

Mecánica: Leyes de Newton y Momento de Inercia

Pazos Pérez, José
CAMBIAR DNI

Índice

I	Leyes de Newton	3
1	Objetivos	3
1.1	Ley fundamental de la dinámica	3
1.2	Procedimiento de medida	3
1.3	Otras consideraciones	4
2	MRU	5
2.1	Tablas de datos	5
2.2	Representación gráfica	6
2.3	Ajuste por mínimos cuadrados	7
2.4	Interpretación: Velocidad media	8
2.5	Velocidad instantánea	8
2.5.1	Tratamiento de datos	8
2.5.2	Cálculo de V	10
2.5.3	Propagación de errores	10
3	MRUA	12
3.1	Tablas de datos	12
3.2	Método 1: $s = \frac{1}{2}at^2$	12
3.2.1	Ajuste por mínimos cuadrados	14
3.3	Método 2: $a = \frac{\Delta V}{\Delta T}$	15
3.3.1	Ajuste por mínimos cuadrados	16
3.4	Aceleración teórica	17
4	Conclusiones	18
4.1	Primera ley de Newton: MRU	18
4.2	Segunda ley de Newton: MRUA	18
II	Momento de Inercia	20
1	Objetivos	20
2	Determinación de la constante recuperadora del muelle	20
2.1	Cálculo del momento de la fuerza	20
2.2	Tabla de datos	21
2.3	Representación gráfica	22
2.4	Ajuste por mínimos cuadrados	23

3	Momentos de inercia de varios cuerpos	24
3.1	Cuerpo 1: Disco macizo	24
3.1.1	Tabla de datos	24
3.1.2	Tratamiento de datos	25
3.1.3	Momento de inercia experimental	25
3.1.4	Momento de inercia teórico	25
3.2	Cuerpo 2: Cilindro macizo	26
3.2.1	Tabla de datos	26
3.2.2	Tratamiento de datos	26
3.2.3	Momento de inercia experimental	26
3.2.4	Momento de inercia teórico	27
4	Teorema de Steiner	28
4.1	Cuerpo 1: Disco	28
4.1.1	Tabla de datos	28
4.1.2	Tratamiento de datos	29
4.1.3	Momento de inercia experimental	29
4.1.4	Momento de inercia teórico (Steiner)	29
4.1.5	Representación gráfica	30
4.2	Cuerpo 2: Barra	31
4.2.1	Tabla de datos	31
4.2.2	Tratamiento de datos	33
4.2.3	Momento de inercia experimental	33
4.2.4	Momento de inercia teórico (Steiner)	34
4.2.5	Representación gráfica	34
5	Conclusiones	37
5.1	Primera parte	37
5.2	Segunda parte	37
5.3	Tercera parte	37
	Apéndice	39
	Código y datos	39
	Bibliografía	39
	Ajuste por mínimos cuadrados	40

Experiencia I

Leyes de Newton

1 Objetivos

Realizaremos una serie de experiencias para verificar de manera empírica las leyes de Newton en dos escenarios diferentes:

- Movimiento rectilíneo uniforme [MRU]
- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado [MRUA]

1.1 Ley fundamental de la dinámica

Comprobaremos la ley fundamental de la dinámica. Esta propone que la fuerza que actúa sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración de su centro de masas, con una constante igual a la masa del cuerpo:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

De esta ecuación podemos deducir dos factores esenciales:

- Si no se aplica ninguna fuerza sobre el cuerpo, su aceleración será nula, por lo que mantendrá su velocidad. A esto lo llamamos MRU (Primera ley de Newton).
- Si por el contrario aplicamos una fuerza, su aceleración será proporcional a la misma e inversamente proporcional a la masa del cuerpo. Si la fuerza es constante se considera MRUA (Segunda ley de Newton).

En esta práctica comprobaremos ambos casos.

1.2 Procedimiento de medida

Aunque no entraremos en gran detalle sobre el montaje experimental debido a la situación extraordinaria que nos impidió ir al laboratorio a realizar esta práctica, estableceremos cuáles serán los procedimientos básicos para tomar las medidas.

Utilizaremos un banco con microperforaciones que crearan una superficie de aire que hará flotar a nuestra masa y reducirá drásticamente el efecto del rozamiento. Además, colocaremos dos detectores que medirán cuánto tiempo transcurre cuando el móvil se desplaza de uno a

otro, con lo que calcularemos la variación de la velocidad, además de cuánto tiempo tarda el diafragma en cruzar el detector, útil para saber la velocidad instantánea del objeto.

Explicaremos los detalles de cada uno de los dos experimentos en sus respectivos apartados.

1.3 Otras consideraciones

Para el tratamiento de errores utilizaremos los métodos descritos en el documento *Análisis de Incertidumbres* de Alfredo Amigo. La fórmula general de propagación de incertidumbres que referenciaremos a lo largo del trabajo se describe a continuación:

$$s(y) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \cdot s^2(x_i)} \quad (2)$$

Referido a los ajustes por mínimos cuadrados, la explicación completa se encuentra en las memorias de electricidad, aunque en el apéndice hay una reproducción exacta del apartado en el que se habla sobre ella (5.3).

2 MRU

En esta primera parte consideraremos el caso en el que las fuerzas que actúan sobre el objeto son nulas (o prácticamente despreciables). Le comunicaremos un impulso inicial al móvil y dejaremos que se desplace sobre el banco. Deberíamos de obtener una velocidad constante a lo largo de todo el recorrido.

Mediremos la distancia entre los detectores (S), la cual iremos aumentando en sucesivas medidas, y anotaremos tres tiempos diferentes. T será el tiempo que tarda en recorrer S, T1 el tiempo que tarda el diafragma en atravesar el primer detector y T2 lo equivalente referido al segundo. Hemos de tener en cuenta que la longitud del diafragma del móvil (L) es de 0,100m para nuestros cálculos.

2.1 Tablas de datos

Representaremos las tablas de los datos obtenidos con tres masas distintas realizando diez medidas para distintas separaciones S. Como las incertidumbres de S y T* se mantienen constantes, siendo $s(S) = 0,001m$ y $s(T) = 0,001s$, no las incluiremos en la tabla. También diremos que las incertidumbres de L y m son $s(L) = 0,001m$ y $s(m) = 0,00001kg$.

M₁ = 0,20089kg				M₂ = 0,26079kg			M₃ = 0,30167kg		
S(m)	T(s)	T1(s)	T2(s)	T(s)	T1(s)	T2(s)	T(s)	T1(s)	T2(s)
0,400	0,465	0,116	0,117	0,530	0,132	0,132	0,559	0,140	0,140
0,500	0,584	0,117	0,118	0,690	0,132	0,132	0,701	0,139	0,140
0,600	0,694	0,115	0,116	0,794	0,131	0,132	0,870	0,143	0,144
0,650	0,752	0,115	0,116	0,855	0,132	0,132	0,920	0,140	0,142
0,700	0,818	0,117	0,117	1,012	0,142	0,144	0,985	0,139	0,140
0,800	0,929	0,116	0,117	1,087	0,133	0,134	1,141	0,141	0,143
0,900	1,052	0,116	0,117	1,200	0,132	0,133	1,278	0,140	0,142
1,000	1,195	0,118	0,118	1,335	0,132	0,134	1,419	0,140	0,142
1,100	1,320	0,118	0,118	1,472	0,132	0,134	1,556	0,139	0,142
1,200	1,398	0,115	0,117	1,632	0,134	0,136	1,700	0,139	0,142

2.2 Representación gráfica

Ahora pasaremos a dibujar los datos de S en función de T . Para ello procesaremos los datos en `python`, utilizando la librería `pandas`, que nos permite importar directamente archivos `.csv`, el mismo formato que usamos para representar las tablas de `LATEX`.

```
import numpy as np
import pandas as pd

d = [pd.read_csv("LN_MRU_M{}.csv".format(i), sep=';', decimal=',')
      for i in range(1,4)]
S = np.array([d[j]["S"] for j in range(0,3)])
T = np.array([d[j]["T"] for j in range(0,3)])
```

Y utilizaremos estas estructuras de `numpy` para representar los datos, gracias a `matplotlib`. Los guardaremos en formato `.pgf` para cargarlos directamente en `LATEX` con toda la calidad.

```
for i in range(len(T)):
    plt.clf()
    plt.scatter(T[i], S[i], color=c[i])
    #Guardar usando una funcion personalizada tres graficas distintas
```

Finalmente obtenemos estas gráficas:

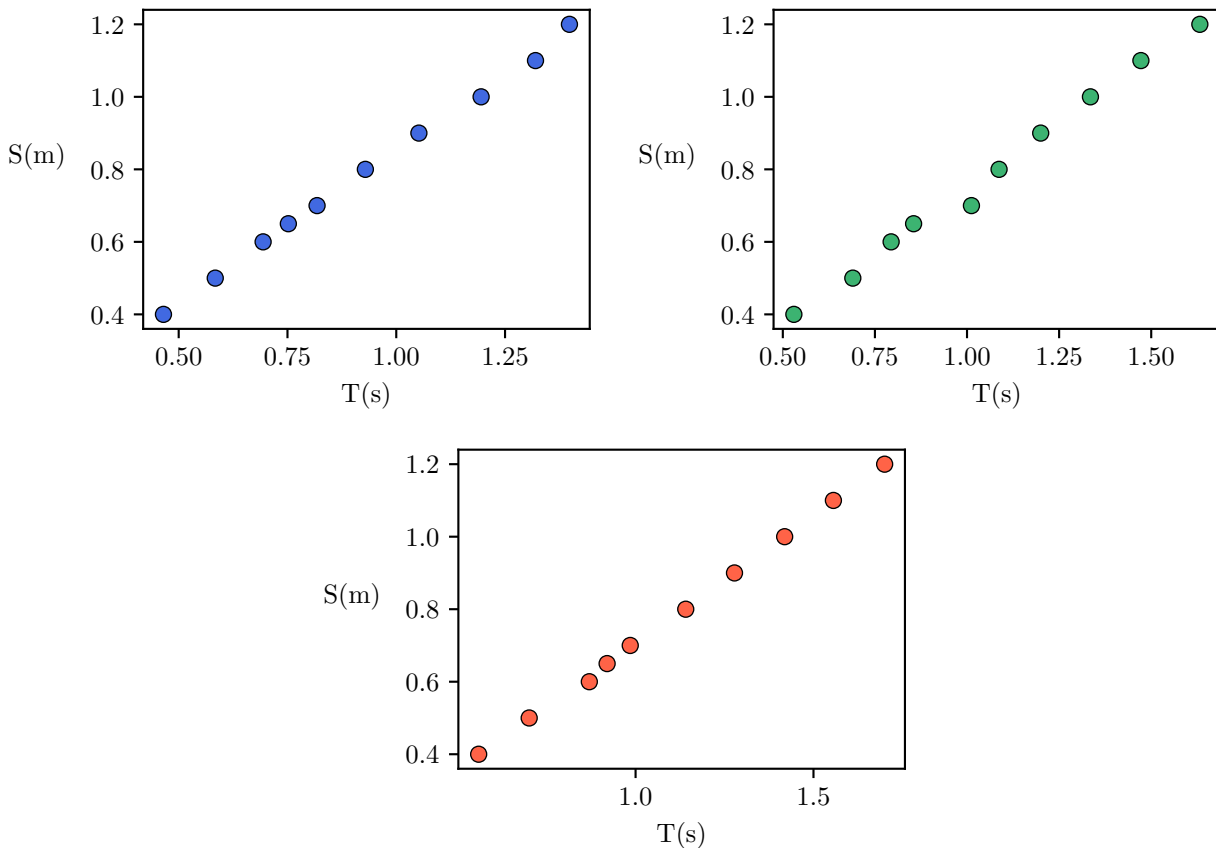


Figura 1: Distancia entre detectores (S) frente a tiempo (T) para (m_1, m_2, m_3)

2.3 Ajuste por mínimos cuadrados

Como podemos observar, las gráficas anteriores parecen ajustarse a una recta, por lo que procederemos a hacer una regresión lineal (ver sección 5.3). Además, sabemos que si la distancia entre los detectores es $S = 0$, el tiempo que el móvil tardará en recorrerla también será $T = 0$, por lo que la recta debe pasar por el origen. Deducimos pues que es una regresión lineal sin término independiente. Además, las incertidumbres $s(y) = s(S)$ no varían, por lo que podremos hacer una regresión simple. Procedemos a representar las gráficas con sus correspondientes rectas y términos de ajuste.

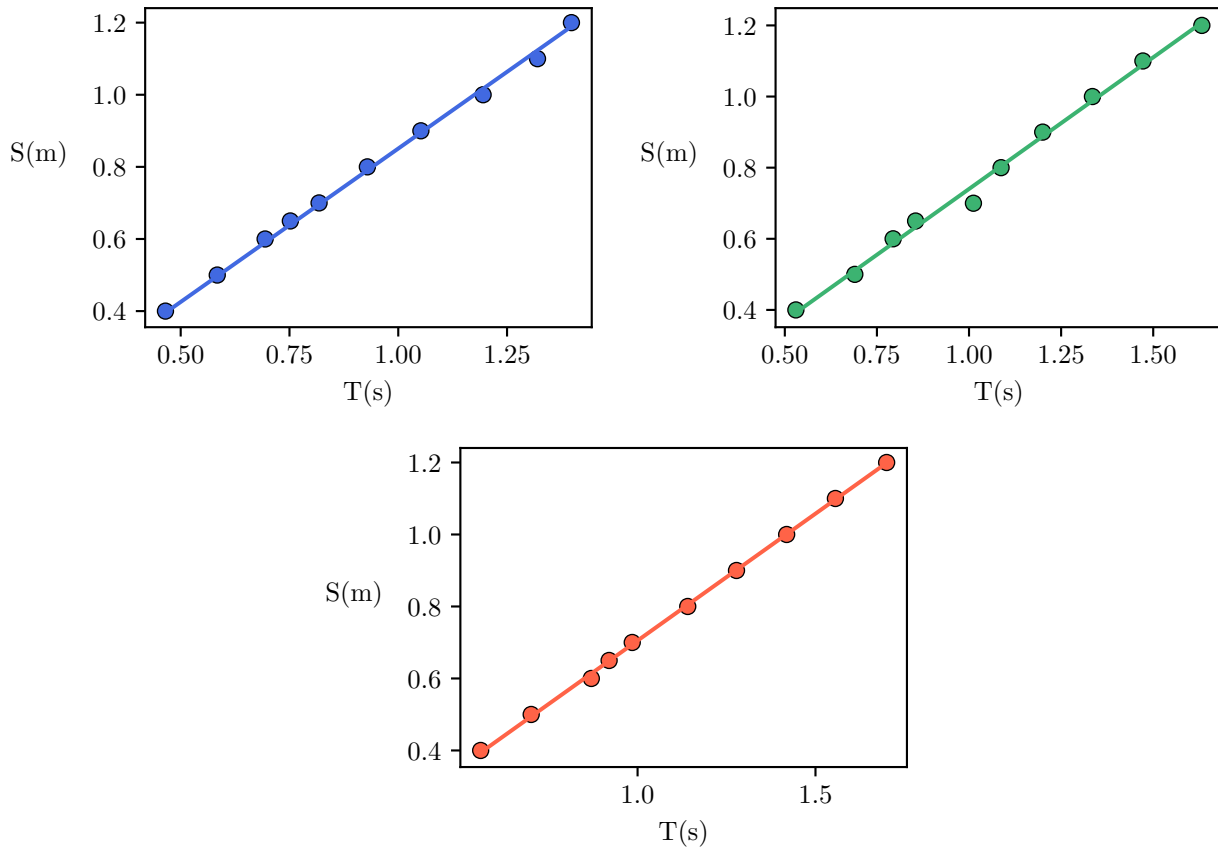


Figura 2: Distancia entre detectores (S) frente a tiempo (T) para (m_1, m_2, m_3) con un ajuste lineal por mínimos cuadrados sin término independiente

$b_1 = 0,8508 \pm 0,0039m/s$	$s_1 = 0,012$	$r_1 = 0,99990$
$b_2 = 0,7401 \pm 0,0056m/s$	$s_2 = 0,020$	$r_2 = 0,9997$
$b_3 = 0,7052 \pm 0,0016m/s$	$s_3 = 0,0059$	$r_3 = 0,99997$

Hemos decidido enseñar las gráficas en el dominio en el que tomamos los datos experimentales, pero podemos comprobar fácilmente que las rectas pasan por cero si extendemos la recta para que llegue al origen.

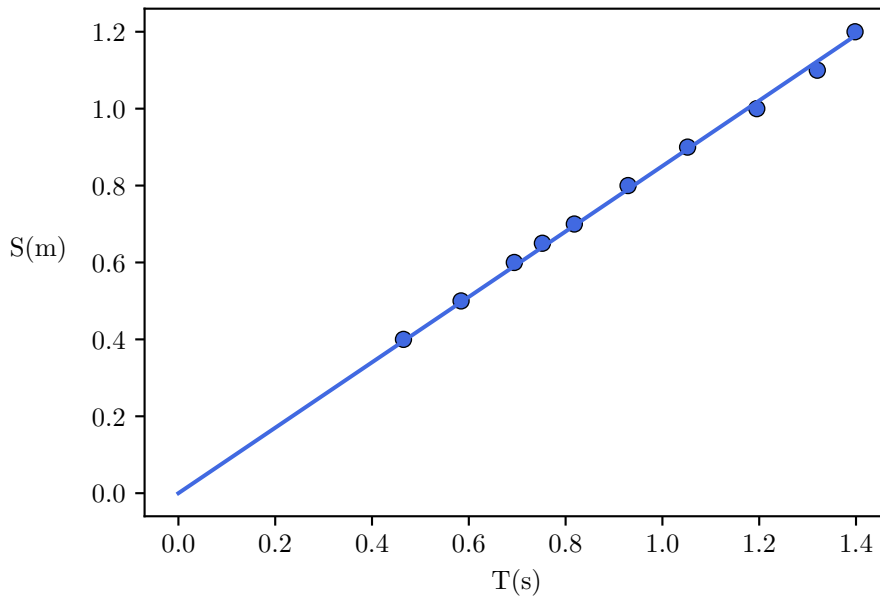


Figura 3: Extensión de la gráfica para m_1 hasta el origen

2.4 Interpretación: Velocidad media

Ahora que tenemos un ajuste lineal para cada tabla de datos, podemos deducir que la pendiente de esas rectas (el término b) es la velocidad media del móvil. Si tomamos la siguiente ecuación podemos ver las similitudes:

$$S = v \cdot T \quad S = b \cdot T \quad \Rightarrow \quad v = b \quad (3)$$

Y tendremos las velocidades medias de los móviles con sus incertidumbres:

$$v_1 = 0,8508 \pm 0,0039m/s \quad v_2 = 0,7401 \pm 0,0056m/s \quad v_3 = 0,7052 \pm 0,0016m/s$$

2.5 Velocidad instantánea

Trataremos de calcular la velocidad instantánea del objeto al pasar los detectores 1 y 2. Para ello podemos utilizar los distintos datos T1 y T2 que se miden para cada distancia S en las tablas experimentales, pero al ser distintas medidas debemos de aplicar tratamiento de errores para dar una cifra que las represente a todas.

2.5.1 Tratamiento de datos

Aplicaremos el procedimiento estándar de tratamiento para varias medidas a las columnas T1 y T2 de nuestras tablas. Como demostración iremos indicando el valor de los parámetros

calculados para T1 en la primera tabla, pero al final indicaremos todos los datos calculados para el resto de columnas. En el proceso explicaremos las fórmulas necesarias así como el código utilizado para implementarlo en `python`.

1. Calculamos la media de la muestra, \bar{x} .

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1,163}{10} = 0,1163s \quad (4)$$

```
def tratamiento_datos(x, sb=0):
    #x es un array de numpy con los datos a tratar
    #sb es la incertidumbre experimental
    import numpy as np
    #Media
    fmed = lambda x: x.sum() / len(x)
    med = fmed(x)
```

2. Calculamos la desviación típica de la muestra, $s_A(x)$.

$$s_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1,21 \cdot 10^{-5}}{10-1}} = 0,0012s \quad (5)$$

```
#Desviacion tipica muestra
fsa = lambda x, m: (((x - m)**2).sum() / (len(x) - 1))**0.5
sa = fsa(x, med)
```

3. Evaluamos los valores discordantes, aquellos que se encuentren fuera del intervalo de confianza $\bar{x} - k \cdot s_A(x) \leq x_i \leq \bar{x} + k \cdot s_A(x) = 0,1139s \leq x_i \leq 0,1187s$. Tomaremos $k = 2$ para asegurar una cobertura del 95%. En este caso todos los valores están dentro del intervalo y no hay que eliminar ninguno. Por ejemplo, en T1 de la segunda tabla, el valor 0,142 no entra en su intervalo de confianza y ha de ser eliminado.

```
#Valores discordantes
k = 2
lb = med - k*sa
ub = med + k*sa
e = np.array(np.where(np.logical_or(x <= lb, x >= ub)))
.flatten().astype(np.int32).tolist()
nx = np.delete(x, e)
```

4. Volvemos a computar el valor medio \bar{x} y la desviación típica de la muestra $s_A(x)$, además la desviación típica de la media $s_A(\bar{x})$ con los datos corregidos. No aplicar este proceso más de una vez.

$$s_A(\bar{x}) = \frac{s_A(x)}{\sqrt{n}} = \frac{0,0012}{\sqrt{10}} = 0,00038s \quad (6)$$

```

#Calcular de nuevo
med = fmed(nx)
sa = fsa(nx, med)
#Desviacion tipica media
sm = sa / len(nx)**0.5

```

5. Calculamos la incertidumbre combinada, $s_C(\bar{x})$.

$$s_C(\bar{x}) = \sqrt{[s_A(\bar{x})]^2 + [s_B(\bar{x})]^2} = \sqrt{[0,00038]^2 + [0,001]^2} = 0,0011s \quad (7)$$

6. Resultado final de la forma $\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi = n - 1$:

$$(\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) = (0,1163s; 0,0011s; 9)$$

Ahora completaremos los resultados del resto de tablas:

Para m_2 -T1 eliminamos 0,142; para m_2 -T2 eliminamos 0,144; para m_3 -T1 eliminamos 0,143

$m_1 :$	$T1(0,1163s; 0,0011s; 9)$	$T2(0,1171s; 0,0011s; 9)$
$m_2 :$	$T1(0,1322s; 0,0011s; 8)$	$T2(0,1332s; 0,0011s; 8)$
$m_3 :$	$T1(0,1397s; 0,0010s; 8)$	$T2(0,1417s; 0,0011s; 9)$

2.5.2 Cálculo de V

Utilizando los datos descritos anteriormente y sabiendo que la longitud del diafragma es $L = 0,100 \pm 0,001m$ calcularemos las velocidades instantáneas en ambos detectores. Si son iguales (o razonablemente similares) comprobaremos que al no aplicar una fuerza la velocidad se mantiene constante.

$$V_1 = \frac{L}{T_1} \quad V_2 = \frac{L}{T_2} \quad (8)$$

$m_1 :$	$V_1 = \frac{0,1}{0,1163} = 0,860m/s$	$V_2 = \frac{0,1}{0,1171} = 0,854m/s$
$m_2 :$	$V_1 = \frac{0,1}{0,1322} = 0,7563m/s$	$V_2 = \frac{0,1}{0,1332} = 0,7506m/s$
$m_3 :$	$V_1 = \frac{0,1}{0,1397} = 0,7160m/s$	$V_2 = \frac{0,1}{0,1417} = 0,7057m/s$

2.5.3 Propagación de errores

Antes de afirmar nada, calcularemos también el error de dichas medidas utilizando propagación de errores.

$$s(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \cdot s^2(L) + \left(\frac{\partial V}{\partial T_i}\right)^2 \cdot s^2(T_i)} = \sqrt{\frac{s^2(L)}{T_i^2} + \frac{L^2 \cdot s^2(T_i)}{T_i^4}} \quad (9)$$

Finalmente obtenemos:

$$\begin{array}{lll} m_1 : & V_1 = 0,860 \pm 0,011 m/s & V_2 = 0,854 \pm 0,011 m/s \\ m_2 : & V_1 = 0,7563 \pm 0,0095 m/s & V_2 = 0,7506 \pm 0,0094 m/s \\ m_3 : & V_1 = 0,7160 \pm 0,0088 m/s & V_2 = 0,7057 \pm 0,0086 m/s \end{array}$$

Como podemos comprobar, los resultados son muy parecidos entre ambas velocidades para cada masa. La ligera diferencia que entra dentro del intervalo de incertidumbre se puede deber a las mediciones del laboratorio así como al rozamiento del aire por no realizar el experimento en un vacío.

3 MRUA

En la segunda parte de la práctica verificaremos que la fuerza es proporcional a la aceleración. La configuración es igual a la del primer experimento con una salvedad. Ahora le comunicaremos una aceleración al móvil utilizando un peso que cuelga de una polea en el otro extremo del banco que acelerará hacia el suelo por la acción de la gravedad.

3.1 Tablas de datos

En esta ocasión seguiremos midiendo S y T cómo la distancia entre los detectores y el tiempo que tarda en recorrerla, y sólo tomaremos T_2 cómo el tiempo que el diafragma tarda en recorrer el segundo detector. Las incertidumbres son constantes, $s(S) = 0,001m$ y $s(T) = 0,001s$, por lo que no las incluiremos en la tabla. Además, el diafragma mide $L = 0,1m$ con una incertidumbre igual a la de S , y la masa que cuelga de la polea es $m = 0,02977kg$. Todas las masas tienen incertidumbre $s(M) = 0,00001kg$.

	$M_1 = 0,20401kg$		$M_2 = 0,23003kg$		$M_3 = 0,33012kg$	
S(m)	T(s)	T2(s)	T(s)	T2(s)	T(s)	T2(s)
0,250	0,654	0,121	0,749	0,132	0,795	0,137
0,300	0,689	0,113	0,843	0,123	0,920	0,129
0,350	0,757	0,104	0,911	0,113	0,983	0,122
0,400	0,809	0,102	0,927	0,109	1,019	0,120
0,450	0,843	0,096	0,990	0,102	1,074	0,118
0,500	0,917	0,090	1,080	0,098	1,095	0,113
0,550	0,953	0,084	1,093	0,095	1,143	0,110
0,600	0,987	0,082	1,117	0,091	1,207	0,107
0,650	1,050	0,080	1,211	0,089	1,257	0,105
0,700	1,119	0,076	1,242	0,085	1,293	0,100

3.2 Método 1: $s = \frac{1}{2}at^2$

El primer método que utilizaremos es la distancia que recorre un móvil uniformemente acelerado. Esta se puede derivar utilizando ecuaciones diferenciales siendo la velocidad y la posición inicial las constantes de integración.

$$v = \frac{ds}{dt} \quad s = vt + s_0 \quad (10)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \quad s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0 \quad (11)$$

En este caso, cómo $s_0 = 0$ y $v_0 = 0$, la ecuación 11 se reduce a $s = \frac{1}{2}at^2$.

Vemos que podemos poner la ecuación como $y = bx$ siendo y la distancia, b la aceleración y x la mitad del tiempo al cuadrado. Entonces, si representamos S frente a $\frac{1}{2}T^2$ podremos hacer un ajuste por mínimos cuadrados para obtener la pendiente y calcular así la aceleración. Antes de ello debemos crear una nueva columna en la tabla para $\frac{1}{2}T^2$.

	$M_1 = 0,20401\text{kg}$	$M_2 = 0,23003\text{kg}$	$M_3 = 0,33012\text{kg}$
S(m)	$\frac{1}{2}T^2(s^2)$	$\frac{1}{2}T^2(s^2)$	$\frac{1}{2}T^2(s^2)$
0,250	$0,21386 \pm 0,00065$	$0,28050 \pm 0,00075$	$0,31601 \pm 0,00080$
0,300	$0,23736 \pm 0,00069$	$0,35532 \pm 0,00084$	$0,42320 \pm 0,00092$
0,350	$0,28652 \pm 0,00076$	$0,41496 \pm 0,00091$	$0,48314 \pm 0,00098$
0,400	$0,32724 \pm 0,00081$	$0,42966 \pm 0,00093$	$0,5191 \pm 0,0010$
0,450	$0,35532 \pm 0,00084$	$0,49005 \pm 0,00099$	$0,5767 \pm 0,0011$
0,500	$0,42044 \pm 0,00092$	$0,5832 \pm 0,0011$	$0,5995 \pm 0,0011$
0,550	$0,4541 \pm 0,0010$	$0,5973 \pm 0,0011$	$0,6532 \pm 0,0011$
0,600	$0,4871 \pm 0,0010$	$0,6238 \pm 0,0011$	$0,7284 \pm 0,0012$
0,650	$0,5513 \pm 0,0011$	$0,7333 \pm 0,0012$	$0,7900 \pm 0,0013$
0,700	$0,6261 \pm 0,0011$	$0,7713 \pm 0,0012$	$0,8359 \pm 0,0013$

Representaremos gráficamente S frente a $\frac{1}{2}T^2$:

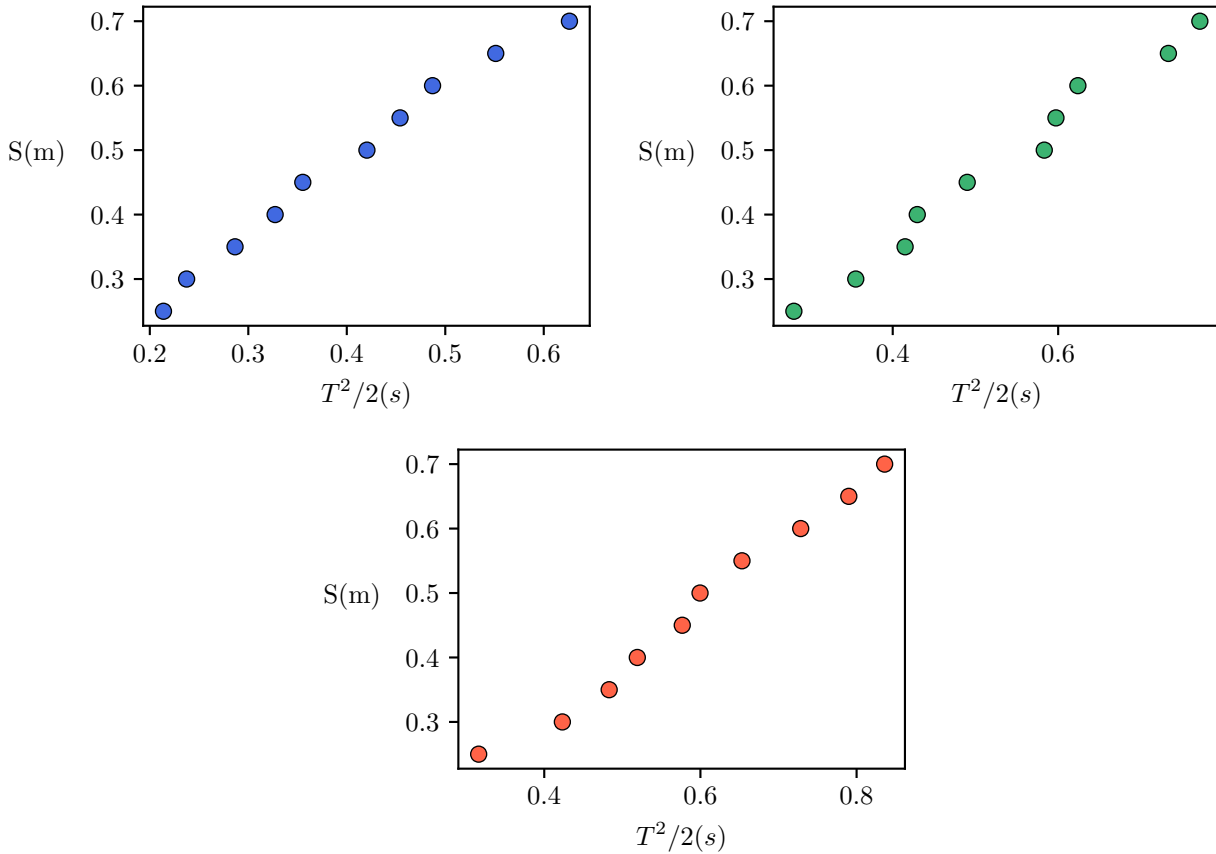


Figura 4: Distancia recorrida (S) frente a $\frac{1}{2}T^2$ para (m_1, m_2, m_3)

3.2.1 Ajuste por mínimos cuadrados

Realizaremos un ajuste lineal por mínimos cuadrados simple y sin término independiente, ya que para una distancia $S = 0$, $T = 0$ y por lo tanto $\frac{1}{2}T^2 = 0$, deduciendo entonces que la recta que intentamos ajustar pasa por el origen. Usaremos el mismo programa que en el apartado anterior para representar las gráficas con sus términos de ajuste.

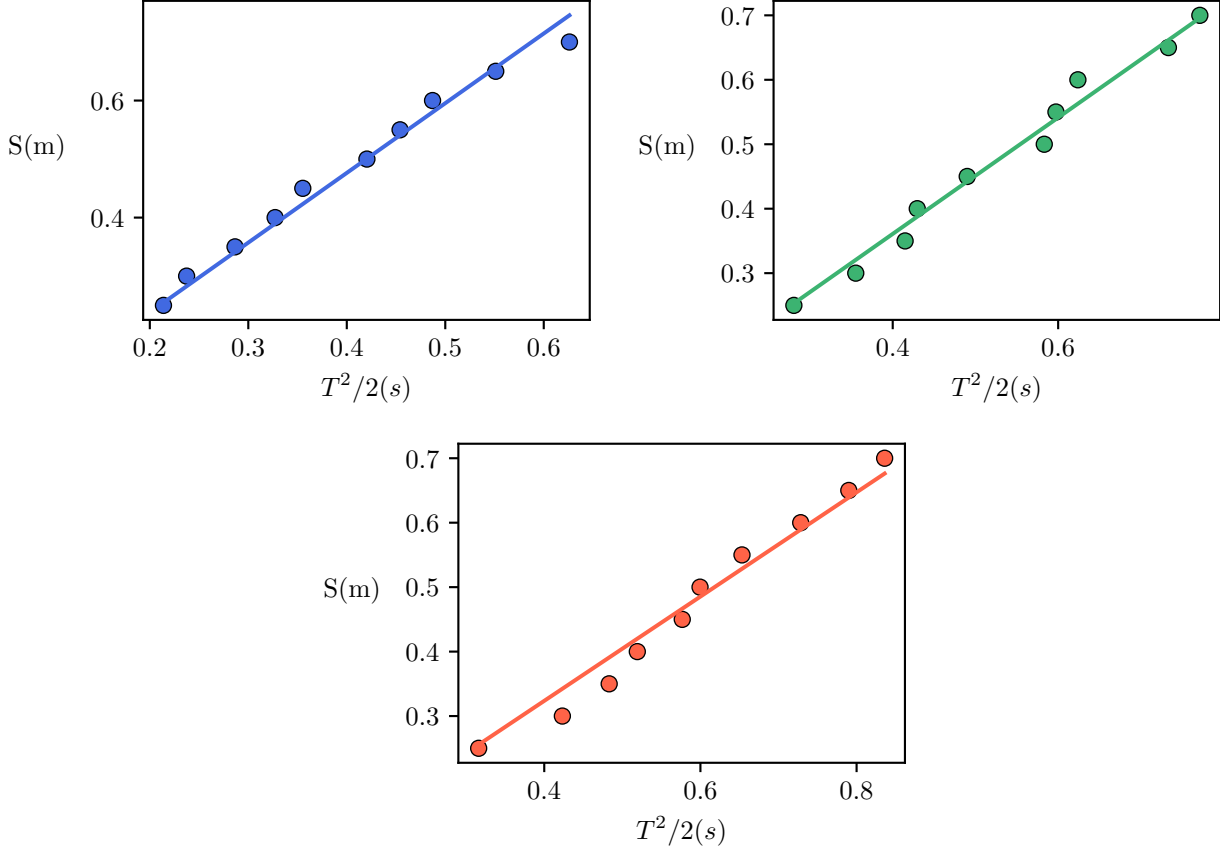


Figura 5: Distancia recorrida (S) frente a $\frac{1}{2}T^2$ para (m_1, m_2, m_3) con regresión lineal simple sin término independiente

$$\begin{array}{lll}
 b_1 = 1,191 \pm 0,016m/s^2 & s_1 = 0,021 & r_1 = 0,9992 \\
 b_2 = 0,902 \pm 0,011m/s^2 & s_2 = 0,020 & r_2 = 0,9992 \\
 b_3 = 0,809 \pm 0,013m/s^2 & s_3 = 0,025 & r_3 = 0,998
 \end{array}$$

Como explicamos anteriormente, podemos relacionar la pendiente de las rectas (b) con la aceleración del móvil, por lo tanto:

$$a_1 = 1,191 \pm 0,016m/s^2 \quad a_2 = 0,902 \pm 0,011m/s^2 \quad a_3 = 0,809 \pm 0,013m/s^2$$

3.3 Método 2: $a = \frac{\Delta V}{\Delta T}$

Mediante la ecuación 11 podemos ver que a es la derivada de v respecto a t . Para intervalos finitos es posible hayar la aceleración media dividiendo $\Delta V/\Delta T$.

Calcularemos la velocidad instantánea en el segundo detector para cada S, que además corresponderá a ΔV ya que la velocidad inicial es 0. Usaremos 8 y 9.

$V_1(m/s)$	$V_2(m/s)$	$V_3(m/s)$
0.826+/-0.011	0.7576+/-0.0095	0.7299+/-0.0090
0.885+/-0.012	0.813+/-0.010	0.7752+/-0.0098
0.962+/-0.013	0.885+/-0.012	0.820+/-0.011
0.980+/-0.014	0.917+/-0.012	0.833+/-0.011
1.042+/-0.015	0.980+/-0.014	0.847+/-0.011
1.111+/-0.017	1.020+/-0.015	0.885+/-0.012
1.190+/-0.019	1.053+/-0.015	0.909+/-0.012
1.220+/-0.019	1.099+/-0.016	0.935+/-0.013
1.250+/-0.020	1.124+/-0.017	0.952+/-0.013
1.316+/-0.022	1.176+/-0.018	1.000+/-0.014

3.3.1 Ajuste por mínimos cuadrados

Ahora representaremos gráficamente V frente a T , y haremos un ajuste lineal sin término independiente para encontrar la pendiente, en este caso la aceleración, ya que $\Delta V = a\Delta T$.

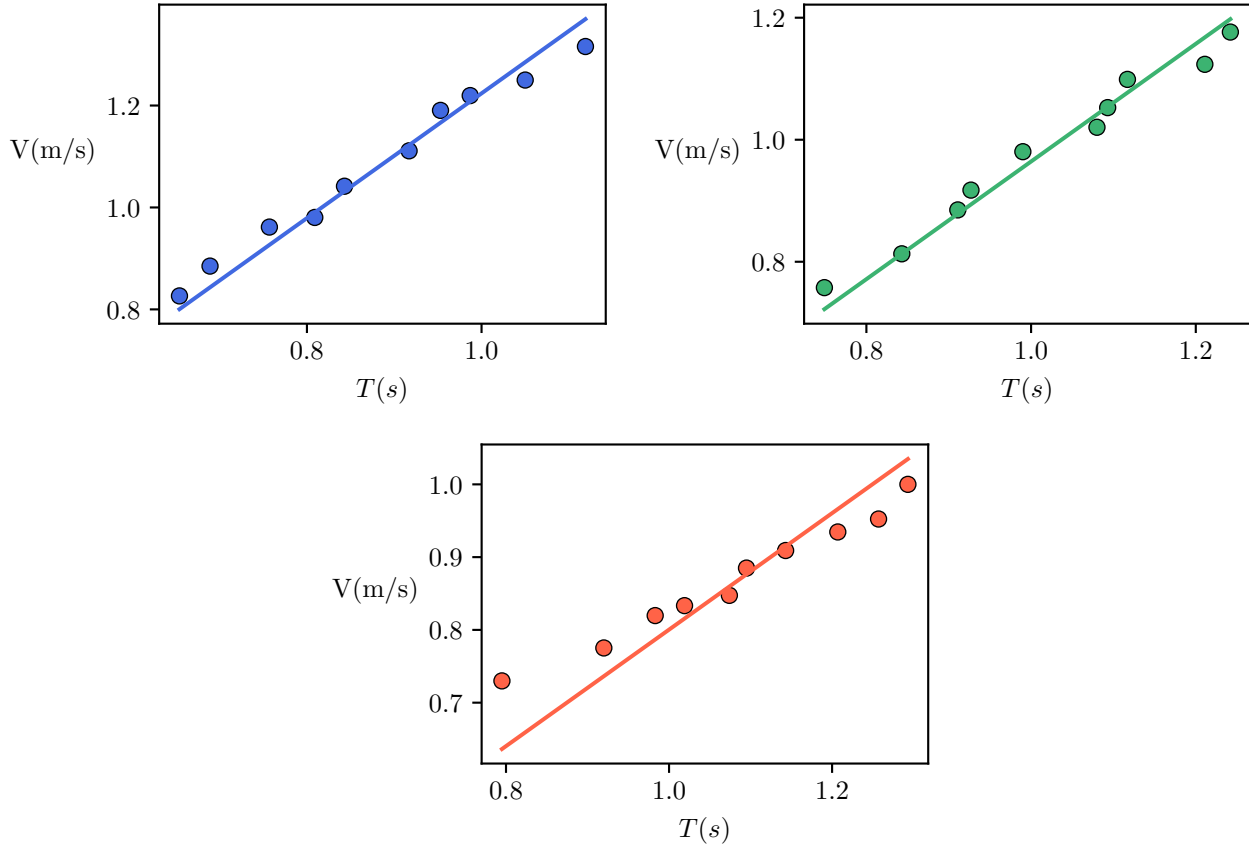


Figura 6: Velocidad (V) frente a tiempo (T) para (m_1, m_2, m_3) con ajuste lineal simple sin término independiente

Sus parámetros de ajuste son:

$$\begin{array}{lll}
 b_1 = 1,224 \pm 0,011m/s^2 & s_1 = 0,031 & r_1 = 0,9996 \\
 b_2 = 0,964 \pm 0,0078m/s^2 & s_2 = 0,025 & r_2 = 0,9997 \\
 b_3 = 0,800 \pm 0,013m/s^2 & s_3 = 0,043 & r_3 = 0,998
 \end{array}$$

Ya que la pendiente es la aceleración, podemos obtener sus valores para este experimento.

$$a_1 = 1,224 \pm 0,011m/s^2 \quad a_2 = 0,964 \pm 0,0078m/s^2 \quad a_3 = 0,800 \pm 0,013m/s^2$$

3.4 Aceleración teórica

Finalmente calcularemos cuál sería la aceleración teórica y así poder compararla con nuestros resultados experimentales. Sabiendo que las masas del móvil son $M_1 = 0,20401kg$, $M_2 = 0,23003kg$ y $M_3 = 0,33012kg$, y que la masa que cuelga de la polea es $m = 0,02977kg$, además de conocer su incertidumbre, $s(M) = 0,00001kg$, podemos calcular la aceleración utilizando las leyes de Newton:

$$F = M \cdot a \quad T = m \cdot g \quad Ma = mg \quad a = g \frac{m}{M} \quad (12)$$

Además de su incertidumbre (*tomaremos g cómo $9,8 \pm 0,1m/s^2$*):

$$s(a) = \sqrt{\frac{g^2 m^2 s(M)^2}{M^4} + \frac{g^2 s(m)^2}{M^2} + \frac{m^2 s(g)^2}{M^2}} \quad (13)$$

Así nos queda:

$$a_1 = 1.430 \pm 0.015m/s^2 \quad a_2 = 1.268 \pm 0.013m/s^2 \quad 0.8838 \pm 0.0090m/s^2$$

Si lo comparamos con las dos aceleraciones experimentales vemos que los valores difieren considerablemente, especialmente las de los dos primeros términos, pero de nuevo podemos atribuir al procedimiento de medida en el laboratorio y a los diferentes tipos de rozamiento y fricción (polea, aire) que no se ajusten completamente.

4 Conclusiones

4.1 Primera ley de Newton: MRU

En el primer experimento analizamos un objeto con un movimiento rectilíneo uniforme. Mediante un ajuste por mínimos cuadrados entre la distancia y el tiempo que tardaba en recorrerla obtuvimos su velocidad media. También utilizamos tratamiento de errores para determinar la velocidad instantánea del móvil al pasar por cada uno de los receptores. Como no había fuerzas externas (despreciables) comprobamos que las velocidades se mantenían constantes en todo momento. Las pequeñas desviaciones que obtuvimos dentro de los márgenes de error se pueden atribuir a que no conseguimos eliminar todo el rozamiento del aire o a pequeños fallos en la instrumentación utilizada.

También vimos que al aumentar la masa del móvil la velocidad disminuía. Esto se debe a que el instrumento que utilizamos para conferirle el momento inicial al objeto es el mismo, por lo que podemos deducir que proporciona el mismo momento $\vec{p} = m\vec{v}$. Como aumenta la masa, el módulo de la velocidad ha de disminuir.

4.2 Segunda ley de Newton: MRUA

Para el segundo experimento añadimos un peso en caída libre que añadía aceleración al móvil. Utilizamos dos métodos independientes para verificar las aceleraciones, y entre ellos ofrecieron resultados muy similares. Sin embargo, cuando los comparamos con las aceleraciones teóricas, las experimentales son algo más lentas. Esto se puede deber de nuevo al rozamiento del aire, en este caso más prominente por estar acelerando el objeto, o al rozamiento de la polea. Sin embargo, podemos decir que fue satisfactorio ya que la tendencia general se mantuvo.

Observamos que cuanto más masa tenía el móvil, menor era la aceleración. Si tomamos la fórmula 1 vemos que, ya que la masa en caída libre es la misma, la aceleración disminuye conforme aumenta la masa.

En general diremos que la práctica ha sido satisfactoria, pese a que en el segundo caso se debería de tener más en cuenta diversos factores ambientales que influyen de manera más prominente en el resultado.

Experiencia II

Momento de Inercia

1 Objetivos

En esta práctica trabajaremos sobre el momento de inercia de distintos cuerpos. Este surge al rotar un objeto sobre uno de sus ejes, pudiéndose considerar análogo a la masa en un movimiento armónico simple. Nuestras metas a lo largo de la práctica son las siguientes:

- Medir la constante recuperadora del muelle que utilizaremos en los experimentos.
- Calcular el momento de inercia de distintos cuerpos.
- Verificar que se cumple el Teorema de Steiner.

Las distintas particularidades de cada experimento se mostraran en su sección correspondiente debido a la diversidad de montajes.

2 Determinación de la constante recuperadora del muelle

Primero debemos calcular cuál es la constante recuperadora del muelle que vamos a utilizar en la práctica. Será un dato fundamental para los siguientes pasos puesto que define cómo es nuestro muelle.

Para ello utilizaremos un disco al que uniremos al resorte en el centro de masas, de esta manera permitiéndonos girarlo. Utilizaremos un dinamómetro para determinar la fuerza del disco al desplazarlo un ángulo φ . Con todos estos datos crearemos una tabla. Sin embargo, antes de representarla, necesitamos completar un paso previo.

2.1 Cálculo del momento de la fuerza

Debemos computar el módulo del momento de la fuerza para cada ángulo. Utilizaremos la ecuación general del momento de una fuerza, pero conociendo dos datos. El dinamómetro se colocará horizontalmente y en perpendicular al radio, por lo que los vectores \vec{r} y \vec{F} serán perpendiculares. Además, sabemos que el radio del disco mide $0,150m$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad M = r \cdot F \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) = r \cdot F \quad (14)$$

Tambien deberemos de calcular su incertidumbre, para lo que usaremos propagación de incertidumbres.

$$s(M) = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)^2 \cdot s^2(r) + \left(\frac{\partial M}{\partial F}\right)^2 \cdot s^2(F)} = \sqrt{F^2 \cdot s^2(r) + r^2 \cdot s^2(F)} \quad (15)$$

2.2 Tabla de datos

Ahora que sabemos calcular el momento de la fuerza, representaremos la tabla con el ángulo (en radianes), la fuerza y su momento. Mientras la incertidumbre en el ángulo ($s(\varphi) = 2^\circ \mid 0,035rad$) y la de la fuerza ($s(F) = 0,02N^*$) se mantienen constantes, la del momento es variable ya que se calcula con la fórmula 15. Sin embargo, su variación para estos valores es tan pequeña que no entra dentro de las dos cifras significativas, por lo que no la incluiremos en la tabla y diremos que vale $s(M) = 0,0030Nm$. A continuación se exponen los resultados para diferentes medidas, acompañadas del ángulo en grados exclusivamente en calidad informativa.

(Nota referida a la incertidumbre de la fuerza: Aunque en el documento de las memorias dice que la incertidumbre del dinamómetro es de 0,2N, esto no tendría sentido con nuestros datos experimentales ya que tienen dos cifras después de la coma. Tras comentar esto a los profesores a cargo de las prácticas, nos confirmaron que en efecto es un error y la incertidumbre a utilizar es 0,02N)

$\varphi(^{\circ})$	$\varphi(rad)$	F(N)	M (Nm)
90	1,571	0,20	0,0300
100	1,745	0,22	0,0330
110	1,920	0,24	0,0360
120	2,094	0,28	0,0420
130	2,269	0,32	0,0480
140	2,443	0,36	0,0540
150	2,618	0,40	0,0600
160	2,793	0,42	0,0630
170	2,967	0,44	0,0660
180	3,142	0,48	0,0720

Figura 7: Fuerza (F) y su momento (M) en función del ángulo (φ)

2.3 Representación gráfica

Utilizaremos `matplotlib` y `pandas` para cargar los datos desde el `.csv` de la tabla y representar una gráfica del momento de la fuerza frente al ángulo girado (en radianes).

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

d = pd.read_csv("MI1_PhiF.csv", sep=';', decimal=',')
phi = d["PhiRad"]; M = d["M"]

plt.scatter(phi,M)
```

Mediante este código obtenemos la siguiente gráfica:

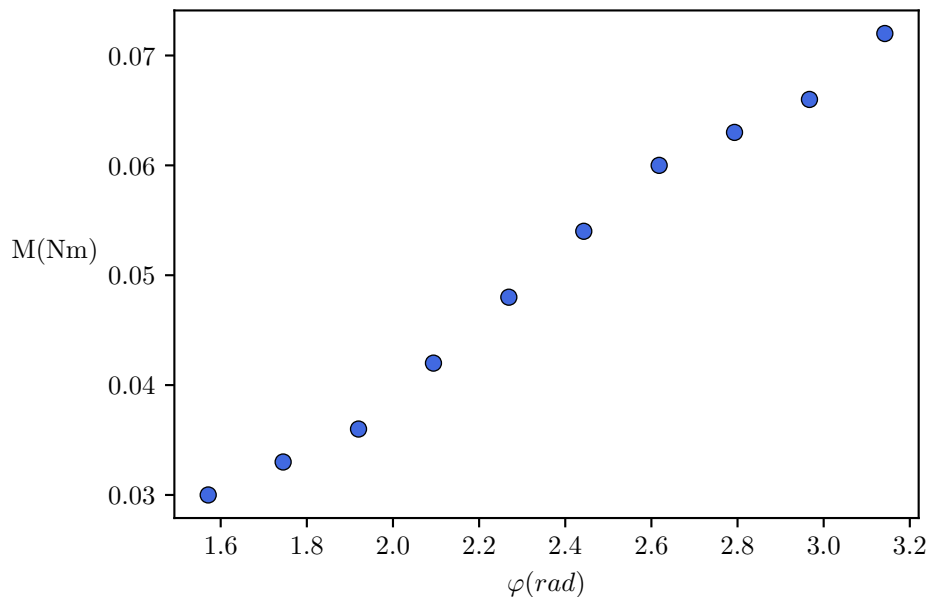


Figura 8: Momento de la fuerza (M) frente al ángulo girado (φ)

Como podemos observar, parece que los puntos podrían formar una recta. Esto tendría sentido, ya que asumiendo que el resorte tenga un comportamiento lineal, siendo D la constante del resorte:

$$M = -D \cdot \varphi \quad (16)$$

Al representar el momento frente al ángulo, la pendiente de la recta será la constante recuperadora del resorte, exactamente lo que queríamos calcular.

2.4 Ajuste por mínimos cuadrados

Procederemos a realizar un ajuste por mínimos cuadrados de los puntos de la gráfica anterior. Esta regresión será lineal, y pasará por el origen (Pues para un ángulo 0 no hay fuerza), por lo que no tendrá término independiente. Podríamos realizar un ajuste ponderado, ya que las incertidumbres de y_i son variables, pero como ya explicamos antes, su variación es tan pequeña que prácticamente es despreciable para estos valores, por lo que haremos un ajuste simple. Exponemos a continuación la gráfica y sus parámetros de ajuste:

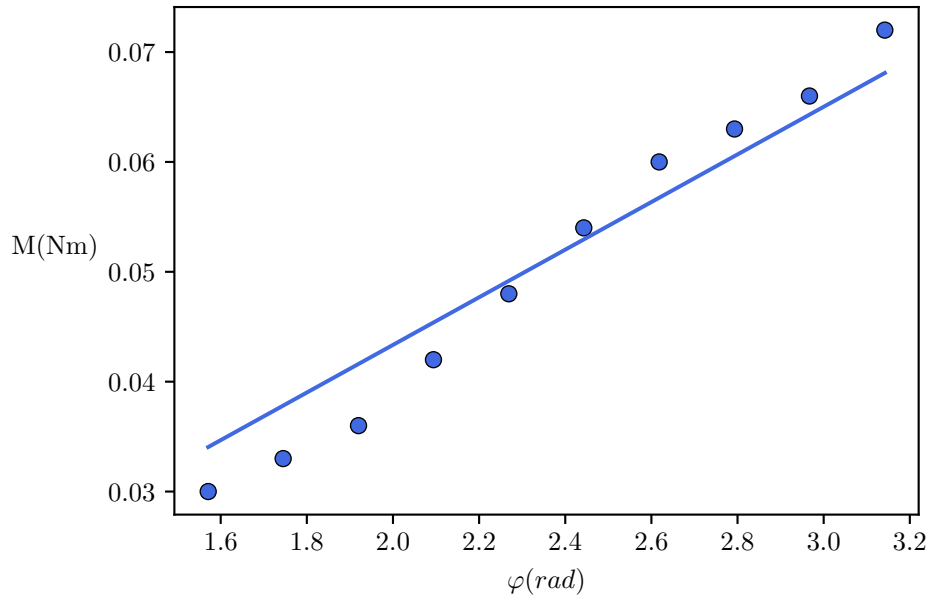


Figura 9: Momento de la fuerza (M) frente al ángulo girado (φ) con regresión lineal sin término independiente

$$b = 0,02167 \pm 0,00048 \frac{Nm}{rad} \quad s = 0,0036 \quad r = 0,997$$

El coeficiente de regresión lineal ya nos muestra que no es un ajuste perfecto, pero tomaremos el valor de b como la constante recuperadora del muelle de igual manera.

$$D = -b = 0,02167 \pm 0,00048 \frac{Nm}{rad}$$

3 Momentos de inercia de varios cuerpos

Utilizando el mismo muelle del apartado anterior, del que ahora conocemos la constante recuperadora, montaremos diversos cuerpos en el sistema. Los haremos oscilar, girando en el plano paralelo a la mesa, para medir su periodo de oscilación.

Gracias a un medidor de barrera fotoeléctrica conectado a un reloj, que detectará cuándo una pequeña pestaña que sale del objeto pasa, podremos conocer el semiperiodo $t = \frac{T}{2}$.

Una vez calculemos el periodo a partir de los datos del semiperiodo, podremos utilizar esta fórmula que relaciona el periodo con el momento de inercia:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (17)$$

3.1 Cuerpo 1: Disco macizo

Tomaremos un disco macizo como el primer cuerpo experimental. Su masa tiene un valor de $0,29590 \pm 0,00001kg$, y su radio es $0,108 \pm 0,001m$.

3.1.1 Tabla de datos

Obtenemos los siguientes datos experimentales. Cabe destacar que la incertidumbre de las medidas de tiempo es constante y su valor es $s(t) = 0,001s$, por lo que no la incluiremos en la tabla. También añadiremos la columna del periodo completo, $T_d = 2 \cdot t_d$. Su incertidumbre será $s(T) = 0,002s$.

Medida	$t_d(s)$	$T_d(s)$
1	0,788	1,576
2	0,798	1,596
3	0,792	1,584
4	0,797	1,594
5	0,798	1,596
6	0,794	1,588
7	0,788	1,576
8	0,797	1,594
9	0,799	1,598
10	0,791	1,582

Figura 10: Medidas del semiperiodo y el periodo de un disco macizo

3.1.2 Tratamiento de datos

Para analizar los datos que tenemos y obtener un valor único que los describa utilizaremos el procedimiento que ya describimos en la sección 2.5.1. No tenemos que descartar ninguna medida fuera del intervalo de confianza. Los resultados que obtenemos para T_d son los siguientes:

$$(\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) = (1,5884; 0,0033; 9)$$

3.1.3 Momento de inercia experimental

Utilizaremos la ecuación 17 y el valor calculado en el apartado anterior para obtener el momento de inercia del disco macizo.

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} = \frac{1,5884^2 \cdot 0,02167}{4\pi^2} = 1,385 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

Por propagación de incertidumbres, calculamos su error:

$$s(I) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)^2 \cdot s^2(T) + \left(\frac{\partial I}{\partial D}\right)^2 \cdot s^2(D)} = \sqrt{\left(\frac{2TD}{4\pi^2}\right)^2 \cdot s^2(T) + \left(\frac{T^2}{4\pi^2}\right)^2 \cdot s^2(D)} \quad (18)$$
$$s(I) = 3,1 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

3.1.4 Momento de inercia teórico

Conociendo la masa y el radio del disco macizo podemos calcular el momento de inercia teórico, para así poder compararlo con el experimental. En el caso del disco, podemos resolver fácilmente la integral.

$$I = \int_m r^2 dm \quad I_{disco} = \frac{1}{2} mr^2 \quad (19)$$

También calcularemos su incertidumbre:

$$s(I) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 \cdot s^2(m) + \left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)^2 \cdot s^2(r)} = \sqrt{\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 \cdot s^2(m) + (mr)^2 \cdot s^2(r)} \quad (20)$$

Utilizando $m = 0,29590 \pm 0,00001 kg$ y $r = 0,108 \pm 0,001 m$ llegamos al valor teórico expuesto a continuación:

$$I_{teo} = 1,73 \cdot 10^{-3} \pm 3,2 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

Observamos que no coincide completamente con lo medido en el laboratorio, pero tenemos que tener en cuenta que el valor D que utilizamos para calcular los datos experimentales no tenía un ajuste perfecto, por lo que es normal que los resultados nos den desviados.

3.2 Cuerpo 2: Cilindro macizo

Como segundo cuerpo experimental utilizaremos un cilindro macizo. Su masa es $m = 0,37310 \pm 0,00001 \text{ kg}$ mientras que su radio vale $r = 0,050 \pm 0,001 \text{ m}$.

3.2.1 Tabla de datos

Como explicamos anteriormente, las incertidumbres del semiperiodo y el periodo son constantes, y sus valores son $s(t_c) = 0,001 \text{ s}$ y $s(T_c) = 0,002 \text{ s}$ respectivamente. Procedemos a mostrar los datos en la tabla a continuación:

Medida	$t_c(s)$	$T_c(s)$
1	0,373	0,746
2	0,374	0,748
3	0,371	0,742
4	0,368	0,736
5	0,379	0,758
6	0,378	0,756
7	0,374	0,748
8	0,370	0,740
9	0,373	0,746
10	0,376	0,752

Figura 11: Medidas del semiperiodo y el periodo de un cilindro macizo

3.2.2 Tratamiento de datos

Volvemos a utilizar el procedimiento descrito en la sección 2.5.1 para obtener un dato único que comprenda nuestras medidas. No necesitamos eliminar ninguna medida ya que todas entran dentro del intervalo de confianza. Para T_c calculamos los siguientes datos:

$$(\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) = (0,7472; 0,0030; 9)$$

3.2.3 Momento de inercia experimental

Con las ecuaciones 17 y 18 calculamos el momento de inercia de este cilindro macizo y su incertidumbre.

$$I = 3,064 \cdot 10^{-4} \pm 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.2.4 Momento de inercia teórico

En este caso, calcularemos la integral del momento de inercia para un cilindro macizo y casualmente el resultado coincide con el del disco macizo.

$$I = \int_m r^2 dm \quad I_{cilindro} = \frac{1}{2}mr^2 \quad (21)$$

Sabiendo que $m = 0,37310 \pm 0,00001kg$ y $r = 0,050 \pm 0,001m$, y utilizando la ecuación 20 también calcularemos su incertidumbre.

$$I = 4,66 \cdot 10^{-4} \pm 1,8 \cdot 10^{-5}kg \cdot m^2$$

Volvemos a observar que el valor calculado difiere de manera considerable, pero de nuevo se debe a que el cálculo teórico, además de los posibles errores en las medidas de este apartado, también arrastra aquellos de la constante recuperadora del muelle.

4 Teorema de Steiner

Conociendo el momento de inercia a través de un eje, el teorema de Steiner nos permite calcular el momento de inercia en otro eje paralelo al primero. Siendo I el nuevo eje, I_0 el que conocemos, m la masa del sólido y d la distancia entre los ejes, el teorema nos dice que:

$$I = I_0 + md^2 \quad (22)$$

En esta última experiencia utilizaremos un disco y una barra para comprobar el teorema de Steiner. Realizaremos medidas de sus periodos de oscilación, pero esta vez a diferentes distancias del centro de masas. Así conseguiremos diversos momentos de inercia por ejes paralelos que luego podremos comparar con los resultados teóricos.

4.1 Cuerpo 1: Disco

El primer cuerpo será un disco de radio $r = 0,150 \pm 0,001m$, cuya masa valdrá $m = 0,39740 \pm 0,00001kg$. Tomaremos diez medidas para cada separación, y la iremos variando en $0,03m$ desde el centro. Por otro lado, la incertidumbre de las distancias es de $0,001m$.

4.1.1 Tabla de datos

Primero representaremos las medidas directas del semiperiodo, cuya incertidumbre es de $s(t) = 0,001s$. Por otro lado, exponaremos el periodo que calculamos a raíz de estas, cuya incertidumbre será $s(T) = 0,002s$.

Semiperiodo $t_d(s)$					Periodo $T_d(s)$				
0cm	3cm	6cm	9cm	12cm	0cm	3cm	6cm	9cm	12cm
1,251	1,271	1,432	1,632	1,882	2,502	2,542	2,864	3,264	3,764
1,254	1,267	1,437	1,628	1,883	2,508	2,534	2,874	3,256	3,766
1,254	1,274	1,423	1,627	1,877	2,508	2,548	2,846	3,254	3,754
1,253	1,279	1,43	1,632	1,894	2,506	2,558	2,86	3,264	3,788
1,255	1,268	1,424	1,629	1,877	2,510	2,536	2,848	3,258	3,754
1,253	1,267	1,431	1,625	1,877	2,506	2,534	2,862	3,250	3,754
1,261	1,263	1,425	1,625	1,877	2,522	2,526	2,850	3,250	3,754
1,258	1,272	1,423	1,636	1,876	2,516	2,544	2,846	3,272	3,752
1,257	1,282	1,433	1,633	1,878	2,514	2,564	2,866	3,266	3,756
1,259	1,281	1,439	1,629	1,881	2,518	2,562	2,878	3,258	3,762

4.1.2 Tratamiento de datos

Aplicaremos el proceso descrito en 2.5.1 a la tabla del periodo. Con esto obtendremos cinco valores ajustados del periodo para las distintas distancias desde el centro de masas:

$$\begin{aligned}T_{0cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (2,5110; 0,0028; 9) \\T_{3cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (2,5448; 0,0046; 9) \\T_{6cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (2,8594; 0,0042; 9) \\T_{9cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (3,2592; 0,0030; 9) \\T_{12cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (3,7573; 0,0026; 8)\end{aligned}$$

(Para T_{12cm} eliminamos un valor por salir del intervalo de confianza, 3,788, y volvemos a calcular los parámetros correspondientes.)

4.1.3 Momento de inercia experimental

Para cada periodo calcularemos el momento de inercia experimental asociado y su incertidumbre utilizando las formulas 17 y 18. Expresamos directamente los resultados a continuación:

$$\begin{aligned}I_{0cm} &= 3,461 \cdot 10^{-3} \pm 7,7 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2 \\I_{3cm} &= 3,555 \cdot 10^{-3} \pm 8,0 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2 \\I_{6cm} &= 4,49 \cdot 10^{-3} \pm 1,0 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \\I_{9cm} &= 5,83 \cdot 10^{-3} \pm 1,3 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \\I_{12cm} &= 7,75 \cdot 10^{-3} \pm 1,7 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2\end{aligned}$$

4.1.4 Momento de inercia teórico (Steiner)

Por último verificaremos que se cumple el teorema de Steiner calculando el momento de inercia teórico y comparando con los datos experimentales.

Primero calculamos el momento de inercia por el eje que pasa por el centro de masa, y para ello podemos utilizar las ecuaciones 19 y 20:

$$I_{0cm} = 4,471 \cdot 10^{-3} \pm 6,0 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

Ahora podemos aplicar el teorema de Steiner (22) para las distintas distancias. También podemos calcular su error por propagación de incertidumbres:

$$\begin{aligned}s(I) &= \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial I_0}\right)^2 \cdot s^2(I_0) + \left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 \cdot s^2(m) + \left(\frac{\partial I}{\partial d}\right)^2 \cdot s^2(d)} \\s(I) &= \sqrt{s^2(I_0) + d^4 \cdot s^2(m) + (2dm)^2 \cdot s^2(d)}\end{aligned}\tag{23}$$

Obtenemos los siguientes datos para los momentos de inercia de los ejes separados del centro de masa:

$$I_{3cm} = 4,828 \cdot 10^{-3} \pm 6,4 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{6cm} = 5,901 \cdot 10^{-3} \pm 7,6 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{9cm} = 7,690 \cdot 10^{-3} \pm 9,3 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{12cm} = 1,019 \cdot 10^{-2} \pm 1,1 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$$

Vemos que difieren de los resultados experimentales, probablemente por las mismas razones que comentamos antes, pero siguen la misma tendendencia, por lo que consideraremos verificado el teorema de Steiner para el disco.

4.1.5 Representación gráfica

Si observamos la fórmula del teorema de steiner, vemos que al representar el momento de un eje frente a la distancia al cuadrado obtendremos una recta cuyo término independiente será I_0 y su pendiente será m .

$$I = I_0 + md^2 \quad y_i = a + bx_i \quad \Rightarrow \quad I_0 = a \quad m = b$$

Primero crearemos una tabla con la que poder represenar I frente a d^2 . Hay que tener en cuenta que las incertidumbres de ambas medidas varían, por lo que las incluiremos en la tabla. La incertidumbre de la distancia al cuadrado, por propagación, es $2 \cdot d \cdot s(d)$, siendo $s(d) = 0,001m$.

$I \pm s(I)(kg \cdot m^2)$	$d^2 \pm s(d^2)(m^2)$
$0,003461 \pm 0,000077$	$0,0 \pm 0,0$
$0,003555 \pm 0,000080$	$0,000900 \pm 0,000060$
$0,00449 \pm 0,00010$	$0,00360 \pm 0,00012$
$0,00583 \pm 0,00013$	$0,00810 \pm 0,00018$
$0,00775 \pm 0,00017$	$0,01440 \pm 0,00024$

Figura 12: Momento de inercia (I) frente a la distancia al cuadrado (d)

Ahora representaremos estos datos junto a su ajuste por mínimos cuadrados. Consideraremos que las incertidumbres de I no varían lo suficiente como para un ajuste ponderado, y que las incertidumbres de d^2 son despreciables pese a estar muy próximas, ya que el ajuste si no excedería el nivel de este curso. Por lo tanto realizaremos una regresión lineal simple con término independiente.

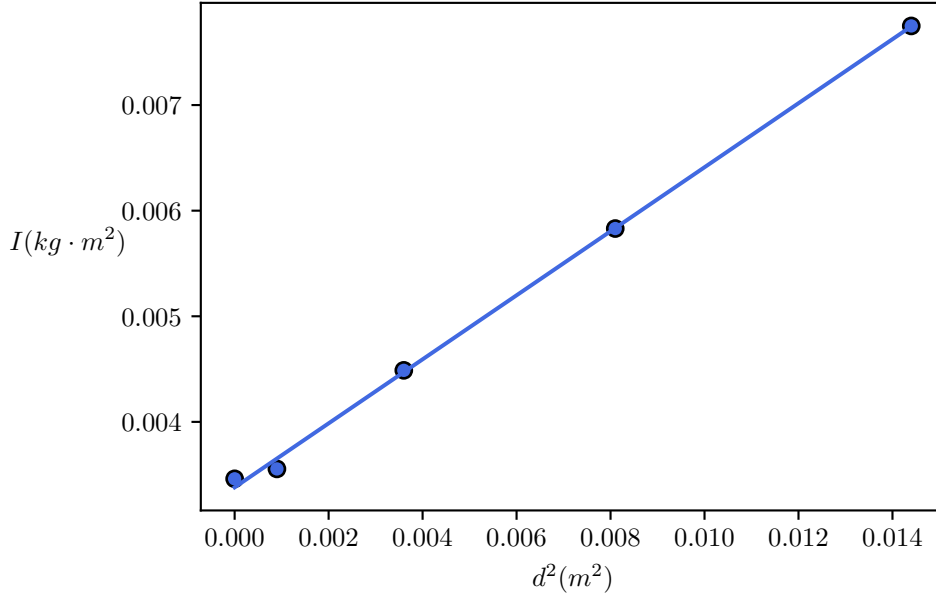


Figura 13: Momento de inercia (I) frente a la distancia del centro de masas al cuadrado (d^2)

$$a = 3,3798387 \cdot 10^{-3} \pm 1,8 \cdot 10^{-9} kg \cdot m^2 \quad b = 0,30312451 \pm 2,3 \cdot 10^{-7} kg$$

$$s = 2,7 \cdot 10^{-9} \quad r = 0,9993$$

Vemos que el ajuste es bastante razonable, y que el término a se ajusta muy bien al punto I_0 , pese a que el término b difiere un poco de la masa. Nos sorprende considerablemente que las incertidumbres de a y de b sean tan pequeñas, pero puede tener sentido ya que todos los datos se pudieron ver modificados de la misma manera por culpa de la constante del muelle que calculamos al principio, y por lo tanto mantener la forma de la recta (y así causar que la incertidumbre del ajuste sea muy pequeña).

4.2 Cuerpo 2: Barra

Para el segundo cuerpo tomaremos una barra con una longitud de $l = 0,060 \pm 0,001m$ y una masa de $m = 0,13172 \pm 0,00001kg$. En esta ocasión llegaremos hasta 27 cm, de 3 en 3.

4.2.1 Tabla de datos

Aquí exponemos las medidas directas que tomamos del semiperiodo en el laboratorio para cada distancia, y a continuación la tabla con el periodo completo. Las incertidumbres son constantes y de $s(t) = 0,001s$ y $s(T) = 0,002s$.

Semiperiodo $t_d(s)$

0cm	3cm	6cm	9cm	12cm	15cm	18cm	21cm	24cm	27cm
1,241	1,281	1,346	1,449	1,576	1,725	1,909	2,090	2,295	2,489
1,241	1,282	1,345	1,448	1,577	1,725	1,905	2,088	2,303	2,488
1,240	1,281	1,346	1,449	1,575	1,725	1,905	2,089	2,297	2,487
1,241	1,281	1,346	1,449	1,574	1,728	1,903	2,090	2,297	2,490
1,241	1,282	1,347	1,449	1,575	1,728	1,902	2,088	2,293	2,488
1,242	1,280	1,345	1,449	1,576	1,727	1,902	2,089	2,296	2,493
1,242	1,281	1,346	1,450	1,577	1,726	1,902	2,086	2,294	2,484
1,241	1,280	1,346	1,450	1,582	1,728	1,901	2,089	2,295	2,492
1,241	1,281	1,346	1,450	1,582	1,726	1,901	2,089	2,291	2,500
1,241	1,281	1,349	1,450	1,582	1,725	1,902	2,086	2,296	2,494
1,240	1,281	1,349	1,448	1,581	1,726	1,903	2,086	2,295	2,498
1,241	1,281	1,349	1,448	1,581	1,726	1,903	2,085	2,297	2,496
1,240	1,280	1,348	1,488	1,581	1,725	1,902	2,087	2,295	2,495
1,241	1,281	1,346	1,448	1,581	1,724	1,903	2,089	2,294	2,499
1,240	1,281	1,346	1,448	1,581	1,724	1,902	2,085	2,293	2,496

Periodo $T_d(s)$

0cm	3cm	6cm	9cm	12cm	15cm	18cm	21cm	24cm	27cm
2,482	2,562	2,692	2,898	3,152	3,450	3,818	4,180	4,590	4,978
2,482	2,564	2,690	2,896	3,154	3,450	3,810	4,176	4,606	4,976
2,480	2,562	2,692	2,898	3,150	3,450	3,810	4,178	4,594	4,974
2,482	2,562	2,692	2,898	3,148	3,456	3,806	4,180	4,594	4,980
2,482	2,564	2,694	2,898	3,150	3,456	3,804	4,176	4,586	4,976
2,484	2,560	2,690	2,898	3,152	3,454	3,804	4,178	4,592	4,986
2,484	2,562	2,692	2,900	3,154	3,452	3,804	4,172	4,588	4,968
2,482	2,560	2,692	2,900	3,164	3,456	3,802	4,178	4,590	4,984
2,482	2,562	2,692	2,900	3,164	3,452	3,802	4,178	4,582	5,000
2,482	2,562	2,698	2,900	3,164	3,450	3,804	4,172	4,592	4,988
2,480	2,562	2,698	2,896	3,162	3,452	3,806	4,172	4,590	4,996
2,482	2,562	2,698	2,896	3,162	3,452	3,806	4,170	4,594	4,992
2,480	2,560	2,696	2,976	3,162	3,450	3,804	4,174	4,590	4,990
2,482	2,562	2,692	2,896	3,162	3,448	3,806	4,178	4,588	4,998
2,480	2,562	2,692	2,896	3,162	3,448	3,804	4,170	4,586	4,992

4.2.2 Tratamiento de datos

Utilizamos una vez más los pasos descritos en 2.5.1 para tratar los errores de las tablas y dar con los valores adecuados para cada distancia. Los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned}T_{0cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (2, 4817; 0, 0020; 9) \\T_{3cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (2, 5619; 0, 0020; 9) \\T_{6cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (2, 6933; 0, 0021; 9) \\T_{9cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (2, 8979; 0, 0020; 8) \\T_{12cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (3, 1575; 0, 0025; 9) \\T_{15cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (3, 4517; 0, 0021; 9) \\T_{18cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (3, 8051; 0, 0021; 8) \\T_{21cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (4, 1755; 0, 0022; 9) \\T_{24cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (4, 5897; 0, 0022; 8) \\T_{27cm} : (\bar{x}, s_C(\bar{x}), \phi) &= (4, 9852; 0, 0032; 9)\end{aligned}$$

(Valores eliminados: $T_{9cm} - 2,976$; $T_{18cm} - 3,818$; $T_{24cm} - 4,606$)

4.2.3 Momento de inercia experimental

Con los datos que abamos de obtener, calcularemos momento de inercia experimental y su incertidumbre utilizando las formulas 17 y 18. Obtenemos:

$$\begin{aligned}I_{0cm} &= 3,381 \cdot 10^{-3} \pm 7,5 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2 \\I_{3cm} &= 3,603 \cdot 10^{-3} \pm 8,0 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2 \\I_{6cm} &= 3,982 \cdot 10^{-3} \pm 8,8 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2 \\I_{9cm} &= 4,61 \cdot 10^{-3} \pm 1,0 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \\I_{12cm} &= 5,47 \cdot 10^{-3} \pm 1,2 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \\I_{15cm} &= 6,54 \cdot 10^{-3} \pm 1,5 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \\I_{18cm} &= 7,95 \cdot 10^{-3} \pm 1,8 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \\I_{21cm} &= 9,57 \cdot 10^{-3} \pm 2,1 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \\I_{24cm} &= 1,156 \cdot 10^{-2} \pm 2,6 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \\I_{27cm} &= 1,364 \cdot 10^{-2} \pm 3,0 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2\end{aligned}$$

4.2.4 Momento de inercia teórico (Steiner)

Debemos verificar si se cumple el teorema de Steiner. Para ello calcularemos el momento de inercia teórico en el centro de masas y aplicaremos el teorema para calcular los puntos alejados. Así podremos comparar resultados teóricos y experimentales. Utilizando 19 y 20 calculamos I_0 :

$$I_{0cm} = 3,952 \cdot 10^{-3} \pm 1,3 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

Ahora calculamos los momentos de inercia y su incertidumbre aplicando el teorema de Steiner (22 y 23) para cada una de las distancias.

$$I_{3cm} = 4,070 \cdot 10^{-3} \pm 1,5 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{6cm} = 4,426 \cdot 10^{-3} \pm 2,1 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{9cm} = 5,019 \cdot 10^{-3} \pm 2,7 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{12cm} = 5,848 \cdot 10^{-3} \pm 3,4 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{15cm} = 6,915 \cdot 10^{-3} \pm 4,2 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{18cm} = 8,219 \cdot 10^{-3} \pm 4,9 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{21cm} = 9,760 \cdot 10^{-3} \pm 5,7 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{24cm} = 1,1539 \cdot 10^{-2} \pm 6,5 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$I_{27cm} = 1,3554 \cdot 10^{-2} \pm 7,2 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$$

De nuevo vuelven a diferir con los resultados experimentales, pero en esta ocasión en menor medida, y se aprecia mejor el claro patrón que siguen.

4.2.5 Representación gráfica

Crearemos una gráfica como la del apartado anterior representando el momento de inercia frente a la distancia de ese eje al cuadrado. Primero pondremos los datos a representar junto a su incertidumbre en la tabla a continuación.

$I \pm s(I)(kg \cdot m^2)$	$d^2 \pm s(d^2)(m^2)$
0.003381 ± 0.000075	$0,0 \pm 0,0$
0.003603 ± 0.000080	$0,000900 \pm 0,000060$
0.003982 ± 0.000088	$0,00360 \pm 0,00012$
0.00461 ± 0.00010	$0,00810 \pm 0,00018$
0.00547 ± 0.00012	$0,01440 \pm 0,00024$
0.00654 ± 0.00015	0.02250 ± 0.00030
0.00795 ± 0.00018	0.03240 ± 0.00036
0.00957 ± 0.00021	0.04410 ± 0.00042
0.01156 ± 0.00026	0.05760 ± 0.00048
0.01364 ± 0.00030	0.07290 ± 0.00054

Figura 14: Momento de inercia (I) frente a la distancia al cuadrado (d)

Ahora utilizaremos un ajuste por mínimos cuadrados simple con término independiente (equivalente a I_0). Obviaremos que las incertidumbres de I varían ya que lo hacen en una medida muy pequeña, y que $s(d^2)$ no sea del todo despreciable frente a $s(I)$ ya que ese tratamiento excede el nivel de este curso. Obtenemos la siguiente gráfica:

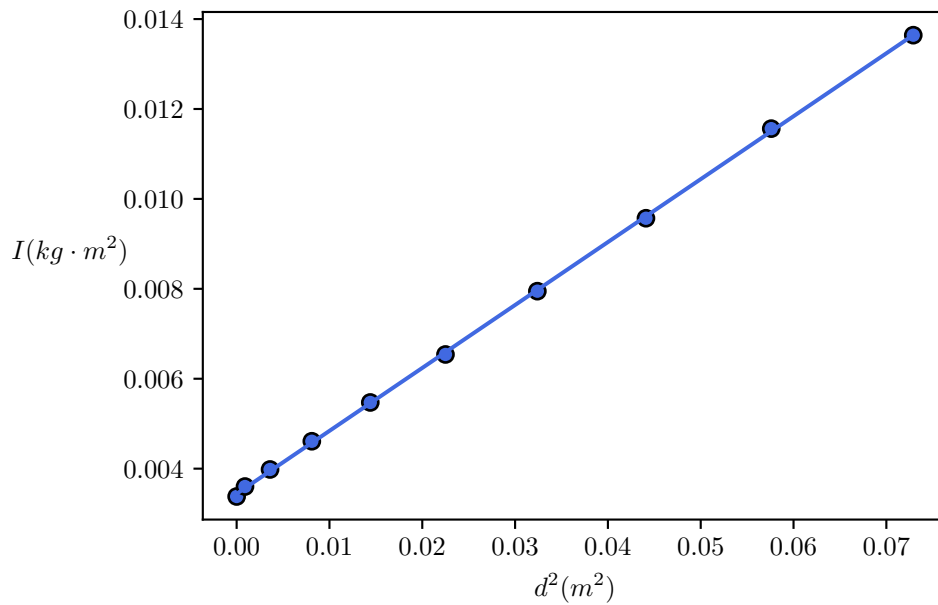


Figura 15: Momento de inercia (I) frente a la distancia del centro de masas al cuadrado (d^2)

Además aquí podemos ver sus parámetros de ajuste:

$$\begin{aligned}a &= 3,4407711 \cdot 10^{-3} \pm 4,8 \cdot 10^{-10} kg \cdot m^2 & b &= 1,3996645 \pm 1,4 \cdot 10^{-8} kg \\s &= 1,0 \cdot 10^{-9} & r &= 0,99992\end{aligned}$$

En este caso vemos que a y b se ajustan mucho mejor a I_0 y a la masa del objeto. El coeficiente de regresión lineal también apunta a un ajuste más acertado, quizá por la cantidad de distancias añadidas.

5 Conclusiones

5.1 Primera parte

En la primera parte de la práctica teníamos que determinar la constante recuperadora del muelle. Mediante un ajuste por mínimos cuadrados sobre la gráfica del momento de la fuerza frente al ángulo conseguimos aproximar su valor. Sin embargo, el ajuste era muy pobre (el coeficiente de regresión solo tenía 2 nueves) y los datos estaban considerablemente alejados de la recta, por lo que deducimos que el valor que nos dio no es del todo fiable. Vemoremos las consecuencias a lo largo de toda la práctica ya que todos los resultados experimentales subsecuentes que utilicen este dato diferirán en cierta medida de las predicciones teóricas.

5.2 Segunda parte

Una vez conocida la constante del muelle teníamos que encontrar el momento de inercia de un disco y un cilindro macizos. Mediante tratamiento de datos obtuvimos el valor de su periodo con el que pudimos calcular el momento de inercia experimental. Al compararlo con el teórico vimos que había una considerable diferencia, pero ambas en el mismo sentido. Probablemente esto se deba a los datos de la constante del muelle y para solucionarlo deberíamos de tomar más datos en la primera parte para poder hacer un mejor ajuste.

5.3 Tercera parte

En la parte final de la práctica había que verificar el teorema de Steiner para relacionar los momentos a través de ejes paralelos. Utilizamos un disco y una barra y medimos sus semiperiodos a diferentes separaciones del centro de masas. Utilizando el mismo procedimiento que en el apartado anterior, pero esta vez para diversas medidas, conseguimos los momentos experimentales y teóricos. En el caso del disco, de nuevo, vimos que los momentos experimentales eran considerablemente más pequeños que los teóricos. Para la barra también hubo diferencias a la baja, pero no eran tan notables, en especial en las medidas muy alejadas del centro.

Finalmente para ambos cuerpos realizamos una gráfica del momento de inercia frente al cuadrado de la distancia, en el que teóricamente debería de dar una recta cuya pendiente es la masa y cuya ordenada en el origen es el momento de inercia en el centro. En el disco nos acercamos bastante al término independiente pero la masa difirió por un cuarto de su valor. Quizá si pudieramos tomar más medidas podríamos haber hecho un mejor ajuste. En el caso del cilindro el ajuste fue prácticamente perfecto para ambas cantidades, probablemente se debiese al mayor número de medidas.

En general diremos que la práctica se completó de manera medianamente satisfactoria. Podemos avistar las relaciones que hay entre las cantidades y las tendencias que siguen, pero el

error en el cálculo de la constante del muelle se arrastró a lo largo de toda la práctica y nos impide afirmar nada con exactitud. Lo más sensato sería repetir la práctica con varios muelles distintos y así poder ver el efecto que tiene este en las relaciones, así cómo minimizar el error que pueda tener en los resultados.

Apéndice

Código y datos

Todo el código y los datos utilizados para la creación de esta memoria se encuentran en un repositorio hospedado en GitHub. Puede accederse desde el siguiente enlace:

<https://github.com/josekoalas/andromeda/tree/master/Mecanica>

Dentro de la carpeta **Mecanica** pueden encontrarse los siguientes ficheros:

- Mecanica.tex y Mecanica.pdf: Archivo LaTeX y pdf generado para esta memoria.
- *.py: Archivos con código python para crear las gráficas en formato .pgf.
- *.pgf: Las distintas gráficas en formato vectorial adecuado para su uso en LaTeX, de corriente alterna y corriente continua.
- *.csv: Tablas con los datos de la práctica utilizadas tanto en LaTeX cómo en python.

En la carpeta **Base** se encuentran varios programas de **python** comunes a todas las memorias:

- varias-medidas.py: Tratamiento de errores
- reg-lin.py: Diferentes tipos de ajustes por mínimos cuadrados
- mpl-config.py: Archivo para configurar los parámetros generales de **matplotlib** para que las gráficas tengan un estilo cohesivo y se exporten en .pgf.

Bibliografía

Facultad de física

Amigo, Alfredo. *Análisis de incertidumbres*. Apuntes de Técnicas Experimentales I, Facultad de Física, 2019-20.

Guión: Leyes de Newton. Apuntes de Técnicas Experimentales I, Facultad de Física, 2019-20.

Datos: Leyes de Newton. Apuntes de Técnicas Experimentales I, Facultad de Física, 2019-20.

Guión: Momento de Inercia. Apuntes de Técnicas Experimentales I, Facultad de Física, 2019-20.

Datos: Momento de Inercia. Apuntes de Técnicas Experimentales I, Facultad de Física, 2019-20.

Carballeira, Carlos. Campus Virtual. *Videos explicativos: Análisis de datos* <https://cv.usc.es/mod/resource/view.php?id=389413>, <https://cv.usc.es/mod/resource/view.php?id=389415>

Otras fuentes

Wikipedia. *Momento de Inercia*. https://es.wikipedia.org/wiki/Momento_de_inercia

Wikipedia. *Momento de Fuerza*. https://es.wikipedia.org/wiki/Momento_de_fuerza

LaTeX

Eiras, Jorge. *Edición de textos de carácter científico con LaTeX*. <https://cv.usc.es/course/view.php?id=18484>

Sturm, Thomas. *The csvsimple package*. <https://osl.ugr.es/CTAN/macros/latex/contrib/csvsimple/csvsimple.pdf>

Ajuste por mínimos cuadrados

Esta sección es una reproducción de la explicación de la regresión lineal de las memorias de electricidad. En concreto la sección que se centra en cómo hayar la constante de permeabilidad magnética. En este caso se explica un ajuste lineal simple sin término independiente.

Para ajustar los una serie de datos que parezcan seguir una relación lineal podemos utilizar el método de **ajuste por mínimos cuadrados**. Al ser *lineal*, podemos ajustarla por una recta general de la forma $y = \alpha + \beta x$. El problema a resolver sería conseguir la mejor aproximación a, b de los parámetros α, β y sus incertidumbres utilizando nuestra serie de parámetros $\{x_i, y_i\}$. Sin embargo, en este caso sabemos que las rectas pasan por el origen (Puesto que para $I=0$, $B=0$), por lo tanto el parámetro a va a ser igual a 0, ya que si sustituimos $y=0$ y $x=0$, obtenemos $0 = \alpha + \beta \cdot 0$. Este tipo de regresión de la forma $y = \beta x$ llama **ajuste por mínimos cuadrados sin término independiente**, y es la que encaja con nuestra ecuación $B = c \cdot I$.

Para ello minimizaremos la suma de los productos del peso estadístico de cada punto, w_i , por el cuadrado de la desviación de los datos, $[y_i - bx_i]^2$. Por lo tanto, la derivada respecto a b

debe de ser 0.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n w_i [y_i - bx_i]^2 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \quad (25)$$

De aquí resultan dos posibles casos:

1. Si las incertidumbres de x_i no son despreciables respecto a las de y_i . Obtenemos la siguiente ecuación: $\omega_i = \frac{1}{s^2(y_i) + b^2 s^2(x_i)}$, que excede el nivel de este curso.
2. Si por el contrario podemos despreciar las incertidumbres de x_i respecto a y_i , podemos simplificar la ecuación anterior a $\omega_i = [s(y_i)]^{-2}$.

En nuestro caso, estamos representando B (y_i) frente a I (x_i), y como ya comentamos la incertidumbre de I no está especificada por lo que consideraremos que es despreciable frente a la de B, así que podemos aplicar el segundo caso.

Además, podemos considerar que las incertidumbres de y_i permanecen constantes entre las diferentes medidas, por lo que también lo hará el peso estadístico $w = cte$. Finalmente, conseguimos la expresión matemática de b en base a la serie de medidas $\{x_i, y_i\}$, que sustituiremos por I y B . También podemos calcular la desviación típica (s), la incertidumbre de b ($s(b)$) y el coeficiente de regresión lineal (r).

$$b = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{\sum_i IB}{\sum_i I^2} \quad (26)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - bx_i)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_i (B - bI)^2}{n - 1}} \quad (27)$$

$$s(b) = \frac{s}{\sqrt{\sum_i x_i^2}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_i I^2}} \quad (28)$$

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sqrt{(\sum_i x_i^2) \cdot (\sum_i y_i^2)}} = \frac{\sum_i IB}{\sqrt{(\sum_i I^2) \cdot (\sum_i B^2)}} \quad (29)$$

Implementaremos este procedimiento utilizando una vez más **python**. Lo haremos en una librería a parte para poder utilizarlo en el resto de las memorias. El código se describe a continuación, dónde los parámetros x e y son arrays de **numpy** o series de **pandas**, lo equivalente a una columna de nuestras tablas. Contienen la función `.sum()`, que hace un sumatorio de todos sus miembros. Como vemos, podemos operar antes de hacer la suma, por ejemplo, para calcular $\sum_i x_i y_i$.

```
def reg_lin_b(x, y):
    n = len(x) #Numero de datos

    #Sumatorios necesarios
```

```

sxy = (x*y).sum()
sx2 = (x**2).sum()
sybx = ((y - b*x)**2).sum()
sy2 = (y**2).sum()

b = sxy / sx2 #Pendiente de la recta
s = (sybx / (n-1))**0.5 #Desviacion tipica
sb = s / (sx2)**0.5 #Incertidumbre de b
r = sxy / (sx2 * sy2)**0.5 #Coeficiente de regresion lineal

return (b, s, sb, r)

```

Ahora crearemos el programa que nos permitirá representar las rectas junto a los puntos experimentales, y nos devolverá los datos de la regresión lineal.

```

import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from reg_lin import reg_lin_b as rl

#Datos, similarmente para las otras dos tablas
d1 = pd.read_csv("BH-4.csv", sep=';', decimal=',')
I1 = d1["I"]; Be1 = d1["Bexp"]

#Regresion lineal sin termino independiente
b1 = rl(I1, Be1)[0]
xr1 = np.linspace(0, max(I1), 10); yr1 = b1 * xr1

#Graficas
plt.scatter(I1, Be1) #Experimental, puntos
plt.plot(xr1, yr1) #Teorica, recta regresion lineal

```

Y obtenemos la siguiente gráfica con los parámetros de regresión indicados.

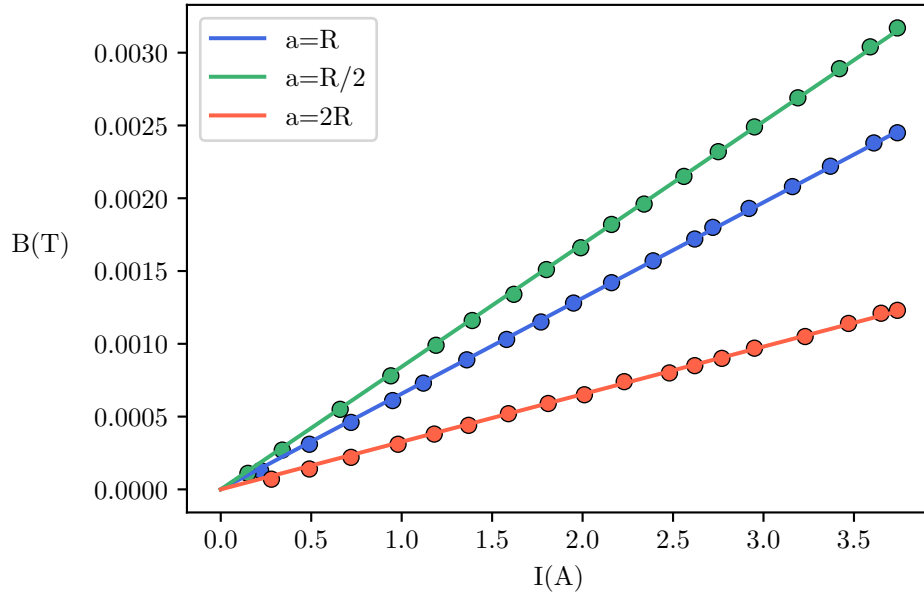


Figura 16: Campo magnético (B) frente a la intensidad (I) para tres separaciones de las bobinas ($a=R$, $a=R/2$, $a=2R$) con regresión lineal simple sin término independiente

$b_1 = 0,0006572T/A$	$s_1 = 9,3 \cdot 10^{-6}T$	$sb_1 = 9,5 \cdot 10^{-7}T/A$	$r_1 = 0,99998$
$b_2 = 0,000843T/A$	$s_2 = 1,3 \cdot 10^{-5}T$	$sb_2 = 1,3 \cdot 10^{-6}T/A$	$r_2 = 0,99997$
$b_3 = 0,000327T/A$	$s_3 = 1,1 \cdot 10^{-5}T$	$sb_3 = 1,1 \cdot 10^{-6}T/A$	$r_3 = 0,99990$