (k - 1) - \omega_0^2) (s^2 (k + 1) + \omega_0^2)} \Big|_{s^2 = \frac{\omega_0^2}{k-1}} = I_0 s \frac{1-k}{2} \\ B = \frac{I_0 \omega_0^2 k s}{(s^2 (k - 1) - \omega_0^2) (s^2 (k + 1) + \omega_0^2)} \Big|_{s^2 = -\frac{\omega_0^2}{1+k}} = I_0 s \frac{1+k}{2} \end{cases} \quad (97.12)$$

⁵⁵Релевантна таблична трансформација је $\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$



Слика 97.2: Илустрација резултата.

Одакле се има резултат $I_2 = \frac{I_0}{2} \left(\frac{s}{s^2 + \frac{\omega_0^2}{k+1}} - \frac{s}{s^2 + \frac{\omega_0^2}{1-k}} \right)$. Примећујемо да се резултат за ову струју разликује само по знаку једног члана од комплексне струје I_1 , самим тим, резултат у временском домену је $i_2(t) = \frac{I_0}{2} \left(\cos \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} t \right) - \cos \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} t \right) \right)$.

(в) Уколико се по претпоставци усвоји да је $k \ll 1$ онда се може апроксимирати⁵⁶ да је $\frac{1}{\sqrt{1 \pm k}} = 1 \mp \frac{1}{2}k$. Погоднији облик струја се може добити изражавањем збира, односно разлике косинуса преко производа⁵⁷. има се приближни резултат:

$$i_1(t) \approx I_0 \cos(2\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t), \quad (97.13)$$

$$i_2(t) \approx -I_0 \sin(2\omega_0 t) \sin(k\omega_0 t). \quad (97.14)$$

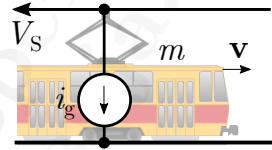
Добијени резултати приказани су на графику на слици 97.2. На слици пуном линијом су приказани одговарајући сигнали. Испрекиданим линијама приказане су анvelope тих сигнала, које илуструју процес „шетања“ енергије између једног и другог осцилаторног кола. Појава која је добијена дешава се у општем случају у систему спрегнутих осцилатора.

⁵⁶Користи се апроксимација првим чланом Тејлоровог развоја $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$, за $\alpha = -\frac{1}{2}$.

⁵⁷Одговарајући тригонометријски идентитети јесу $\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$, и $\cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$.

4.2 Преносне функције ЛТИ система

98. На слици 98.1 приказан је упрошћени модел електричног трамваја масе $m = 20$ [t] који се креће по равној прузи. Трамвај се напаја из мреже константног напона $V_S = 650$ [V]. Мотор трамваја се представља идеалним струјним генератором, струја је $i_g = i_g(t)$, која се може контролисати. Претпоставити да се сва снага коју мрежа предаје мотору, без губитака, претвара у механичку енергију посредством механичке силе. На трамвај делује и сила отпора ваздуха дата изразом $\mathbf{F}_{ov} = -b\mathbf{v}$, где је



Слика 98.1

$b = 150 \left[\frac{\text{N}}{\text{km/h}} \right]$ а $v = v(t)$ је брзина трамваја. Посматрамо систем чији једини улаз представља струја i_g а једини излаз тренутна брзина v трамваја. Ако је познато да се тај систем може представити као каскадна веза једног линеарног система чија је функција преноса $H(s)$ и једног нелинеарног система без меморије чија је статичка преносна карактеристика $f(u)$, одредити једно решење за $H(s)$ и $f(u)$. Објаснити да ли је посматрани систем линеаран. Скицирати временски дијаграм тренутне брзине трамваја ако је управљачка струја дата изразом $i_g = I_0 \text{rect} \left(\frac{t}{T} - 1 \right)$, где су $I_0 = 250$ [A] и $T = 20$ [s], а трамвај полази из мировања.

Помоћ. Снага механичке силе F која делује на круто тело које се креће брзином v равна је $P = Fv$.

РЕШЕЊЕ

(а) Укупна механичка снага која делује на трамвај разлика је снаге коју улаже генератор и снаге губитака на отпор ваздуха,

$$P_{\text{meh}} = P_g - P_{ov}. \quad (98.1)$$

Снагом генератора се управља индиректно помоћу управљачке струје, $P_g = V_S i_g$ док је снага губитака на рачун отпора ваздуха $P_{ov} = F_{ov} v = -bv^2$. Пошто се трамвај креће по равној прузи механички рад претвара се у кинетичку енергију па је $P_{\text{meh}} = \frac{dW_k}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$. Заменом свих одређених снага у израз добија се диференцијална једначина (98.1):

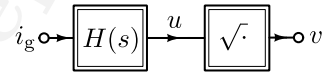
$$\frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = V_S i_g - bv^2 \quad (98.2)$$

Добијена диференцијална једначина по v није линеарна, али се може приметити да је линеарна по v^2 што користимо увођењем одговарајуће смене $u = v^2$, чиме се добија

диференцијална једначина на основу које се лако може наћи преносна функција $H(s) = \frac{U(s)}{I_g(s)}$ као

$$\frac{m}{2} \frac{du}{dt} = V_S i_g - bu \Big|_c \Rightarrow \frac{sm}{2} U(s) = V_S I_g(s) - bU(s) \Rightarrow H(s) = \frac{V_S}{\frac{m}{2}s + b} \quad (98.3)$$

Одговарајућа смена се може третирати као нелинеарни систем без меморије, па је тако у целини дати систем представљен каскадном везом линеарног система функције преноса $H(s)$ и нелинеарног система без меморије статичке преносне карактеристике $f(u) = \sqrt{u}$ као на слици 98.2.



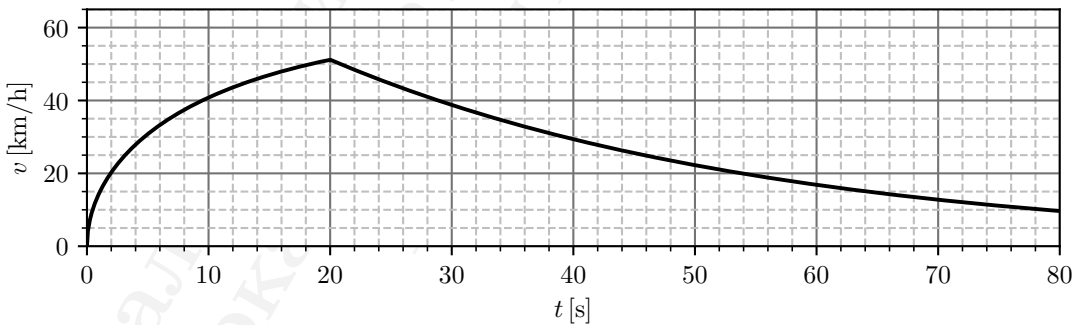
Слика 98.2

(б) Линеарност система проверава се испитивањем хомогености и адитивности. Систем је хомоген уколико, вреди

$O\{kx(t)\} = kO\{x(t)\}$. Посматраћемо брзину у устаљеном стању, односно када је $\frac{dv^2}{dt} \rightarrow 0$,

тада важи да је $V_S i_g(\infty) - bv(\infty)^2 \rightarrow 0$, односно $v(\infty) = \sqrt{\frac{V_S i_g(\infty)}{b}}$. На основу израза се види да је $v(\infty) \propto i_g(\infty)$ па систем није хомоген, а самим тим ни линеаран. Нагласимо да у општем случају каскадна веза линеарног и нелинеарног система није линеаран систем, ипак, постоје практичне примене у којима се користе нелинеарни системи за изградњу система који су у целини линеарни (нпр. транслинеарна кола у аналогој електроници).

(в) Одзив на задату побуду одредићемо одређивањем међурешења $u(t)$. Побуда се може записати у облику $i_g = I_0(u(t) - u(t-T))$. Тако да ће одзив бити $u(t) = I_0(g(t) - g(t-T))$, где је $g(t)$ одскочни одзив система $H(s)$, због његове линеарности. Одскочни одзив одређујемо



Слика 98.3

у комплексном домену, растављањем на парцијалне разломке

$$G(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\mathcal{L}\{u(t)\}} \cdot \underbrace{\frac{V_S}{\frac{m}{2}s + b}}_{H(s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\frac{m}{2}s + b} = \begin{cases} A = \frac{V_S}{\cancel{\left(\frac{m}{2}s + b\right)}} \Big|_{s=0} = \frac{V_S}{b} \\ B = \frac{V_S}{s \left(\frac{m}{2}s + b\right)} \Big|_{s=-\frac{2b}{m}} = -\frac{mV_S}{2b} \end{cases} \quad (98.4)$$

Сређивањем добијеног израза добија се $G(s) = \frac{V_S}{b} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{2b}{m}} \right)$ па се инверзном Лапласовом трансформацијом налази $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{V_S}{b} \left(1 - e^{-\frac{2b}{m}t} \right) u(t)$, сређивањем се даље налази

$$u(t) = \frac{I_0 V_S}{b} \left(\left(1 - e^{-\frac{2b}{m}t} \right) u(t) - \left(1 - e^{-\frac{2b}{m}(t-T)} \right) u(t-T) \right) \quad (98.5)$$

што се може расписати и као

$$u(t) = \frac{I_0 V_S}{b} \cdot \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{2b}{m}t}, & 0 < t < T \\ (e^{2bT/m} - 1)e^{-\frac{2b}{m}t}, & t > T \end{cases} \quad (98.6)$$

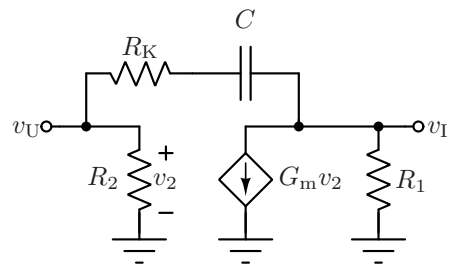
па је израз за брзину са израчунатим константама:

$$v(t) \approx 62,5 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] \cdot \sqrt{\begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t/18 [\text{s}]}, & 0 < t < T \\ 2,04 e^{-t/18 [\text{s}]}, & t > T \end{cases}} \quad (98.7)$$

Добијени резултат приказан је на слици.

▲ 99. У колу са слике познато је $C = 100 \text{ [nF]}$, $R_1 = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$ и $G_m = 1 \text{ [mS]}$. Једини улаз посматраног система је напон $v_U = v_U(t)$ а једини излаз је $v_I = v_I(t)$.

- У општим бројевима, одредити функцију преноса, $H(s)$, датог система и одредити полове и нуле те функције преноса.
- Израчунати у ком опсегу отпорности R_K функција преноса $H(s)$ има нулу у десној комплексној полуравни, а у ком у левој комплексној полуравни.



Слика 99.1

- (в) За вредност отпорности $R_K = R_0$ за коју функција преноса $H(s)$ нема нула, одредити одзив на побуду $v_U = 1 \text{ [V]}$ $u(t)$ применом Лапласове трансформације.
- (г) На истом дијаграму, нацртати одзив одређен у претходној тачки као и одзив система $H(s)$ за $R_K = 0$ на исту побуду.

РЕШЕЊЕ

Функција преноса може се одредити применом методе потенцијала чворова, писањем једине једначине за излазни чвор

$$V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z_K} \right) = -G_m V_U + \frac{1}{Z_K} V_U, \quad (99.1)$$

где је $Z_K = R_K + \frac{1}{sC}$ уопштена комплексна импеданса гране са кондензатором. Преносна функција је у овом случају $H(s) = \frac{V_1}{V_U}$, па се сређивањем израза 99.1 има облик

$$H(s) = \frac{sC(1 - G_m R_K) - G_m}{sC \left(1 + \frac{R_K}{R_1} \right) + \frac{1}{R_1}}. \quad (99.2)$$

Нуле функције преноса налазе се одређивањем коренова полинома у бројиоцу, а полови се налазе одређивањем коренова полинома у имениоцу, чиме се налазе једина нула и једини пол функције преноса, у општем случају, дати изразима

$$z = \frac{G_m}{C(1 - G_m R_K)}, \quad p = -\frac{1}{C(R_1 + R_K)}, \quad (99.3)$$

редом.

- (б) Знак реалне нуле функције преноса $z = \frac{G_m}{C(1 - G_m R_K)}$, одређен је изразом

$$\operatorname{sgn} z = \operatorname{sgn} \frac{G_m}{C(1 - G_m R_K)} = \operatorname{sgn} (1 - G_m R_K). \quad (99.4)$$

Односно, уколико је $R_K < \frac{1}{G_m} = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$, нула је у десној комплексној полуравни ($\operatorname{Re}\{z\} > 0$), док је за $R_K > \frac{1}{G_m} = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$, та нула у левој комплексној полуравни ($\operatorname{Re}\{z\} < 0$). У нарочитом случају, када је $R_K = \frac{1}{G_m} = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$, уколико погледамо у полазни резултат за функцију преноса 99.2, закључујемо да нуле функције преноса тада нема. Тада још кажемо и да је нула „померена у бесконачност“.

(в) Како је наглашено, када је $R_K = R_0 = \frac{1}{G_m} = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$, функција преноса нема нула и тада је

$$H(s) = -\frac{G_m}{sC \left(1 + \frac{1}{G_m R_1}\right) + \frac{1}{R_1}} = \frac{K}{1 + s\tau}, \quad K = -G_m R_1 = -1, \quad \tau = C \left(R_1 + \frac{1}{G_m}\right) = 200 \text{ [}\mu\text{s]}, \quad (99.5)$$

којом приликом је облик поједностављен увођењем константи K и τ , чији су смисао статичко појачање и временска константа. Дата побуда у Лапласовом домену налази се применом табличне трансформације $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$, чиме се име $V_I = \frac{V_0}{s}$, па се онда одзив налази на основу

$$V_I(s) = H(s) \cdot V_U(s) = -\frac{V_0}{s} \cdot \frac{K}{1 + s\tau}. \quad (99.6)$$

Добијени резултат у комплексном домену преводи се у комплексни домен растављањем на парцијалне разломке, у облику

$$V_I(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + s\tau} = \begin{cases} A = \frac{V_0}{s} \cdot \frac{K}{1 + s\tau} \Big|_{s=0} = KV_0 \\ B = \frac{V_0}{s} \cdot \frac{K}{1 + s\tau} \Big|_{s=-1/\tau} = -K\tau V_0 \end{cases}. \quad (99.7)$$

Инверзном Лапласовом трансформацијом се онда налази резултат:

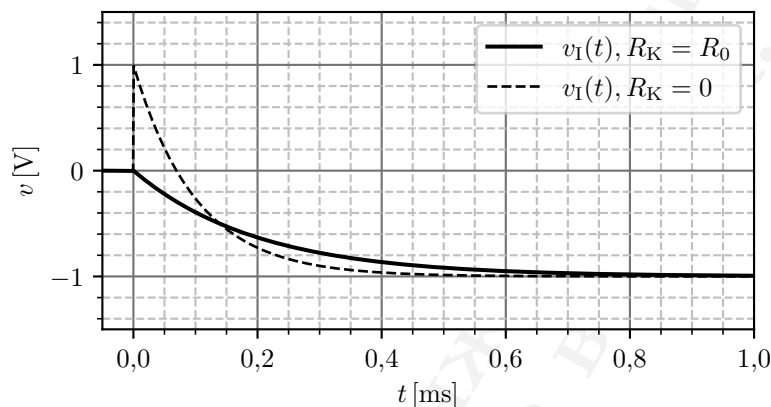
$$v_I(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_I\} = K\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{\tau}{1 - s\tau}\right\} V_0 = K(1 - e^{-t/\tau})V_0 u(t) \quad (99.8)$$

(г) На сличан начин као у претходној тачки, заменом $R_K = 0$ у израз 99.2 налази се

$$H(s) = \frac{s - \frac{G_m}{C}}{s + \frac{1}{CR_1}} = \frac{s - z}{s - p}, \quad \text{где су,} \quad z = +\frac{G_m}{C}, \quad p = -\frac{1}{R_1 C}, \quad (99.9)$$

па се на сличан начин као у претходној тачки добија одзив у Лапласовом домену

$$V_I(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + p} = \begin{cases} A = \frac{V_0}{s} \cdot \frac{s - z}{s - p} \Big|_{s=0} = \frac{z}{p} V_0 = -G_m R_1 V_0 = KV_0 \\ B = \frac{V_0}{s} \cdot \frac{s - z}{s - p} \Big|_{s=p} = \frac{p - z}{p} V_0 = (1 + G_m R_1) V_0 = (1 - K) V_0 \end{cases}. \quad (99.10)$$



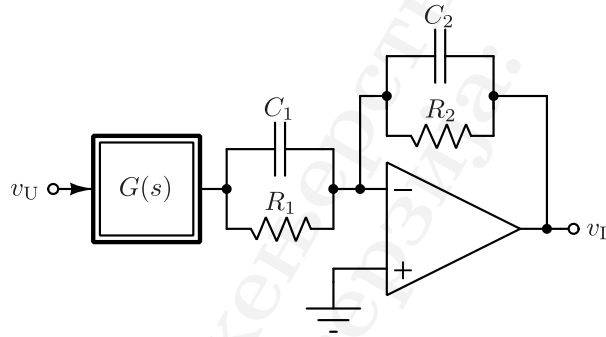
Слика 99.2

У временском домену је онда $v_I(t) = (K + (1 - K)e^{-pt}) V_0 u(t)$. Заменом нумеричких резултата и цртањем одговарајућег графика добија се резултат који је приказан на слици 99.2.

Прокоментаришимо добијене резултате. Нула у десној комплексној полуравни довела је до прекида одскочног одзива у тренутку побуде. Посебно, тај прекид је у *суироину* страну од оног на коме ће одзив у бесконачности завршити. У овом конкретном случају, разлог за то јесте кондензатор повезан између улазног и излазног прикључка. Иако је статичко појачање система негативно, $K < 0$, због самог постојања тог кондензатора, и његове немогућности да тренутно мења свој напон, у првим тренуцима ће излазни напон *ићи* улазни напон, што доводи до оваквог одзива. Нижа временска константа тог процеса је последица мање отпорности коју „види“ кондензатор.

Односно, систем са нулом у десној комплексној полуравни ће у првим тренуцима реаговати на квалитативно другачији начин него касније. Ово може довести до проблема када се овакав систем користи у повратној спрези. Више речи о том ефекту тема су Линеарне електронике и теорије система аутоматског управљања. Иако је дугорочно понашање оба система практично исто (у бесконачности имају исту вредност), овај облик одзива значи да ће бити значајно теже контролисати систем са нулом у десној комплексној полуравни. Уметање отпорника $R_K = R_0$ на ред са кондензатором C представља *компензацију*, и уклањање ове нуле из система.

100. У колу са слике познато је $R_1 = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$, операциони појачавач је идеалан а употребљен је и напонски појачавач чија је функција преноса $G(s) = \frac{s + \omega_1}{s + \omega_2}$, где су $\omega_1 = 100\omega_2 = 1 \left[\frac{\text{Mrad}}{\text{s}} \right]$. Ако амплитудска фреквенцијска карактеристика система не зависи од учестаности и износи $|H(j\omega)| = 50$, израчунати отпорност R_2 и капацитивности C_1 и C_2 .



Слика 100.1

РЕЗУЛТАТ

Тражени параметри су $R = 500 \text{ [}\Omega\text{]}$, $C_1 = 100 \text{ [nF]}$, и $C_2 = 2 \text{ [nF]}$.

101. Нека је дата Лапласова трансформација сигнала $x(t)$ у облику $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$. Одредити сигнал $x(t)$.

РЕШЕЊЕ

Полови дате функције преноса су корени карактеристичне једначине $p^2 + p + 1 = 0$, који се могу израчунати помоћу обрасца за решења квадратне једначине одакле се налази $p_1 = p = \sigma + j\omega$ и $p_2 = p^*$, где су $\sigma = -\frac{1}{2}$ и $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Растављањем на парцијалне разломке добија се израз облика,

$$X(s) = \frac{A}{s - p} + \frac{A^*}{s - p^*}, \quad (101.1)$$

а коефицијент A се може потражити на начин описан у додатку Ђ. На основу тог поступка је⁵⁸

$$A = \frac{1}{\cancel{(s - p)}(s - p^*)} \Big|_{s=p} = \frac{1}{p - p^*} = \frac{1}{2j\text{Im}\{p\}} = \frac{1}{j\sqrt{3}} = -j\frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (101.2)$$

У наставку, искористимо табличну трансформацију $\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} = \frac{1}{s - a}$, одакле нала-

⁵⁸Искоришћен је идентитет који важи за комплексне бројеве $z - z^* = j2\text{Im}\{z\}$

зимо да је

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s-p} + \frac{A^*}{s-p^*} \right\} = A \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-p} \right\} + A^* \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-p^*} \right\} \quad (101.3)$$

$$= A e^{pt} + A^* e^{p^* t}. \quad (101.4)$$

Ради једноставности, изразимо коефицијент A у поларном облику као $A = |A| e^{j \arg A}$, одакле се даље има

$$x(t) = |A| e^{j \arg A} e^{pt} + |A| e^{-j \arg A} e^{p^* t} = |A| e^{j \arg A} e^{(\sigma + j\omega)t} + |A| e^{-j \arg A} e^{(\sigma - j\omega)t} = \quad (101.5)$$

$$= |A| e^{\sigma t} \underbrace{\left(e^{j(\omega t + \arg A)} + e^{-j(\omega t + \arg A)} \right)}_{2 \cos(\omega t + \arg A)}, \quad (101.6)$$

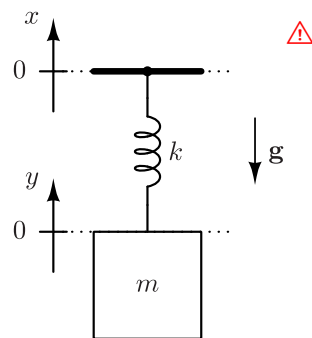
одакле коначно закључујемо да је

$$x(t) = 2|A| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \arg A) \quad (101.7)$$

У конкретном случају, из (101.2) се има $A = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-j\pi/2}$, па је онда коначно

$$x(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t) \quad (101.8)$$

102. У механичком систему са слике је тег масе $m = 2$ [kg] обешен о опругу коефицијента еластичности $k = 8 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$. Опруга је другим крајем фиксирана за ослонац који се може померати у вертикалном правцу. Отклон ослонца у односу на референтан положај је $x = x(t)$, а отклон тега у односу на равнотежњи положај када је ослонац у референтном положају је $y = y(t)$, као на слици. Побуда посматраног система је x а одзив је y . Вектор гравитационог убрзања g усмерен је као на слици.



Слика 102.1

- Одредити функцију преноса система, $H(s)$, у Лапласовом домену.
- Применом Лапласове трансформације одредити принудни одзив овога система на побуду дату изразом $x(t) = X_m(1 - e^{-\sigma t})u(t)$, где су $\sigma = 2$ [s⁻¹] и $X_m = 5$ [cm].
- Одредити и прелазни и устаљени одзив за задату побуду уколико је познато да је $y(0^-) = 0$.

РЕШЕЊЕ

(а) Будући да је тег у равнотежном положају када је $x = y = 0$, то је сила гравитације уравнотежена тадашњим издужењем опруге. Према томе, на основу суперпозиције, те константне компоненте силе се се увек пократе, док преостаје додатна еластична сила која је једнака $\Delta F_e = k(x - y)$, референтно оријентисана навише. Једначина динамике система је стога

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Delta F_e = k(x - y). \quad (102.1)$$

Преласком у Лапласов домен⁵⁹ може се директно одредити функција преноса система као

$$ms^2 Y(s) = k(X(s) - Y(s)) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{ms^2 + k} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}, \quad (102.2)$$

где је $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ природна (сопствена) учестаност посматраног система.

(б) Лапласова трансформација побудног сигнала налази се таблично као

$$X(s) = \mathcal{L}\{X_m(1 - e^{-\sigma t})u(t)\} = X_m \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \sigma} \right) = \sigma X_m \frac{1}{s(s + \sigma)} \quad (102.3)$$

Лапласова трансформација одзива онда се може изразити као

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \sigma \omega_0^2 X_m \frac{1}{s(s + \sigma)(s^2 + \omega_0^2)} = \sigma \omega_0^2 X_m \frac{1}{s(s + \sigma)(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)} \quad (102.4)$$

Растављањем на парцијалне разломке, коришћењем резултата из додатка Т, добија се израз облика

$$Y(s) = \sigma \omega_0^2 X_m \left(\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \sigma} + \frac{B}{s + j\omega_0} + \frac{B^*}{s - j\omega_0} \right). \quad (102.5)$$

Коефицијенте налазимо *cover-up* методом:

$$A_1 = \frac{1}{\cancel{s}(s + \sigma)(s^2 + \omega_0^2)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{\sigma \omega_0^2} \quad (102.6)$$

$$A_2 = \frac{1}{s \cancel{(s + \sigma)}(s^2 + \omega_0^2)} \Big|_{s=-\sigma} = -\frac{1}{\sigma(\sigma^2 + \omega_0^2)} \quad (102.7)$$

$$B = \frac{1}{s(s + \sigma) \underbrace{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}_{j2\omega_0}} \Big|_{s=-j\omega_0} = -\frac{1}{2\omega_0^2} \frac{1}{(\sigma - j\omega_0)} \quad (102.8)$$

⁵⁹ Користи се особина $\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{x\}$.

Заменом добијених резултата у (102.5), и применом инверзне Лапласове трансформације, даље се добија

$$Y(s) = X_m \left(\frac{1}{s} - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \sigma^2} \frac{1}{s + \sigma} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sigma - j\omega_0} \frac{1}{s + j\omega_0} - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sigma + j\omega_0} \frac{1}{s - j\omega_0}}_{\text{Видети и задатак 101}} \right) \quad (102.9)$$

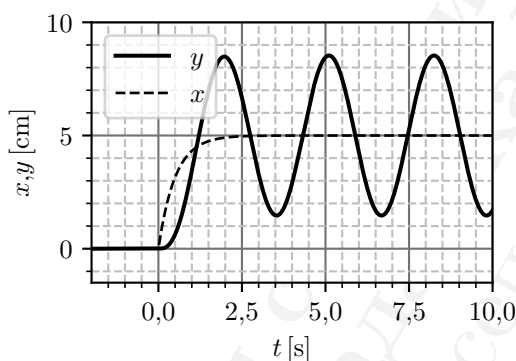
$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1} \{ \bullet \} \quad (102.10)$$

$$y(t) = X_m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \sigma^2} e^{-\sigma t} - \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega_0^2}} \cos \left(\omega_0 t - \arctg \left(\frac{\omega_0}{\sigma} \right) \right) \right) \quad (102.11)$$

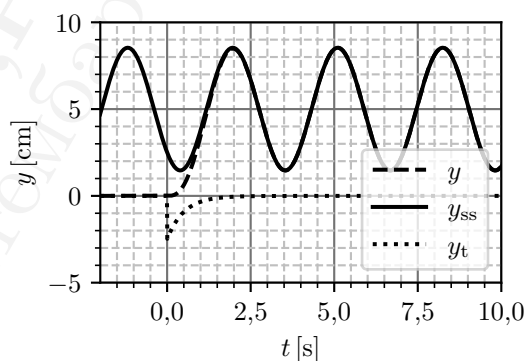
У конкретном случају задатих нумеричких вредности је $\omega_0 = \sigma = 2 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, па је онда

$$y(t) = 5 \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\sigma t} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right) \right) u(t) \text{ [cm]} \quad (102.12)$$

На слици 102.2а приказан је временски дијаграм добијеног резултата. На истој слици приказани су задата побуда и одређени одзив система.



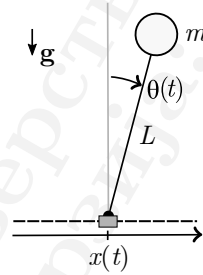
(а) Временски дијаграм комплетног одзива



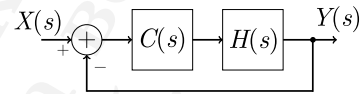
(б) Различите врсте одзива

(в) Устаљени одзив система представљају стална и простопериодична компонента, $y_{ss} = 5 - \frac{5}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right) \text{ [cm]}$, док прелазни одзив представља преостало експоненцијални члан $y_t = -\frac{5}{2} e^{-\sigma t} u(t) \text{ [cm]}$. Упоредни приказ свих врста одзива приказан је на слици 102.2б.

▲ 103. У механичком систему са слике 103.1 приказано је инверзно клатно причвршћено за ослонац који може да се креће дуж x осе. Клатно је сачињено из кугле масе m , чији је центар на растојању L од ослонца, а слободно је да се креће у равни цртежа. Познато је и $g = |\mathbf{g}|$.



Слика 103.1



Слика 103.2

- (а) Одредити функцију преноса система $H(s)$ чији је улаз тренутни положај ослонца клатна $x = x(t)$ а излаз тренутни угаони отклон клатна $\theta = \theta(t)$. Сматрати да је отклон клатна мали тако да је $\sin \theta \approx \theta$.
- (б) Испитати асимптотску стабилност посматраног система $H(s)$.
- (в) У сложеном систему са слике 103.2 употребљен је систем $H(s)$ а преносна функција другог система је $C(s) = K$, где је K константа. Одредити функцију преноса $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.
- (г) Испитати асимптотску стабилност система $W(s)$ у функцији параметра K .

РЕШЕЊЕ

Динамика система може се одредити из референтног система везаног за ослонац клатна.

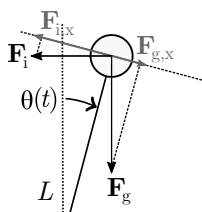
У том референтном постоји инерцијална сила која делује на центар кугле $\mathbf{F}_i = -m \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i}_x$. На куглу делује још и гравитациона сила $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$. Кугла клатна се креће по кружници, па је оно описано компонентама силе у тангенцијалном правцу, $\mathbf{F}_{g,x}$ и $\mathbf{F}_{i,x}$, као на слици 103.3а.

Према томе је $mL \frac{d^2 \theta^2}{dt^2} = F_{g,x} + F_{i,x} = mg \sin(\theta) - m \frac{dx^2}{dt^2} \cos(\theta)$. Усвајањем апроксимације малог угла, $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, па применом Лапласове трансформације се добија

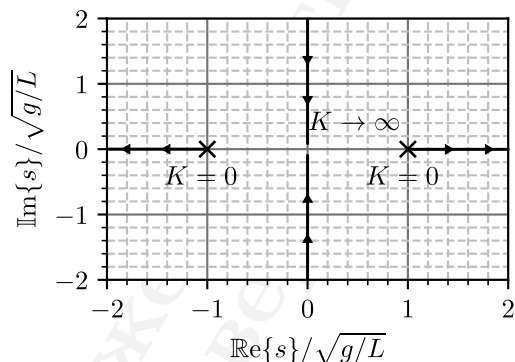
$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = g\theta - \frac{dx^2}{dt^2} \Rightarrow s^2 L \Theta(s) = g\Theta(s) - s^2 X(s), \quad (103.1)$$

На основу чега налазимо да је $H(s) = \frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{s^2}{g - s^2 L}$.

(б) Стабилност система се испитује на основу структуре полова функције преноса. Полови $p = s$ се потражују као корени полинома у имениоцу, односно као решења једначине $g - p^2 L = 0$, односно $p_{1,2} = \pm \sqrt{g/L}$. Будући да се један од полова налази у левој комплексној полуравни (односно је $\operatorname{Re}\{p\} < 0$) систем је асимптотски нестабилан.



(а) Дијаграм динамике клатна.



(б) Кретање полова у комплексној равни.

(в) На основу датог блок дијаграма може се непосредно писати $Y = C(s)H(s)(X - Y)$, где су $Y = \mathcal{L}\{y(t)\}$, $X = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Одавде се може изразити $Y = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)}X$, одакле се добија функција преноса целокупног система као $W(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)}$. Заменом облика $H(s)$ и $C(s)$ добија се

$$W(s) = \frac{\frac{Ks^2}{g - s^2L}}{1 + \frac{Ks^2}{g - s^2L}} = \frac{Ks^2}{g - s^2L + Ks^2} = \frac{Ks^2}{g + (K - L)s^2}. \quad (103.2)$$

(г) Полови функције преноса целокупног система налазе се као корени полинома у имениоцу $g - (L - K)p^2 = 0$, па се морају разликовати на основу знака $K - L$, односно је

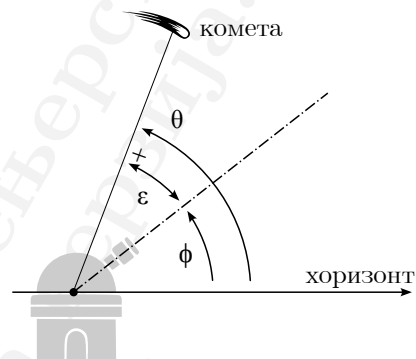
$$p_{1,2} = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{g}{L - K}} & , K < L \\ \pm \infty & , K = L \\ \pm j\sqrt{\frac{g}{K - L}} & , K > L \end{cases} \quad (103.3)$$

Закључујемо да се полови ефективно „крећу“ по комплексној равни. На слици 103.35 приказан је дијаграм који илуструје ово кретање приликом варирања параметра $K > 0$. На основу овакве структуре корена може се закључити да је за $K \leq L$ систем је асимптотски нестабилан, а за $K > L$ је маргинално стабилан.

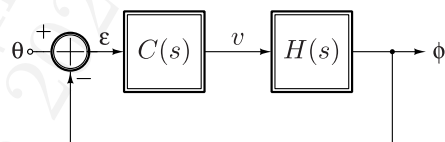
Техника стабилизације нестабилног система увођењем повратне спреге и система који се назива контролер је основни принцип система аутоматског управљања. Кретање полова

у комплексној равни има широку употребу у анализи и пројектовању различитих система са повратном спрегом као техника која се назива и *геометријско место коренова* (енг. *root locus*). У електроници, ове технике су нарочито значајне код линеарних појачавача, што се изучава у области *линеарне електронике*.

104. На слици 1 је илустрован систем са повратном спрегом за аутоматско праћење комете на небу моторизованим телескопом. Главна оптичка оса телескопа заклапа са хоризонтом угао $\phi = \phi(t)$, док је тренутни положај комете описан својим углом у односу на хоризонт $\theta = \theta(t)$. Грешка система јесте угао $\epsilon = \theta - \phi$. На слици 2 приказан је структурни блок дијаграм система у целини. Блок $C(s)$ представља систем који на основу сигнала грешке ϵ генерише бездимензиони командни сигнал v телескопа који је описан функцијом преноса $H(s)$.



Слика 104.1



Слика 104.2

- (а) У тренутку $t = 0$ комета је примећена под углом $\theta(0) = \theta_0 = \frac{\pi}{3}$. Комета се креће константном угаоном брзином у односу на центар телескопа $\omega_m = -\frac{\pi}{24} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$. Сматрајући да је $\theta(t < 0) = 0$, написати израз за $\theta(t)$, у временском домену, и одредити његову Лапласову трансформацију $\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$.
- (б) Контролни сигнал v сразмеран је угаоној брзини осовине мотора телескопа, при чему је при константној побуди $v(t) = 1$ угаона брзина осовине $\omega_t = \frac{\pi}{5} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$. Одредити $H(s)$, имајући у виду да је он LTI систем.
- (в) Ако је познато да је $C(s) = \frac{\tau + s}{s}$, где је $\tau = 1$ [s]. Одредити функцију преноса $W(s) = \frac{E(s)}{\Theta(s)}$, где су $E(s) = \mathcal{L}\{\epsilon(t)\}$, и $\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$.
- (г) Сматрајући да је $\phi(0) = 0$, у разматраном случају одредити аналитички облик сигнала $\epsilon(t)$, и приближно га скицирати.
- (д) Уколико се разматрана комета креће равномерно убрзано (константним угаоним убрзањем), показати да овакав систем не може да прати такву мету, односно да у том случају мора бити $\epsilon(\infty) \neq 0$.

РЕШЕЊЕ

(а) Угаона брзина осовине је по дефиницији $\frac{d\theta}{dt} = \omega_m$, на основу чега је $\theta = \int \omega_m dt = \omega_m t + C$. Константу налазимо из услова да је $\theta(0) = \theta_0$ па је онда $\theta = \omega_m t + \theta_0$, за $t > 0$. Пошто је по услову задатка $\theta(t < 0) = 0$, коначно се може писати $\theta(t) = (\omega_m t + \theta_0)u(t)$. Лапласову трансформацију можемо одредити на основу табличне трансформације Т.7.2, $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$, те на основу примедбе да је

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t u(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s^2}, \quad (104.1)$$

па је онда

$$\mathcal{L}\{\theta(t)\} = \frac{\omega_m}{s^2} + \frac{\theta_0}{s} = \frac{\theta_0 s + \omega_m}{s^2} \quad (104.2)$$

(б) Функција преноса дефинише се за систем без почетне енергије. По услову задатка је $v = T \frac{d\phi}{dt}$, где је $T = \text{const}$. Пошто је по услову задатка $v(t) = 1$ за $\frac{d\phi}{dt} = \omega_t$ онда је $T = \frac{1}{\omega_t}$. Пошто је излаз система угао ϕ , можемо писати да је

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} dt = \int_0^t \frac{v(\tau)}{T} d\tau. \quad (104.3)$$

Односно, систем представља интегратор и множење константом $\frac{1}{T} = \omega_t$ па се може писати да је функција преноса $H(s) = \frac{\omega_t}{s}$.

(в) На основу блок дијаграма може се непосредно писати $\Phi = CH(\Theta - \Phi)$, где је $\Phi = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$. Одавде се може изразити $\Phi = \frac{CH}{1 + CH}\Theta$, одакле се може добити

$$E(s) = \Theta - \Phi = \left(1 - \frac{CH}{1 + CH}\right)\Theta = \frac{1}{1 + CH}\Theta. \Rightarrow W(s) = \frac{1}{1 + C(s)H(s)} \quad (104.4)$$

Заменом датог облика $C(s)$ и резултата тачке (б) даље се добија

$$W(s) = \frac{1}{1 + \frac{\tau + s}{s} \cdot \frac{\omega_t}{s}} = \frac{s^2}{s^2 + \omega_t s + \tau \omega_t} \quad (104.5)$$

(г) Тражени сигнал $\varepsilon(t)$ представља одзив система функције преноса $W(s)$ на побуду $\theta(s)$ која је одређена у тачки (а). На основу резултата тачака (а) и (в) може се писати

$$E(s) = W(s)\Theta(s) = \frac{s^2}{s^2 + \omega_t s + \tau \omega_t} \cdot \frac{\theta_0 s + \omega_m}{s^2} = \frac{\theta_0 s + \omega_m}{s^2 + \omega_t s + \tau \omega_t}. \quad (104.6)$$

Израз у имениоцу може се средити допуном до потпуног квадрата

$$s^2 + \omega_t s + \tau \omega_t = s^2 + 2 \frac{\omega_t}{2} s + \left(\frac{\omega_t}{2}\right)^2 + \tau \omega_t - \left(\frac{\omega_t}{2}\right)^2 = \left(s + \frac{\omega_t}{2}\right)^2 + \tau \omega_t - \frac{\omega_t^2}{4}, \quad (104.7)$$

па се заменом у (104.6) има

$$E(s) = \theta_0 \left(\frac{s + \frac{\omega_m}{\theta_0}}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \right), \quad \omega_0 = \sqrt{\tau \omega_t - \frac{\omega_t^2}{4}}, \quad a = \frac{\omega_t}{2} \quad (104.8)$$

Ради свођења на таблични облик, у бројиоцу се може дописати „+a - a“ чиме се добија

$$E(s) = \theta_0 \left(\frac{s + a + \frac{\omega_m}{\theta_0} - a}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \right) \quad (104.9)$$

Инверзна Лапласова трансформација одавде се одређује таблично, применом линеарности Лапласове трансформације, према

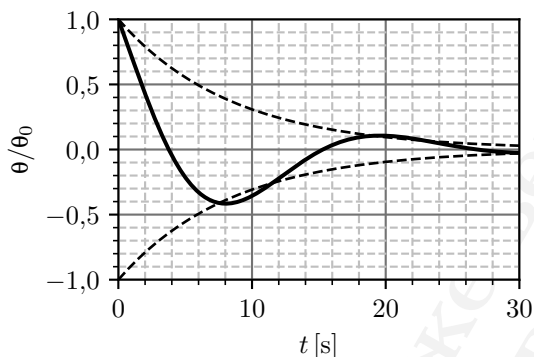
$$\varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1} \{E(s)\} = \theta_0 \left(\underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \right\}}_{\text{T.7.15: } e^{-at} \cos(\omega_0 t)} + \frac{\frac{\omega_m}{\theta_0} - a}{\omega} \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \right\}}_{\text{T.7.14: } e^{-at} \sin(\omega_0 t)} \right) \quad (104.10)$$

одакле се коначно добија

$$\varepsilon(t) = \theta_0 e^{-at} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{\frac{\omega_m}{\theta_0} - a}{\omega} \sin(\omega_0 t) \right) u(t). \quad (104.11)$$

За скицирање графика, потребно је заменити бројевне вредности, $\omega_0 \approx 0,727 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$, $a \approx 0,314 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$, па се има $\varepsilon(t) = w (\cos(\omega_0 t) - 0,6 \sin(\omega_0 t)) \theta_0 u(t)$. За скицирање графика може се искористити временска константа експоненцијалног члана $\tau_e = \frac{1}{a} \approx 3,18 \text{ [s]}$, док је период простопериодичних сигнала $\frac{2\pi}{\omega_0} \approx 8,66 \text{ [s]}$. Тражени временски дијаграм приказан је на слици 104.3, где су испрекидано уцртани и сигнали $\pm e^{-at}$.

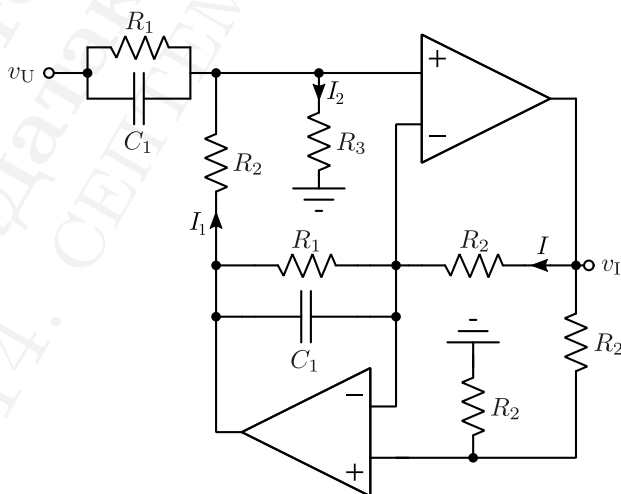
(д) Тражени резултат може се показати скраћеним поступком. У случају када је комета са неким убрзањем, у том случају постоји и члан облика at^2 у изразу за тренутни положај,

Слика 104.3: Временски дијаграм сигнала $\epsilon(t)$.

односно Лапласова трансформација тог сигнала биће у облику $\Theta(s) = \frac{\dot{\epsilon}}{s^3}$ па онда уместо потирања чланова у изразу 104.6, преостаје један пол у нули, односно $E(s) \sim \frac{\dot{\epsilon}}{s}$. Па се онда применом теореме о коначној вредности добија $\epsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \sim \lim_{s \rightarrow 0} \dot{\epsilon}$, па је добијени израз у општем случају различит од нуле. Заинтересованом читаоцу препоручујемо да овај поступак спроведе и формално, том приликом, налази се вредност $\epsilon(\infty)$ која представља константну грешку разматраног система.

105. У колу са слике познато је $R_2 = 10R_1 = R_3/10$. Функција преноса кола, чији улаз је напон v_U а излаз напон v_1 је облика $H(s) = K \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$. (а) Из-

рачунати параметре K и Q , и вредности елемената кола R_1 и C_1 ако су познати $R_2 = 10 \text{ [k}\Omega\text{]}$ и $\omega_0 = 10^5 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$. (б) Одредити принудни и устаљени одзив филтра на побуду $v_G(t) = V_0(5 + e^{2t}\delta(t))u(t - \tau)$, где су $V_0 = 1 \text{ [V]}$ и $\tau = 2 \text{ [s]}$.



Слика 105.1

РЕШЕЊЕ

(а) Једносмерно појачање система (DC) одређује се као $H(s=0) = 0$. У том случају, капацитивности се понашају као отворене везе. Приметимо да је тада отпорност R_1 везана редно улазном напонском генератору. Односно, да би напонско појачање система било равно нули, мора бити $R_1 \rightarrow \infty$. Са друге стране, када је $\omega \rightarrow \infty$ тада су $V^+ = V^- = V_U$ за оба операциона појачавача па је $VI = 2V_U \Rightarrow K = 2$, због разделника напона R_2-R_2 .

На „+“ прикључку доњег операционог појачавача је, услед напонског разделника, напон $V^+ = \frac{V_I}{2}$, што је и на „-“ прикључку, због НПС. Тиме је дефинисана струја кон-

дензатора као $I = \frac{V_I - \frac{V_I}{2}}{R_2} = \frac{V_I}{2R_2}$. Напон на излазу доњег операционог појачавача је $V_{OP} = \frac{V_I}{2} \left(1 - \frac{1}{sC_1R_2}\right)$. Струја кроз улазни кондензатор је једнака $I_U = \left(V_U - \frac{V_I}{2}\right)sC_1$, одакле се има $V_U = \frac{V_I}{2} \cdot \frac{1 + sC_1R_2 + (sC_1R_2)^2}{(sC_1R_2)^2}$ па се сређивањем добија

$$H(s) = 2 \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{R_2C_1}s + \left(\frac{1}{R_2C_1}\right)^2}. \quad (105.1)$$

Поређењем добијеног облика са обликом из поставке задатка директном идентификацијом се установљава да су $Q = 1$ и $C_1 = 1$ [nF]

(б) Пошто је Хевисајдова функција померена, Делта импулс у нули се анулира, а одзив је исти као за побуду $v_G = 5V_0 u(t - \tau)$, па се одзив система може потражити као

$$V_I(s) = V_G(s) \cdot H(s) = \frac{5V_0 e^{-s\tau}}{s} \cdot K \frac{s^2}{s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (105.2)$$

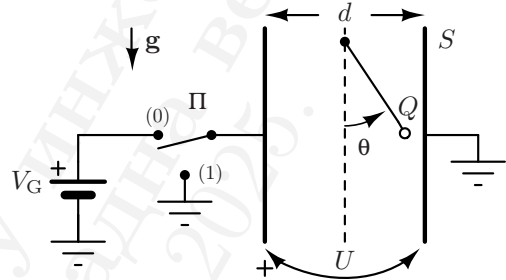
Инверзна Лапласова трансформација може се одредити допуњавањем имениоца до потпуног квадрата

$$\begin{aligned} V_I(s) &= 5V_0 \cdot K \frac{s + \frac{\omega_0}{2} - \frac{\omega_0}{2}}{\underbrace{s^2 + \omega_0 s + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2}_{(s+\omega_0/2)^2} - \underbrace{\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 + \omega_0^2}_{3\omega_0^2/4}} e^{-s\tau} = \\ &= 5KV_0 \left(\frac{s + \frac{\omega_0}{2}}{\left(s + \frac{\omega_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{2}{\omega_0\sqrt{3}} \frac{\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{\omega_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right) e^{-s\tau}, \end{aligned}$$

па се на сличан начин као и у задатку 104 помоћу табличних трансформација Т.7.15 и Т.7.14, те применом својства кашњења, налази коначни резултат

$$v_1(t) = 10 \text{ [V]} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2}(t - \tau)\right) \left(\cos\left(\frac{\omega_0 \sqrt{3}}{2}(t - \tau)\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\omega_0 \sqrt{3}}{2}(t - \tau)\right) \right) u(t - \tau). \quad (105.3)$$

106. Математичко клатно, сачињено из мале куглице, наелектрисања $Q = 1 \text{ [nC]}$, и танке неистегљиве нити дужине $L = 1 \text{ [m]}$, постављено је у унутрашњост равног плочастог кондензатора растојања између облога $d = 100 \text{ [mm]}$. Једна облога кондензатора је на референтном потенцијалу док се друга може помоћу преклопника П пребацивати између прикључка идеалног напонског генератора сталног напона $V_G = 9 \text{ [kV]}$ и референтног потенцијала, као што је приказано на слици.



Слика 106.1

Сила отпора средине може се представити у облику $\mathbf{F}_{ov} = -b\mathbf{v}$, где је $b = \frac{200}{3} \left[\frac{\mu\text{N}}{\text{m/s}} \right]$. Гравитационо убрзање је $g = 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ и оријентисано је као на слици.

- Посматра се систем, чији је једини улаз напон кондензатора $u = u(t)$ а једини излаз отклон клатна $\theta = \theta(t)$. Одредити функцију преноса тог система $H(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)}$.
- До тренутка $t = 0$ прекидач П је у стању (0). У тренутку $t = 0$ први пут мења стање, а затим мења стање сваки пут у тренуцима $t = kT$, $k \in \mathbb{N}$, $f = \frac{1}{T}$. Одредити израз за $u(t)$. Пошто разматрани систем има релативно висок Q фактор, уколико се разматра резонантна побуда, релевантан је утицај само основног хармоника (на резонантној учестаности). Сигнал $u(t)$ развити у Фуријеов ред па апроксимирати побудни напон основним хармоником $u(t) = U_m \sin(\omega t)u(t)$, а на основу те апроксимације одредити $U(s)$. Сматрати да је ω за 5% веће од сопствене учестаности клатна.
- Полазећи од резултата претходних тачака, одредити израз за $\Theta(s)$ и одредити комплетан одзив посматраног система.

РЕШЕЊЕ

(а) Унутар кондензатора постоји хомогено електрично поље E , услед кога на куглицу делује електрична сила $F = QE$. Једначина другог Њутновог закона за ротационо кретање клатна, у облику $J \frac{d\theta}{dt} = M$ за куглицу онда гласи:

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -bL^2 \frac{d\theta}{dt} - mgL \sin(\theta) + QEL \cos(\theta) \Rightarrow \quad (106.1)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{L} \sin(\theta) + \frac{QE}{mL} \cos(\theta) \quad (106.2)$$

Уколико применимо апроксимацију малог угла $\sin \theta \approx \theta$, односно $\cos \theta \approx 1$, као и заменимо израз за јачину електричног поља у области кондензатора $U = \frac{E}{d}$, даље се Лапласовом трансформацијом налази

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \theta = \frac{Q}{mdL} u \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} \left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{g}{L} \right) \Theta(s) = \frac{Q}{mdL} U(s) \quad (106.3)$$

Одакле се непосредно налази:

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + \frac{1}{\tau}s + \omega_k^2}, \quad H_0 = \frac{Q}{mdL} \approx 10^{-5} \left[\frac{1}{Vs^2} \right], \tau = \frac{m}{b} \approx 15 \text{ [s]}, \quad (106.4)$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{g}{L}} \approx 3,13 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (106.5)$$

Добијена квадратна форма може се средити допуњавањем до квадрата бинома као $H(s) = s^2 + \frac{1}{\tau}s + \omega_k^2 = s^2 + 2\frac{1}{2\tau}s + \frac{1}{4\tau^2} + \omega_k^2 - \frac{1}{4\tau^2} = \left(s + \frac{1}{2\tau} \right)^2 + \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}$, па се онда добијена функција преноса може изразити и као

$$H(s) = \frac{H_0}{(s + \sigma)^2 + \omega_0^2}, \quad \sigma = \frac{1}{2\tau} \approx \frac{1}{30} \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_k^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \approx \omega_k \quad (106.6)$$

(б) Дати сигнал се може записати у временском домену као $u(t) = V_G \sum_{k=0}^{\infty} u(t - kT) - u(t - (k + 1/2)T)$, односно, представља униполарну правоугаону поворку правоугаоних импулса. На основу резултата задатка 67 је комплексни спектар разматраног сигнала $U[k] = \frac{V_G}{2} \text{sinc} \left(\frac{k}{2} \right) e^{-jk\pi/2}$. На основу тога је $U[1] = \frac{V_G}{2} \frac{2}{\pi} e^{-j\pi/2} = -j \frac{V_G}{\pi}$. Помоћу везе између развоја у тригонометријски и комплексан Фуријеов ред⁶⁰, онда се може писати,

⁶⁰Користи се резултат $X[k] = \frac{A[k] - jB[k]}{2} \Rightarrow B[k] = -2\Im \{X[k]\}$.

помоћу табличне трансформације Т.7.9, да је

$$u(t) \approx \frac{V_G}{2} \frac{4}{\pi} \sin(\omega t). \Rightarrow U(s) = \frac{2V_G}{\pi} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (106.7)$$

(в) Помоћу резултата претходних тачака, Лапласова трансформација одзива дата је у облику:

$$\Theta(s) = \frac{H_0}{(s + \sigma)^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{2V_G}{\pi} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{2H_0V_G}{\pi} \frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (106.8)$$

Инверзна Лапласова трансформација обавља се растављањем на парцијалне разломке, чиме се добија

$$H(s) = \frac{2H_0V_G}{\pi} \left(\frac{A}{s - (\sigma + j\omega_0)} + \frac{A^*}{s - (\sigma - j\omega_0)} + \frac{B}{s - j\omega} + \frac{B^*}{s + j\omega} \right) \quad (106.9)$$

Коефицијенти се налазе поступком који је детаљно описан у додатку Ђ, чиме се добијају

$$A = \frac{1}{j2\omega_0} \frac{\omega^2}{\underbrace{(\sigma + j\omega_0)^2}_{\sigma \ll \omega_0} + \omega^2} \approx -j \frac{1}{2} \frac{\omega/\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (106.10)$$

$$B = \frac{1}{(j\omega + \sigma)^2 + \omega_0^2} \frac{\omega}{j2\omega} \approx -j \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (106.11)$$

Одавде се коначно, на основу резултата задатка 101 има

$$\theta(t) = \frac{2H_0V_g}{\pi} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} e^{-\sigma t} \sin(\omega_0 t) \right) \quad (106.12)$$

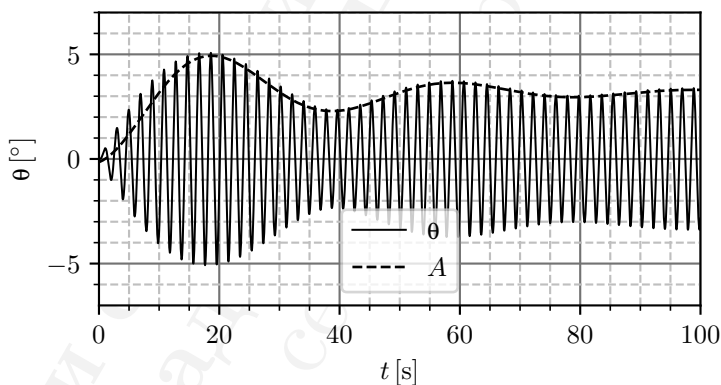
Ради бољег квалитативног описа добијеног резултата, по узору на поступак из задатка 97, усвојићемо да је побудна учестаност у околини резонантне учестаности клатна $\omega_0 = \omega + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega$. Одатле се може писати да је⁶¹ $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega + \Delta\omega} = \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega}$;

⁶¹ Користи се Бернулијева апроксимација $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, $x \ll 1$; као и формула за синус збира $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

као и $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{\underbrace{(\omega_0 - \omega)}_{\Delta\omega} \underbrace{(\omega_0 + \omega)}_{\approx 2\omega}} \approx \frac{1}{2\omega\Delta\omega}$, па се заменом у (106.12) налази

$$\begin{aligned}\theta(t) &\approx \frac{H_0 V_g}{\pi\omega\Delta\omega} \left(\sin(\omega t) - \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega}\right) e^{-\sigma t} \sin((\omega + \Delta\omega)t) \right) \\ &= \frac{H_0 V_g}{\pi\omega\Delta\omega} \left(\sin(\omega t) - \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega}\right) e^{-\sigma t} \left(\sin(\omega t) \cos(\Delta\omega t) + \cos(\omega t) \underbrace{\sin(\Delta\omega t)}_{\approx 0} \right) \right) \\ &\approx \underbrace{\frac{H_0 V_g}{\pi\omega\Delta\omega} \left(1 - \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega}\right) e^{-\sigma t} \cos(\Delta\omega t) \right)}_{A(t)} \sin(\omega t),\end{aligned}$$

којом приликом је члан са $\sin(\Delta\omega t)$ занемарен јер он брзо ишчезава са временом, а током времена током ког је члан релевантан, је његова амплитуда мала јер је тада $\Delta\omega t \ll 1$. Добијени сигнал представља простопериодични сигнал променљиве амплитуде $A \approx A(t)$ који сам представља пригушену синусоиду учестаности која одговара разлици $\Delta\omega$. Резултат је приказан на слици 106.2, на којој је и уцртан и апроксимативни сигнал анvelope $A(t)$.

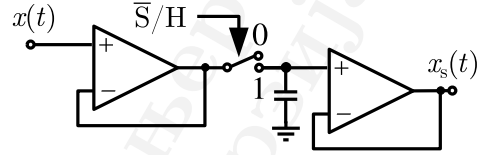


Слика 106.2: Временски дијаграм одзива клатна, за $\Delta\omega \approx 5\%\omega_0$

5 Одабирање и реконструкција сигнала

5.1 „Памти-прати“ (SH) кола

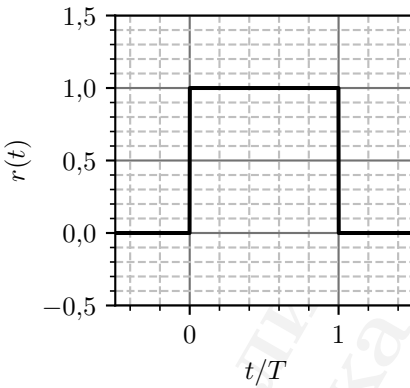
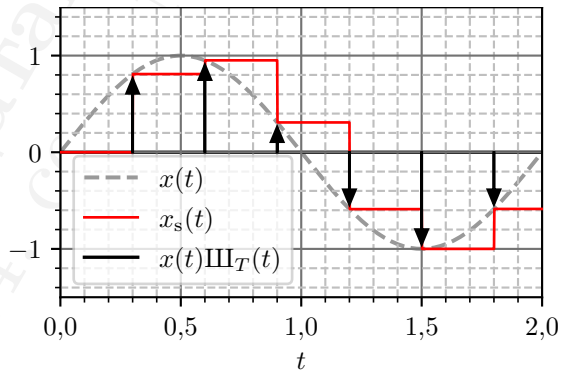
107. Сигнал $x(t) = 2 \sin(\omega_0 t)$, где је $\omega_0 = 100\pi$, доводи се на улаз кола са слике. Прекидач у колу је отворен, осим у тренуцима $t = kT$ када је *крайњокопирно* затворен ($k \in \mathbb{Z}$). Познато је $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$, $\omega_s = 800\pi$. Ако се излазни сигнал кола, $x_s(t)$ обради идеалним филтром функције преноса $H(j\omega) = a \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{4\omega_0}\right)$, израчунати константу a тако да се као резултат добије тачно $y(t) = \sin(\omega_0 t + \phi)$, и том приликом израчунати угао $0 \leq \phi < 2\pi$.



Слика 107.1

РЕШЕЊЕ

Операциони појачавачи у колу повезани су у конфигурацију два јединична бафера. Сигнал на излазу левог операционог појачавача једнак је сигналу $x(t)$, док је напон на кондензатору једнак напону на излазу кола $x_s(t)$. Када је прекидач отворен, напон кондензатора се не мења, док при краткотрајном затварању у тренуцима kT , напон кондензатора прима вредност $x(kT)$. Ово доводи до степеничастог напона, израђеног од низа правоугаоних импулса.

(a) $r(t)$ (б) Уз пример, $T = 0,3$.

Слика 107.2

Такав сигнал се може изградити помоћу низа померених правоугаоних јединичних им-

пулса облика $r(t) = u(t) - u(t - T)$, приказаних на слици 107.2а. Облик излазног сигнала се онда може представити као $x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot r(t - kT)$. Пошто се онда конволуција са Дираковим импулсом може користити за померање у времену, односно важи $r(t - kT) = r(t) * \delta(t - kT)$, добијени израз се може трансформисати поступком⁶²

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot r(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot r(t) * \delta(t - kT) = r(t) * x(t) \text{Ш}_T(t). \quad (107.1)$$

Тако добијени израз даје основу за фреквенцијску анализу сигнала. Одређивањем спектра таквог сигнала, применом теорема о трансформацији конволуције и производа, налазимо резултат:

$$X_s(j\omega) = \mathcal{FT}\{x_s(t)\} = R(j\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \left(X(j\omega) * \underbrace{\frac{2\pi}{T} \text{Ш}_{\omega_s}(\omega)}_{\omega_0} \right) \quad (107.2)$$

$$= \frac{1}{T} R(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad (107.3)$$

Излаз након филтрирања идеалним филтром је онда облика $X_s^{(f)}(j\omega) = X_s(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{1}{T} R(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \cdot a \text{rect}\left(\frac{\omega}{4\omega_0}\right)$. Пошто је задовољена теорема одабирања ($\omega_s > 2\omega_0$) не долази до преклапања спектралних реплика, па тако идеални филтар који одбацује све чланове ван опсега $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$ задржава само централну спектралну реплику, за $k = 0$, тиме остаје резултат филтрирања $X_s^{(f)}(j\omega) = X_s(j\omega) \cdot H(j\omega)$, односно $X_s(j\omega) = \frac{a}{T} R(j\omega) X(j\omega)$. Практично, може се сматрати да се цео систем од улаза до излаза, у општијем случају под претпоставком задовољења теореме одабирања, може представити једном функцијом преноса облика

$$G(j\omega) = \frac{X_s^{(f)}}{X(j\omega)} = \frac{aR(j\omega)}{T}. \quad (107.4)$$

Заменом резултата за спектар датог правоугаоног импулса из задатка 84 и спектра простопериодичног сигнала налазимо резултат за функцију преноса $G(j\omega) = a \cdot \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T}$.

⁶²Користи се правило еквиваленције $x(kT)\delta(t - kT) = x(t)\delta(t - kT)$.

Одређивањем функције преноса на учестаности побуде $\omega = \omega_0$ налазе се појачање амплитуде и фазни померај излазног сигнала.

$$|G(j\omega_0)| = a \left| \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} \right| = \frac{a \sqrt{2(1 - \cos(\omega_0 T))}}{\omega_0 T} \quad (107.5)$$

$$\arg G(j\omega_0) = \frac{\omega_0 T - \pi}{2} \quad (107.6)$$

Пошто је према услови задатка $\omega_0 T = \frac{\pi}{4}$ коначно се добија да је $|G(j\omega_0)| = \frac{4a}{\pi} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ и $\phi = -\frac{3\pi}{8}$. Према услови задатка, амплитуда побудног и одзивног сигнала је иста, то мора бити $|G(j\omega_0)| = 1$ па је $a = \frac{\pi}{4\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$.

Скренимо пажњу на општи закључак. Уколико је теорема одабирања задовољена, односно, уколико не долази до преклапања спектралних реплика, онда се резултат 107.4 може сматрати општим. Односно, он показује како облик реконструкционог импулса $r(t)$, утиче на спектар одзивног сигнала.

Читаоцу се препоручује да размотри какав се сигнал јавља на излазу целог система, уколико се уместо датог идеалног филтра пропусника ниских учестаности, $H(j\omega)$ искористи филтар пропусник опсега учестаности, централне кружне учестаности $2\omega_0$.

6 Примене \mathcal{Z} -трансформације

6.1 Одзиви дискретних система

108. Применом \mathcal{Z} -трансформације одредити сопствени одзив система описаног диференцијалном једначином

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = x[n],$$

где су $x[n]$ и $y[n]$ улаз и излаз тог система редом, а дати су помоћни услови $y[0] = y[1] = 1$.

РЕШЕЊЕ

Приликом тражења сопственог одзива, побуда се анулира па је $x[n] = 0$. Користе се особине предикције у времену \mathcal{Z} -трансформације⁶³, на основу којих се дата диференцијална једначина може превести у комплексан домен

$$\mathcal{Z}\{y[n+1]\} = zY(z) - zy[0] \quad (108.1)$$

$$\mathcal{Z}\{y[n+2]\} = z\mathcal{Z}\{y[n+1]\} - zy[1] \Rightarrow \mathcal{Z}\{y[n+2]\} = z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1] \quad (108.2)$$

⁶³ $\mathcal{Z}\{x[n+1]\} = zX(z) - zx[0]$

Заменом у полазну диференцну једначину, након уређивања се добија

$$\mathcal{Z}\{y[n+2]\} - 5\mathcal{Z}\{y[n+1]\} + 6\mathcal{Z}\{y[n]\} = 0 \quad (108.3)$$

$$z^2 Y(z) - z^2 y[0] - zy[1] - 5zY(z) + 5zy[0] + 6Y(z) = 0 \quad (108.4)$$

$$(108.5)$$

Даљим сређивањем одређује се \mathcal{Z} -трансформација сопственог одзива као

$$(z^2 - 5z + 6)Y(z) = z^2 y[0] - 5zy[0] + zy[1] \quad (108.6)$$

$$Y(z) = \frac{z^2 - 4z}{z^2 - 5z + 6} \quad (108.7)$$

За растављање на парцијалне разломке степен полинома у бројиоцу мора бити нижи него у имениоцу. У општем случају овај проблем могуће је решити дељењем полинома, међутим, у овом случају практичније је извући заједнички члан „ z “ па извести парцијалне разломке над остатком помоћу поступка из Ђ

$$Y(z) = z \frac{z - 4}{z^2 - 5z + 6} = \frac{2z}{z - 2} - \frac{z}{z - 3}, \quad (108.8)$$

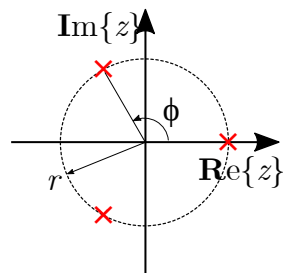
па се коришћењем табличне трансформације Т.9.2 добија коначни резултат

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = (2 \cdot 2^n - 3^n)u[n]. \quad (108.9)$$

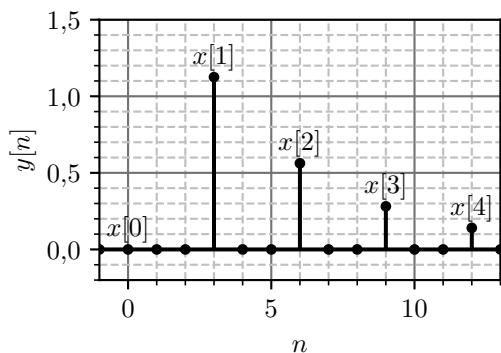
109. На је дат сигнал $x[n]$ чија је \mathcal{Z} -трансформација позната као $X(z)$. Амплитудски спектар тог сигнала приказан је на слици 109.1б. Сигнал $y[n]$ добија се уметањем по две нуле између свака два одбирка сигнала $x[n]$ као што је илустровано на слици 109.1а. Помоћу $X(z)$ изразити спектар $Y(z)$, и скицирати амплитудски спектар сигнала $y[n]$, у опсегу дискретних кружних учестаности $0 \leq \Omega \leq \pi$.

110. Преносна карактеристика реалног дискретног филтра без нула функције преноса дата је половима у z -равни. Сви полови функције преноса се налазе на кружници полупречника $r = \frac{1}{2}$, један од полова је реалан, а потег другог заклапа са позитивним делом реалне осе угао $\phi = \frac{2\pi}{3}$, као на слици. Позната је још и минимална вредност амплитудске фреквенцијске карактеристике $|H(j\Omega)|_{\min} = 1$.

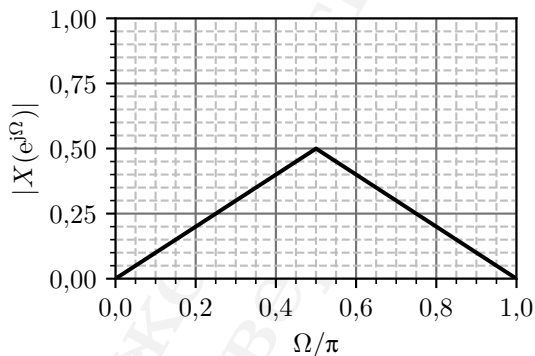
- (а) Одредити функцију преноса филтра $H(z)$, и скицирати његову амплитудску карактеристику у опсегу дискретних кружних учестаности $0 \leq \Omega \leq \pi$.



Слика 110.1



(a)



(б)

Слика 109.1: Уз задатак.

(б) Одредити импулсни одзив датог филтра, $h[n]$.

(в) Одредити комплетни одзив овог филтра на побуду $x[n] = \cos(\pi n) u[n]$

РЕШЕЊЕ

Полови дефинисани задатком представљају треће корене⁶⁴ комплексног броја $\frac{1}{8}$, односно јесу решење једначине $z^3 - \frac{1}{8} = 0$. На основу тога, функција преноса посматраног дискретног система може се представити у облику $H(z) = H_0 \frac{1}{z^3 - \frac{1}{8}}$, где је H_0 константа коју је потребно одредити.

Константа се може потражити из другог услова о минималној вредности амплитудске фреквенцијске карактеристике. Амплитудска фреквенцијска карактеристика дискретног

⁶⁴У општем случају, различитих n -тих коренова броја $z = \rho e^{j\theta} \in \mathbb{C}$ има n , и дати су изразом $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \exp jk \frac{\theta + 2\pi k}{n}$, где је $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

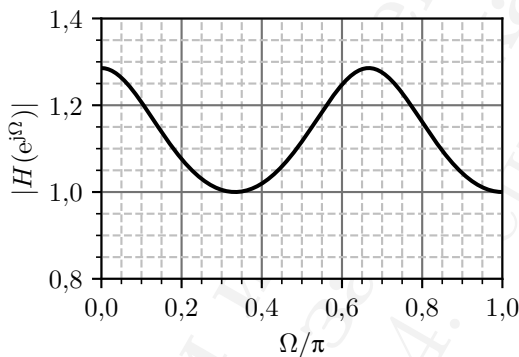
система одређена је као $|H(z)|$ где је $z = e^{j\Omega}$. На основу тога, даље се има⁶⁵

$$\begin{aligned}
 |H(z)|^2 &= \left(H_0 \frac{1}{z^3 - \frac{1}{8}} \right) \cdot \left(H_0 \frac{1}{z^3 - \frac{1}{8}} \right)^* = H_0^2 \frac{1}{\left(z^3 - \frac{1}{8} \right) \left((z^3)^* - \frac{1}{8} \right)} \\
 &= \frac{H_0^2}{\underbrace{(zz^*)^3}_{|e^{j\Omega}|^3=1} - \frac{1}{8} \underbrace{\left((z^3)^* + z^3 \right)}_{2\operatorname{Re}\{z^3\}=2\cos(3\Omega)} + \frac{1}{64}} = \frac{H_0^2}{1 + \frac{1}{64} - \frac{1}{4}\cos(3\Omega)} \Rightarrow \\
 |H(e^{j\Omega})| &= \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{64} - \frac{1}{4}\cos(3\Omega)}}.
 \end{aligned}$$

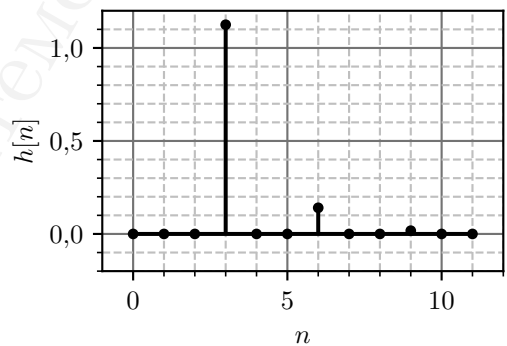
Минимум амплитудске фреквенцијске карактеристике постиже се за максималну вредност $\cos(3\Omega) = -1$, па је онда

$$|H(e^{j\Omega})|_{\min} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{64} + \frac{1}{4}}} = 1 \Rightarrow H_0 = \frac{9}{8}. \quad (110.1)$$

Дијаграм амплитудске карактеристике представљен је на слици 110.2а.



(а) Дијаграм амплитудске фреквенцијске карактеристике филтра



(б) Дијаграм импулсног одзива филтра

(б) Импулсни одзив датог филтра може се одредити растављањем на парцијалне раз-

⁶⁵Користи се идентитет $zz^* = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$. Такође се користе и особине комплексне конјукције $(z + w)^* = z^* + w^*$ и $(z/w)^* = z^*/w^*$, за $z, w \in \mathbb{C}$.

ломке, или алтернативно, развојем добијеног израза у степени ред⁶⁶ по z^{-1}

$$H(z) = \frac{9}{8} \frac{1}{z^3 - \frac{1}{8}} = \frac{9}{8} z^{-3} \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{1}{8} z^{-3}}_q} = \frac{9}{8} z^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k z^{-3k} \quad (110.2)$$

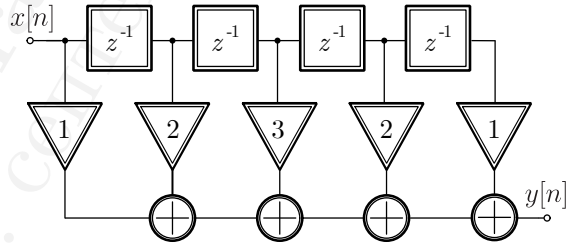
$$= \frac{9}{8} z^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k z^{-3(k+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{9}{8} \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} z^{-3m}, \quad (110.3)$$

при чему је у последњем кораку искоришћена смена $m = k + 1$. Овакав развој у ред је оправдан, јер сваки члан реда представља одбирке од којих сваки делује на само један тренутак времена, па у том смислу, не постоји проблем са конвергенцијом таквог развоја. Разматрањем финалног израза можемо да уочимо да он представља израчунавање \mathcal{Z} -трансформације по дефиницији $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$. Примећујемо да сигнал има само

одбирке у тренуцима $n = 3m$ када је одговарајућа вредност $x[n] = \frac{9}{8} \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}$, другим речима, може се писати

$$x[n] = \begin{cases} \frac{9}{8} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{n}{3}-1} & , 3|n \wedge n \geq 3 \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases} \quad (110.4)$$

111. У FIR филтру приказаном на слици употребљени су идеални блокови за кашњење, идеални множачи константом и идеални сабирачи. Одредити функцију преноса датог филтра $H(z)$ и одредити његов импулсни одзив $h[n]$. Скицирати његову амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику.



Слика 111.1

Помоћ: Може се искористити резултат множења полинома $(1 + x + x^2)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$.

⁶⁶Користи се развој $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$, у случају када је $|q| < 1$.

РЕШЕЊЕ

Пратећи ток сигнала на блок дијаграму, функција преноса датог филтра је $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$. Његов импулсни одзив се одређује помоћу табличног пара Т.9.1 и правила о померању у временском домену па је $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$. На основу дате напомене, може се писати $H(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2})^2$, па се применом обрасца са суму геометријске прогресије⁶⁷ добија

$$H(z) = \left(\frac{1 - z^{-3}}{1 - z^{-1}} \right)^2 \quad (111.1)$$

Добијени облик се може поједноставити сређивањем до супротних експонената z , па затим преласком у облик $z = \rho e^{j\Omega}$, као

$$H(z) = \left(\frac{z^{-3/2}(z^{3/2} - z^{-3/2})}{z^{-1/2}(z^{1/2} - z^{-1/2})} \right)^2 = \left(z^{-1} \frac{\rho(e^{j3\Omega/2} - e^{-j3\Omega/2})}{\rho(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})} \right)^2 \quad (111.2)$$

$$= \left(z^{-1} \frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right)^2 \rho^2 e^{-j2\Omega} \left(\frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right)^2 \quad (111.3)$$

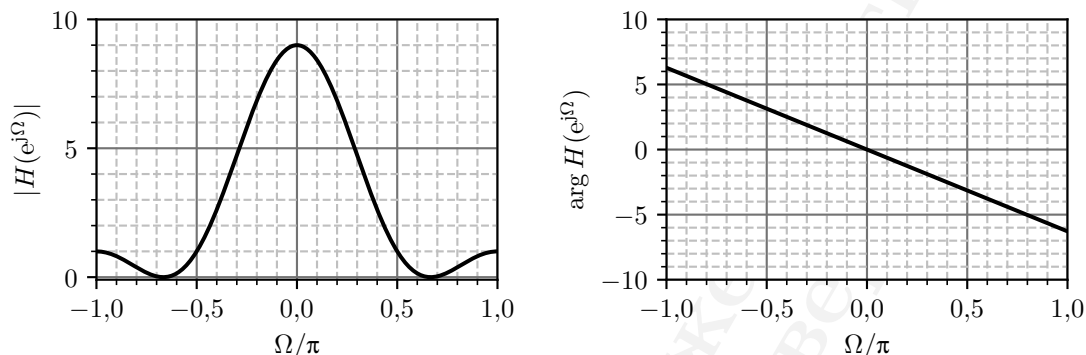
Амплитудска и фазна фреквенцијска карактеристика траже се у случају када је $z = e^{j\Omega}$, односно на јединичној кружници $\rho = 1$ па је

$$H(e^{j\Omega}) = \underbrace{\left(\frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right)^2}_{|H(e^{j\Omega})|} \exp \left(j \underbrace{-2\Omega}_{\arg H(e^{j\Omega})} \right) \quad (111.4)$$

Добијена амплитудска и фазна фреквенцијска карактеристика приказане су на слици 111.2

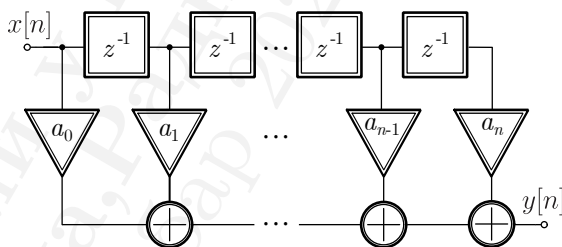
Добијени резултат одговара квадрату Дирихлеове функције, из задатка 93, што није случајност. Такав резултат последица је чињенице да се импулсни одзив датог филтра може представити и као конволуција два правоугаона прозора $h[n] = \text{rect}_1[n] * \text{rect}_1[n]$. Због тога, функција преноса разматраног филтра једнака је квадрату функције преноса филтра чији је импулсни одзив правоугаони прозор. Случајност није ни појава множења полинома, будући да множење полинома само по себи представља дискретну конволуцију њихових коефицијената, како је показано у задатку 61

⁶⁷Сума која се користи је $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, осим за $k = 1$ када је сума једнака $(n+1)q$.



Слика 111.2: Тражене амплитудска односно фазна карактеристика филтра.

112. У FIR филтру приказаном на слици употребљени су идеални блокови за кашњење, идеални множачи константом и идеални сабирачи. Познато је да функција преноса има једну m -тоструку нулу у $z = -1$, а да је појачање константног сигнала $H_0 = 1$. Одредити коефицијенте множача a_k , за $k = 0, 1, 2, \dots, n$, где је n број који треба том приликом одредити.

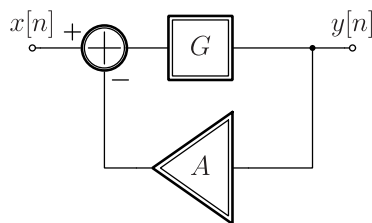


Слика 112.1

РЕЗУЛТАТ

Треба да буде $n = m$ а тражени коефицијенти су $a_k = \frac{1}{2^m} \binom{n}{k}$. Нагласимо да се добијени филтар назива још и биномни филтар. Пошто биномни коефицијенти апроксимирају Гаусову расподелу, овакав филтар се може користити за ефикасну хардверску реализацију Гаусовског НФ филтра.

113. У блок дијаграму дискретног система са слике позната је преносна функција $G(z) = \frac{1}{z-2}$. Израчунати појачање A идеалног појачавача тако да је дати систем представљен дијаграмом, $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ асимптотски стабилан



Слика 113.1

РЕШЕЊЕ

На основу датог блок дијаграма, улаз у систем $G(z)$ је $X(z) - AY(z)$ па се на основу карактеристике тог система има

$$Y(z) = G(z) (X(z) - AY(z)) \Rightarrow Y(z) = \underbrace{\frac{G(z)}{1 + AG(z)}}_{H(z)} X(z) \quad (113.1)$$

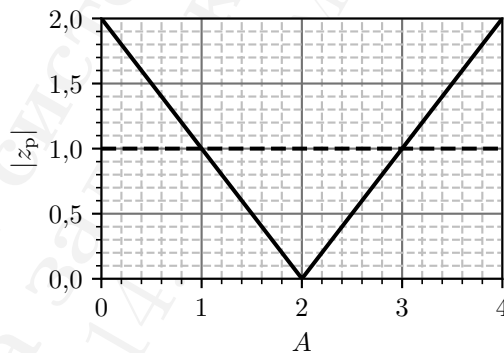
Добијена укупна функција преноса целог система се онда може поједноставити заменом датог облика $G(z)$ као

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + AG(z)} = \frac{\frac{1}{z-2}}{1 + \frac{A}{z-2}} = \frac{1}{z-2+A} \quad (113.2)$$

Стабилност дискретног система може се испитати провером структуре његових полова. Конкретно, област стабилности дискретних система јесте јединична кружница у z -равни. Уколико је једини пол посматраног система унутар те кружнице, систем је стабилан. У овом случају систем тај један пол се налази као корен полинома у имениоцу, као $z_p - 2 + A = 0$, односно

$$z_p = 2 - A. \quad (113.3)$$

У анализи дискретних система, стабилност система са једним полом зависи од његовог модула, односно од $|z_p| = 2 - A$. Дијаграм ове зависности приказан је на слици.



Слика 113.2: Зависност $|z_p|(A)$, критична вредност $z_p = 1$ учртана је испрекидано

Конечно, скуп свих вредности A за које је овај систем асимптотски стабилан је скуп решења неједначине $|z_p| < 1$, односно $1 < A < 3$.

114. У поједностављеном дигиталном комуникационом систему се информације преносе као сигнали дискретни у времену. Услед ефеката преноса информација обично се дешава да информација која се преноси у једном тренутку, задржавајући се на неки начин у каналу⁶⁸, утиче на излаз и у неколико наредних тренутака. Да би се то кориговало, користи се *еквилајзер* - филтар за обликовање сигнала тако да се поништи овај ефекат. Познато је да је импулсни одзив канала $h[n] = \delta[n] + 0,4\delta[n - 1]$. Односно, један импулс на улазу производи импулс на излазу као и још један мањи импулс, један тренутак касније.

- (а) Одредити преносну функцију филтра $F(z)$ који треба поставити након канала, тако да се поништи описани ефекат, односно, да се информације на излазу не преклапају.
- (б) Одредити импулсни одзив тог филтра у временском домену и графички приказати добијени резултат.
- (в) Реализовати такав филтар помоћу идеалних блокова за кашњење и множака.

РЕШЕЊЕ

(а) Функција преноса канала одређује се као \mathcal{Z} -трансформација импулног одзива⁶⁹ према

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \mathcal{Z}\{\delta[n]\} + 0,4\mathcal{Z}\{\delta[n - 1]\} = 1 + 0,4\frac{1}{z} = \frac{0,4 + z}{z}. \quad (114.1)$$

Каскадна веза датог канала и еквилајзера је функција преноса која је производ појединачних функција преноса као

$$W(z) = H(z)F(z) \quad (114.2)$$

Оно што је познато, јесте да еквилајзер треба да поништи ефекте канала, односно треба да буде као да сметњи које је додао канал није ни било, односно $W(z) = 1$, тиме је⁷⁰

$$F(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{z}{0,4 + z} \quad (114.3)$$

(б) Користећи таблични резултат 9.2 добија се импулсни одзив филтра у временском домену

$$f[z] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z - \underbrace{(-0,4)}_a}\right\} = (-0,4)^n u[n] \quad (114.4)$$

Добијени резултат приказан је на слици 114.1а

⁶⁸Што значи да је такав канал систем са меморијом, у случају електричног канала узрок су на пример реактивни елементи, а у случају преноса у оптичком влакну узрок је дисперзија.

⁶⁹Користи се таблична трансформација 9.1, као и правило о померању у времену.

⁷⁰Ова техника се назива и инверзно филтрирање, видети и задатак 100

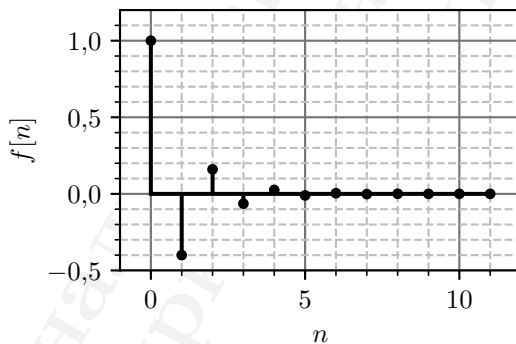
(в) Функцију преноса треба изразити у облику који је погодан за реализацију. Будући да је функција преноса блока за кашњење z^{-1} треба изразити све чланове у том облику. Сама функција преноса филтра представља однос одзива и побуде па је $F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{0,4 + z} = \frac{1}{1 + 0,4z^{-1}}$. Даље је $Y(z)(1 + 0,4z^{-1}) = X(z)$, па се одзив може изразити као

$$Y(z) = X(z) - 0,4z^{-1}Y(z) \quad (114.5)$$

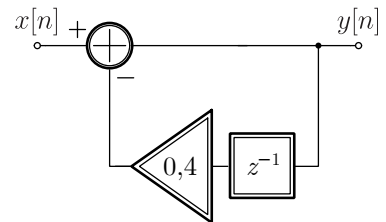
На основу тога, дати филтар се може реализовати како је приказано на слици 114.1б.

115. Функција преноса континуалног система дата је изразом $H(s) = \frac{K_0}{\tau^{-1} + s}$, где су $K_0 = 2$ и $\tau = 0,5$ [s]. За симулацију овог система на дигиталном рачунару оваквог, потребно је овакав континуални модел дискретизовати. Један од начина да се то уради јесте да се одредити импулсни одзив $h(t)$, па да се на основу њега одреди дискретизовани импулсни одзив $\hat{h}[n] = T_s h(nT_s)$, где је T_s периода дискретизације. На основу дискретизованог импулсног одзива одреди се дискретан модел $\hat{H}(z) = \mathcal{Z}\{\hat{h}[n]\}$.

- (а) Одредити импулсни одзив $h(t)$ и његов дискретизовани еквивалент $\hat{h}[n]$.
- (б) Одредити функцију преноса дискретизованог система $\hat{H}(z)$.
- (в) Одредити одзив $f(t)$ континуалног система $H(s)$ на континуалну побуду $u(t)$.
- (г) Одредити одзив $\hat{f}[n]$ дискретизованог система $\hat{H}(z)$ на еквивалентну дискретну побуду $u[n]$.



(а) Импулсни одзив филтра $f[n]$.



(б) Реализација задатим компонентама.

- (д) Посматрајући континуални одзив из тачке (в) и дискретни одзив из тачке (г), упоредити их у одговарајућим тренуцима, одређивањем њихове разлике $\epsilon[n] = f(nT_s) - \hat{f}[n]$, која заправо представља меру грешке дискретизованог модела. Одредити грешку овакве дискретизације $\epsilon[\infty]$ у случају када је $T_s \ll \tau$.

РЕШЕЊЕ

(а) Полазећи од дате функције преноса континуалног система таблично, на основу Т.7.6 се одређује његов импулсни одзив као

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)\} = K_0 e^{-t/\tau} u(t). \quad (115.1)$$

(б) Према описаном поступку, дискретизована верзија овог сигнала добија се као

$$\hat{h}[n] = T_s h(nT_s) = K_0 T_s e^{-nT_s/\tau} u(nT_s) = K_0 T_s a^n u[n], \quad \text{где је } a = e^{-T_s/\tau} \quad (115.2)$$

Користећи таблични резултат Т.9.2 добија се дискретан еквивалент

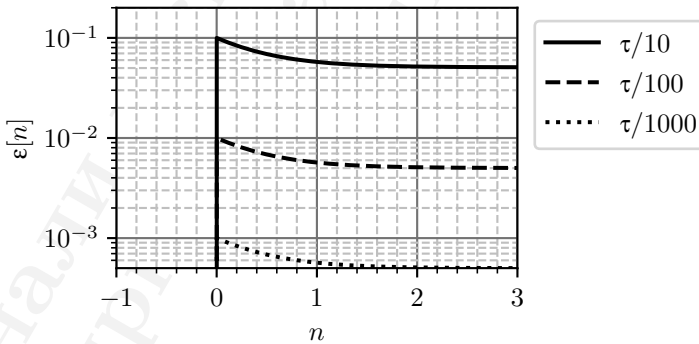
$$\hat{H}(z) = K_0 T_s \frac{z}{z - a} \quad (115.3)$$

(в) Одскочни одзив континуалног система налазимо помоћу инверзне Лапласове трансформације као

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_0}{s(s + \tau^{-1})} \right\} = K_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) u(t) \quad (115.4)$$

(г) Одскочни одзив дискретизованог система налази помоћу инверзне \mathcal{Z} -трансформације

$$\hat{f}[n] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z - 1} \cdot \hat{H}(z) \right\} = K_0 T_s \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z^2}{(z - 1)(z - a)} \right\} = K_0 T_s \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n] \quad (115.5)$$



Слика 115.1: Грешка дискретизације за различите T_s .

(д) Континуалан сигнал у дискретним тренуцима $t = nT_s$ има вредности

$$f(nT_s) = K_0\tau(1 - e^{-nT_s/\tau})u(t) = K_0\tau(1 - a^n)u[n], \quad (115.6)$$

па је онда

$$\epsilon[n] = f(nT_s) - \hat{f}[n] = \left(K_0\tau(1 - a^n) - K_0T_s \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right) u[n] \quad (115.7)$$

Заменом конкретних вредности $T_s \in \left\{ \frac{\tau}{10}, \frac{\tau}{100}, \frac{\tau}{1000} \right\}$ Када n постаје велико тада је

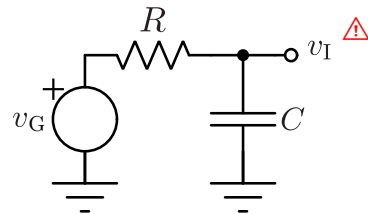
$$\epsilon[\infty] = K_0 \left(\tau(1 - a^\infty) + \frac{T_s}{1 - a}(1 - a^{\infty+1}) \right) = K_0 \left(\tau + \frac{T_s}{1 - a} \right) \quad (115.8)$$

У случају када је $T_s/\tau \ll 1$ параметар a се може апроксимирати линеарним чланом Тејлоровог реда⁷¹ у облику $e^{-T_s/\tau} \approx 1 + T_s/\tau$, па се заменом у 115.8 има резултат

$$\epsilon[\infty] = K_0 \left(\tau + \frac{T_s}{-T_s/\tau} \right) = K_0(\tau - \tau) = 0. \quad (115.9)$$

На овај начин је показано да се смањивањем периода дискретизације могу ублажити ефекти који су описани у овом задатку. На овој идеји се темељи низ различитих метода дискретизације континуалних система, а уопштењем поступка се добија тзв. *импулсно-инваријантна трансформација*. На сличан начин, дискретизацијом одскочног одзива изводи се тзв. *сигнално-инваријантна трансформација*. Овакве теме имају значајно место код система дигиталног управљања где је потребно добити дигитални модел управљаног система који је у природи континуалан.

116. У колу приказаном на слици познати су R и C . Облик напона напонског генератора је униполарна поворка правоугаоних импулса, која почиње у тренутку $t = 0$, а која је дефинисана у задатку 22, а познати су V_m , $0 \leq D \leq 1$ и T . (а) Ако је $n \geq 0$ број протеклих периода побудног напона, одредити диференцијалну једначину за излазни напон $\Phi(v_I[n], v_I[n+1])$ преко задатих параметара. (б) Ако је $v_I[0] = 0$, одредити излазни напон $v_I[n]$, где је n број протеклих периода улазног сигнала.



Слика 116.1

⁷¹Користи се апроксимација $e^x \approx 1 + x$, за $x \ll 1$.

РЕШЕЊЕ

Задатак се може решити применом Лапласове и \mathcal{Z} -трансформације. Лапласовом трансформацијом се разматра понашање система током једног периода, док се \mathcal{Z} -трансформацијом ти различити периоди повезују. Посматрамо време $0 < t < T$ након n периода улазног напона, у оквиру тога сматрамо да је $v_I[n]$ позната величина док $v_I[n+1]$ треба одредити. Применом заменске шеме за кондензатор, као и заменом уопштених комплексних импеданси коло се може поједноставити. Такво коло онда представља уопштени напонски разделник па је онда

$$V_I(s) = \frac{v_I[n]R + V_G(s)\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{v_I[n]sRC + V_G(s)}{sRC + 1} = \frac{v_I[n]s\tau + V_G(s)}{s\tau + 1}, \quad (116.1)$$

при чему је уведен параметар $\tau = RC$ као временска константа система. Лапласова трансформација побудног напона је $V_G = V_m \frac{1 - e^{-sDT}}{s}$, па се заменом добија

$$V_I(s) = \frac{v_I[n]s\tau + V_m \frac{1 - e^{-sDT}}{s}}{s\tau + 1} = \frac{v_I[n]s\tau}{s\tau + 1} + \frac{V_m(1 - e^{-sDT})}{s(s\tau + 1)}, \quad (116.2)$$

Расстављањем на парцијалне разломке, као у додатку Ђ, други сабирак се може расписати као

$$V_I(s) = V_m(1 - e^{-sDT}) \frac{1}{s(s\tau + 1)} = V_m(1 - e^{-sDT}) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \tau^{-1}} \right). \quad (116.3)$$

Заменом добијеног резултата у (116.2), па одређивањем инверзне Лапласове трансформације, се налази резултат у временском домену

$$v_I(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_I(s)\} \quad (116.4)$$

$$= v_I[n]e^{-t/\tau}u(t) + V_m(1 - e^{-t/\tau})u(t) - V_m(1 - e^{-(t-DT)/\tau})u(t - DT). \quad (116.5)$$

За успостављање тражене диференчне везе, релевантна је вредност $v_I(t = T) = v_I[n+1]$, па се заменом има

$$v_I(T) = v_I[n]e^{-T/\tau} + V_m(1 - e^{-T/\tau}) - V_m(1 - e^{-(1-D)T/\tau}) \quad (116.6)$$

$$= v_I[n]e^{-T/\tau} + V_m(1 - e^{-T/\tau}) - V_m(1 - e^{-(1-D)T/\tau}) \quad (116.7)$$

$$= v_I[n]e^{-T/\tau} + V_m(e^{-(1-D)T/\tau} - e^{-T/\tau}). \quad (116.8)$$

Тражена диференцна једначина се онда може записати у облику

$$v_I[n+1] = \alpha v_I[n] + \beta V_m, \quad \text{где су} \quad \alpha = e^{-T/\tau}, \quad \beta = e^{-(1-D)T/\tau} - e^{-T/\tau}. \quad (116.9)$$

(б) Диференцна једначина добијена у (116.9) може се решити применом \mathcal{Z} -трансформације према:

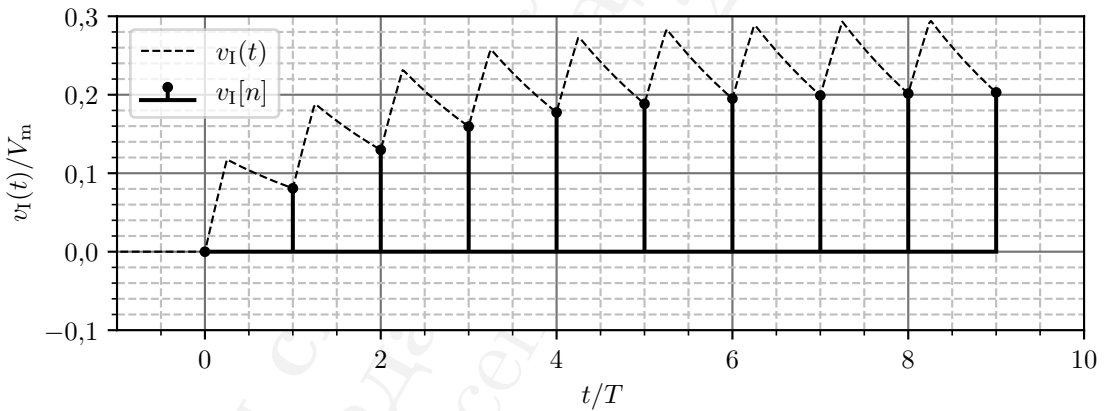
$$\mathcal{Z} \{v_I[n+1]\} = \alpha \mathcal{Z} \{v_I[n]\} + \beta \mathcal{Z} \{V_m\} \quad (116.10)$$

$$zV_I(z) - \cancel{zv_I[0]}^0 = \alpha V_I(z) + \frac{\beta V_m z}{z-1}. \quad (116.11)$$

Решавањем добијене једнакости по $V_I(z)$ па применом инверзне \mathcal{Z} -трансформације налази се

$$V_I(z) = \frac{\beta V_m z}{(z-1)(z-\alpha)} \Rightarrow v_I[n] = \mathcal{Z}^{-1} \{V_I(z)\} = \beta V_m \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} u[n]. \quad (116.12)$$

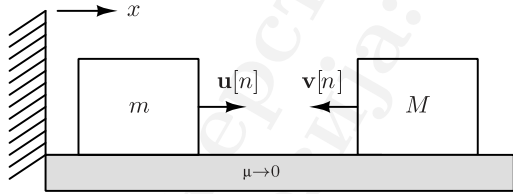
Добијени резултат је илустрован на слици 116.2 за један одабрани конкретан сет параметара. Такође, примећује се да је облик сигнала одзива завистан само од параметара T/τ .



Слика 116.2: Уз резултат задатка, $T/\tau = 2$, $D = 25\%$, приказан је континуални резултат, као и низ добијен као резултат задатка.

6.2 Системи диференцих једначина

▲ 117. У механичком систему са слике познат је однос маса крутих блокова $\alpha = \frac{M}{m}$. Зид са леве је веома масиван и практично непокретан, а са десне стране подлога се протеже у бесконачност. Занемарити трење између подлоге и блокова, $\mu \rightarrow 0$. У почетном тренутку су вектори брзина блокова $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i}_x$ и $\mathbf{u} = 0$ ($v_0 > 0$).



Слика 117.1

Након k међусобних судара блокова су њихови алгебарски интензитети брзина $v[k]$ и $u[k]$.
(а) Одредити низове $v[k]$ и $u[k]$. Одредити (б) укупан број судара између блокова у процесу, N , ако је $\alpha = 400^m$, где је m цео број. Сматрати да су сви судари у систему *апсолутно еластични*.

Помоћ. Након апсолутно еластичног судара, дуж правца, између блокова масе m_1 и m_2 почетних алгебарских интензитета брзина u_1 и u_2 њихови нови алгебарски интензитети брзина су $v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$ и $v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2$ редом. Референтни смерови брзина блокова су један ка другом.

РЕШЕЊЕ

Пошто се судари дешавају у дискретним временским тренуцима док је између њих стање система непроменљиво, процес представљен у задатку се може сматрати *дискретним* у односу на текући број судара. Стање након k -тог судара описано је системом датих диференцих једначина као

$$v[k+1] = \frac{M-m}{M+m} v[k] + \frac{2m}{M+m} (-u[k]) \quad (117.1)$$

$$u[k+1] = \frac{2M}{M+m} v[k] + \frac{m-M}{M+m} (-u[k]), \quad (117.2)$$

Важно је нагласити да се у једначинама појављује $-u[k]$ будући да леви блок у судару учествује *након* одбијања о зид са леве стране што доводи до промене знака брзине тог блока. Елиминисањем конкретних маса преко задатог параметра α има се

$$v[k+1] = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} v[k] - \frac{2}{\alpha+1} u[k] \quad (117.3)$$

$$u[k+1] = \frac{2\alpha}{\alpha+1} v[k] - \frac{1-\alpha}{\alpha+1} u[k] \quad (117.4)$$

(б) Одређивање одзива система обавља се применом Z -трансформације уз уважавање

почетних услова⁷² чиме се добија

$$z(V(z) - v_0) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}V(z) - \frac{2}{\alpha + 1}U(z) \quad (117.5)$$

$$z(U(z) - v_0) = \frac{2\alpha}{\alpha + 1}V(z) - \frac{1 - \alpha}{\alpha + 1}U(z) \quad (117.6)$$

Сређивањем израза у форму система алгебарских једначина по $V(z)$ и $U(z)$ има се.

$$-zv[0] = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} - z\right)V(z) - \frac{2}{\alpha + 1}U(z) \quad (117.7)$$

$$0 = \frac{2\alpha}{\alpha + 1}V(z) - \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha + 1} + z\right)U(z) \quad (117.8)$$

Решавањем система једначина налазе се резултати:

$$U(z) = \frac{2\alpha v_0 z}{z^2 + 2z\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} + 1} \quad (117.9)$$

$$V(z) = \frac{v_0 z \left(z + \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right)}{z^2 + 2z\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} + 1} \quad (117.10)$$

Непосредном идентификацијом, одређујемо инверзну \mathcal{Z} -трансформацију добијених резултата: $u[k] = v_0\sqrt{\alpha}\sin(k\Omega_0)$ и $v[k] = v_0\cos(k\Omega_0)$, где је $\Omega_0 = \arccos\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)$.

Блокови ће наставити сударање све док након k судара брзина десног блока у десно не постане већа од брзине левог блока – односно, када након одбијања левог блока о зид он не буде могао да сустигне већи блок. То је изражено условом у облику $-v[k] \geq u[k]$. Гранично решење потражимо у скупу реалних бројева сменом $k \mapsto t$ као

$$-v_0\cos(t\Omega_0) = v_0\sqrt{\alpha}\sin(t\Omega_0) \Rightarrow \cos(t\Omega_0) = -\sqrt{\alpha}\sin(t\Omega_0) \Rightarrow \tan(t\Omega_0) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (117.11)$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\Omega_0} \left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + \pi \right) \quad (117.12)$$

$$\Rightarrow k_{\max} = N = \lfloor t \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\Omega_0} \left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + \pi \right) \right\rfloor \quad (117.13)$$

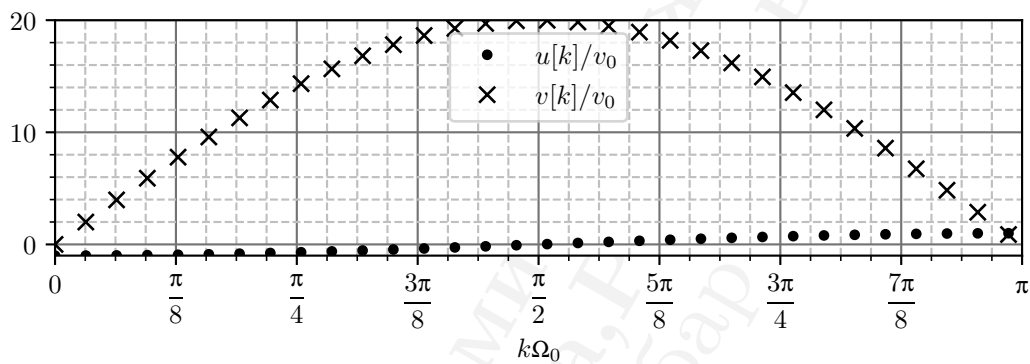
Размотримо шта се дешава када α постаје велико. Тада је $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \rightarrow 0$, а добијена дискретна кружна учестаност се може апроксимирати у околини јединице помоћу

⁷²Користи се теорема $\mathcal{Z}\{x[n + 1]\} = z(\mathcal{Z}\{x[n]\} - x[0])$.

Тејлоровог развоја⁷³ поступком

$$\Omega_0 = \arccos\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2}{\alpha+1}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \quad (117.14)$$

Заменом добијене апроксимације у израз 117.13 добија се резултат: $N = \lfloor \pi\sqrt{\alpha}/2 \rfloor$. Односно, уколико је $\alpha = 400^m$ онда је $N = \lfloor 10^m \pi \rfloor$, дакле, првих m цифара броја π (!) На слици 117.2 приказан је један пример сигнала $v[k]$ и $u[k]$ за $\alpha = 400$.



Слика 117.2: Пример за $\alpha = 400$, укупно $N = \lfloor 10\pi \rfloor = 31$ судара.

⁷³Када је $x \rightarrow 0$ тада је $\arccos(1-x) \approx \sqrt{2x}$

Додатак А

Решавање диференцијалних једначина

Увод

Диференцијалне једначине су једначине које су дефинисане над бројевним низовима $x[n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Називају се још и *рекурентним једначинама* будући да дају везу између n -тог члана и преосталих чланова низа (рекурентна/рекурзивна веза). У том смислу, диференцијална једначина k -тог реда је, на пример, једначина облика:

$$\Phi(x[n], x[n-1], \dots, x[n-k]) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Еквивалентно, овакве једначине могу се формулисати и дефинисањем текућег у односу на претходне и наредне чланове низа. Додатно, за јединствено решење диференцијалне једначине k -тог реда потребно је познавати k вредности низа, на пример. $x[0], x[-1], \dots, x[-k+1]$ (тзв. помоћне вредности) што је еквивалентно почетним условима диференцијалних једначина. Решења диференцијалне једначине се у општем случају не налазе једноставно (налик на диференцијалне једначине). Ипак, постоји поступак решавања за конкретан облик диференцијалних једначина погодан за примену у анализи линеарних система о коме ће бити речи и у овом документу.

Најједноставнија диференцијална једначина је једначина

$$x[n] = kx[n-1], \quad (\text{A.2})$$

где је $k \in \mathbb{R}$ позната константа. Уколико усвојимо да је $x[0] = a$ лако се уочава шема:

$$x[1] = kx[0] = ka \quad (\text{A.3})$$

$$x[2] = kx[1] = k \cdot ka = k^2a \quad (\text{A.4})$$

$$x[3] = kx[2] = k \cdot k^2a = k^3a \quad (\text{A.5})$$

$$\vdots \quad (\text{A.6})$$

Односно, уочава се да је решење $x[n] = k^n a$. Практично, на основу формулације такве диферендне једначине поставља се као природно решење скалирана експоненцијална функција $x[n] = Ck^n$. Ово је слично као у случају диференцијалних једначина где су природна решења облика $e^{\lambda x}$. У оба случаја, заједничко је то да под трансформацијом која дефинише једначину (у случају диференцијалне једначине то је извод, а у случају диферендне једначине то је *кашњење*) природно решење *не мења облик*:

$$e^{\lambda t} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \lambda e^{\lambda t} \sim e^{\lambda t} \quad (\text{A.7})$$

$$\lambda^n \xrightarrow{n \mapsto n-1} \lambda^{n-1} = \frac{1}{\lambda} \lambda^n \sim \lambda^n \quad (\text{A.8})$$

Односно, као што решења линеарних диференцијалних једначина треба тражити у облику $e^{\lambda x}$ тако решења линеарних диференцијалних једначина треба тражити у облику λ^n .

Линеарне хомогене диферендне једначине са константним коефицијентима

Обична линеарна хомогена диферендна једначина k -тог реда са константним реалним коефицијентима је једначина облика:

$$a_k x[n] + a_{k-1} x[n-1] + a_{k-2} x[n-2] + \dots + a_0 x[n-k] = 0, \quad (a_j \in \mathbb{R}) \quad (\text{A.9})$$

или у еквивалентном облику

$$a_k x[n+k] + a_{k-1} x[n+k-1] + \dots + a_0 x[n] = 0 \quad (a_j \in \mathbb{R}) \quad (\text{A.10})$$

Где је познато k вредности за $x[n]$. Претпостављајући облик решења у облику $x[n] = \lambda^n$ и заменом у (A.10) има се:

$$a_k \lambda^{n+k} + a_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \dots + a_0 \lambda^n = 0 \Rightarrow \quad (\text{A.11})$$

$$\lambda^n (a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_0) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Члан у загради у изразу (A.12) назива се *карактеристичним полиномом* диферендне једначине:

$$P(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_0 \quad (\text{A.13})$$

Добијени полином је исти и за другу варијанту диференцне једначине као из израза (А.9). Степен полинома одговара реду диференцне једначине $\deg P = k$, и једнак је броју линеарно независних партикуларних решења диференцне једначине. Зависно од структуре скупа коренова овог полинома $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ одређују се и сама партикуларна решења полазне диференцне једначине. Пошто је посматрана диференцна једначина линеарна, њено опште решење јесте свака линеарна комбинација њених партикуларних решења, односно:

$$x[n] = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n. \quad (\text{A.14})$$

Уколико су неки од коренова вишеструки, јасно је онда да сви чланови λ_i^n нису линеарно независни. На пример, уколико је $\lambda_i = \lambda_j$ онда је $C_i \lambda_i + C_j \lambda_j = (C_i + C_j) \lambda_i$ само једно партикуларно решење. Показује се да је друго партикуларно решење у том случају $n \lambda_i^n$, односно, двоструком корену карактеристичног полинома λ_i одговарају два партикуларна решења λ_i^n и $n \lambda_i^n$. У општем случају корена λ_i вишеструкости q њему одговарају q партикуларних решења и то $\{\lambda_i^n, n \lambda_i^n, n^2 \lambda_i^n, \dots, n^{q-1} \lambda_i^n\}$.

Будући да су разматрани коефицијенти карактеристичног полинома реални, то његови евентуално комплексни корени $\underline{\lambda}_i = \rho e^{j\phi}$ морају имати комплексно конјуговани пар $\underline{\lambda}_j = \underline{\lambda}_i^* = \rho e^{-j\phi}$. Овим двома комплексним коренима одговарају и два линеарно независна партикуларна решења диференцне једначине и то су $\underline{\lambda}_i^n$ и $\underline{\lambda}_i^{*n}$. То се може записати и на следећи начин, применом тригонометријског облика комплексног броја:

$$C_i \underline{\lambda}_i^n + C_j \underline{\lambda}_i^{*n} = C_i \rho^n (\cos(n\phi) + j \sin(n\phi)) + C_j \rho^n (\cos(n\phi) - j \sin(n\phi)) \quad (\text{A.15})$$

$$= \underbrace{(C_i + C_j)}_{\underline{C}'_i} \rho^n \cos(n\phi) + \underbrace{j(C_i - C_j)}_{\underline{C}'_j} \rho^n \sin(n\phi) \quad (\text{A.16})$$

Дакле, као еквивалентан пар линеарно независних решења могу се посматрати и функције $\{\rho^n \cos(n\phi), \rho^n \sin(n\phi)\}$. На сличан начин, множењем са n^i , се могу добити и партикуларна решења за вишеструке комплексно конјуговане полове као у претходном случају.

Резиме

За једначине облика (А.10) или (А.9) дефинише се карактеристични полином (А.12) чији скуп коренова одређује партикуларна решења према обрасцу:

- Сваком једноструком реалном корену λ_i одговара тачно једно партикуларно решење λ_i^n .
- Сваком вишеструком реалном корену λ_i вишеструкости q одговара тачно q партикуларних решења $\{\lambda_i^n, n \lambda_i^n, n^2 \lambda_i^n, \dots, n^{q-1} \lambda_i^n\}$
- Сваком пару комплексно конјугованих коренова $\underline{\lambda}_i$ и $\underline{\lambda}_j = \underline{\lambda}_i^*$ одговарају два партикуларна решења и то $\{\rho^n \cos(n\phi), \rho^n \sin(n\phi)\}$.

- Сваком пару вишеструкости p комплексно конјугованих коренова λ_i и $\lambda_j = \lambda_i^*$ одговарају $2p$ партикуларних решења и то

$$\{\rho^n \cos(n\phi), n\rho^n \cos(n\phi), n^2\rho^n \cos(n\phi), \dots, n^{p-1}\rho^n \cos(n\phi), \},$$

и

$$\{\rho^n \sin(n\phi), n\rho^n \sin(n\phi), n^2\rho^n \sin(n\phi), \dots, n^{p-1}\rho^n \sin(n\phi), \}.$$

тима је исцрпљен скуп могућности за коренове карактеристичног полинома. Имајући свих k линеарно независних партикуларних решења $x_{p,i}[n]$ има се коначно опште решење диференцне једначине у облику:

$$x[n] = C_1 x_{p,1}[n] + C_2 x_{p,2}[n] + \dots + C_k x_{p,k}[n]. \quad (\text{A.17})$$

Примери

Пример 1. Одредити решење диференцне једначине

$$x[n] - 4x[n-1] + 5x[n-2] - 4x[n-3] + 4x[n-4] = 0 \quad (\text{A.18})$$

ако су познате помоћне вредности $x[0] = 0$, $x[1] = 1$, $x[2] = 11$, $x[3] = 41$.

Решење: Карактеристични полином је $P(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4$. Коренове полинома степена већег од два у општем случају није лако наћи. Ипак, постоје неке препоруке за „погађање“ корена. На пример, уколико су сви корени целобројни, онда морају делити слободни члан. Дакле, потенцијални кандидати за целобројне корене су у овом случају $\{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$. Лако се проверава да су $P(1) = 1$, $P(-1) = 18$, $P(2) = 0$, $P(-2) = 80$, $P(4) = 68$, $P(-4) = 612$. Односно, један од коренова је 2. Да би се пронашли остали корени, потребно је полином поделити са $(\lambda - 2)$ што се може извести на више начина а најефикаснији је применом Хорнерове шеме:

	λ^4	λ^3	λ^2	λ^1	1	
	1	-4	5	-4	4	
2	1	-2	1	-2		$\Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2$

Поново се утврђује провером да је целобројни корен овог полинома 2, односно, поступак треба поновити још једном:

	λ^3	λ^2	λ^1	1	
	1	-2	1	-2	
2	1	0	1		$\Rightarrow \lambda^2 + 1$

Преостали су још само корени полинома $\lambda^2 + 1$ што су $\{j, -j\}$.

Коначно, сви корени карактеристичног полинома су $[2, 2, j, -j]$. Двоструком корену $\lambda_1 = 2$ одговарају два партикуларна решења и то $x_{p,1}[n] = 2^n$ и $x_{p,2}[n] = n2^n$. Конјугованом

пару $\{j, -j\}$ одговарају два партикуларна решења. $\left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\}$ Опште решење је облика:

$$x[n] = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C_4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{A.19})$$

Заменом помоћних вредности у добијено опште решење добија се систем једначина:

$$\begin{aligned} x[0] &= 0 = C_1 + C_3 \\ x[1] &= 1 = 2C_1 + 2C_2 + C_4 \\ x[2] &= 11 = 4C_1 + 8C_2 - C_3 \\ x[3] &= 41 = 8C_1 + 24C_2 - C_4. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Решавањем добијеног система једначина добијају се непознате константе $C_1 = -1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 1$, $C_4 = -1$. Заменом у опште решење и сређивањем добија се коначни резултат

$$x[n] = (2n - 1)2^n + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{A.21})$$

■

Пример 2. Одредити решење диференцне једначине

$$x[n] + x[n-1] - x[n-2] - x[n-3] = 0 \quad (\text{A.22})$$

које задовољава $x[0] = 2$, $x[1] = -1$ и $x[2] = 3$.

Решење: Карактеристични полином је $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$. Полином се може директно факторисати

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 \quad (\text{A.23})$$

$$= \lambda^2(\lambda + 1) - (\lambda + 1) \quad (\text{A.24})$$

$$= (\lambda^2 - 1)(\lambda + 1) \quad (\text{A.25})$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2. \quad (\text{A.26})$$

Такав карактеристични полином има корене $[1, -1, -1]$ на основу чега има опште решење:

$$x[n] = C_1 + (C_2 + C_3 n)(-1)^n. \quad (\text{A.27})$$

Заменом помоћних вредности добија се систем једначина:

$$\begin{aligned} x[0] &= 2 = C_1 + C_2 \\ x[1] &= -1 = C_1 - C_2 - C_3 \\ x[2] &= 3 = C_1 + C_2 + 2C_3 \end{aligned}$$

Решења овог система једначина су $C_1 = \frac{3}{4}$, $C_2 = \frac{5}{4}$, $C_3 = \frac{1}{2}$. Коначно решење примера је:

$$x[n] = \frac{3}{4} + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}n\right)(-1)^n \quad (\text{A.28})$$

Сигнали и системи у инжењерству
Збирка задатака, Радна верзија:
14. септембар 2025.

Додатак Б

Формуле за експоненцијалну побуду

Мотивација

У општем случају, решавање нехомогених диференцијалних и диференцијалних једначина облика

$$P(D)y(t) = x(t), \quad P(E)y[n] = x[n], \quad (\text{Б.1})$$

подразумева одређивање партикуларног дела решења $y_p(t)$ или $y_p[n]$. Одређивање хомогеног дела решења је формални поступак заснован на структури коренова карактеристичног полинома, као што је описано у додатку А. Међутим, када је у питању одређивање партикуларног дела, неретко је једини приступ паметно погађање решења засновано на искуству. У овом додатку, увешћемо формуле које представљају партикуларни део веома широке класе побудних сигнала.

Под експоненцијалним побудним сигналимa подразумевамо све сигнале у природном облику:

$$x(t) = Ce^{at}, \quad \text{односно} \quad x[n] = C\lambda^n, \quad (\text{Б.2})$$

где C , a , и λ у општем случају могу бити и комплексне константе.

На овај начин, могу се описати и сигнали, који се можда на први поглед не чине експоненцијални у природи. На пример:

- *Константни сигнал:* У континуалном случају, ако је $a = 0$ тада је $x(t) = C$; односно, у дискретном случају, ако је $\lambda = 1$ тада је $x[n] = C$.
- *Простој периодични сигнали:* У континуалном случају, ако је $a = j\omega$ и ако је $C = |C|e^{j\phi}$, тада је $x(t) = |C|e^{j\phi}e^{j\omega t} = |C|\cos(\omega t + \phi) + j|C|\sin(\omega t + \phi)$; односно, у дискретном случају,

ако је $\lambda = e^{j\Omega}$, $C = |C|e^{j\phi}$, тада је $y(t) = |C|e^{j\phi}e^{j\Omega n} = |C|\cos(\Omega n + \phi) + jC\sin(\Omega n + \phi)$. Ови резултати могу се искористити за одређивање одзива на побуде типа $\sin(\omega t)$, или $\cos(\omega t)$ како је показано у задатку 27.

- *Припушени експоненцијални сигнали:* Уколико на сличан начин као у претходној тачки, искористимо да је $a = \sigma + j\omega$ односно $\lambda = \Sigma e^{j\Omega}$, добијамо да су $x(t) = Ce^{\sigma t}\cos(\sigma t) + jCe^{\sigma t}\sin(\omega t)$, односно $x(t) = Ce^{\Sigma t}\cos(\Omega n) + jCe^{\Sigma n}\sin(\Omega t)$

Формуле за континуалне сигнале

За диференцијалну једначину у облику $P(D)y(t) = x(t)$ и експоненцијалну побуду облика $x(t) = Ce^{at}$, партикуларни део ће бити облика који зависи од параметра a . Конкретно, да ли параметар a припада скупу коренова полинома $P(D)$. Према томе, разликујемо следеће случајеве

- Ако параметар a није корен карактеристичног полинома $P(D)$, онда је партикуларни део

$$y_p(t) = \frac{Ce^{at}}{P(a)}.$$

- Ако је параметар a једноструки корен карактеристичног полинома $P(D)$, онда је партикуларни део

$$y_p(t) = \frac{Cte^{at}}{P'(a)}, \quad P'(a) = \left. \frac{dP(D)}{dD} \right|_{D=a}.$$

- Ако је параметар a вишеструки корен карактеристичног полинома $P(D)$, вишеструкости q , онда је партикуларни део

$$y_p(t) = \frac{Ct^q e^{at}}{P^{(q)}(a)}, \quad P^{(q)}(a) = \left. \frac{d^q P(D)}{dD^q} \right|_{D=a}.$$

Овај случај покрива и једноструки корен када је $q = 1$.

Формуле за дискретне сигнале

За диференцу једначину у облику $P(E)y[n] = x[n]$, и експоненцијалну побуду облика $x[n] = C\lambda^n$, партикуларни део ће бити облика који зависи од параметра λ . Конкретно, да ли параметар λ припада скупу коренова полинома $P(D)$. Према томе, разликујемо следеће случајеве

- Ако параметар λ *није* корен карактеристичног полинома $P(E)$, онда је партикуларни део

$$y_p[n] = \frac{C\lambda^n}{P(\lambda)}.$$

- Ако је параметар λ *једноструки* корен карактеристичног полинома $P(E)$, онда је партикуларни део

$$y_p[n] = \frac{Cn\lambda^{n-1}}{P'(\lambda)}, \quad P'(a) = \left. \frac{dP(E)}{dE} \right|_{E=\lambda}.$$

- Ако је параметар λ *вишеструки* корен карактеристичног полинома $P(E)$, вишеструкости q , онда је партикуларни део

$$y_p[n] = \frac{Cn^{(q)}\lambda^{n-q}}{P^{(q)}(\lambda)}, \quad P^{(q)}(\lambda) = \left. \frac{d^q P(E)}{dE^q} \right|_{E=\lambda},$$

где је $n^{(q)} = n(n-1)\cdots(n-q+1)$. Овај случај покрива и једноструки корен када је $q = 1$.

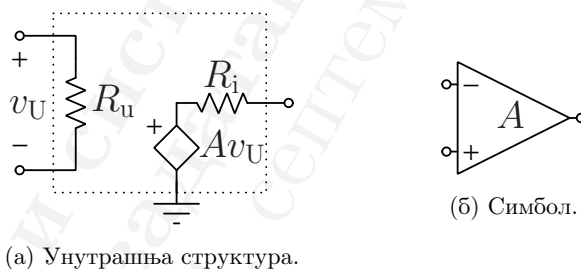
Сигнали и системи у инжењерству
Збирка задатака, Радна верзија:
14. септембар 2025.

Додатак В

Операциони појачавач и индуктивни елементи

Напонски диференцијални појачавач

Поједностављен модел реалног напонског диференцијалног појачавача без меморије, приказан на слици В.1а, карактерисан је својом улазном отпорношћу R_u , излазном отпорношћу R_i и напонским појачањем A напонски контролисаног напонског генератора. Има два улаза, један инвертујући (обележен са „-“) и један неинвертујући (обележен са „+“).



Слика В.1: Уз диференцијални појачавач

„+“). Шематски симбол представљен је на слици В.1б. Дobar диференцијални напонски појачавач задовољава да су $R_u \rightarrow \infty$, $R_i \rightarrow 0$. Такав диференцијални појачавач практично представља идеалан напонем контролисан напонски генератор, када је $v_I = Av_U$.

Негативна повратна спрега

Концепт који суштински мења начин употребе диференцијалног појачавача је са принцип реакције (повратне спреге). Блоков модел система са реакцијом приказан је блок дијаграмом на слици В.2а. У овом моделу, главни појачавач има појачање A_0 а мрежа повратне спреге појачање β . Појачање целокупног система се добија на основу блок дијаграма:

$$e = x - \beta y \quad (\text{В.1})$$

$$y = A_0 e, \quad (\text{В.2})$$

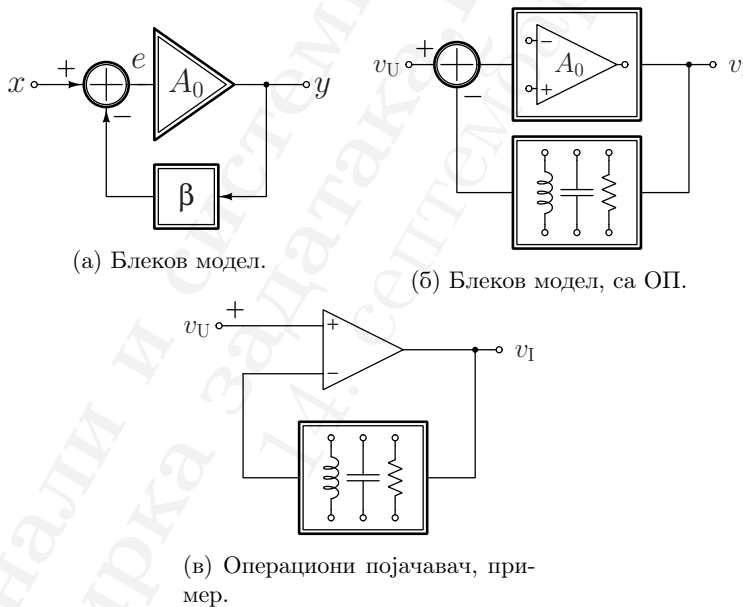
одакле се сређивањем добија појачање целог система $A = \frac{y}{x} = \frac{A_0}{1 + \beta A_0}$. Сигнал e назива

се још и *сигналом грешке*, а може се изразити преко улазног сигнала као $e = \frac{1}{1 + \beta A_0} x$.

Повратна спрега посебно добија на вредности када се размотри главни појачавач са веома великим појачањем, $A_0 \rightarrow \infty$. У том случају су $A_\infty = \lim_{A_0 \rightarrow \infty} \frac{A_0}{1 + \beta A_0} = \frac{1}{\beta}$ и $e_\infty =$

$\lim_{A_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \beta A_0} = 0$. Односно, за довољно велико појачање главног појачавача, карактери-

стике система са повратном спрегом диктира мрежа повратне спреге. Посебно, ова то-



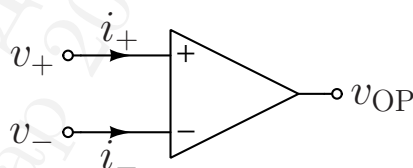
Слика В.2: Уз увођење принципа операционог појачавача.

положија се може реализовати, на пример, помоћу операционог појачавача са пасивном мрежом повратне спреге, што је илустровано на слици В.2б. Према пређашњој дискусији, карактеристике оваквог система зависе само од мреже повратне спреге ако је напонско појачање оваквог доброг диференцијалног појачавача веома велико. Такав диференцијални појачавач, ког кога је још и $A_0 \rightarrow \infty$, назива се **идеални операциони појачавач**. Идеални операциони појачавач најчешће обележавамо изостављањем ознаке напонског појачања. Разлика улазног и повратног сигнала која се појачава, у ваљано одабраној топологији (нпр. слика В.2в), мора бити разлика напона на улазима операционог појачавача, на основу чега резултат да је $e_\infty \rightarrow 0$ повлачи то да се у оваквом режиму изједначавају напони инвертујућег и неинвертујућег улаза. Важно је нагласити, да ово није једина тополошка опција, већ да се улазни и излазни сигнал могу одузимати и на другачије начине, што се може видети на разним примерима (нпр. инвертујући појачавач).

Коначно, уколико је операциони појачавач примењен у режиму повратне спреге онда се он може анализирати помоћу три правила која следе из пређашње анализе:

Идеалан операциони појачавач

- $i_+ = i_- = 0$ (јер је $R_u \rightarrow 0$)
- $v_+ = v_-$ (јер је $e_\infty \rightarrow 0$)
- Излаз има произвољну вредност, тако да су задовољени пређашњи услови, $-\infty < v_{OP} < \infty$.



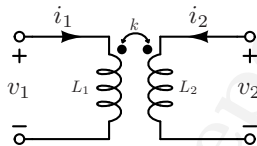
Индуктивни трансформатори

Спрегнути калемови

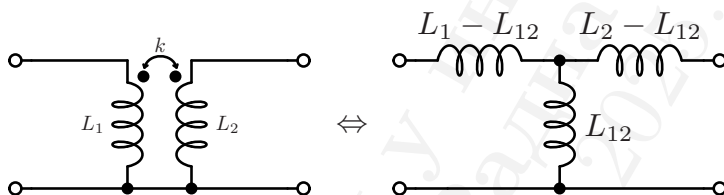
Физички модел на коме су утемељени индуктивни трансформатори је модел спрегнутих калемова. Магнетска спрега два посматрана линеарна намотаја, индуктивности L_1 и L_2 описује се међусобном индуктивношћу $L_{12} = L_{21}$ (за реципрочне средине). Коефицијент магнетске спреге се дефинише као апсолутна вредност међусобне индуктивности сведена на јединицу геометријске средине индуктивности појединих намотаја: $k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}}$, за знак међусобне индуктивности је одређен и смером мотања намотаја и шематски се обележава тачкама. Без додатних услова овакав пар спрегнутих калема описан је једначинама у временском домену:

Пар спрегнутих калемова

- $v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$
- $v_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$



За решавање проблема са спрегнутим калемовима, уколико су калемови кратко спојени са једне стране неретко је веома zgodно прво обавити *распрезање калемова* трансфигурацијом у еквивалентну Т-мрежу као на слици В.3. Будући да је ово трансфигурација, то подразумева да су ове две мреже еквивалентне у сваком смислу.



Слика В.3: Уз распрезање калемова.

Савршени трансформатор

Уколико је магнетска спрега трансформатора савршена, односно уколико нема магнетског расипања, $k = 1$, односно $L_{12} = \pm \sqrt{L_1 L_2}$, такав трансформатор се назива **савршеним**. Без умањења општости, претпоставимо да су референтни смерови напона намотаја одабрани тако да је $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$. Тада се елиминацијом струја из модела спрегнутих калемова може показати да важи $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$. Пошто је сопствена индуктивност намотаја сразмерна квадрату броја навојака $L_i \propto N_i^2$, онда је и

$$\boxed{\frac{v_1}{N_1} = \frac{v_2}{N_2}} \quad (\text{В.3})$$

Идеални трансформатор

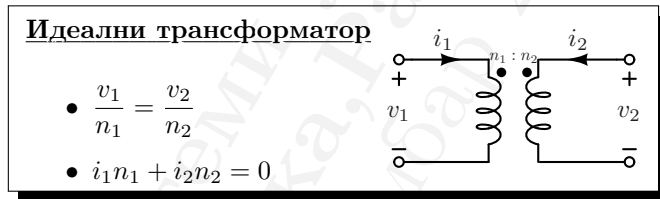
Уколико посматрамо савршени трансформатор и за контуру средње линије језгра напишемо Уопштени Амперов закон имамо једначину

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = \frac{Bl}{\mu_0 \mu_r}, \quad (\text{B.4})$$

где су B интензитет вектора магнетске индукције у језгру, l дужина средње линије језгра и μ_r релативна пермеабилност материјала од кога је израђено језгро. Представимо број навојака оба намотаја нормализовано као $N_i = n_i N_0$ и заменимо у израз (B.4). Тада n_i представља релативни број навојака у односу на нормализациони фактор N_0 . За N_0 се може одабрати, на пример, ред величине броја навојака оба намотаја. Уколико су $N_1 = 1000$ и $N_2 = 2000$ онда се може одабрати на пример $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$ за $N_0 = 1000$. Другим речима, са n_i кодификујемо релативан број навојака намотаја а са N_0 њихов ред величине. Са тиме у виду једначину (B.4) можемо записати и као:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \frac{Bl}{\mu_0 N_0 \mu_r} \quad (\text{B.5})$$

Сада, приметимо да уколико је $\mu_r N_0 \rightarrow \infty$ онда једначина постаје $n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$. Тиме се добија модел **идеалног** трансформатора описан са две **алгебарске** једначине:

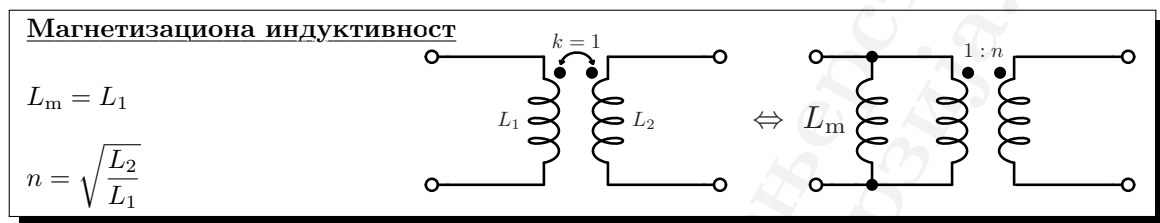


Иако се материјал језгра при пројектовању може одабрати тако да μ_r буде велико, на пример трафо-лимови ($\mu_r \sim 100$), доступни материјали постављају неку горњу границу пермеабилности. Са друге стране, инжењерским одабиром при пројектовању трансформатора може се одабрати велики број навојака намотаја тако да овај услов буде што боље задовољен. На пример, уколико се пројектује трансформатор који треба да удвостручава напон, одабир $(N_1, N_2) = (200, 100)$ је бољи од одабира $(N_1, N_2) = (20, 10)$. То је углавном разлог зашто су скоро сви практични трансформатори са веома великим бројем намотаја, јер је често циљ направити што *идеалнији* трансформатор. Ипак, постоје и неки нарочити изузеци, као на пример Теслин трансформатор. За тачно одређивање потребног броја навојака постоје и други критеријуми, али ћемо се зауставити на овој илустрацији.

Магнетизациона индуктивност

Савршен трансформатор може се представити и помоћу идеалног трансформатора и једне индуктивности. Положај те индуктивности се може одабрати тако да се решавање кола највише поједностави (са примарне или секундарне стране). Без доказа наводимо

трансфигурацију:



Додатак Г

Одређивање импулсног одзива континуалних *LTI* система

Циљ додатка је да обједини и појасни на примерима методе за одређивање импулсног одзива континуалних *LTI* система.

Поједностављење опште форме

Посматрајмо континуални *LTI* систем описан диференцијалном једначином облика

$$P(D)y(t) = Q(D)x(t), \quad (\Gamma.1)$$

где су $x(t)$ и $y(t)$ побуда и одзив система редом, а $P(D)$ и $Q(D)$ произвољни полиноми по оператору диференцирања D . Импулсни одзив овог система $h = h(t)$ представља одзив система на јединичну импулсну побуду $x(t) = \delta(t)$, односно решење једначине

$$P(D)h(t) = Q(D)\delta(t). \quad (\Gamma.2)$$

Уколико приметимо смену

$$\boxed{h(t) = Q(D)h_1(t)} \quad (\Gamma.3)$$

и заменимо у израз (Г.2), даље се може писати

$$P(D)h(t) = Q(D)\delta(t) \Leftrightarrow P(D)Q(D)h_1(t) = Q(D)\delta(t) \Leftrightarrow Q(D)P(D)h_1(t) = Q(D)\delta(t). \quad (\Gamma.4)$$

У последњем кораку, начињена је замена редоследа примене оператора, $P(D)Q(D) \equiv Q(D)P(D)$, која је оправдана на основу линеарности. У последњем кораку се може на

обе стране применити оператор $Q^{-1}(D)$, чију егзистенцију овде нећемо дискутовати, након чега преостаје резултат:

$$P(D)h_1(t) = \delta(t). \quad (\Gamma.5)$$

На основу претходно изнесеног поступка, могуће је одредити импулсни одзив система описаног једначином (Г.1) тако што се одреди помоћни одзив $h_1(t)$ помоћног система описаног једначином (Г.5) а потом трансформацијом добијеног помоћног одзива у одзив полазног система помоћу (Г.3)

Додатно, из практичних разлога постоји ограничење у степенима полинома $\deg P \geq \deg Q$. Уколико се импулсни одзив помоћног система запише у облику $h_1(t) = g(t)u(t)$, онда се могу разликовати случајеви:

$$h(t) = \begin{cases} Q(D)(g(t)u(t)), & \deg P = \deg Q \\ Q(D)(g(t))u(t), & \deg P > \deg Q \end{cases} \quad (\Gamma.6)$$

Одређивање импулсног одзива за поједностављену форму

На основу претходне дискусије, потребно је и довољно одредити решење једначине $P(D)h_1(t) = \delta(t)$. Препоручена метода за решавање овог проблема је (i) диференцирањем одскочног одзива (дискутовано на предавањима), али се може користити и (ii) поједностављена метода уклапања импулса (енг. *impulse matching*, дискутовано на вежбама).

Прва метода утемељена је на својству линеарности система. Нека је $s_1(t) = O\{u(t)\}$ одскочни одзив посматраног система, онда се диференцирањем обе стране изналази

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt}O\{u(t)\} = O\left\{\frac{d}{dt}u(t)\right\} = O\{\delta(t)\} = h_1(t), \quad (\Gamma.7)$$

при чему је у другом кораку замењен редослед примене оператора диференцирања и си-

стема због линеарности. Коначно се има закључак $\frac{ds_1(t)}{dt} = h_1(t)$, односно, **импулсни**

одзив се добија диференцирањем одскочног одзива. Одређивање одскочног одзива представља решавање диференцијалне једначине $P(D)s_1(t) = u(t)$. Велика предност у решавању на овај начин у односу на директно решавање једначине (Г.5) јесте то да у њој нема импулса што за последицу има то да је одскочни одзив непрекидан, тако да су једнаке преиницијалне и постиницијалне вредности за $s_1(t)$. Будући да се одскочни одзив одређује за преиницијалне услове равне нули то повлачи да су онда и постиницијални услови равни нули. Одскочни одзив добија се као збир хомогеног и партикуларног дела $s_1 = s_{1h} + s_{1p}$. Хомогени део се одређује на начин показан на часу. Партикуларни део представља усталени одзив на експоненцијалну побуду $e^{0 \cdot t}u(t)$ и на основу дискусије са часа вежби једнак

$$\text{je } s_{1P} = \frac{1}{P(0)}.$$

Друга метода утемељена је на особини линеарне независности различитих извода Диракових импулса. Може се показати да једначина облика:

$$a_0\delta(t) + a_1\delta'(t) + a_2\delta''(t) + \dots + a_n\delta^{(n)}(t) = 0, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (\Gamma.8)$$

по непознатим коефицијентима $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ има само тривијално решење $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. У контексту решавања диференцијалне једначине облика $P(D)h_1(t) = \delta(t)$ то значи да: (i) пошто се са десне стране налази Дираков импулс мора се налазити и са леве стране и (ii) пошто се са десне стране не налазе изводи Дираковог импулса њега не може бити ни са леве стране. На основу тога, у изразу $P(D)h_1(t)$ се мора појавити Дираков импулс и не сме се појавити његов први извод. Претпоставимо да се сабирак $f(t)\delta(t)$ јавља у k -том изводу импулсног одзива, $h_1^{(k)}(t)$, у том случају се у $(k+1)$ -вом изводу импулсног одзива мора наћи сабирак облика $f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$. Односно, да се не би са леве стране појавио извод Дираковог импулса, неопходно је да се импулс појављује тек у највишем изводу импулсног одзива који се јавља у једначини а то је $h^{(\deg P)}(t)$, где је $\deg P$ степен полинома P – ред диференцијалне једначине. Будући да се импулс јавља у $h^{(\deg P)}(t)$ то се Хевисајдова одскочна функција мора јављати у $h^{(\deg P-1)}(t)$, односно до прекида долази у $(\deg P - 1)$ -вом изводу. Будући да су интегрални Хевисајдове функције непрекидни, то је онда тај и једини извод импулсног одзива који има прекид. На основу тога, ако распишемо оператор система као $P(D) = c_0 + c_1D + c_2D^2 + \dots + c_nD^n$ једначина се може писати као

$$(c_0 + c_1D + c_2D^2 + \dots + c_nD^n)h_1(t) = \delta(t) \quad (\Gamma.9)$$

$$c_0h_1(t) + c_1h_1'(t) + c_2h_1''(t) + \dots + c_nh_1^{(n)}(t) = \delta(t) \quad (\Gamma.10)$$

Ако интегралимо обе стране добијене једначине $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}$ у произвољно „уским“ границама, $\varepsilon \rightarrow 0$, приметивши да онда интегрални свих ограничених функција теже нули преостаје само члан са импулсом:

$$\begin{aligned} c_0 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1(t) dt + c_1 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1'(t) dt + \dots + c_{n-1} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1^{(n-1)}(t) dt &= \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt}_{=1, \text{ по деф.}} \Rightarrow \\ c_nh_1^{(n-1)}(0^+) - c_nh_1^{(n-1)}(0^-) &= 1 \end{aligned} \quad (\Gamma.11)$$

Како су преиницијални услови приликом тражења импулсног одзива равни нули то преостаје $h_1^{(n-1)}(0^+) = \frac{1}{c_n}$. **Коначно су непосредно познати сви постиницијални услови**

импулсног одзива

$$h_1(0^+) = 0, \quad h_1'(0^+) = 0, \quad h_1''(0^+) = 0, \dots, \quad h_1^{(n-2)}(0^+) = 0, \quad h_1^{(n-1)}(0^+) = \frac{1}{c_n}, \quad (\text{Г.12})$$

где је c_n коефицијент уз највиши извод у диференцијалној једначини а n је ред диференцијалне једначине.

Пример 1. Одредити одзив система описаног диференцијалном једначином $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 2x(t)$, на побуду $x(t) = 2e^t u(t - 2)$.

Решење. Одзив на дату побуду $x(t)$ може се одредити конволуцијом. За примену конволуције потребно је прво одредити импулсни одзив система. Систем се може записати у облику (Г.1) за $P(D) = D^2 + 3D + 2$ и $Q(D) = D + 2$. Потражимо импулсни одзив помоћног система $P(D)h_1(t) = \delta(t)$.

1. метода (*диференцирањем одскочног одзива*). Импулсни одзив помоћног система тражимо као решење једначине

$$P(D)s_1(t) = u(t). \quad (\text{Г.13})$$

Импулсни одзив има хомогени део одређен коренима полинома P и то $\lambda \in \{-2, -1\}$. Облик хомогеног решења је онда $s_{1,h} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$. Партикуларни део је $s_{1,p} = \frac{1}{P(0)} = \frac{1}{2}$.

Коефицијенти у општем облику једначине одскочног одзива налазе се на основу постиницијалних почетних услова који су из раније наведених разлога равни нули.

$$s_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} \Rightarrow s_1(0) = 0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} \quad (\text{Г.14})$$

$$s_1'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} \Rightarrow s_1'(0) = 0 = -C_1 - 2C_2. \quad (\text{Г.15})$$

Решавањем добијеног система једначина по непознатим коефицијентима добија се $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Одакле се коначно налази одскочни одзив $s_1(t) = \left(-e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}\right)u(t)$.

Диференцирањем добијеног одскочног одзива добија се и импулсни одзив помоћног система

$$h_1(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$$

2. метода (*поједностављеном методом уклањања импулса*). Непосредно се решава једначина $P(D)h_1(t) = \delta(t)$. Општи облик импулсног одзива одређен је коренима полинома P на исти начин као у претходној методи, $h_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$. На основу закључка методе познати су постиницијални почетни услови као $h_1(0^+) = 0$, $h_1'(0^+) = 1$. Заменом у општи

облик добија се:

$$h_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \Rightarrow h_1(0^+) = 0 = C_1 + C_2 \quad (\Gamma.16)$$

$$h_1'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} \Rightarrow h_1'(0^+) = 1 = -C_1 - 2C_2, \quad (\Gamma.17)$$

$$(\Gamma.18)$$

решавањем добијеног система имају се $C_1 = -C_2 = 1$, одакле је $h_1(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$

Имајући импулсни одзив помоћног система, импулсни одзив полазног система налази се на основу (Г.3), одакле је

$$h(t) = Q(D)h_1(t) \Rightarrow h(t) = e^{-t} u(t). \quad (\Gamma.19)$$

Одзив на побуду може се потражити конволуцијом

$$y_p(t) = h(t) * x(t). \quad (\Gamma.20)$$

У овом случају је најефикасније применити својства конволуције. Побудни сигнал се може записати и као $x(t) = 2e^{t-2} u(t-2) = 2e^2 e^{t-2} u(t-2)$. Приметимо да је побудни сигнал временски померен и скалиран у односу на сигнал $x_1 = e^t u(t)$. Да би се израчунала конволуција (Г.20) згодно је искористити ово својство тако да се конволуција одговарајућим трансформацијама своди на табличну, или једноставнију конволуцију. На основу таблице је $y_{p,1} = h(t) * x_1(t) = e^{-t} u(t) * e^t u(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} u(t) = \sinh(t) u(t)$. На основу линеарности и временске инваријантности, пошто важи $x(t) = 2e^2 x_1(t-2)$ то је и $y_p(t) = 2e^2 y_{p,1}(t-2)$ одакле је

$$y_p(t) = 2e^2 \sinh(t-2) u(t-2) \quad (\Gamma.21)$$

■










Сигнали и системи у инжењерству
Збирка задатака, Радна верзија:
14. септембар 2025.

Сигнали и системи у инжењерству
Збирка задатака, Радна верзија:
14. септембар 2025.

Додатак Д

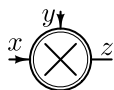
Преглед коришћених симбола у блок дијаграмима

Основне шематске ознаке

-  Систем, без меморије, представљен функцијом преноса $y = f(x)$.
-  Систем представљен оператором L .
-  Систем представљен својим импулсним одзивом, $h = h(t)$ односно $h = h[n]$.
-  Интегратор, $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, са нултим почетним условом.
-  Акумулатор, $y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$, са нултим почетним условом.
-  Диференцијатор, $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.
-  Идеални појачавач. Појачање се може уписати у симбол.
-  Блок за кашњење, $y(t) = x(t - \tau)$.
-  Дискретан блок за кашњење, $y[n] = x[n - N]$.



Сабирач, са произвољним улазним предзнаком сигнала, $z = \pm x \pm y$.



Множач/миксер/модулятор, $z(t) = K(x(t) \cdot y(t))$, $K = \text{const.}$

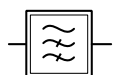
Фреквенцијски селективни филтри



Филтар пропусник ниских учестаности (НФ).



Филтар пропусник опсега учестаности (ПО).



Филтар пропусник високих учестаности (ВФ).



Филтар непропусник опсега учестаности (НО).

Сигнали и системи у инжењерству
Збирка задатака, Радна верзија:
14. септембар 2025.

Додатак Ђ

Растављање преносне функције на парцијалне разломке

Од значајног интереса за одређивање различитих инверзних трансформација јесте поступак растављања преносне функције облика $H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$, где су $P(s)$ и $Q(s)$ одговарајући полиноми са реалним коефицијентима, на парцијалне разломке. У том случају, корене полинома $Q(s)$ називамо нулама z_i , а корене полинома $P(s)$ половима p_i , те преносне функције. У општем случају се таква функција преноса може представити у облику

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}. \quad (\text{Ђ.1})$$

При чему се k онда назива појачањем система. У даљој дискусији, фактор k не прави разлику па ће се анализирати случај када је $k = 1$. Под парцијалним разломцима, подразумевамо суму чланова код којих се у имениоцу налазе полиноми који се не могу даље факторисати, или који представљају вишеструке полове функције преноса. У том смислу, размотрићемо неколико различитих специјалних случајева.

Преносна функција са различитим реалним коренима

Посматрајмо преносну функцију облика $H(s) = \frac{Q(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$, код које су сви p_i различити реални корени, а важи да је $\deg Q < n$. Онда се таква функција може представити у облику

$$H(s) = \frac{Q(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n}, \quad (\text{Ђ.2})$$

за шта је потребно одредити коефицијенте развоја A_1, A_2, \dots, A_n . Да бисмо израчунали коефицијент A_1 можемо да обе стране израза помножимо са $(s - p_1)$, ако је $s \neq p_1$ па се онда има резултат

$$\frac{Q(s)}{(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = A_1 + \frac{(s - p_1)A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{(s - p_1)A_n}{s - p_n}, \quad (\text{Ђ.3})$$

Уколико сада са обе стране потражимо граничну вредност израза $\lim_{s \rightarrow p_1}$, приметимо да је онда $s - p_1 \rightarrow 0$, док се лева страна израза може једноставно израчунати.

$$\underbrace{\frac{Q(p_1)}{(p_1 - p_2) \cdots (p_1 - p_n)}}_{\text{За } s \rightarrow p_1} = A_1 + \frac{\overset{0}{(s - p_1)A_2}}{s - p_2} + \cdots + \frac{\overset{0}{(s - p_1)A_n}}{s - p_n} = A_1. \quad (\text{Ђ.4})$$

На основу овог поступка може се формулисати општи сликовити поступак за извлачење коефицијента A_k .

Уколико је

$$\frac{Q(s)}{(s - p_1) \cdots (s - p_k) \cdots (s - p_n)} = \frac{A_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{A_k}{s - p_k} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n},$$

за p_i различите реалне вредности, онда се сваки коефицијент A_k може израчунати „прикривањем“ (односно уклањањем) члана $s - p_k$ из израза, па заменом $s \mapsto p_k$ у остатак, као

$$A_k = \frac{Q(s)}{(s - p_1) \cdots \cancel{(s - p_k)} \cdots (s - p_n)} \Big|_{s=p_k}.$$

Овај поступак основа је Хевисајдовог метода прикривања (енг. *Heaviside cover-up method*).

Пар комплексно конјугованих полова.

Размотримо преносну функцију која поред једног реалног пола, p , има и један пар комплексно конјугованих полова $p_{2,3} = \sigma \pm j\omega$, а која нема нула. Ради дискусије, пођимо од

облика растављеног на парцијалне разломке.

$$H(s) = \frac{A}{s-p} + \frac{B_1}{s-(\sigma+j\omega)} + \frac{B_2}{s-(\sigma-j\omega)} \quad (\text{Ђ.5})$$

$$= \frac{A}{s-p} + \frac{B_1(s-(\sigma-j\omega)) + B_2(s-(\sigma+j\omega))}{s^2 + 2\sigma s + \omega^2 + \sigma^2}. \quad (\text{Ђ.6})$$

$$= \frac{A}{s-p} + \frac{(B_1+B_2)(s-\sigma) + (B_1-B_2)j\omega}{s^2 + 2\sigma s + \omega^2 + \sigma^2}. \quad (\text{Ђ.7})$$

Будући да разматрамо само функције преноса са полиномима са реалним коефицијентима, то мора бити $\text{Im}\{B_1+B_2\}=0$ и $\text{Re}\{B_1-B_2\}=0$, па закључујемо да коефицијенти B_1 и B_2 морају имати конјуговано-комплексну симетрију $B=B_1=B_2^*$. Коефицијент B је онда могуће одредити на начин који аналоган поступку у претходној тачки

$$H(s) = \frac{A}{s-p} + \frac{B}{s-(\sigma+j\omega)} + \frac{B^*}{s-(\sigma-j\omega)} \quad | \times (s+(\sigma-j\omega)) \quad (\text{Ђ.8})$$

$$(s-(\sigma+j\omega))H(s) = B + \frac{B^*(s-(\sigma+j\omega))}{s-(\sigma-j\omega)} \Rightarrow B = \lim_{s \rightarrow (\sigma+j\omega)} (s-(\sigma+j\omega))H(s) \quad (\text{Ђ.9})$$

На основу тога можемо да установимо правило за издвајање парцијалних разломака, који одговарају комплексно конјугованим коренима

Уколико је

$$\frac{Q(s)}{\dots(s-(\sigma+j\omega))(s-(\sigma-j\omega))\dots} = \dots + \frac{A_k}{s-(\sigma+j\omega)} + \frac{A_k^*}{s-(\sigma-j\omega)} \dots$$

онда се сваки коефицијент A_k може израчунати „прикривањем“ (односно уклањањем) члана $s-(\sigma+j\omega)$ из израза, па заменом $s \mapsto p_k$ у остатак, као

$$A_k = \frac{Q(s)}{\dots \underbrace{(s-(\sigma-j\omega))}_{j2\omega} \dots} \Big|_{s=\sigma+j\omega}.$$

Том приликом, по аутоматизму се добија коефицијент A_k^* и рачунање није потребно понављати, за други корен.

Када је на тај начин одређен коефицијент A_k , приметимо да се даље може писати¹

$$\frac{A_k}{s - (\sigma + j\omega)} + \frac{A_k^*}{s - (\sigma - j\omega)} = \frac{A_k(s - (\sigma - j\omega)) + A_k^*(s - (\sigma + j\omega))}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \quad (\text{Ђ.10})$$

$$= \frac{(A_k + A_k^*)(s - \sigma) + (A_k - A_k^*)(-j\omega)}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \quad (\text{Ђ.11})$$

$$= 2 \frac{\operatorname{Re}\{A_k\}(s - \sigma) + j\operatorname{Im}\{A_k\}(-j\omega)}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \quad (\text{Ђ.12})$$

$$= 2 \frac{\operatorname{Re}\{A_k\}(s - \sigma) + \operatorname{Im}\{A_k\}\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}, \quad (\text{Ђ.13})$$

што може бити погодно имајући у виду табличне резултате Т.7.14 и Т.7.15

Поступак за вишеструке полове

Чланови који одговарају вишеструким половима могу се расписати према

$$H(s) = \frac{Q(s)}{\dots(s-p)^n\dots} = \dots + \frac{A_1}{s-p} + \frac{A_2}{(s-p)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s-p)^n} + \dots \quad (\text{Ђ.14})$$

Коефицијент A_n се може наћи како је показано у ранијим одељцима, а формуле за рачунање коефицијената A_1, \dots, A_{n-1} дате су обрасцем $A_k = \lim_{s \rightarrow p} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} ((s-p)^n H(s))$.

Рачунање резултата на основу овог израза може бити значајно сложеније и од сређивања полинома па њега нећемо користити. У форми парцијалних разломака ћемо израчунати коефицијенте испред остатака првог реда, а остале коефицијенте можемо брзо наћи променом методе неодређених коефицијената, заменом за неку (било коју) конкретну вредност s . Илуструјмо поступак на примеру $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$.

Дати облик се може представити као

$$H(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}. \quad (\text{Ђ.15})$$

Коефицијенте A и B можемо директно одредити прикривањем као

$$A = \frac{1}{\cancel{(s+1)}(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = 1 \quad B = \frac{1}{(s+1)\cancel{(s+2)^2}} \Big|_{s=-2} = -1 \quad (\text{Ђ.16})$$

На основу ових резултата знамо да је $\frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{B}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$. Па једини преостали коефицијент B можемо наћи заменом $s \notin \{-1, -2\}$, на пример, $s = 0$

$$\frac{1}{4} = 1 + \frac{B}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow B = -1, \quad (\text{Ђ.17})$$

¹Користе се и идентитети $z + z^* = 2\operatorname{Re}\{z\}$ и $z - z^* = j2\operatorname{Im}\{z\}$, за $z \in \mathbb{C}$.

чиме се коначно има $\frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$.

Сигнали и системи у инжењерству
Збирка задатака, Радна верзија:
14. септембар 2025.

Сигнали и системи у инжењерству
Збирка задатака, Радна верзија:
14. септембар 2025.

Додатак S

Важна својства трансформација

Конволуција континуалних и дискретних сигнала

Конволуција континуалних, односно, дискретних сигнала дефинише се као

$$x(t) * y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau, \quad x[n] * y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[n - m] \quad (\text{S.1})$$

Без обзира на то да ли се односи на континуалне или дискретне сигнале, за конволуцију важе:

- *Комутативност*: $x * y = y * x$;
- *Асоцијативност*: $(x * y) * z = x * (y * z)$;
- *Дистрибутивност у односу на сабирање*: $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$;
- *Асоцијативност у односу на скаларно множење*: $k \cdot (x * y) = (kx) * y$;
- *Постојање неутралног елемента* $f * \delta = f$;
- *Комплексна конјункција* $(x * y)^* = x^* * y^*$.

Кружна конволуција

Под кружном конволуцијом два периодична сигнала (са периодом T у континуалном случају, или периодом N у дискретном), подразумевају се

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{\tau=\langle T \rangle} x(\tau) y(t - \tau) d\tau, \quad x[n] \otimes y[n] = \sum_{m=\langle N \rangle} x[m] y[n - m] \quad (\text{S.2})$$

Том приликом смисао овако написаних граница интеграције јесте интервал дужине периода, односно, од t_0 до $t_0 + T$. Дуално, смисао граница сумирања јесте такође дужина интервала, односно до n_0 до $n_0 + N - 1$.

Фуријеови редови континуалних сигнала

У општем случају, уколико континуални сигнал $x(t)$, са периодом T , задовољава Дирихлеове услове, тада се он може развити у ред облика

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_F t} \quad (\text{комплексни облик}), \text{ или } \quad (\text{S.3})$$

$$= A[0] + \sum_{k=1}^{\infty} A[k] \cos(\omega_F k) + \sum_{k=0}^{\infty} B[k] \sin(\omega_F k) \quad (\text{тригонометријски облик}), (\text{S.4})$$

где је ω_F кружна учестаност основног хармоника. $X[k]$ представљају комплексне а $A[k]$ и $B[k]$ тригонометријске (реалне) коефицијенти уколико се разматра реалан сигнал $x(t)$. Комплексни коефицијенти могу се израчунати помоћу корелације са комплексним сигналама Фуријеовог базиса $\{e^{jk\omega_F t}\}$:

$$\mathcal{FS}\{X[k]\} = X[k] = \frac{1}{T_F} \int_{\langle T_F \rangle} x(t) e^{-jk\omega_F t} dt \quad (\text{S.5})$$

, а тригонометријски коефицијенти се могу израчунати помоћу корелације са тригонометријским функцијама:

$$A[0] = \frac{1}{T_F} \int_{\langle T_F \rangle} x(t) dt, \quad A[k > 0] = \frac{2}{T_F} \int_{\langle T_F \rangle} x(t) \cos(k\omega_F t) dt \quad (\text{S.6})$$

$$B[k > 0] = \frac{2}{T_F} \int_{\langle T_F \rangle} x(t) \sin(k\omega_F t) dt, \quad (\text{S.7})$$

Између комплексних и тригонометријских коефицијената постоје везе

$$X[k \neq 0] = \frac{A[k] - jB[k]}{2}, \quad X[0] = A[0], \quad (\text{S.8})$$

које се могу показати полазећи од Ојлерове формула $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$. Уколико се разматра реални сигнал $x(t)$, сигнали $A[k]$ и $B[k]$ су реални, па важе и инверзне релације

$$A[0] = X[0] \quad A[k > 0] = 2 \operatorname{Re} \{X[k]\} \quad B[k > 0] = -2 \operatorname{Im} \{X[k]\}. \quad (\text{S.9})$$

Уколико је сигнал $x(t)$ реалан, његов комплексни спектар задовољава комплексно-конјуговану (Хермитову) симетрију $X[-k] = X^*[k]$.

Парсевалова теорема даје везу између снаге континуалног сигнала и коефицијената његовог развоја у Фуријеов ред:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x^2(t)| dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2. \quad (\text{S.10})$$

Коефицијенти сигнала $x(t)$ (и $y(t)$), чији је развој у Фуријеов ред $X[k] = \mathcal{FS}\{x(t)\}$ (и $Y[k] = \mathcal{FS}\{y(t)\}$), задовољавају наредне значајне особине:

- *Линеарност*: $\mathcal{FS}\{ax(t) + by(t)\} = a\mathcal{FS}\{x(t)\} + b\mathcal{FS}\{y(t)\}$, $a, b = \text{const}$;
- *Померај у времену*: $\mathcal{FS}\{x(t - \tau)\} = \mathcal{FS}\{x(t)\} e^{-jk\omega_0\tau}$, $\tau = \text{const}$;
- *Инверзија временске осе*: $\mathcal{FS}\{x(t)\} = X[k] \Rightarrow \mathcal{FS}\{x(-t)\} = X[-k]$;
- *Кружна конволуција*¹: $\mathcal{FS}\{x(t) \otimes y(t)\} = T_0 X[k] Y[k]$;
- *Производ*²: $\mathcal{FS}\{x(t) \cdot y(t)\} = X[k] * Y[k]$;
- *Дејство на извод*: $\mathcal{FS}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = jk\omega_0 X[k]$;
- *Дејство на интеграл*: $\mathcal{FS}\left\{\int_{\tau=-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{jk\omega_0} X[k]$;

Фуријеови редови дискретних сигнала

Дискретан сигнал $x[n]$ са периодом N_F може се представити преко коефицијената Фуријеовог реда дискретног сигнала као

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_F \rangle} X[k] e^{jk\Omega_F n}, \quad (\text{S.11})$$

¹Односи се на конволуцију, само на заједничком периоду T_0 за оба сигнала.

²Односи се на конволуцију, само на заједничком периоду T_0 за оба сигнала.

где је $\Omega_F = \frac{2\pi}{N_F}$ дискретна кружна учестаност основног хармоника. Коефицијенти Фуријеовог реда могу се израчунати према формули

$$X[k] = \frac{1}{N_F} \sum_{n=\langle N_F \rangle} x[n] e^{-jk\Omega n}, \quad k = \langle N_F \rangle, \quad (\text{S.12})$$

а у општем случају има их N_F .

Коефицијенти сигнала $x[n]$ (и $y[n]$), чији је развој у Фуријеов ред $X[k] = \mathcal{FS}\{x[n]\}$ (и $Y[k] = \mathcal{FS}\{y[n]\}$), на периоду N_F задовољавају својства:

- *Линеарносћ*: $\mathcal{FS}\{ax[n] + by[n]\} = aX[k] + bY[k]$, $a, b = \text{const}$
- *Померај у времену*: $\mathcal{FS}\{x[n - M]\} = X[k] e^{-jk\omega_0 M}$, $M = \text{const}$;
- *Модулација у времену*: $\mathcal{FS}\{e^{jk_0\Omega_F n} x[n]\} = X[k - k_0]$;
- *Инверзија временске осе*: $\mathcal{FS}\{x[-n]\} = X[-k]$;
- *Комплексна конјугација*: $\mathcal{FS}\{x^*[n]\} = X^*[-k]$;
- *Кружна конволуција*: $\mathcal{FS}\{x[n] \otimes y[n]\} = N_F X[k] Y[k]$
- *Производ*: $\mathcal{FS}\{x[n] \cdot y[n]\} = X[k] \otimes Y[k]$

Фуријеова трансформација континуалног сигнала

За континуалан сигнал $x(t)$, у општем случају апериодичан, може се одредити Фуријеова трансформација по дефиницији

$$X(j\omega) = \mathcal{FT}\{x(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{S.13})$$

Фуријеова трансформација строго је дефинисана за сигнале који су апсолутно интегрални, односно, који задовољавају услов $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$. Ипак, увођењем Делта импулса,

као што је показано у задатку 83, ово домен трансформације се може проширити тако да обухвата и све периодичне сигнале за које се може дефинисати Фуријеов ред (практично све периодичне сигнале у инжењерству).

Дакле, за периодичан сигнал $x(t)$ који се може развити у Фуријеов ред $X[k] = \mathcal{FS}\{x(t)\}$, може се одредити онда Фуријеова трансформација као³

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0) \quad (\text{Веза Фуријеовог реда и трансформације}) \quad (\text{S.14})$$

³Члан „ 2π “ заправо потиче из чињенице да у инжењерској пракси користимо Фуријеову трансформацију чији је аргумент *кружна* учестаност, па тај члан проистиче из $\omega = 2\pi f$, односно, у интегралу $d\omega = 2\pi df$.

Парсевалова теорема даје везу између енергије континуалног сигнала и његове Фуријеове трансформације:

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x^2(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{S.15})$$

За континуални сигнал $x(t)$ (и $y(t)$), за који постоји Фуријеова трансформација $X(j\omega) = \mathcal{FT}\{x(t)\}$ (и $Y(j\omega) = \mathcal{FT}\{y(t)\}$), важе следећа својства

- *Линеарност*: $\mathcal{FT}\{ax(t) + by(t)\} = aX(j\omega) + bY(j\omega), \quad a, b = \text{const};$
- *Померај у времену*: $\mathcal{FT}\{x(t - \tau)\} = X(j\omega)e^{-j\omega\tau}, \quad \tau = \text{const}$
- *Модулација у времену*: $\mathcal{FT}\{x(t)e^{j\alpha t}\} = X(j(\omega - \alpha)); \quad \alpha = \text{const}$
- *Комплексна конјункција*: $\mathcal{FT}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega);$
- *Инверзија временске осе*: $\mathcal{FT}\{x(-t)\} = X(-j\omega);$
- *Скалирање временске осе*: $\mathcal{FT}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right);$
- *Конволуција*: $\mathcal{FT}\{x(t) * y(t)\} = X(j\omega) \cdot Y(j\omega);$
- *Множење*: $\mathcal{FT}\{x(t) \cdot y(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega);$
- *Производ*: $\mathcal{FT}\{x(t) \cdot y(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega);$
- *Дејство на извод*: $\mathcal{FT}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega);$
- *Дејство на интеграл*: $\mathcal{FT}\left\{\int_{-\infty}^t x(t)dt\right\} = \left(\frac{1}{j\omega} + \delta(\omega)\right) X(j\omega);$
- *Диференцирање по учесћаности*: $\mathcal{FT}\{tx(t)\} = j \frac{dX(j\omega)}{d\omega};$
- *Дејство на парни део сигнала*: $\mathcal{FT}\{\text{Ev } x(t)\} = \text{Re}\{X[k]\}$
- *Дејство на непарни део сигнала*: $\mathcal{FT}\{\text{Od } x(t)\} = -j \text{Im}\{X[k]\}$

Унилатерална Лапласова трансформација

Лапласова трансформација може се сматрати уопштењем Фуријеове трансформације на шири скуп сигнала. За континуални сигнал $x(t)$ дефинише се унилатерална Лапласова трансформација

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (\text{S.16})$$

где је $s = \sigma + j\omega$ генералисана учестаност. У општем случају, постоји одређена област конвергенције за параметар s , међутим, када се разматра унилатерална трансформација код каузалних сигнала и каузалних система област конвергенције не утиче на тачност поступка и својстава која се овде наводе, а практично се не мора разматрати. Приликом рачунања Лапласове трансформације по дефиницији у том случају, може се сматрати да се резултати наводе за s које се налази унутар области конвергенције.

Инверзна Лапласова трансформација у општем случају се изводи помоћу метода комплексне анализе, за наше потребе, најједноставније је применити технику растављања на парцијалне разломке.

За континуални сигнал $x(t)$ (и $y(t)$), за који постоји Лапласова трансформација $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ (и $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$), важе следећа својства

- *Линеарност*: $\mathcal{L}\{ax(t) + by(t)\} = aX(s) + bY(s), \quad a, b = \text{const};$
- *Скалирање временске осе*: $\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}, a > 0;$
- *Померај у времену*: $\mathcal{L}\{x(t - \tau)\} = X(s)e^{-s\tau} \quad \tau = \text{const};$
- *Померај у фреквенцији*: $\mathcal{L}\{e^{-\sigma t}x(t)\} = X(s - \sigma);$
- *Ушлицај на извод*: $\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-);$
- *Ушлицај на интеграл*: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s);$
- *Конволуција*: $\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s) \cdot Y(s);$
- *Множење*: $\mathcal{L}\{x(t) \cdot y(t)\} = \frac{1}{j2\pi}X(s) * Y(s);$

Слика периодичног сигнала $x(t)$, чији је основни период T , може се одредити као

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T x(t)e^{-st} dt.$$

Помоћу наведеног правила о утицају на извод, могу се добити и формуле за више изводе, нпр.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \quad (\text{S.17})$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3x(t)}{dt^3}\right\} = s^3X(s) - s^2x(0^-) - sx'(0^-) - x''(0^-) \quad (\text{S.18})$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nx(t)}{dt^n}\right\} = s^nX(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-) \quad (\text{S.19})$$

Унилатерална \mathcal{Z} -трансформација

\mathcal{Z} -трансформација је уопштење дискретне Фуријеове трансформације. За дискретан сигнал $x[n]$ може се одредити његова \mathcal{Z} -трансформација помоћу израза

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m}. \quad (\text{S.20})$$

На сличан начин као и Лапласова трансформација, унилатерална \mathcal{Z} -трансформација односи се на каузалне сигнале који делују на каузалне системе, када се може занемарити област конвергенције.

Инверзна \mathcal{Z} -трансформација у општем случају се изводи помоћу метода комплексне анализе. Слично као и за Лапласову трансформацију, за наше потребе, најједноставније је применити технику растављања на парцијалне разломке.

За дискретни сигнал $x[n]$ (и $y[n]$), за који постоји \mathcal{Z} -трансформација $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ (и $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$), важе следећа својства

- *Линеарност*: $\mathcal{Z}\{ax[n] + by[n]\} = aX(z) + bY(z), \quad a, b = \text{const};$
- *Предикција у времену*: $\mathcal{Z}\{x[n+1]\} = zX(z) - zx[0];$
- *Модулација у времену*: $\mathcal{Z}\{a^n x[n]\} = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad a = \text{const};$
- *Комплексна конјункција*: $\mathcal{Z}\{x^*[n]\} = X^*(z^*);$
- *Извод по фреквенцији*: $\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z \frac{dX(z)}{dz};$
- *Конволуција*: $\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} = X(z) \cdot Y(z);$

Сигнали и системи у инжењерству
Збирка задатака, Радна верзија:
14. септембар 2025.

Додатак Т

Таблице

1 Конволуција континуалних сигнала

Конволуција континуалних сигнала $x(t)$ и $y(t)$ у општем случају дефинише се као

$$x(t) * y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau) d\tau.$$

рбр.	$x(t)$	$y(t)$	$x * y(t)$
1.1	$e^{\lambda t} u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{2} t e^{\lambda t} u(t)$
1.2	$t^N u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$\left(\frac{N! e^{\lambda t}}{\lambda^{N+1}} - \sum_{k=0}^N \frac{N! t^{N-k}}{\lambda^{k+1} (N-k)!} \right) u(t)$
1.3	$\text{rect}(t)$	$\text{rect}(t)$	$\text{tri}(t)$
1.4	$t^M u(t)$	$t^N u(t)$	$\frac{M! N!}{(N+M+1)!} t^{N+M+1} u(t)$
1.5	$t e^{\lambda_1 t} u(t)$	$e^{\lambda_2 t} u(t)$	$\frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 - \lambda_2) t e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} u(t)$
1.6	$t^M e^{\lambda t} u(t)$	$t^N e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{M! N!}{(N+M+1)!} t^{N+M+1} e^{\lambda t} u(t)$
1.7	$e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \theta) u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{\cos(\psi) e^{\lambda t} - e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \psi)}{\sqrt{\omega^2 + (\sigma + \lambda)^2}} u(t)$ где су $\phi = \arg((\sigma + \lambda) + j\omega)$, и $\psi = \theta - \phi$

2 Конволуција дискретних сигнала

Конволуција континуалних сигнала $x[n]$ и $y[n]$ у општем случају дефинише се као

$$x[n] * y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[n-m].$$

рбр.	$x[n]$	$y[n]$	$x * y[n]$
2.1	$\lambda^n u[n]$	$\lambda^n u[n]$	$(1+n)\lambda^n u[n]$
2.2	$n u[n]$	$\lambda^n u[n]$	$\frac{\lambda^{n+1} - \lambda(1+n) + n}{(\lambda-1)^2} u[n]$
2.3	$n\lambda_1^n u[n]$	$\lambda_2^n u[n]$	$-\frac{\lambda_1(\lambda_1^n \lambda_2 n + \lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_1^{n+1} n - \lambda_2^{n+1})}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} u[n]$
2.4	$n\lambda^n u[n]$	$\lambda^n u[n]$	$\frac{\lambda^n n(n+1)}{2} u[n]$

3 Неки формални развоји

За $|a| < 1$ важе развоји на основном периоду $T_F = T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

рбр.	развој
3.1	$\frac{a \sin(\omega t)}{1 - 2a \cos(\omega t) + a^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \sin(k\omega t),$
3.2	$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(\omega t) + a^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(k\omega t),$
3.3	$\frac{1 - a \cos \omega t}{1 - 2a \cos(\omega t) + a^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(k\omega t),$

4 Неки таблични интеграли

$$4.1 \quad \int e^{at} P_n(t) dt = C + \frac{e^{at}}{a} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a^k} \frac{d^k P_n(t)}{dt^k}, \text{ где је } P_n \text{ полином } n\text{-тог реда}$$

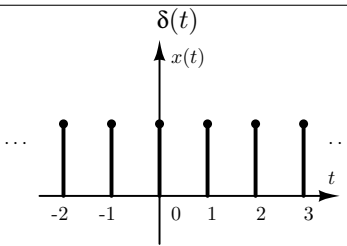
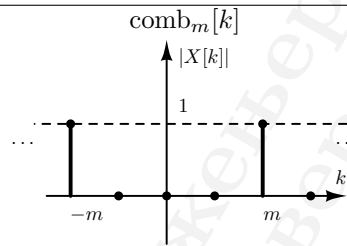
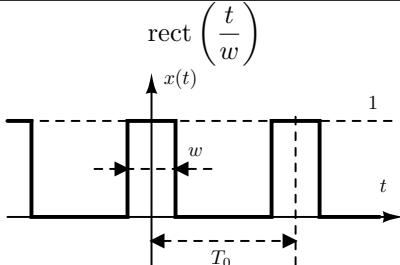
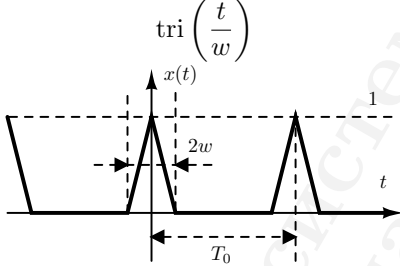
$$4.2 \quad \int e^{at} \cos(bt) dt = C + \frac{e^{at} (a \cos(bt) + b \sin(bt))}{a^2 + b^2}$$

$$4.3 \quad \int e^{at} \sin(bt) dt = C + \frac{e^{at} (-b \cos(bt) + a \sin(bt))}{a^2 + b^2}$$

$$4.4 \int e^{at} b^t dt = C + \frac{b^t e^{at}}{a + \ln(b)}, b > 0, a \neq -\ln(b)$$

Сигнали и системи у инжењерству
Збирка задатака, Радна верзија:
14. септембар 2025.

5 Фуријеови редови континуалних сигнала

рбр.	Основни период $x(t)$	$X[k] = \mathcal{FS}\{x(t)\}$	Период развоја
5.1	<div>$\delta(t)$ </div>	<div>$\text{comb}_m[k]$ </div>	$T_F = m T_0$
5.2	<div>$\text{rect}\left(\frac{t}{w}\right)$ </div>	<div>$\frac{w}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{k w}{T_0}\right)$</div>	$T_F = T_0$
5.3	<div>$\text{tri}\left(\frac{t}{w}\right)$ </div>	<div>$\frac{w}{T_0} \text{sinc}^2\left(\frac{k w}{T_0}\right)$</div>	$T_F = T_0$
5.4	<div>$\text{sinc}\left(\frac{t}{w}\right)$</div>	<div>$\frac{w}{T_0} \text{rect}\left(\frac{k w}{T_0}\right)$</div>	$T_F = T_0$

6 Фуријеове трансформације континуалних сигнала

пбр	$x(t)$	$X(j\omega) = \mathcal{FT}\{x(t)\}$
6.1	1	$2\pi\delta(\omega)$
6.2	$\delta(t)$	1
6.3	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
6.4	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
6.5	$\text{rect}(t)$	$\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
6.6	$\text{sinc}(t)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
6.7	$\text{comb}(t)$	$\text{comb}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
6.8	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$
6.9	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$
6.10	$\text{sinc}^2(t)$	$\text{tri}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
6.11	$\text{tri}(t)$	$\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
6.12	$e^{-at}u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
6.13	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$
6.14	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$
6.15	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
6.16	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

7 Унилатерална Лапласова трансформација

рбр	$x(t)$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$
7.1	$\delta(t)$	1
7.2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
7.3	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} u(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
7.4	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}} u(t)$	$s^{-\frac{3}{2}}$
7.5	$\frac{t^n}{n!} u(t), \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
7.6	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
7.7	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u(t), \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
7.8	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7.9	$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7.10	$\cosh(\omega t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
7.11	$\sinh(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
7.12	$\frac{t}{2\omega} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
7.13	$\frac{\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)}{2\omega} u(t)$	$\frac{\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
7.14	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
7.15	$e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

Сигнали и системи у инжењерству
Збирка задатака, Радна верзија:
14. септембар 2025.

8 Фуријеова трансформација дискретног сигнала

рбр	$x[n]$	$X(j\Omega) = \mathcal{FT}\{x[n]\}$
8.1	$\delta[n]$	1
8.2	$\delta[n - N]$	$e^{-j\Omega N}$
8.3	$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta[n - pN]$	$\frac{2\pi}{N} \text{rep}_{\frac{2\pi}{N}} \delta(\Omega)$
8.4	1	$2\pi \text{rep}_{2\pi} \delta(\Omega)$
8.5	$\text{sgn}[n]$	$\frac{2}{1 - e^{-j\Omega}}$
8.6	$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \text{rep}_{2\pi} \delta(\Omega - \Omega_0)$
8.7	$\cos(\Omega_0 n + \theta)$	$\pi \text{rep}_{2\pi} (e^{j\theta} \delta(\Omega - \Omega_0) + e^{-j\theta} \delta(\Omega + \Omega_0))$
8.8	$\sin(\Omega_0 n + \theta)$	$\frac{\pi}{j} \text{rep}_{2\pi} (e^{j\theta} \delta(\Omega - \Omega_0) - e^{-j\theta} \delta(\Omega + \Omega_0))$
8.9	$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \text{rep}_{2\pi} \delta(\Omega)$
8.10	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
8.11	$(n+1) a^n u[n]$	$\frac{1}{(1 - e^{-j\Omega})^2}$
8.12	$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n]$	$\frac{1}{(1 - e^{-j\Omega})^r}$
8.13	$\text{rect}_N[n]$	$\frac{\sin\left(\Omega\left(N + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
8.14	$\frac{\sin(\Omega_0 n)}{\pi n}$ $0 < \Omega_0 < \pi$	$\text{rep}_{4\pi\Omega_0} \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)$
8.15	$\text{tri}_N[n]$	$\frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\left(\Omega \frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \right)^2$
8.16	$\sum_{p=\langle N \rangle} a_p e^{jp \frac{2\pi}{N}}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2k\pi}{N}\right)$

где је $\text{per}_\alpha X(j\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega + m\alpha))$, периодично продужење функције $X(\Omega)$.

9 Z трансформација

рбр	$x[n]$	$\mathcal{Z}\{x[n]\}$
9.1	$\delta[n]$	1
9.2	$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$
9.3	$n a^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
9.4	$\frac{n(n+1)}{2} u[n]$	$\frac{z^2}{(z-1)^3}$
9.5	$\binom{n+k}{k} a^n u[n]$	$\left(\frac{z}{z-a}\right)^{k+1}$
9.6	$\binom{n+m}{k} u[n], \quad m \geq 0$	$\frac{z^{m+1}}{(z-1)^{k+1}}$
9.7	$(-1)^n \binom{m}{n} u[n], \quad m \geq 0$	$\left(\frac{z-1}{z}\right)^m$
9.8	$a^n \cos[n\theta] u[n]$	$\frac{z(z-a\cos(\theta))}{z^2-2az\cos(\theta)+a^2}$
9.9	$a^n \sin[n\theta] u[n]$	$\frac{az\sin(\theta)}{z^2-2az\cos(\theta)+a^2}$
9.10	$a^n \cosh[n\theta] u[n]$	$\frac{z(z-a\cosh(\theta))}{z^2-2az\cosh(\theta)+a^2}$
9.11	$a^n \sinh[n\theta] u[n]$	$\frac{az\sinh(\theta)}{z^2-2az\cosh(\theta)+a^2}$