

О терминологии. Приведем перевод английских слов, на основании которых построены специальные термины, используемые в оригинальном тексте статей.

wave – волна; волновой; завивать; зубец; колебание; сигнал

wavelet – *геофиз.* импульс; *геофиз.* импульсоид

beam *мор.* бимс; *стр.* брус; *стр.* прогон; *текст.* навой; балансир; балка; верхняк; излучать; испускать; коромысло (*весов*); лонжерон; луч; перекладина; поперечина; пучок; радиолуч; траверз; траверса

wedge – *метео* отрог; выклинивать; заклинивать; клин; подклинивать; призма; расклинивать

edge – *дор.* обочина; бордюр; борт; бровка; граница; грань; кайма; кант; контур (*изображения*); краевой; край; кромка (*гнутого профиля*); лезвие; обрез (*книги, страницы*); опушка (*леса*); остриё; ребро; срез (*импульса*); фаска; фронт (*импульса*); хребет

curve – *ав., авт.* вираж; выгиб; график; диаграмма; закругление; закруглять; извилина; изгиб; изгибать; изгибаться; излучина; кривая; кривизна; лекало (*чертёжное, швейное*); линия (*на графике*); характеристика; эпюра

ridge – *арх.* конёк; *геол.* гряда; *геол.* ребро; *текст.* кант; *текст.* рубчик; валик; вершина; гребень; кряж; отрог; прилив (*для совмещения при сборке*); рант; рифлевать; хребет

band – *арх.* поясок; *геол.* прослойка; *стр., текст.* пояс; *стр.* связывать; *стр.* соединять; *физ.* зонный; бандаж; бинт (*книжного переплёта*); диапазон; зона; кольцевать (*сигары, птиц*); лента; обод; обойма; обруч; поддиапазон; полоса (*частот*); полоска; ремень

bandelet – *арх.* поясок (*колонны*)

Английскому слову «beat» в рассматриваемом контексте наиболее близко соответствуют русские слова «луч» или «перекладина». Значит, слову «beamlet» – «маленький луч», «лучик» или «маленькая перекладина», «перекладинка». Далее иногда (из соображений удобства написания) будем называть «beamlet» русским словом «бимлет» по аналогии с укоренившимся в русском языке слове «вейвлет» как аналоге английского слова «wavelet». Иногда будем оставлять этот английский термин без перевода. По этой же схеме будем использовать следующие русские термины, являющиеся аналогами английских слов:

wavelet – вейвлет – «маленькая волна»

beamlet – бимлет – «маленький луч», «лучик»

wedgelet – веджлет – «маленький клин»

curvelet – курвлет – «маленькая кривая, кривулька; изгибчик»

bandelet – бендлет – «полоска (вблизи границы)»

ridgelet – риджлет – «маленький гребень, гребешок»

edgelet – еджлет – «маленькая грань, ребрышко».

David L. Donoho and Xiaoming Huo

Бимлеты и многомасштабный анализ изображений (Beamlets and Multiscale Image Analysis)

Оглавление

1. Введение	3
1.1. Что следует за вейвлетами?	4
1.2. Бимлет-анализ	5
1.3. Иерархия бимлет-алгоритмов	7
2. Бимлет-анализ	9
2.1. Бимлет-словарь	9
2.2. Бимлет-преобразование	11
2.3. Бимлет-пирамида	12
2.4. Бимлет-граф	13
3. Уровень Один: Алгоритмы Структуры	15
3.1. Выделение Линейных сегментов или кривых	16
3.2. Выбор порога (Thresholding) и Визуализация	18
3.3. Толщина Многомасштабных множеств	19
4. Уровень Два: Дерево структуры алгоритмов	22
4.1. Выделение фрагментов с большим количеством линий	23
4.2. Оптимизация алгоритма D-RDP	24
4.3. Выделение множества областей	25
5. Уровень Три: Локальное формирование цепочки из линейных сегментов	27
5.1. Быстрая аппроксимация GLRT для обнаружения линейных сегментов	27
5.2. Обнаружение Нитей Локальным Формированием цепочки	31
6. Уровень Четыре: Образование глобальных цепей линейных сегментов	33
6.1. Извлечение фиксированных Нитей	33
6.2. Выделение глобально оптимальных областей	36
7. Beamlab	38
8. Отношения с Предыдущими Работами	39
8.1. Быстрые Преобразования Радона	40
8.2. Анализ Изображения	40
8.3. Геометрическая Теория Меры	41
8.4. Другие приложения бимлетов	41
8.5. Другие приложения Идей Сетевых Потокaв	42
Литература (References)	42

Бимлеты и многомасштабный анализ изображений (Beamlets and Multiscale Image Analysis)

David L. Donoho¹ and Xiaoming Huo²

¹ Statistics Department, Stanford University;

² School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology

Реферат. Мы описываем идею многомасштабного анализа изображений, в которых линейные сегменты играют роль, аналогичную роли, которую играли точки в вейвлет-анализе.

Каркас (структура) имеет 5 ключевых компонент. Beamlet-словарь является диадно (двоично, бинарно) организованным набором линейных сегментов, занимающих диапазон бинарных позиций и масштабов, имеющих различные ориентации. Beamlet-преобразование образа $f(x,y)$ - набор интегралов от f над каждым сегментом в beamlet-словаре; результирующая информация запоминается в beamlet-пирамиде. Beamlet-граф является изображением структуры с пикселями в углах как вершины и бимлеты (beamlets) как грани; путь через этот граф соответствует многоугольнику в оригинальном изображении. Используя первые четыре компонента beamlet-структуры, мы можем сформулировать базирующиеся на бимлетах алгоритмы, которые способны идентифицировать и извлечь бимлеты и цепи бимлетов со специальными свойствами.

В этой статье мы описываем четырехуровневую иерархию beamlet-алгоритмов. *Первый уровень* состоит из простых процедур, которые игнорируют структуру beamlet-пирамиды и beamlet-графа; *второй уровень* использует только зависимости родитель-ребенок между масштабами; *третий уровень* включает коллинеарность (параллельность) и связь между одинаковыми по форме кривыми; и *четвертый уровень* допускает глобальную оптимизацию над полным пространством многоугольников в изображении.

Эти алгоритмы могут быть показаны на практике для того, чтобы продемонстрировать неожиданную мощь и очевидно беспрецедентные возможности, например, в обнаружении очень слабых кривых в очень шумных данных.

Мы сравниваем этот (алгоритм, подход) с важными предшественниками (антецедентами) в обработке изображений (Brandt и Dym; Horn и сотрудники; Gütze и Druckenmiller) и геометрической теории меры (Jones; David и Semmes; Lerman).

1. Введение

В течение последних десяти лет, многомасштабное мышление вообще и вейвлет-анализ в частности, стало очень популярным. Журнал «Прикладной и Вычислительный Гармонический Анализ», основанный только в 1993 г., быстро стал одним из наиболее-цитируемых (упоминаемых) журналом в математических науках, и занимает ведущее место в исследованиях по вейвлетам и становится также среди наиболее часто цитируемых среди авторов по математическим наукам.

Если искать факторы, которые могут поспособствовать влиянию вейвлетов, отметим, что двойные идеи многомасштабного представления и локализованного представления в приложении к изображениям, с феноменом «в определенном масштабе» представленные волновые формы и на этом масштабе локализованные в определенных позициях в пространстве.

1.1. Что следует за вейвлетами?

Вейвлеты едва затрагивают поверхности, на которых возможны многомасштабные представления; в этой статье, мы опишем различные многомасштабные системы, которые позволяют нам изучать и подвергать анализу очень различные явления.

Для того, чтобы увидеть потребность в таком альтернативном пути многомасштабной точки зрения, рассмотрим некоторые принципиальный феномен появления в одной из ключевых областей. Зрение - что вдохновляло большинство ранних работ в вейвлетах [41,40].

Зрение, конечно, является быстро развивающейся областью [38,50] и анализируется с многих точек зрения от «жестких» методов, как, например, сложные формирование изображения в человеческом мозге, и прямая хирургическая имплантация электродов в кошках и обезьянах, до «мягких» методов, основанные на теоретическом предположении.

Хорошо принято теперь, что зрение является в сущности многомасштабным феноменом, из-за проективной инвариантности, требовавшей задачи визуальной интерпретации (лицо должно быть распознано вне независимости закрыто оно или далеко) и из-за масштабной-инвариантности естественной статистики изображения [25,45]. Кроме того, визуальная задача является задачей о представлении и интерпретации интенсивности полей, изобилующих особенностями – принципиально разрывными. С годами, можно предположить, что математическое многомасштабное представление зрения может быть ключом в понимании того, как изначально человеческое зрение работает [38,25]; и сделаны усилия для сравнения свойств ответа нейронов в области V1 визуальной части коры с вейвлетами [44,26]. Три специфических явления кажутся наводящими на размышления.

Во-первых, что эти индивидуальные нейроны отвечали наилучшим образом на стимуляторы определенно обладали конкретной соответствующей позицией и шкалой; во-вторых, что организованные семейства нейронов, распределенные в локальных областях и масштабах, идентифицированы в области V1; и в-третьих, что визуальная система очень определенно применяет нелинейный выбор уровня (thresholding) к линейностям на выходе ячеек V1. Все эти факты поддерживают образ V1 как вычисление вейвлет-преобразования и выбора порога (thresholding) для коэффициентов преобразования с целью получения разреженного представления основного изображения.

Тем не менее, исследование развивалось так, что с очевидностью возникало своего рода два контраргумента, которые, кажется, противоречат этому наивному виду визуальной системы как выполнению аналога вейвлет-thresholding'a.

Первое семейство аргументов работает против идеи того, что визуальная система должна быть создана из вейвлетов. Сначала, известно, что свойства ответа кортиконных (cortical) ячеек очень чувствительные не только к позиции и масштабу стимулятора, но также ориентации и протяженности стимулятора. Во-вторых, эмпирические исследования баз данных естественных изображений [43,8,49] обнаружили, что типы базисных элементов, которые наилучшим образом разреживают естественные изображения - очень направленные в отличие от вейвлетов. Третий, поскольку в образах доминируют края, мы можем рассматривать математические исследования, дающие оптимально разреженное представление в математических моделях с доминирующими краями в изображениях [15], которое выдвигает потребность в анализе элементов, основанных на очень высоко ориентированных удлинённых характеристиках.

Некоторая часть этой работ была описана Yosemite Emmanuel Candès. Это кажется ясным на момент написания этой статьи, что если система многомасштабная система использована для анализа образа, она, вероятно, будет содержать многомасштабное семейство элементов с иглоподобными формами волн, принимающее большое разнообразие позиций, масштабов, ориентаций и протяженностей вейвлетов, с другой стороны, представлять небольшое количество предпочтительной ориентации и лучшим описанием как приблизительно изотропной.

Второе семейство аргументов работает против идеи о том, что визуальная система может основываться просто на пороговой обработке единственного слоя анализируемых элементов. Недавние эксперименты моделирования мозга показали, что образы предметов содержат длинные линии и кривые и рассмотрели ответ нерва посредством fMRI [39,50]. Результаты указывают на область V3 (а также другие области) как представляющую надежную нервную активность в ответ на такие стимулы, с деятельностью распределенной в этой области, как будто там решалась сложная итерационная задача. Своего рода итерационная задача, которая может быть проиллюстрирована принципом Гештальта «Хорошего Продолжения». Например, Field и сотрудники [27] и Julesz и сотрудники [35] проводили эксперименты, в которых хотели показать, на краткий период времени, один из двух образов: весьма сложный образ, содержащий много небольших случайным образом ориентированных характеристик наподобие колбасы особенностей, или аналогичный образ, в котором дополнительно содержится небольшое число те же особенностей (наподобие колбасы), распределенных как хорошо разделенные связи, которые с усилием могли быть распознаны в качестве части цепи. Последовательное обнаружение состояло в том, что, когда второй стимул был представлен, цепь довольно резко «перепрыгивала» для наблюдателя, который воспринимал ее существование 'preattentively' («pre-внимательно?»), то есть, по существу, рефлексивно. Аргумент говорит о том, что «интегрально» или «глобально» воспринимаемое поведение противоречит тому, которое должно ожидаться в системе, в которой элементы анализируются изолированно один от другого.

Эти два потока аргументов предлагают, что любой многомасштабный процесс, лежащий в основе усвоения визуальной информации, должен иметь два свойства:

[a] Анализ семейством многомасштабных анализирующих элементов, которые – «иглоподобны» на хороших масштабах;

[b] процесс взаимосвязи (interconnecting) очевиден, который рассматривает выравнивание и пространственную взаимозависимость этих элементов, например, принадлежат они общей прямой линии, связанной кривой или даже замкнутой кривой.

Они также предлагают, что системы, демонстрирующие эти свойства, потребуют понятия, которые обычно имеют место в вейвлет-анализе (и, на самом деле, в традиционном многомасштабном анализе).

1.2. Бимлет-анализ.

В этой статье будет описан метод многомасштабного анализа изображения, который мы называем бимлет-анализ, который демонстрирует интересный контраст с вейвлет-анализом и который может расширить кругозор читателя о возможных способах многомасштабного мышления. Пока вейвлеты предлагают (offer) локализованное представление масштаб/положение около фиксированных областей пространства со специфическим масштабом и положением, бимлеты имеют локализованное масштаб/позицию/ориентацию, основанную на двоично-организованных линейных сегментах.

Конструкция бимлета включает 5 центральных компонентов, которые будут описаны подробно ниже в разделе 2.

1. Словарь бимлета – бинарно-организованная библиотека линейных сегментов в семействе позиций, ориентаций и масштабов, которые дают многомасштабную аппроксимацию набора всех линейных сегментов.

2. Бимлет-преобразование - набор всех интегралов по линиям изображения вдоль бимлетов из бимлет-словаря.

3. *Бимлет-пирамида* является коллекцией коэффициентов бимлет-преобразования, расположенных в структуре данных с иерархической многомасштабной природой.

4. *Бимлет-граф* имеет структуру графа, в которой вершины соответствуют угловым пикселям в основном изображении и грани соответствуют бимлетам, объединенным в пары таких угловых пикселей.

5. Бимлет-алгоритмы извлекают данные из бимлет-пирамиды по пути, определенном структурой бимлет-графа, например, алгоритмы движения по сети или алгоритмы рекурсивного бинарного разделения.

Ясно, многое собрано здесь; потребуется время и усилия для понимания этой технологии и оценки возможностей этих предложений.

Отметим, прежде всего, что эта система несомненно показывает свойства [a] и [b], отмеченные выше, как желательные компоненты модели для визуальной системы:

анализ элементов наподобие иглы (иглоподобных) и методов, обеспечивающих связность, коллинеарность и совпадение кривизны (co-cusvity). Одной этой пары свойств достаточно, чтобы мотивировать исследование этой системы. Тем не менее, наша персональная мотивация основана на определенной существенной привлекательности системы, как схемы организации информации об изображении и наше восприятие того, что она имеет приложения, перекрывающие большее разнообразие важных научных областей.

Насколько притяжения являются существенными, мы думаем о трех основных:

- Бимлет-анализ - ясная фундаментальная многомасштабная идея, отличающаяся от вейвлет-нотации; изучая его, мы расширим наше понятие многомасштабного анализа и что он может делать. Аспект повышения осознания конструкции бимлетов - один из тех, который мы многократно подчеркнем ниже; они могут помочь нам получать «вне колеи вейвлетов» в нашем привычном многомасштабном мышлении.
- Бимлеты играют фундаментальную аппроксимационно-теоретическую роль; системы бимлетов позволяют получить разреженное приближенное представление хороших кривых на плоскости – в определенном смысле - оптимально редком.
- Сравнение с теорией аппроксимации вейвлетами - полезное. Пока вейвлеты могут обеспечивать оптимально разреженные представления хороших функций, бимлеты дают оптимально разреженные представления гладких кривых, погруженных в изображение.
- Бимлет-методы обеспечивают фундаментально корректную структуру данных для работы по обнаружению структуры шума и проблемы выделения границ.

Бимлет-пирамида содержит интегралы изображения над линейными сегментами на всех масштабах и положениях. В определенных задачах обнаружения сигнала обычные детекторы, основанные на фильтрации, посредством выравнивания по пикселям, может иметь низкое отношение сигнал/шум, и, следовательно, низкую вероятность обнаружения. В то же время, убирая кое-что в этой пирамиде, можно оставить интегралы с высоким коэффициентом отношения сигнал/шум, позволяющие выделять сигнал, который невозможно обнаружить, используя стандартную фильтрацию или стандартные процедуры по обнаружению краев.

Мы также верим, что бимлет-анализ обеспечивает увлекательный диапазон возможных приложений. Есть несколько важных научных областей, где структура данных сориентирована вокруг линейных сегментов, кажется, что они просто призвана для этого. Мы упоминаем два примера.

- *Физика Частиц*. Дэвид Horn и соратники Halina Abramowicz, Gideon Dror, Ury Naftali, Carmit Sahar-Pikielny в Университете Tel-Aviv развили инструментальные средства для работы с данными из детекторов частиц, связанных с современным состоянием частиц экспериментальной физики. В таких экспериментах определенно наблюдались события, включающие чрезмерную плотность частиц на линейных и криволинейных дорожках. Эта команда имела хорошие результаты в установлении таких структур в очень беспорядочной и шумной среде, используя способ предбимлет-анализа, объединенного с нейронными сетями постпроцессингом. См. [3,4,23].

- *Крупномасштабная структура Вселенной.* Доступность огромных 3-D каталогов координат галактик, как, например, Las Campanas съемка в диапазоне красного цвета (redshift) и будущая Грубая (Sloan - неряшливая) Цифровая Небесная Съемка делает возможным задавать фундаментальные вопросы о крупномасштабном распределении материала во вселенной и пытаться соответствовать моделям галактики, группируя основные в настоящее время физические теории («действие» + «холодный темный материал») с данными. С тех пор как крупномасштабная структура, в основном, доминировала, материал группировали в пленки и волокна [24,5,47], разработка поведения чувствительных мер такой группировки первостепенная. Существует изучение точных подкаталогов в так называемых «карандашных лучах» (тонкие трубы) и анализе свойства распределения галактики в таких лучах. Это - снова тип предбимлетного (proto-beamlet) анализа, на этот раз в 3-D.

Мы верим, что такие примеры представят только «вершину айсберга»: много больше таких обнаружений и группировка задач будут идентифицированы над классом полей, как в анализе данных изображений, так и в анализе 3-d данных. Мы разработали систематическую инфраструктуру для такого, основанного на линейных сегментах, анализа, каковое мы собираемся описывать в нескольких публикациях.

Мы также отметим, что к настоящему времени есть несколько групп исследователей, которых кажется, привлекает, как и нас, возможности анализа данных, основанных локальных линейных структурах. Дополнительно к группе Дэвида Хорна (D.Horn's), упомянутой выше, мы упоминаем

- Achi Brandt в Институте Weitzman Науки, и его последний Ph. D. студент J. Dym, который предлагал быстрые алгоритмы для оценивающих семейств интегралов строки образа [11], и, который напоминал, чтобы они могли быть использованы в анализе данных зрения [12]; и
- Peter Jones в Yale, и его последний Ph.Студент D. Gilad Lerman, теперь в N.Y.U., который рассчитал β оценкой Джонса в анализе многомерных статистических данных [36].

Наконец, мы упоминаем нашу собственную работу [22,30], использовавшую beamlet-идеи на основе предбимлет (pre-beamlet)-терминологию.

Мы нашли все эти предшествующие бимлетам (proto-beamlet) работы, пионерские в различных направлениях, и хотим способствовать другим в изучении и приводим эти более ранние усилия. Тем не менее, мы также ожидаем читателей, для того чтобы найти эти предшествующие работы с нечетким и недостаточно общим языком. Например, даже нам не ясно, что все выше приведенные авторы будут сами согласны, что они работали над аналогичными проблемами, хотя мы утверждаем, что это так.

В этой статье мы идентифицируем и формализуем 5 ключевых компонентов beamlet-анализа, как упомянуто выше, и мы привлечем внимание к ключевым принципам и эвристике. Пока некоторые из них были уже очевидными в более ранней работе, но кажется, что полный пакет предлагает много возможностей не очевидных из более ранних работ, и которые мы надеемся объяснить.

(offer- предлагать; предложение)

1.3. Иерархия бимлет-алгоритмов

С нашей точки зрения, одно из наиболее важных отличий между традиционным многомасштабным мышлением, основанном на вейвлетах, и многомасштабном мышлении, основанном на бимлетах, лежит в наборе алгоритмов, которые могут быть созданы. Вейвлет-анализ предлагает в основном два типа алгоритмов:

1. Очень простые алгоритмы основывались на выборе порога вейвлет-коэффициентов или простого расчета, путем суммирования по уровням;

2. Умеренно простые алгоритмы основывались на дереве структуры (связи родитель-ребенок) бинарных квадратов, обрабатывающих вейвлет-коэффициенты.

В порядке контраста, мы можем различить четыре уровня структуры алгоритмов, базирующихся на бимлетах. Первые два по сути очень аналогичны стилю мышления в вейвлетах :

1. Очень простые алгоритмы основывались на выборе уровня beamlet-коэффициентов или просто кусочно-уровневое суммирование;

2. Умеренно простые алгоритмы, основанные на дереве структуры (связи родитель-ребенок) бинарных квадратов, обрабатывающих beamlet-коэффициенты.

Аналогия является следствием того, что, подобно вейвлетам, бимлеты проиндексированы масштабом и положением, индексация по масштаб/позиции обеспечивает связи «поколений» между родителями и детьми в той же самой позиции, но различными масштабами. Следующие два уровня идут далеко за образцами, знакомыми из стиля вейвлет-мышления; они включают эксплуатацию отношений *соседства* среди бимлетов. Здесь *соседство* может включать простую связность пар бимлетов - концы одного является началом другого – а также коллинеарность – два бимлета принадлежит одному и тому же лучу - и согласованные кривые (co-curvity) – два бимлета принадлежит одной и той же кривой. Два уровня структуры, в порядке сложности, являются:

3. Умеренно сложные алгоритмы, основанные на *локальном* использовании соседства бимлет-коэффициентов согласно beamlet-графу.

4. Более сложные алгоритмы, основанные на *глобально* оптимальном использовании соседства бимлет-коэффициентов согласно beamlet-графу.

Мы нашли третий и четвертый уровни структуры в этой иерархии беспрецедентными и очень интересными. Наша цель в этой статье состоит в том, чтобы помочь читателю начать думать с точки зрения этих новых связей и начать воспринимать новые алгоритмические возможности, которые они обещают.

В качестве краткого примера, мы увидим ниже, что beamlet-структура позволяет нам изучать *пространство кривых в образах (изображениях)* в рамках кратноразрешающего метода, эффективно извлекая волокна (нити) или границы объектов, удовлетворяя условию глобальной оптимизации. Пока это может казаться довольно страшным для того, чтобы оптимизировать над всеми кривыми в изображении, это возможно сделать, используя несколько фактов о beamlet-структуре.

- Многоугольные кривые в плоскости x-y могут быть построены путем соединения вместе очень небольшого числа связанных бимлетов.
- Каждая цепочка является путем в бимлет-графе.
- Определенные алгоритмы сетевого течения, которые развернуты в бимлет-графе, позволяют нам эффективно использовать пространство путей в графе, просматривая пути, которые делают сумму связанных термов оптимально большой.
- Интеграл от изображения вдоль многоугольной кривой делает бимлеты просто суммой небольшого числа термов из бимлет-преобразования.

Комбинация этих компонентов позволяет сформулировать алгоритмы, которые могут эффективно находить пространство всех кривых в изображении для глобально оптимальной кривой - если понятие оптимальности включает интеграл, вычисленный вдоль кривой.

Мы планируем в этой статье систематично создавать понятные читателю много типов алгоритмов, которые могут быть построены, основываясь на beamlet-пирамиде и beamlet-графе. Начиная с дискуссии в разделе 2 об основных компонентах beamlet-структуры, мы разовьем в разделах 3-6 дискуссию об иерархии уровней структуры, базирующейся на бимлет-алгоритмах.

Это начинается в разделе 3 с элементарными алгоритмами, которые не используют взаимосвязанные (interrelatedness) бимлеты (Уровня 1); переходя в раздел 4 к алгоритмам, базирующимся на дереве (Уровня 2), которые используют отношения родитель-ребенок; и затем, наконец, в разделах 5 и 6 обсуждаются, базирующиеся на графах, алгоритмы (на Уровнях 3 и 4), которые обеспечивают коллинеарность, согласованность кривых (co-curvity) и пространственную непрерывность, используя beamlet-граф.

В разделе 7 мы сделаем обзор нашей программной среды, BeamLab, которая вычисляет много примеров, описанных здесь; и в Разделе 8, мы рассмотрим важную литературу по antecedents (предшественникам) бимлетов, в работе Gütze & Druckenmiller по быстрому Hough-преобразованию [29], Brandt & Dym о вычислении многочисленных линейных интегралов [11], и Peter Jones, Guy David, Stephen Semmes, и Gilad Lerman о геометрическом анализе множества точек [32].

2. Бимлет-анализ

Мы начинаем с некоторой терминологии и замечаний. Мы заинтересованы в данных изображения как $n \times n$ массив чисел, но мы выберем для рассмотрения область как непрерывный квадрат $[0; 1]^2$ и пиксели как массив $1/n \times 1/n$ квадратов, размещенных на сетке в $[0; 1]^2$.

Бинарный квадрат является множеством точек

$$\{(x_1, x_2) : [k_1/2^j, k_1 + 1/2^j] \times [k_2/2^j, k_2 + 1/2^j]\}$$

где $0 \leq k_1, k_2 \leq 2^j$ для целого $j \geq 0$. Для ясности, мы будем иногда писать $S(k_1, k_2, j)$ так что, например, $S(0, 0, 0)$ есть единичный квадрат $[0; 1]^2$ и такой, что если мы имеем бинарную сетку $n \times n$ с $n = 2^j$, тогда индивидуальные пиксели — n^2 ячеек $S(k_1, k_2, J)$, $0 \leq k_1, k_2 \leq n$.

2.1. Бимлет-словарь.

Предположим мы имеем узлы $v_1, v_2 \in [0, 1]^2$ и рассмотрим линейный сегмент $b = \overline{v_1 v_2} \in [0, 1]^2$. Мы назовем такой сегмент *beam* (луч, балка). Если мы рассматриваем только лучи, соединяющие узлы $(k_1/n; k_2/n)$ пиксели в углах, имеем порядка $O(n^4)$ таких лучей. Мы отметим, что есть $N = n^2$ пикселей, и типичные быстрые алгоритмы обработки изображений требует порядок $O(n^2) = O(N)$ операций или самое большее $O(n^2 \log(n^2)) = O(N \log(N))$; мы ищем алгоритмы порядка $O(n^2)$ или около того, как можем их получить. Рассчитывая на коллекцию мощности $O(n^4)$ бимлетов как на организованное устройство приведет к непрактичным для работы алгоритмам, так что мы ищем замены с меньшей мощностью.

Возьмем набор всех бинарных квадратов на масштабе $0 \leq j \leq J$. Зафиксируем квант разрешения $\delta = 2^{-J-K}$ для $K \geq 0$. На каждом бинарном квадрате просмотрим границы по часовой стрелке по пути, начинающемся в верхнем правом углу и маркируя узлы, равноудаленные на расстояние δ один от другого. Так как δ бинарна и делит длину периметра каждого бинарного квадрата с длиной стороны $\geq 1/n$, имеется точно $M_j = 4 \cdot 2^K \cdot 2^{J-j}$ узлов, выделенных таким образом в бинарном квадрате S со стороной $2^{-j} \geq 1/n$. Назовем этот набор узлов $V(S)$; помечая узлы по порядку, они столкнулись на поперечине по часовой стрелке границы так, что $V(S) = \{v_{i,S} : 0 \leq i \leq M_j\}$. Если мы рассматриваем любые два бинарных квадрата, которые имеют пересекающиеся границы, вдоль пересечения границ два квадрата имеют те же самые узлы вообще; для нашей системы

разметки мы можем иметь $v_{i,S} = v_{i',S'}$ даже если $i \neq i'$. Для дальнейшего использования мы примем $V(n, \delta)$ для обозначения набора всех узлов во всех $V(S)$, где S – бинарная длина стороны $\geq 1/n$ и пусть $\mathcal{L}(n)$ обозначает сетка из всех горизонтальных и вертикальных линий в квадрате с шагом $1/n$.

В пределах каждого бинарного квадрата S , рассматривайте набор всех лучей, соединяющих узлы на границе S :

$$B_\delta(S) = \{b = \overline{v_{i,S} v_{i',S}} : 0 \leq i_1, i_2 < M_j\}.$$

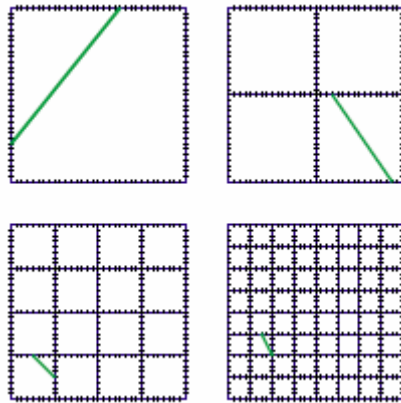


Рис.1 Бимлеты на различных шкалах (квадраты с различной длиной стороны).

Имеем в итоге такие узлы $\binom{M_j}{2}$.

Определение 1. Для данных бинарных n и δ множество **бимлетов** есть коллекция $\mathcal{B}_{n,\delta}$ всех лучей, принадлежащих к некоторому $\mathcal{B}_\delta(S)$ для некоторого бинарного квадрата S с длиной стороны 2^{-j} , $0 \leq j \leq J$. \square

См. рис.1 в качестве примера бимлетов.

Мы отметим, что бимлеты только соединяют узлы на границе бинарного квадрата, так что хотя семейство бимлетов было построено из $O(n^2)$ узлов, они содержат намного меньше, чем $O(n^2)$ лучей. Фактически, так как $\binom{M_j}{2} \approx M_j^2 / 2$ мы имеем

$$\#\mathcal{B}_{n,\delta} \approx (J+1) \cdot 8 \cdot 4^K \cdot n^2.$$

Например, предположим, что $\delta = 1/n$. Тогда есть просто 4 узла $v_{i,S}$, связанных с любым бинарным квадратом с длиной стороны $1/n$; они, конечно, являются углами квадратов, и мы имеем

$$\#\mathcal{B}_{n,1/n} \approx 8 \cdot (\log_2(n) + 1) \cdot n^2.$$

Хотя есть и порядок пикселей $O(n^2)$ и порядок лучей $O(n^4)$ могут быть вычислены, основываясь на угловых пикселях, набор бимлетов имеет мощность только логарифмически больше чем $O(n^2)$. Из этого следует, что полный поиск во множестве бимлетов может происходить значительно быстрее, чем полный поиск во множестве лучей.

Несмотря на меньшую мощность, beamlets-словарь выразителен. Он состоит из лучей переменных масштабов, положений и ориентаций. Сравнительно небольшое число beamlets

может быть использовано для замены некоторым единственным лучом. В [22] мы доказываем

Лемма 1. Любой луч с конечными точками где угодно в $[0; 1]^2$ может быть аппроксимирован в пределах расстояния Хаусдорфа $\delta/2 + 1/n$ непрерывной цепью (b_1, b_2, \dots, b_m) бимлетов $b_i \in \mathcal{B}_{n,\delta}$, где необходимое число m бимлетов ограничено $8 \log_2(n)$ для $n > 2$.

Идея показана на рис. 2. По смыслу очень похоже на логику движения по современной авиалинии. Есть очень много длинных связей между несколькими узлами и сравнительно меньшими короткими связями между провинциальными центрами.

2.2. Бимлет-преобразование.

(Английский термин «*beam*» в переводе на русский – «луч».)

Пусть $f(x_1, x_2)$ есть непрерывная функция на $[0, 1]^2$. *Beamlet-преобразованием* функции f – это совокупность всех интегралов по линиям

$$T_f(b) = \int_b f(x(l)) dl, \quad b \in \mathcal{B}_{n,\delta},$$

интегралы, взятые по линейным сегментам $b \in \mathcal{B}_{n,\delta}$; здесь $x(l)$ трасса бимлета. Под дискретным бимлет-преобразованием массива $n \times n$ с элементами f_{i_1, i_2} понимают бимлет-преобразование непрерывной функции, полученной путем интерполяции значений f_{i_1, i_2} :

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i_1, i_2} f_{i_1, i_2} \phi_{i_1, i_2}(x_1, x_2),$$

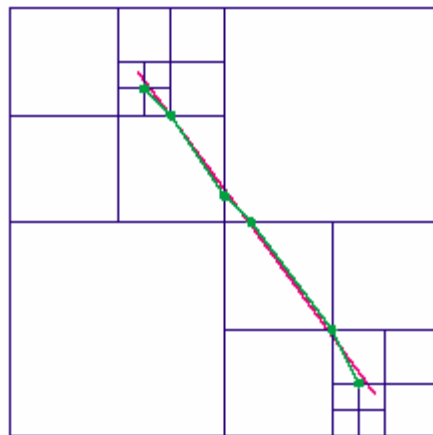


Рис. 2. Линейный сегмент, приближенный цепочкой бимлетов. Общее количество бимлетов (в цепочке) – не больше, чем $O(\log_2 n)$. Две конечных точки луча – $(0.3, 0.85)$ и $(0.85, 0.1)$.

где (ϕ_{i_1, i_2}) указанное семейство непрерывных (полученных интерполяцией) функций. Есть несколько способов, которыми функции ϕ_{i_1, i_2} могут быть выбраны. В этой статье мы используем только *интерполирующие в среднем функции*. Пусть пикселу (i_1, i_2) соответствует квадрат $[i_1/n, (i_1+1)/n] \times [i_2/n, (i_2+1)/n]$. Функция ϕ_{i_1, i_2} может быть выбрана так, чтобы удовлетворять условиям

$$n^2 \int_{Pixel(i'_1, i'_2)} \phi_{i_1, i_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \delta_{i_1, i'_1} \delta_{i_2, i'_2}$$

где $\delta_{i, i'}$ - символ Кронекера. Тогда f - функция, которая удовлетворяет

$$f_{i_1, i_2} = Ave\{f \mid Pixel(i_1, i_2)\};$$

другими словами, значения f_{i_1, i_2} рассматриваются как средние числа уровня пикселя непрерывной функции f . Следующее определение иллюстрировано на рис. 3.

2.3. Бимлет-пирамида

В традиционном использовании [6], пирамида - структура данных, показывающая понятие *масштаба* и понятие *причинной связи*. Данные, сохраненные в более грубых масштабах, должны быть получаемы от данных, в любом более тонком масштабе.

В нашем определении beamlet-пирамида - совокупность всех интегралов $T_f[b]$ для $b \in B_{n, \delta}$. Эта структура показывает многомасштабную природу пирамиды, но показывают причинную связь только в приблизительном смысле.

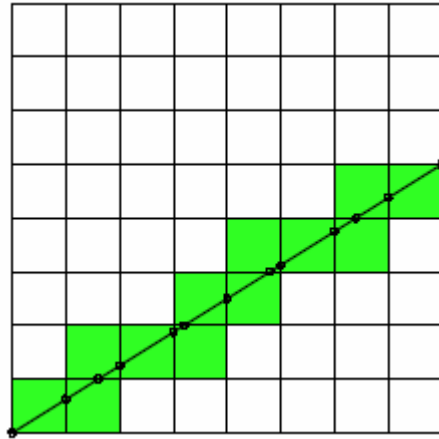


Рис. 3. Иллюстрация кусочно- постоянной интерполяции цифрового изображения, и его связанного бимлет-преобразования. Бимлет-преобразование - взвешенная сумма значений пикселя, связанные квадраты, которых пересекает бимлет.

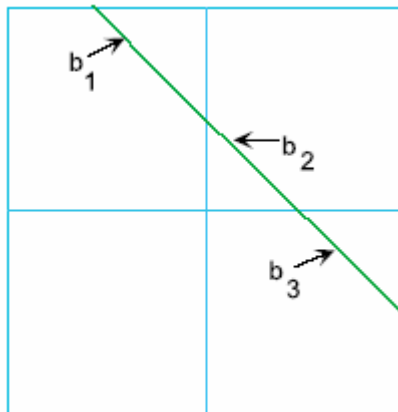


Рис. 4. Декомпозиция бимлета в три бимлета в следующем более тонком масштабе.

Если мы рассмотрим, на мгновение, идеальный континуум бимлет-словарь, полученный при $\delta \rightarrow 0$ в определении бимлета, то мы получаем систему, подчиняющуюся двухмасштабному отношению: каждый непрерывный бимлет может быть представлен объединением не более трех бимлетов в следующем более тонком масштабе.

Мы демонстрируем этот пункт на рис. 4, который иллюстрирует декомпозицию бимлета b в объединение трех бимлетов b_1, b_2 и b_3 на более тонком масштабе.

Ключевое аналитическое свойство, которое мы получим, это - то, что декомпозиция бимлета

$$b = \bigcup_i b_i$$

грубого масштаба в более тонкий масштаб дает

$$T_f[b] = \sum_i T_f[b_i].$$

На практике мы работаем с $\delta > 0$, конечно, и так это отношение с двумя масштабами имеет место только в приближительном смысле: есть цепочка не более трех бимлетов в следующем более тонком масштабе, который отклоняется не более δ от бимлета на более грубом масштабе.

2.4. Бимлет-граф

С бимлет- пирамидой связан бимлет - граф. Этот граф имеет $(n+1)^2$ вершин (vertices) – соответствующих пикселям изображения $n \times n$ – и $16n^2(\log(n) + 1)$ ребер (edges) – соответствующих бимлетам из $B_{n,1/n}$. Две вершины beamlet-графа связаны ребром тогда и только тогда, когда они соответствуют пикселям, чьи нижние левые углы связаны с бимлетами.

В бимлет-графе некоторые вершины имеют связи только с ближайшим соседом, но многие другие имеют связи также с другими вершинами, вершины соответствуют пикселям, которые можно так сказать находятся на расстоянии 2, 4, 8, 16 и т.п. пикселей. Иллюстрация различных связей для различных вершин отражена на рис. 5.

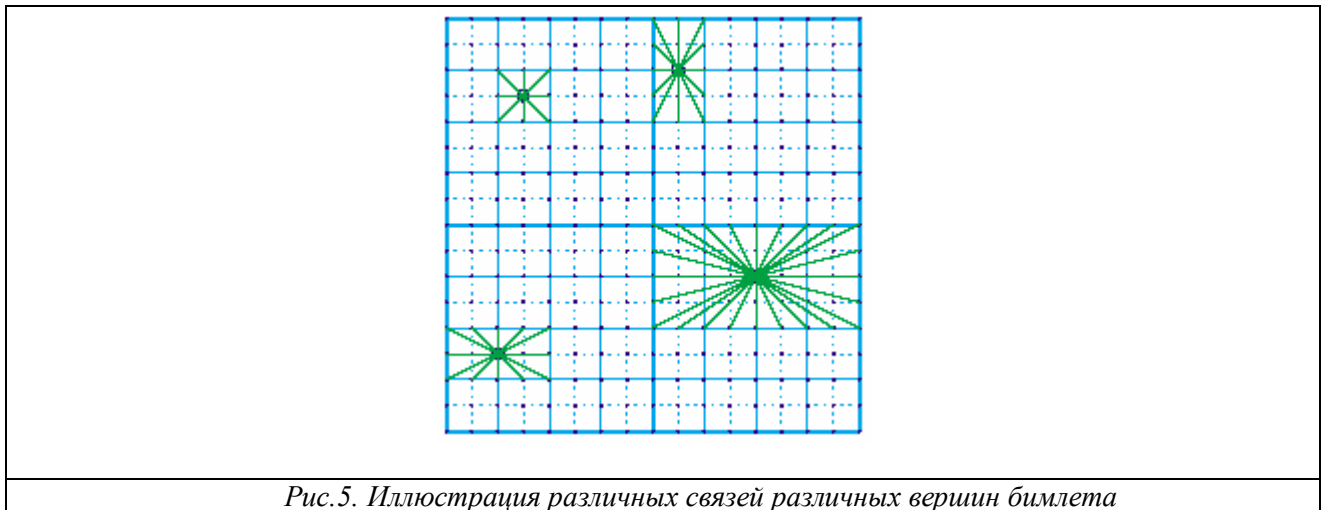


Рис.5. Иллюстрация различных связей различных вершин бимлета

Бимлет-граф может быть сравнен с другим графом, использованным в анализе изображений: *граф ближайшего соседа* [42, 28, 31]. В графе ближайшего соседа, каждая вершина снова соответствует пикселю в изображении, но связан только с вершинами, соответствующими пикселям, которые являются ближайшими соседями в изображении

(действительно есть два варианта - граф из 4- соседей (перекрестная связность) и граф из 8 соседей (звездная связность) – для наших целей оба подобны.

Интересно противопоставить две структуры.

- *Диаметр.* Пока две вершины в ближайших соседях графа, соответствующие пикселям в противоположных концах изображения, могут быть связаны только путем $O(n)$ граней, соответствующие вершины в бимлет-графе могут быть связаны путем из значительно меньшего числа ребер: никакие две вершины в бимлет-графе не отстоят друг от друга более чем на $4 \log_2(n) + 1$ ребер.
- *Изоморфизм Путь/Полигон.* В каждой графической структуре, каждому пути через граф соответствует многоугольная кривая в изображении. Многоугольные кривые, сгенерированные из путей к ближайшим соседям графа, могут иметь вид, разительно отличный от тех, которые сгенерированы в бимлет-графе. Это детализировано в наших следующих трех наблюдениях:
- *Природа Многомасштабности.* Пока многоугольная кривая, происходящая от графа ближайших соседей, имеет много частей приблизительно того же самого размера и, общих чертах, является мономасштабной, многоугольная кривая, происходящая от бимлет-графа, может иметь ребра различной длины, некоторые из них могут быть глобального масштаба, другие - масштаб пикселя, а другие – в промежутке.
- *Суммарная Кривизна.* Пока пути в графе ближайших соседей в общих чертах соответствует многоугольная кривая в образе, которая делает много меньше «поворотов», возможно для пути в бимлет-графе соответствует многоугольная кривая в изображении, которая почти прямая, то есть состоит из сравнительно малого числа прямых сегментов со сравнительно небольшими поворотами между частями.
- Определим общую кривизну $K(\pi)$ многоугольной кривой в образе путем суммирования изменения угла в вершинах пути. Рассмотрим вершины v_0 и v_1 в графе, соответствующие пикселям, выбранным произвольно на противоположных границах изображения, и рассмотрим самый короткий путь между ними в графе ближайших соседей. Этот путь в графе ближайших соседей соответствует многоугольной кривой π через изображение, и суммарной кривизне $K(\pi)$, пропорциональной длине n пути. В противовес, мы можем создать путь через бимлет-граф такой, что соответствующая многоугольная кривая в изображении имела суммарную кривизну $O(\log(n))$.
- *Направленная Точность.* Пока многоугольная кривая, происходящая от графа ближайших соседей, должна сделать много небольших поворотов вдали от своей окончательной цели, кривая, происходящая от бимлет-графа, может показать высокую степень верности направлению.

Определим общее направление многоугольной кривой, соединяющей две точки, посредством направления вектор между конечными точками. Определим *среднее отклонение от направления* многоугольной кривой в среднем вдоль длины дуги кривой, как разность углов между направлением конкретного сегмента и общим направлением многоугольной кривой. Для многоугольной кривой одного масштаба расстояние между типичными пикселями со средним направлением $\theta \in [0, \pi]$, полученным от самого короткого пути на графе ближайших соседей, среднее отклонение углов - обычно ненулевая константа, приблизительно равная величине $\min(|\theta|, |\theta - \pi/2|, |\theta - \pi/4|, |\theta - 3\pi/4|, |\theta - \pi|)$ для графа 8 соседей. В противоположность этому, если конечные точки отдалены на n пикселей, самая короткая многомасштабная многоугольная кривая, порожденная бимлет-графом, имеет среднюю разницу углов порядка $1/n$.

На рис. 6, мы сравниваем самые короткие пути с одними и теми же конечными точками как в графе ближайшего соседа (near-neighbor graph), так и бимлет-графе. В таблице 1 для двух фиксированных точек (0:3; 0:85) и (0:85; 0:1) мы даем ее суммарную кривизну и

среднее отклонение от направления (которое является мерой точности направления) в диапазоне разрешения (смотри детали в таблице).

Эти отличия между двумя структурами графов, мы надеялись показать, отвечают за главные отличия в статистической эффективности двух аналогичных алгоритмов для обнаружения волокон (нитей) и объектов.

3. Уровень Один: Алгоритмы Структуры

В порядке развития нашей темы – был разработан набор новых интересных алгоритмов для обеспечения доступности к конструкции бимлетов – мы начнем с описания трех алгоритмов обработки бимлет-коэффициентов без учета связей, которые могли существовать между бимлетами на различных масштабах и положениях. Эти алгоритмы полностью аналогичны алгоритмам, используемым традиционно в вейвлет-анализе.

Таблица 1. Суммарная кривизна и среднее отклонение от направления для линейных сегментов на различных разрешениях. (Для изображения $n \times n$, на уровне пикселей разрешение равно $1/n$.) NNG = граф ближайших соседей, BG = бимлет-граф

Разрешение	Суммарная Кривизна NNG BG		Среднее Отклонение Направления NNG BG	
	NNG	BG	NNG	BG
16	0.8 π	0.23 π	0.08 π	0.0217 π
32	1.6 π	0.63 π	0.08 π	0.0252 π
64	3.2 π	0.23 π	0.08 π	0.0092 π
128	6.4 π	0.25 π	0.08 π	0.0067 π
256	12.8 π	0.27 π	0.08 π	0.0039 π
512	25.6 π	0.58 π	0.08 π	0.0024 π
1024	51.2 π	0.13 π	0.08 π	0.0007 π
2048	102.4 π	0.15 π	0.08 π	0.0006 π
4096	204.8 π	0.17 π	0.08 π	0.0003 π

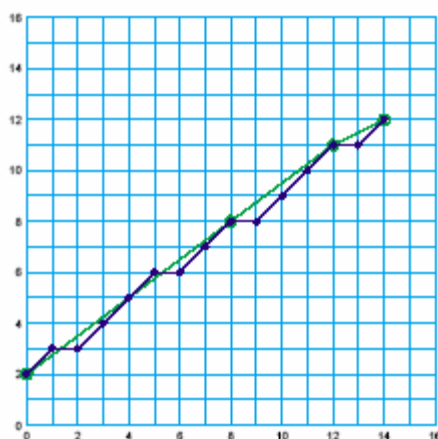


Рис. 6. Линейный сегмент, аппроксимированный путями в бимлет-графе и граф ближайшего соседа; размер изображения $n = 16$. Две конечных точки линейного сегмента $(0; 2/16)$ и $(14/16, 12/16)$. Вершины в пути в бимлет-графа выделены символом \otimes . Ребра пути в графе ближайшего соседа выделены толстой линией. Путь в бимлет-графе содержит 3 ребра, тогда как путь в графе ближайшего соседа имеют 14 ребер.

3.1. Выделение линейных сегментов или кривых

Предположим, что мы имеем осложненное шумом $n \times n$ изображение, возможно содержащее где-нибудь в его пределах слабо проявляющийся образ линейного сегмента неизвестной длины, ориентации и позиции. См. рис. 7. В этой модели, у нас есть данные на уровне пикселей с шумом (y_{i_1, i_2}) , $0 \leq i_1, i_2 < n$, и мы определяем модель этих данных как

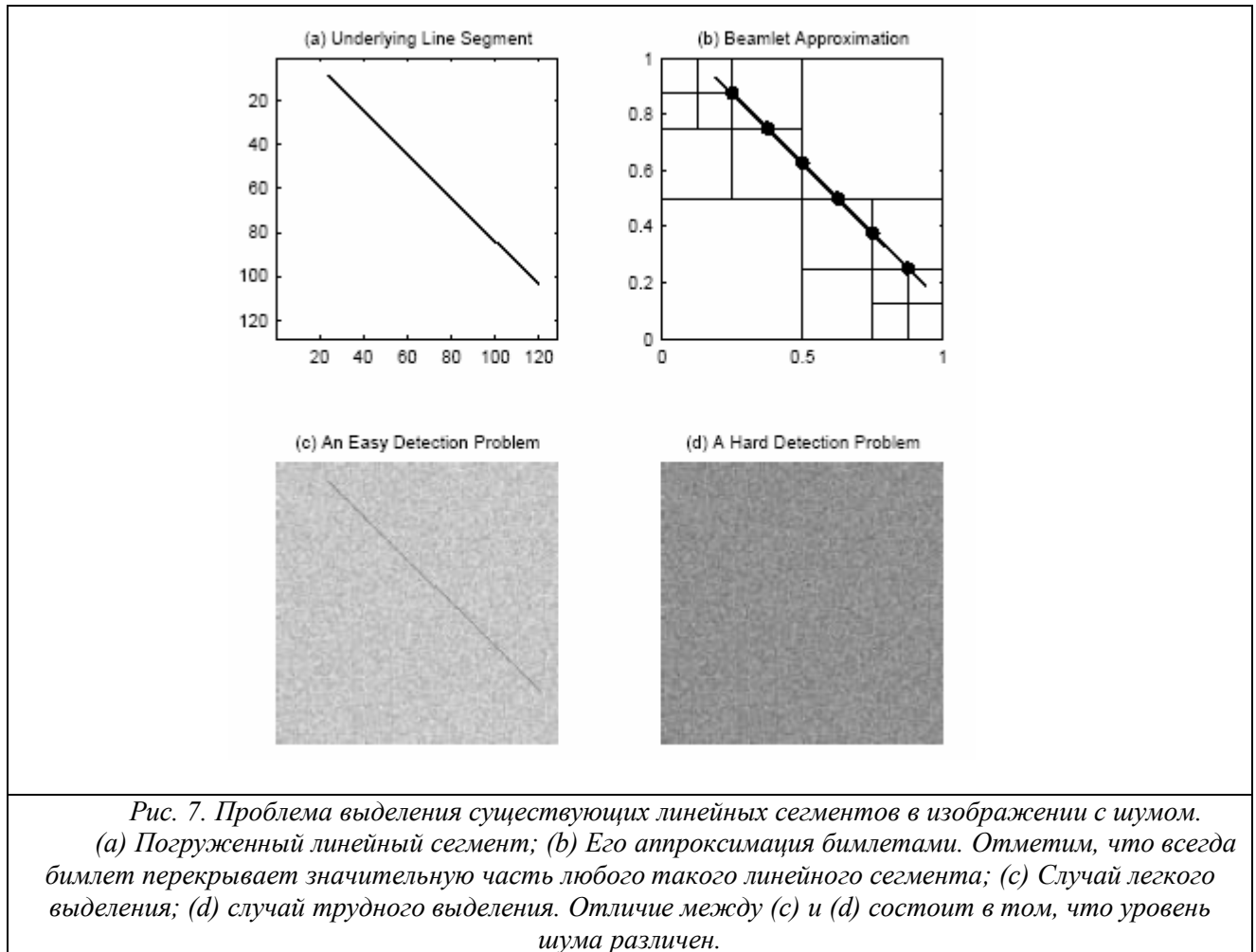
$$y_{i_1, i_2} = A \cdot \tilde{\Phi}_{i_1, i_2} + \varepsilon z_{i_1, i_2}, \quad 0 \leq i_1, i_2 < n, \quad (1)$$

где ε - уровень шума, z_{i_1, i_2} - белый гауссов шум, A - параметр неизвестной амплитуды и $\tilde{\Phi}_{i_1, i_2} = \tilde{\Phi}(i_1, i_2; \overline{v_0 v_2})$ - наблюдаемый эффект в сенсорном массиве неизвестного луча $\overline{v_0 v_2}$. Формализуя задачу, мы можем сказать, что наша проблема в том, чтобы тестировать

$$H_0 : A = 0 \quad (2)$$

простую нулевую гипотезу
против составной альтернативы

$$H_1 : A > 0, \quad v_0, v_1 \in [0, 1]^2. \quad (3)$$



Это - очень запутано из-за необходимости подсчета большого разнообразия возможных пар конечной точки. Стандартные идеи в испытании гипотезы (так называемая «фильтрация

по обнаружению совпадений» для испытания коэффициента универсальной вероятности), предполагают, что мы рассматриваем случайное поле

$$Y[v_0, v_1] = \langle \psi_{\overline{v_0 v_1}}, y \rangle.$$

где $\psi_{\overline{v_0 v_1}}$ есть так называемый фильтр сопоставленный $H_{1, \overline{v_0 v_1}}$

$$\psi_{\overline{v_0 v_1}}(i_1, i_2) = \tilde{\Phi}(i_1, i_2; \overline{v_0 v_1}) / \|\tilde{\Phi}(\cdot, \cdot; \overline{v_0 v_1})\|_2$$

и рассмотрим статистику максимального луча

$$Y^* = \max\{Y[v_0, v_1] : v_0, v_1 \in [0, 1]^2\}.$$

Здесь максимум находится среди всех лучей $\overline{v_0 v_1}$ с конечными точками в $[0; 1]^2$. Мы затем отвергаем H_0 , если Y^* превышает определенный порог. Это часто называют «Тест Коэффициента Универсальной Вероятности», поскольку он использует стандарт «Теста Коэффициента Вероятности» (происходит от вышеуказанного H_0 и простой альтернативной гипотезы $H_{1, \overline{v_0 v_1}}$) и затем оптимизируется над всеми выборками $H_{1, \overline{v_0 v_1}}$ для тестирования составной альтернативы.

Есть большое число лучей для рассмотрения; даже если бы мы дискретизировали для работы на масштабе пикселей, мы имеем по крайней мере $O(n^4)$ лучей. Наивная оценка этого максимума требует $O(n^4)$ операций стоимостью $O(n)$ операций каждый, т.е. в целом $O(n^5)$ операций; это непоправимо дорого для больших n .

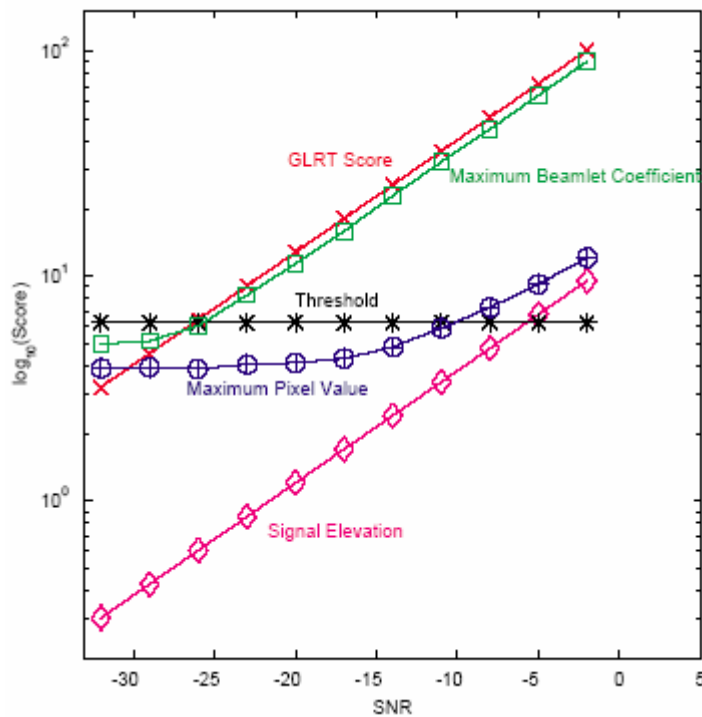


Рис. 8. Иллюстрация почти идентичной чувствительности максимума статистики по лучам и максимума статистики по бимлетам. Мы тестируем на одиннадцати различных отношениях сигнал/шума (SNR). Линии с $\diamond, \oplus, *, \square, \times$ указывают: пиксель SNR основного линейного объекта; медиана максимальной необработанной интенсивности пикселя; порог нестабильности для .05 показателя ложной тревоги; медиана максимума стандартизованных бимлет-коэффициентов и оценка медианы GLRT. Все медианы обращаются к результатам 100 моделирований метода Монте Карло. Размер тестового изображения $n = 128$. Основной линейный сегмент такой же, как и на рис. 7.

Решаем вместо этого тестировать на основе *максимумов бимлет-статистик*. Мы просто вычисляем максимум по всем бимлетам, а не над всеми лучами. Сравнительной статистикой является

$$Y^+ = \max\{T_y(b)/\sqrt{L(b)} : b \in \mathcal{B}_{1/n,n}\},$$

где $T_y(b)$, - beamlet-преобразование данных y и $L(b)$, - длина евклидова длина бимлета b . Мы отвергаем H_0 всякий раз, когда это превышает определенный порог.

Как только бимлет-пирамида вычислена, эта статистика может быть вычислена за примерно $O(N \log(N))$ дополнительных операций, где $N = n^2$ - количество пикселей в образе.

Мы отметим, что эта процедура аналогична тестированию в вейвлет области белого шума. В таком тесте оценивают самые большие вейвлет-коэффициенты и выясняют, превышают ли они порог, происходящий от предположительно белого шума.

Мы также замечаем, что эта процедура использует бимлеты без учета структуры; просто взят максимум без учета положения, масштаба, направления максимума или взаимодействия между максимумами.

В виде исключения, хотя базирующиеся на бимлетах статистики оцениваться значительно дешевле, чем GLRT, у них есть довольно надежная мощность. На рис. 8 мы сравниваем исполнение тестов, основанных на максимумах бимлет-статистики с максимумами статистики по лучам. Очевидно, бимлет-приближение, базирующееся на максимизации по небольшому стратегически выбранному подмножеству лучей, обеспечивает почти идентичную чувствительность. Теоретический анализ, доказывающий это, будет где-нибудь еще опубликован.

3.2. Выбор порога (Thresholding) и Визуализация

Рассмотрим следующую процедуру визуализации.

- *Преобразование.* Вычисление входов в бимлет-пирамиде;
- *Порог.* Заменить нулем каждый бимлет-коэффициент, который не превышает (возможно зависящий от масштаба) порог;
- *Представление.* Для каждого бимлет-коэффициента, сохранившегося после thresholding-процедуры, нарисовать линейный сегмент, изображающий этот бимлет.

Это аналогично thresholding-реконструкции в вейвлет-анализе, где в преобразованном объекте небольшие коэффициенты отвергнуты, и затем выполнено обратное преобразование.

Отметим, что эта процедура на самом деле неструктурирована, поскольку каждый бимлет-коэффициент живет или умирает, основываясь исключительно на своей собственной величине, и не величин других элементов.

Пример дан на рис. 9 (используя дискретизацию линий рисунка Пикассо из коллекции Столичного Музея Искусства в Нью-Йорке, любезно предоставленную Ruth Kozodoy'ем в священной? памяти Revira Siner'a).

Хотя процедура наглядно интересная, ей обычно недостает степени информативности, которой мы могли ожидать. На самом деле, благодаря недостатку «межмасштабного запрещения (проклятья)», многие бимлеты в одной и той же позиции превышают порог, дающий нежелательную степень «сверхчувствительности». Конкретно, много бимлетов большого масштаба превышает порог, не обеспечивая требуемое отражение характеристик на основном объекте.

Мы ожидаем, что лучший метод навязет «пространственное запрещение», удерживая два бимлета из обоих присутствующих в визуализации, если они были пространственно почти на одном и том же месте, но «межмасштабное запрещение», удерживая оба бимлета, присутствующие в визуальном наблюдении, если они были пространственно в той же

позиции, но на смежных шкалах. Более умные алгоритмы на Уровнях 2-4 способны просто навязать такие запрещения. (?)

3.3. Толщина Многомасштабных множеств

(Multiscale Thickness of Sets)

Предположим, теперь у нас есть двоичный изображение, которое «преимущественно белое» (представленное величиной 0) с небольшой долей черных пикселей (представленных величиной 1). Набор черных пикселей может быть рассмотрено как «множество», геометрические свойства которого мы хотим характеризовать. Например, это могло быть разбросанное множество точек или это могут быть точки на плавной кривой. Рассмотрим следующую многомасштабную процедуру суммирования.

- *Преобразование.* Вычисление данных (входов-entries) в бимлет-пирамиде;
- *Мера Толщины.* Для каждого бинарного квадрата, используем бимлет коэффициенты, связанный с этим квадратом, для измерения относительной «толщины» β_s множества ненулевых пикселей в этом квадрате, то есть ширина самой узкой полосы, содержащей ненулевые данные. Иллюстрация вычисления толщины дана на рис. 10.
- *Суммирование по масштабу.* Вычисление средней толщины по всем бинарным квадратам на каждом индивидуальном масштабе;
- *Графическое представление.* Рисование средней толщины на масштабе j против(versus) j .

Отметим, что эта процедура - на самом деле неструктурирована (structureless) в том смысле, что толщина бинарного квадрата вычислена без учета любых других квадратов. Процедура является приводящей к бимлетам, поскольку мы можем использовать бимлет-анализ изображения для того, чтобы вычислять это – мы просто анализируем образец ненулевых бимлет-коэффициентов, связанных с бинарным квадратом для того, чтобы идентифицировать самую узкую полосу.

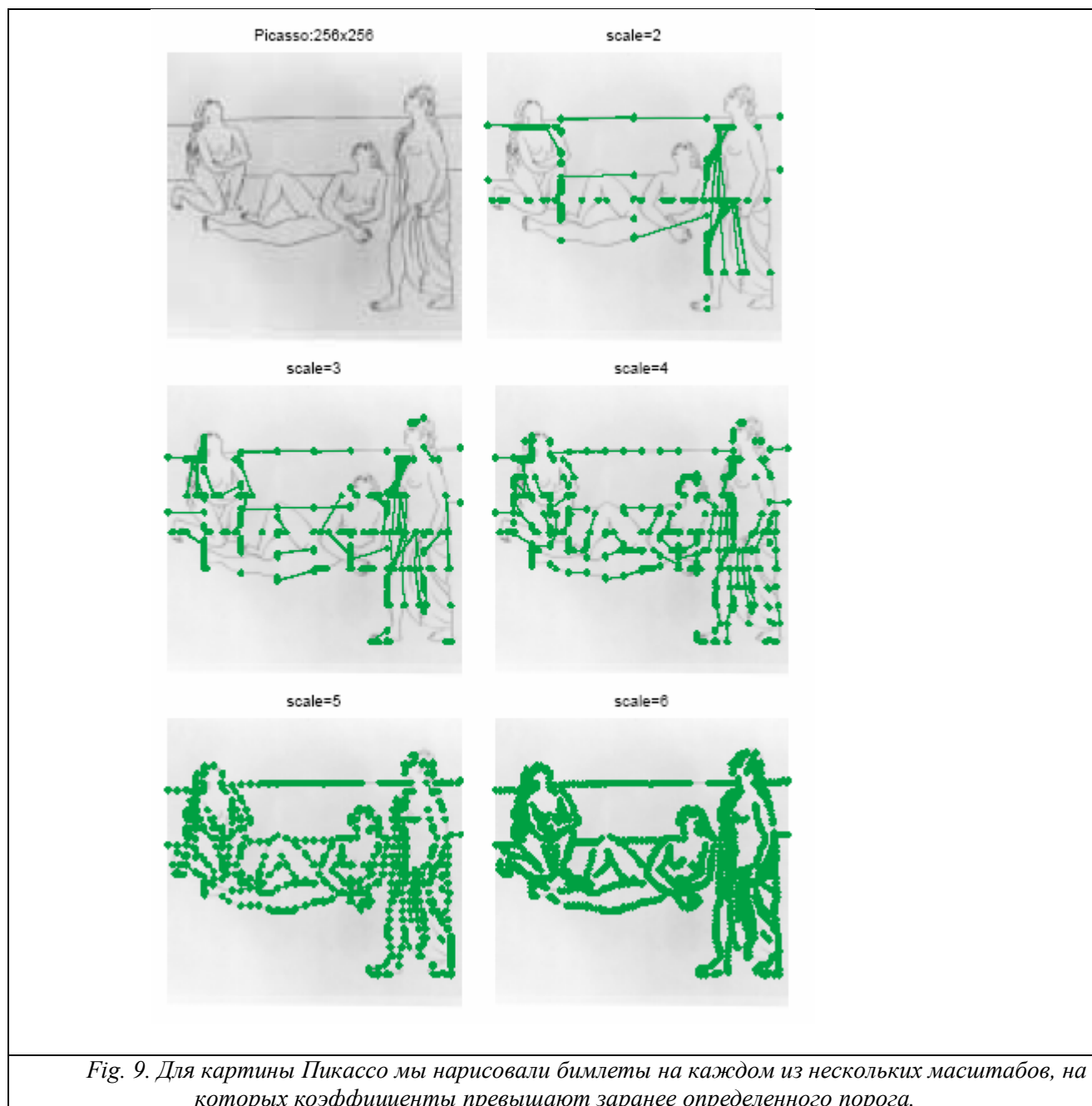
С тех пор как процедура идентификации пары бимлетов связана с каждым квадратом – а именно, пара, ограниченная самой узкой полосой, содержащей «множество» – процедура может быть рассмотрена как ограничение на степень локального пространственного запрещения.

Только два из большого числа бимлетов выделяются как «важные» для каждого квадрата.

Эта средняя толщина измеряет протяженность, на которую «множество» может быть локально аппроксимировано как лежащее на одной линии. Если множество находится на плавной кривой, тогда на лучших масштабах это, конечно, будет тем же самым. Если множество является очень сложным, это не будет тем же самым.

Это действие – сравнивая множество с аппроксимацией им линейных множеств – аналогична измерению определенных норм в вейвлет-анализе. Вейвлет-коэффициенты измеряет отклонение функции от простой линейной аппроксимации, и если анализирующая функция гладкая, ожидается их убывание с определенной скоростью как функция масштаба. Сравнение размера коэффициентов с масштабом позволяет измерять регулярность объекта.

В математической литературе, средство анализа этого типа было введено Peter Jones и было существенно развито G. David и S. Semmes [32,19]. Смотри также в Yale (Йельский университет) тезисы диссертации (Ph. D.) Gilad Lerman'a. Пока эта более ранняя работа не имеет никакой прямой связи ни в пиксельных множествах изображений, ни в использовании специфических дискретных структурах данных, подобных бимлет-пирамиде, что исключает их удобное использование и на самом деле не позволяют преобразовать их идеи в инструментальные средства бимлетов применительно к цифровым изображениям.



Примеры приведены на рис. 11. Как видно на рисунке, поведение Толщины в зависимости от масштаба для плавной кривой (в этом случае круг), совсем четкое в отличие от поведения для фрактальной кривой (в этом случае случайное блуждание). Как результат, бимлет-пирамида содержит информацию достаточную для того, чтобы измерять фрактальную протяженность кривых, погруженных R^2 .

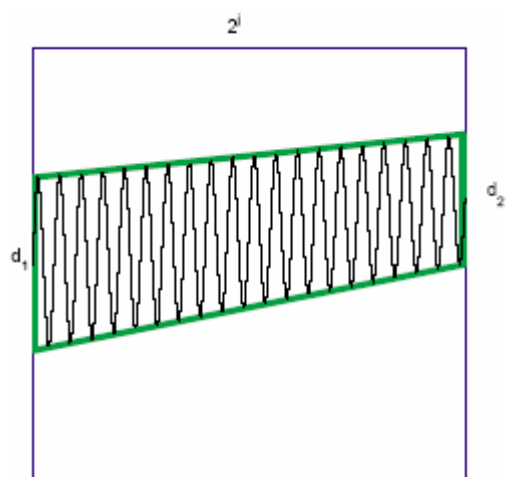


Рис. 10. Вычисление толщины данных в двоичном квадрате. Мы находим самую узкую полосу, которая ограничена двумя биметами и содержит целевую (target) кривую. Толщина равна $\max(d_1; d_2)$ и нормализованная толщина или бета-толщина – определяемая как $\beta_s = \max(d_1, d_2) / 2^{-j}$.

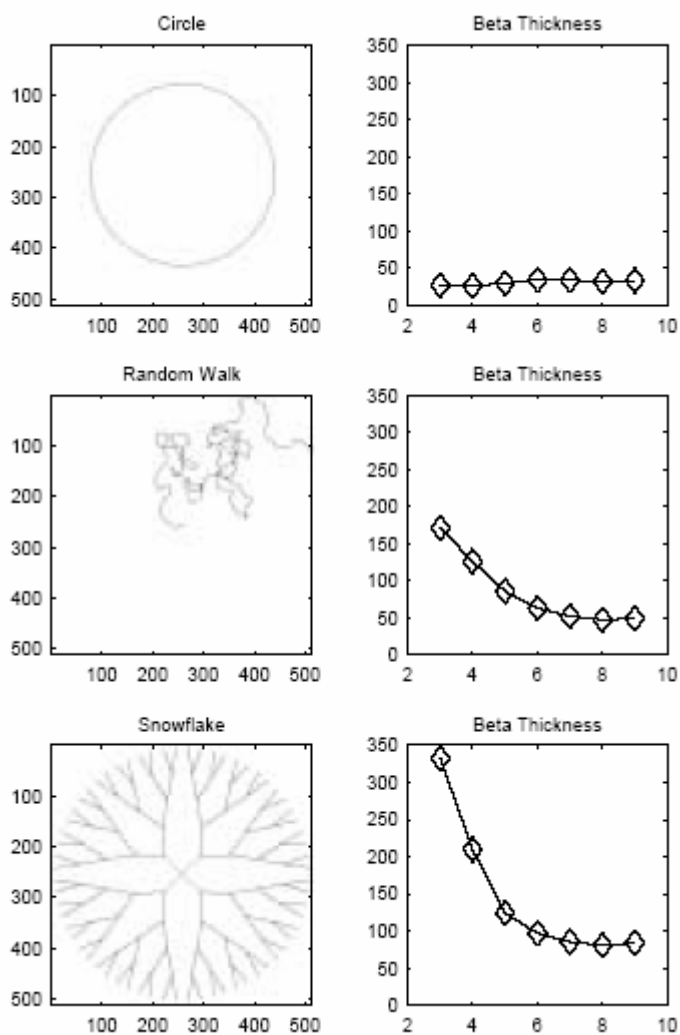


Рис. 11. График масштаб-толщина для трех различных «множеств» на различных шкалах. Левая колонка дает исходные кривые. Правая колонка дает соответствующие мощности – графики масштабов, которые изображают сумму квадратов всех толщин на каждом данном масштабе.

4. Уровень Два: Дерево структуры алгоритмов.

(Level Two: Tree-Structured Algorithms)

Мы теперь вернемся к управляемым бимлетами алгоритмам, использующим структуру дерева бинарных квадратов, лежащих в основе бимлет-пирамиды. Мы сначала напомним читателю, что мы понимаем под деревом структуры. Рис. 12 изображает серию бинарных квадратов на плоскости, подразделенной на различные плавающие окна (floating panels) согласно размеру квадратов. Связь родитель-ребенок проиллюстрирована строками, соединяющими центры родительских квадратов с центрами квадратов ребенка.

Мы также напомним читателю определение рекурсивного бинарного подразделения. Это любое подразделение квадрата, достижимое применением произвольных комбинаций этих двух правил:

$$P = \{[0,1]^2\} \text{ является RDP.}$$

Если $P = \{S_1, \dots, S_{l-1}, S_l, S_{l+1}, \dots, S_n\}$ есть RDP, если S_l может быть разложено на 4 двоичных квадрата $S_{l,00}, S_{l,01}, S_{l,10}$, и $S_{l,11}$, тогда новое подразделение

$$P = \{S_1, \dots, S_{l-1}, S_{l,00}, S_{l,01}, S_{l,10}, S_{l,11}, S_{l+1}, \dots, S_n\}$$

снова является RDP.

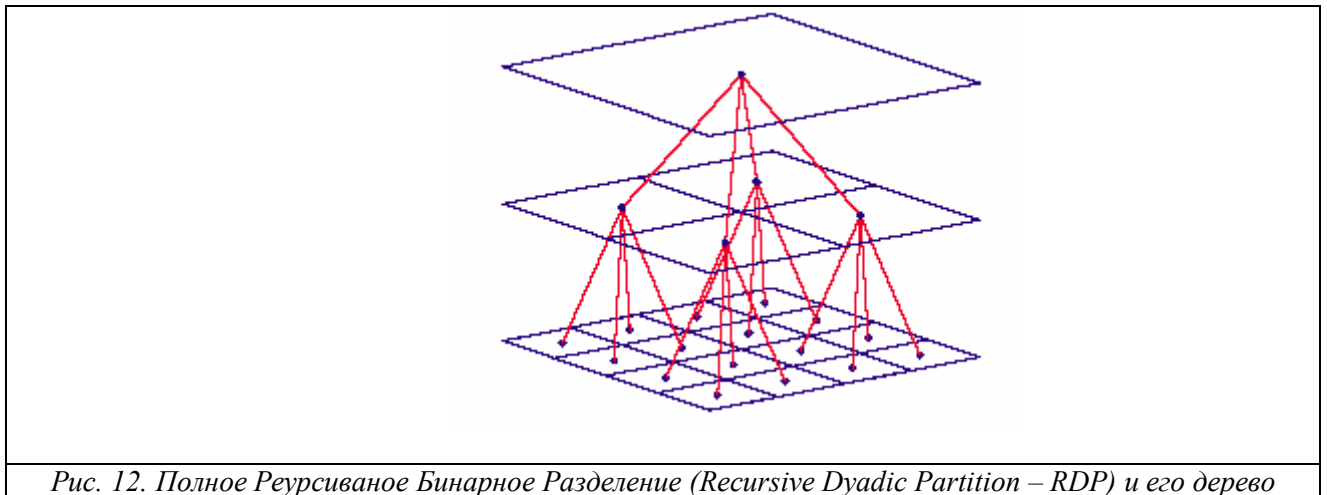


Рис. 12. Полное Рекурсиваное Бинарное Разделение (Recursive Dyadic Partition – RDP) и его дерево

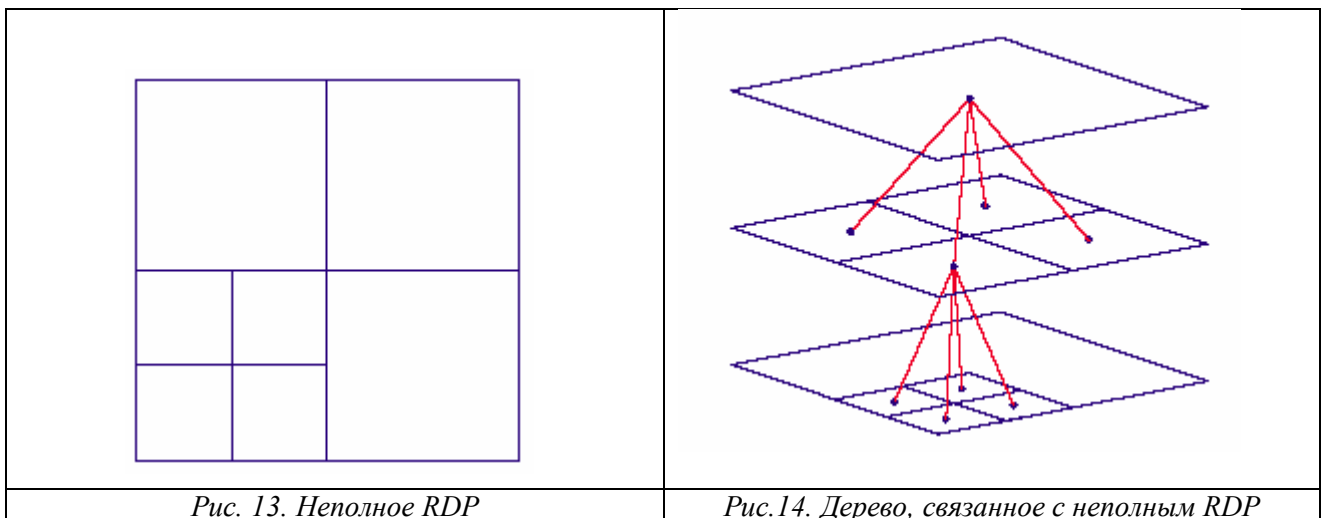


Рис. 13. Неполное RDP

Рис.14. Дерево, связанное с неполным RDP

Рис.13 дает пример неполного RDP.

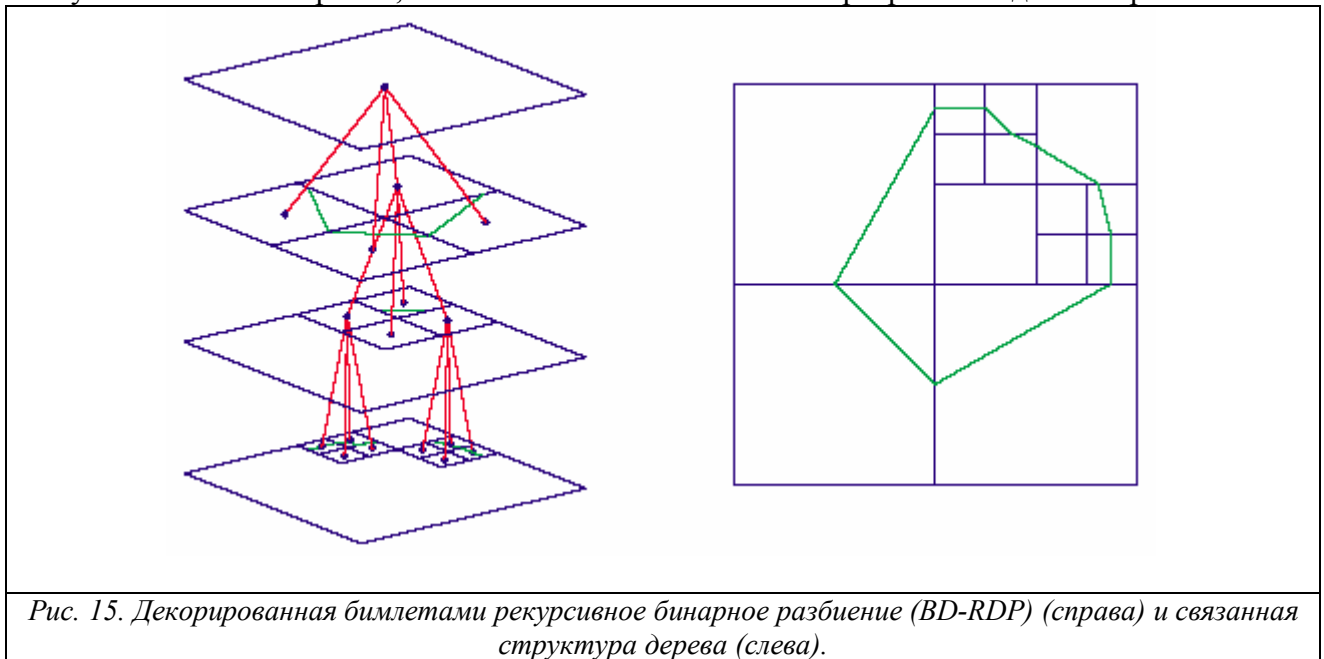
Мы также отметим, что каждому RDP соответствует дерево; как проиллюстрировано на рис. 12, полное RDP, состоящее из всех бинарных квадратов стороны $1/4$ соответствует полному дереву глубины 2. Рис. 14 показывает, что неполное разбиение, как показано на рис. 13 с квадратами, имеющими наилучшую бинарную шкалу гнезда $1/4$, соответствует неполному дереву глубины 2.

Наконец, мы вводим понятие beamlet-украшенного RDP, или BD-RDP. Это – RDP, в котором части разбиения (дополнительно), украшены связанными с бимлетами. Рис. 15 дает изображение BD-RDP и связанной с ней структуры дерева – отметим как довольно общая кривая может быть изображена этим устройством. Ключевое свойство, относящееся к BD-RDP, – межмасштабное запрещение между бимлетами в таком представлении. Пока расширенные коллекции бимлетов могут возникнуть как украшения в BD-RDP, они всегда пространственно непересекающиеся – они не могут никогда содержать два бимлета на различных масштабах, пересекающие друг друга.

4.1. Выделение фрагментов с большим количеством линий

(Extraction of Multiple Line Fragments)

Рассмотрим теперь алгоритм для извлечения фрагментов, состоящих из большого числа линий, используя понятие дерева. Как и в разделе 3.2, мы хотим представить изображение, используя последовательность бимлетов. Чтобы делать так, мы ищем BD-RDP, решающее проблему оптимизации. Из-за межмасштабного запрещения бимлеты, полученные таким образом, позволяют избежать свойств перекрытия видных на рис. 9.



Мы свяжем с каждым двоичным квадратом S C_S , определенным как

$$C_S = \max_{b \sim S} T(b) / \ell(b)^{1/2}$$

где $T(b)$, - бимлет-коэффициент, связанный с бимлетом b , $\ell(b)$, - длина связанного бимлета, и $b \sim S$ означает, что бимлет b связан с S .

Мы затем рассмотрим разбиение, которое максимизирует для всех рекурсивных бинарных разбиений $P = \{S_1, \dots, S_{l-1}, S_l, S_{l+1}, \dots, S_n\}$ квадрата $[0; 1]^2$, по энергии, имеющей

$$J(P) = \sum_{S \sim P} C_S^2 - \lambda \#P.$$

сложный штраф.

Как результат, CS измеряет энергию модели, которая говорит, что внутри S есть единственный бимлет (то есть изображение является нулем, кроме следа бимлета в пределах квадрата). На самом деле, если мы моделируем данные, убывающие внутри квадрата пропорционально на указатель 1_b определенного бимлета, тогда энергия fitted? модели является квадратом коэффициентов $\langle f, 1_b \rangle / \|1_b\|^2$ раз норму $\|1_b\|^2$. Теперь, как $T_f(b) \approx \langle f, 1_b \rangle$, так и $\|1_b\|^2 \approx L(b)$, это, по существу, квадрат величины C_S .

Следовательно, мы ищем набор непересекающихся бимлетов, который обеспечивает в значительной степени точное описание образа.

Пример дан на рис. 16; отметим, что описание является истинно многомасштабным, содержащим линейные сегменты всех различных длин, позиций и ориентаций.

Существенно, что описание избегает простого беспорядочного (messiness) задания порога (thresholding) на рис. 9. Это иллюстрирует важность межмасштабного запрещения и значимость структуры дерева.

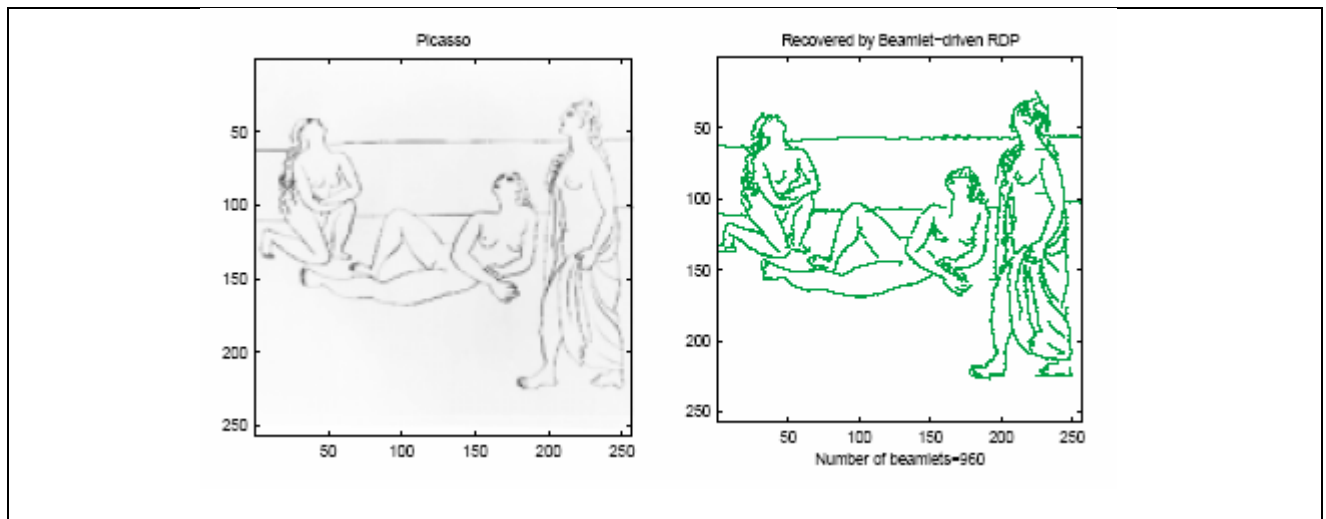


Рис. 16. Результат применения BD-BD-RDP для извлечения сегментов с многочисленными линиями из изображения с большим числом линейных и криволинейных особенностей.

4.2. Оптимизация алгоритма BD-RDP

(BD-RDP Optimization over 's)

Важный пункт оптимизации на множестве RDP состоит в том, что для подходящей целевой функции J , глобальное оптимальное подразделение, решая

$$\max_{P \in RDP} J(P). \quad (4)$$

может быть получено быстро. В результате, как установлено в предшествующем разделе, оптимальное BD-RDP может быть получено в $O(N \log(N))$ операций, где $N = n^2$ - количество пикселей.

Важно отметить, что целевая функция J должна быть аддитивным функционалом от RDP , принимая форму:

$$J(P) = \sum_{S \sim P} \Gamma_S$$

Быстрый алгоритм для (4) реализуется снизу вверх по дереву, отсекая процесс и рекурсивно решая независимо, где лучше оставить бинарный квадрат неразделенным (unsubdivided) или разделенным на четыре части. Начиная с полного дерева квадратов,

очищаем весь путь на пиксельном уровне, мы рассматриваем каждый бинарный квадрат S 2×2 пикселей и рассматриваем независимо, где лучше обработать его как единственный нераздельный блок, или разбить его в четыре части. Чтобы принимать решение, мы сравниваем целевые значения Γ_S для неразделенных блоков с суммой четырех значений Γ_S для 4 диадных подквадратов, используемых для получения S . Берем максимум из этих двух чисел $\Gamma^*(S)$ и записываем величину максимума в μ_S для дальнейшего использования. После завершения процесса на масштабе 2×2 , мы перемещаемся на один уровень вверх для того, чтобы рассматривать квадраты S 4×4 и для каждого решать вопрос, когда должно быть выполнено разделение на четыре части или не делать это разбиение, в соответствии с тем как Γ_S возрастает сумма четырех оптимизируемых $\Gamma_{S_i}^*$ или нет; мы определим Γ_S^* как показатель максимума и записывать величину максимума в μ_S . Продолжая двигаться вверх от уровня к уровню, достигнем коря (дерева) и после обработки корня величина $\Gamma_{[0,1]^2}^*$ есть значение функционала (4) и различные величины μ_S показывают оптимальное разбиение. За подробностями обратитесь к [22] и ссылкам там.

Чтобы применить это к ситуации в разделе 4.1, мы просто положим

$$\Gamma_S = (C_S^2 - \lambda)_+$$

где C_S такая же, как определено выше, и если $\Gamma_S > 0$, мы запишем в k_S текущее (identity) максимизированное бимлетами значение C_S . Тогда оптимальное RDP дается переменной μ_S , определенной алгоритмом подрезания; и оптимальный вид (дерева) дается переменными k_S терминальных узлов в оптимальном RDP. Весь алгоритм в этом случае является быстрым. Раз мы имеем бимлет-преобразование в руках, он стоит порядка $O(N/4^j)$ операций для расчета каждого из 4^j C_S на уровне j . Тогда направленный снизу вверх по дереву алгоритм подрезания может быть выполнен за $O(N \log(N))$ операций.

4.3. Выделение множества областей

(Extraction of Multiple Regions)

Та же самая конструкция может работать для выделения областей, а не волокон. Предположим, что у нас есть данные, которые могут быть смоделированы кусочно-постоянными искривленными границами между частями. Мы можем получить аппроксимации, которые находятся оптимальный рекурсивно-бинарный подразделением с линейным разделением путем принципа минимизации сложного штрафа остаточной суммы квадратов. Это позволяет найти кусочно-постоянную аппроксимацию с простыми многоугольными границами.

В BD-RDP бимлет, связанный с бинарным квадратом, разделяет квадрат в две области, которые мы называем *веджлетами* (wedgelets); сравните с [22]. Используя идеи бимлетов, мы можем представить данные с шумом с точки зрения веджлетов (wedgelets).

Рассмотрим модель $M(S, b)$, относительно которой скажем, что в бинарном квадрате S , основной сигнал без шума – кусочно-постоянный, разделенную на две части вдоль бимлета b – то есть линейная суперпозиция двух веджлетов (wedgelets), связанных с b . Пусть y_S есть часть вектора данных y в этом квадрате и обозначим проекцию наименьших квадратов этих данных на участок модели $M(S, b)$ как $Proj\{y_S | M(S, b)\}$.

Определим сейчас для каждого бимлета, связанного с квадратом S , остаточной суммой квадратов, связанных с моделью $M(S, b)$

$$RSS(S, b) = \|y_S - Proj\{y_S | M(S, b)\}\|_2^2$$

и определим для каждого бинарного квадрата S

$$PRSS'_S = \min_{b \sim S} RSS(S, b) + 2 \cdot \lambda^2$$

где λ является фактором штрафа. Пока не всегда имеет смысл разделять квадрат на части

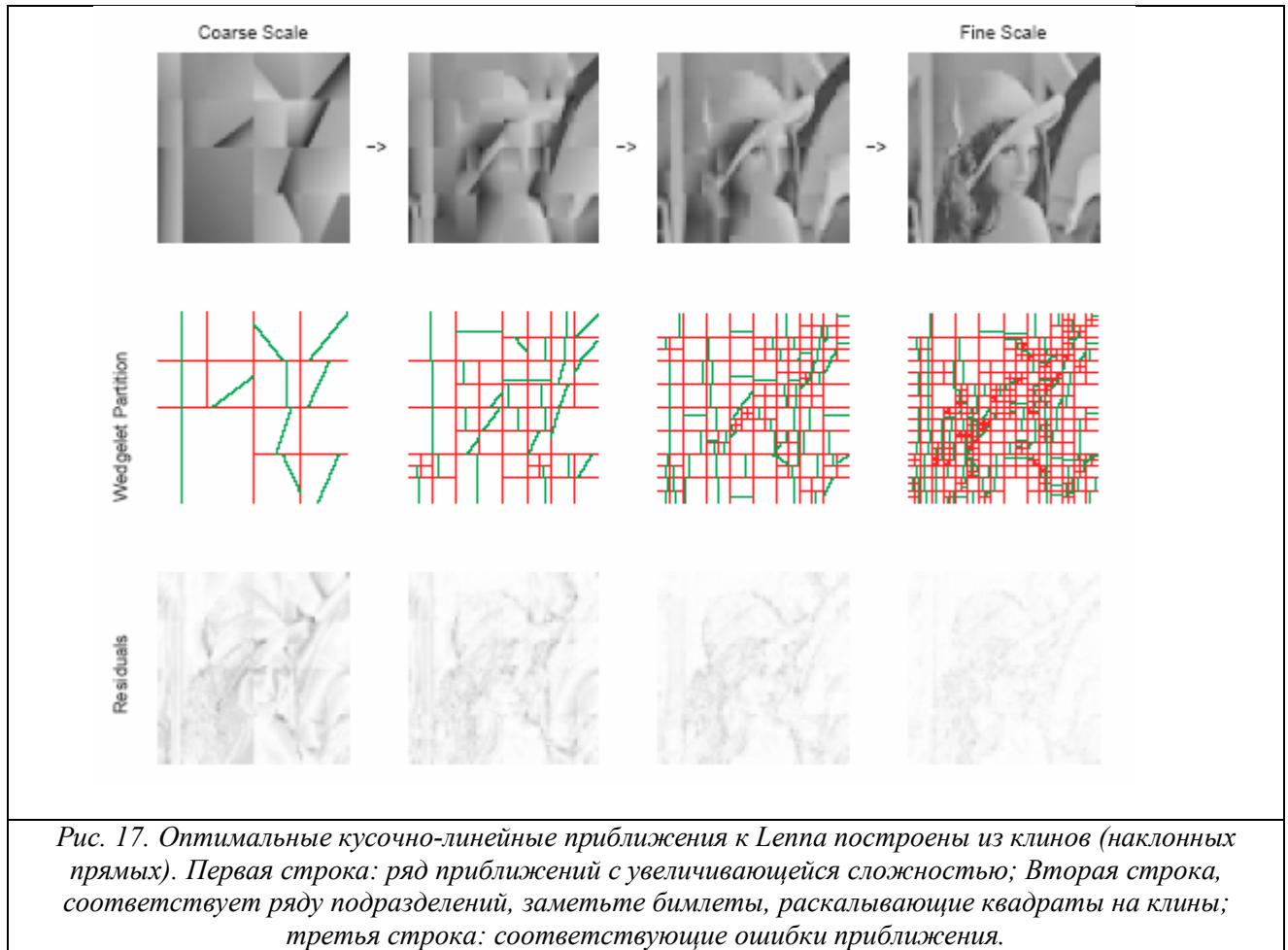
$$PRSS''_S = \min (PRSS'_S, \|y_S - m_S\|_2^2 + \lambda^2).$$

вдоль бимлета, мы поместили это в качестве конкуренции с моделью, которая просто постоянна в квадрате, выбирая величину $m_s = Ave\{y_s\}$:

Для каждого RDP P определяет его сложный штраф остаточной суммы квадратов

$$J(P) = \sum_{S \sim P} PRSS''_S.$$

Используя идеи последнего раздела, оптимум по всему RDP быстро вычисляем, как только даются $PRSS''_S$. Поскольку это оказывается числами $RSS(S, b)$ являются легко получаемыми из бимлет-преобразования совокупных сумм данных (y_{i_1, i_2}) в i_1 и i_2 . Сравните с [22].



Очевидно, этот подход может использоваться на данных без шума для формы сжатия; пример дается на рис. 17, где кусочно-постоянная модель была фактически заменена (используя подобные алгоритмы) на кусочно-линейную модель, и штраф, откорректированный для отражения увеличенной сложности кусочно-линейных по сравнению с кусочно-постоянной реконструкцией. Мы показываем несколько таких приближений, полученных посредством сложного штрафа суммы квадратов приближений,

используя различные значения параметра штрафа λ^2 . Через управление этим параметром возможно хорошо приблизить тонкие детали или только грубую структуру. Этот инструмент может также использоваться для удаления шумов. Предположим, что мы имеем данные с шумом

$$y_{i_1, i_2} = f(i_1, i_2) + \sigma z_{i_1, i_2}, \quad 0 \leq i_1, i_2 < n$$

где Z - случайный белый шум и снова объект интереса f может быть моделируем кусочно-постоянными с изогнутыми границами между частями. Теперь λ должен быть калиброван к уровню шума; очевидные выборы включают 3σ и также $2\sigma\sqrt{\log(n)}$.

Числовой пример представлен на рис. 18. Качество приближения является хорошим – это производит разумное соответствие соответствующим границам – но отметим, что границы, данные wedgelet-приближением, состоят просто из разъединенных линейных фрагментов – нет никакой непрерывности или наложения направленной последовательности. Как иллюстрирует третий столбец рис. 18, художественное оформление в оптимальном разделении не связано между собой глобально.

5. Уровень Три: Локальное формирование цепочки из линейных сегментов

(Level Three: Local Chaining of Line Segments)

Можно утверждать, что алгоритмы, основанные на использовании дерева из раздела 4 поднимают проблемы уже знакомые из алгоритмов на основе дерева, используемых в сообществе вейвлетов [46,13] и, более широко, в многомасштабном сообществе, где разделение на четверти в дереве (quadtree) используется много лет.

В этом и следующих разделах мы будем использовать структуру бимлет-графа по пути, не доступному в пределах вейвлет-словаря, эксплуатируя свойство соседей бимлет-графа, чтобы выразить связность и непрерывность направлений. Как предложено во введении, понимание выражения продолжения жизненно в нескольких областях, включая зрение.

5.1. Быстрая аппроксимация GLRT для обнаружения линейных сегментов

(Fast Approximate GLRT for Line Segment Detection)

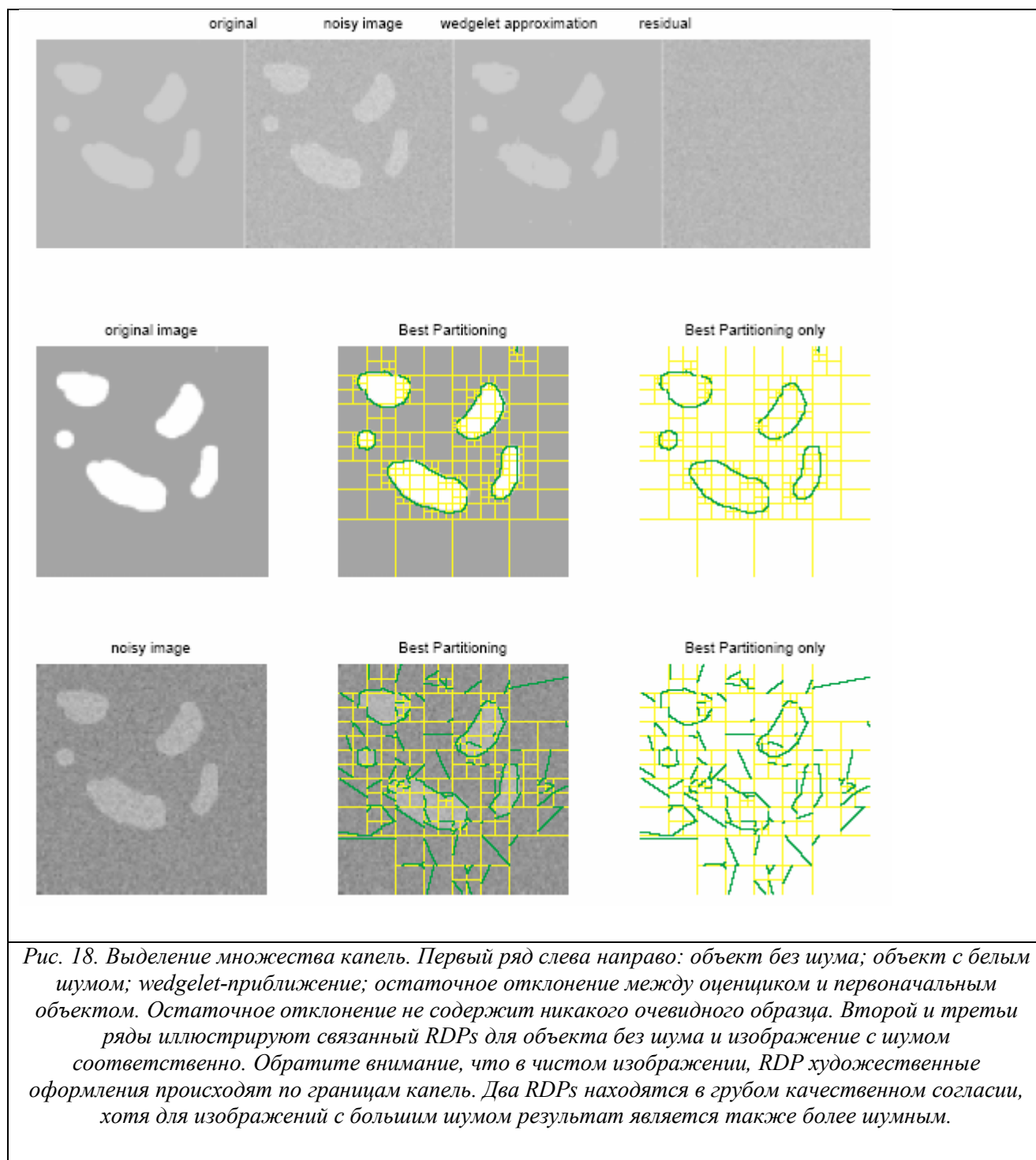
Возвращение к проблеме обнаружения линейного сегмента, обсужденной в разделе 3.1, и теперь рассмотрим проблему вычисления GLRT – максимизации по $N(N-1)/2$ лучей (здесь $N = (n+1)^2$ - число угловых пикселей в основном изображении). Как обсуждено ранее, это - $O(N^2 n) = O(n^5)$ вычислений.

Ранее, мы предложили проблему подстановки: максимизирование по бимлетам скорее чем по лучам. Количество элементов множества бимлетов является только $O(N \log(N))$ вместо $O(N^2)$, результирующие вычисления становятся намного более управляемыми. Мы видели, что эта простая идея имела существенную мощь в обнаружении линейных сегментов, в то время как почти, но совсем не достижение уровня работы GLRT (рис. 8).

Чтобы получить еще лучшие вычисления, мы могли бы искать еще лучшее приближение к максимуму статистики по лучу Y^* с тем же самым порядком вычислительной сложности как максимум статистики по бимлетам Y^+ . Наша идея состоит в построении адаптивной цепи вместе с несколькими бимлетами, чтобы делать лучше не двухэлементные приближения к лучам. Игнорирование стоимости бимлет-преобразования непосредственно, вычислительная

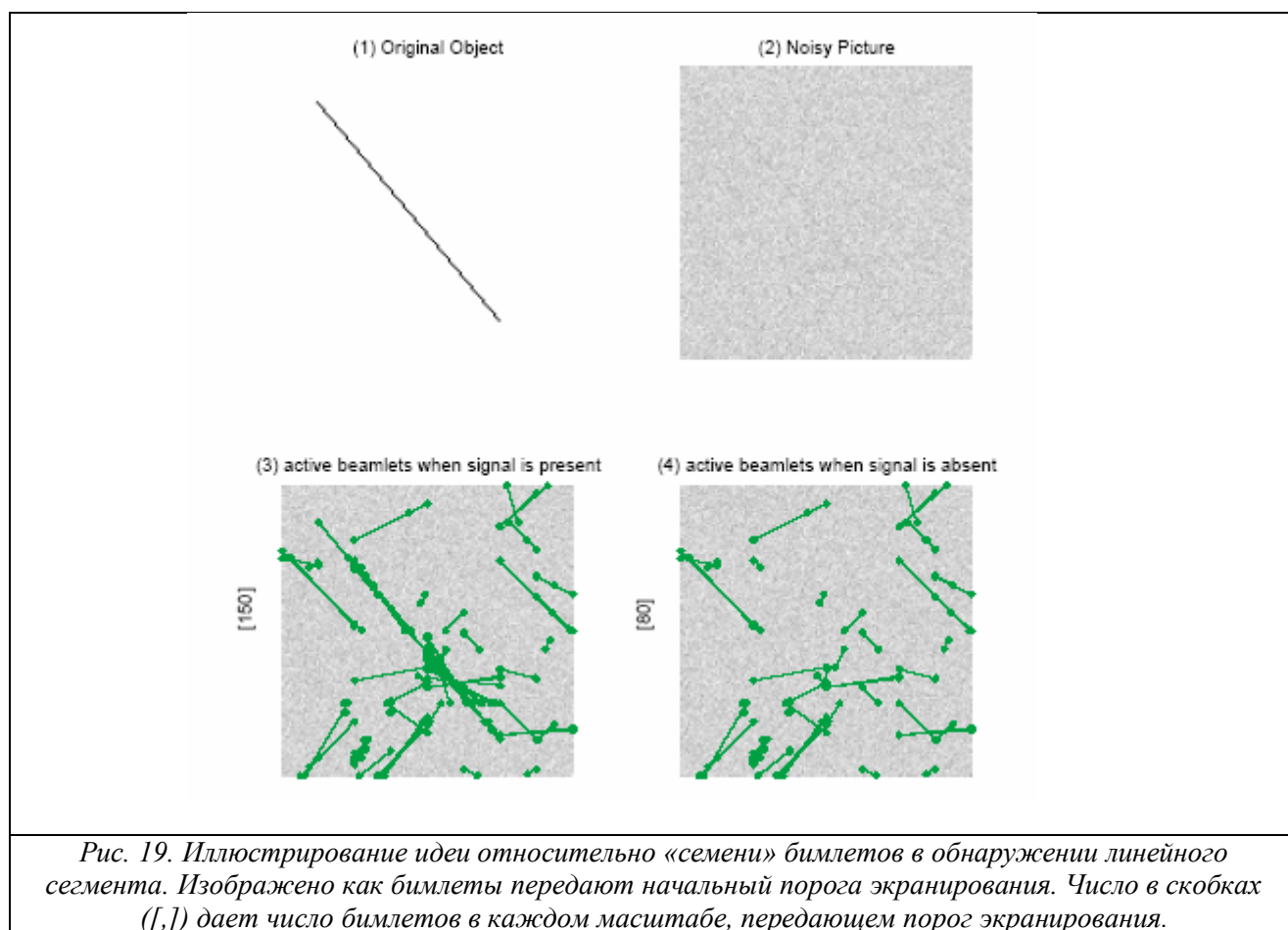
стратегия может работать за $O(N \log(N))$ операций и может отклонить H_0 , H_0 приблизительно при тех же самых обстоятельствах, как было бы для Y^* .

Алгоритм приводит к идее использовать наибольшие бимлет-коэффициенты для идентификации многообещающих бимлетов как «семена»; мы тогда исследуем много двухэлементных лучей в соседстве от каждого такого многообещающего бимлета – каждое зерно «дает» много цепей ростков, среди которых мы ищем оптимум. Поскольку из геометрических свойств линий и двухэлементных подинтервалов, полного максимума среди подмножеств, которые мы исследуем, очень вероятно будет очень близко к максимуму статистики лучей Y^* .



Пример, показывающий выполнимость этого подхода, дается на рис. 19. Слабый линейный сегмент наложен на изображение с очень большим шумом, на уровне не далеко от абсолютного порога выделяемости. Рисунок иллюстрирует бимлеты, проходящие порог экранирования t_1 . Из многих десятков тысяч бимлетов в пирамиде, только несколько дюжин передают стадию экранирования. Вырастающие цепи, стартующие с этого предельного множества, - чрезвычайно практичная идея

Чтобы дать формальное алгоритмическое описание, мы вспомним, что система бимлетов имеет определенный параметр δ для обозначения интервала между смежными конечными точками бимлета, обычно один пиксел имеет ширину $\delta = 1/n$, но также и возможно меньшую в некоторых приложениях. Будем говорить, что собрание (коллекция) лучей (которая может включить, естественно, бимлеты, или смесь лучей и бимлетов, и т.д.) есть δ -коллинеарна, если существует единственная прямая линия, которая доставляет δ -приближение ко всем членам коллекции {то есть, если каждый луч находится в пределах δ -расстояния Хаусдорфа от общей линии.) Также мы будем говорить, что бимлет есть δ -подинтервал луча, если бимлет находится в пределах расстояния Хаусдорфа δ от луча.



Алгоритм: Приблизительная Максимизация по лучам сформированных бимлет-цепочек. Этот алгоритм зависит от параметров t_1, t_2, m_n, l , которые должны быть соответственно специфицированы 1. Экранирование Бимлет-Пирамиды.

- Получить бимлет-преобразование изображения.
- Выбрать все бимлеты, достигающие $Y[b] > t_1$. Разместить их в список Р перспективных интервалов.

- Если P содержит больше чем m_n таких интервалов, Напечатать «Отклонить H_0 » и остановка.

2. Поиск Соседей Перспективных Бимлетов.

- Для каждого бимлета $b \in P$,

- Строят список $C_l[b]$

- δ - коллинеарных цепей, продолжающие b через глубину l .

- Для каждой цепи $c \in C_l(b)$ с $2 \leq l \leq [b]$

- Вычислить $Y[c] \equiv \sum_{b' \sim c} Y[b']$.

Если $Y[c]$ превышает t_2 , Напечатать «Отклонить H_0 » и остановка.

-Конец

- Конец

3. Завершение: Нет рассчитанных $Y[c]$, превышающих t_2

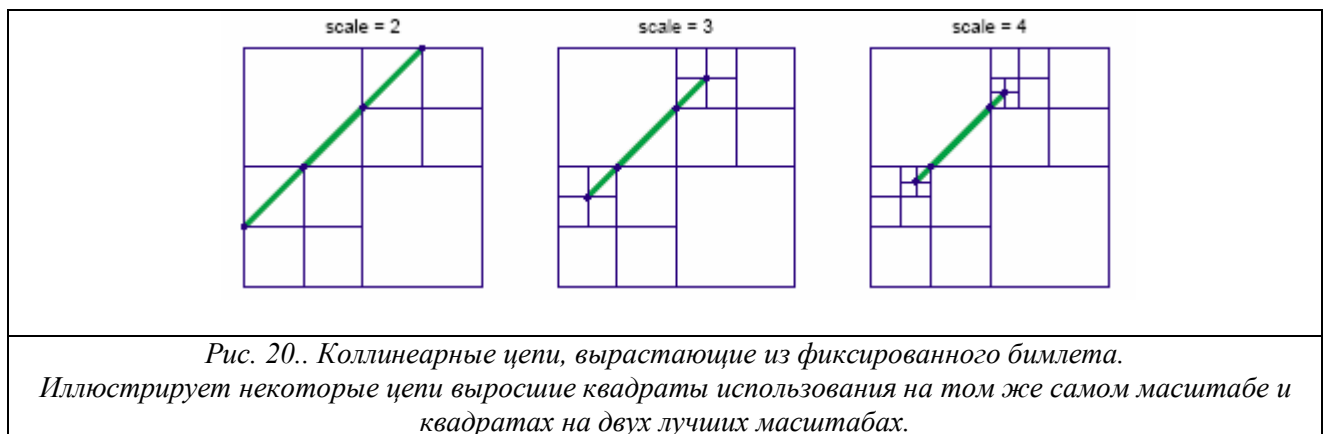
- Печать Принимаем H_0 и остановка.

В вышеупомянутом описании мы упомянули $C_l(b)$. Это – множество глубин l цепи содержащихся в b , то есть собрание всех цепей бимлета, которые

(a) имеют b как максимальный δ -подинтеграл;

(b) включает только бимлеты, произведенные из квадратов самое большее l уровней лучших, чем квадрат, определяющий b ;

(c) являются δ -коллинеарными.



Такие цепи могут рассматриваться как продолжения b , которые имеют b как наиболее существенную часть. Рис. 20 иллюстрирует несколько цепей, конструируемых из фиксированного бимлета b .

Наше требование такое, что этот алгоритм может выполняться за $O(N \log(N))$ сложность оценки зависит от выбора параметров алгоритма. Вспоминая, что ε является попиксельным уровнем шума, мы предлагаем принять $t_1 = (\varepsilon/2)\sqrt{\log n}$, $t_2 = 2\varepsilon\sqrt{\log n}$, $m_n = \sqrt{N}$, $l = l_n$, устремляя их к бесконечности медленно, но практически равны 3 или 4. Мы игнорируем стоимость вычисления бимлет-преобразования. Стоимость изображения (screening) нормализованных бимлет-коэффициентов $Y[b]$ для значений, превышающих t_1 , имеют умеренную вычислительную сложность $O(N \log(N))$. Так, чтобы получить быстрый алгоритм, нужно, чтобы последующая стадия исследования цепей, которая протягивает каждый перспективный бимлет, не требует для работы больше порядка $O(N \log(N))$ операций. В этой стадии мы должны поэтому иметь не слишком много перспективных семян и не слишком много работы на каждое семя. Теперь, поскольку мы выбрали $m_n = o(N)$ двухэлементных интервалов, большинство из этих многочисленных

бинарных интервалов позволяют превысить порог в предварительной двоичной (dyadic) стадии изображения; число просмотренных цепей $O(2^{2l})$, которым мы можем управлять для медленного увеличения; и легко видеть, что усилия в вычислении соответствующей цепи суммирует $Y[s]$ аналогично $O(2^{2l})$. Таким образом, если $m_n \cdot O(2^{2l_n}) = O(N)$, мы установили желательный контроль сложности.

Вопрос, который остается открытым, естественно, таков – может ли эта процедура действительно приблизиться к достижению Y^* . Это не алгоритмический вопрос, – наше внимание сосредоточено здесь – но вопрос об эмпирических процессах, мы оставляем это для предстоящей статьи.

Прокомментируем важную геометрическую идею, лежащую в основе вышеупомянутого алгоритма. В предстоящей статье покажем, что, для каждого луча b , есть бимлет b' , который является δ -подинтервалом b и имеет длину $l(b')$ по крайней мере $1/7$ длины $l(b)$ луча b . Другими словами, с каждым лучом связан бимлет, почти совпадающий (вперед?along) по крайней мере на $1/7$ часть его длины. Мы завершаем наш поиск вокруг бимлетов, играющих эту роль; такие бимлеты могут ожидать как единственные с самым высоким отношением сигнала к шуму. Идея рассмотрения перспективных бимлетов как максимальных δ -подинтервалов, и исследование только вырастающие цепи из семян, которые поддерживают это свойство, является важным упрощением, потому что это значительно ограничивает число цепей, которые должны исследоваться.

5.2. Обнаружение Нитей Локальным Формированием цепочки

5.2 Detection of Filaments by Local Chaining

Рассмотрим теперь проблему обнаружения слабых волокон (нитей) (filament) данных с шумом; это подобно модели (1), но теперь термин Φ обозначает присутствие кривой, вложенной в изображение, а не линейный сегмент.

Очевидный подход состоит в том, чтобы сравнить максимальный бимлет-коэффициент с порогом, и это будет работать хорошо, если кривая не очень слабая и не очень искривлена. Однако, согласно статистической теории, мы не будем рассматривать здесь предел выделяемости, когда использование максимального числа зазубрин бимлетов являются очень далекими от абсолютного предела выделяемости (detectibility), соответствующего лучшему тесту.

Мы предлагаем вместо этого метод, который строит потенциально много цепей и который сравнивает наблюдаемую типичную длину цепей с типичной длиной согласно гипотезе об отсутствии сигнала. Если есть много более длинных цепей, чем мы ожидали согласно гипотезы отсутствия сигнала, мы отклоняем это в пользу присутствия сигнала. Наше текущее теоретическое понимание предлагает, что это дает почти оптимальное испытание; мы надеемся исследовать это в будущей публикации.

Мы снова рассматриваем алгоритм с двумя стадиями, который строит новый граф, в некотором смысле «двойственный» к графу бимлета. Первая стадия определяет вершины этого графа: они - бимлеты, которые являются «обещающими» выдержать первый уровень визуализации (screening). Вторая стадия определяет грани, соединяющие бимлеты.

Для первой стадии визуализации, мы просто определяем порог t_1 и выбираем все бимлеты с бимлет-коэффициентами, превышающими t_1 по амплитуде, создавая наш список 'многообещающих' бимлетов, и также вершины нашего графа. Для второй стадии, мы проводим продолжение к визуализации, добавляя грани, соединяющие две вершины нового графа, если соответствующие бимлеты имеют два свойства:

- Они попадают в двоичные квадраты, разделение которых не превышает 3 радиусов меньшего квадрата; и

Они δ -сокриволинейны (co-curvilinearly – имеют общую криволинейность).

Результирующий граф мы называем *сокриволинейным графом*

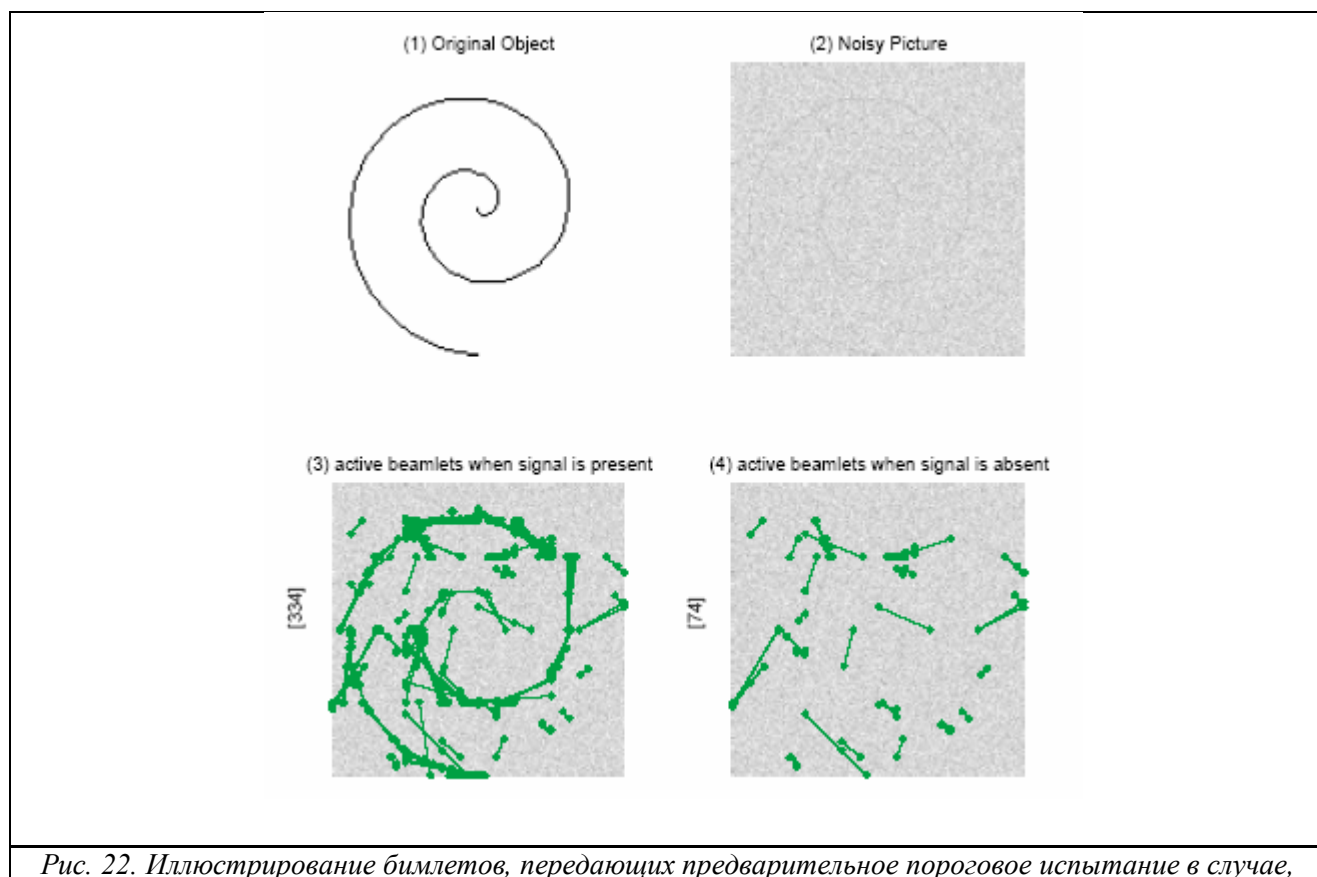
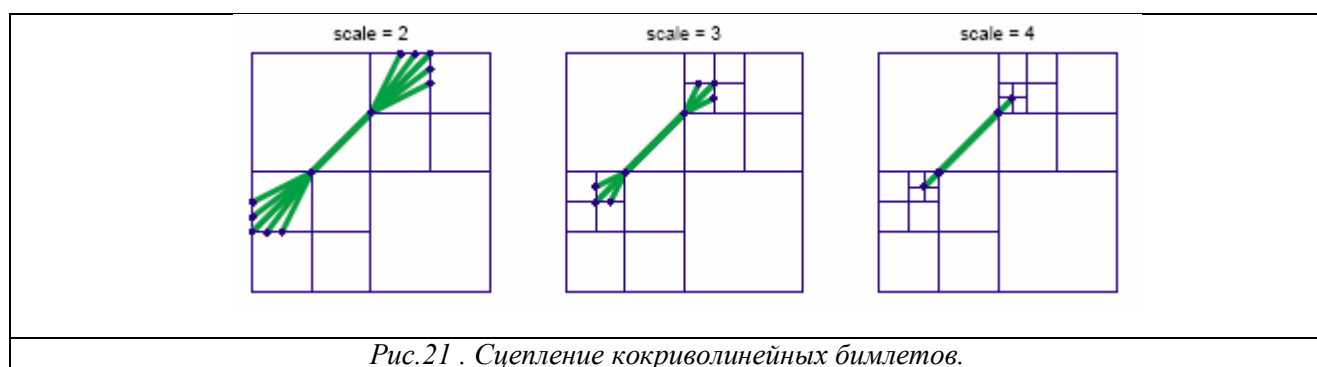
Здесь δ - *сокриволинейная* коллекция бимлетов означает, что есть основная кривая с кривизной $\leq C$ (с определенной константой, фиксированной заранее) такой, что все бимлеты в коллекции лежат в пределах δ кривой.

Рис. 21 иллюстрирует идею относительно бимлетов, имеющих право на формирование цепочки по сокриволинейности.

На рис. 22, мы рассматриваем бледную кривую в изображении с большим шумом и иллюстрируем некоторые из 'многообещающих' элементов согласно вышеупомянутому рецепту.

Наконец, статистическое испытание для обнаружения нити измеряет простираение, к которому есть более длинное представление цепей в этом изображении, чем можно было бы ожидать в изображении без сигнала.

Очевидно, порог t_1 , прежде чем его назначить, должен обещать получить полезные результаты; это - тема в эмпирическом процессе, теорию мы исследует в предстоящей статье.



где изображение содержит и не содержит волокна (нити). В скобках мы показываем номер многообещающих (перспективных) бимлетов.

6. Уровень Четыре: Образование глобальных цепей линейных сегментов.

6 Level Four: Global Chaining of Line Segments

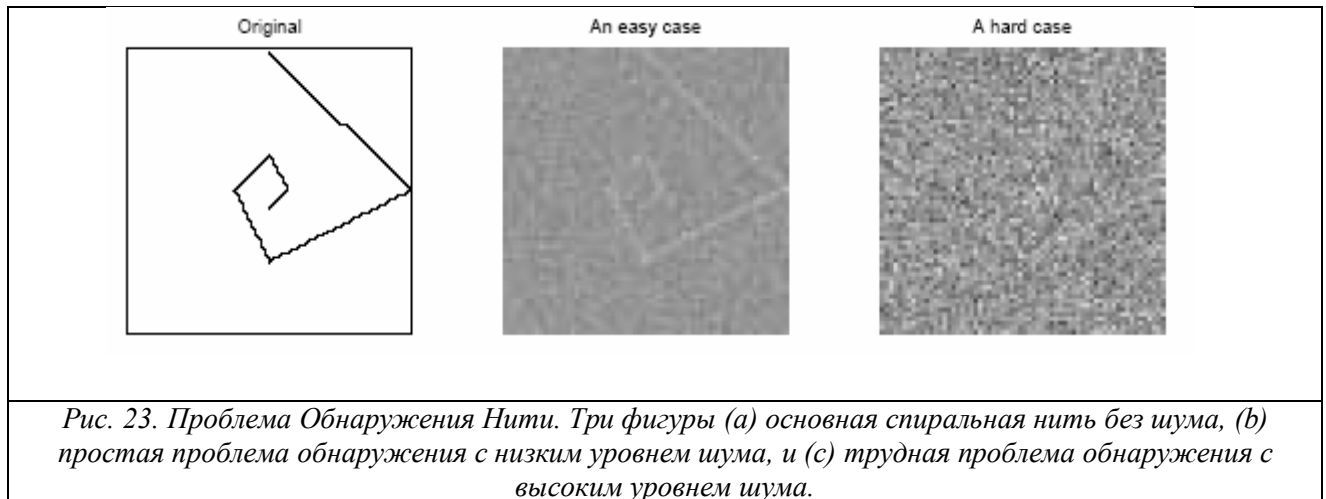
Достаточно очевидно, что человеческая визуальная система является способной без усилий объединить локальную информацию в когерентный идентифицирующий глобальный объект [27,35,39], и значительный интерес в развивающихся алгоритмах зрения с такими свойствами [37,12]. Таким образом, и некоторые другие использования возможностей упомянуты во введении, делает идентификацию глобальных последовательных объектов неотразимой темой.

Пока мы рассмотрели методы для обнаружения объектов и нитей, которые являются полностью локальными, и такие имеют тенденцию восстанавливать разъединенные фрагменты целых нитей и объектов. Мы теперь вернемся к методам, которые получают глобально последовательные объекты, и не только фрагменты, используя методы глобальной оптимизации в графе бимлета.

6.1. Извлечение фиксированных Нитей

(Extraction of an Anchored Filament)

Рассмотрим теперь проблему расположения кривой, которая соединяет два данных пиксела на шумной картине; см. рис. 23.



Как в разделе 3.1, множество данных (y_{i_1, i_2}) содержит вложенную в них посредством функции-индикатора основную кривую, погруженную в Гауссовом шуме со стандартным отклонением ϵ , так, что

$$y_{i_1, i_2} = A \cdot \tilde{\Phi}_\gamma(i_1, i_2) + \epsilon z_{i_1, i_2}, \quad 0 \leq i_1, i_2 < n,$$

где A - неизвестная константа, $\tilde{\Phi}_\gamma$ является функцией-индикатором кривой γ , и случайные переменные z_{i_1, i_2} - i.i.d. $N(0; 1)$. Мы особенно интересуемся случаем, когда ϵ является большой по сравнению с A , когда мы говорим что на пиксельном уровне отношения сигнала к шуму мало.

Мы рассмотрели несколько различных приближений к восстановлению γ , основанную на глобальной оптимизации. Везде мы используем соглашение критерия аддитивности, определенного следующим образом. Дан бимлет-многоугольник p и мы рассматриваем критерии оптимизации в форме

$$J(p) = \sum_{b \sim p} \Psi_1(b) / \sum_{b \sim p} \Psi_2(b),$$

где Ψ_1 и Ψ_2 - две заданные функции критерия. Мы разработали программное обеспечение, которое может вычислить решение, используя идеи сетевого течения.

В одном семействе вычислительных примеров, мы используем

$$\begin{aligned}\Psi_1(b) &= T_y(b) - \lambda \sqrt{\ell(b)}, \\ \Psi_2(b) &= \sqrt{\ell(b)},\end{aligned}$$

где $T_y(b)$ есть бимлет-преобразование изображения с шумом y , and λ является параметром штрафа. В теоретических исследованиях мы изучали

$$\begin{aligned}\Psi_1(b) &= T_y(b) - \lambda \sqrt{\ell(b)}, \\ \Psi_2(b) &= \ell(b).\end{aligned}$$

Каждый критерий имеет интересные математические свойства, к которым мы надеемся описать в другом месте.

Чтобы решить такие проблемы оптимизации, мы применяем динамическое программирование (DP) в графе бимлета. В то время как использование динамического программирования при выделении нитей по ближайшим соседям в графе - скорее твердо установлено в [42,28], наш подход - качественно иной из-за многомасштабной природы бимлет-графа, и из-за характера отношения к нашей цели. (Фактически оказывается, что бимлет-граф может дать значительное преимущество в вычислительном отношении по сравнению с графом ближайших соседей, как это мы покажем ниже).

Мы выбираем понятие методов *распространения*, которые обеспечивают родовой структурой для динамического программирования на графе; сравните, например [7,9]. Решить проблему оптимизации, решение которой - путь от одной фиксированной точки v_0 на другой v_1 в графе, мы «продвигаемся в направлении увеличения расстояния от v_0 ». Мы формируем набор по имени OPEN, состоящий только из v_0 . Затем рассматриваем немедленно смежные вершины; они слиты в OPEN. В каждой недавно добавленной вершине, сохраняем дорожку информации относительно пар

$$\left(\sum_{b \in p} \Psi_1(b), \sum_{b \in p} \Psi_2(b) \right)$$

для всех путей, ведущих от v_0 до этой вершины. (Более тщательно мы сохраняем информацию только на выпуклом каркасе (hull- корпус, каркас) множества таких пар. Делая это, уменьшаем память, необходимую каждой вершине, и, следовательно, уменьшаем алгоритмическую сложность.)

Мы продолжаем распространение, рассматривая на следующей стадии очередной «слой» из связанных вершин. На k -той стадии, данные, сохраненные в данной вершине v_1 , являются любой неинициализированными (если никакой путь k -шага не достигнет v_1), или иначе они делают запись информация о парах

$$\left(\sum_{b \in p} \Psi_1(b), \sum_{b \in p} \Psi_2(b) \right)$$

для всех путей k -шага продвижения от v_0 до v_1 . Если истинный оптимальный путь имеет меньше чем k шагов, тогда эти данные достаточны, чтобы определить оптимальное значение $J(p)$.

Важное различие между бимлет-графом и графом ближайших соседей в том, что простые пути в бимлет-графе имеют немного ссылок. Иерархически мы можем использовать это чтобы устранить много ненужных направлений, потому что если истинное решение простое, мы достигнем оптимального решения в ранней стадии. Как обсуждалось ранее, любая многоугольная кривая имеет более простое представление в бимлет-графе, чем это делает в графе ближайших соседей, и степень упрощения может быть существенной. Например, чтобы представить длинный линейный сегмент в изображении $n \times n$ всегда требует $O(n)$ граней в графе ближайших соседей, но никогда больше, чем $O(\log_2(n))$ граней в бимлет-графе. Так, для идентичной объективной функции метод распространения, выполняя задачу по бимлет-графу, имеет тенденцию к уменьшению стадий по сравнению с графом ближайших соседей.

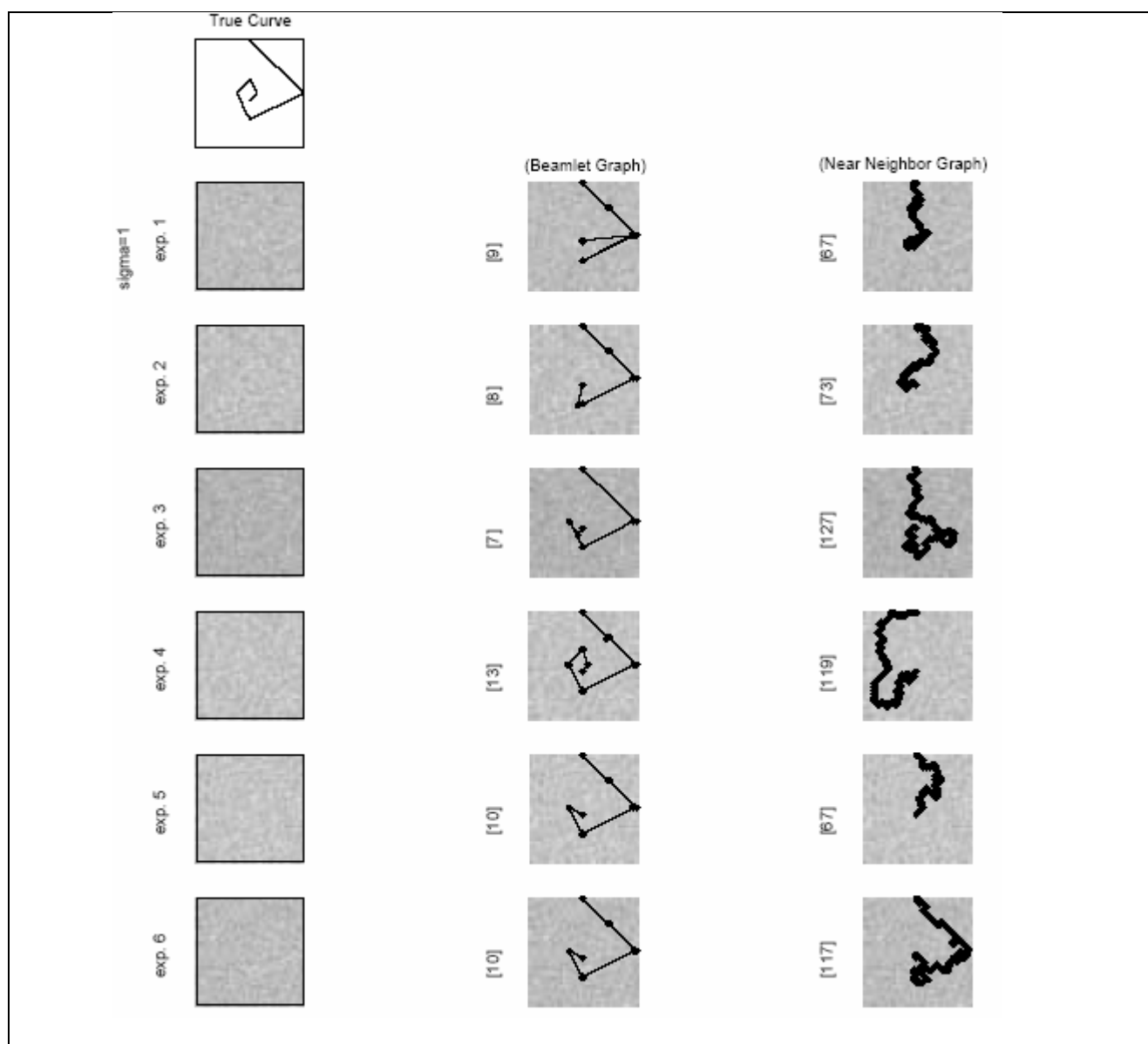


Рис. 24. Иллюстрирование преимуществ управления алгоритмом распространения на бимлет-графе. Первоначальное изображение (в первом ряду) содержит спираль. Первая колонка содержит шесть реализаций с шумом. Мы заканчиваем распространение после 20 шагов. Средняя колонка

иллюстрирует оптимальный путь графе бимлета. Правая колонка иллюстрирует оптимальный путь графе ближайших соседей.

В «реальных» приложениях, из-за ограничений вычислительных ресурсов, мы могли бы не быть способным к выполнению алгоритма распространения с гарантией оптимального решения. Мы можем закончить процесс после некоторого числа стадий и иметь лучшее решение - k – тогда (up-to-then). Очевидно, ввиду того, что легко достигнуть оптимального решения в бимлет-графе, мы более безопасны при раннем завершении, чем мы были бы в графе ближайших соседей.

Результаты численных экспериментов, сравнивающих алгоритмы, базировались на бимлет-графе и графе ближайших соседей даются на рис. 24. Ключевым пунктом является то, что результаты в бимлет-графе драматично ближе к желанной цели - спиральной кривой. Этот метод может также использоваться для автоматического выделения криволинейных образцов от данных, которые не буквально нитеобразны. Например, рис. 25 представляет астрономическое изображение, которое ясно показывает спиральный образец галактики; рисунок иллюстрирует линию, извлеченную методом beamlet/MCTTRC.

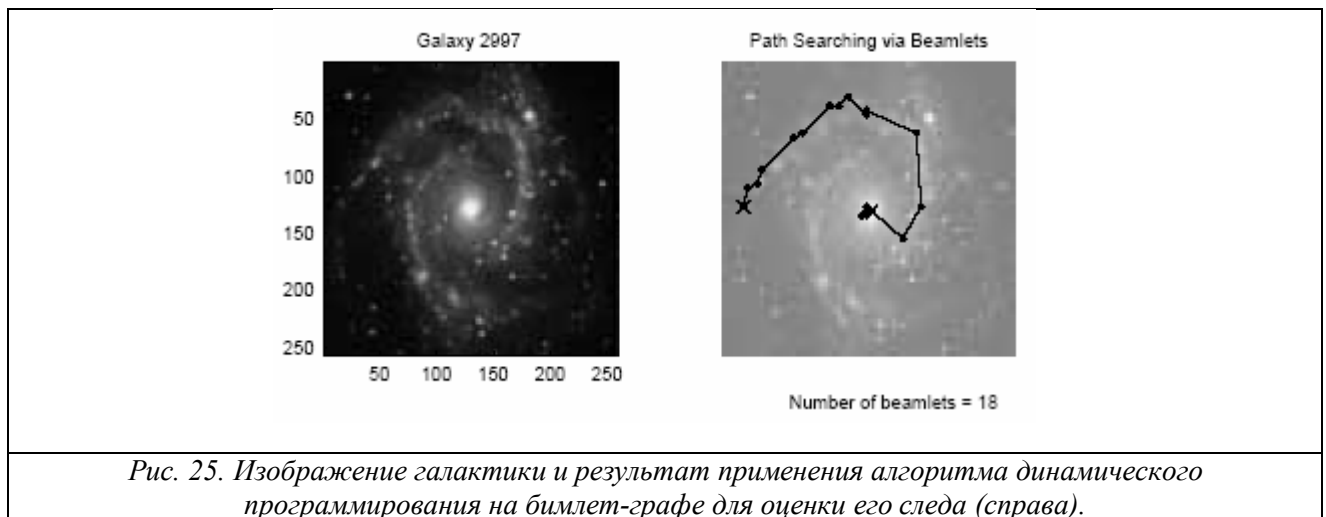


Рис. 25. Изображение галактики и результат применения алгоритма динамического программирования на бимлет-графе для оценки его следа (справа).

6.2. Выделение глобально оптимальных областей

(Extraction of a Globally Optimal Region)

В этом разделе предположим, что основной объект интереса – область на плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой, имеет постоянную, но неизвестную амплитуду, которая больше внутри области, чем вне ее. Значения пикселей этого изображения с шумом по-прежнему обозначаются y_{i_1, i_2} , и мы примем, что $y(x_1; x_2)$ – непрерывная функция, полученная интерполяцией по средним значениям.

Мотивированной идеей относительно согласованной фильтрации, мы могли бы стремиться к восстановлению области, решая проблему:

$$\max_R \quad S(R)/\sqrt{\text{Area}(R)}, \quad (5)$$

где

$$S(R) = \int_R y(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

является интегральным интерполянт (interpolant) по области R .

Это не легкая проблема решить, из-за огромной размерности пространства `всех областей. Удивительно, экономичный алгоритм нахождения приближенного решения может быть построен на следующих двух наблюдениях.

- *Сокращение Бимлет-Преобразований.* Рассмотрим нумератор $S(R)$. Использование интегрирования по частям, в форме теоремы Гаусса-Грина, мы имеем

$$S(R) = \int_{\partial R} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

где \mathbf{Y} 2-D векторное поле частных интегралов

$$\mathbf{Y}(x_1, x_2) = \left[\frac{1}{2} \int_0^{x_1} y(t, x_2) dt, \frac{1}{2} \int_0^{x_2} y(x_1, t) dt \right],$$

\mathbf{n} – вектор единичной длины, нормальный к границе ∂R . Обратите внимание на это на линейном сегменте b , нормальное направление \mathbf{n} – постоянный вектор $\mathbf{n}(b)$. Также обратите внимание, что если мы считаем область R ограниченной бимлетом многоугольник, тогда мы имеем

$$S(R) = \sum_{b \sim \partial R} \left(\int_b \mathbf{Y} \, ds \right) \cdot \mathbf{n}(b). \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$S(R) = \sum_{b \sim \partial R} T_1(b)c(b) + T_2(b)s(b)$$

где единичная нормаль $\mathbf{n}(b)$ к бимлету b имеет компоненты $(c(b); s(b))$, T_1 – бимлет-преобразование горизонтальной первообразной $\int_0^{x_1} y(t, x_2) dt$ и T_2 – бимлет-преобразование вертикальной первообразной $\int_0^{x_2} y(x_1, t) dt$. Следовательно, $S(R)$ может быть вычислено в результате простых действий на паре бимлет-преобразований.

- *Упрощение Isoperimetry.* Мы рассмотрим знаменатель в (5). Работа с квадратным корнем области причиняет многочисленные сложности, так приблизительно эта изопериметрия (isoperimetry):

$$\sqrt{\text{Area}(R)} \approx \ell(\partial R),$$

где $\ell(\partial R)$ обозначает длину границы ∂R . Предположим это бимлет-многоугольник

$$\ell(\partial R) = \sum_{b \sim \partial R} \ell(b).$$

Объединяя эти наблюдения, первоначальная задача (5) может быть понижена в пользу следующей упрощенной проблемы оптимизации:

$$\max_{p \text{ closed}} \frac{\sum_{b \sim p} \int_b \mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} \, ds}{\sum_{b \sim p} \ell(b)}. \quad (7)$$

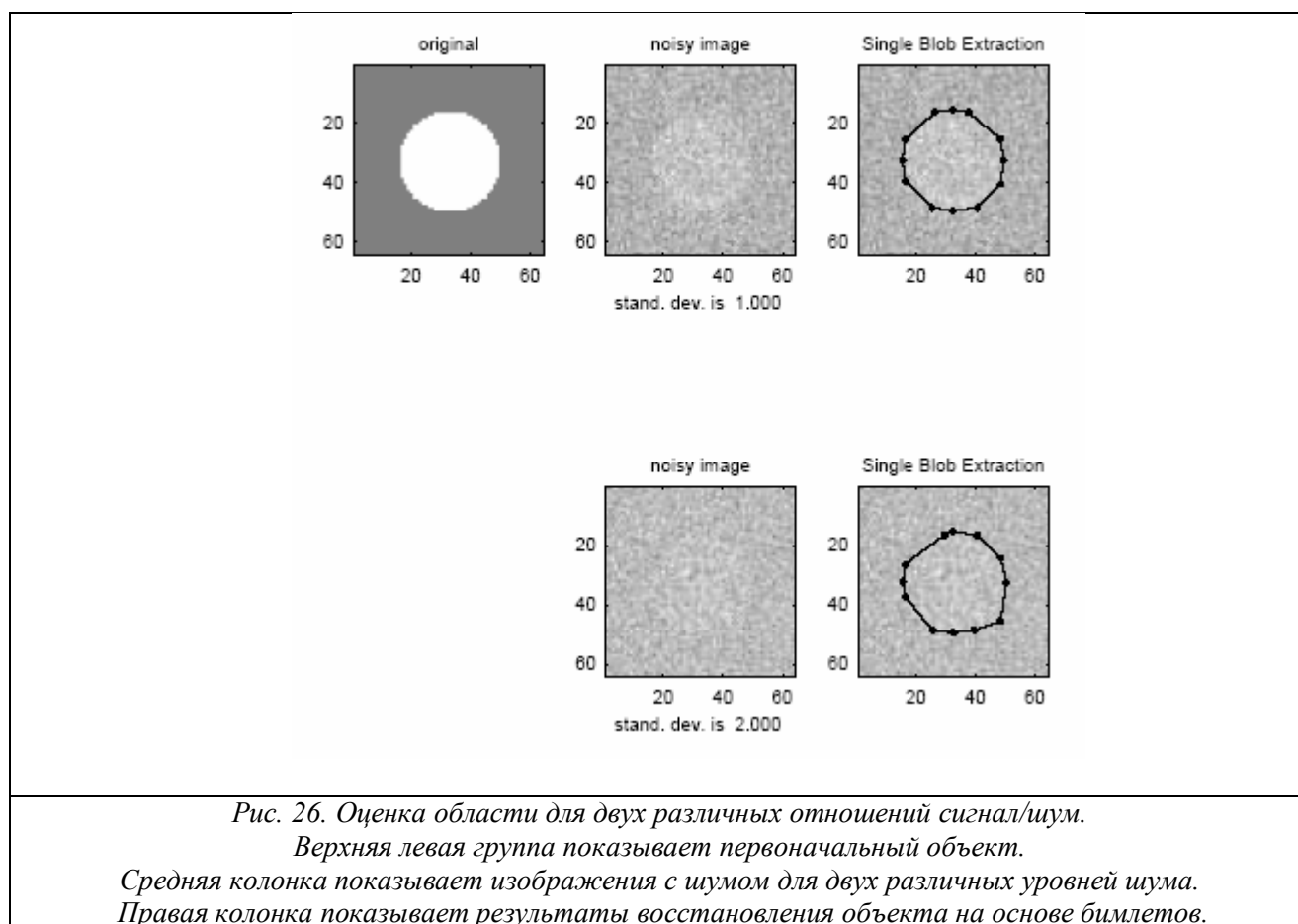
Эта задача (7) оказывается частным случаем известной задачи в области Сетевых Поток, оптимальная проблема цикла отношения стоимости-к-времени. Мы имеем направленный граф, в котором грани имеют пару весов $\Psi_1(b)$ и $\Psi_2(b)$ и ищут цикл p оптимизирующий отношения следующего вида:

$$\min_{p \text{ closed}} \frac{\sum_{b \sim p} \Psi_1(b)}{\sum_{b \sim p} \Psi_2(b)}; \quad (8)$$

см., например, [7]. Это может быть изящно решено линейным программированием [18,33].

Для того, чтобы применять эти механизмы в рассматриваемом случае, мы определяем *диграф бимлета (beamlet digraph)*, создавая различия между бимлетом, идущим от v_0 до v_1 и бимлетом, идущим в противоположном направлении. Мы тогда, конечно, определяем $\Psi_1(b)$ и $\Psi_1(b)$ последовательно с (7). Наконец, мы используем коды быстрого линейного программирования, основанного на первично-дуальных (primal-dual) внутренних точках для его решения.

На рис. 26, мы демонстрируем числовой пример. Фактически, мы нуждаемся важной для дальнейшего детально: в этом примере мы фактически не пробуем решить проблему (7), но вместо этого регуляризации, где $\Psi_1(b)$ включает оба члена $\int_b Y \cdot nds$ и штраф $-\lambda|b|^{1/2}$. В этой модифицированной целевой функции предпочтительны более длинные бимлеты. На рис. 26 оценки упорядочены на основании этого. Обратите внимание, что в одном из примеров отношение сигнал-шум очень мало, и трудно убедить себя, что объект даже присутствует, основываясь исключительно на визуальном впечатлении. Однако, наш метод все еще обнаруживает это с удовлетворительной точностью.



7. Beamlab

Примеры, вычисленные в этой статье были получены, на основе использования Beamlab, разработанный нами Matlab-toolbox. Он содержит приблизительно 250 файлов, 130 *.m файлов (Matlab) и 65 *.c источников для ускоренных *.tex файлов. Информация непосредственно доступна в URL [1,2].

BeamLab имеет двенадцать подкаталогов, которые могут быть сгруппированы в четыре категории:

1. Функции для точного бимлет- и wedgelet-преобразований, и их поддерживающие подпрограммы.
2. Функции, которые осуществляют сетевые алгоритмы течений на бимлет-графе и графе ближайших соседей, и их поддерживающие подпрограммы.
3. Функции и сценарии для приложений, типа проверки бимлета на максимум при обнаружении существования слабого линейного объекта в данных с шумом, алгоритмы для работы с деревом, связанные с украшенным бимлетом рекурсивным двухэлементным разделением, и инструментальные средства для измерения beta-толщины регулярных кривых.
4. Скомпилированные заранее *.mex* функции. Использование этих наборов из двух предметов будет значительно увеличивать скорость выполнения центральных компонентов библиотеки.

Эти главные категории тогда далее подразделены на их собственные подкаталоги:

1. Точные Бимлет и Wedgelet-Преобразования.

- **ExactBeamletTrans** – Функции, выполняющие основные бимлет-преобразования.
- **ExactWedgeletTrans** – Функции, выполняющие основные wedgelet-преобразования.
- **Utility** – Функции, играющие вспомогательную роль в выполнении бимлет- и wedgelet-преобразований и функции визуализации этих преобразований.

Подкаталоги ExactBeamletTrans и ExactWedgeletTrans, только содержащие *.m*-файлы. Для больших размеров задач это выполнение будет предельно медленным.

2. Сетевые Алгоритмы.

- **MCTTRC** – Функции и сценарии, которые применяют подходы линейного программирования для решения задачи отношения минимальной стоимости к времени цикла.
- **MCTTRP** – Функции и сценарии, которые реализуют алгоритм динамического программирования для оценки минимальной стоимости пути на графе по отношению к времени.
- **MinDistPath** – Функции, которые находят минимальный путь на графе. Мы осуществили вариант алгоритма Dijkstra [9,7].
- **BeamletGraph** – Дополнительные Функции, используемые для управления структурами в графе бимлета.

3. Приложения.

- **MaxBeamletCoeff** – сценарии для реализации проверки максимального бимлет-коэффициента с целью обнаружения существования линейного сегмента.
- **BDRDP** – Функции и сценарии для реализации декорированного (облагороженного) бимлетами (beamlet-decorated) рекурсивного двухэлементного деления с целью извлечения многократных линейных сегментов и wedgelets.
- **Regularity** – Функции и сценарии, которые вычисляют beta-толщину.

4. Двойные источники.

- **BWMEX–CMEX** источники для функций, связанных с точным бимлет и wedgelet-преобразованиями.
- **GraphMEX–CMEX** источники для функций, которые выполняют алгоритмы сетевых течений как на бимлет-графе, так и на графе близких соседей.

8. Отношения с Предыдущими Работами

Многомасштабные инструментальные средства анализа, которые мы развили, здесь имеют несколько antecedентов, уже упомянутых во введении. Подойдя к концу нашей истории, просто объяснить отношения этих идей с предыдущей работой. Также, мы можем

исследовать отношения идей с предыдущими использованиями сетевой сл основанные алгоритмы.

8.1. Быстрые Преобразования Радона

Структуры пирамидальных данных, идентичная $\mathcal{R}_{n,1/n}$, использовалась прежде авторами Gütze и Druckenmiller [29], хотя не с этим названием и для других целей. Их цель состояла в том, чтобы развить быстрое Hough-преобразование для цифровых данных. Они рекурсивно применяли "псевдо двух масштабные" отношения, упомянутые в разделе 2.3, для вычисления приближений к интегралам грубого масштаба из приближений интегралов на лучших масштабах. Для них, инструмент - только промежуточный; реальная цель состояла в аппроксимации преобразования Радона. Брэди [10] независимо развил быстрое приближенное преобразование Радона, основанное на приближенной двухмасштабной концепции, но с менее прямой связью с системой бимлетов.

Brandt и Dym [11] также рассмотрели использование приближенных двухмасштабных (twoscale) отношений для быстрого приближенного вычисления линейных интегралов по большому семейству многомасштабных линейных сегментов, а не только линейные сегменты глобального масштаба, появляющиеся в преобразовании Радона.

Наша философия, в некотором смысле, противоположна этим усилиям по быстрому Радон-преобразованию. Мы берем, как изложено в этой статье (и также в [22]), что мы вычисляем многомасштабное преобразование Радона точно, то есть, объект интереса - точные интегралы по специфическим регулярным семействам линейных сегментов на всех различных масштабах и местоположениях.

Мы - определенно не интересовались быстрым приближенным вычислением многомасштабного преобразования Радона и не использовали такую процедуру в вычислении любого из вышеприведенных примеров. Вместо этого рассматривали такие точные интегралы как отправная точка или данность и наша цель состояла в исследовании алгоритмов, которые могли использовать такие интегралы, вместо того, чтобы находить приближения к ним в качестве конечной задачи.

8.2. Анализ Изображения

Статьи Дэвида Хорна и сотрудников в Тель-Авивском Университете [3,4,23], которые мы процитировали во введении, показали, что, анализируя изображения, произведенные некоторыми экспериментами физики элементарных частиц, некоторые вычисления интегралов по линейным сегментам обеспечивает ценные особенности детекторов. Эта пионерская работа является первой из тех, которые мы знаем о фактической разработке реальных приложений, используя подобные бимлетам идеи. Наши методы отличаются в подчеркивании формальной бинарной (двухэлементной) структуры, в противоположность совокупности лучей, достигнутых интуитивно и не двоично (non-dyadically), и в подчеркивании диапазона алгоритмов, которые могут быть развиты, используя эту структуру, вместо специфических приложений, подошедших к особенностям линейных сегментов и классификаторам нейронных сетей.

А. Brandt, в устном общении на Симпозиуме Yosemite, сообщил нам, что его прежний аспирант J.Dym, в тезисах в Институте Weitzmann'a, предложил, что эти интегралы по изображениям по всем прямоугольникам при всех ориентациях, масштабах и местоположениях был бы важным инструментом для анализа изображений. Brandt и соавторы упоминали при прохождении [12], что инструмент этого вида мог бы быть полезным для обнаружения кривых в изображениях. Очевидно, Brandt имел эту идею некоторые годы назад, чтобы рассмотреть особенности множеств, базирующиеся на

многомасштабных интегралах по линиям, так что его работа, строго говоря, предваряет большую часть наших. Часто говорится учеными, работающими в области многомасштабных методов, что каждый «прибыл» как зрелый вкладчик в тему, когда она обнаруживает следы Achi Brandt'a, который думал оригинально на неизведанной территории. Так что мы приехали!

8.3. Геометрическая Теория Меры

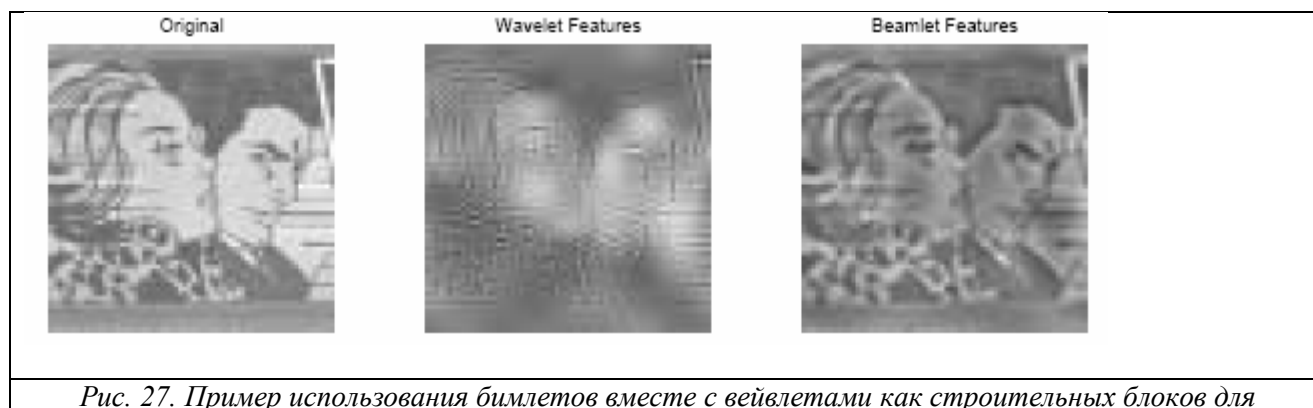
Система бимлетов, которую мы описали здесь, по нашему представлению, близко связана с важными недавними работами по гармоническому анализу [32,19,36]. Питер Джоунс запустил обширную линию исследований, показывая, что можно было собрать информацию о приближениях к частям кривой, определяя пересечения с двоичными (diadic) блоками(коробками) – записывая ошибки приближения таких частей линейными сегментами – и использовал, что информация для характеристики кривых – конечная длина дуги (Проблема Путешествующего Продавца - задача коммивояжера). Дэвид и Semmes распространили такие идеи бинарной организации на R^d (где они рассекали поверхность на диадно-организованные части и изучали приближение k -плоскостями); они использовали такие инструментальные средства для понимания множества важных вопросов в анализе..Gilad Lerman, в тезисах докторской диссертации (Ph.D) в Йельском университете, использовал такие инструментальные средства, чтобы искать структуру в облаках точек в многомерном пространстве.

В этой статье, мы сосредоточились на данных изображения, которые являются концептуально очень иным, чем данные в виде облака точек. Связь с данными облака точек иллюстрирована в разделе 3.3 выше; мы можем определить изображение, которое соответствует к начальной точке в облаке точек и помещающем счетчик в ячейках, основанных на числе членов.

Различия в установке создает очень различный акцент. Мы имеем определенный очень специальный дискретный набор лучей и показываем, как использовать его, чтобы извлечь кривые из данных с шумом.

Специфический комментарий некоторой важности с целью нахождения гладких кривых - концептуально очень отличается от обнаружения просто очищенных кривых. Инструмент, который мы использовали для этого сложного штрафа - значительно отличается от такового для минимальной длины дуги (arclength); например, arclength неспособен различить между цепочкой бимлетов и единственного бимлета, имеющего то же самое изображение на плоскости, тогда как наш сложный штраф предпочитает отдельный бимлет, эквивалентный цепочке более коротких.

8.4. Другие приложения бимлетов



расчленения изображения. Слева направо - оригинальное изображение, его вейвлет-компоненты и его бимлет-компоненты. Это разложение базируется на минимизации норм его коэффициентов. (Подобно работе [16].)

Статья компаньона [22], дала полный теоретический анализ метода из Раздела 4.3. Было показано, что применение к проблеме восстановления объекта, который является черным или белым с гладкой границы между цветами, когда этот объект внедрен в данные с шумом, этот метод мог достигнуть почти минимакса среднеквадратической ошибки.

Тезисы [30] использовали бимлет-пирамиду для анализа изображения в суперпозиции бимлет-особенностей вейвлетов. См. рис. 27, который показывает, что бимлеты объективно «объясняют» больше интересной структуры, чем вейвлеты.

8.5. Другие приложения Идеи Сетевых Поток

(Other Applications of Network Flow Ideas)

Приложения идей сетевых потоков для обработки изображения насчитывают около трех десятилетий, начиная с работы Montanari [42]. Недавние приложения включают [28,31,17] и многих других авторов в области группирования персептронов. Во всех этих работах, методы развиты для сетей, основанных на граф самых близких соседей (с 4 или 8 соседями).

Работа Jermyn и Ishikawa [31] и Cox, Rao и Zhong особенно известны способностью находить глобально оптимальные области и границы.

В этой статье мы развернули сетевые потоки в графе бимлета; как результат переменного масштаба бимлетов, алгоритм Jermyn и Ishikawa не применим; в результате неплоского (nonplanarity) бимлет-графа, алгоритм Cox, Rao и Zhong также не применим. Применение метода внутренних точек линейного программирования к восстановлению области кажутся искренне новаторскими.

Многомасштабная природа бимлет-графа кажется важной особенностью обнаружения областей и нитей, с важными значениями, когда граница объекта не обнаруживается на уровне пикселя, но только представляет интерес над объединением многих пикселей. Обзор рисунков, данный всюду в этой статье, показывает, что во многих из наших примеров, решение, случается, использует многомасштабные бимлеты вместо подключения хороших (fine) масштабов, в методах, используемых граф самых близких соседей. Мы полагаем, что это свойство ответственно за факт, что эти методы могут восстановить объект в драматично меньших отношениях сигнал к шуму, чем это возможно, используя мономасштабное мышление на уровне пикселя, таких как в графе самых близких соседей.

Литература (References)

1. <http://www.isye.gatech.edu/~xiaoming/beamlab>.
2. <http://www-stat.stanford.edu/~wavelab>.
3. H. Abramowicz, D. Horn, U. Naftali, C. Sahar-Pikielny. (1996) An Orientation Selective Neural Network and its Application to Cosmic Muon Identification Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A 378 (1996) 305-311.
4. H. Abramowicz, D. Horn, U. Naftali, C. Sahar-Pikielny. (1997) An Orientation Selective Neural Network for Pattern Identification in Particle Detectors in Advances in Neural Information Processing Systems 9 eds. M. C. Mozer, M. J. Jordan and T. Petsche, MIT Press 1997, pp. 925-931.
5. J.R. Bond, L. Kofman and D. Pogosyan. How filaments of galaxies are woven into the cosmic web. Nature, 380(6575):603-606, April 1996.

6. P. J. Burt, and E. H. Adelson, "The Laplacian pyramid as a compact image code", IEEE Transactions on Communications, 9:(4), pp. 532-540, 1983.
7. R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall, 1993.
8. A.J. Bell and T.J. Sejnowski. An information-maximization approach to blind separation and blind deconvolution. Neural Computation, 7:1129{1159, 1995.
9. D. Bertsekas. Dynamic Programming and Optimal Control, volume 1. Athena Scientific, 1995.
10. M. L. Brady. A fast discrete approximation algorithm for the Radon transform. SIAM J. Computing, 27(1):107{19, February 1998. Beamlets and Multiscale Image Analysis 195
11. A. Brandt and J. Dym. Fast calculation of multiple line integrals. SIAM J. Sci. Comput., 20(4):1417{1429, 1999.
12. E. Sharon, A. Brandt, and R. Basri. Fast multiscale image segmentation. In Proceedings IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, volume 1, pages 70{7, 2000.
13. R.W. Buccigrossi and E.P. Simoncelli. Image compression via joint statistical characterization in the wavelet domain. IEEE Transactions on Image Processing, 8(12):1688{1701, 1999.
14. E. Candès and D. Donoho. Ridgelets: the key to high-dimensional intermittency? Phil. Trans. R. Soc. Lond. A., 357:2495{2509, 1999.
15. E. J. Candès and D. L. Donoho. Curvelets: a surprisingly effective nonadaptive representation of objects with edges. In Albert Cohen, Christophe Rabut, and Larry L. Schumaker, editors, Curve and Surface Fitting: Saint-Malo 1999. Vanderbilt University Press, Nashville, TN., ISBN 0-8265-1357-3, 2000.
16. S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. SIAM J. Sci. Comput., 20(1):33{61, 1999.
17. I.J. Cox, S.B. Rao, and Y. Zhong. "Ratio Regions": A Technique for Image Segmentation, Proc. ICPR '96, 557-564.
18. G.B. Dantzig, W.O. Blattner, and M.R. Rao. Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem. Theory of Graphs, pages 77{83, 1966.
19. G. David and S. Semmes. Analysis of and on uniformly rectifiable sets, volume 38 of Math. Surveys and Monographs. Amer. Math. Soc., 1993.
20. D. L. Donoho. Sparse components analysis and optimal atomic decomposition. Technical report, Department of Statistics, Stanford University, To appear, Constructive Approximation, 1998.
21. D. Donoho and X. Huo. Beamlet pyramids: A new form of multiresolution analysis, suited for extracting lines, curves, and objects from very noisy image data. In Proceedings of SPIE, volume 4119, July 2000.
22. D.L. Donoho. Wedgelets: Nearly minimax estimation of edges. Annals of Statistics, 27(3):859{897, 1999.
23. G. Dror, H. Abramowicz and D. Horn (1998) Vertex identification in High Energy Physics Experiments. NIPS*98.
24. A. Fairall. Large-Scale Structures in the Universe. Chichester, West Sussex, 1998.
25. D.J. Field. Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells. J. Opt. Soc. Am., 4:2379{2394, 1987.
26. D.J. Field. Scale-invariance and self-similar 'wavelet' transforms: an analysis of natural scenes and mammalian visual systems. In M. Farge, et al. eds., Wavelets, Fractals and Fourier Transforms. Oxford Univ. Press, 1993.
27. D.J. Field, A. Hayes, and R.F. Hess. Contour integration by the human visual system: evidence for a local 'association field'. Vision Research, 33(2):173{93, Jan. 1993.
28. D. Geiger, A. Gupta, L.A. Costa, and J. Vlontzos. Dynamic programming for detecting, tracking and matching deformable contours. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 17(3):294{302, 1995.
29. W.A. Götze and H.J. Druckmüller. A fast digital radon transform { an efficient means for evaluating the hough transform. Pattern Recognition, 28(12):1985{ 1992, 1995. 196 David Donoho and Xiaoming Huo

30. X. Huo. Sparse Image Representation via Combined Transforms. PhD thesis, Stanford, August 1999.
31. I. Jermyn and H. Ishikawa. Globally optimal regions and boundaries. In 7th ICCV, Kerkyra, Greece, September 1999.
32. P. W. Jones. Rectifiable sets and the traveling salesman problem. *Inventiones Mathematicae*, 102:1{15, 1990.
33. R. M. Karp. A characterization of the minimum cycle mean in a digraph. *Discrete Mathematics*, 23:309{311, 1978.
34. R.M. Karp and J.B. Orlin. Parametric shortest path algorithms with an application to cyclic sta_ng. *Discrete Applied Mathematics*, 3:37{45, 1981.
35. I. Kovacs and B. Julesz. A closed curve is much more than an incomplete one: E_ect of closure in _gure-ground segmentation. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 90:7495{7497, August 1993.
36. G. Lerman (2000) Geometric Transcriptions of Sets and Their Applications to Data Analysis. Ph.D. Thesis, Yale University Department of Mathematics.
37. T. Leung and J. Malik. Contour continuity in region based image segmentation. In 5th. Euro. Conf. Computer Vision, Frieberg, Germany, June 1998.
38. D. Marr. *Vision : a computational investigation into the human representation and processing of visual information*. W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
39. J. D. Mendola, A. Dale, B. Fischl, A.K. Liu, and R. G.H. Tootell. The representation of illusory and real contours in human cortical visual areas revealed by functional mri. *J. of Neuroscience*, 19(19):8560{8572, Oct. 1999.
40. Y. Meyer. Review of "An Introduction to Wavelets" and "Ten Lectures on Wavelets". *Bulletin Amer Math Soc*, 28(2), April 1993.
41. Y. Meyer. *Wavelets. Algorithms & Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1993
42. U. Montanari. On the optimal detection of curves in noisy pictures. *Communications of the ACM*, 14(5):335{45, 1971.
43. B.A. Olshausen and D.J. Field. Emergence of simple-cell receptive _eld properties by learning a sparse code for natural images. *Nature*, 381:607{609, 1996.
44. D.A. Pollen and S.F. Ronner. Phase relationships between adjacent cells in the visual cortex. *Science*, vol. 212, pp. 1409-1411, 1981.
45. D.L. Ruderman. The statistics of natural images. *Network*, 5(4):517{548, 1993.
46. A. Said and W.A. Pearlman, "A new, fast and e_cient image codec based on set partitioning in hierachical trees," *IEEE Tr. on Circuits and Systems for Video Techn.*, Vol. 6, pp.243-250, June 1996.
47. B.S. Sathyaprakash, V. Sahni, and S.F. Shandarin. Emergence of _lamentary structure in cosmological gravitational clustering. *Astrophysical Journal, Letters*, 462(1):L5{8, 1996.
48. J.-L. Starck, F. Murtagh, and A. Bijaoui. *Image Processing and Data Analysis*. Cambridge, 1998.
49. J.H. van Hateren and A. van der Schaaf. Independent component _lters of natural images compared with simple cells in the primary visual cortex. *Proc. R. Soc. Lond. B*, 265:359{366, 1998.
50. B. Wandell. *Foundations of Vision*. Sinauer Assoc., 1995.