Problema de Atribuição - Definição

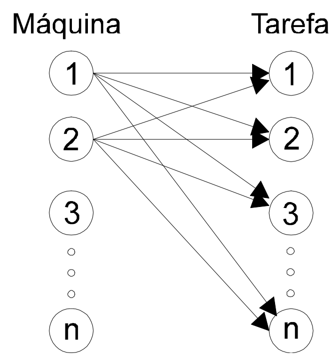
O Problema de Atribuição consiste em atribuir n tarefas a n máquinas, de modo que toda tarefa seja atribuída, e que cada máquina realize uma e somente uma tarefa, e que além disto o custo total desta atribuição seja mínimo. Seja c_{ij} o custo de atribuir a tarefa *i* à máquina *j*. Então, este problema poderá ser definido como:

$$Min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$s.a: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$



Problema de Atribuição - Exemplo

Determinar a alocação de máquinas a tarefas, de modo a minimizar o custo total da alocação, e de modo que nenhuma máquina execute mais do que 1 tarefa.

Custos de Execução das Tarefas x Máquinas ($)					
	Tarefa 1	*Tarefa 2*	*Tarefa 3*	*Tarefa 4*	*Tarefa 5*
Maq. 1	23,00	30,00	27,00	20,00	21,00
Maq. 2	21,00	29,00	25,00	17,00	19,00
Maq. 3	28,00	36,00	32,00	25,00	25,00
Maq. 4	25,00	34,00	29,00	20,00	22,00
Maq. 5	24,00	33,00	28,00	21,00	23,00
Maq. 6	27,00	38,00	32,00	25,00	23,00

Problema de Atribuição - Algoritmo Húngaro

Para obter a solução deste problema, é utilizado um algoritmo específico, conhecido como algoritmo húngaro, cuja aplicação necessita que o número de máquinas seja igual ao número de tarefas. Na prática isto sempre é possível obter, fazendo-se com que sejam criadas máquinas ou tarefas fictícias, cujos custos de atribuição são nulos, por se tratar de atribuições que não serão efetivadas. Como resultado desta operação é obtida uma matriz quadrada de custos de atribuição, denotada por $C = \left[c_{ij}\right]_{n \times n}$.

Os passos do algoritmo são os seguintes:

Step 1 Subtraia de cada linha da matriz C o menor elemento da linha, obtendo a matriz C'. Subtraia de cada coluna da matriz C' o menor elemento da coluna, obtendo a matriz C^0. Faça $k = 0$.

Step 2 Assinale o máximo número de *zeros* na matriz C^k, de modo que não exista mais do que um zero assinalado por linha e coluna. Se *n* zeros foram assinalados em C^k, então PARE. Os zeros assinalados correspondem a atribuição ótima.

Step 3 Cubra os zeros da matriz C^k com o menor número de retas horizontais e verticais, efetuando, para tanto, as seguintes operações:

a) marque com um ✓ cada uma das linhas que não tiveram zeros assinalados;
b) marque com um ✓ cada uma das colunas que possui um zero não assinalado em linha marcada;
c) marque com um ✓ as linhas que possuírem zeros assinalados em colunas marcadas;
d) repita as operações (b) e (c) até que nenhuma marca adicional possa ser realizada;
e) cubra com retas horizontais as linhas da matriz não marcadas com ✓;
f) cubra com retas verticais as colunas da matriz marcadas com ✓.

Step 4 Encontre o menor elemento da matriz C^k não coberto por reta (vertical ou horizontal). Subtraia este valor de todos os elementos não cobertos por reta, e adicione este mesmo valor aos elementos cobertos por duas retas: uma vertical e outra horizontal. Denomine a matriz resultante de C^{k+1}, faça $k = k + 1$, e retorne ao passo 2.