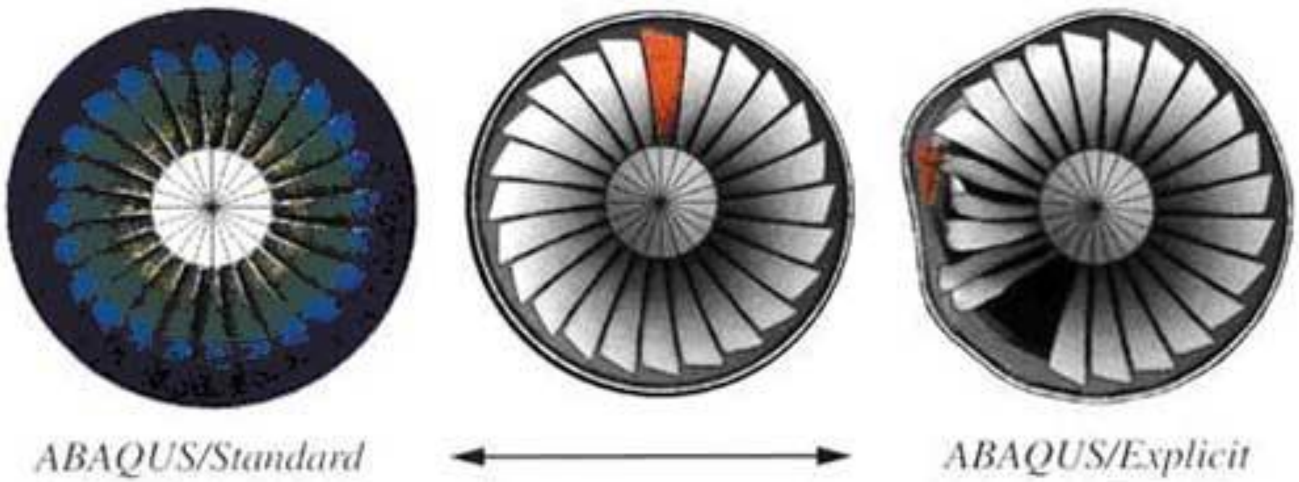
Элементы технического зрения ПРТС

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Особенности решения инженерных задач

Практическая направленность

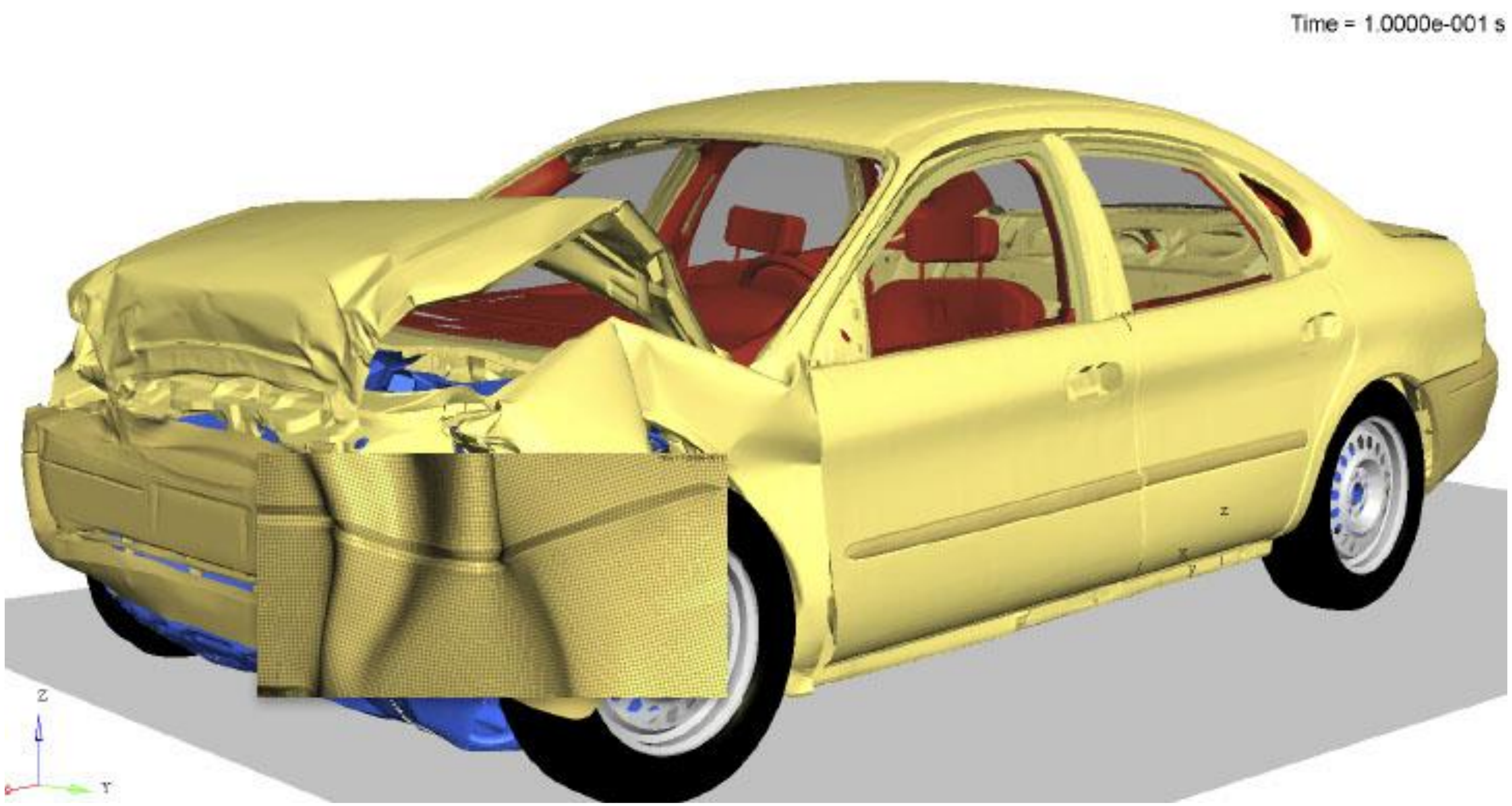
- Конкретный результат



Особенности решения инженерных задач

Значительный объём вычислений

- Метод конечных элементов
- Задачи обработки сигналов



Сложные математические модели

Численные методы

Необходимость сглаживания и фильтрации

Спектральные характеристики

…

Схема разделения движения вертолета на изолированные

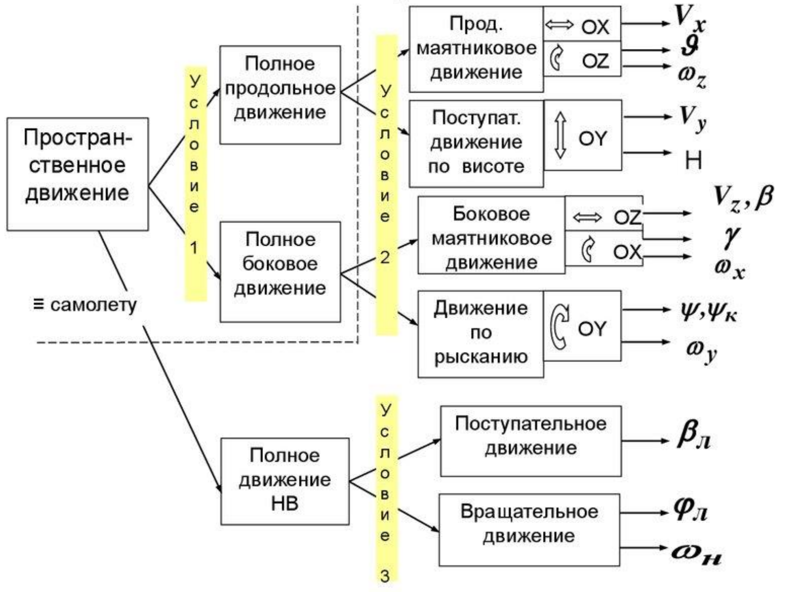


Рис. 4.3.

Решаются инженерами

Этапы решения задачи

- Постановка
  - Выбор модели
  - Постановка вычислительной задачи
- Анализ
  - Выбор численного метода
- Программирование
- Отладка
- Счёт
- Обработка результата
- Коррекция модели

Погрешность в решении

Получить точное решение невозможно

$$u(x, \alpha) = y + \delta y$$

У погрешности – несколько составляющих

$$\delta y = \delta_{\text{н}} y + \delta_{\text{м}}\, y + \delta_{\text{в}} y$$

Погрешность вычислений

Ограничения связаны с дискретизацией

Разберём на примере десятеричной системы счисления:

- 6 разрядов после запятой

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 7.235673456 \\ x_2 = 7.235672954 \end{matrix}\right\} => x^* = 7.235673$$

- Абсолютная погрешность

$$\Delta x = |x - x^*|$$

- Относительная погрешность

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{\Delta |x - x^*|}{|x|}$$

Погрешность вычислений

Погрешность операций:

- Сложение $c = a + b$

$$c^* = a^* + b^* = a + b + \Delta a + \Delta b$$
$$\Delta c = c^* - c = \Delta a + \Delta b$$
$$\delta c = \frac{\Delta c}{|c|} = \frac{|\Delta \mathrm{a}| + |\Delta b|}{|a + b|}$$

- Вычитание $c = a - b$

$$c^* = a^* - b^* = a - b + \Delta a - \Delta b$$
$$\Delta c = c^* - c = |\Delta a| + |\Delta b|$$
$$\delta c = \frac{\Delta c}{|c|} = \frac{|\Delta \mathrm{a}| + |\Delta b|}{|a - b|}$$

Погрешность вычислений

Погрешность операций

- Умножение $c = a \cdot b$

$$c^* = a^* \cdot b^* = a \cdot b + a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b$$

$$\Delta c = a\Delta b + b\Delta a \leq \Delta(a, b) \cdot \max(a, b)$$

$$\delta c = \frac{\max(\Delta a, \Delta b)}{\min(a, b)} \approx \max(\delta a, \delta b)$$

- Деление $c = \frac{a}{b}$ – аналогично

$$\Delta c \approx \Delta(a, b) \cdot \max(a, \frac{1}{b})$$

$$\delta c = \frac{\max(\Delta a, \Delta b)}{\min(a, b)} \approx \max(\delta a, \delta\left(\frac{1}{b}\right))$$

Погрешность вычислений

В реальных задачах:

- Переменные двоичные
- Дробные числа – с плавающей запятой
- Возникает проблема переполнения

Например, double – 15 знаков мантиссы:

A=3.141592653589793 // π

B=0.7853981633974483 // $\frac{\pi}{4}$

C=3.926990816987241 // A+B

Погрешность вычислений

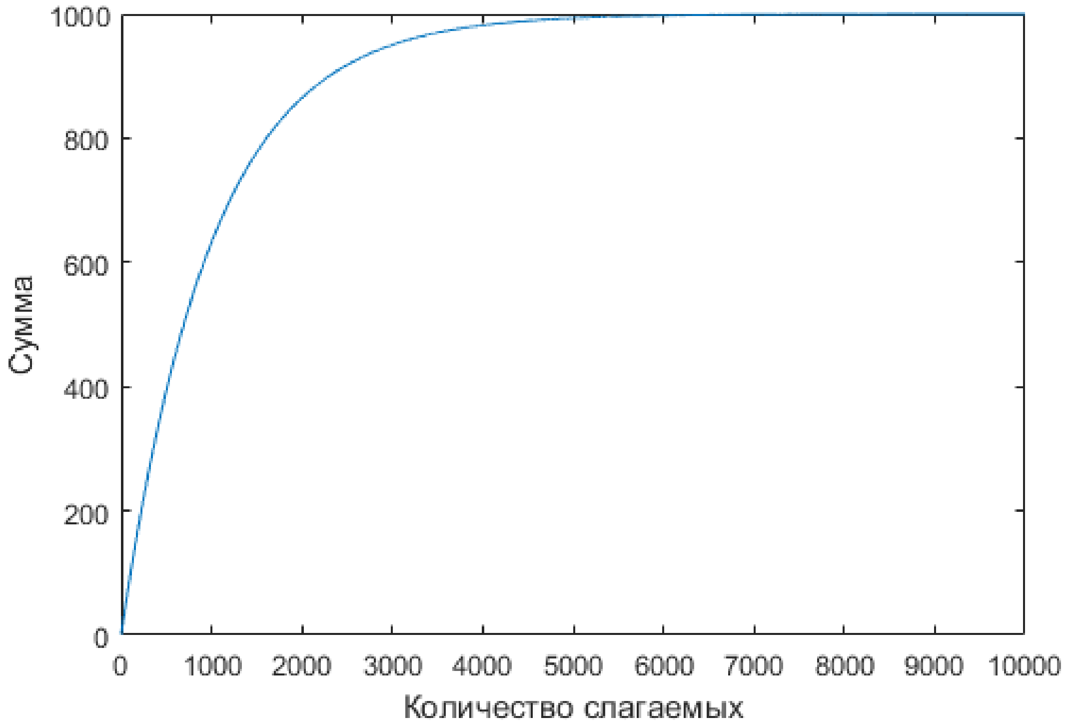
Ещё один (надуманный) пример

```
#include <iostream>
#define USE_MATH_DEFINES
#include <cmath>
#include <limits>

using namespace std;

int main(int argc, char *argv[])
{
		float summ1 = 0, summ2 = 0;
		double q = 0.999;
		int maxStep = 100000; // Просто большое число
		for (int i=0; i<= maxStep; i++)
		{
				summ1 += pow(q, i);
		}
		cout.precision(std::numeric_limits<float>::digits10);
		cout << "Summ1 = " << summ1 << " should be " << 1.0/(1-q) << endl;
		for (int i=maxStep; i>=0; i--)
		{
				summ2 += pow(q, i);
		}
		cout << "Summ2 = " << summ2 << " should be " << 1.0/(1-q) << endl;
		return 0;
}
```

Результат выполнения



- Мы рассматриваем геометрическую прогрессию с основанием 0.999
- Точность получившейся суммы, в теории, определяется количеством слагаемых
- Суммы одинаковы, но отличаются порядком суммирования

Summ1 = 999.978 and should be 1000

Summ2 = 1000 and should be 1000

Корректность вычислительной задачи

X – множество допустимых входных данных

Y – множество возможных решений

Вычислительная задача корректна, если

1. Решение $y \in Y$ существует при $x \in X$
2. Решение единственно
3. Решение устойчиво по возмущениям X

Корректность - существование

Естественное ограничение

Нет решения:

- Неправильная модель
- Неправильная постановка задачи

$$x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Решения $x \in D$ существуют только при

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

Корректность - единственность

Для математической задачи решение может быть неединственым

Для вычислительной – вводятся дополнительные ограничения

- Например, для квадратного уравнение – два корня

Корректность - устойчивость

Непрерывная зависимость по входным данным

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x^* : \Delta(x^*) < \delta => \Delta(y^*) < \varepsilon$$

В этом случае можно получить достаточно точное решение, увеличивая точность входных данных

Это требование часто не выполняется!!!

Обусловленность задачи

Очень похожа на требование устойчивости:

$$\Delta(y^*) \leq M\Delta(x^*)$$

M – число обусловленности

$$(y-1)^4 = 0 \ \ => \ \ y = 1$$

Внесём погрешность:

$$(y-1)^4 = 10^{-8} =>$$
$$y = (1 \pm 0.01, 1 \pm 0.01i)$$
$$\Delta \mathrm{x} = 10^{-8}, \Delta y = 10^{-2}$$

Вычислительные методы

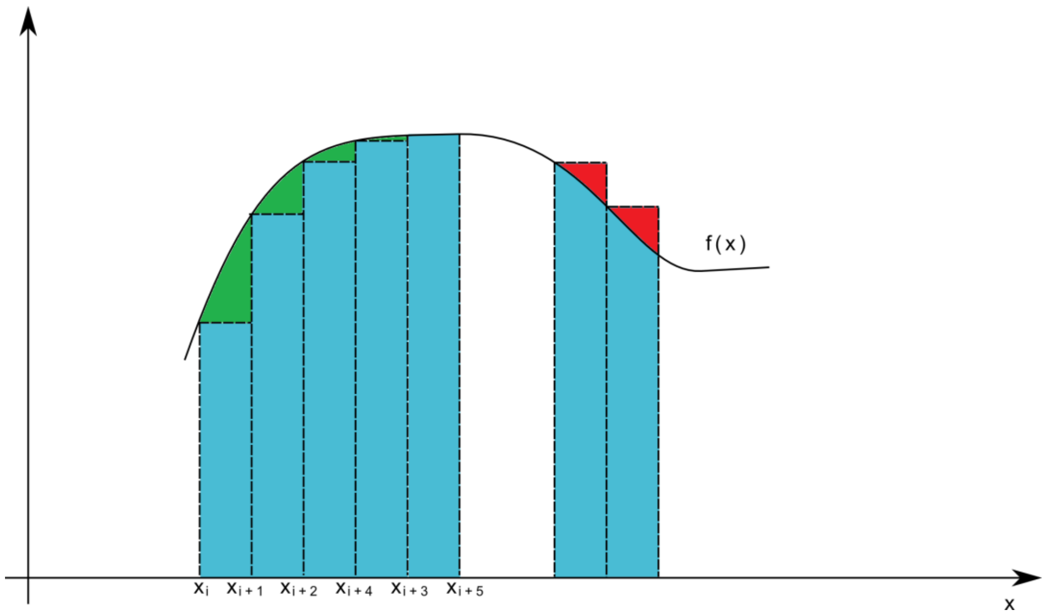
Классы методов:

- Эквивалентных преобразований
- Аппроксимации
- Прямые (точные)
- Итерационные
- Статистических испытаний

Вычислительные методы

Методы аппроксимации

- Решение задачи, решение которой близко к исходной
- Погрешность аппроксимации
- Вообще говоря, не всегда сходится
- Например, вычисление интегралов



Вычислительные методы

Прямые методы

- Конечное число элементарных операций
- Точны в смысле отсутствия погрешности метода
- Однако часто очень чувствительны к погрешности

- Решение квадратных уравнений

$$x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

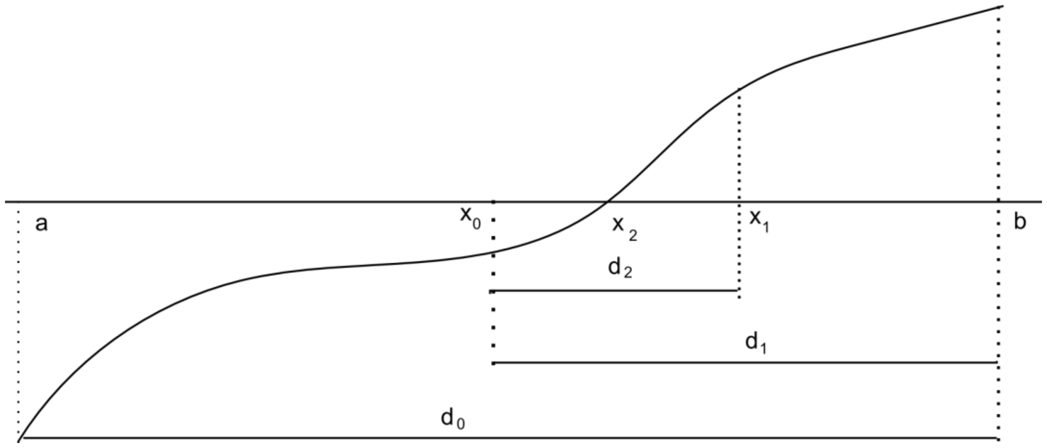
- Метод Гаусса
- …

Вычислительные методы

Итерационные методы

- Построение последовательных приближений
- Однотипные набор действий
- Точное решение получить невозможно
- Априорная оценка погрешности
- Не всегда сходятся

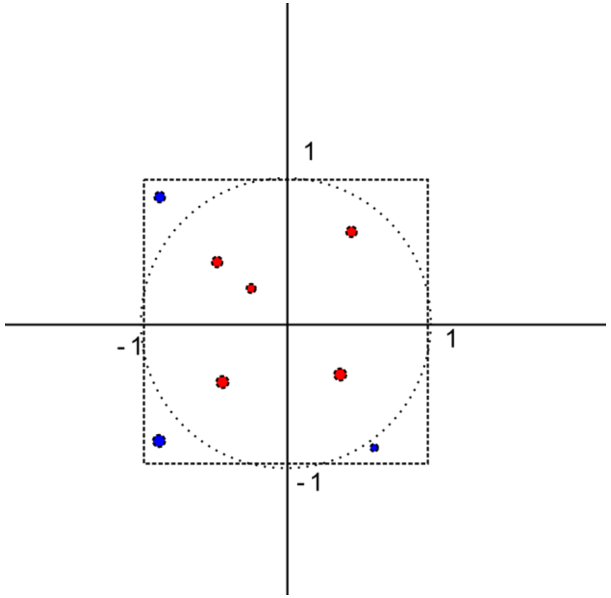
Например, метод половинного деления



Вычислительные методы

Методы статистических испытаний

- Поиск решения на основе построения статистики
- Ресурсоёмки
- Точное решение получить невозможно
- Позволяют моделировать очень большие системы



Вычислительный алгоритм

Точное описание последовательности действий для преобразования входных данных в результат

Корректен, если:

- Реализуется за конечное число действий
- Устойчив по входным данным
- Вычислительно устойчив

Вычислительная устойчивость

Вычислим

$\int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

для различных значений *n*

$$I_n = \int_0^1 x^n d(-e^{1-x}) = -x^n e^{1-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 x^{n-1} e^{1-x} dx = nI_{n-1} - 1$$

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\, dx = e - 1 \approx 1.71828$$

Вычислительная устойчивость

Кажется, всё хорошо, но

$$I_n = nI_{n-1} - 1 = n\big((n-1)I_{n-2} - 1\big) - 1 = \cdots$$
$$=> \ \Delta I_n \sim n!\,\Delta I_0$$

Небольшая ошибка в вычислении растёт как факториал

Требования к вычислительным алгоритмам

1. Экономичность
2. Точность
3. Экономия памяти
4. Простота

Понятие $O(\cdot)$

Понятие, относящееся к скорости роста функций

$$f(n), g(n), f(n) = O\big(g(n)\big) \text{ если } \exists c : f(n) \leq cg(n)$$

Например, $3n^2 + 10n - 4$ имеет порядок $O(n^2), n > 1$, потому, что

$3n^2 + 10n - 4 \leq 4n^2,$ в этом случае $c = 4$

При этом c может быть, вообще говоря, большим

Понятие $\Omega(\cdot), \Theta(\cdot)$

Аналогично

$f(n), g(n), f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$ если $\exists c : f(n) \geq cg(n)$

То есть $f(n) = \Omega\big(g(n)\big) \Leftrightarrow g(n) = O\big(f(n)\big)$

$\Theta(\cdot)$ - если одновременно $\Omega(\cdot)$ и $O(\cdot)$

Мы будем использовать эти понятия в двух ситуациях:

1. Оценивая количество действий алгоритма, т.е. *экономичность*
2. Оценивая величину погрешности, т.е. *точность*

Экономичность алгоритмов

Число элементарных операций

Как правило, говорят об порядке количества операций

Правило Крамера

$$Ax = b$$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Для вычисления x_i нужно посчитать *(n+1)* определитель порядка *n*

Общее количество вычислений *(n+1)!*

Для решения системы из 21 уравнения нужно 507 лет

Требования к реализации вычислительных алгоритмов

1. Экономичность
2. Точность
3. Экономия памяти
4. Простота
5. Надёжность
6. Работоспособность
7. Переносимость
8. Поддерживаемость

Задача

Попробуйте применить метод половинного деления для отыскания минимума функции

- Какие ограничения есть у этого метода?
- Какой это метод – прямой или итерационный?
- Сможете ли вы оценить количество действий?

Для оценки работоспособности используйте функцию

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, x \in [-2,2]$$