

# Predicción teórica de $N_{\text{eff}}$ en la cosmología estándar

PRESENTA

**Edwin Leonardo Pérez Ochoa**

201521372

Director:

**Dr. Carlos E. Yaguna**



**Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia**  
**Facultad de Ciencias Básicas, Escuela de Física**  
**Tunja, Colombia**  
**2021**

## Resumen

El número efectivo de especies de neutrinos  $N_{\text{eff}}$  mide la aportación de los neutrinos a la densidad de energía relativista del universo temprano para temperaturas  $T \lesssim 2 - 3$  MeV. Diversos fenómenos físicos y modelos más allá del Modelo Estándar (BSM) que plantean la existencia de especies de radiación oscura aportan a la densidad de energía de los neutrinos.  $N_{\text{eff}}$  se ha calculado dentro del Modelo Estándar de partículas y de cosmología con gran precisión,  $N_{\text{eff}} = 3.0433$  [1]. En el caso estándar se considera el proceso de desacoplamiento de los neutrinos *no* instantáneo y la aniquilación de pares  $e^\pm$ . Ambos coinciden lo suficiente para permitir a los electrones transferir entropía a los neutrinos más energéticos a través de interacciones débiles residuales. La función de distribución de los neutrinos sufre de distorsiones *no* térmicas violando la condición de equilibrio. A esto se suma el efecto de las correcciones de electrodinámica cuántica (QED) a temperatura finita sobre la aproximación de gas ideal del plasma electromagnético. Ambos efectos aportan al valor estándar de  $N_{\text{eff}}$ . Para seguir la evolución del sistema fuera del equilibrio es necesario solucionar las ecuaciones de Boltzmann relativistas para las funciones de distribución y la ecuación de continuidad para la densidad de energía relativista. Presentamos aquí un cálculo numérico de  $N_{\text{eff}}$  considerando el caso estándar por medio del código computacional [Neff-Mathematica](#).

**Palabras clave:** Desacoplamiento, modelo estándar, cosmología estándar, neutrinos,  $N_{\text{eff}}$ , teoría cinética, universo temprano.

## Abstract

The effective number of neutrino species  $N_{\text{eff}}$  measures the contribution to the relativistic energy density of neutrinos in the early universe when temperature  $T \lesssim 2 - 3$  MeV. Diverse physical phenomena and models beyond the Standard Model (BSM) which study dark radiation species contribute to the energy density of neutrinos.  $N_{\text{eff}}$  has been computed within the Standard Model of particles and cosmology with high precision,  $N_{\text{eff}} = 3.0433$  [1]. In the standard case the non-instantaneous neutrino decoupling and pair annihilation  $e^\pm$  processes are considered. These coincide enough to allow the electron plasma to transfer entropy to the neutrino gas through residual weak interactions. The neutrino distribution function is modified by non-thermal distortions violating the equilibrium condition. The effect of the finite-temperature quantum electrodynamics (QED) corrections over the ideal gas approximation of the electromagnetic plasma is also considered. These two effects contribute to the standard value of  $N_{\text{eff}}$ . To follow the evolution of the system outside the equilibrium we must solve the set of relativistic Boltzmann equations for the neutrino distribution functions and the continuity equation for the relativistic energy density. We present here a computation of  $N_{\text{eff}}$  considering the standard case using computational code [Neff-Mathematica](#).

**Keywords:** Decoupling, standard model, standard cosmology, neutrinos,  $N_{\text{eff}}$ , kinetic theory, early universe.

---

## Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Fundamentación Teórica</b>	<b>6</b>
2.1. Física del Sistema . . . . .	6
2.2. Número Efectivo de Especies de Neutrinos . . . . .	11
2.3. Ecuación de Boltzmann Relativista . . . . .	12
2.4. Correcciones QED . . . . .	14
2.5. Ecuaciones del Sistema . . . . .	17
2.5.1. Ecuaciones de Boltzmann . . . . .	17
2.5.2. Ecuación de Continuidad . . . . .	20
<b>3. Estado del Arte</b>	<b>24</b>
<b>4. Computación y Resultados</b>	<b>27</b>
4.1. Métodos Numéricos . . . . .	27
4.2. Resultados Numéricos . . . . .	31
<b>5. Conclusiones</b>	<b>35</b>
<b>Apéndice A. Integrales DHS</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>

---

## Introducción

---

El Modelo Estándar de cosmología —también conocido como Hot Big-Bang Model— predice la existencia del fondo cósmico de neutrinos  $C\nu B$  producido en el universo temprano. Aunque indirecta, la existencia de neutrinos cósmicos es soportada por los excelentes resultados teóricos y observacionales de Big Bang Nucleosíntesis (BBN) [2], el Fondo Cósmico de Microondas (CMB) [3] y la formación de Estructuras a Gran Escala (LSS) [4], a través de la contribución de los neutrinos a la densidad de energía relativista del universo. Mientras el universo se expandía a razón dada por el parámetro de Hubble  $H$ , la temperatura descendió hasta alcanzar el umbral  $T \gtrsim 10$  MeV en que el plasma relativista estaba compuesto por tres especies de neutrinos livianos, pares electrón-positrón  $e^\pm$  y fotones  $\gamma$  que dominaban sobre las demás formas de energía. La temperatura era suficientemente alta para mantener en equilibrio termodinámico al plasma cósmico mediante el intercambio interno de energía, que ocurría a través de la interacción fundamental débil mediada por los bosones  $W^\pm$ ,  $Z^0$  para interacciones entre neutrinos y pares  $e^\pm$ ; además la interacción electromagnética acoplaba fuertemente a los fotones y pares  $e^\pm$ .

Una vez la temperatura alcanzó el orden de los MeV ( $T \sim 2 - 3$  MeV) debido a la expansión cósmica, las interacciones débiles que mantenían a los neutrinos en contacto térmico se volvieron ineficientes. La tasa de interacción ( $\Gamma$ ) fue comparable con la tasa de expansión del universo  $H \sim t^{-1}$ , así que los neutrinos se desacoplaron del plasma electromagnético ( $e^\pm$ ,  $\gamma$ ) propagándose libremente por el universo. Pronto la temperatura alcanzó la energía en reposo del electrón  $T \lesssim 0.5$  MeV, entonces la producción de  $e^\pm$  no fue suficiente para contrarrestar la aniquilación de pares  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ , transfiriendo *entropía* a los fotones y elevando su temperatura  $T$  que antes decrecía de igual manera que la temperatura de los neutrinos  $T_\nu$  debido al equilibrio termodinámico. Asumiendo que el desacoplamiento de los neutrinos es *instantáneo* es sencillo determinar el calentamiento que el gas de fotones sufre [5]. Como toda la energía se transporta desde el plasma de electrones al gas de fotones se satisface la conservación de entropía en el sector electromagnético. Así, la temperatura comóvil de los fotones después de la aniquilación de pares  $e^\pm$  es  $T/T_\nu = (11/4)^{1/3} \approx 1.401$ .

Sin embargo el desacoplamiento de neutrinos *no* es instantáneo en la realidad. Ocurre poco antes de la aniquilación de pares  $e^\pm$  permitiendo interacciones residuales entre ambas especies mientras los electrones desaparecen. Los procesos relevantes que participan en el fenómeno son la aniquilación residual ( $e^+ + e^- \rightarrow \bar{\nu} + \nu$ ) y la dispersión elástica ( $e + \nu \rightarrow e + \nu$ ) investigados por primera vez en [6].

Así, los efectos de que el desacoplamiento no sea instantáneo son (i) el calentamiento de los fotones es levemente menor, i.e. la temperatura comóvil de los fotones converge a  $T/T_\nu < 1.401$  debido a que la energía disponible durante el proceso de aniquilación de pares  $e^\pm$  se comparte entre fotones y neutrinos y (ii) como los pares  $e^\pm$  transportan energía a través de los neutrinos más energéticos se generan distorsiones no térmicas en la función de distribución de los neutrinos  $f_\nu(p)$ .

Las funciones de distribución de los neutrinos dependen del momento  $p$  debido a que las interacciones débiles se acoplan más fuertemente al incrementar la energía de las partículas. Para determinar exactamente la evolución de las distorsiones del espectro de momento de los neutrinos y la variación de la temperatura comóvil de los fotones es necesario solucionar el sistema de ecuaciones relativistas de Boltzmann dependientes del momento  $p$  para las funciones de distribución  $f_{\nu_i}(p)$  de los neutrinos ( $i = e, \mu, \tau$ ) junto con la ecuación de continuidad dada por la cosmología estándar para la densidad de energía relativista  $\rho_R$ . Los resultados numéricos de estas cantidades son entonces valores exactos limitados sólo por el error computacional y algunas aproximaciones. Se cuantifican las variaciones respecto al caso de desacoplamiento instantáneo a través de  $N_{\text{eff}}$  que en el caso instantáneo retorna  $N_{\text{eff}} = 3$ . De aquí que al considerar fenómenos físicos o modelos más allá del Modelo Estándar (BSM) las mediciones de  $N_{\text{eff}}$  sean un excelente *test* para determinar el espacio de parámetros en que los candidatos son viables [3, 7].

Actualmente se conocen diversos resultados de cálculos numéricos que solucionan el sistema de ecuaciones Continuidad–Boltzmann teniendo en cuenta el desacoplamiento no instantáneo. Los primeros estudios usaron la aproximación de Boltzmann que brinda una buena solución con una precisión dentro del 10 % respecto al resultado aceptado actualmente [8, 9]. Luego se solucionó el desacoplamiento de neutrinos exactamente considerando las funciones de distribución sin aproximaciones [10, 11, 12, 13]. Refinamientos posteriores solucionaron el sistema de ecuaciones introduciendo el efecto de las correcciones de electrodinámica cuántica (QED) a temperatura finita sobre la aproximación del gas ideal del plasma electromagnético, lo que corrige la ecuación de estado de los  $e^\pm$  y modifican la solución a las ecuaciones del sistema tal que  $\delta N_{\text{eff}} \equiv N_{\text{eff}} - 3 \sim 0.01$  [14, 15].

El valor teórico más reciente calculado numéricamente dentro de la cosmología estándar y el SM que reporta la mayor precisión es  $N_{\text{eff}} = 3.0433 \pm 0.0002$  [1]. Resultados previos modifican levemente  $N_{\text{eff}}$  incluyendo los mismo fenómenos físicos. En [16] se considera el desacoplamiento no instantáneo (NID), las correcciones QED y las oscilaciones de neutrinos reportando  $N_{\text{eff}} = 3.045$ . Poco después, debido a una modificación del análisis de las correcciones QED a la ecuación de estado [17], se encontró el valor numérico  $N_{\text{eff}} = 3.044$  [18, 19]. Los resultados estándar que consideraron NID, correcciones QED y las oscilaciones de neutrinos por primera vez indicaron  $N_{\text{eff}} = 3.046$  [20]. Además, el caso NID por sí solo se estudió en [11, 12], pioneros respecto al cálculo de  $N_{\text{eff}}$  al introducir la reducción de las integrales de colisión de la ecuación de Boltzmann.

El interés en  $N_{\text{eff}}$  ha sido extensivo principalmente porque es un parámetro relevante dentro del cálculo de las anisotropías del CMB y otros observables cosmológicos. También debido a que modelos de física BSM imprimen modificaciones características sobre  $N_{\text{eff}}$ . La sonda espacial Planck–2018 [3] de la Agencia Espacial Europea ESA determinó que  $N_{\text{eff}} = 2.99 \pm 0.17$ . Resultado que coincide con el valor teórico dentro de la incertidumbre de las mediciones. Así, se limita el espacio de parámetros de las teorías BSM que contienen partículas de tipo neutrino termalizadas con las especies del Modelo Estándar antes del desacoplamiento. Algunos ejemplos de física BSM que aportan a la densidad de energía de los neutrinos son (i) neutrinos estériles livianos [21, 22, 23], (ii) axiones [24] y (iii) productos de decaimiento de partículas de larga vida de BSM [25, 26]. Para discernir entre el amplio espectro de candidatos de BSM el valor numérico de  $N_{\text{eff}}$  es fundamental y apremiante

ya que nuevos resultados experimentales se esperan pronto. Se estima que el proyecto CMB-S4 [7] mejorará la incertidumbre en las mediciones de  $N_{\text{eff}}$  de  $1\sigma$  a  $\sigma(N_{\text{eff}}) \sim 0.02 - 0.03$ , dando preferencia a algunos candidatos de BSM o confirmando el caso estándar. Así se evaluaría la producción de reliquias en el universo temprano a través de su aportación a la densidad de energía de los neutrinos, características de los modelos de física BSM y se confirmaría la historia térmica del universo.

Presentamos aquí el cálculo numérico del desacoplamiento de neutrinos dentro del Modelo Estándar de partículas y de cosmología para determinar el número efectivo de especies de neutrinos  $N_{\text{eff}}$ . Usamos el software computacional de alto nivel MATHEMATICA [27] en este propósito. Buscamos confirmar el valor estándar de  $N_{\text{eff}}$  considerando correcciones QED a temperatura finita y despreciando el límite de desacoplamiento instantáneo. Solucionamos el sistema de ecuaciones de Boltzmann relativistas dependientes del momento  $p$  para las funciones de distribución de los neutrinos  $f_{\nu_i}(p)$  junto con la ecuación de continuidad para la temperatura comóvil de los fotones  $T/T_\nu$ . La organización de este escrito se presenta a continuación. En la sec. 2.1 se resumen las características principales del Modelo Estándar de cosmología relevantes para solucionar el proceso de desacoplamiento de los neutrinos, incluyendo la termodinámica del universo temprano. Luego, se define el número efectivo de especies de neutrinos  $N_{\text{eff}}$  en la sec. 2.2 y se describen las ecuaciones del sistema Continuidad–Boltzmann en la sec. 2.3. En seguida se expone el estado del arte referente al número efectivo de neutrinos  $N_{\text{eff}}$  en el capítulo 3. Finalmente, se discute el proceso computacional usado durante el desarrollo del proyecto y los resultados numéricos obtenidos en el capítulo 4. Se presenta el conjunto de conclusiones en el capítulo 5. Un apéndice se agrega al final del documento con el propósito de definir las funciones relevantes dada la reducción de la integral de colisión de la ecuación de Boltzmann.

## Fundamentación Teórica

### 2.1 Física del Sistema

A día de hoy es bien sabido que el universo a gran escala ( $\gtrsim 100$  Mpc) se distribuye homogénea e isotrópicamente [28, 29, 30]. El comportamiento de este tipo de espacio-tiempo es cuantificado por la métrica de Robertson-Walker (RW)  $ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2/(1 - kr^2) + a^2(t)r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ , donde  $(t, r, \phi, \theta)$  son las coordenadas análogas a las esféricas habituales,  $\kappa$  denota la curvatura<sup>1</sup> y  $a(t)$  es el *factor de escala* que determina la expansión del universo escalando las coordenadas  $(r, \phi, \theta)$  a razón dada por el parámetro de Hubble  $H \equiv \dot{a}/a$ ; es decir, dadas las coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  el espacio evoluciona dinámicamente con la función  $a(t)$ . La variable temporal  $t$  se entiende como el tiempo propio medido por un observador en reposo en el sistema de referencia *comóvil*, es decir con  $(r, \theta, \phi) = \text{constante}$ .

Desde la relatividad general de Einstein<sup>2</sup> se describe explícitamente la dinámica del universo en expansión dependiendo del contenido del espacio-tiempo. Las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser escritas en general como  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ , donde el miembro izquierdo depende sólo de la métrica de RW (la naturaleza del espacio-tiempo) pues cada término se determina únicamente con  $g_{\mu\nu}$ . Por otro lado, el segundo miembro depende del tensor energía-momento  $T_{\mu\nu}$  que en lo común es un objeto matemático complicado dependiente del contenido de energía del universo. La manera más simple de escribir  $T_{\mu\nu}$  es modelando al sistema como un fluido perfecto (no viscoso) descrito por dos cantidades: la densidad de energía  $\rho$  y la presión  $P$  relacionadas a través de la *ecuación de estado*  $P = w\rho$ .

La ecuación de estado permite diferenciar tres etapas características de la evolución del universo:  $w = 1/3$  para la época de dominación de la radiación,  $w = 0$  para la época de dominación de la materia y  $w = -1$  para la época de dominación de la constante cosmológica  $\Lambda$ . Nos interesa el primer caso pues allí se enmarca el universo temprano donde ocurre el desacoplamiento de neutrinos. La simetría de la métrica RW indica que  $T_{\mu\nu}$  es diagonal, además la isotropía del universo asegura que sus componentes espaciales sean iguales, así:  $T^\mu_\nu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$ . Con la métrica RW y el

<sup>1</sup>Definido apropiadamente el parámetro de curvatura del espacio-tiempo es  $\kappa = +1$  para curvatura positiva,  $\kappa = 0$  para el caso plano y  $\kappa = -1$  para curvatura negativa.

<sup>2</sup>Los libros de texto [31, 32] son excelentes introducciones a la relatividad general e incluyen diversas aplicaciones a la cosmología.

tensor energía-momento del fluido perfecto se determinan dos ecuaciones de campo relevantes: la ecuación de Friedmann  $H^2 + k/a^2 = 8\pi G\rho/3$  y la ecuación de aceleración. En adelante, se usan las unidades naturales ( $c = \hbar = 1$ ) para simplificar la notación de las ecuaciones.

La ecuación de Friedmann es una forma de plantear el principio de conservación de energía pero no puede ser solucionada para obtener a la vez  $a(t)$  y  $\rho(t)$ . Desde la termodinámica existe otra manera de establecer la conservación de energía a través de su primera ley  $dQ = dE + PdV$ , donde  $dQ$  es la cantidad de energía transferida en forma de calor (interacciones microscópicas) al sistema. Es útil la relación con la *entropía* a través de  $dS = dQ/T$ , con  $T$  la *temperatura* del sistema. En términos relativistas, la conservación de energía y momento se establece como  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$  y al tomar el elemento  $\mu = 0$  se deduce la primera ley de la termodinámica para el universo en expansión como  $d(\rho a^3) = -Pd(a^3)$ . Asumiendo que el sistema es un fluido perfectamente homogéneo no se intercambia energía en forma de calor externamente  $dQ = 0$ ; consecuentemente la entropía se conserva. Si el volumen comóvil  $V_s$  es una esfera de radio  $r_s$ , el radio propio es  $R(t) = a(t)r_s$ , así se extrae la ecuación de continuidad (también conocida como ecuación de fluido) [28]

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad (2.1)$$

Al solucionar la ecuación de continuidad evaluando la ecuación de estado se determina que para la época de dominación de radiación ( $w = 1/3$ ) la densidad de energía decrece como  $\rho(t) \sim a^{-4}(t)$  que recibe contribuciones de partículas descritas por el SM como fotones, neutrinos, etc. Entonces se tienen dos ecuaciones fundamentales de la cosmología que describen el universo a gran escala: la ecuación de Friedmann para  $a(t)$  y la ecuación de continuidad para  $\rho(t)$ . Tomando entonces al universo temprano como un gas que interactúa débilmente dentro del espacio-tiempo modelado por la métrica de RW, con densidad de energía  $\rho(t)$  y presión  $P(t)$ , se tiene que las cantidades relevantes en general dependen de la función de distribución en el espacio de fase  $f(p)$  de cada tipo de partícula. En *equilibrio* el gas de neutrinos es descrito por la función de distribución de Fermi-Dirac (FD)

$$\begin{aligned} f_{\nu_\alpha}(p) &= \frac{1}{e^{p/T - \xi_\alpha} + 1} \\ f_{\bar{\nu}_\alpha}(p) &= \frac{1}{e^{p/T + \xi_\alpha} + 1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $\xi_\alpha = \mu/T_\nu$  y  $\mu$  es el potencial químico. Para el desacoplamiento de neutrinos el potencial químico de los  $\nu_e$  y  $\nu_{\mu(\tau)}$  son igualmente despreciables pues estaban en equilibrio antes de la época de BBN [33]. De hecho cuando se considera  $\mu$  como una variable más del sistema se estima que  $T_\nu/\mu \sim -240$ . Es decir, el término de potencial químico en la función de distribución de equilibrio ec. 2.2 es despreciable durante el desacoplamiento de neutrinos [34, Apéndice A3]. Las cantidades microscópicas del sistema quedan expresadas en términos de la función de distribución general  $f(\vec{p})$  así

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p E(\vec{p}) f(\vec{p}), \quad (2.3)$$

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{|\vec{p}|^2}{2E} f(\vec{p}), \quad (2.4)$$

donde  $E^2 = p^2 + m^2$  y  $g$  representa los grados de libertad del gas, i.e. los posibles estados de espín de cada componente del gas. En el caso relativista  $T \gg m$ , despreciando el potencial químico  $\mu$  y con



una función de distribución de equilibrio FD se tiene que en la época de dominación de radiación la densidad de energía para bosones y fermiones está dada por

$$\rho(T) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g T^4, & \text{Bosones} \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4, & \text{Fermiones.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Nótese que para el gas de neutrinos y fotones la razón entre las densidades de energía de ambas especies es  $\rho_\nu/\rho_\gamma = 3(7/8)(T_\nu/T)^4$ . De la relación fundamental de la termodinámica se determina que  $S = (\rho + P)V/T$ , donde  $S$  es la entropía del sistema para el volumen físico  $V = a^3(t)$  del fluido perfecto. Según la primera ley de la termodinámica  $S$  se conserva para el sistema en equilibrio definiendo la densidad de entropía por unidad de volumen comóvil como  $s = S/V$ . Así  $s \sim g_{*s} T^3$  donde  $g_{*s} = 2 + g_\nu(7/8)(T_\nu/T)^3$ . De esto se extraen dos importantes hechos (i) se conserva la cantidad  $S = g_{*s} T^3 a^3$  de modo que  $s \propto a^3$  y (ii) la temperatura decrece como  $T \propto g_{*s}^{-1/3} a^{-1}$ . Cuando  $g_{*s}$  permanece constante la temperatura decrece como  $T \propto a^{-1}$ , mientras que cuando una especie se vuelve no relativista y desaparece transfiere toda su entropía a las otras especies del plasma, así la temperatura  $T$  decae un poco más lento comparada con  $1/a(t)$  (véase la discusión del capítulo 3). Finalmente, cuando una especie *liviana* como los neutrinos se desacopla mantiene su espectro de equilibrio y no comparte la transferencia de entropía desde otras especies que se aniquilan. Entonces los neutrinos en equilibrio durante la aniquilación de pares  $e^\pm$  no reciben entropía y se propagan libremente con su espectro de FD sin modificaciones. Es conveniente usar el parámetro  $z \equiv a(t)T$  para comparar la evolución de la temperatura  $T$  respecto a  $T_\nu \sim 1/a(t)$  como veremos más adelante.

Para entender la historia térmica del universo es necesario tener en cuenta el siguiente criterio: si la tasa de interacción entre las partículas es mayor que la tasa de expansión del universo  $\Gamma \gtrsim H$  las interacciones son efectivas y se mantiene un buen contacto térmico, permitiendo el intercambio de energía entre las especies que componen el plasma. Si el criterio se satisface se dice que el gas de partículas está *acoplado*. En caso contrario las especies que no pueden mantener el contacto térmico se *desacoplan* propagándose por el universo sin percibir modificaciones inducidas por otras especies de partículas. Aunque este criterio es necesario *no* es suficiente para garantizar que las especies de partículas violen el equilibrio; como se mostró arriba las partículas sin masa que satisfacen  $\Gamma \ll H$  aún mantienen su espectro de equilibrio determinado únicamente por la temperatura que escala como  $T \sim a^{-1}$ .

Para entender el *desacoplamiento* debemos tener en cuenta si las partículas interactúan a través de bosones masivos como los  $W^\pm$ ,  $Z^0$  o bosones sin masa como el fotón  $\gamma$ . Como quedará claro más adelante las interacciones relevantes para el desacoplamiento de neutrinos son descritas por el primer caso, así, para  $T \leq m_x$ , la sección eficaz es  $\sigma \sim G_x^2 T^2$  donde  $m_x$  es la masa del bosón gauge tal que  $G_x \sim \alpha/m_x^2$ . Para  $T \gg m_x$ ,  $\sigma$  es igual tanto para bosones sin masa como para bosones masivos:  $\sigma^2 \sim \alpha^2/T^2$ . De modo que  $\Gamma \sim n\sigma|v| \sim G_x^2 T^5$ . Utilizando el parámetro de Hubble para la época de dominación de radiación  $H \sim T^2/m_{Pl}$  se tiene

$$\frac{\Gamma}{H} \sim G_x^2 m_{Pl} T^2. \quad (2.6)$$

Las reacciones ocurren rápidamente cuando  $m_x \gtrsim T \gtrsim G_x^{-2/3} m_{Pl}^{-1/3} \sim (m_x/100 \text{ GeV})^{4/3} \text{ MeV}$  y las especies se desacoplan cuando  $T \lesssim (m_x/100 \text{ GeV})^{4/3} \text{ MeV}$ . Antes de que la temperatura del universo alcanzara el orden de los 1 MeV, los neutrinos y electrones se mantenían en buen contacto térmico por las reacciones rápidas entre las partículas  $\bar{\nu} + \nu \rightarrow e^+ + e^-$ ,  $\nu + e \rightarrow \nu + e$ , etc. Entonces

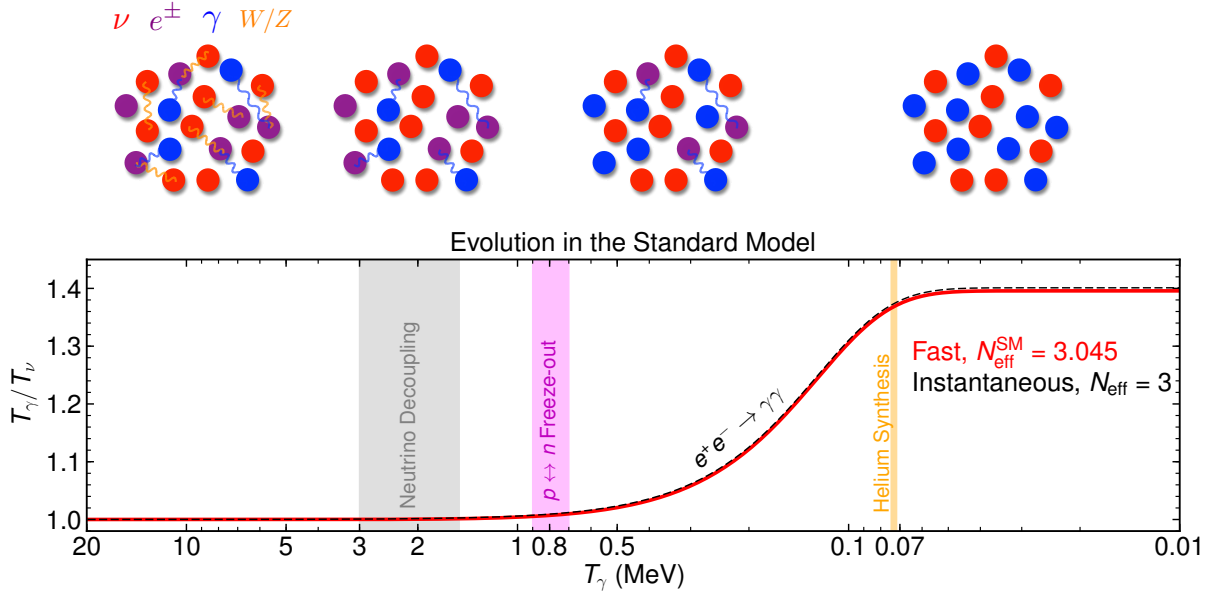


Figura 2.1: Evolución de la temperatura comóvil de los fotones  $T/T_\nu$  respecto a la temperatura del universo en expansión. Se etiquetan los procesos relevantes durante la época con barras verticales grises y se muestra la evolución de  $T$  en el caso exacto (rojo,  $N_{\text{eff}} = 3.045$ ) junto al límite de desacoplamiento instantáneo (punteado,  $N_{\text{eff}} = 3$ ). Los esquemas de arriba indican la interacción y la densidad numérica de las especies durante la evolución de  $T$ . Figura tomada de [34], con autorización del autor M. Escudero.

$\sigma \sim G_x^2 T^2$ , de modo que  $\Gamma \simeq n\sigma|v| \simeq T^5 G_x^2$  ya que en la época de dominio de radiación  $n \sim T^3$ . Así  $\Gamma/H \sim G_x T^5/T^2 m_{Pl} = G_x^2 m_{Pl} T^3$ , con lo que finalmente

$$\frac{\Gamma}{H} \simeq \left( \frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^3. \quad (2.7)$$

Cuando la temperatura no ha alcanzado el umbral  $T > 1$  MeV las interacciones mantienen al plasma en equilibrio térmico. Mientras que para la temperatura  $T \leq 1$  MeV los neutrinos se desacoplan del plasma electromagnético. Las interacciones a través de los bosones masivos  $W^\pm$ ,  $Z^0$  son ahora ineficientes pero su temperatura sigue escalando como  $T_\nu \sim 1/a(t)$  de la distribución FD. En resumen, los neutrinos y el plasma electromagnético no interactúan lo suficientemente rápido para mantener el contacto térmico. Es posible estimar la temperatura de desacoplamiento de los neutrinos  $T_{\nu D}$  más precisamente como se hace en [35, 36] encontrando que  $T_{\nu_e D} = 1.87$  MeV y  $T_{\nu_{\mu(\tau)} D} = 3.12$  MeV. De aquí que comúnmente se mencione que la temperatura de desacoplamiento de los neutrinos es  $T_{\nu D} \sim 2 - 3$  MeV. Además, es posible estimar el calentamiento que sufre el gas de fotones por el proceso de aniquilación de pares  $e^\pm$  comparando la temperatura de los neutrinos  $T_\nu$  con la de los fotones  $T$  antes y después de la aniquilación de pares  $e^\pm$ .

Cuando  $T \gg m_e$  existe el equilibrio térmico entre los neutrinos y el plasma electromagnético, es decir que la razón entre sus temperaturas es  $T/T_\nu = 1$ . Por otro lado, considerando que la entropía en el volumen físico  $S = sV$  se conserva se tiene que  $s_{e^\pm, \gamma} a^3 = \text{constante}$ . Como los neutrinos son partículas sin masa la temperatura sigue siendo  $T_\nu \sim a^{-1}$  antes y después de que

estén desacoplados. Entonces la entropía por unidad de volumen comóvil antes del desacoplamiento es  $S_A = 11(aT_\nu)^3/2$  y después es  $S_D = 2(aT)^3$ . Finalmente, al utilizar la conservación de entropía  $S_A = S_D$  se encuentra que  $T/T_\nu = (11/4)^{1/3} \approx 1.401$ . Aún así, este resultado es válido al suponer que los neutrinos se desacoplan instantáneamente antes de que el proceso de aniquilación de pares se presente  $T \lesssim 0.5$  MeV y se le conoce como el *límite de desacoplamiento instantáneo* que permite obviar las distorsiones no térmicas que destruyen la condición de equilibrio de los neutrinos, donde la distribución de FD no es válida. En la fig. 2.1 se presenta la evolución de la temperatura adimensional de los fotones  $z \equiv a(t)T = T/T_\nu$  para el caso instantáneo y el caso exacto. En negro punteado está dado el caso instantáneo que retorna el mismo resultado que estimamos para la temperatura adimensional asintótica.  $z_{\text{fin}} = 1.401$ . En rojo está dado el caso exacto que retorna un valor levemente inferior  $z_{\text{fin}} = 1.397$  debido a que se tienen en cuenta las distorsiones no térmicas del espectro de neutrinos debido al contacto térmico leve durante la aniquilación de pares  $e^\pm$ . Es decir, los fotones comparten con los neutrinos la energía transferida desde el plasma de  $e^\pm$ .

Son dos los procesos importantes que participan activamente en la evolución del sistema. Primero, la aniquilación de pares  $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$  se produce cuando la temperatura alcanzó el umbral  $T \lesssim 0.511$  MeV. Mientras desaparecen, los electrones transportaron energía al gas de fotones incrementando la diferencia entre las temperaturas  $T - T_\nu$ . Nótese que los neutrinos no sufrieron calentamiento porque se han desacoplado por completo. El segundo proceso es el desacoplamiento de neutrinos etiquetado en la fig. 2.1 al rededor de  $T \sim 3 - 2$  MeV. En la parte superior de la misma figura se esquematizan las interacciones y densidades numéricas de las especies del plasma durante todo el proceso. Cuando la temperatura alcanzó la energía en reposo del electrón  $T \gtrsim 0.5$  MeV los neutrinos, fotones y electrones se mantuvieron en equilibrio termodinámico a través de interacciones débiles mediadas por  $W^\pm$ ,  $Z^0$  y electromagnéticas mediadas por  $\gamma$ . Luego los neutrinos se desacoplaron instantáneamente eliminando las interacciones débiles. Cualquier cambio en el plasma electromagnético no afectaba al gas de neutrinos que escalaba su temperatura como  $T_\nu = 1/a(t)$ . En seguida el plasma de electrones desapareció cuando la energía no fue suficiente para contrarrestar la aniquilación de pares  $e^\pm$  transfiriendo entropía al plasma de fotones e incrementando la temperatura  $T$  respecto a  $T_\nu$ . Finalmente, el plasma relativista  $\rho_R$  está compuesto por neutrinos y fotones que escalaban su temperatura de manera diferente caracterizada por la razón  $T/T_\nu$  tal que el caso exacto e instantáneo llevan a valores asintóticos  $z_{\text{fin}}$  diferentes.

El caso instantáneo es el más simple. Por otro lado, el caso exacto requiere del seguimiento en el tiempo de las funciones de distribución de los neutrinos que al considerar distorsiones no térmicas afecta al calentamiento de los fotones. Nótese que al destruir el equilibrio térmico de los neutrinos la definición estricta de  $T_\nu$  no tiene sentido. En lo que sigue debe entenderse que la cantidad a la que llamamos temperatura de neutrinos es en realidad  $T_\nu = 1/a(t)$ . Las fases del proceso son las mismas que en el caso instantáneo. La modificación reside en que permanecen interacciones débiles residuales durante la aniquilación de pares  $e^\pm$  debido a que el desacoplamiento no es instantáneo. El gas de neutrinos entonces aún recibe energía desde el plasma electrónico a través de los neutrinos más energéticos<sup>3</sup>. Esto genera que la energía disponible para ser transferida a los fotones decrece generando la característica modificación al valor asintótico<sup>4</sup>  $z_{\text{fin}}$ . Finalmente, las distorsiones no térmicas sobre la función de distribución de los neutrinos, que generan variaciones

<sup>3</sup>Las interacciones débiles relevantes: aniquilación residual ( $e^- + e^+ \rightarrow \bar{\nu} + \nu$ ), dispersión elástica ( $e + \nu \rightarrow e + \nu$ ), etc. mediadas por bosones  $W^\pm$ ,  $Z^0$  son acopladas más fuertemente con el aumento de la energía de los neutrinos.

<sup>4</sup>Usamos la palabra *asintótico* para referirnos a cantidades evaluadas a temperaturas tales que  $T/m_e \rightarrow 0$ , con  $m_e$  la masa del electrón; por ejemplo, la temperatura adimensional  $z$ , las variaciones a la densidad de energía relativista, etc.

sobre su densidad de energía  $\delta\rho_\nu \equiv \rho_\nu - \rho_\nu^0$  (con  $\rho_\nu^0$  la densidad de energía de neutrinos en el caso instantáneo), junto con la modificación sobre  $z$  determinan el número efectivo de especies de neutrinos  $N_{\text{eff}}$  que caracteriza la densidad de energía de los neutrinos respecto a la de fotones en el universo temprano. En la fig. 2.1 se muestra que, para el caso instantáneo (punteado negro), se retorna  $N_{\text{eff}} = 3$  lo que indica que *no* existen modificaciones sobre la aportación a la densidad de energía de los neutrinos ni a la evolución térmica de los fotones estimada por conservación de la entropía. Mientras tanto el caso exacto (rojo) retorna  $N_{\text{eff}} = 3.045$  indicando que las mismas cantidades sí son modificadas. Nótese que para el caso exacto es necesario hacer seguimiento en el tiempo de la densidad de energía relativista  $\rho_R = \rho_\gamma + \rho_\nu$  por medio de la ecuación de continuidad y de la función de distribución de los neutrinos  $f_\nu(p)$  a través de la ecuación de Boltzmann.

## 2.2 Número Efectivo de Especies de Neutrinos

El valor teórico del número efectivo de especies de neutrinos  $N_{\text{eff}}$  dentro del Modelo Estándar de cosmología es definido como la razón entre la densidad de energía de neutrinos respecto a la de fotones cuando se ha alcanzado la temperatura  $T$  inferior a la masa del electrón  $m_e = 0.511$  MeV [1]. Así se asegura que el proceso de desacoplamiento de los neutrinos y de aniquilación de pares  $e^\pm$  haya concluido, de modo que  $N_{\text{eff}}$  indicaría características relevantes sobre del universo temprano a escalas de  $T \sim 1$  MeV y  $t \sim 1$  s.

$$\left. \frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma} \right|_{\frac{T}{m_e} \rightarrow 0} = \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} N_{\text{eff}}. \quad (2.8)$$

Para determinar  $N_{\text{eff}}$  es necesario solucionar el sistema de ecuaciones integro-diferenciales acopladas de Continuidad–Boltzmann para el periodo de tiempo relevante, es decir  $T \sim \mathcal{O}(100) \rightarrow T \sim \mathcal{O}(0.01)$  MeV. El sistema de ecuaciones está compuesto por la ecuación de continuidad que sigue la evolución de la densidad de energía total del universo  $\rho_R$  y el sistema de ecuaciones relativistas de Boltzmann para las funciones de distribución de los neutrinos  $f_{\nu_i}(p)$ , con  $i = e, \mu(\tau)$ , que pierden su condición de equilibrio dadas las interacciones débiles residuales entre el plasma electrónico que desaparece y los neutrinos más energéticos. Después de la aniquilación de pares  $e^\pm$  la densidad de energía relativista contenía aportaciones sólo de fotones y neutrinos  $\rho_R = \rho_\gamma + \rho_\nu$  que no interactúan propagándose libremente con sus temperaturas relacionadas por la razón  $T/T_\nu \approx 1.401$ . De la ec. 2.8 para el caso instantáneo se tiene que

$$\rho_R = \rho_\gamma + \rho_\nu = \rho_\gamma \left( 1 + \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} 3 \right), \quad (2.9)$$

donde se ha usado explícitamente la razón entre densidades de energía en el caso instantáneo de neutrinos y fotones  $\rho_\nu/\rho_\gamma = 3(7/8)(T_\nu/T)^4$  de la ec. 2.5. La aportación a la densidad de energía de cada estado posible de las tres especies de neutrinos es  $g_\nu = 6$  respecto a lo que aporta cada estado posible de fotones  $g_\gamma = 2$ . Sin embargo, esto es válido si se considera que son exactamente tres las especies de partículas de tipo neutrino, si es cierto el límite de desacoplamiento instantáneo, y si la función de distribución de los neutrinos se puede modelar con la estadística FD sin masa y con potenciales químicos  $\mu$  nulos. Se define el número efectivo de especies de neutrinos  $N_{\text{eff}}$  que parametriza cualquier variación en la aportación de los neutrinos a la densidad de energía relativista

dados los posibles grados de libertad extra de tipo neutrino  $g_\nu$  y la razón entre las temperaturas  $(T_\nu/T)$ . En general la densidad de energía relativista toma la siguiente forma

$$\rho_R = \rho_\gamma \left( 1 + \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} N_{\text{eff}} \right), \quad (2.10)$$

que retorna la ec. 2.8. Se puede escribir  $N_{\text{eff}}$  de manera mucho más práctica para reportar los valores numéricos estándar en términos de las variaciones de la densidad de energía de los neutrinos y la temperatura de los fotones respecto al caso instantáneo [20]. De la ec. 2.10, definiendo las variaciones de la densidad de energía respecto a la de equilibrio como  $\delta\rho_\nu = \rho_\nu - \rho_\nu^0$  y la temperatura adimensional de fotones  $z = a(t)T$ , se puede escribir  $N_{\text{eff}}$  como sigue

$$N_{\text{eff}} = \left( \frac{z_0}{z_{\text{fin}}} \right)^4 \left( 3 + \frac{\delta\rho_{\nu_e}}{\rho_\nu^0} + \frac{\delta\rho_{\nu_\mu}}{\rho_\nu^0} + \frac{\delta\rho_{\nu_\tau}}{\rho_\nu^0} \right), \quad (2.11)$$

donde  $z_0 = (11/4)^{1/3} \approx 1.401$  y  $\rho_\nu^0$  está dada por la distribución FD, ec. 2.5. Las ecuaciones del sistema Continuidad–Boltzmann permiten calcular el caso exacto y determinar finalmente  $N_{\text{eff}}$  así (i) como el sistema de ecuaciones de Boltzmann retorna la función de distribución exacta de los neutrinos  $f_{\nu_i}(p)$  durante el proceso de desacoplamiento, el resultado permite calcular  $\rho_\nu$  por medio de la ec. 2.3 y consecuentemente  $\delta\rho_\nu$  definido arriba, (ii) la ecuación de continuidad retorna el valor exacto de la temperatura adimensional de fotones asintótico  $z_{\text{fin}}$ . Con los resultados numéricos de estas cantidades se reemplaza en la ec. 2.11 para determinar finalmente el valor de  $N_{\text{eff}}$ . Para el caso instantáneo, por ejemplo, se tiene que  $z_{\text{fin}} = z_0$  y las variaciones de la densidad de energía  $\delta\rho_\nu$  son nulas para las tres especies de neutrinos retornando exactamente  $N_{\text{eff}} = 3$ .

### 2.3 Ecuación de Boltzmann Relativista

La ecuación de Boltzmann fue descrita por primera vez dentro de la teoría cinética desarrollada por el físico austriaco Ludwig Boltzmann en el año 1872 [37]. Esta ecuación integro-diferencial permite predecir la evolución temporal de la función de distribución de un sistema de partículas dependiendo de los procesos de interacción entre las especies que componen el sistema. Los procesos microscópicos que caracterizan la dinámica del gas están contenidos en la parte *integral* de la ecuación de Boltzmann: la integral de colisión. De este modo, la ecuación de Boltzmann describe la evolución del sistema incluso cuando la condición de equilibrio no se garantiza, justo como sucede con las etapas tempranas del universo en expansión cuando los neutrinos se desacoplan y la aniquilación de pares  $e^\pm$  genera distorsiones no térmicas sobre  $f_{\nu_i}$ , con  $i = e, \mu, \tau$ . En general, la ecuación de Boltzmann puede escribirse como sigue [5]

$$\hat{L}[f] = \mathbf{C}[f], \quad (2.12)$$

donde  $\mathbf{C}[f]$  es la integral de colisión y  $\hat{L}[f]$  es el operador de Liouville que en su forma covariante relativista se escribe como

$$\hat{L}[f] = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha p^\mu p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\alpha}. \quad (2.13)$$

Debemos notar que el efecto de la gravitación está contenida únicamente dentro de la llamada conexión afín  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , que depende de las derivadas de la métrica  $g_{\mu\nu}$  RW, tal que la conexión afín se expresa en términos de  $H = \dot{a}/a$ . En términos generales la función de distribución es en realidad

dependiente de las coordenadas, del momento y de la energía, así  $f = f(x^\mu, P^\mu)$ , con  $x^\mu$  y  $P^\mu$  los cuadvectores de posición y momento respectivamente. Las condiciones de homogeneidad e isotropía del universo en la cosmología estándar implican que la función de distribución sólo depende del tiempo  $t$  y de la energía total de la especie  $E$  —equivalentemente su momento físico  $p$ — llevando a  $f = f(t, p)$ . Usando los elementos de la conexión afín  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  en términos del parámetro de Hubble  $H$ , la ecuación de Boltzmann relativista se establece en general como [38]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, p) - Hp \frac{\partial}{\partial p} f(t, p) = \mathbf{C}[f(p, t); f_i], \quad (2.14)$$

donde  $f_i(p)$  son las funciones de distribución de todas las partículas que interactúan con la especie descrita por  $f(t, p)$ . El parámetro de Hubble  $H$  depende del tiempo y se calcula con la ecuación de Friedmann con curvatura y constante cosmológica nula  $3M_{Pl}^2 H^2 = 8\pi\rho(T)$ , con  $\rho(T)$  dada por la ec. 2.3. Para cada función de distribución de las especies de partículas que *pierdan* su condición de equilibrio es necesario solucionar su respectiva ecuación de Boltzmann. Afortunadamente, el plasma electromagnético mantiene su distribución de equilibrio debido a las rápidas interacciones entre ambas especies. Durante todo el proceso de desacoplamiento los electrones son descritos por la distribución de FD, ec. 2.2. De modo que las tres especies de neutrinos constituyen un sistema de tres ecuaciones de Boltzmann para tres funciones de distribución  $f_{\nu_\alpha}(t, p)$ , con  $\alpha = e, \mu, \tau$ . La evaluación de la *integral de colisión*  $\mathbf{C}[f]$  retorna la tasa de procesos de interacción entre las especies de partículas del sistema e involucra procesos de creación y de aniquilación. En general, la integral de colisión se escribe como [34]

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[f_\psi] \equiv & -\frac{1}{2E_\psi} \sum_{X,Y} \int \prod_i d\Pi_{X_i} \prod_j d\Pi_{Y_j} (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi + p_X - p_Y) \times \\ & \left[ |\mathcal{M}|_{\psi+X \rightarrow Y}^2 f_\psi \prod_i f_{X_i} \prod_j [1 \pm f_{Y_j}] - |\mathcal{M}|_{Y \rightarrow \psi+X}^2 \prod_j f_{Y_j} [1 \pm f_\psi] \prod_i [1 \pm f_{X_i}] \right], \quad (2.15) \end{aligned}$$

donde  $d\Pi_{X_i} = d^3p_{X_i}/(2\pi)^3 2E_{X_i}$  y las cantidades  $X = \sum_i X_i$  y  $Y = \sum_j Y_j$  son las especies que interactúan con la especie de partículas  $\psi$ . La presencia de la función delta 4-dimensional asegura la conservación de energía y momento físicos; a menos que  $p_\psi + p_X = p_Y$  se satisfaga el integrando es nulo.  $|\mathcal{M}|^2$  es la amplitud de los dos tipos de procesos de interacción en este caso. Las expresiones  $(1 \pm f)$  son los factores estadísticos y se provienen del efecto bloqueo de Pauli para fermiones y de procesos de emisión estimulada para bosones [38]. El signo  $- (+)$  se usa para funciones de distribución  $f(t, p)$  de especies de fermiones (bosones). Consideremos ahora cuatro especies de partículas que interactúan como  $a + b \rightarrow c + d$  y  $c + d \rightarrow a + b$ . La integral de colisión para la especie de partículas  $a$  toma la forma

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}(f_a; f_b, f_c, f_d) \\ &= \frac{1}{E_a} \int d\Pi(p_b) d\Pi(p_c) d\Pi(p_d) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_c - p_d) \\ & \times \left[ |\mathcal{M}_{cd,ab}|^2 f_c(p_c, t) f_d(p_d, t) (1 \pm f_a(p_a, t)) (1 \pm f_b(p_b, t)) \right. \\ & \left. - |\mathcal{M}_{ab,cd}|^2 f_a(p_a, t) f_b(p_b, t) (1 \pm f_c(p_c, t)) (1 \pm f_d(p_d, t)) \right]. \quad (2.16) \end{aligned}$$



Existen dos aproximaciones que simplifican en gran medida la integral de colisión<sup>5</sup>. Asumiendo la invarianza T (o CP) –también llamada invarianza de inversión temporal– la suma total sobre los estados posibles de espín de la norma cuadrada de las amplitudes de interacción  $|\mathcal{M}|^2$  son iguales en ambos sentidos. Es decir  $|\mathcal{M}|_{\psi+X \rightarrow Y}^2 = |\mathcal{M}|_{Y \rightarrow \psi+X}^2 \equiv |\mathcal{M}|^2$ . De hecho, esta aproximación se usa para el caso de desacoplamiento de los neutrinos como veremos más adelante. Por otro lado, si se asume que las funciones de distribución están dadas por la aproximación de Maxwell se desprecian los factores estadísticos  $(1 \pm f)$  pero no se tiene en cuenta para el desacoplamiento de neutrinos debido a que se busca la solución exacta para las funciones de distribución de los neutrinos  $f_\nu(p)$ , inicialmente dadas por la distribución de FD.

## 2.4 Correcciones QED

Hasta ahora los dos procesos relevantes que modifican  $N_{\text{eff}}$  son el desacoplamiento de neutrinos *no* instantáneo y aniquilación de pares  $e^\pm$ . La temperatura adimensional de fotones  $z$  cambia respecto al caso instantáneo  $z_0 = 1.401$  al transferir entropía en una cantidad apreciable al gas de neutrinos. Sin embargo, existe otro fenómeno físico que modifica el valor asintótico de  $z$ : las correcciones a la ecuación de estado de la electrodinámica cuántica a temperatura finita (FTQED) [39, 14]. Las correcciones QED son de carácter perturbativo en que el término principal de la expansión de la función de partición gran canónica  $Z$  domina y retorna las ecuaciones respectivas al gas ideal. Los términos que aportan apreciablemente a  $N_{\text{eff}}$  son de orden  $\mathcal{O}(e^2)$  y  $\mathcal{O}(e^3)$ , con  $e$  la carga eléctrica elemental [17]. Así, tales correcciones modifican la ecuación de continuidad que dicta la evolución en el tiempo de la densidad de energía relativista y, consecuentemente, la temperatura adimensional de fotones  $z$  evoluciona diferentemente convergiendo a un valor asintótico inferior respecto al caso instantáneo  $z_0$ . En general, las correcciones QED generan cambios sobre la ecuación de continuidad, sobre el parámetro de Hubble ( $H \sim \sqrt{\rho}$ ) y sobre la relación de dispersión del plasma electromagnético  $E_i^2 = p_i^2 + m_i^2$ , con  $i = e, \gamma$ . Macroscópicamente, la presión  $P$  y densidad de energía  $\rho$  disminuyen y veremos que el efecto físico de las correcciones QED se debe a los procesos de aniquilación-producción de pares  $e^\pm$  y a la dispersión de Compton. Finalmente, escribimos explícitamente las ecuaciones que se modifican dadas las correcciones QED.

Algunas correcciones relevantes a la ecuación de estado del plasma electromagnético están dadas por la teoría a temperatura finita de la electrodinámica cuántica (FTQED), es decir a temperatura diferente de cero. La aproximación del gas ideal se desprecia al tener en cuenta los efectos de la interacción de los campos que componen el plasma electromagnético con su entorno. En este caso las correcciones QED generan efectos apreciables sobre el sistema macroscópico involucrando modificaciones en la presión  $P$  y la densidad de energía  $\rho$ . Microscópicamente se sabe que las interacciones entre electrones y fotones modifican sus relaciones de dispersión y, consecuentemente, la ecuación de estado del plasma. Así, el análisis de la teoría FTQED modifica la ecuación de continuidad a través de las correcciones relevantes a segundo y tercer orden en  $e$  de la expansión de la función de partición [17]. En cuanto a  $N_{\text{eff}}$  las correcciones QED implican que la energía disponible a transportar por la aniquilación de pares  $e^\pm$  hacia los fotones decrece imprimiendo la variación característica sobre  $N_{\text{eff}}$  dado por  $\delta N_{\text{eff}} \sim 0.011$  [39, 14]. Este efecto sobre  $N_{\text{eff}}$  se estudió por primera vez en [15] donde se usa la receta de [39] con modificaciones a la masa efectiva de los electrones  $\delta m_e^2$  y de los fotones  $\delta m_\gamma^2$  dependientes de la temperatura para las correcciones relevantes.

<sup>5</sup>La monografía [29] brinda una excelente profundización de la teoría referente a la ecuación de Boltzmann relativista en el universo en expansión.

$$\ln Z^{(2)} + \ln Z^{(3)} = -\frac{1}{2} \left( \text{diagrama de un bucle con una línea ondulada} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \text{diagrama de un bucle con dos líneas onduladas} \right) - \frac{1}{3} \left( \text{diagrama de un bucle con tres líneas onduladas} \right) + \frac{1}{4} \left( \text{diagrama de un bucle con cuatro líneas onduladas} \right) + \dots \right]$$

Figura 2.2: Procesos relevantes en *loop* de la teoría QED a temperatura finita a la expansión de la función de partición gran canónica  $Z$  del plasma QED considerados para el cálculo de  $N_{\text{eff}}$ .

La correcta aproximación al cálculo de las correcciones QED comienza con la expansión de la función de partición  $Z$  del plasma electromagnético a temperaturas finitas a través de el potencial de energía libre de Helmholtz  $F = -\ln Z$ . Tal que  $\ln Z \sim e$ , la carga eléctrica fundamental y constante de acoplamiento de las interacciones QED. Así,  $\ln Z = \ln Z^{(0)} + \ln Z^{(2)} + \ln Z^{(3)} + \dots$  donde los primeros términos se representan en la fig. 2.2 como diagramas tipo *loop*<sup>6</sup>. El primer término  $\ln Z^{(0)}$  de la expansión de la función de partición retorna las expresiones para la presión  $P$  y densidad de energía  $\rho$  en la aproximación del gas ideal

$$P^{(0)} = \frac{T}{\pi^2} \int_0^\infty dp \, p^2 \ln \left[ \frac{(1 + \exp(-E_e/T))^2}{1 - \exp(-E_\gamma/T)} \right], \quad (2.17)$$

$$\rho^{(0)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dp \, p^2 \left[ \frac{2E_e}{\exp(E_e/T) + 1} + \frac{E_\gamma}{\exp(E_\gamma/T) - 1} \right], \quad (2.18)$$

donde  $E_e^2 = p^2 + m_e^2$  y  $E_\gamma = p$ . Las relaciones estándar de la termodinámica permiten obtener las mismas expresiones a cualquier término extra  $\mathcal{O}(e^n)$  de la expansión de la función de partición  $Z$ . En general se tiene

$$P^{(n)} = \frac{T}{V} \ln Z^{(n)}, \quad (2.19)$$

$$\rho^{(n)} = \frac{T^2}{V} \frac{\partial}{\partial T} \ln Z^{(n)} = -P^{(n)} + T \frac{\partial}{\partial T} P^{(n)}. \quad (2.20)$$

Macroscópicamente, el efecto de las correcciones QED se entiende como una leve disminución de la densidad de energía  $\rho$  y la presión  $P$  del plasma electromagnético, causando que el calentamiento de los fotones disminuya pues hay menos energía que pueda ser transportada desde el plasma de electrones al gas de fotones. Se estimó que la modificación en la temperatura adimensional asintótica de los fotones  $\delta z_{\text{fin}} \equiv z - z_0 \approx -0.001$  al agregar los efectos de las correcciones QED, lo que indica que al menos los dos primeros términos en la expansión de  $Z$  aportan apreciablemente sobre el resultado teórico del número efectivo de neutrinos,  $\delta N_{\text{eff}} \approx 0.01$  [39]. Las correcciones QED para electrones y fotones están dadas por el mismo orden de magnitud y los efectos son considerados de igual manera. Un inconveniente con los diagramas de la fig. 2.2 es que no brindan una imagen física clara a nivel microscópico de la razón de la disminución de la densidad de energía  $\rho$  y la presión  $P$ . Es necesario interpretar los procesos en *loop* de manera diferente para ganar cierta intuición sobre lo que ocurre físicamente dadas las correcciones QED. Por ejemplo, el diagrama a orden  $\mathcal{O}(e^2)$  puede ser dividido en dos diagramas distintos antes de integrar sobre todo el espacio de momento y pensar en ellos como dos procesos físicos bien conocidos en QED: la dispersión de Compton y la producción-aniquilación de pares; ambos procesos se representan en la fig. 2.3.

<sup>6</sup>Se debe tener en cuenta que la expansión de  $Z$  se hace en realidad en términos de la constante de estructura fina  $\alpha = e^2/4\pi$  que llevaría del término  $\mathcal{O}(e^2)$  al término  $\mathcal{O}(e^4)$ , sin embargo la teoría perturbativa indica que surge el término  $\mathcal{O}(e^3)$  debido a la *resumación* de todos los términos de la expansión [17].



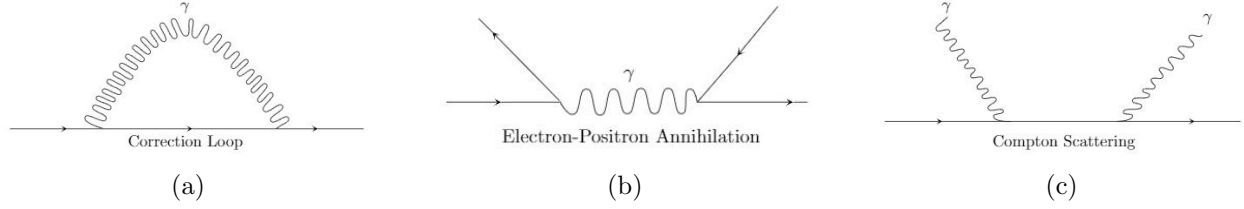


Figura 2.3: Interpretación del proceso en loop dado por el término a orden  $\mathcal{O}(e)$  de la expansión de  $\ln Z$ . a) Antes de integrar sobre el todo el espacio de momento el loop que puede ser dividido en dos procesos físicos bien conocidos: b) aniquilación-producción de pares  $e^\pm$  y c) dispersión de Compton.

Con esto se obtiene una idea más clara del efecto físico de las correcciones QED sobre el plasma electromagnético. La disminución en la presión está relacionada con la corrección a la masa efectiva del electrón y del fotón debido los procesos básicos de QED: dispersión de Compton y aniquilación-producción de pares  $e^\pm$ . La masa efectiva del fotón se entiende como el cambio en la frecuencia del plasma debido a que la dispersión de Compton modifica la longitud de onda de los fotones. A esto se le conoce como auto-energía que, debido a la interacción de las partículas con su entorno, pueden adquirir una modificación  $\delta m_{e,\gamma}^2$  en su energía en la relación de dispersión. Se ha estudiado detalladamente el efecto de las correcciones QED para encontrar con alta precisión las variaciones de  $N_{\text{eff}}$  desde la teoría FTQED. Las correcciones a  $\mathcal{O}(e^2)$  se han usado en la literatura generando el valor estándar de  $N_{\text{eff}} = 3.0433$ . La corrección a orden  $\mathcal{O}(e^4)$  no aporta apreciablemente para la precisión a nivel porcentual del valor de  $N_{\text{eff}}$ . En cambio, la corrección a  $\mathcal{O}(e^3)$  sí aporta apreciablemente dada la nueva exigencia en la precisión de  $N_{\text{eff}}$ , donde se ha estimado que modifica el número efectivo de neutrinos como  $\delta N_{\text{eff}} \sim -0.001$ . Este resultado se ha comprobado numéricamente por el más reciente estudio de desacoplamiento de neutrinos de alta precisión [1], basado en el estudio de las correcciones QED sobre  $N_{\text{eff}}$  [17].

Las ecuaciones del sistema se modifican al considerar las correcciones QED así (i) la ecuación de continuidad, ec. 2.1; la densidad de energía relativista  $\rho$  y la presión  $P$  del universo se modifica por la variación de  $\rho$  en el tiempo, (ii) la relación de dispersión de los  $e^\pm$  y los fotones; las expresiones de energía relativista de las partículas del plasma electromagnético se modifican a través de  $\delta m_{e,\gamma}^2$  definiendo la masa efectiva de electrones y fotones y (iii) el parámetro de Hubble  $H \sim \rho^{1/2}$  dadas las variaciones de la densidad de energía del plasma electromagnético. Estudiamos aquí únicamente el término a orden  $\mathcal{O}(e^2)$  de la expansión de  $\ln Z$ . De la teoría QED para los términos de la expansión se determinan las correcciones a la masa efectiva de los electrones  $\delta m_e^2$  y de los fotones  $\delta m_\gamma^2$  que modifican sus relaciones de dispersión. Para la corrección a la masa del electrón se tiene que

$$\delta m_e^2 = \frac{2\pi\alpha T^2}{3} + \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{E_k} \frac{1}{\exp(E_k/T) + 1} - \frac{2m_e^2\alpha}{\pi p} \int_0^\infty dk \frac{k}{E_k} \log \left| \frac{p+k}{p-k} \right| \frac{1}{\exp(E_k/T) + 1}, \quad (2.21)$$

donde  $E_k \equiv \sqrt{k^2 + m_e^2}$ . Aquí es importante mencionar una aproximación extra que se propone en los primeros trabajos sobre el efecto de las correcciones QED. El tercer término de  $\delta m_e^2$  se desprecia debido a que al promediar sobre la distribución de equilibrio de los  $e^\pm$  se encuentra que no aporta más del 10 % al valor final de la corrección<sup>7</sup> [14, 15]. Por otro lado, la masa efectiva de los fotones

<sup>7</sup>Se estudia en profundidad las consecuencias de la aproximación del término logarítmico en [17].

varía como

$$\delta m_\gamma^2 = \frac{8\alpha}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{E_k} \frac{1}{\exp(E_k/T) + 1}, \quad (2.22)$$

de modo que las correcciones sobre la relación de dispersión de electrones y fotones son  $E_i^2 = k^2 + m_i^2 + \delta m_i^2$ , donde  $i = e, \gamma$ . Este efecto es precisamente el que modifica la densidad de energía  $\rho$  y presión  $P$  del plasma electromagnético. Dada la expansión a primer orden en términos de  $\delta m_i^2$  se encuentra que las correcciones QED sobre las cantidades macroscópicas son  $P = P^0 + P^{\text{int}}$ , donde  $P^0$  es la presión para el gas ideal y  $P^{\text{int}}$  es la corrección a la presión dada por

$$P^{\text{int}} = - \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} \left[ \frac{k^2}{E_k} \frac{\delta m_e^2(T)}{\exp(E_k/T) + 1} + \frac{k}{2} \frac{\delta m_\gamma^2(T)}{\exp(k/T) - 1} \right], \quad (2.23)$$

tal que es posible encontrar la densidad de energía  $\rho = \rho^0 + \rho^{\text{int}}$  a través de la relación estándar de la termodinámica 2.20. Consecuentemente, las modificaciones a la ecuación de continuidad se determinan con la ec. 2.1 y el parámetro de Hubble con la ecuación de Friedmann para curvatura y constante cosmológica nula, de igual manera que se hizo en el caso que desprecia las correcciones QED.

## 2.5 Ecuaciones del Sistema

En vez de usar el tiempo y momento físico como variables del sistema es conveniente introducir las variables adimensionales  $x = ma(t)$ ,  $y = a(t)p$  y  $z = a(t)T$ , donde  $m$  es una masa de referencia arbitraria comúnmente tomada como  $m = m_e$ , la masa del electrón.  $a(t)$  se normaliza tal que  $a(t) \rightarrow 1/T$  a altas temperaturas. Según la física del sistema (véase la sec. 2.1) son tres las cantidades que se modifican durante el proceso de desacoplamiento de los neutrinos: las funciones de distribución de los neutrinos  $f_{\nu_\alpha}(p)$  de cada sabor leptónico ( $e, \mu, \tau$ ) y la temperatura adimensional de los fotones  $z$ . La descripción completa del sistema está dada por tres ecuaciones integro-diferenciales acopladas que son (i) dos ecuaciones de Boltzmann para  $f_{\nu_e}(p)$  y  $f_{\nu_{\mu(\tau)}}(p)$  que sigue el proceso dinámico fuera del equilibrio de los neutrinos y (ii) la ecuación de continuidad para  $z$  que sigue la densidad de energía relativista, teniendo en cuenta las correcciones a la aportación de los neutrinos a través de  $f_{\nu_\alpha}(p)$  y las correcciones QED cuando así se especifique. Los neutrinos tauónicos ( $\nu_\tau$ ) y muónicos ( $\nu_\mu$ ) interactúan de la misma manera a temperatura  $T \sim 1$  MeV entonces se soluciona el sistema separadamente para  $f_{\nu_e}(p)$  y  $f_{\nu_x} \equiv f_{\nu_\mu, \nu_\tau}$ . Además, en ausencia de potenciales químicos los antineutrinos se comportan de igual manera que los neutrinos durante el proceso de desacoplamiento de modo que  $f_{\nu_\alpha} = f_{\bar{\nu}_\alpha}$  [38].

### 2.5.1 Ecuaciones de Boltzmann

En la sec. 2.3 se estableció la Ecuación de Boltzmann relativista en general y para interacciones del tipo  $a + b \rightarrow c + d$ . Para la solución del desacoplamiento de neutrinos las interacciones relevantes son  $e^+ + e^- \rightarrow \bar{\nu} + \nu$  y  $e + \nu \rightarrow e + \nu$ , etc. de modo que es válida la ec. 2.14 para este tipo de interacciones agregados en la integral de colisión  $\mathbf{C}[f]$ . El miembro izquierdo de la ecuación de Boltzmann se simplifica al usar las variables adimensionales al considerar que el operador de Liouville  $\hat{L}$  se puede escribir como el operador derivada total respecto al tiempo propio  $t$ . Así el sistema de ecuaciones de Boltzmann relevante para el desacoplamiento de neutrinos en términos de

Proceso	$2^{-5}G_F^{-2}S \mathcal{M} ^2$
$\nu_e + \bar{\nu}_e \longrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e$	$4(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)$
$\nu_e + \nu_e \longrightarrow \nu_e + \nu_e$	$2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)$
$\nu_e + \bar{\nu}_e \longrightarrow \nu_{\mu(\tau)} + \bar{\nu}_{\mu(\tau)}$	$(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)$
$\nu_e + \nu_{\mu(\tau)} \longrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_{\mu(\tau)}$	$(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)$
$\nu_e + \nu_{\mu(\tau)} \longrightarrow \nu_e + \nu_{\mu(\tau)}$	$(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)$
$\nu_e + \bar{\nu}_e \longrightarrow e^+ + e^-$	$4[g_L^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + g_R^2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + g_L g_R m_e^2(p_1 \cdot p_2)]$
$\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^-$	$4[g_L^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + g_R^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - g_L g_R m_e^2(p_1 \cdot p_3)]$
$\nu_e + e^+ \longrightarrow \nu_e + e^+$	$4[g_R^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + g_L^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - g_L g_R m_e^2(p_1 \cdot p_3)]$

Tabla 2.1: Elementos matriciales para varios procesos con neutrinos electrónicos. Aquí  $g_L = 1/2 + \sin^2 \theta_W$ ,  $g_R = \sin^2 \theta_W$  y  $\tilde{g}_L = g_L - 1 = -1/2 + \sin^2 \theta_W$  son los acoplos de corriente neutra para los fermiones elementales [11], donde  $\theta_W$  es el ángulo de Weinberg que es un parámetro de física de partículas medido experimentalmente tal que  $\sin^2 \theta_W = 0.23$ .

Proceso	$2^{-5}G_F^{-2}S \mathcal{M} ^2$
$\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu \longrightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$	$4(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)$
$\nu_\mu + \nu_\mu \longrightarrow \nu_\mu + \nu_\mu$	$2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)$
$\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu \longrightarrow \nu_{e(\tau)} + \bar{\nu}_{e(\tau)}$	$(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)$
$\nu_\mu + \nu_{e(\tau)} \longrightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_{e(\tau)}$	$(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)$
$\nu_\mu + \bar{\nu}_{e(\tau)} \longrightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_{e(\tau)}$	$(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)$
$\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu \longrightarrow e^+ + e^-$	$4[\tilde{g}_L^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + g_R^2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + \tilde{g}_L g_R m_e^2(p_1 \cdot p_2)]$
$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_\mu + e^-$	$4[\tilde{g}_L^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + g_R^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - \tilde{g}_L g_R m_e^2(p_1 \cdot p_3)]$
$\nu_\mu + e^+ \longrightarrow \nu_\mu + e^+$	$4[g_R^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + \tilde{g}_L^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - \tilde{g}_L g_R m_e^2(p_1 \cdot p_3)]$

Tabla 2.2: Elementos matriciales para varios procesos con neutrinos muónicos. Estos elementos también aplican para  $\nu_\tau$ . Aquí  $g_L = 1/2 + \sin^2 \theta_W$ ,  $g_R = \sin^2 \theta_W$  y  $\tilde{g}_L = g_L - 1 = -1/2 + \sin^2 \theta_W$  son los acoplos de corriente neutra para los fermiones elementales [11], donde  $\theta_W$  es el ángulo de Weinberg que es un parámetro de física de partículas medido experimentalmente tal que  $\sin^2 \theta_W = 0.23$ .

las variables adimensionales es

$$\frac{df_{\nu_\alpha}}{dt} = \frac{\partial f_{\nu_\alpha}}{\partial t} - Hp \frac{\partial f_{\nu_\alpha}}{\partial p} = xH \frac{\partial f_{\nu_\alpha}}{\partial x} = \mathbf{C}[f_{\nu_\alpha}; f_{\nu_\beta}, f_{e^\pm}], \quad (2.24)$$

donde  $\alpha, \beta = e, \mu(\tau)$ . Entonces tenemos dos ecuaciones de Boltzmann, una para cada especie de neutrinos caracterizadas por las funciones  $f_{\nu_e}$  y  $f_{\nu_\mu}$ . Cada proceso de interacción relevante para el sistema posee una amplitud  $|\mathcal{M}|^2$  diferente; un consolidado de los procesos y sus respectivas amplitudes a agregar en la ec. 2.24 en términos de acoplos de corriente neutra para los fermiones elementales  $g_L$  y  $g_R$  son establecidos en [11]. Explícitamente las amplitudes de interacción para neutrinos electrónicos se imprimen en la tabla 2.1 y para los neutrinos muónicos (tauónicos) en la tabla 2.2. Considerando que los procesos de interacción son invariantes bajo transformaciones de *inversión temporal* (T, o CP) se encuentra que la integral de colisión se simplifica notablemente porque las amplitudes de interacción tendrían el mismo módulo en ambos sentidos (véase la

discusión de la sección 2.3). La integral de colisión  $\mathbf{C}[f]$  se escribe entonces como [38]

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}(f_{\nu_\alpha}; f_b, f_c, f_d) \\ &= \frac{1}{p_{\nu_\alpha}} \int d\Pi(p_b) d\Pi(p_c) d\Pi(p_d) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\nu_\alpha} + p_b - p_c - p_d) \\ & \times S |\mathcal{M}_{\nu_\alpha b, cd}|^2 \left[ f_c f_d (1 - f_{\nu_\alpha})(1 - f_b) - f_{\nu_\alpha} f_b (1 - f_c)(1 - f_d) \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $S$  es el conocido factor de simetrización que se reemplaza por  $1/2!$  o  $2$  dependiendo si el proceso es para pares de partículas idénticas en los estados inicial y final o sólo en el estado inicial respectivamente. Para solucionar la ec. 2.24 se usa el método de simplificación introducido por [11] en que se reduce la integral de colisión  $\mathbf{C}[f]$  de nueve dimensiones a dos dimensiones en el espacio de fase dadas las especies que se involucran en el proceso de desacoplamiento. Los detalles del método de reducción de la integral de colisión se dan en el Apéndice A. Luego de incluir las amplitudes de interacción  $|\mathcal{M}|^2$  se encuentra el sistema explícito de dos ecuaciones de Boltzmann a solucionar teniendo en cuenta únicamente transporte de energía desde el sector electromagnético al de neutrinos en términos de las variables adimensionales es

$$\begin{aligned} xH \frac{\partial f_{\nu_e}^{(1)}}{\partial x} &= \frac{G_F^2}{2\pi^3 y_1} \left( \frac{m_e}{x} \right)^3 \int dy_2 y_2 dy_3 y_3 dy_4 y_4 \delta(\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - \bar{E}_3 - \bar{E}_4) \times \\ & \left\{ F[f_{\nu_e}^{(1)}, f_{\nu_e}^{(2)}, f_{\nu_e}^{(3)}, f_{\nu_e}^{(4)}] [6d_1 - 4d_2(1, 4) - 4d_2(2, 3) + 2d_2(1, 2) + 2d_2(3, 4) + 6d_3] \right. \\ & + F[f_{\nu_e}^{(1)}, f_{\nu_\mu}^{(2)}, f_{\nu_e}^{(3)}, f_{\nu_\mu}^{(4)}] [4d_1 + 2d_2(1, 2) + 2d_2(3, 4) - 2d_2(1, 4) - 2d_2(2, 3) + 4d_3] \\ & + F[f_{\nu_e}^{(1)}, f_{\nu_e}^{(2)}, f_{\nu_\mu}^{(3)}, f_{\nu_\mu}^{(4)}] [2d_1 - 2d_2(2, 3) - 2d_2(1, 4) + 2d_3] + F[f_{\nu_e}^{(1)}, f_e^{(2)}, f_{\nu_e}^{(3)}, f_e^{(4)}] \times \\ & [4(g_L^2 + g_R^2)(2d_1 - d_2(2, 3) - d_2(1, 4) + 2d_2(3, 4) + d_2(1, 2) + 2d_3) - 8g_L g_R m_e^2 \left( \frac{m_e}{x} \right)^{-2} \frac{d_1 - d_2(1, 3)}{E_2 E_4}] \\ & + F[f_{\nu_e}^{(1)}, f_{\nu_e}^{(2)}, f_e^{(3)}, f_e^{(4)}] \left[ 4g_L^2(d_1 - d_2(2, 3) - d_2(1, 4) + d_3) + 4g_R^2(d_1 - d_2(2, 4) - d_2(1, 3) + d_3) \right. \\ & \left. \left. + 4g_L g_R m_e^2 \left( \frac{m_e}{x} \right)^{-2} \frac{d_1 + d_2(1, 2)}{E_3 E_4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} xH \frac{\partial f_{\nu_\mu}^{(1)}}{\partial x} &= \frac{G_F^2}{2\pi^3 y_1} \left( \frac{m_e}{x} \right)^3 \int dy_2 y_2 dy_3 y_3 dy_4 y_4 \delta(\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - \bar{E}_3 - \bar{E}_4) \times \\ & \left\{ F[f_{\nu_\mu}^{(1)}, f_{\nu_\mu}^{(2)}, f_{\nu_\mu}^{(3)}, f_{\nu_\mu}^{(4)}] [9d_1 - 6d_2(1, 4) - 6d_2(2, 3) + 3d_2(1, 2) + 3d_2(3, 4) + 9d_3] \right. \\ & + F[f_{\nu_\mu}^{(1)}, f_{\nu_e}^{(2)}, f_{\nu_\mu}^{(3)}, f_{\nu_e}^{(4)}] [2d_1 + d_2(1, 2) + d_2(3, 4) - d_2(1, 4) - d_2(2, 3) + 2d_3] \\ & + F[f_{\nu_\mu}^{(1)}, f_{\nu_\mu}^{(2)}, f_{\nu_e}^{(3)}, f_{\nu_e}^{(4)}] [d_1 - d_2(2, 3) - d_2(1, 4) + 2d_3] + F[f_{\nu_\mu}^{(1)}, f_e^{(2)}, f_{\nu_\mu}^{(3)}, f_e^{(4)}] \times \\ & [4(\tilde{g}_L^2 + g_R^2)(2d_1 - d_2(2, 3) - d_2(1, 4) + 2d_2(3, 4) + d_2(1, 2) + 2d_3) - 8\tilde{g}_L g_R m_e^2 \left( \frac{m_e}{x} \right)^{-2} \frac{d_1 - d_2(1, 3)}{E_3 E_4}] \\ & + F[f_{\nu_\mu}^{(1)}, f_{\nu_\mu}^{(2)}, f_e^{(3)}, f_e^{(4)}] \left[ 4\tilde{g}_L^2(d_1 - d_2(2, 3) - d_2(1, 4) + d_3) + 4g_R^2(d_1 - d_2(2, 4) - d_2(1, 3) + d_3) \right. \\ & \left. \left. + 4\tilde{g}_L g_R m_e^2 \left( \frac{m_e}{x} \right)^{-2} \frac{d_1 + d_2(1, 2)}{E_3 E_4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

con la siguiente notación:  $d_1 = D_1$ ,  $d_2(3, 4) = D_2(3, 4)/E_3E_4$ ,  $d_3 = D_3/E_1E_2E_3E_4$ ,  $E = (m_e/x)\bar{E}$ ,  $f_\alpha(y_i) = f_\alpha^{(i)}$  y  $F[f_a^{(1)}, f_b^{(2)}, f_c^{(3)}, f_d^{(4)}] = f_c^{(3)}f_d^{(4)}(1 - f_a^{(1)})(1 - f_b^{(2)}) - f_a^{(1)}f_b^{(2)}(1 - f_c^{(3)})(1 - f_d^{(4)})$ . Las funciones  $D_k$  se definen en el Apéndice A durante el proceso de reducción de la integral de colisión. No se incluyen la evaluación para  $D_1$  y  $D_3$  porque estas funciones son simétricas respecto a cualquier permutación de los argumentos. Nótese que cada término de las integrales de colisión en las ecs. 2.26 y 2.27 representa una de las cinco interacciones independientes consideradas en la solución del desacoplamiento de neutrinos dadas en las tablas 2.1 y 2.2. Se tiene entonces un sistema de dos ecuaciones integro-diferenciales a solucionar para tres variables dependientes: las dos funciones de distribución y la temperatura adimensional de los fotones  $z$ . La ecuación de continuidad en términos de las variables adimensionales sigue la evolución de la densidad de energía relativista y, en términos de las variables adimensionales, puede ser escrita como una ecuación diferencial para la temperatura adimensional de los fotones  $z$ . Definamos entonces la ecuación de continuidad para completar el sistema de ecuaciones.

### 2.5.2 Ecuación de Continuidad

La ecuación de continuidad (ec. 2.1) es una de las tres ecuaciones fundamentales de la cosmología; junto con la ecuación de Friedmann y la ecuación de aceleración, que describe la evolución de la densidad de energía relativista  $\rho_R$  y complementa el proceso de solución del sistema de ecuaciones de Boltzmann para el desacoplamiento de los neutrinos. En el Modelo Estándar de cosmología las ecuaciones fundamentales determinan la dinámica del universo en términos de el factor de escala  $a(t)$ , su derivada  $\dot{a}(t)$  y la densidad de energía  $\rho(t)$ . Recuerde que los fotones aportan a la densidad de energía relativista como  $\rho_\gamma \sim T^4$ , ec. 2.5; así que la ecuación de continuidad escrita en términos de las variables adimensionales se reduce a una ecuación diferencial únicamente para la temperatura adimensional de los fotones  $z = T/T_\nu$ . Primero, la ec. 2.1 se transforma en la siguiente expresión para la densidad de energía relativista  $\bar{\rho} \equiv \rho(x/m)^4$  adimensional, de donde se puede extraer el efecto de la expansión cósmica al usar las variables comóviles como sigue

$$x \frac{d\bar{\rho}}{dx} = \bar{\rho} - 3\bar{P}, \quad (2.28)$$

donde  $\bar{P} \equiv P(x/m)^4$  es la presión adimensional del plasma. Al sumar todas las aportaciones dadas las funciones de distribución de las componentes del plasma e integrar sobre el momento adimensional  $y$  con la ec. 2.3, la forma exacta de estas cantidades se escriben como

$$\bar{\rho} = \frac{\pi^2 z^4}{15} + \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty dy \frac{y^2 \bar{E}_e}{\exp(\bar{E}_e/z) + 1} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dy y^3 [f_{\nu_e}(y) + 2f_{\nu_\mu}(y)], \quad (2.29)$$

$$\bar{P} = \frac{\pi^2 z^4}{45} + \frac{2}{3\pi^2} \int_0^\infty dy \frac{1}{\bar{E}_e} \frac{y^4}{\exp(\bar{E}_e/z) + 1} + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty dy y^3 [f_{\nu_e}(y) + 2f_{\nu_\mu}(y)], \quad (2.30)$$

donde  $\bar{E}_e^2 = y^2 + z^2$  y las funciones  $f_{\nu_\alpha}(p)$ , con  $\alpha = e, \mu(\tau)$ , son las funciones de distribución de neutrinos; en el caso instantáneo estas funciones son exactamente distribuciones de FD. Así, el limite de desacoplamiento instantáneo elimina la aportación de los neutrinos a la ecuación de continuidad que contribuyen como  $df_{\nu_\alpha}/dx$  como veremos más adelante.

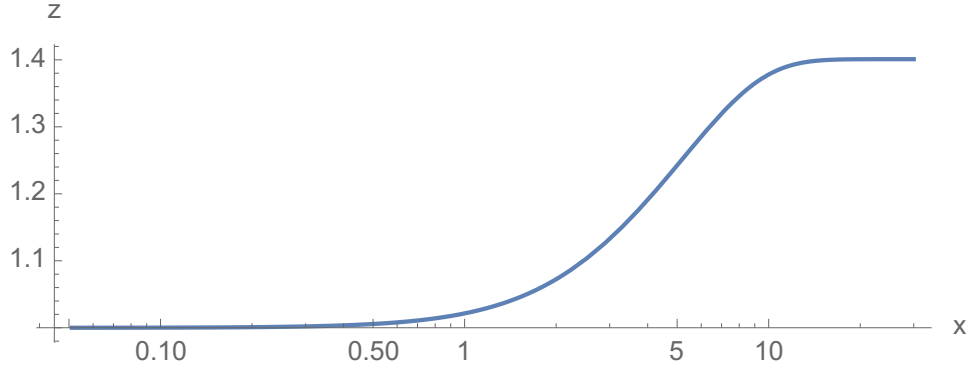


Figura 2.4: Evolución de la temperatura comóvil de los fotones en el límite de desacoplamiento instantáneo. Solución numérica encontrada con el código numérico [Neff-Mathematica](#).

### Desacoplamiento Instantáneo

Despreciando la aportación de neutrinos a la ecuación de continuidad debido al Límite de Desacoplamiento Instantáneo y asumiendo que ya se han desacoplado se obtiene la siguiente expresión al reemplazar las cantidades exactas de  $\bar{\rho}$  y  $\bar{P}$  (ecs. 2.29 y 2.30) en la ecuación de continuidad 2.28

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{x}{z} F_1(x/z)}{\frac{x^2}{z^2} F_1(x/z) + F_2(x/z) + \frac{2\pi^4}{15}}, \quad (2.31)$$

donde las funciones  $F_i$  están dadas por

$$F_1(\tau) \equiv \int_0^\infty d\omega \, \omega^2 \frac{\exp(\sqrt{\omega^2 + \tau^2})}{(\exp \sqrt{\omega^2 + \tau^2} + 1)^2}, \quad (2.32)$$

$$F_2(\tau) \equiv \int_0^\infty d\omega \, \omega^4 \frac{\exp(\sqrt{\omega^2 + \tau^2})}{(\exp \sqrt{\omega^2 + \tau^2} + 1)^2}. \quad (2.33)$$

Aunque la temperatura adimensional asintótica de fotones  $z_{\text{fin}} = T/T_\nu$  puede ser determinada por argumentos de conservación de entropía que retorna  $z_{\text{fin}} = 1.401$  (véase la sec. 2.1) también es posible calcular el proceso numéricamente de manera sencilla. Solucionando con MATHEMATICA la ec. 2.31 con condición inicial  $z_{\text{in}} = 1.00003$  dentro del rango  $x \in (m_e/10 \text{ MeV}, 30)$  se encuentra la evolución de  $z$  como se muestra en la fig. 2.4. Se encuentra el valor asintótico  $z_{\text{fin}} = 1.401$  como se esperaba (véase la fig. 2.1) indicando que la temperatura de los fotones incrementa respecto a  $1/a(t)$  a causa de la transferencia de entropía desde el plasma de electrones a los fotones hasta converger aproximadamente en  $x \sim 15$ .

### Desacoplamiento No Instantáneo (NID)

En el caso *no* instantáneo se tienen en cuenta las distorsiones de las funciones de distribución de los neutrinos en la ecuación de continuidad a través de las aportaciones de tipo  $df_{\nu_\alpha}/dx$  en la integral

respecto al momento adimensional  $y$ . Así, la ecuación de continuidad se puede escribir como [38]

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{x}{z}F_1(x/z) - \frac{1}{2z^3} \int_0^\infty dy y^3 \left( \frac{df_{\nu_e}}{dx} + 2 \frac{df_{\nu_x}}{dx} \right)}{\frac{x^2}{z^2}F_1(x/z) + F_2(x/z) + \frac{2\pi^4}{15}}. \quad (2.34)$$

En [11] se solucionó el sistema de ecuaciones de Boltzmann, ecs. 2.26 y 2.27 junto con la ecuación de continuidad 2.34 para determinar la aportación del desacoplamiento no instantáneo al valor teórico de  $N_{\text{eff}}$  encontrando  $\delta N_{\text{eff}} \sim 0.034$ . Nótese que  $df_{\nu_\alpha}/dx$  es una función del momento adimensional  $y$  y se modifica cada vez que la variable temporal  $x$  incrementa. Para determinar esta función se usan los resultados que retornan las ecuaciones de Boltzmann para cada valor de  $x$  que son calculadas dentro del espacio de momento  $y$ . Numéricamente esto quiere decir que las ecuaciones de Boltzmann al retornar los valores de las funciones  $df_{\nu_\alpha}/dx$  para valores discretizados en el rango  $y \in (0.01, 20)$  permiten interpolar la función derivada de  $f_{\nu_\alpha}$  con argumento  $y$  en el mismo rango para un valor específico de  $x$ . Esta función evoluciona y dicta las distorsiones térmicas que sufre el espectro de neutrinos. Finalmente, se integra respecto a  $y$  en la ec. 2.34 para determinar  $dz/dx$ .

### Correcciones QED

En la sec. 2.4 se introdujeron los efectos de las correcciones QED a la ecuación de estado del plasma electromagnético relevantes para el desacoplamiento de neutrinos. La modificación a la presión  $P = P^0 + P^{\text{int}}$  y densidad de energía  $\rho = \rho^0 + \rho^{\text{int}}$  del sistema se involucran directamente a través de la ecuación de continuidad que, en términos de las variables comóviles, sigue la temperatura de los fotones  $z$  de manera diferente. Además, la relación de dispersión del plasma electromagnético  $E_i^2 = p_i^2 + m_i^2$  se modifica sumando las correcciones a la masa efectiva de ambas partículas  $\delta m_i^2$ , con  $i = e, \gamma$ . Se debe recordar además que el parámetro de Hubble  $H$  también se modifica debido a que  $H \sim \rho^{1/2}$ . Así, la forma general de la ecuación de continuidad que describe  $dz/x$  se puede determinar reemplazando las cantidades adecuadas en las expresiones generales de  $\rho$  y  $P$  obteniendo

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{x}{z}J(x/z) - \frac{1}{2\pi^2 z^3} \int_0^\infty dy y^3 \left( \frac{df_{\nu_e}}{dx} + 2 \frac{df_{\nu_\mu}}{dx} \right) + G_1(x/z)}{\frac{x^2}{z^2}J(x/z) + Y(x/z) + \frac{2\pi^2}{15} + G_2(x/z)}, \quad (2.35)$$

donde  $J(\tau) = F_1(\tau)/\pi^2$  y  $Y(\tau) = F_2(\tau)/\pi^2$  y las funciones  $G_1$  y  $G_2$  se definen como

$$G_1(\omega) = 2\pi\alpha \left[ \frac{1}{\omega} \left( \frac{k(\omega)}{3} + 2k^2(\omega) - \frac{J(\omega)}{6} - k(\omega)J(\omega) \right) + \frac{k'(\omega)}{6} + k'(\omega)k(\omega) + \frac{J(\omega)}{6} + J'(\omega)k(\omega) + J(\omega)k'(\omega) \right], \quad (2.36)$$

$$G_2(\omega) = -8\pi\alpha \left( \frac{J(\omega)}{6} + \frac{J(\omega)}{6} - \frac{1}{2}k(\omega)^2 + k(\omega)J(\omega) \right) + 2\pi\alpha\omega \left( \frac{k'(\omega)}{6} - k(\omega)k'(\omega) + \frac{J'(\omega)}{6} + J'(\omega)k(\omega) + J(\omega)k'(\omega) \right), \quad (2.37)$$

con la función  $k(\omega)$  escrita como

$$k(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty du \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + \omega^2}} \frac{1}{\exp(\sqrt{u^2 + \omega^2}) + 1}. \quad (2.38)$$

La ecuación de continuidad que considera las correcciones QED a orden  $\mathcal{O}(e^2)$ , ecs. 2.35 no tiene en cuenta la aproximación del término logarítmico en la corrección a la masa del electrón  $\delta m_e^2$  lo que complicaría la solución del sistema de desacoplamiento de neutrinos (véase la sec. 2.4). En trabajos más recientes ya se ha considerado esta aproximación y se encontró que no modifica el resultado final de  $N_{\text{eff}}$  en el caso estándar dentro de la precisión requerida  $|\delta N_{\text{eff}}| \sim 10^{-4}$  [1] concluyendo que el uso de esta aproximación sigue siendo seguro. Además, se concluye que el siguiente orden en la expansión  $\mathcal{O}(e^3)$  genera modificaciones por el orden  $\delta N_{\text{eff}} \simeq -0.001$  [1] que se puede comparar con las modificaciones en  $N_{\text{eff}}$  dadas por las oscilaciones de neutrinos. En [20] se encontró las correcciones por oscilaciones de neutrinos son despreciables para el caso estándar dentro del error computacional pues generan  $\delta N_{\text{eff}} \simeq 0.0004$ ; así las correcciones a tercer orden  $\mathcal{O}(e^3)$  no son consideradas en este proyecto.

Para las correcciones QED consideradas aquí  $\mathcal{O}(e^2)$ , se ha estimado que dentro del desacoplamiento instantáneo produce la modificación  $\delta N_{\text{eff}} \approx 0.01$  [14, 39]. En [34], por ejemplo, se confirmó teóricamente este resultado explícitamente determinando la misma variación sobre  $N_{\text{eff}}$  y el valor numérico de la temperatura adimensional asintótica de fotones  $z_{\text{fin}} = 1.3997$ . Al solucionar la ec. 2.35 es posible determinar este mismo resultado sobre el calentamiento sufrido por los fotones numéricamente por medio del código computacional [Neff-Mathematica](#). Determinamos el mismo resultado  $z_{\text{fin}} = 1.3997$ ,  $N_{\text{eff}} = 3.011$  reportado en la literatura. Las ecuaciones relacionadas con las correcciones QED son fácilmente implementadas y usamos el método de Euler implícito para evolucionar la ecuación de continuidad en el tiempo  $x$ . Se escriben los detalles sobre la solución más adelante. Finalmente, los resultados numéricos permiten concluir que al implementar el desacoplamiento *no* instantáneo la confianza en el método de solución incluyendo las correcciones QED a segundo orden es alta y se encuentra dentro del error computacional objetivo  $\delta N_{\text{eff}} \sim 10^{-4}$ .



## Estado del Arte

El número efectivo de especies de neutrinos  $N_{\text{eff}}$  es un parámetro indirecto que cuantifica la razón entre la densidad de energía de neutrinos respecto a la densidad de energía de los fotones definido en la ec. 2.8. Diversos efectos físicos pueden aportar a la densidad de energía de los neutrinos modificando el valor de  $N_{\text{eff}}$ . Dentro del modelo estándar de cosmología y de partículas se consideran dos procesos que modifican  $N_{\text{eff}}$  (i) las correcciones no térmicas debido al transporte de energía desde el sector electromagnético al de neutrinos a través de las interacciones débiles residuales [11, 12, 16, 1] y (ii) las correcciones QED que incrementan la masa efectiva y modifican la ecuación de estado del plasma electromagnético [15, 20, 17]. Ambos efectos generan el valor de  $N_{\text{eff}}$  estándar más preciso de  $N_{\text{eff}}$  reportado:  $N_{\text{eff}}^{\text{SM}} = 3.0433 \pm 0.0002$  [1]. Aportaciones extra a la densidad de energía de los neutrinos surgen al considerar la existencia de partículas y fenómenos físicos de modelos BSM. Por ejemplo, los neutrinos estériles son partículas hipotéticas que modifican  $\rho_\nu$  drásticamente tal que  $N_{\text{eff}} \simeq 4$  [21, 41, 42].

La predicción teórica estándar de  $N_{\text{eff}}$  es consistente con las observaciones más recientes de la sonda espacial Planck–2018  $N_{\text{eff}} = 2.99 \pm 0.17$  [3], aún así, no es posible descartar la existencia de reliquias de física BSM: partículas extra o fenómenos físicos que modifiquen  $N_{\text{eff}}^{\text{SM}} = 3.0433$ , comúnmente llamada *radiación oscura*. Próximamente, experimentos como el CMB-S4<sup>1</sup> [7] aumentarán la precisión a orden porcentual de las mediciones de  $N_{\text{eff}}$  reduciendo la incertidumbre a  $\sigma(N_{\text{eff}}) \lesssim 0.02 - 0.03$  limitando el espacio de parámetros de modelos BSM. Por ejemplo, si  $\Delta N_{\text{eff}} \equiv N_{\text{eff}} - N_{\text{eff}}^{\text{SM}} \geq 0.047$  el CMB-S4 sería lo suficientemente sensible para probar teorías con reliquias extra de espín 1/2, 1 o 3/2 lo que incluye poblaciones térmicas de gravitinos [44, 45, 46] y fotones oscuros [47, 48, 49]. Si  $\Delta N_{\text{eff}} \geq 0.027$  indicaría la existencia de partículas de espín 0 como axiones y partículas similares [50, 51, 52, 53]. En ambos casos las especies deben estar en contacto térmico con las partículas del Modelo Estándar mucho antes de la época de desacoplamiento. También es posible que  $N_{\text{eff}}$  sea menor experimentalmente respecto a la predicción teórica como sucede en fenómenos de calentamiento de los fotones después del desacoplamiento de neutrinos.

La aportación de la radiación oscura en contacto térmico con las partículas del Modelo Estándar a la densidad de energía de los neutrinos sólo depende de la temperatura de desacoplamiento de las partículas oscuras y de los posibles estados de espín caracterizados por el número de grados de

<sup>1</sup>Un estudio detallado acerca de la capacidad de futuros experimentos, incluido el CMB-S4, es [43].

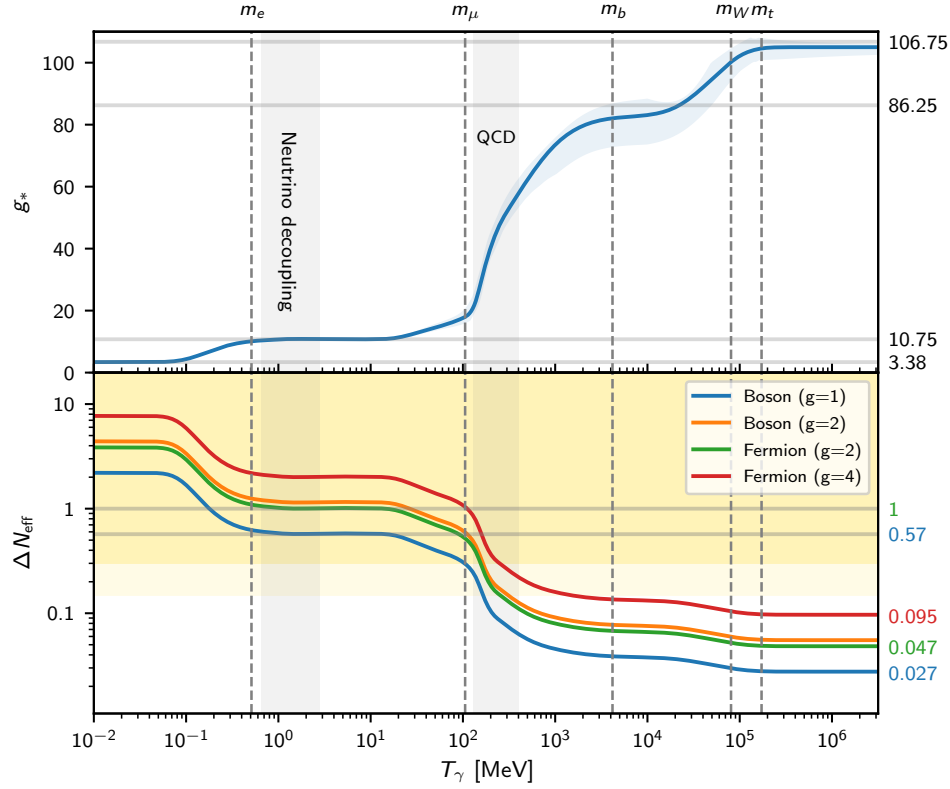


Figura 3.1: Grados efectivos de libertad  $g_*$  dentro del Modelo Estándar de cosmología y de partículas en el universo temprano (arriba) y modificaciones  $\Delta N_{\text{eff}}$  para cuatro tipos de especies oscuras que aportan a la densidad de energía de los neutrinos característicamente (abajo). Ambas cantidades se muestran como funciones de la temperatura de los fotones  $T$ . Se asume un bosón escalar singlete ( $g = 1$ , azul), un bosón con ( $g = 2$ , anaranjado), un fermión de Weyl ( $g = 2$ , verde) y fermiones con  $g = 4$  (rojo) basados en los resultados de [40]. Las franjas doradas representan respectivamente las regiones excluidas por las mediciones de Planck-2018 el nivel al 68 % y 95 % en el nivel de confianza (C.L.) de las mediciones. Figura tomada de [3].

libertad que aporta  $g$ . La modificación a  $N_{\text{eff}}$  es explícitamente [7]

$$\Delta N_{\text{eff}} = \begin{cases} \frac{4g}{2} \left( \frac{43/4}{g_*(T_F)} \right)^{4/3} & \text{Bosón} \\ \frac{g}{2} \left( \frac{43/4}{g_*(T_F)} \right)^{4/3} & \text{Fermión,} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $T_F$  es la temperatura en que la reliquia se desacopla. Así  $\Delta N_{\text{eff}}$  es una excelente guía entre el amplio espectro de modelos de radiación oscura que se diferencian característicamente por la modificación a  $N_{\text{eff}}$ . Primero, las especies oscuras que se desacoplaron después de la transición de fase de QCD (cromodinámica cuántica) aportan a la densidad de radiación relativista tal que  $\Delta N_{\text{eff}} \gtrsim 0.3$  que está dentro del rango de actividad de los resultados de la sonda Planck–2018. Por otro lado, si las especies oscuras se desacoplaron antes de la transición de QCD las modificaciones son  $\Delta N_{\text{eff}} > 0.027$  que están dentro de la incertidumbre estimada  $\sigma(N_{\text{eff}})$  del proyecto CMB-S4. En la fig. 3.1 se muestra la correspondencia entre los grados efectivos de libertad  $g_* = 2 + g_\nu(7/8)(T_\nu/T)^4$ , las modificaciones  $\Delta N_{\text{eff}}$  y la temperatura del universo  $T$  basada en los resultados de [40] asumiendo un bosón escalar singlete ( $g = 1$ ), un bosón con ( $g = 2$ ), un fermión de Weyl ( $g = 2$ ) o fermiones con  $g = 4$  etiquetados en la figura colores distintivos. Las regiones doradas en la parte superior de la figura 3.1 indican las regiones descartadas por las mediciones de Planck–2018 al 68 % y 95 % en el nivel de confianza C.L. [3].

Recientemente se han publicado los resultados de colaboraciones que buscan calcular teóricamente  $N_{\text{eff}}^{\text{SM}}$  al nivel de precisión más alto posible. En [17] se estudian las correcciones a la ecuación de estado del plasma electromagnético probando qué suposiciones son correctas para mejorar la precisión de los cálculos desde la teoría perturbativa FTQED (véase la sec. 2.4). Por ejemplo, a qué orden aportan los términos relevantes de la expansión de la función de partición gran canónica  $Z$  dada por la energía libre de Helmholtz  $F = -\ln Z$ . Además, se estudia cómo aporta el término logarítmico de la corrección a la masa efectiva del electrón despreciado en trabajos anteriores (véase la sec. 2.4). Así, el cálculo teórico con alta confianza en las correcciones perturbativas de QED a la relación de dispersión se pueden realizar numéricamente generando un error en el número efectivo de los neutrinos  $|\delta N_{\text{eff}}| \approx 0.0002$ . En [1] se usan los resultados de [17] y el moderno esquema de solución de ecuaciones diferenciales **FortEPiANO** [21] desarrollado en la última década para solucionar el desacoplamiento de neutrinos.

Antes de esto el interés por  $N_{\text{eff}}$  fue amplio<sup>2</sup>. En la década de 1990 el desarrollo de métodos matemáticos y computacionales permitió el cálculo exacto y no perturbativo del desacoplamiento de los neutrinos luego del desarrollo del método de reducción de las integrales de colisión que impulsó programas numéricos sofisticados dedicados a evolucionar el sistema de ecuaciones Continuidad–Boltzmann a un costo computacional relativamente bajo. Considerando únicamente el transporte de energía y con el método de discretización de momento se encontró un leve calentamiento del gas de neutrinos dado por  $N_{\text{eff}} = 3.0340 \pm 0.0003$  [11, 12]. Para la década de los 2000 ya se sabía que la teoría FTQED afecta al proceso de desacoplamiento de neutrinos [39, 14]. Las modificaciones relevantes a las ecuaciones del sistema se tomaron en cuenta en [15] encontrando que las estimaciones de FTQED para  $\delta N_{\text{eff}}$  eran correctas aportando a la densidad de energía de los neutrinos como  $\delta N_{\text{eff}} \approx 0.011$ . Aún así, debido a errores computacionales el resultado estándar  $N_{\text{eff}} = 3.046$  no se obtendría sino hasta que trabajos posteriores que involucran las oscilaciones de neutrinos se llevaron a cabo [20, 16].

<sup>2</sup>Un review histórico detallado de los valores numéricos de  $N_{\text{eff}}$  es [54].

---

## Computación y Resultados

---

### 4.1 Métodos Numéricos

En la sec. 2.5 establecimos los sistemas de ecuaciones a solucionar numéricamente. El límite de desacoplamiento instantáneo no requiere de las ecuaciones de Boltzmann y se soluciona directamente con la ecuación de continuidad 2.31 para la temperatura adimensional de fotones  $z$  con el esquema `NDSolve[]` de MATHEMATICA [27]. Por otro lado en la sec. 2.4 se describen las correcciones QED que desvían la masa efectiva del plasma electromagnético disminuyendo su densidad de energía y presión levemente. La cantidad de energía transportada desde el plasma de electrones hacia los fotones durante la aniquilación de pares  $e^\pm$  es menor con lo que el valor asintótico de la temperatura adimensional de fotones  $z_{\text{fin}}$  decrece. Por sí solo este efecto no requiere de las ecuaciones de Boltzmann y se soluciona únicamente con la ecuación de continuidad 2.35. Al considerar el transporte de energía desde el sector electromagnético al de neutrinos a causa de interacciones residuales durante la aniquilación de pares  $e^\pm$  se generan distorsiones no térmicas en el espectro de neutrinos. Este fenómeno requiere de la solución de las ecuaciones de Boltzmann (ecs. 2.26 y 2.27) junto con la ecuación de continuidad, ec. 2.34. Por último, los efectos combinados de distorsiones no térmicas e interacciones QED requieren solucionar las mismas ecuaciones de Boltzmann del caso anterior y la ecuación de continuidad modificada, ec. 2.35.

Claramente, las ecuaciones de Boltzmann presentan el reto más grande al solucionar el sistema. Se usa en general dos métodos para calcular las integrales de colisión  $\mathbf{C}[f]$ . El primero se basa en la *discretización* del momento adimensional  $y_i = m_e p$  en una rejilla de  $N_y$  puntos, donde  $m$  es una masa de referencia regularmente tomada como  $m_e$ , la masa del electrón [11, 12, 20, 16]. La discretización de momento significa que se transforma el problema continuo de un sistema de ecuaciones integro-diferenciales de dos dimensiones  $(x, y)$  más complicado a un número  $N_y$  de ecuaciones diferenciales unidimensionales que evolucionan con  $x$ . El segundo método se denomina expansión de distorsiones *no térmicas* [15, 13] y se basa en la expansión de las variaciones de la función de distribución del momento respecto a la solución de equilibrio  $\delta f_{\nu_\alpha}$  en una base de polinomios ortonormales. Así, es posible determinar la función de distribución como la función de FD mas las aportaciones dadas por las variaciones expandidas  $\delta f_{\nu_\alpha}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^\alpha(x) P_i^\alpha(y)$ . De este modo se puede reescribir la ecuación de Boltzmann, ec. 2.14 en términos de los polinomios  $P_i^\alpha(y)$  y coeficientes  $a_i^\alpha(x)$ . Finalmente, se integra respecto al momento adimensional  $y$ .

Usamos aquí el método de discretización del momento adimensional  $y$  para solucionar el sistema. Primero, debemos notar que las regiones de  $y$  aportan de manera diferente a la densidad de energía de los neutrinos  $\rho_\nu$ . Se establece el rango de eficiencia para  $y$  de la definición 2.3 se integra rápidamente en distintas regiones del momento. En el rango  $y \in [0, \infty]$  las contribuciones a la densidad de energía se distribuyen así: los neutrinos con momento en el rango  $0.01 < y < 1$  y en  $10 < y < 20$  aportan en un 1.4% a la densidad total de energía de los neutrinos mientras que en el rango  $1 < y < 10$  la aportación es del 97.5%. Por fuera de estas regiones los neutrinos aportan  $\lesssim 10^{-4}$ %. De modo que es seguro utilizar el rango  $y_i \in [0.01, 20]$  para calcular las integrales necesarias ya que fuera del mismo no hay aportaciones significativas a la densidad de energía de los neutrinos [12]; y como las integrales de colisión decaen como  $1/y$  se evitan las singularidades cuando  $y \sim 0$ .

### Evolución Temporal

Usamos el método numérico de Euler (E), Euler implícito (IE) y Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) para solucionar los sistemas de ecuaciones del desacoplamiento de los neutrinos para desacoplamiento instantáneo con correcciones QED (ID+QED), desacoplamiento no instantáneo (NID) y ambos sistemas simultáneamente NID+QED. Se evolucionó el programa en el tiempo  $x$  con 1000 y 4000 pasos. En cada paso las integrales de colisión se evalúan tantas veces como el método así lo exija, por ejemplo, con el método de Euler la derivada  $\partial f_{\nu_\alpha}/\partial x$  se evalúa sólo una vez para determinar cuánto debe modificarse  $f_{\nu_\alpha}$  para cada valor de  $y$  de la discretización, entonces la integral  $\mathbf{C}[f]$  se evaluaría sólo una vez. En general el código evoluciona al sistema de ecuaciones NID y NID+QED en el tiempo como sigue

1. Establece las condiciones iniciales y constantes del sistema.
2. Establece las expresiones de las derivadas  $dz/dx$ ,  $\partial f_{\nu_e}/dx$  y  $\partial f_{\nu_\mu}/dx$ .
3. Comienza la iteración.
4. Calcula el parámetro de Hubble  $H \sim \rho^{1/2}$  para el valor numérico inicial temporal  $x_{\text{in}} = m_e/10$  MeV y las funciones de distribución de FD.
5. Calcula las derivadas  $\partial f_{\nu_e}/dx$  y  $\partial f_{\nu_\mu}/dx$  con las condiciones iniciales  $x_{\text{in}} = m_e/10$  MeV para cada uno de los  $N_y$  puntos en la discretización de  $y$ .
6. Interpola para construir las funciones  $\partial f_{\nu_e}/dx$  y  $\partial f_{\nu_\mu}/dx$  dependientes del momento  $y$ .
7. Calcula la derivada  $dz/dx$  con la ecuación de continuidad para el caso específico NID(+QED) usando las funciones interpoladas del paso 6.
8. Interpola las nuevas funciones  $f_{\nu_\alpha}(y)$  con las modificaciones dadas por la integral de colisión para los  $N_y$  puntos dada la discretización de  $y$ .
9. Incrementa el valor numérico de  $x$  para el siguiente paso.
10. Repite hasta completar los 1000 (4000) pasos del programa alcanzando  $x_{\text{fin}} = 30$ .

Los errores locales de los métodos es RK4, IE y Euler para 1000 puntos son del orden de  $h^4 \sim 10^{-7}$ ,  $h^3 \sim 10^{-5}$  y  $h \sim 10^{-4}$  respectivamente. Se estima que el error global está dado en un orden de magnitud menos que el error local de cada método, es decir que para el método IE el error global es aproximadamente  $h^2 \sim 10^{-4}$ . Aún así como los resultados dependen directamente de

las integrales de colisión  $\mathbf{C}[f]$  en los casos NID(+QED), el error numérico normalmente es mucho mayor que el estimado desde el método de solución a las ecuaciones diferenciales. Este problema impacta los resultados numéricos obtenidos estimando un error computacional final en  $N_{\text{eff}}$  de aproximadamente  $|\delta N_{\text{eff}}| \sim 10^{-2}$ . Los métodos IE y RK4 son más precisos evidentemente pero al involucrar más iteraciones el tiempo de cómputo incrementa vertiginosamente. Así, preferimos el método IE que brinda un error relativamente bajo comparado con el método E y reduce a la mitad el cálculo de las integrales respecto al método RK4. Durante el análisis de los resultados se encontró que los métodos IE y RK4 retornaron los mismos resultados con un error computacional de  $|\delta N_{\text{eff}}| \sim 10^{-2}$  para los casos NID(+QED) y  $|\delta N_{\text{eff}}| \sim 10^{-4}$  para el caso QED como se describe más adelante. Esto indica que el error que genera el cálculo de las integrales de colisión limita ampliamente el resultado incluso si se usan métodos más sofisticados.

### Condiciones Iniciales

Usamos las condiciones iniciales propuestas por [16]. En otros trabajos se utilizan diferentes conjuntos de condiciones iniciales, sin embargo se deben satisfacer las siguientes condiciones: (i) para asegurar que la temperatura inicial de fotones sea lo suficientemente alta para despreciar las distorsiones sobre las funciones de distribución  $f_{\nu_\alpha}(y)$  al comenzar la evolución temporal se usa un valor inicial de  $x_{\text{in}} = m_e/10$  MeV para la variable temporal, (ii) el sistema evoluciona hasta alcanzar el valor final  $x_{\text{fin}} = 30$  ya que se ha encontrado que, para  $x \sim 15$ , las correcciones sobre las funciones  $f_{\nu_i}$  y la temperatura de los fotones  $z$  han alcanzado su valor asintótico, (iii) incluso para  $x = x_{\text{in}}$  el valor de  $z$  no es exactamente 1 y se puede calcular con la ecuación de continuidad, ec. 2.31 asumiendo que los neutrinos están completamente acoplados y son descritos por la distribución de FD de modo que el siguiente paso se retorna el valor inicial que usamos para evolucionar la temperatura adimensional  $z_{\text{in}} = 1.00003$  y (iv) las funciones de distribución de los neutrinos en  $x = x_{\text{in}}$  se asume que los neutrinos están en equilibrio térmico con el plasma electromagnético, así que se usa la función

$$f_{\nu_i} = \frac{1}{\exp(y_i/z_{\text{in}}) + 1}, \quad (4.1)$$

para describir al gas de neutrinos cuando  $x = x_{\text{in}}$ . Usamos el método de discretización del momento tomando  $N_y = 100$  puntos dentro del rango  $y_i \in [0.01, 20]$  distribuidos homogéneamente. Las funciones de distribución  $f_{\nu_\alpha}$  aportan despreciablemente a la densidad de energía para  $y > 20$  como se mostró en la sección anterior y se evitan valores  $y \sim 0$  puesto que pueden producir fuentes de error significativas por singularidades [11, 12]. Las condiciones iniciales adecuadas se pueden determinar con mayor seguridad estudiando las variaciones que generan sobre el resultado estándar  $N_{\text{eff}}^{\text{SM}}$ . Además de considerar el posible calentamiento de los fotones por aniquilación de partícula más pesadas como los muones, en [1] se calcula el número efectivo de neutrinos para un rango de  $x \in [0.001, 0.05]$  y se estudian las modificaciones sobre el resultado final reafirmando que las recomendaciones de [16, 21] son adecuadas.

### Desarrollo Computacional

Para solucionar el sistema de ecuaciones se usó el software Mathematica [27] que permite usar varios paradigmas computacionales para escribir los códigos ejecutados. MATHEMATICA es potente gráficamente con lo que se pueden generar gráficas de manera dinámica rápidamente y con buen aspecto. El esquema de integración NIntegrate[] facilita ampliamente el cálculo al solucionar

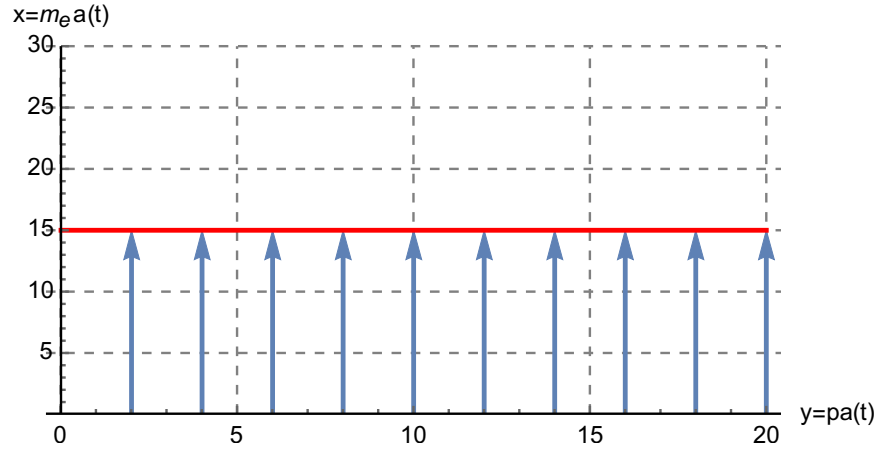


Figura 4.1: Método de discretización del momento adimensional  $y$ . Las flechas apuntan en la dirección en que incrementa el tiempo  $x$  para el siguiente paso (línea roja) hasta alcanzar  $x = 30$ . Para cada paso en el tiempo las integrales de colisión son evaluadas determinando  $\partial f_\nu / \partial x$  y, consecuentemente, calcular las modificaciones sobre las funciones de distribución  $f_\nu$  y la temperatura comóvil de los fotones  $z$ .

las integrales 2—dimensionales automatizando el proceso. Diversas opciones internas controlables son adecuadas para evaluar apropiadamente los integrandos y para mejorar la eficiencia de la computación. Algunos son: **AccuracyGoal**  $\rightarrow 6$  que establece la exactitud que el programa debe buscar, el número máximo de puntos de la integración **MaxPoints**  $\rightarrow 1000$  y el método de integración **Method**. En general, las ventajas que brinda MATHEMATICA son: (i) automatiza el proceso de solución de las integrales y (ii) es interactivo, e intuitivo. Por otro lado, entre las desventajas de MATHEMATICA se encuentra el tiempo de cómputo que incrementa bastante cuando no se tiene cuidado al usar ciertos esquemas. Principalmente se escribieron tres programas en MATHEMATICA para solucionar los diferentes sistemas: NID, NID+QED y QED. Según sea el sistema el código se prosigue como

1. Las condiciones iniciales y constantes por defecto son establecidas como variables globales, se pueden utilizar en cualquier parte del cuaderno<sup>1</sup>.
2. Las funciones que se requieren para establecer las integrales de colisión y la ecuación de continuidad son definidas como funciones globales por defecto y pueden ser evaluadas en cualquier parte del cuaderno.
3. Para cada uno de los  $N_y = 100$  valores de la discretización del momento  $y$  se evalúan con las condiciones iniciales las integrales de colisión y la ecuación de continuidad. Son tres integrales solucionadas con el esquema **NIntegrate[]** usando las siguientes opciones: **Method**  $\rightarrow \{\text{Automatic}, \text{"SymbolicProcessing"} \rightarrow 0\}$  que evita el procesamiento simbólico de las funciones lo que agiliza los cálculos, **AccuracyGoal**  $\rightarrow 6$  exige una exactitud mínima de  $10^{-6}$  y **MaxPoints**  $\rightarrow 1000$  que obliga a la solución de la integral de colisión a tomar máximo 1000 puntos en la rejilla  $N_y \times N_y$ .

<sup>1</sup>El cuaderno es la interfaz con la que los usuarios se pueden comunicar con el **kernel** de MATHEMATICA que es la parte interna del programa que se encarga de realizar los cálculos.



4. Los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales (E,IE,RK4) son implementados tradicionalmente con bucles `Do[]` en una celda para recorrer los 1000 puntos en el tiempo  $x$ . Aquí, usar bucles no altera demasiado la eficiencia del programa ya que la el tiempo de cómputo es alto únicamente por la evaluación de las integrales de colisión.
5. Para iterar sobre los valores de momento  $y$  y solucionar las integrales de colisión para cada paso en el tiempo  $x$  se usa el esquema `ParallelDo[]` que evalúa las integrales de colisión paralelamente y de forma automática. El tiempo en que las integrales de colisión se solucionan depende de los KERNELS disponibles dada la cantidad de núcleos del procesador del computador. Usamos dos estaciones de trabajo, uno con cuatro KERNELS y otro con ocho KERNELS para solucionar los sistemas de ecuaciones.
6. MATHEMATICA permite interpolar automáticamente las funciones de distribución con el esquema `Interpolation[]` que toma como argumento la tabla de datos de los nuevos valores de las funciones  $f_\nu$  para generar una función continua que retorna exactamente los puntos dados para construirla.
7. Se monitorea el proceso de solución usando el esquema `Dynamic[]` que imprime valores o gráficas de las funciones automáticamente cada vez que son modificadas. Además, con el esquema `ProgressIndicator[]` se generan barras de progreso que incrementan cada vez que el programa avanza a la siguiente iteración en ambas variables.
8. Cuando se completa cada iteración en el tiempo  $x$ , se guardan las tablas de datos en formato `.dat` con el esquema `Export[]` para leer y analizar los resultados posteriormente.

En la fig. 4.1 se esquematiza la discretización del momento donde se muestra la evolución en el tiempo de las soluciones de las ecuaciones de Boltzmann en el tiempo  $x$  para cada valor de  $y$  discretizado; se muestra el siguiente paso en la evolución temporal cuando  $x \sim 15$  de las soluciones (línea roja), allí las funciones de distribución  $f_\nu$  y la temperatura de los fotones  $z$  deben haber convergido. Finalmente, las soluciones a los cuatro sistemas de ecuaciones tomaron tiempos ampliamente distintos. El sistema ID que usa el esquema de solución `NDSolve[]` toma  $\sim 20$  segundos, el sistema QED toma 2 horas con el esquema `Do[]` y los sistemas NID y NID+QED, que requieren de la solución de las ecuaciones de Boltzmann, toman  $\gtrsim 20$  horas. El código fuente con que se solucionan los sistemas de ecuaciones dentro del Modelo Estándar de Cosmología puede ser descargado del repositorio <https://github.com/edwphysics/Neff-Mathematica>.

## 4.2 Resultados Numéricos

Hemos solucionado numéricamente cuatro sistemas de ecuaciones diferenciales con el código numérico `Neff-Mathematica` escrito en MATHEMATICA, cada uno para procesos físicos distintos relevantes para el desacoplamiento de neutrinos: el límite de desacoplamiento instantáneo (ID), que considera las funciones de distribución de los neutrinos dadas por la estadística de Fermi-Dirac, el caso exacto (NID) que soluciona las ecuaciones de Boltzmann relativistas para las funciones de distribución modificadas por distorsiones no térmicas y, separadamente, ambos casos considerando el efecto de las correcciones QED sobre la ecuación de estado del plasma electromagnético (ID+QED, NID+QED). Los sistemas de ecuaciones fueron descritos explícitamente en la sec. 2.5 dados por la ec. 2.31 para el caso ID, la ec. 2.35 para el caso ID+QED, las ecs. 2.26 y 2.27 para el caso NID y finalmente las ecs. 2.26, 2.27 y 2.35 para el caso NID+QED.



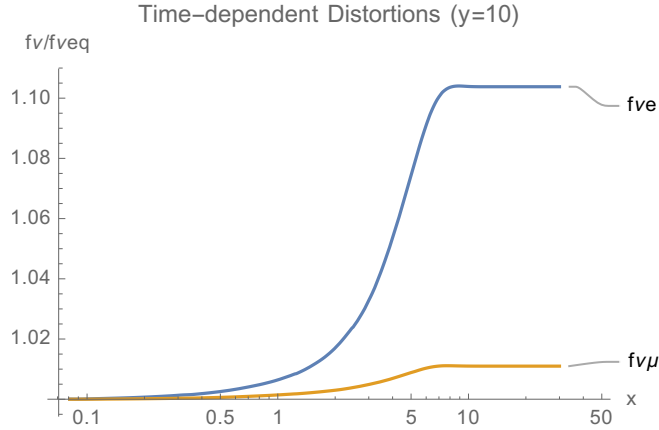


Figura 4.2: Evolución de las distorsiones de las funciones de distribución  $f_{\nu_\alpha}(y)$  con  $y = 10$  para neutrinos electrónicos y muónicos (tauónicos) respecto a la variable temporal adimensional  $x$  considerando el caso exacto, agregando las correcciones QED a la ecuación de estado (NID+QED). El caso NID retorna exactamente el mismo resultado. El comportamiento estándar de  $f_\nu/f_{\text{eq}}$  como función de  $x$  es reportado en la fig. 1 de [20] para el mismo valor de momento  $y = 10$ .

Caso	$z_{\text{fin}}$	$\delta\bar{\rho}_{\nu_e}(\%)$	$\delta\bar{\rho}_{\nu_{\mu,\tau}}(\%)$	$N_{\text{eff}}$	$z_{\text{fin}}^*$	$\delta\bar{\rho}_{\nu_e}^*(\%)$	$\delta\bar{\rho}_{\nu_{\mu,\tau}}^*(\%)$	$N_{\text{eff}}^*$
Instantáneo	1.4010	0.00	0.00	3.000	1.4010	0.00	0.00	3.000
ID+QED	1.3997	0.00	0.00	3.011	1.3997	0.00	0.00	3.011
Exacto (NID)	1.3997	1.01	0.12	3.024	1.3990	0.95	0.43	3.035
NID+QED	1.3985	1.00	0.12	3.035	1.3978	0.94	0.43	3.046

Tabla 4.1: Resultados numéricos de la temperatura adimensional de los fotones asintótica  $z_{\text{fin}}$ , del incremento porcentual de la densidad de energía de los neutrinos  $\delta\bar{\rho}_\nu \equiv \delta\rho_\nu/\rho_\nu^0$  y de  $N_{\text{eff}}$  para los cuatro casos considerados: ID, ID+QED, NID, y NID+QED. Como referencia, las cantidades señaladas con (\*) representan los valores numéricos estándar reportados en [20].

Para los casos NID y NID+QED, la evolución de las distorsiones no térmicas de las funciones de distribución de los neutrinos durante el proceso de desacoplamiento para un valor particular de momento ( $y = 10$ ) se muestra en la fig. 4.2, a través de la razón entre las funciones de distribución exacta  $f_\nu(y)$  respecto a la de equilibrio  $f_{\text{eq}}(y)$ . A temperaturas altas ( $x \lesssim 0.2$ ) las interacciones débiles son aún apreciables manteniendo en buen contacto térmico a los neutrinos con el plasma electromagnético. Cuando la temperatura descendió a  $0.2 \lesssim x \lesssim 4$  las interacciones débiles son menos eficientes generando distorsiones no térmicas sobre las funciones de distribución de los neutrinos caracterizadas por el crecimiento de la razón  $f_\nu/f_{\text{eq}}$  para  $y = 10$ . Cuando la temperatura descendió aún más ( $x \gtrsim 4$ ) el desacoplamiento de neutrinos se completa de modo que las distorsiones no térmicas alcanzan su valor asintótico.

En la fig. 4.3, la dependencia de las distorsiones en el momento  $y$  es clara. Los neutrinos más energéticos, que se ubican en la parte derecha de la gráfica generan distorsiones más amplias en la función de distribución de los neutrinos debido a que permanecen más tiempo interactuando con los electrones mientras sucede la aniquilación. Una vez que el proceso de desacoplamiento está completo se obtienen todas las cantidades que caracterizan las modificaciones al sistema respecto al caso

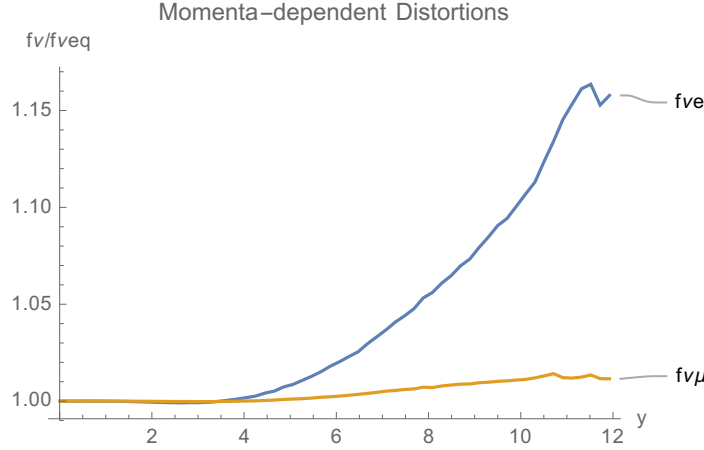


Figura 4.3: Distorsiones de las funciones de distribución  $f_{\nu\alpha}(y)$  en  $x = x_{\text{fin}}$  para los neutrinos electrónicos y los neutrinos muónicos (tauónicos) respecto al momento adimensional  $y$  para el caso NID+QED. El caso NID retorna exactamente el mismo resultado. El comportamiento estándar de  $f_{\nu}/f_{\text{eq}}$  respecto a  $y$  se reporta en la figura 2 de [20].

instantáneo:  $z_{\text{fin}}$  es dado por la ecuación de continuidad para  $x = 30$ , las funciones de distribución de los neutrinos  $f_{\nu}(y)$  retornadas por las ecuaciones de Boltzmann permiten calcular la densidad de energía aportada por los neutrinos al plasma relativista  $\rho_{\nu}$  (ec. 2.3) y seguidamente las variaciones  $\delta\rho_{\nu} = \rho_{\nu} - \rho_{\nu}^0$ , con  $\rho_{\nu}^0$  la densidad de energía del caso instantáneo, ec. 2.5. Finalmente, se obtiene el número efectivo de especies de neutrinos  $N_{\text{eff}}$  con la ec. 2.11 y los resultados se reportan en la tabla 4.1 donde se comparan con los resultados estándar de los parámetros mencionados reportados en la literatura [11, 12, 20, 1].

Como se esperaba, las correcciones QED generan la disminución en la temperatura de los fotones provocando que  $z_{\text{fin}}$  sea inferior respecto al los casos sin QED (ID y NID). Para el caso ID se obtuvo el valor esperado asintótico de la temperatura adimensional de los fotones  $z_{\text{fin}} = 1.401$  y la evolución completa de  $z$  se presenta en la fig. 2.1. No se producen distorsiones a las funciones de distribución de los neutrinos de modo que  $\delta\rho_{\nu} = 0$ , lo que retorna  $N_{\text{eff}} = 3.00$  según la ec. 2.11; no existió transporte de energía desde el sector electromagnético hacia el de neutrinos en este caso. Al introducir el efecto de las correcciones QED al caso ID (ID+QED) en la ecuación de continuidad (ec. 2.35) obtuvimos para la temperatura adimensional de los fotones el valor asintótico  $z_{\text{fin}} = 1.39973 \pm 0.00006$  y para el número efectivo de neutrinos encontramos  $N_{\text{eff}} = 3.0114 \pm 0.0002$ , sin modificaciones respecto a los valores reportados en [14, 34]; la masa efectiva del plasma electromagnético provoca que los fotones sufran de un calentamiento levemente menor respecto al dado por el caso ID al reducir la cantidad de energía disponible para transportar al gas de fotones cuando sucede la aniquilación de pares  $e^{\pm}$  (véase la discusión de la sec. 2.4). Sucede el mismo efecto al considerar en el caso NID el aporte de las correcciones QED (NID+QED). La cantidad de energía disponible para transportar a los fotones es aún más pequeña, así que en los casos NID y NID+QED se modifica  $z_{\text{fin}}$  mientras que  $\delta\rho_{\nu}$  se mantiene igual para las tres especies de neutrinos (véase tabla 4.1). Este efecto también se observa al generar las figs. 4.2 y 4.3 pues en ambos casos la evolución de las distorsiones no térmicas fueron exactamente iguales.

Solucionamos las ecuaciones de Boltzmann para los casos NID y NID+QED debido a las distorsiones no térmicas sobre las funciones de distribución de los neutrinos y estimamos un error

en los resultados de  $N_{\text{eff}}$  de  $|\delta N_{\text{eff}}| \approx 0.01$ . Para el caso NID encontramos numéricamente que las modificaciones sobre  $N_{\text{eff}}$  fueron leves pero observables  $\delta N_{\text{eff}} \sim 10^{-2}$  y se encuentran por el mismo orden de magnitud que los resultados estándar [11, 12, 20, 1]. La temperatura adimensional asintótica de los fotones  $z$  convergió al valor numérico  $z_{\text{fin}} = 1.3997$  en ambos casos. Las distorsiones no térmicas retornaron variaciones de la densidad de energía de los neutrinos dependientes del sabor leptónico  $\delta\rho_{\nu_e} = 1.01\%$  para neutrinos electrónicos y  $\delta\rho_{\nu_{\mu(\tau)}} = 0.12\%$  para neutrinos muónicos (tauónicos), esto indica que los neutrinos electrónicos se acoplan más fuertemente a los electrones que los neutrinos muónicos (tauónicos). Finalmente, encontramos que el número efectivo de neutrinos para el caso NID es  $N_{\text{eff}} = 3.024$ , consistente con los resultados estándar  $N_{\text{eff}} = 3.0340$  [11, 12] dentro del error estimado. La discrepancia es de  $|\delta N_{\text{eff}}| = 0.011$  debido probablemente a la sobre(sub)-estimación de las distorsiones no térmicas de los neutrinos electrónicos (muónicos y tauónicos); además de la convergencia de la temperatura adimensional de fotones  $z_{\text{fin}}$  que indica un calentamiento menor respecto a los resultados estándar por  $|\delta z| = 0.0007$  [11, 12, 20].

Para el caso NID+QED, al agregar las correcciones QED a la ecuación de continuidad, obtenemos  $N_{\text{eff}} = 3.035$ ; comparando con los resultados estándar  $N_{\text{eff}} = 3.0433$  [1] y  $N_{\text{eff}} = 3.046$  [20] notamos que la diferencia es  $\delta N_{\text{eff}} \sim 0.01$ . Encontramos que la temperatura adimensional de los fotones converge a  $z_{\text{fin}} = 1.3987$ , que igualmente indica un calentamiento levemente menor de los fotones respecto al los resultados estándar, difiriendo en  $|\delta z| = 0.0007$ , al igual que nuestros resultados del caso NID. Encontramos que las variaciones de la densidad de energía de los neutrinos son  $\delta\rho_{\nu_e} = 1.00\%$  y  $\delta\rho_{\nu_e} = 0.12\%$ , que no se modifican apreciablemente respecto al caso NID; también es consistente con los resultados estándar en cuanto al efecto de las correcciones QED sobre las distorsiones en el espectro de los neutrinos pues no modifican las aportaciones a la densidad de energía de los neutrinos. En resumen, para los casos exactos NID y NID+QED encontramos resultados que coinciden cualitativamente, sin embargo, numéricamente las discrepancias entre nuestros resultados y los resultados estándar del número efectivo de neutrinos  $N_{\text{eff}}$  son apreciables pues difieren numéricamente en  $\sim 10^{-2}$ . El cálculo de las integrales de colisión con el esquema `NIntegrate[]` de MATHEMATICA generan las fuentes de error más amplias porque los resultados de los casos ID y ID+QED no difieren respecto a los resultados estándar dentro del error  $|\delta N_{\text{eff}}| \sim 10^{-5}$  [39, 34] (véase la tabla 4.1).

---

## Conclusiones

---

Solucionamos numéricamente el sistema de ecuaciones de Boltzmann (ec. 2.26 y ec. 2.27) soportado por la ecuación de continuidad (*véase* la sec. 2.5) para el proceso de desacoplamiento de los neutrinos dentro del Modelo Estándar de partículas y de cosmología. Buscamos las funciones de distribución de los neutrinos electrónicos y muónicos (tauónicos)  $f_{\nu_\alpha}$ , con  $\alpha = e, \mu(\tau)$  y la temperatura comóvil de los fotones  $z = a(t)T$ . En este propósito usamos el lenguaje computacional de alto nivel MATHEMATICA [27] para escribir el código numérico *Neff-Mathematica* que soluciona los sistemas de ecuaciones descritos. Usamos el método de Euler implícito para evolucionar el sistema de ecuaciones Continuidad–Boltzmann en el tiempo  $x = m_e a(t)$ , donde  $m_e$  es la masa del electrón. Para calcular las integrales de colisión implementamos el método de discretización del momento comóvil  $y = a(t)p$  con  $N_y = 100$  puntos homogéneamente distribuidos en el rango  $y \in [0.01, 20]$ .

Los resultados numéricos caracterizan al proceso de desacoplamiento de neutrinos a través del número efectivo de especies de neutrinos  $N_{\text{eff}}$ , ec. 2.8. El límite de desacoplamiento instantáneo retorna exactamente  $N_{\text{eff}} = 3$  que se modifica dentro del Modelo Estándar de partículas y de cosmología debido a diferentes fenómenos físicos (*véase* el capítulo 2) que son (i) el transporte de energía desde el sector electromagnético al de neutrinos debido a interacciones débiles residuales [10, 11, 12] (NID), (ii) las correcciones QED a la ecuación de estado del plasma electromagnético que disminuyen la cantidad de energía disponible a transportar entre el plasma electromagnético durante la aniquilación de pares  $e^\pm$  [14, 39] (QED) y (iii) los casos (i) y (ii) considerados simultáneamente [20, 16, 1] (NID+QED). Para el fenómeno (NID) calculamos que  $N_{\text{eff}} = 3.024$ , para el (QED)  $N_{\text{eff}} = 3.011$  y para el caso (NID+QED)  $N_{\text{eff}} = 3.035$ . Estimamos el error del cálculo numérico de  $N_{\text{eff}}$  como  $|\delta N_{\text{eff}}| \sim 0.01$  a partir de la exactitud que busca el esquema `NIntegrate[]` para solucionar la integral de colisión y a las desviaciones de  $N_{\text{eff}}$  respecto a cambios en las condiciones iniciales. La precisión del resultado para el caso QED es mucho más alta al no requerir de las ecuaciones de Boltzmann que generan las fuentes de error más amplias al calcular las integrales de colisión.

Según los resultados reportados en la tabla 4.1, para el caso QED obtuvimos el mismo resultado que en el caso estándar dentro de la precisión dada por el método de Euler implícito para 4000 pasos. Por otro lado, los resultados de los sistemas NID y NID+QED presentaron una desviación de  $\delta N_{\text{eff}} = 0.011$  respecto a los resultados estándar de  $N_{\text{eff}}$ . La fig. 4.2 muestra la evolución de

las distorsiones no térmicas de las funciones de distribución de los neutrinos respecto al tiempo  $x$  para un valor específico de momento  $y = 10$ . Justo como en el resultado estándar las distorsiones incrementan con el tiempo hasta alcanzar un valor asintótico para  $x \sim 15$ . La fig. 4.3 muestra los valores asintóticos que alcanzan las distorsiones no térmicas de las funciones de distribución respecto a  $y$ , de aquí es claro que los neutrinos más energéticos generan las distorsiones de mayor amplitud. Además, se observa que los neutrinos electrónicos, al acoplarse más fuertemente a los electrones, sufren distorsiones más amplias respecto a los neutrinos muónicos (tauónicos) justo como se reporta en la literatura (*véase* la Fig. 1 y 2 de [20]). Cuantitativamente, las distorsiones dependientes del sabor leptónico de los neutrinos se evidencian en la modificación a la aportación a la densidad de energía de los neutrinos respecto al equilibrio; para los neutrinos electrónicos calculamos una desviación de  $\delta\rho_{\nu_e} = 1.01\%$ , comparado con  $\delta\rho_{\nu_{\mu(\tau)}} = 0.12\%$  para los neutrinos muónicos (tauónicos). Aunque los resultados coinciden cualitativamente con los resultados estándar ( $\delta\rho_{\nu_e} = 0.94\%$  y  $\delta\rho_{\nu_{\mu(\tau)}} = 0.43\%$  [20]) encontramos desviaciones reducidas aproximadamente a un cuarto para neutrinos muónicos (tauónicos) lo que podría indicar un error en la escritura del código, además del error computacional, lo que aporta a la desviación del valor de  $N_{\text{eff}} = 3.046 \rightarrow 3.035$ .

Los resultados numéricos que obtuvimos de  $N_{\text{eff}}$  presentan desviaciones respecto a los resultados estándar de  $|\delta N_{\text{eff}}| \sim 10^{-2}$  con un error computacional dado por el mismo orden, que no está cerca a la precisión alcanzada por los trabajos referentes de los casos NID y NID+QED ( $|\delta N_{\text{eff}}| = 10^{-4} - 10^{-5}$ ). Sin embargo, los resultados son consistentes cualitativamente; la física del universo temprano durante la época de desacoplamiento que podemos describir con nuestros resultados coincide satisfactoriamente con las descripciones de la literatura. Finalmente, debemos notar que no logramos cumplir con los objetivos de la propuesta del trabajo de grado a cabalidad –no agregamos el efecto de las oscilaciones de neutrinos y consecuentemente no estudiamos el efecto de neutrinos estériles– debido a que la solución de los sistemas de ecuaciones considerando oscilaciones de neutrinos adquiere un nivel de dificultad mayor y requeriría de mucho más tiempo completarlo. Aún así, es posible proseguir en trabajos de pre-grado posteriores con las siguientes recomendaciones: (i) es necesario comprender la física básica del sistema con oscilaciones de neutrinos rápidamente y partir con la escritura del código numérico lo más pronto posible puesto que el sistema de ecuaciones se extiende a uno matricial de nueve componentes mucho más complicado y (ii) el uso de MATHEMATICA es interactivo y muy útil a nivel introductorio, aún así la experiencia adquirida durante este proyecto indica que para trabajos de mayor profundidad MATHEMATICA no es la mejor opción por la naturaleza numérica del código y la estructura interna del lenguaje.

## Agradecimientos

Agradecemos al Grupo de Física Nuclear de la UPTC y en especial a su director, el Dr. Segundo Martínez por facilitar el uso de los equipos de cómputo del grupo de investigación para agilizar la obtención de los resultados numéricos. Agradecemos a los hermanos Jorge y Gloria Peña por brindar tiempo de trabajo en sus equipos de cómputo durante las jornadas de cálculos numéricos que apoyaron los resultados. Edwin Pérez agradece profundamente al director de este proyecto, el Dr. Carlos Yaguna por su guía, paciencia y empeño en impulsar la carrera de sus estudiantes.

Este trabajo es dedicado a mis padres y a mi pareja Gloria Peña por su amor, entusiasmo y apoyo incansables.

---

## Integrales DHS

---

Las funciones  $D_k$  evaluadas explícitamente en las integrales de colisión de las ecuaciones del sistema para desacoplamiento no instantáneo (ecs. 2.26, 2.27) son definidas en [11] y permiten simplificar el la evaluación de cada integral de nueve dimensiones a uno de dos que soluciona a través de tratamiento numérico. Luego de aprovechar las identidades de la función delta  $\delta^{(4)} = \delta^{(3)}\delta$  y notar que todos los elementos matriciales  $|\mathcal{M}|^2$  de los procesos de las tablas 2.1 y 2.2 siguen cierta estructura se definen en general las funciones  $D_k$  a partir de

$$D(p_1, p_2, p'_1, p'_2) \equiv \frac{p_1 p_2 p'_1 p'_2}{64\pi^5} \int_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int e^{i(p_1, \lambda)} d\Omega_{p_1} \int e^{i(p_2, \lambda)} d\Omega_{p_2} \int e^{-i(p'_1, \lambda)} d\Omega_{p'_1} \times \int e^{-i(p'_2, \lambda)} d\Omega_{p'_2} |\mathcal{M}_{f_i}(|\mathbf{p}|)|^2. \quad (\text{A.1})$$

Se encuentran tres tipos diferentes de integrales dada la forma de los elementos matriciales  $|\mathcal{M}|^2$ . Así, se pueden evaluar analíticamente y son fácilmente solucionadas por ejemplo con MATHEMATICA las siguientes expresiones.

$$D_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(\lambda q_1) \sin(\lambda q_2) \sin(\lambda q_3) \sin(\lambda q_4), \quad (\text{A.2})$$

$$D_2(3, 4) = \frac{4q_3 q_4}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(\lambda q_1) \sin(\lambda q_2) \left[ \cos(\lambda q_3) - \frac{\sin(\lambda q_3)}{\lambda q_3} \right] \left[ \cos(\lambda q_4) - \frac{\sin(\lambda q_4)}{\lambda q_4} \right], \quad (\text{A.3})$$

$$D_3 = \frac{4q_1 q_2 q_3 q_4}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \left[ \cos(\lambda q_1) - \frac{\sin(\lambda q_1)}{\lambda q_1} \right] \left[ \cos(\lambda q_2) - \frac{\sin(\lambda q_2)}{\lambda q_2} \right] \times \left[ \cos(\lambda q_3) - \frac{\sin(\lambda q_3)}{\lambda q_3} \right] \left[ \cos(\lambda q_4) - \frac{\sin(\lambda q_4)}{\lambda q_4} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Las funciones  $D_1$  y  $D_3$  son simétricas respecto a cualquier permutación de los argumentos  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$ . La función  $D_2$  es simétrica únicamente respecto a permutaciones del tipo 1 – 2 y 3 – 4. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que  $q_1 > q_2$  y que  $q_3 > q_4$ . Así, las integrales pueden ser escritas en cuatro casos que dependen de la relación entre las cantidades  $q_i$  que puede ser cualquiera de las expresiones de momento físico (o con  $y = a(t)p$ , momento adimensional). En general, se deben evaluar las siguientes funciones para en las funciones 2.26 y 2.27

1.  $q_1 + q_2 > q_3 + q_4$  y  $q_1 + q_4 > q_2 + q_3$ ,

$$D_1 = \frac{1}{2}(q_2 + q_3 + q_4 - q_1), \quad (\text{A.5})$$

$$D_2 = \frac{1}{12}((q_1 - q - 2)^3 + 2(q_3^3 + q_4^3) - 3(q_1 - q_2)(q_3^2 + q_4^2)), \quad (\text{A.6})$$

$$D_3 = \frac{1}{60}(q_1^5 - 5q_1^3q_2^2 + 5q_1^2q_2^3 - q_2^5 - 5q_1^3q_3^2 + 5q_2^3q_3^2 + 5q_1^2q_3^3 + 5q_2^2q_3^3 - q_3^5 - 5q_1^3q_4^2 + 5q_2^3q_4^2 + 5q_3^3q_4^2 + 5q_1^2q_4^3 + 5q_2^2q_4^3 + 5q_3^2q_4^3 - q_4^5). \quad (\text{A.7})$$

2.  $q_1 + q_2 > q_3 + q_4$  y  $q_1 + q_4 < q_2 + q_3$ ,

$$D_1 = q_4, \quad (\text{A.8})$$

$$D_2 = \frac{1}{3}q_4^3, \quad (\text{A.9})$$

$$D_3 = \frac{1}{30}q_4^3(5q_1^2 + 5q_2^2 + 5q_3^2 - q_4^2), \quad (\text{A.10})$$

3.  $q_1 + q_2 < q_3 + q_4$  y  $q_1 + q_4 < q_2 + q_3$ ,

$$D_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2 + q_4 - q_3), \quad (\text{A.11})$$

$$D_2 = \frac{1}{12}(-(q_1 + q_2)^3 - 2q_3^3 + 2q_4^3 + 3(q_1 + q_2)(q_3^2 + q_4^2)). \quad (\text{A.12})$$

$D_3$  es la misma que la ecuación del caso 1 pero con las permutaciones 1 – 3 y 2 – 4.

4.  $q_1 + q_2 < q_3 + q_4$  y  $q_1 + q_4 > q_2 + q_3$ ,

$$D_1 = q_2, \quad (\text{A.13})$$

$$D_2 = \frac{1}{6}q_2(q_3^2 + 3q_4^2 - 3q_1^2 - q_2^2), \quad (\text{A.14})$$

$$D_3 = \frac{1}{30}q_2^3(5q_1^5 + 5q_3^2 + 5q_4^2 - q_2^2). \quad (\text{A.15})$$

En las expresiones de las integrales de colisión en términos de las funciones  $D_k$  se debe cancelar la función delta  $\delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2)$  que elimina una de las integrales. Convenientemente se usa sobre la integral en términos de  $p_2$  de modo que la solución numérica se realiza sobre las variables  $p_3$  y  $p_4$ . Además, en cada expresión en la que aparece  $E_2$  se modifica por  $E_2 = E_3 + E_4 - E_1$  y  $p_2 = \sqrt{E_2^2 - m_2^2}$ , donde  $E_1$  depende del valor numérico de  $p_1$  en la discretización del momento.

---

## Bibliografia

---

- [1] Jack J. Bennett, Gilles Buldgen, Pablo F. de Salas, Marco Drewes, Stefano Gariazzo, Sergio Pastor, and Yvonne Y. Y. Wong. Towards a precision calculation of  $N_{\text{eff}}$  in the Standard Model II: Neutrino decoupling in the presence of flavour oscillations and finite-temperature QED. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(04):073, dec 2020. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2021/04/073. URL <http://arxiv.org/abs/2012.02726>.
- [2] Brian D. Fields, Keith A. Olive, Tsung-Han Yeh, and Charles Young. Big-Bang Nucleosynthesis After Planck. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(3), dec 2019. ISSN 14757516. doi: 10.1088/1475-7516/2020/03/010. URL <http://arxiv.org/abs/1912.01132>.
- [3] Planck Collaboration and N Aghanim. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, jul 2018. ISSN 0004-6361. doi: 10.1051/0004-6361/201833910. URL <http://arxiv.org/abs/1807.06209>.
- [4] K. N. Abazajian. Neutrino Physics from the Cosmic Microwave Background and Large Scale Structure. *Astroparticle Physics*, 63:66–80, sep 2013. ISSN 09276505. doi: 10.1016/j.astropartphys.2014.05.014. URL <http://arxiv.org/abs/1309.5383>.
- [5] Edward W. Kolb and Michael S. Turner. *The Early Universe*. Taylor & Francis Group LLC, Boca Raton, 1990. ISBN 978-0-201-62674-2.
- [6] Duane A. Dicus, Edward W. Kolb, A. M. Gleeson, E. C. G. Sudarshan, Vigdor L. Teplitz, and Michael S. Turner. Primordial nucleosynthesis including radiative, Coulomb, and finite-temperature corrections to weak rates. *Physical Review D*, 26(10):2694–2706, nov 1982. ISSN 0556-2821. doi: 10.1103/PhysRevD.26.2694.
- [7] Kevork N. Abazajian. CMB-S4 Science Book, First Edition. *arXiv e-prints*, oct 2016. URL <https://arxiv.org/abs/1610.02743v1>.
- [8] Scott Dodelson and Michael S. Turner. Nonequilibrium neutrino statistical mechanics in the expanding Universe. *Physical Review D*, 46(8):3372–3387, oct 1992. ISSN 05562821. doi: 10.1103/PhysRevD.46.3372.
- [9] Brian D. Fields, Scott Dodelson, and Michael S. Turner. Effect of neutrino heating on primordial nucleosynthesis. *Physical Review D*, 47(10):4309–4314, may 1993. ISSN 0556-2821. doi: 10.1103/PhysRevD.47.4309.
- [10] Steen Hannestad and Jes Madsen. Neutrino decoupling in the early Universe. *Physical Review D*, 52(4):1764–1769, aug 1995. ISSN 0556-2821. doi: 10.1103/PhysRevD.52.1764.



- [11] A. D. Dolgov, S. H. Hansen, and D. V. Semikoz. Nonequilibrium Corrections to the Spectra of Massless Neutrinos in the Early Universe. *Nuclear Physics B*, 503(1-2):426–444, mar 1997. ISSN 05503213. doi: 10.1016/S0550-3213(97)00479-3. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9703315>.
- [12] A. D. Dolgov, S. H. Hansen, and D. V. Semikoz. Non-equilibrium corrections to the spectra of massless neutrinos in the early universe. *Nuclear Physics B*, 543(1-2):269–274, mar 1999. ISSN 05503213. doi: 10.1016/S0550-3213(98)00818-9.
- [13] S. Esposito, G. Miele, S. Pastor, M. Peloso, and O. Pisanti. Non equilibrium spectra of degenerate relic neutrinos. *Nuclear Physics B*, 590(3):539–561, dec 2000. ISSN 05503213. doi: 10.1016/S0550-3213(00)00554-X.
- [14] N. Fornengo, C. W. Kim, and J. Song. Finite temperature effects on the neutrino decoupling in the early Universe. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 56(8):5123–5134, feb 1997. ISSN 15502368. doi: 10.1103/PhysRevD.56.5123. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9702324>.
- [15] G. Mangano, G. Miele, S. Pastor, and M. Peloso. A precision calculation of the effective number of cosmological neutrinos. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, 534(1-4):8–16, nov 2001. ISSN 03702693. doi: 10.1016/S0370-2693(02)01622-2. URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0111408>.
- [16] Pablo F. de Salas and Sergio Pastor. Relic neutrino decoupling with flavour oscillations revisited. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(7), jun 2016. ISSN 14757516. doi: 10.1088/1475-7516/2016/07/051. URL <http://arxiv.org/abs/1606.06986>.
- [17] Jack J. Bennett, Gilles Buldgen, Marco Drewes, and Yvonne Y. Y. Wong. Towards a precision calculation of the effective number of neutrinos  $N_{\text{eff}}$  in the Standard Model I: The QED equation of state. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(03):003–003, nov 2019. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2020/03/003. URL <http://arxiv.org/abs/1911.04504>.
- [18] Kensuke Akita and Masahide Yamaguchi. A precision calculation of relic neutrino decoupling. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(08):012–012, may 2020. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2020/08/012. URL <http://arxiv.org/abs/2005.07047>.
- [19] Julien Froustey, Cyril Pitrou, and Maria Cristina Volpe. Neutrino decoupling including flavour oscillations and primordial nucleosynthesis. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(12):015–015, aug 2020. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2020/12/015. URL <http://arxiv.org/abs/2008.01074>.
- [20] Gianpiero Mangano, Gennaro Miele, Sergio Pastor, Tegwayco Pinto, Ofelia Pisanti, and Pasquale D. Serpico. Relic neutrino decoupling including flavour oscillations. *Nuclear Physics B*, 729(1-2):221–234, jun 2005. ISSN 05503213. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2005.09.041. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0506164>.
- [21] S. Gariazzo, P. F. de Salas, and S. Pastor. Thermalisation of sterile neutrinos in the early Universe in the 3+1 scheme with full mixing matrix. *Journal of Cosmology and Astroparticle*

- Physics*, 2019(7), may 2019. ISSN 14757516. doi: 10.1088/1475-7516/2019/07/014. URL <http://arxiv.org/abs/1905.11290>.
- [22] Steffen Hagstotz, Pablo F. de Salas, Stefano Gariazzo, Martina Gerbino, Massimiliano Lattanzi, Sunny Vagnozzi, Katherine Freese, and Sergio Pastor. Bounds on light sterile neutrino mass and mixing from cosmology and laboratory searches. *arXiv e-prints*, mar 2020. URL <https://arxiv.org/abs/2003.02289v1>.
- [23] Steen Hannestad, Rasmus Sloth Hansen, Thomas Tram, and Yvonne Y. Y. Wong. Active-sterile neutrino oscillations in the early Universe with full collision terms. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(08):019–019, jun 2015. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2015/08/019. URL <http://arxiv.org/abs/1506.05266>.
- [24] Maria Archidiacono, Steen Hannestad, Alessandro Mirizzi, Georg Raffelt, and Yvonne Y. Y. Wong. Axion hot dark matter bounds after Planck. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(10):020–020, jul 2013. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2013/10/020. URL <http://arxiv.org/abs/1307.0615>.
- [25] Pasquale Di Bari, Stephen F. King, and Alexander Merle. Dark Radiation or Warm Dark Matter from long lived particle decays in the light of Planck. *Physics Letters B*, 724(1-3): 77–83, mar 2013. ISSN 03702693. doi: 10.1016/j.physletb.2013.06.003. URL <http://arxiv.org/abs/1303.6267>.
- [26] Jasper Hasenkamp and Jörn Kersten. Dark radiation from particle decay: cosmological constraints and opportunities. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(8), dec 2012. ISSN 14757516. doi: 10.1088/1475-7516/2013/08/024. URL <http://arxiv.org/abs/1212.4160>.
- [27] Inc. Wolfram Research. Mathematica, 2017. URL <https://www.wolfram.com/mathematica>.
- [28] Barbara Ryden. Introduction to Cosmology. page 278, nov 2016. doi: 10.1017/9781316651087.
- [29] Jeremy Bernstein. *Kinetic Theory in the Expanding Universe*. Cambridge University Press, aug 1988. ISBN 9780521360500. doi: 10.1017/CBO9780511564185. URL <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511564185/type/book>.
- [30] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008. ISBN 0191523607.
- [31] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, aug 2019. ISBN 9781108488396. doi: 10.1017/9781108770385. URL <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9781108770385/type/book>.
- [32] A Zee. *Einstein Gravity in a Nutshell*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2013. ISBN 9780691145587.
- [33] A. D. Dolgov. Neutrinos in cosmology. *Physics Report*, 370(4-5):333–535, feb 2002. ISSN 03701573. doi: 10.1016/S0370-1573(02)00139-4. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0202122>.

- [34] Miguel Escudero. Precision Early Universe Thermodynamics made simple: Neff and Neutrino Decoupling in the Standard Model and beyond. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, pages 0–48, jan 2020. doi: 10.1088/1475-7516/2020/05/048. URL <http://arxiv.org/abs/2001.04466>.
- [35] A. D. Dolgov and Ya B. Zeldovich. Cosmology and elementary particles. *Reviews of Modern Physics*, 53(1):1–41, jan 1981. ISSN 0034-6861. doi: 10.1103/RevModPhys.53.1.
- [36] Kari Enqvist, Kimmo Kainulainen, and Victor Semikoz. Neutrino annihilation in hot plasma. *Nuclear Physics B*, 374(2):392–404, apr 1992. ISSN 05503213. doi: 10.1016/0550-3213(92)90359-J.
- [37] Ludwig Boltzmann. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas-molekülen. In Friedrich Hasenohrl, editor, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, volume 66, pages 275–370. Cambridge, jul 1872. doi: 10.1017/CBO9781139381420.023. URL <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/CBO9781139381420A028/type/book{ }part>.
- [38] Julien Lesgourgues, Gianpiero Mangano, Gennaro Miele, and Sergio Pastor. *Neutrino cosmology*. Cambridge University Press, New York, 2013. ISBN 9781139012874. doi: 10.1017/CBO9781139012874.
- [39] Heckler. Astrophysical applications of quantum corrections to the equation of state of a plasma. *Physical review. D, Particles and fields*, 49(2):611–617, jan 1994. ISSN 0556-2821. doi: 10.1103/physrevd.49.611.
- [40] Sz. Borsanyi, Z. Fodor, K. H. Kampert, S. D. Katz, T. Kawanai, T. G. Kovacs, S. W. Mages, A. Pasztor, F. Pittler, J. Redondo, A. Ringwald, and K. K. Szabo. Lattice QCD for Cosmology. *arXiv e-prints*, jun 2016. URL <https://arxiv.org/abs/1606.07494v2>.
- [41] Alexey Boyarsky, Oleg Ruchayskiy, and Mikhail Shaposhnikov. The role of sterile neutrinos in cosmology and astrophysics. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 59(1):191–214, dec 2008. ISSN 0163-8998. doi: 10.1146/annurev.nucl.010909.083654. URL <http://arxiv.org/abs/0901.0011>.
- [42] Kevork Abazajian, George M. Fuller, and Mitesh Patel. Sterile Neutrino Hot, Warm, and Cold Dark Matter. *Physical Review D*, 64(2):023501, jan 2001. ISSN 0556-2821. doi: 10.1103/PhysRevD.64.023501. URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0101524>.
- [43] Daniel Baumann, Florian Beutler, Raphael Flauger, Daniel Green, Anže Slosar, Mariana Vargas-Magaña, Benjamin Wallisch, and Christophe Yèche. First Constraint on the Neutrino-Induced Phase Shift in the BAO Spectrum. *Nature Physics*, 15(5):465–469, mar 2018. ISSN 1745-2473. doi: 10.1038/s41567-019-0435-6. URL <http://arxiv.org/abs/1803.10741>.
- [44] P. Daniel Meerburg, Renée Hložek, Boryana Hadzhiyska, and Joel Meyers. Multi-wavelength constraints on the inflationary consistency relation. *Physical Review D*, 91(10):103505, feb 2015. ISSN 1550-7998. doi: 10.1103/PhysRevD.91.103505. URL <http://arxiv.org/abs/1502.00302>.

- [45] Andrew Stewart and Robert Brandenberger. Observational Constraints on Theories with a Blue Spectrum of Tensor Modes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(8), nov 2007. ISSN 14757516. doi: 10.1088/1475-7516/2008/08/012. URL <http://arxiv.org/abs/0711.4602>.
- [46] Latham A. Boyle and Alessandra Buonanno. Relating gravitational wave constraints from primordial nucleosynthesis, pulsar timing, laser interferometers, and the CMB: implications for the early universe. *Physical Review D*, 78(4):043531, aug 2007. ISSN 1550-7998. doi: 10.1103/PhysRevD.78.043531. URL <http://arxiv.org/abs/0708.2279>.
- [47] Lotty Ackerman, Matthew R. Buckley, Sean M. Carroll, and Marc Kamionkowski. Dark Matter and Dark Radiation. *Physical Review D*, 79(2):023519, oct 2008. ISSN 1550-7998. doi: 10.1103/PhysRevD.79.023519. URL <http://arxiv.org/abs/0810.5126>.
- [48] David E. Kaplan, Gordan Z. Krnjaic, Keith R. Rehermann, and Christopher M. Wells. Dark Atoms: Asymmetry and Direct Detection. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(10):011–011, may 2011. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2011/10/011. URL <http://arxiv.org/abs/1105.2073>.
- [49] Daniel Baumann, Daniel Green, and Benjamin Wallisch. Searching for Light Relics with Large-Scale Structure. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(08):029–029, dec 2017. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2018/08/029. URL <http://arxiv.org/abs/1712.08067>.
- [50] Alberto Salvio, Alessandro Strumia, and Wei Xue. Thermal axion production. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(01):011–011, oct 2013. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2014/01/011. URL <http://arxiv.org/abs/1310.6982>.
- [51] Christopher Brust, David E. Kaplan, and Matthew T. Walters. New Light Species and the CMB. *Journal of High Energy Physics*, 2013(12):58, mar 2013. ISSN 1029-8479. doi: 10.1007/JHEP12(2013)058. URL <http://arxiv.org/abs/1303.5379>.
- [52] Masahiro Kawasaki, Masaki Yamada, and Tsutomu T. Yanagida. Observable dark radiation from cosmologically safe QCD axion. *Physical Review D*, 91(12):125018, apr 2015. ISSN 1550-7998. doi: 10.1103/PhysRevD.91.125018. URL <http://arxiv.org/abs/1504.04126>.
- [53] Daniel Baumann, Daniel Green, and Benjamin Wallisch. A New Target for Cosmic Axion Searches. *Physical Review Letters*, 117(17):171301, apr 2016. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.117.171301. URL <http://arxiv.org/abs/1604.08614>.
- [54] E. Grohs, G. M. Fuller, C. T. Kishimoto, M. W. Paris, and A. Vlasenko. Neutrino energy transport in weak decoupling and big bang nucleosynthesis. *Physical Review D*, 93(8):083522, dec 2015. ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.93.083522. URL <http://arxiv.org/abs/1512.02205>.