Элементы технического зрения ПРТС

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА.

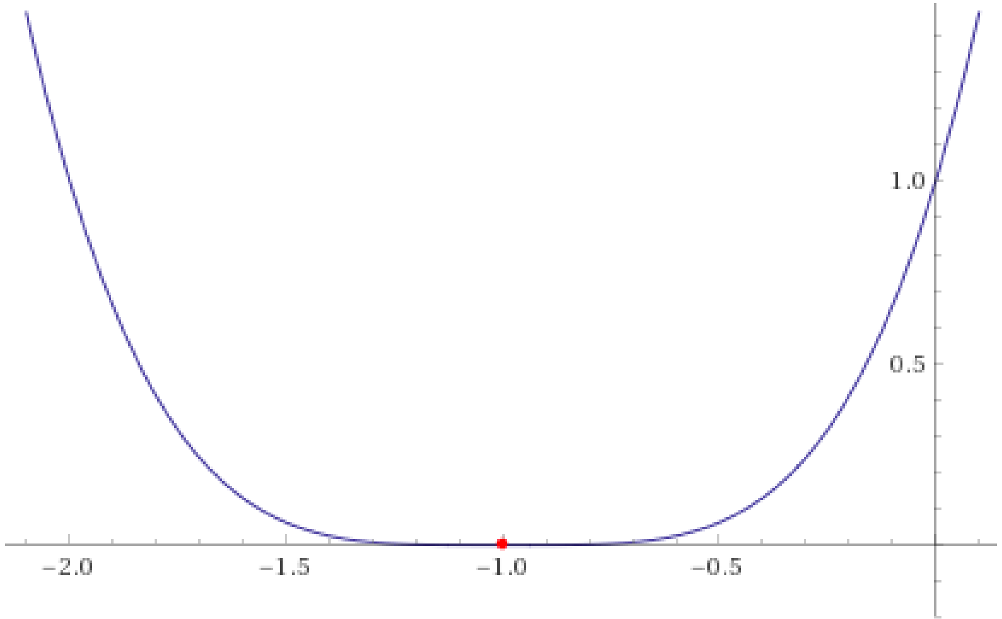
С предыдущего занятия…

Попробуйте применить метод половинного деления для отыскания минимума функции

- Какие ограничения есть у этого метода?
- Какой это метод – прямой или итерационный?
- Сможете ли вы оценить количество действий?

Для оценки работоспособности используйте функцию

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, x \in [-2,2]$$



Как это можно сделать

Мы используем *унимодальность* функции

Введём дополнительную δ-окрестность известной величины

Теперь мы используем *две* точки при разбиении

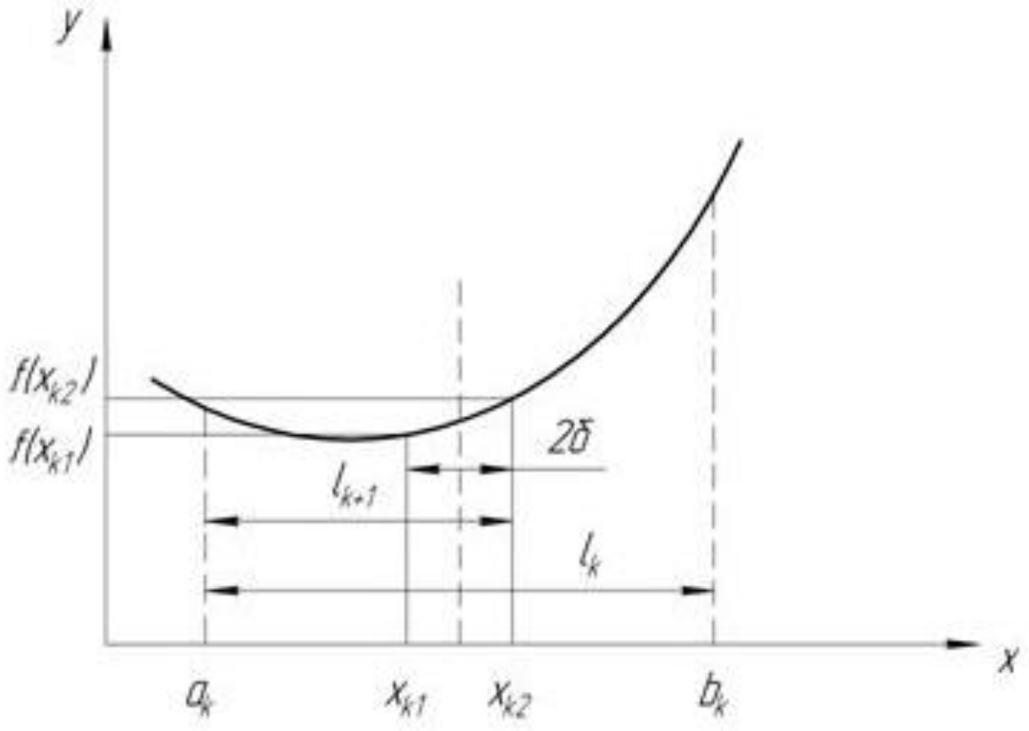
$$x_{k1} = \frac{a_k + b_k}{2} - \delta; \qquad x_{k2} = \frac{a_k + b_k}{2} + \delta$$

Теперь нам достаточно сравнить $f(x_{k1})$ и $f(x_{k2})$

$f(x_{k1}) < f(x_{k2})$: минимум на отрезке $[a_k, x_{k1}]$

$f(x_{k1}) > f(x_{k2})$: минимум на отрезке $[x_{k2}, b_k]$

Строим новый отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ и т.д.



Решение СЛАУ

- Система линейных уравнений

$$A \cdot x = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

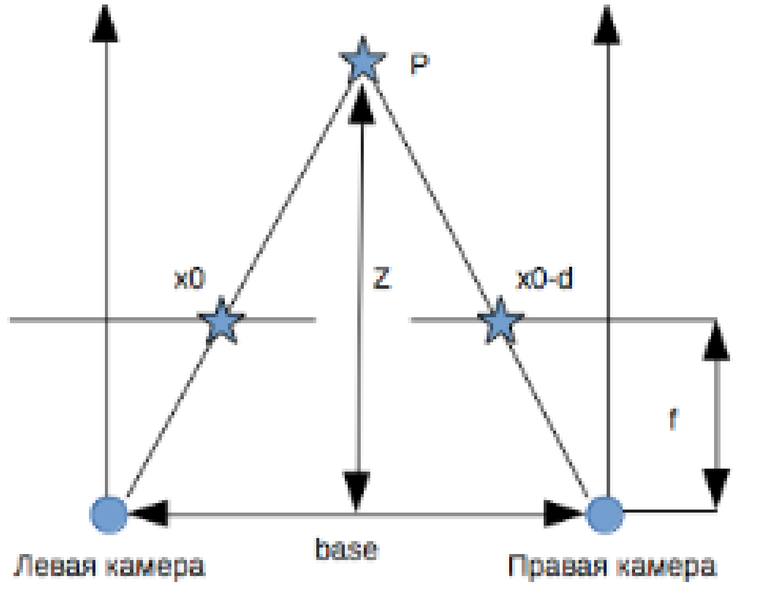
- Коэффициенты a_{ij} и b_i - заданы, x – предстоит найти
- Существенное требование – матрица квадратная:
  - Если строк меньше, чем столбцов – решение определено неоднозначно
  - Если больше – задача переопределена и точного решения не имеет

Переопределённая система уравнений

- Почему она не имеет решения?
  - Система с двумя переменными – определение калибровочных коэффициентов для стереопары
  - Один и тот же объект для левой и правой камеры находится в разном положении
  - Разница в его положении – диспаратность
  - Чем мы дальше от объекта, тем она меньше, и наоборот

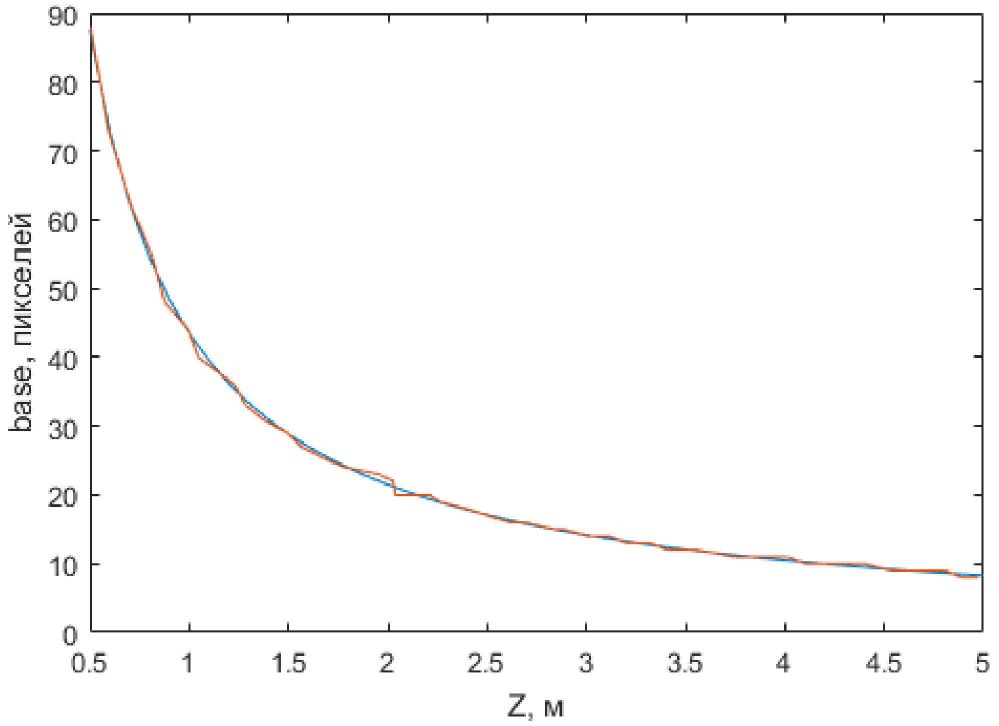
$$base = K_z \cdot \frac{1}{z} + K_c$$

  - K_z и K_c - калибровочные коэффициенты, которые нужно определить

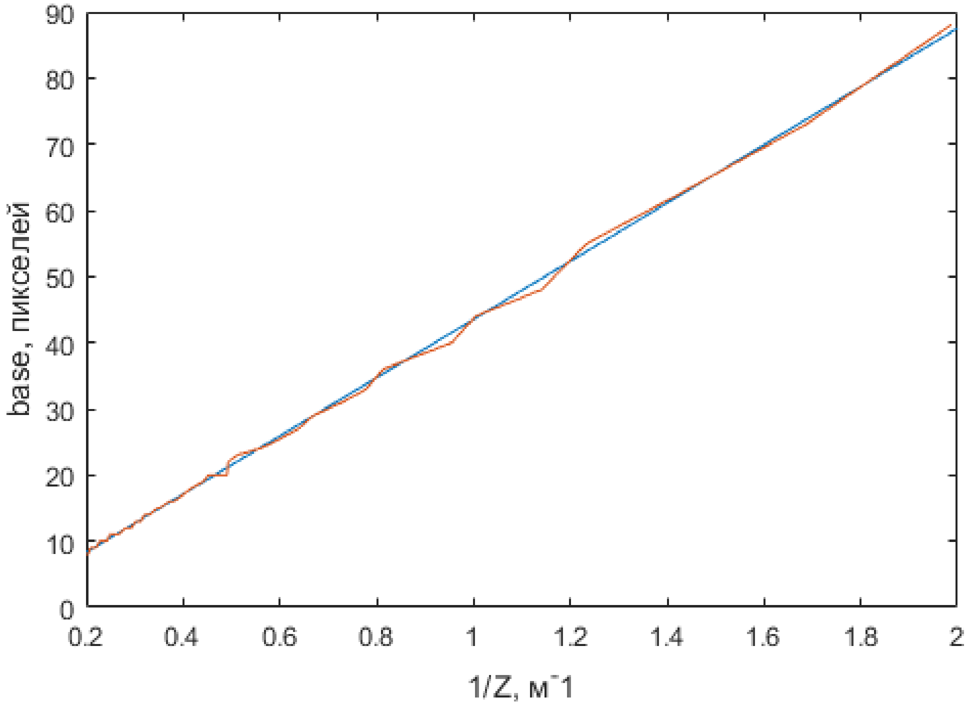


К чему приводит погрешность

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДАЛЬНОСТЬЮ И РАССОГЛАСОВАНИЕМ



ОБРАТНАЯ (ЛИНЕЙНАЯ) ЗАВИСИМОСТЬ



К чему приводит погрешность

- В идеальном мире – уравнения будут линейно-зависимыми
- Погрешность приводит к тому, что уравнения становятся линейно-независимыми
- Точное решение в этом случае невозможно
- Можно построить его оценку (МНК и аналоги)

Решение СЛАУ

Метод условно разделяется на 2 части:

- Прямой ход (приведение матрицы)
- Обратный ход (вычисление решения)

Прямой ход (приведение к верхнетреугольному виду):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ

Мы можем складывать и вычитать строки с коэффициентами

Занулим коэффициент a_{21}

Для этого вычислим $\mu_{21} = a_{21}/a_{11}$

Вычтем из второй строки первую

$$\tilde{a}_{2i} = a_{21} - \mu_{21} \cdot a_{1i}$$

При этом преобразуется и правая часть

$$\tilde{b}_2 = b_2 - \mu_{21} \cdot b_1$$

Решение СЛАУ

Последовательно повторим операцию для второго, третьего… n-1 столбца, начиная с соответствующей строки

Получим желаемую верхнетреугольную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ

Теперь перейдём к обратному ходу

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{nn} & \cdots & \tilde{a}_{nn} & & \tilde{a}_{nn} & \tilde{a}_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{n-1,n-1} & & \tilde{a}_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b_1} \\ \widetilde{b_2} \\ \vdots \\ \widetilde{b_n} \end{pmatrix}$$

Видно, что $x_n = b_n / \tilde{a}_{nn}$

Аналогично $x_{n-1} = \left(b_{n-1} - \tilde{a}_{n-1,n} \cdot x_n\right) / \tilde{a}_{n-1,n-1}$

Все последующие

$$x_k = \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} \tilde{a}_{k,j} \cdot x_j \right) \Big/ \tilde{a}_{k,k}$$

Несколько общих слов

- Метод Гаусса является прямым - конечное число действий
  - Первый шаг прямого хода – для каждой строки нам нужно сделать n умножений
  - Строк всего n, поэтому мы повторим операцию n-1 раз
  - При этом нам нужно сделать n шагов
  - Итого $\sim O(n^3)$
  - Для обратного хода - $\sim O(n^2)$, так что общее число действий $\sim O(n^3)$
  - Для сравнения в правиле Краммера $O((n+1)!)$
- Прямой метод – точный (в смысле невозможности уточнить решение)
- Неустойчив и чувствителен к входным данным
- Проигрывает итерационным при больших размерах системы уравнений (общий недостаток всех прямых методов)

Небольшая алгоритмическая проблемма…

Давайте попробуем решить методом Гаусса систему

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

У нас возникает небольшая проблема при прямом ходе: $a_{11} = 0$

Нужно как-то модифицировать алгоритм

Решение – перестановка строк и/или столбцов

Мы знаем, что перестановка строк в *расширенной* матрице не меняет решение

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

При этом перестановка столбцов приведёт к перенумерации элементов $\vec{x}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = x_3', x_3 = x_1'$$

Выбор главного элемента (по строкам)

Даже если диагональный элемент не нулевой – имеет смысл делать замену, так как мы позже на него делим:

$$x_k = \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} \tilde{a}_{k,j} \cdot x_j\right) / \tilde{a}_{k,k}$$

Выход – переставить строки местами, выбрав строку с максимальным a_{ik}

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0.1 & 2.3 \\ 0 & 5.2 & 4.3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4.4 \\ -2.3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5.2 & 4.3 \\ 0 & 0.1 & 2.3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2.3 \\ 4.4 \end{pmatrix}$$

Выбор главного элемента (полный)

Чуть лучше (но сложнее) вариант, в котором выбор максимального

Выход – переставить строки местами, выбрав строку с максимальным a_{ik}

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0.1 & 2.3 \\ 0 & 5.2 & 4.3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4.4 \\ -2.3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5.2 & 0 & 4.3 \\ 0.1 & 0 & 2.3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2.3 \\ 4.4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5.2 & 4.3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0.1 & 2.3 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2.3 \\ 2 \\ 4.4 \end{pmatrix}$$

Задание

1. Решить методом Гаусса с выбором главного элемента по строкам
2. Найти обратную матрицу к матрице A
3. Используем стандартные средства языка (т.е. никаких сторонних библиотек)

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 25 \\ 14 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$