

Electricidad: Bobinas de Helmholtz y Curva de Carga

Pazos Pérez, José
CAMBIAR DNI

Índice

I	Bobinas de Helmholtz	3
1	Objetivos	3
1.1	Expresión para el campo magnético	3
1.2	Diagrama	4
2	Variación del campo en el eje central	5
2.1	Tablas de datos	5
2.1.1	Tabla 1: Separación $a=R$	5
2.1.2	Tabla 2: Separación $a=R/2$	6
2.1.3	Tabla 3: Separación $a=2R$	6
2.2	Campo teórico	7
2.3	Representación gráfica	9
3	Permeabilidad magnética del vacío	11
3.1	Tablas de datos	12
3.2	Representación gráfica	12
3.3	Ajuste por mínimos cuadrados	13
3.4	Cálculo de la permeabilidad magnética	16
4	Conclusiones PENDIENTE	17
II	Curva de Carga	19
1	Objetivos	19
1.1	Expresión de la intensidad	19
1.2	Diagrama	19
1.3	Incertidumbres	20
2	Medidas con V y C constantes, variando R	21
2.1	Tablas de datos	21
2.2	Representación gráfica	23
2.3	Ajuste por mínimos cuadrados	25
2.4	Interpretación	27
3	Medidas con R y V constantes, variando C	29
3.1	Tablas de datos	29
3.2	Representación gráfica	31

3.3	Ajuste por mínimos cuadrados	32
3.4	a y b teóricos	32
4	Medidas con C y R constantes, variando V	33
4.1	Tablas de datos	33
4.2	Representación gráfica	36
4.3	Ajuste por mínimos cuadrados	37
4.4	a y b teóricos	38
5	Conclusiones: PENDIENTE	39

Experiencia I

Bobinas de Helmholtz

1 Objetivos

En esta práctica exploraremos las **Bobinas de Helmholtz**, una distribución de dos bobinas enfrentadas por las que circula corriente eléctrica en el mismo sentido. A raíz de ello se generará un campo magnético con la peculiaridad de ser prácticamente uniforme entre ambos aparatos. Tendremos dos metas principales:

- Comparar el campo magnético entre las dos espiras predicho por la teoría con el que mediremos de manera experimental, variando la distancia entre las bobinas.
- Obtener el valor de la permeabilidad magnética del vacío mediante un ajuste de mínimos cuadrados realizado sobre datos tomados con la distancia entre las bobinas fija.

1.1 Expresión para el campo magnético

La siguiente expresión describe el campo magnético que ambas bobinas producirán en un punto en el eje entre las dos.

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2R} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z - \frac{a}{2}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z + \frac{a}{2}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] \quad (1)$$

En la que:

- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ - Permeabilidad magnética del vacío
- $R = 0.20m$ - Radio de las bobinas
- a - Distancia entre las bobinas
- I - Intensidad que recorre las bobinas
- $N = 154$ - Número de espiras
- z - Distancia entre el punto medio entre las bobinas y otro punto de el eje que une sus centros

1.2 Diagrama

Para verificar esta ley y comprender mejor el funcionamiento de este dispositivo, utilizaremos dos bobinas con 154 espiras enrolladas, y las enfrentaremos. Luego les suministraremos corriente eléctrica y mediremos el campo magnético con un teslámetro. No entraremos en detalles sobre el montaje pormenorizado por no haber realizado esta práctica, pero en la próxima imagen se puede observar cómo las bobinas enfrentadas producen el campo que mediremos.

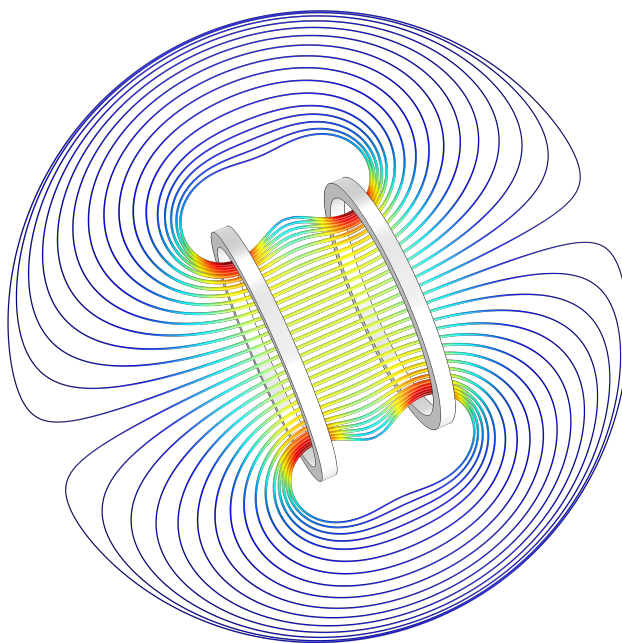


Figura 1: Diagrama del campo generado por dos Bobinas de Helmholtz

En cada una de las dos partes de la práctica explicaremos más en detalle la clase de mediciones que tomaremos y las leyes que queremos demostrar.

2 Variación del campo en el eje central

En esta primera experiecia colocaremos las bobinas de la manera descrita a tres distancias: Igual al radio, la mitad del radio y el doble del radio. Luego moveremos el teslamómetro desde el punto central hacia los lados, siempre siguiendo el eje central. De esta manera, obtendremos 50 medidas en las que lo único que variamos es la distancia, dejando la intensidad constante.

2.1 Tablas de datos

Procedemos a exponer las tablas que obtuvimos. En ellas se representa la distancia al centro (z) en metros (m) y el campo que medimos (B_{exp}) en teslas (T). La incertidumbre de ambas medidas es constante, por lo que la explicitaremos aquí y no en las tablas:

$$s(B_{exp}) = 0.01mT = 10^{-5}T \quad (2)$$

$$z = d - d_0 \quad s(z) = \sqrt{s(d)^2 + s(d_0)^2} = \sqrt{2} \cdot s(d) = \sqrt{2} \cdot 0,001m = 0,0014m \quad (3)$$

La intensidad también será constante y su valor e incertidumbre se fijarán en $I = 2,55 \pm 0,01A$.

2.1.1 Tabla 1: Separación a=R

Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$	Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$
1	0,145	0,00146	26	-0,100	0,00160
2	0,135	0,00150	27	-0,110	0,00155
3	0,125	0,00155	28	-0,120	0,00151
4	0,115	0,00158	29	-0,130	0,00145
5	0,105	0,00162	30	-0,140	0,00140
6	0,095	0,00166	31	-0,150	0,00134
7	0,085	0,00168	32	-0,160	0,00128
8	0,075	0,00170	33	-0,170	0,00121
9	0,065	0,00171	34	-0,180	0,00114
10	0,055	0,00170	35	-0,190	0,00107
11	0,045	0,00171	36	-0,200	0,00101
12	0,035	0,00171	37	-0,210	0,00095
13	0,025	0,00170	38	-0,220	0,00089
14	0,015	0,00171	39	-0,230	0,00082
15	0,005	0,00170	40	-0,240	0,00077
16	0,000	0,00170	41	-0,250	0,00067
17	-0,010	0,00169	42	-0,260	0,00062
18	-0,020	0,00169	43	-0,270	0,00057
19	-0,030	0,00169	44	-0,280	0,00052
20	-0,040	0,00168	45	-0,290	0,00048
21	-0,050	0,00168	46	-0,300	0,00045
22	-0,060	0,00167	47	-0,310	0,00042
23	-0,070	0,00166	48	-0,320	0,00039
24	-0,080	0,00164	49	-0,330	0,00037
25	-0,090	0,00162	50	-0,340	0,00034

Figura 2: Variación de B con a=R

Para determinar la desviación cuadrática de los datos de la tabla anterior usaremos la siguiente fórmula:

$$s = \frac{1}{N} \sqrt{\sum (B_{exp} - B_{teo})^2} \quad (4)$$

Para nuestras medidas, obtenemos $s_1 = 1,1 \cdot 10^{-5}T$.

2.1.2 Tabla 2: Separación a=R/2

Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$
1	0,175	0,00110
2	0,165	0,00118
3	0,155	0,00125
4	0,145	0,00134
5	0,135	0,00143
6	0,125	0,00151
7	0,115	0,00160
8	0,105	0,00168
9	0,095	0,00177
10	0,085	0,00185
11	0,075	0,00192
12	0,065	0,00200
13	0,055	0,00205
14	0,045	0,00208
15	0,035	0,00213
16	0,025	0,00216
17	0,015	0,00217
18	0,005	0,00217
19	0,000	0,00217
20	-0,010	0,00216
21	-0,020	0,00213
22	-0,030	0,00210
23	-0,040	0,00205
24	-0,050	0,00200
25	-0,060	0,00194

Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$
26	0,175	0,00110
27	0,165	0,00118
28	0,155	0,00125
29	0,145	0,00134
30	0,135	0,00143
31	0,125	0,00151
32	0,115	0,00160
33	0,105	0,00168
34	0,095	0,00177
35	0,085	0,00185
36	0,075	0,00192
37	0,065	0,00200
38	0,055	0,00205
39	0,045	0,00208
40	0,035	0,00213
41	0,025	0,00216
42	0,015	0,00217
43	0,005	0,00217
44	0,000	0,00217
45	-0,010	0,00216
46	-0,020	0,00213
47	-0,030	0,00210
48	-0,040	0,00205
49	-0,050	0,00200
50	-0,060	0,00194

2.1.3 Tabla 3: Separación a=2R

Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$
1	0,035	0,00085
2	0,025	0,00085
3	0,015	0,00084
4	0,005	0,00083
5	0,000	0,00083
6	-0,010	0,00083
7	-0,020	0,00083
8	-0,030	0,00084
9	-0,040	0,00085
10	-0,050	0,00087
11	-0,060	0,00089
12	-0,070	0,00091
13	-0,080	0,00093
14	-0,090	0,00096
15	-0,100	0,00100
16	-0,110	0,00104
17	-0,120	0,00108
18	-0,130	0,00112
19	-0,140	0,00115
20	-0,150	0,00119
21	-0,160	0,00121
22	-0,170	0,00126
23	-0,180	0,00127
24	-0,190	0,00128
25	-0,200	0,00128

Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$
26	0,035	0,00085
27	0,025	0,00085
28	0,015	0,00084
29	0,005	0,00083
30	0,000	0,00083
31	-0,010	0,00083
32	-0,020	0,00083
33	-0,030	0,00084
34	-0,040	0,00085
35	-0,050	0,00087
36	-0,060	0,00089
37	-0,070	0,00091
38	-0,080	0,00093
39	-0,090	0,00096
40	-0,100	0,00100
41	-0,110	0,00104
42	-0,120	0,00108
43	-0,130	0,00112
44	-0,140	0,00115
45	-0,150	0,00119
46	-0,160	0,00121
47	-0,170	0,00126
48	-0,180	0,00127
49	-0,190	0,00128
50	-0,200	0,00128

Figura 3: Variación de B con a=R/2

Figura 4: Variación de B con a=2R

Calculamos la desviación típica (4) con estos datos y obtenemos $s_2 = 3,3 \cdot 10^{-5}T$.

Calculamos la desviación típica (4) con estos datos y obtenemos $s_3 = 7,5 \cdot 10^{-5}T$.

2.2 Campo teórico

Ahora debemos calcular el campo magnético teórico para poder compararlo con los datos que obtuvimos y poder crear la gráfica que contenga a ambos.

Utilizaremos la ecuación 1 y sustituiremos los valores de $a=R$, $a=R/2$ y $a=2R$.

$$\begin{aligned} B1_{teo} &= \frac{\mu_0 I N}{2R} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z-\frac{R}{2}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z+\frac{R}{2}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] \\ B2_{teo} &= \frac{\mu_0 I N}{2R} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z-\frac{R}{4}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z+\frac{R}{4}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] \\ B3_{teo} &= \frac{\mu_0 I N}{2R} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z-R}{R}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z+R}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

Ahora, con estas ecuaciones, sustituiremos el valor del radio $R=0.20\text{m}$, la permeabilidad magnética $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$, el número de espiras $N=154$ y la intensidad $I=2,55\text{A}$. Esto nos dará una fórmula general para calcular los valores de B sustituyendo las distancias z correspondientes. Presentamos los resultados correspondientes en las siguientes tablas:

(En la siguiente página por comodidad de representación.)

Medida	$z1(m)$	$B1_{exp}(T)$	$B1_{teo}(T)$	$z2(m)$	$B2_{exp}(T)$	$B2_{teo}(T)$	$z3(m)$	$B3_{exp}(T)$	$B3_{teo}(T)$
1	0,145	0,00146	0,00146	0,175	0,00110	0,00111	0,035	0,00085	0,00090
2	0,135	0,00150	0,00152	0,165	0,00118	0,00119	0,025	0,00085	0,00089
3	0,125	0,00155	0,00157	0,155	0,00125	0,00128	0,015	0,00084	0,00088
4	0,115	0,00158	0,00161	0,145	0,00134	0,00136	0,005	0,00083	0,00087
5	0,105	0,00162	0,00165	0,135	0,00143	0,00145	0,000	0,00083	0,00087
6	0,095	0,00166	0,00169	0,125	0,00151	0,00154	-0,010	0,00083	0,00088
7	0,085	0,00168	0,00171	0,115	0,00160	0,00163	-0,020	0,00083	0,00088
8	0,075	0,00170	0,00173	0,105	0,00168	0,00172	-0,030	0,00084	0,00089
9	0,065	0,00171	0,00175	0,095	0,00177	0,00180	-0,040	0,00085	0,00091
10	0,055	0,00170	0,00176	0,085	0,00185	0,00188	-0,050	0,00087	0,00093
11	0,045	0,00171	0,00176	0,075	0,00192	0,00196	-0,060	0,00089	0,00096
12	0,035	0,00171	0,00176	0,065	0,00200	0,00203	-0,070	0,00091	0,00099
13	0,025	0,00170	0,00177	0,055	0,00205	0,00209	-0,080	0,00093	0,00102
14	0,015	0,00171	0,00177	0,045	0,00208	0,00214	-0,090	0,00096	0,00106
15	0,005	0,00170	0,00177	0,035	0,00213	0,00219	-0,100	0,00100	0,00109
16	0,000	0,00170	0,00177	0,025	0,00216	0,00222	-0,110	0,00104	0,00113
17	-0,010	0,00169	0,00177	0,015	0,00217	0,00224	-0,120	0,00108	0,00117
18	-0,020	0,00169	0,00177	0,005	0,00217	0,00225	-0,130	0,00112	0,00121
19	-0,030	0,00169	0,00177	0,000	0,00217	0,00225	-0,140	0,00115	0,00125
20	-0,040	0,00168	0,00176	-0,010	0,00216	0,00225	-0,150	0,00119	0,00128
21	-0,050	0,00168	0,00176	-0,020	0,00213	0,00223	-0,160	0,00121	0,00131
22	-0,060	0,00167	0,00175	-0,030	0,00210	0,00220	-0,170	0,00126	0,00133
23	-0,070	0,00166	0,00174	-0,040	0,00205	0,00217	-0,180	0,00127	0,00134
24	-0,080	0,00164	0,00172	-0,050	0,00200	0,00212	-0,190	0,00128	0,00135
25	-0,090	0,00162	0,00170	-0,060	0,00194	0,00206	-0,200	0,00128	0,00134
26	-0,100	0,00160	0,00167	-0,070	0,00186	0,00199	-0,210	0,00125	0,00133
27	-0,110	0,00155	0,00163	-0,080	0,00178	0,00192	-0,220	0,00123	0,00131
28	-0,120	0,00151	0,00159	-0,090	0,00169	0,00184	-0,230	0,00119	0,00129
29	-0,130	0,00145	0,00154	-0,100	0,00162	0,00176	-0,240	0,00116	0,00125
30	-0,140	0,00140	0,00149	-0,110	0,00154	0,00167	-0,250	0,00111	0,00121
31	-0,150	0,00134	0,00143	-0,120	0,00145	0,00158	-0,260	0,00107	0,00116
32	-0,160	0,00128	0,00136	-0,130	0,00136	0,00149	-0,270	0,00102	0,00111
33	-0,170	0,00121	0,00130	-0,140	0,00127	0,00141	-0,280	0,00097	0,00106
34	-0,180	0,00114	0,00123	-0,150	0,00120	0,00132	-0,290	0,00091	0,00100
35	-0,190	0,00107	0,00116	-0,160	0,00111	0,00124	-0,300	0,00086	0,00095
36	-0,200	0,00101	0,00109	-0,170	0,00104	0,00115	-0,310	0,00080	0,00089
37	-0,210	0,00095	0,00103	-0,180	0,00096	0,00108	-0,320	0,00075	0,00084
38	-0,220	0,00089	0,00096	-0,190	0,00090	0,00100	-0,330	0,00070	0,00078
39	-0,230	0,00082	0,00090	-0,200	0,00083	0,00093	-0,340	0,00065	0,00073
40	-0,240	0,00077	0,00084	-0,210	0,00076	0,00087	-0,350	0,00059	0,00068
41	-0,250	0,00067	0,00078	-0,220	0,00071	0,00081	-0,360	0,00056	0,00063
42	-0,260	0,00062	0,00073	-0,230	0,00066	0,00075	-0,370	0,00052	0,00059
43	-0,270	0,00057	0,00068	-0,240	0,00061	0,00070	-0,380	0,00048	0,00055
44	-0,280	0,00052	0,00063	-0,250	0,00056	0,00065	-0,390	0,00045	0,00051
45	-0,290	0,00048	0,00059	-0,260	0,00052	0,00060	-0,400	0,00042	0,00048
46	-0,300	0,00045	0,00055	-0,270	0,00049	0,00056	-0,410	0,00038	0,00044
47	-0,310	0,00042	0,00051	-0,280	0,00045	0,00052	-0,420	0,00036	0,00041
48	-0,320	0,00039	0,00047	-0,290	0,00042	0,00048	-0,430	0,00033	0,00038
49	-0,330	0,00037	0,00044	-0,300	0,00040	0,00045	-0,440	0,00030	0,00036
50	-0,340	0,00034	0,00041	-0,310	0,00038	0,00042	-0,450	0,00028	0,00033

Figura 5: Campo magnético experimental frente a teórico para $a=R$, $a=R/2$ y $a=2R$

2.3 Representación gráfica

Finalmente, teniendo los datos del campo magnético experimental y sabiendo calcular los del campo magnético teórico, representaremos ambos para poder compararlos. Cabe destacar que no utilizaremos los datos B_{teo} de la tabla anterior, si no que computaremos la fórmula directamente en python para obtener una curva más suave. La tabla anterior era simplemente una demostración de cómo calcular el campo teórico.

Primero procesaremos los datos en **python**, y para ello haremos uso de la librería **pandas**, que nos permite importar directamente archivos .csv, el mismo formato que usamos para representar las tablas de L^AT_EX.

```
import pandas as pd

#Constantes
pm = 4 * np.pi * 10**(-7); i = 2.55; n = 154; r = 0.2

#Leer datos
d1 = pd.read_csv("BH-1.csv", sep=';', decimal=',')
z1 = d1["z"]; Be1 = d1["Bexp"] #Similarmente para las otras tablas
```

El siguiente paso es calcular las curvas teóricas, para las que utilizaremos una función por comodidad. Para ellas definiremos $z \in [-0,450, 0,450]$ con medidas cada 0,02m, ya que nos dará una representación simétrica y que contenga todas las medidas experimentales.

```
#Calculo campo magnetico
B = lambda pm, i, n, r, a, z: ((pm * i * n) / (2 * r)) *
    ((1 / (1 + ((z - (a/2)) / (r))**2)**(3/2)) +
    (1 / (1 + ((z + (a/2)) / (r))**2)**(3/2)))

#Curvas teoricas
z = np.linspace(-0.450, 0.450, 450)
Bt1 = B(pm, i, n, r, r, z)
Bt2 = B(pm, i, n, r, r/2, z)
Bt3 = B(pm, i, n, r, 2*r, z)
```

Por fin estamos listos para representar las gráficas, lo que haremos con ayuda de **matplotlib**. Las exportaremos utilizando un formato .pgf que L^AT_EX puede leer de manera vectorial.

```
import matplotlib.pyplot as plt

#Graficas experimentales (puntos)
plt.scatter(z1, Be1); plt.scatter(z2, Be2); plt.scatter(z3, Be3)
#Graficas teoricas (curvas)
plt.plot(z, Bt1); plt.plot(z, Bt2); plt.plot(z, Bt3)
```

Además de nuestro programa original, utilizaremos un complemento común para todas las memorias que define el estilo de las gráficas y configura `matplotlib` para exportar `.pgf` y utilizar nuestra paleta de colores.

Al ejecutar el código, obtenemos la siguiente gráfica:

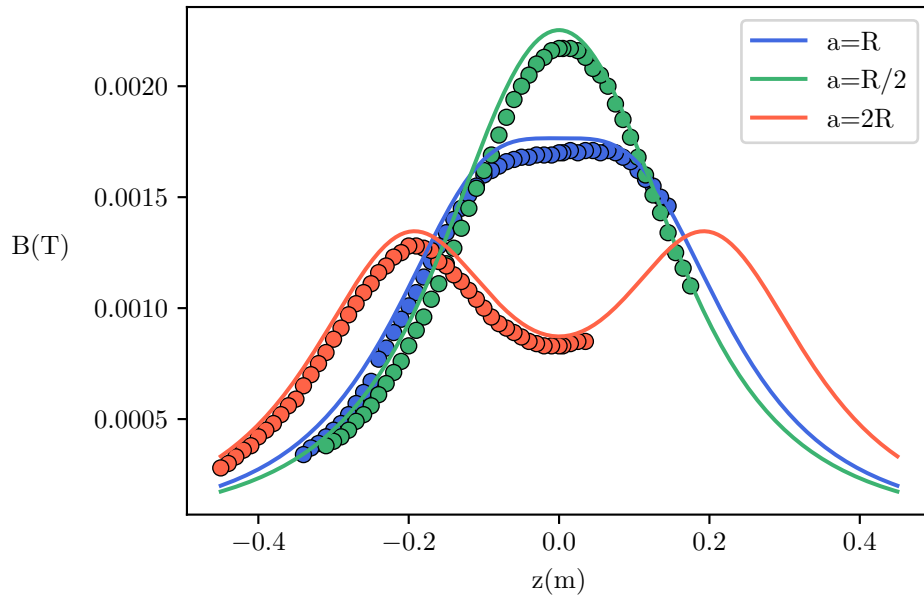


Figura 6: Campo magnético (B) frente a distancia del punto medio (z) para tres separaciones de bobinas ($a=R$, $a=R/2$, $a=2R$)

Podemos observar que los datos experimentales no están exactamente encima de la gráfica, pero siguen la misma forma. Esto se debe a que las medidas de laboratorio pueden tener algún error, pero igualmente comprueba que las leyes se verifican. Además, esto se corresponde con obtener una desviación cuadrática (4) muy pequeña en comparación con nuestras medidas.

3 Permeabilidad magnética del vacío

En esta segunda parte de la práctica mantendremos el teslámetro en el centro de ambas bobinas y variaremos la intensidad. De esta manera podremos calcular la constante de permeabilidad magnética del vacío a partir de datos experimentales y compararla con su valor teórico ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$).

Si observamos la ecuación de B (1), observamos que al dejar z constante, B se relaciona con I a través de una constante:

$$B = c \cdot I \quad c = \frac{\mu_0 N}{2R} \cdot \left[\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{a/2}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right]$$

Podemos simplificar todavía más este resultado si sustituímos a por R, R/2 y R2 respectivamente:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\mu_0 N}{2R} \cdot \left[\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{R}{2R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] = \frac{\mu_0 N}{R} \cdot \frac{2^3}{5\sqrt{5}} \\ c_2 &= \frac{\mu_0 N}{2R} \cdot \left[\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{R}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] = \frac{\mu_0 N}{R} \cdot \frac{2^6}{17\sqrt{17}} \\ c_3 &= \frac{\mu_0 N}{2R} \cdot \left[\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{R}{4R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] = \frac{\mu_0 N}{R} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es encontrar las constantes c_n , la pendiente de la recta $B = c \cdot I$, para poder despejar μ_0 de ahí. Para ello haremos un ajuste por mínimos cuadrados sin término independiente. Luego utilizaremos estas fórmulas para calcular μ_0 en base a c.

$$\mu_0 = \frac{c_1 R \cdot 5\sqrt{5}}{N \cdot 2^3} = \frac{c_2 R \cdot 17\sqrt{17}}{N \cdot 2^6} = \frac{c_3 R \cdot 2\sqrt{2}}{N} \quad (5)$$

También podemos calcular la indeterminación de μ_0 mediante propagación de incertidumbres. Por comodidad usaremos K para referirnos a la fracción en corchetes en la fórmula superior que sustituímos por la constante al incluir $a=R$, $a=R/2$ y $a=2R$. Vemos que es simplemente sustituir c por $s(c)$ en la fórmula de μ_0 .

$$s(\mu_0) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu_0}{\partial c}\right)^2 \cdot s^2(c)} = \sqrt{\left(\frac{2R}{N} \cdot K\right)^2 \cdot s^2(c)} = \frac{2R}{N} \cdot K \cdot s(c) \quad (6)$$

3.1 Tablas de datos

En las siguientes tablas de datos representamos el campo magnético (B_{exp}) en teslas (T) que medimos desde el punto medio de las bobinas junto a la intensidad (I) en amperios (A). La incertidumbre del campo magnético sigue siendo constante $s(B_{exp}) = 10^{-5}T$, pero no se especifica la incertidumbre de I . En la parte anterior de la práctica podemos ver en el enunciado de las tablas que $s(I) = 0,01A$, sin embargo, al no especificarse en esta parte y de ser 0,01 causaría problemas a la hora de hacer una regresión lineal, consideraremos que es nula o muy baja.

Medida	$I1(A)$	$B1_{exp}(T)$	$I2(A)$	$B2_{exp}(T)$	$I3(A)$	$B3_{exp}(T)$
1	0,22	0,00013	0,15	0,00011	0,28	0,00007
2	0,49	0,00031	0,34	0,00027	0,49	0,00014
3	0,72	0,00046	0,66	0,00055	0,72	0,00022
4	0,95	0,00061	0,94	0,00078	0,98	0,00031
5	1,12	0,00073	1,19	0,00099	1,18	0,00038
6	1,36	0,00089	1,39	0,00116	1,37	0,00044
7	1,58	0,00103	1,62	0,00134	1,59	0,00052
8	1,77	0,00115	1,80	0,00151	1,81	0,00059
9	1,95	0,00128	1,99	0,00166	2,01	0,00065
10	2,16	0,00142	2,16	0,00182	2,23	0,00074
11	2,39	0,00157	2,34	0,00196	2,48	0,00080
12	2,62	0,00172	2,56	0,00215	2,62	0,00085
13	2,72	0,00180	2,75	0,00232	2,77	0,00090
14	2,92	0,00193	2,95	0,00249	2,95	0,00097
15	3,16	0,00208	3,19	0,00269	3,23	0,00105
16	3,37	0,00222	3,42	0,00289	3,47	0,00114
17	3,61	0,00238	3,59	0,00304	3,65	0,00121
18	3,74	0,00245	3,74	0,00317	3,74	0,00123

Figura 7: Variación del campo magnético con la intensidad para $a=R$, $a=R/2$ y $a=2R$

3.2 Representación gráfica

Utilizaremos un programa de `python` muy similar al anterior para representar los datos experimentales como puntos. Sin embargo, en esta ocasión tenemos que hacer un ajuste por mínimos cuadrados, que explicaremos en la siguiente sección.

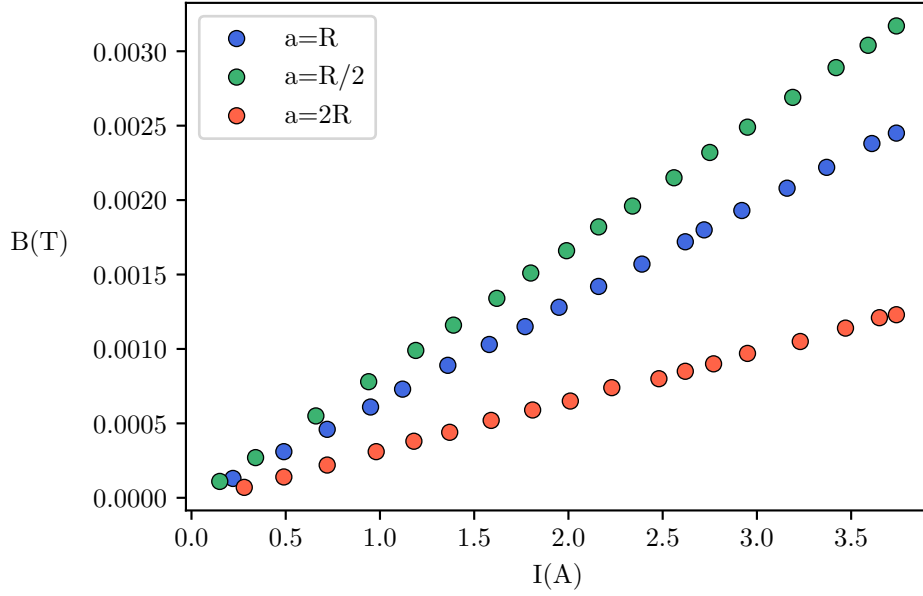


Figura 8: Campo magnético (B) frente a la intensidad (I) para tres separaciones de las bobinas ($a=R$, $a=R/2$, $a=2R$)

3.3 Ajuste por mínimos cuadrados

Para ajustar los una serie de datos que parezcan seguir una relación lineal podemos utilizar el método de **ajuste por mínimos cuadrados**. Al ser *lineal*, podemos ajustarla por una recta general de la forma $y = \alpha + \beta x$. El problema a resolver sería conseguir la mejor aproximación a , b de los parámetros α , β y sus incertidumbres utilizando nuestra serie de parámetros $\{x_i, y_i\}$. Sin embargo, en este caso sabemos que las rectas pasan por el origen (Puesto que para $I=0$, $B=0$), por lo tanto el parámetro a va a ser igual a 0, ya que si sustituimos $y=0$ y $x=0$, obtenemos $0 = \alpha + \beta \cdot 0$. Este tipo de regresión de la forma $y = \beta x$ llama **ajuste por mínimos cuadrados sin término independiente**, y es la que encaja con nuestra ecuación $B = c \cdot I$.

Para ello minimizaremos la suma de los productos del peso estadístico de cada punto, w_i , por el cuadrado de la desviación de los datos, $[y_i - bx_i]^2$. Por lo tanto, la derivada respecto a b debe de ser 0.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n w_i [y_i - bx_i]^2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \quad (8)$$

De aquí resultan dos posibles casos:

1. Si las incertidumbres de x_i no son despreciables respecto a las de y_i . Obtenemos la siguiente ecuación: $\omega_i = \frac{1}{s^2(y_i) + b^2 s^2(x_i)}$, que excede el nivel de este curso.

2. Si por el contrario podemos despreciar las incertidumbres de x_i respecto a y_i , podemos simplificar la ecuación anterior a $\omega_i = [s(y_i)]^{-2}$.

En nuestro caso, estamos representando $B(y_i)$ frente a $I(x_i)$, y como ya comentamos la incertidumbre de I no está especificada por lo que consideraremos que es despreciable frente a la de B , así que podemos aplicar el segundo caso.

Además, podemos considerar que las incertidumbres de y_i permanecen constantes entre las diferentes medidas, por lo que también lo hará el peso estadístico $w = cte$. Finalmente, conseguimos la expresión matemática de b en base a la serie de medidas $\{x_i, y_i\}$, que sustituiremos por I y B . También podemos calcular la desviación típica (s), la incertidumbre de b ($s(b)$) y el coeficiente de regresión lineal (r).

$$b = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{\sum_i IB}{\sum_i I^2} \quad (9)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - bx_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_i (B - bI)^2}{n-1}} \quad (10)$$

$$s(b) = \frac{s}{\sqrt{\sum_i x_i^2}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_i I^2}} \quad (11)$$

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sqrt{(\sum_i x_i^2) \cdot (\sum_i y_i^2)}} = \frac{\sum_i IB}{\sqrt{(\sum_i I^2) \cdot (\sum_i B^2)}} \quad (12)$$

Implementaremos este procedimiento utilizando una vez más **python**. Lo haremos en una librería a parte para poder utilizarlo en el resto de las memorias. El código se describe a continuación, donde los parámetros x e y son arrays de **numpy** o series de **pandas**, lo equivalente a una columna de nuestras tablas. Contienen la función `.sum()`, que hace un sumatorio de todos sus miembros. Como vemos, podemos operar antes de hacer la suma, por ejemplo, para calcular $\sum_i x_i y_i$.

```
def reg_lin_b(x, y):
    n = len(x) #Numero de datos

    #Sumatorios necesarios
    sxy = (x*y).sum()
    sx2 = (x**2).sum()
    sybx = ((y - b*x)**2).sum()
    sy2 = (y**2).sum()

    b = sxy / sx2 #Pendiente de la recta
    s = (sybx / (n-1))**0.5 #Desviacion tipica
    sb = s / (sx2)**0.5 #Incertidumbre de b
    r = sxy / (sx2 * sy2)**0.5 #Coeficiente de regresion lineal

    return (b, s, sb, r)
```

Ahora crearemos el programa que nos permitirá representar las rectas junto a los puntos experimentales, y nos devolverá los datos de la regresión lineal.

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

#Datos, similarmente para las otras dos tablas
d1 = pd.read_csv("BH-4.csv", sep=';', decimal=',')
I1 = d1["I"]; Be1 = d1["Bexp"]

#Regresion lineal sin termino independiente
b1 = rl(I1, Be1)[0]
xr1 = np.linspace(0, max(I1), 10); yr1 = b1 * xr1

#Graficas
plt.scatter(I1, Be1) #Experimental, puntos
plt.plot(xr1, yr1) #Teorica, recta regresion lineal
```

Y obtenemos la siguiente gráfica con los parámetros de regresión indicados.

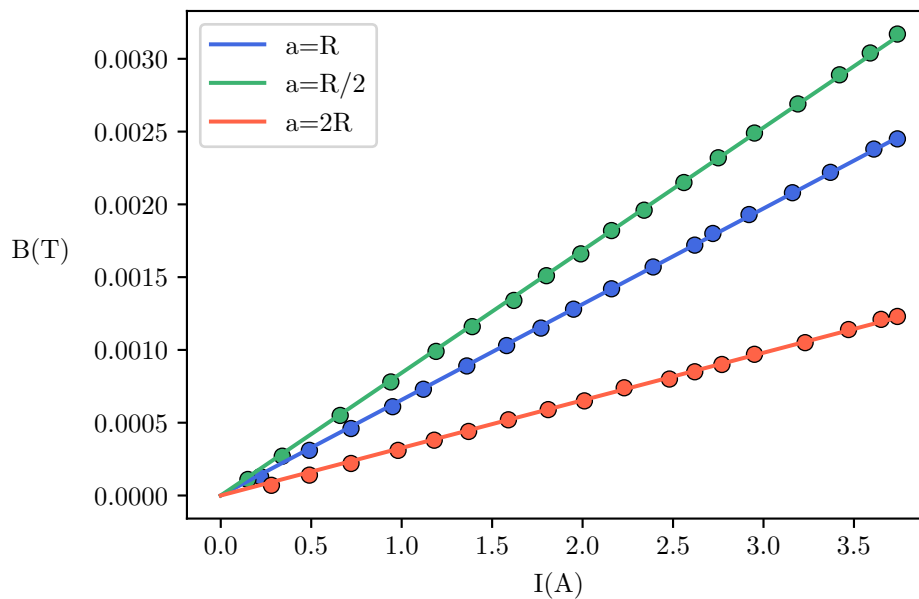


Figura 9: Campo magnético (B) frente a la intensidad (I) para tres separaciones de las bobinas ($a=R$, $a=R/2$, $a=2R$) con regresión lineal simple sin término independiente

$b_1 = 0,0006572T/A$	$s_1 = 9,3 \cdot 10^{-6}T$	$sb_1 = 9,5 \cdot 10^{-7}T/A$	$r_1 = 0,99998$
$b_2 = 0,000843T/A$	$s_2 = 1,3 \cdot 10^{-5}T$	$sb_2 = 1,3 \cdot 10^{-6}T/A$	$r_2 = 0,99997$
$b_3 = 0,000327T/A$	$s_3 = 1,1 \cdot 10^{-5}T$	$sb_3 = 1,1 \cdot 10^{-6}T/A$	$r_3 = 0,99990$

3.4 Cálculo de la permeabilidad magnética

Ahora que tenemos las pendientes de las tres rectas, podemos calcular la permeabilidad magnética con las ecuaciones que describimos antes (5). Tenemos así:

$$\begin{aligned}\mu_{0(1)} &= \frac{b_1 R \cdot 5\sqrt{5}}{N \cdot 2^3} = \frac{0,0006572 \cdot 0,2 \cdot 5\sqrt{5}}{154 \cdot 2^3} = 1,193 \cdot 10^{-6} \frac{m \cdot T}{A} \\ \mu_{0(2)} &= \frac{b_2 R \cdot 17\sqrt{17}}{N \cdot 2^6} = \frac{0,000843 \cdot 0,2 \cdot 17\sqrt{17}}{154 \cdot 2^6} = 1,199 \cdot 10^{-6} \frac{m \cdot T}{A} \\ \mu_{0(3)} &= \frac{b_3 R \cdot 2\sqrt{2}}{N} = \frac{0,000327 \cdot 0,2 \cdot 2\sqrt{2}}{154} = 1,201 \cdot 10^{-6} \frac{m \cdot T}{A}\end{aligned}$$

Calcular la incertidumbre de nuestras medidas es sencillo utilizando propagación de incertidumbres. A partir de la expresión 6 obtenemos estos resultados:

$$\begin{aligned}s(\mu_{0(1)}) &= \frac{s(b_1) R \cdot 5\sqrt{5}}{N \cdot 2^3} = 1,7 \cdot 10^{-9} \frac{m \cdot T}{A} \\ s(\mu_{0(2)}) &= \frac{s(b_2) R \cdot 17\sqrt{17}}{N \cdot 2^6} = 1,8 \cdot 10^{-9} \frac{m \cdot T}{A} \\ s(\mu_{0(3)}) &= \frac{s(b_3) R \cdot 2\sqrt{2}}{N} = 4,0 \cdot 10^{-9} \frac{m \cdot T}{A}\end{aligned}$$

Podemos observar que los resultados se ajustan bastante bien a la constante de permeabilidad magnética original, el ligero desvío se produce por el mismo motivo que las gráficas experimentales no coinciden del todo con las teóricas, probablemente pequeños fallos en la obtención de los datos en el laboratorio. De cualquier manera, podemos afirmar con seguridad que μ_0 tiene un valor muy similar al obtenido.

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi 10^{-7} \frac{m \cdot T}{A} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \\ \mu_0 &\approx 1,193 \cdot 10^{-6} \pm 1,7 \cdot 10^{-9} \approx 1,199 \cdot 10^{-6} \pm 1,8 \cdot 10^{-9} \approx 1,201 \cdot 10^{-6} \pm 4,0 \cdot 10^{-9}\end{aligned}$$

4 Conclusiones PENDIENTE

Experiencia II

Curva de Carga

1 Objetivos

En esta práctica trabajaremos con un **circuito RC**, o lo que es lo mismo, que tiene una resistencia y un condensador. Podemos verlo en la figura a continuación:

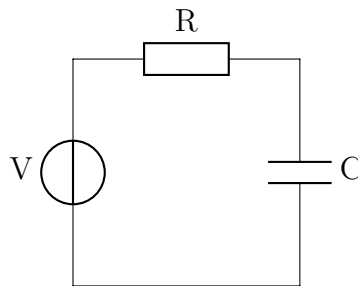


Figura 10: Circuito RC

Mediremos la curva de carga del condensador en tres escenarios diferentes:

- Manteniendo **V** y **C** constantes, variando **R**
- Manteniendo **R** y **V** constantes, variando **C**
- Manteniendo **C** y **R** constantes, variando **V**

1.1 Expresión de la intensidad

Si utilizamos la **ley de Ohm** en el circuito, obtenemos una ecuación diferencial de $Q(t)$, y utilizando su resultado podemos calcular $I(t)$ dado que $I(t) = \partial Q / \partial t$

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta V_R + \Delta V_C = IR + \frac{Q}{C} = \frac{\partial Q}{\partial t} R + \frac{Q}{C} \\ Q(t) &= C \Delta V (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \\ I(t) &= \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\Delta V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\end{aligned}\tag{13}$$

1.2 Diagrama

Pese a que no explicaremos de manera pormenorizada el montaje experimental, daremos unas nociones básicas del funcionamiento del circuito y cómo tomaremos las medidas.

Necesitamos una fuente de alimentacion que conectaremos a una resistencia y un condensador. Además, añadiremos un amperímetro que nos permita visualizar la intensidad. También colocaremos otro circuito de descarga, para que moviendo un interruptor podamos conectar el condensador directamente a una resistencia muy pequeña para que se descargue de manera casi instantánea. En el siguiente diagrama se ve una posible configuración:

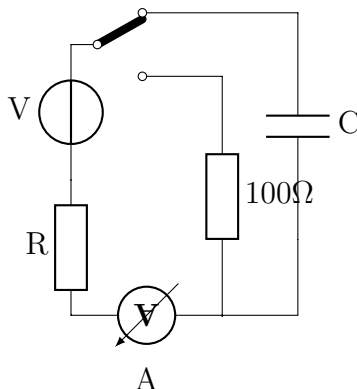


Figura 11: Montaje experimental

Al tomar las medidas, debemos de asegurarnos de que el condensador esté descargado. Conectaremos el condensador a la corriente (y la resistencia) y anotaremos el tiempo cada vez que el amperímetro varíe el $0,1\mu A$, su precisión instrumental.

1.3 Incertidumbres

Ya sabemos que la incertidumbre experimental del amperímetro es de $0,1\mu A = 10^{-7}A$, sin embargo en el caso del tiempo debemos realizar una matización. Pese a que el cronómetro tiene una precisión experimental de $0,01s$, no podemos tomarla cómo tal. Hay un desfase entre que el amperímetro cambia y nosotros anotamos el tiempo, por lo que tenemos que tener en cuenta las limitaciones de nuestra propia percepción. Estimaremos que la incertidumbre del tiempo es de $0,3s$.

Para representar la curva de carga preferiremos hacer uso del logaritmo de la intensidad ($\ln I$) en lugar de la medida directa, por lo que procederemos a calcular su fórmula de propagación de incertidumbres.

$$s(\ln I) = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln I}{\partial I}\right)^2 \cdot s^2(I)} = \sqrt{\frac{1}{I^2} \cdot s^2(I)} = \frac{s(I)}{I} \quad (14)$$

2 Medidas con V y C constantes, variando R

En la primera experiencia, dejaremos $V = 10V$ y $C = 3 \cdot 10^{-5}F$ constantes, y cambiaremos la resistencia. Para cuatro valores distintos obtenemos los datos expuestos.

2.1 Tablas de datos

Como discutimos en el apartado anterior, la incertidumbre del tiempo y de la intensidad son constantes a lo largo de los experimentos, siendo respectivamente $s(T) = 0,3s$ y $s(I) = 10^{-7}A$, por lo que no las incluiremos en las tablas. La del logaritmo de I si que varía, y se calcula utilizando la ecuación 14. Presentamos los resultados a continuación.

$R_1 = 4,7 \cdot 10^6 \Omega$			$R_2 = 6,9 \cdot 10^6 \Omega$		
$T_1(s)$	$I_1(A)$	$\ln I_1 \pm s(I_1)(A)$	$T_2(s)$	$I_2(A)$	$\ln I_2 \pm s(I_2)(A)$
0,0	0,0000022	$-13,027 \pm 0,045$	0,0	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
2,7	0,0000021	$-13,074 \pm 0,048$	14,3	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
9,0	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$	28,9	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
14,6	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$	46,5	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
23,1	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$	62,9	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
30,4	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$	83,2	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
38,4	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$	103,4	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
47,0	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$	128,1	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
56,5	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$	153,7	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
64,7	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$	184,1	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
75,6	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$	218,3	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
87,6	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$	262,0	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
97,6	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$	318,2	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
111,3	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$	392,7	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$
126,7	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$			
141,2	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$			
162,3	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$			
183,4	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$			
205,6	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$			
235,9	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$			
274,3	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$			
350,2	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$			

$$\mathbf{R}_3 = 3,2 \cdot 10^6 \Omega$$

$T_3(s)$	$I_3(A)$	$\ln I_3 \pm s(I_3)(A)$
0,0	0,0000031	$-12,684 \pm 0,032$
3,5	0,0000030	$-12,717 \pm 0,033$
6,9	0,0000029	$-12,751 \pm 0,034$
9,8	0,0000028	$-12,786 \pm 0,036$
13,2	0,0000027	$-12,822 \pm 0,037$
16,5	0,0000026	$-12,860 \pm 0,038$
19,8	0,0000025	$-12,899 \pm 0,040$
24,7	0,0000024	$-12,940 \pm 0,042$
29,3	0,0000023	$-12,983 \pm 0,043$
32,3	0,0000022	$-13,027 \pm 0,045$
37,8	0,0000021	$-13,074 \pm 0,048$
41,5	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$
46,7	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$
52,1	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
57,6	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
63,2	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
69,8	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
75,7	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
83,4	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
90,9	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
99,8	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
107,6	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
117,8	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
130,8	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
142,3	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
157,9	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
175,4	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
196,3	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
223,5	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
263,2	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
328,7	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

$$\mathbf{R}_4 = 5 \cdot 10^6 \Omega$$

$T_4(s)$	$I_4(A)$	$\ln I_4 \pm s(I_4)(A)$
0,0	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$
7,3	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$
14,7	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
23,3	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
30,8	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
40,7	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
51,2	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
61,3	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
70,9	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
82,1	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
95,7	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
112,2	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
124,7	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
140,3	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$

2.2 Representación gráfica

Primero, representaremos los datos de I_i frente a T_i directamente. Utilizando `pandas` y `matplotlib` de una manera muy similar a la primera práctica, obtenemos la siguiente gráfica:

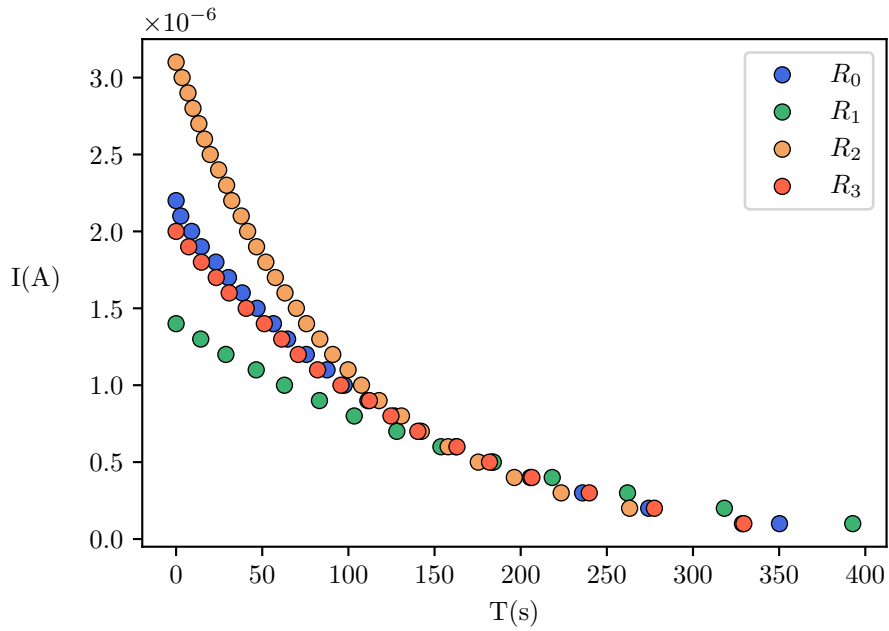


Figura 12: Intensidad (I) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

Como podemos ver, las curvas parecen indicar algún tipo de relación de decaimiento exponencial. Para observarlo con mayor claridad, sustituiremos I por su logaritmo ($\ln I$). Si obtenemos rectas, eso significará que en efecto es una relación exponencial. Además, nos permitirá hacer un ajuste lineal de los datos.

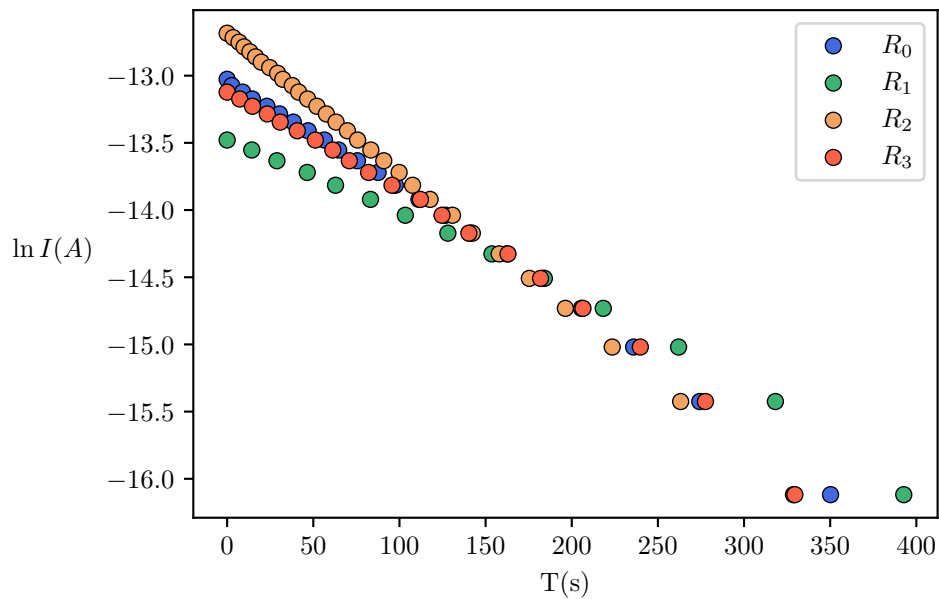


Figura 13: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

Las líneas se cruzan demasiado al representarlas todas juntas, por lo que dividiremos la gráfica en cuatro.

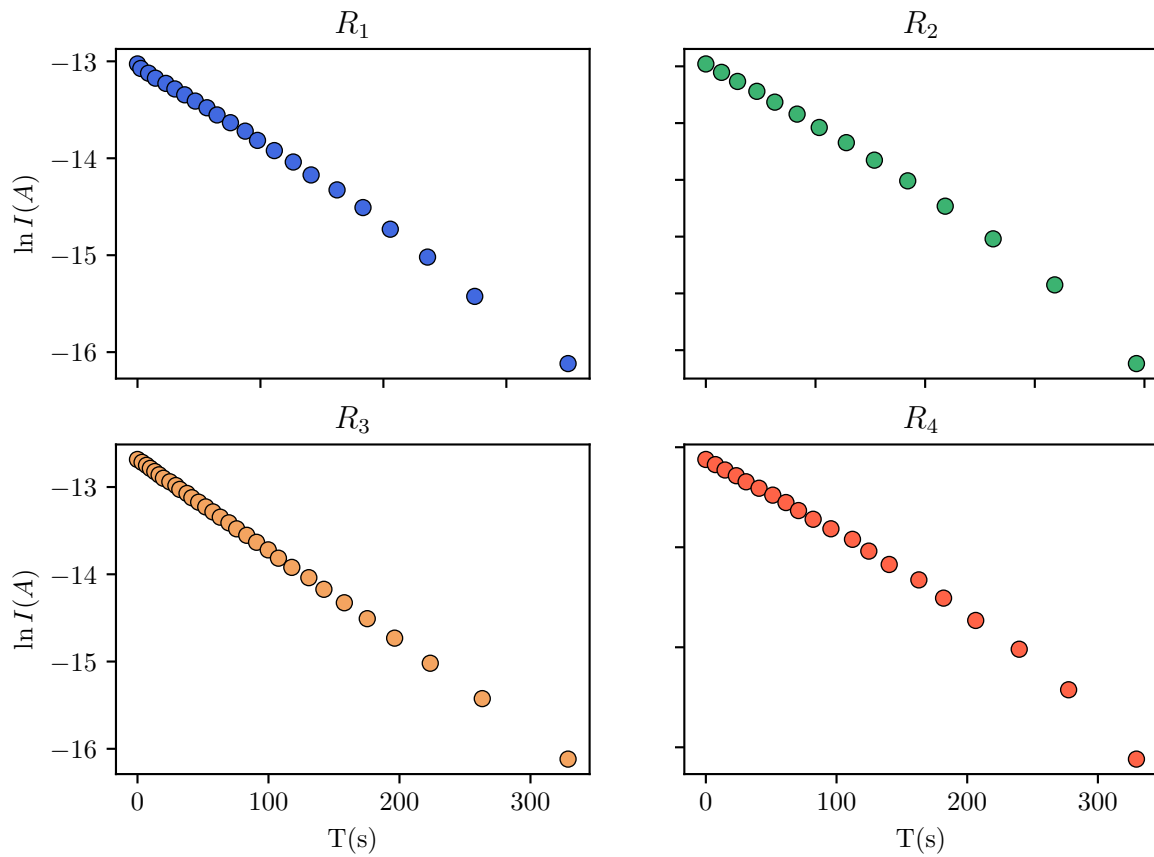


Figura 14: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

Ahora sí, podemos observar que en efecto se ajustan mucho a líneas rectas. El siguiente paso será hacer una regresión lineal para verificar cuál sería la línea teórica para ellas.

2.3 Ajuste por mínimos cuadrados

En esta ocasión, la incertidumbre de $\ln I$ ($s(\ln I) = s(y_i)$) varía con el tiempo, cómo indican las tablas. Por lo tanto, tendremos que realizar un ajuste por mínimos cuadrados ponderado, a diferencia del simple que hicimos en las Bobinas.

Además, será un ajuste con término independiente, porque en $T = 0$, $\ln I \neq 0$, de la forma $y_i = a + bx_i$. Las fórmulas correspondientes a este ajuste son:

$$a = \frac{(\sum_i w_i y_i)(\sum_i w_i x_i^2) - (\sum_i w_i x_i)(\sum_i w_i x_i y_i)}{\Delta} \quad (15)$$

$$b = \frac{(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i y_i) - (\sum_i w_i x_i)(\sum_i w_i y_i)}{\Delta} \quad (16)$$

$$s(a) = \sqrt{\frac{\sum_i w_i x_i^2}{\Delta}} \quad s(b) = \sqrt{\frac{\sum_i w_i}{\Delta}} \quad (17)$$

$$s = \sqrt{\frac{n}{(n-2) \sum_i w_i} \left[\sum_i w_i (y_i - a - bx_i)^2 \right]} \quad (18)$$

$$r = \frac{(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i y_i) - (\sum_i w_i x_i)(\sum_i w_i y_i)}{\sqrt{[(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i^2) - (\sum_i w_i x_i)^2][(\sum_i w_i)(\sum_i w_i y_i^2) - (\sum_i w_i y_i)^2]}} \quad (19)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_i w_i & \sum_i w_i x_i \\ \sum_i w_i x_i & \sum_i w_i x_i^2 \end{vmatrix} \quad w = \frac{1}{sy^2} \quad (20)$$

Lo implementamos en `python` con el siguiente código, de manera similar a la anterior regresión.

```
def reg_lin_w(x, y, sy):
    n = len(x); w = sy**(-2)

    sw = w.sum(); swxy = (w*x*y).sum()
    swx = (w*x).sum(); swy = (w*y).sum()
    swx2 = (w*x**2).sum(); swy2 = (w*y**2).sum()
    det = sw * swx2 - swx**2

    a = (swy*swx2 - swx*swxy) / det
    b = (sw*swxy - swx*swy) / det

    sa = (swx2 / det)**0.5
    sb = (sw / det)**0.5

    swab = (w*(y - a - b*x)**2).sum()
    s = ((n / ((n-2) * sw)) * swab)**0.5

    r = (sw*swxy - swx*swy) / ((sw*swx2 - swx**2) * (sw*swy2 - swy**2))
        **0.5

    return (a, b, s, sa, sb, r)
```

Además, añadimos un programa específico para nuestros datos, que iterará entre los distintos puntos y hará una regresión lineal para cada una de las resistencias. Con todo eso, obtenemos las siguientes gráficas con sus correspondientes parámetros de ajuste:

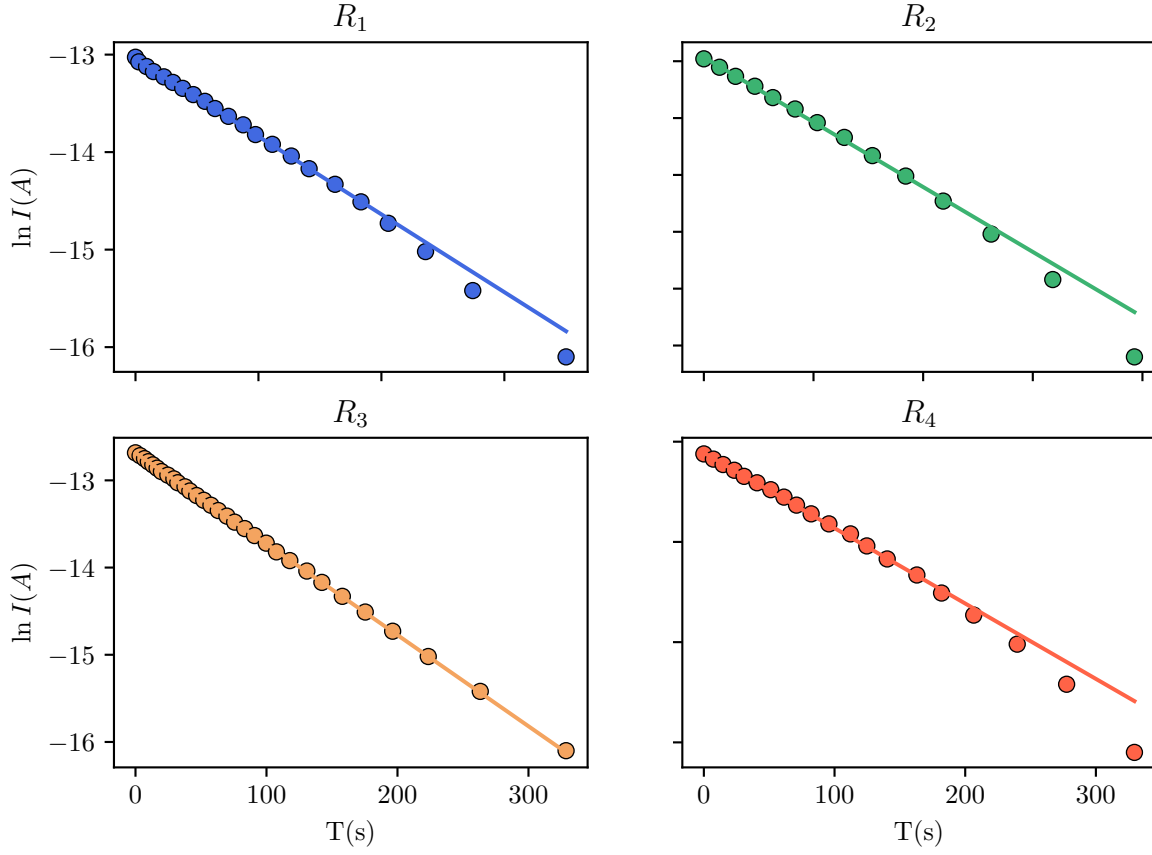


Figura 15: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R) con ajuste por mínimos cuadrados ponderado con término independiente

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -13,041 \pm 0,022 & b_1 &= -0,00798 \pm 0,00038s^{-1} & s_1 &= 0,015 & r_1 &= 0,9991 \\
 a_2 &= -13,465 \pm 0,043 & b_2 &= -0,00571 \pm 0,00054s^{-1} & s_2 &= 0,022 & r_2 &= 0,998 \\
 a_3 &= -12,684 \pm 0,013 & b_3 &= -0,01045 \pm 0,00031s^{-1} & s_3 &= 0,0044 & r_3 &= 0,99991 \\
 a_4 &= -13,111 \pm 0,026 & b_4 &= -0,00752 \pm 0,00042s^{-1} & s_4 &= 0,020 & r_4 &= 0,998
 \end{aligned}$$

2.4 Interpretación

Ahora que tenemos los términos de ajuste de las distintas rectas, a y b correspondientes a $y_i = a + bx_i$, podemos interpretar su significado. Tomaremos la siguiente expresión y la convertiremos para obtener $\ln I$ en función del tiempo.

$$I(T) = \frac{\Delta V}{R} e^{-T/RC} \quad \ln I(T) = \ln \frac{\Delta V}{R} - \frac{1}{RC} \cdot T \quad (21)$$

Podemos justaponer esta ecuación a $y_i = a + bx_i$ siendo $y_i = \ln I(T)$ y $x_i = T$ para obtener los parámetros a y b teóricos:

$$a = \ln \frac{\Delta V}{R} \quad b = -\frac{1}{RC} \quad (22)$$

Ahora calcularemos los distintos valores de a y b teóricos para comprobar nuestros resultados experimentales:

$$\begin{aligned} a_1 &= \ln \frac{10}{4,7 \cdot 10^6} = -13,060 & b_1 &= -\frac{1}{4,7 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = -0,00709s^{-1} \\ a_2 &= \ln \frac{10}{6,9 \cdot 10^6} = -13,444 & b_2 &= -\frac{1}{6,9 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = -0,00483s^{-1} \\ a_3 &= \ln \frac{10}{3,2 \cdot 10^6} = -12,676 & b_3 &= -\frac{1}{3,2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = -0,01042s^{-1} \\ a_4 &= \ln \frac{10}{5,0 \cdot 10^6} = -13,122 & b_4 &= -\frac{1}{5,0 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = -0,00667s^{-1} \end{aligned}$$

Debemos calcular la incertidumbre de a y b mediante propagación de incertidumbres. Tomamos $s(\Delta V) = 0,1V$, y tanto $s(C)$ como $s(R)$ serán un 5% de su valor nominal. Primero vemos las incertidumbres de R (múltiples valores) y C.

$$\begin{aligned} s(R_1) &= 0,05 \cdot 4,7 \cdot 10^6 = 2,35 \cdot 10^5 \Omega & s(R_2) &= 0,05 \cdot 6,9 \cdot 10^6 = 3,45 \cdot 10^5 \Omega \\ s(R_3) &= 0,05 \cdot 3,2 \cdot 10^6 = 1,6 \cdot 10^5 \Omega & s(R_4) &= 0,05 \cdot 5,0 \cdot 10^6 = 2,5 \cdot 10^5 \Omega \\ s(C) &= 0,05 \cdot 3 \cdot 10^{-5} = 1,5 \cdot 10^{-6} F \end{aligned}$$

Ahora tomaremos la incertidumbre de los términos independientes, a_i :

$$s(a) = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial \Delta V}\right)^2 \cdot s(\Delta V)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial R}\right)^2 \cdot s(R)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta V}\right)^2 \cdot s(\Delta V)^2 + \left(\frac{-1}{R}\right)^2 \cdot s(R)^2} \quad (23)$$

$$s(a_1) = \sqrt{\frac{1}{10^2} \cdot 0,1^2 + \left(\frac{-1}{4,7 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (2,35 \cdot 10^5)^2} = 0,051$$

$$s(a_2) = \sqrt{\frac{1}{10^2} \cdot 0,1^2 + \left(\frac{-1}{6,9 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (3,45 \cdot 10^5)^2} = 0,051$$

$$s(a_3) = \sqrt{\frac{1}{10^2} \cdot 0,1^2 + \left(\frac{-1}{3,2 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (1,6 \cdot 10^5)^2} = 0,051$$

$$s(a_4) = \sqrt{\frac{1}{10^2} \cdot 0,1^2 + \left(\frac{-1}{5,0 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (2,5 \cdot 10^5)^2} = 0,051$$

$$s(a_1) = s(a_2) = s(a_3) = s(a_4) = 0,051$$

Y por último la incertidumbre de las pendientes de las rectas, b_i :

$$s(b) = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial R}\right)^2 \cdot s(R)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial C}\right)^2 \cdot s(C)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{CR^2}\right)^2 \cdot s(R)^2 + \left(\frac{1}{C^2R}\right)^2 \cdot s(C)^2} \quad (24)$$

$$s(b_1) = \sqrt{\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-5} \cdot (4,7 \cdot 10^6)^2}\right)^2 \cdot (2,35 \cdot 10^5)^2 + \left(\frac{1}{(3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 4,7 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$s(b_2) = \sqrt{\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-5} \cdot (6,9 \cdot 10^6)^2}\right)^2 \cdot (3,45 \cdot 10^5)^2 + \left(\frac{1}{(3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,9 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$s(b_3) = \sqrt{\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-5} \cdot (3,2 \cdot 10^6)^2}\right)^2 \cdot (1,6 \cdot 10^5)^2 + \left(\frac{1}{(3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 3,2 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$s(b_4) = \sqrt{\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-5} \cdot (5,0 \cdot 10^6)^2}\right)^2 \cdot (2,5 \cdot 10^5)^2 + \left(\frac{1}{(3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 5,0 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$s(b_1) = 0,00050s^{-1} \quad s(b_2) = 0,00034s^{-1} \quad s(b_3) = 0,00074s^{-1} \quad s(b_4) = 0,00047s^{-1}$$

Tan solo nos queda comparar los valores de a y b teóricos y experimentales. Podemos ver que son todos razonablemente cercanos y que cumplen las tendencias. Cualquier desviación pequeña puede deberse al procedimiento de medida y a los errores en el laboratorio. Consideramos comprobada la ley en esta situación.

Antes de dejar el experimento, analizaremos el valor $I(0)$. Si nos referimos a la ecuación 21 y sustituimos t por 0 nos queda $I(0) = \frac{\Delta V}{R} e^{0/RC}$, simplificando $I(0) = \frac{\Delta V}{R}$. Podemos comprobar que el logaritmo de $I(0)$ nos da el término independiente del ajuste, o lo que es lo mismo, la ordenada en el origen, lo cual tiene completo sentido ($\ln I(0) = a$) y coincide con nuestros datos.

3 Medidas con R y V constantes, variando C

En esta segunda experiencia repetiremos el mismo procedimiento, pero esta vez dejando $V = 10V$ y $R = 5,7 \cdot 10^6 \Omega$ constantes y cambiando los valores del condensador. Realizaremos pruebas con cuatro condensadores diferentes.

3.1 Tablas de datos

Igual que en el apartado anterior, la incertidumbre del tiempo y de la intensidad son constantes a lo largo de los experimentos, siendo respectivamente $s(T) = 0,3s$ y $s(I) = 10^{-7}A$ mientras que la del logaritmo de I varía y es calculada con 14. Presentamos las tablas obtenidas a continuación.

$C_1 = 4,7 \cdot 10^{-6}F$			$C_2 = 1,0 \cdot 10^{-5}F$		
$T_1(s)$	$I_1(A)$	$\ln I_1 \pm s(I_1)(A)$	$T_2(s)$	$I_2(A)$	$\ln I_2 \pm s(I_2)(A)$
0,0	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$	0,0	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
0,8	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$	1,5	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
2,7	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$	5,1	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
4,2	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$	8,6	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
6,3	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$	12,7	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
7,7	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$	16,8	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
9,6	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$	20,9	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
12,3	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$	25,4	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
14,8	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$	30,1	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
17,5	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$	36,5	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
20,7	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$	43,9	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
24,3	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$	51,8	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
28,4	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$	60,7	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
32,3	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$	69,9	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
38,9	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$	83,2	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
46,5	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$	98,9	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
56,4	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$	120,2	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
74,3	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$	160,1	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

$$\mathbf{C}_3 = 3,0 \cdot 10^{-5} \mathbf{F}$$

$T_3(s)$	$I_3(A)$	$\ln I_3 \pm s(I_3)(A)$
0,0	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
5,6	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
16,2	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
27,3	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
39,4	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
52,3	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
66,6	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
80,3	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
98,4	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
117,2	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
135,6	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
158,1	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
183,2	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
216,4	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
260,3	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
304,2	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
372,3	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
491,5	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

$$\mathbf{C}_4 = 6,0 \cdot 10^{-5} \mathbf{F}$$

$T_4(s)$	$I_4(A)$	$\ln I_4 \pm s(I_4)(A)$
0,0	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
8,7	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
28,5	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
50,3	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
74,7	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
98,6	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
120,5	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
150,1	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
182,0	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
210,3	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
270,4	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
310,7	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
365,4	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
427,8	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
503,2	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
599,8	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
738,5	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
960,5	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

3.2 Representación gráfica

Representamos directamente los datos de I_i frente a T_i utilizando el mismo programa.

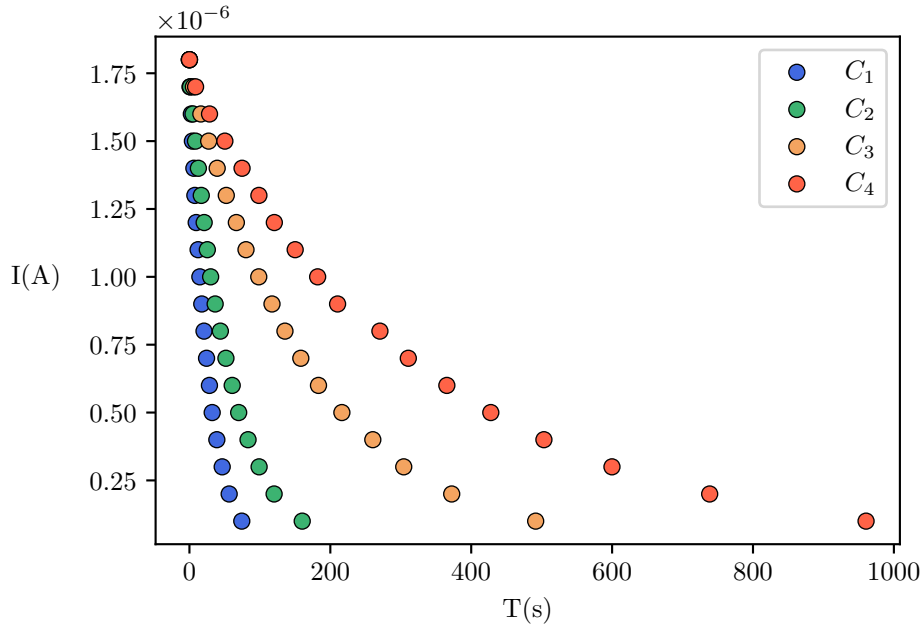


Figura 16: Intensidad (I) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

Vuelve a aparecer el decaimiento exponencial, por lo que cambiaremos de nuevo I por su logaritmo y representaremos las gráficas otra vez. Como en esta ocasión la gráfica queda mucho más clara y se distinguen perfectamente las líneas, no la separaremos como antes.

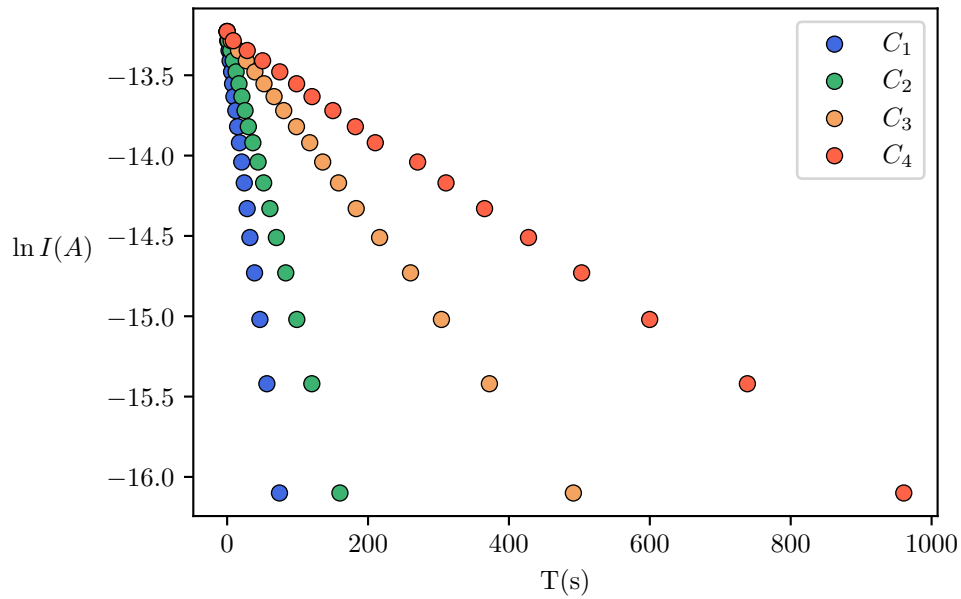


Figura 17: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

3.3 Ajuste por mínimos cuadrados

Ejecutaremos el programa de regresión lineal ponderada con término independiente que construimos en el apartado anterior y dibujaremos de nuevo la gráfica con sus parámetros de ajuste.

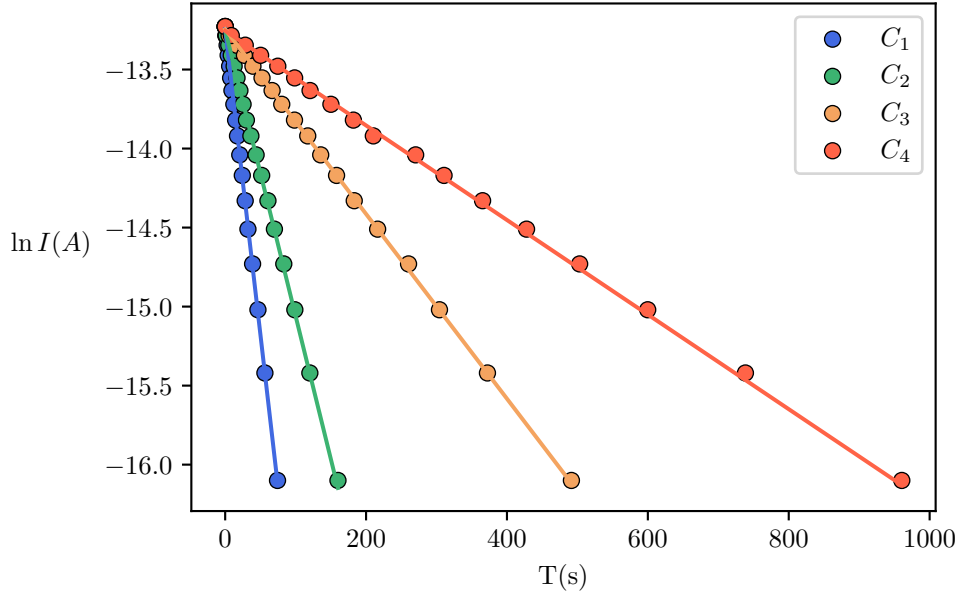


Figura 18: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R) con ajuste por mínimos cuadrados ponderado con término independiente

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -13,244 \pm 0,029 & b_1 &= -0,0386 \pm 0,0025s^{-1} & s_1 &= 0,011 & r_1 &= 0,9995 \\
 a_2 &= -13,250 \pm 0,029 & b_2 &= -0,0181 \pm 0,0012s^{-1} & s_2 &= 0,013 & r_2 &= 0,993 \\
 a_3 &= -13,245 \pm 0,029 & b_3 &= -0,00584 \pm 0,00038s^{-1} & s_3 &= 0,0095 & r_3 &= 0,9996 \\
 a_4 &= -13,255 \pm 0,029 & b_4 &= -0,00299 \pm 0,00020s^{-1} & s_4 &= 0,018 & r_4 &= 0,998
 \end{aligned}$$

3.4 a y b teóricos

Cómo en el apartado anterior, utilizaremos las ecuaciones 22, 23 y 24 para calcular a y b teóricos junto a sus incertidumbres, y vemos que son muy similares. Por comodidad, simplemente indicaremos el resultado final tras aplicar esas fórmulas.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -13,253 \pm 0,051 & b_1 &= -0,0373 \pm 0,0026s^{-1} \\
 a_2 &= -13,253 \pm 0,051 & b_2 &= -0,0175 \pm 0,0012s^{-1} \\
 a_3 &= -13,253 \pm 0,051 & b_3 &= -0,00585 \pm 0,00041s^{-1} \\
 a_4 &= -13,253 \pm 0,051 & b_4 &= -0,00292 \pm 0,00021s^{-1}
 \end{aligned}$$

4 Medidas con C y R constantes, variando V

En la última experiencia repetiremos el mismo procedimiento que en las dos anteriores, aunque ahora fijaremos $C = 10^{-5}F$ y $R = 4,4 \cdot 10^6\Omega$, y variaremos la diferencia de potencial en cuatro experimentos distintos.

4.1 Tablas de datos

La incertidumbre del tiempo y de la intensidad son constantes para todas las tablas, siendo respectivamente $s(T) = 0,3s$ y $s(I) = 10^{-7}A$. Sin embargo, $s(\ln I)$ cambia con cada medida y tenemos que calcularla usando [14](#). A continuación se exponen las tablas obtenidas.

V₁ = 8,5V

$T_1(s)$	$I_1(A)$	$\ln I_1 \pm s(I_1)(A)$
0,0	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$
3,4	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$
5,6	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
8,1	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
10,2	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
13,3	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
16,0	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
18,7	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
22,0	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
26,0	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
30,0	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
34,0	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
39,4	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
44,8	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
51,0	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
58,3	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
67,1	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
77,6	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
93,8	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
113,5	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

V₂ = 11,5V

$T_2(s)$	$I_2(A)$	$\ln I_2 \pm s(I_2)(A)$
0,0	0,0000026	$-12,860 \pm 0,038$
3,3	0,0000025	$-12,899 \pm 0,040$
4,8	0,0000024	$-12,940 \pm 0,042$
6,6	0,0000023	$-12,983 \pm 0,043$
8,6	0,0000022	$-13,027 \pm 0,045$
10,9	0,0000021	$-13,074 \pm 0,048$
13,0	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$
14,7	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$
17,4	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
19,4	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
22,0	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
24,8	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
28,2	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
31,4	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
34,2	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
38,2	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
41,4	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
46,2	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
51,2	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
56,8	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
62,7	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
70,2	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
79,2	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
91,0	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
105,1	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
127,2	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

V₃ = 10,2V

$T_3(s)$	$I_3(A)$	$\ln I_3 \pm s(I_3)(A)$
0,0	0,0000023	$-12,983 \pm 0,043$
2,1	0,0000022	$-13,027 \pm 0,045$
5,1	0,0000021	$-13,074 \pm 0,048$
6,2	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$
10,1	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$
12,5	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
13,8	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
17,1	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
20,2	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
23,3	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
25,1	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
27,9	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
32,1	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
36,8	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
40,3	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
45,2	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
51,7	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
58,7	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
66,4	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
75,2	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
86,4	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
108,9	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
137,6	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

V₄ = 6,0V

$T_4(s)$	$I_4(A)$	$\ln I_4 \pm s(I_4)(A)$
0,0	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
1,9	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
5,3	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
9,6	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
13,4	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
17,8	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
23,5	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
28,7	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
34,3	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
42,2	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
50,6	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
64,7	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
82,3	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
110,1	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

4.2 Representación gráfica

Representamos directamente los datos de I_i frente a T_i utilizando el mismo programa.

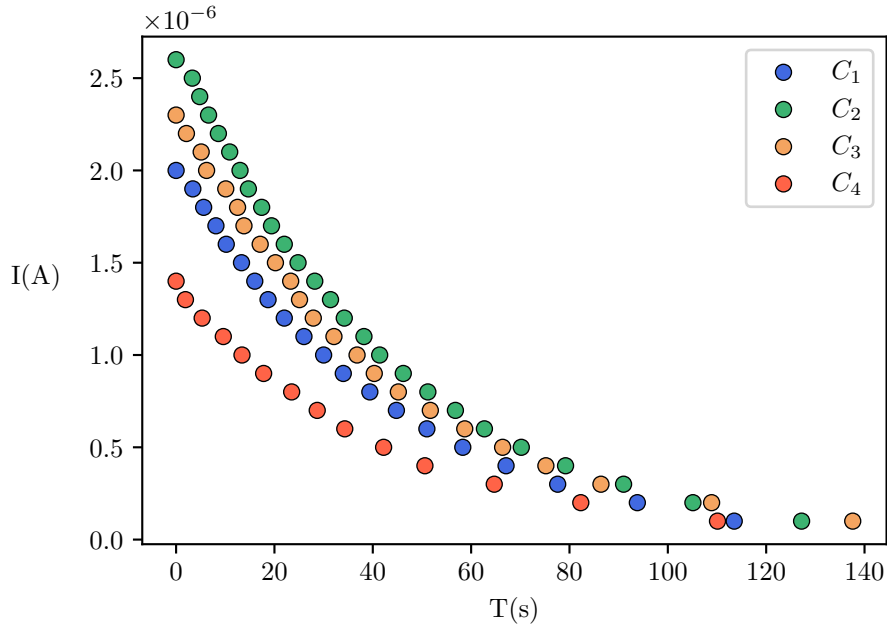


Figura 19: Intensidad (I) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

Se observa decaimiento exponencial, así que representaremos $\ln I$ en lugar de I .

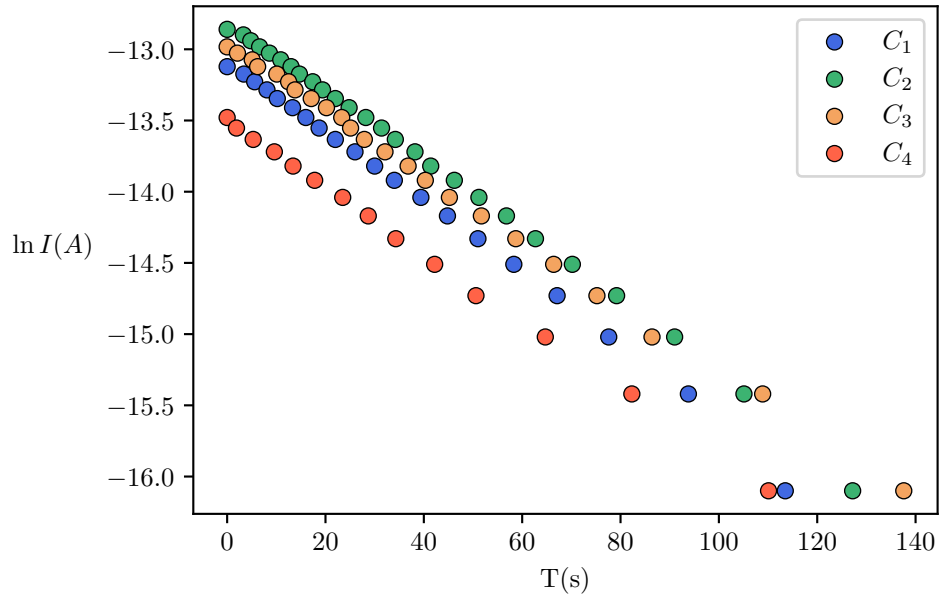


Figura 20: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

En esta ocasión las líneas están bastante cerca unas de otras, pero tienen una cualidad importante que se ve mejor si se representan juntas. A primera vista parece que son paralelas, y

separando las gráficas perderíamos ese detalle. Tendremos que realizar un ajuste para comprobar si esta suposición es correcta.

4.3 Ajuste por mínimos cuadrados

Ejecutaremos el programa de regresión lineal ponderada con término independiente que construimos en el apartado anterior y dibujaremos de nuevo la gráfica con sus parámetros de ajuste

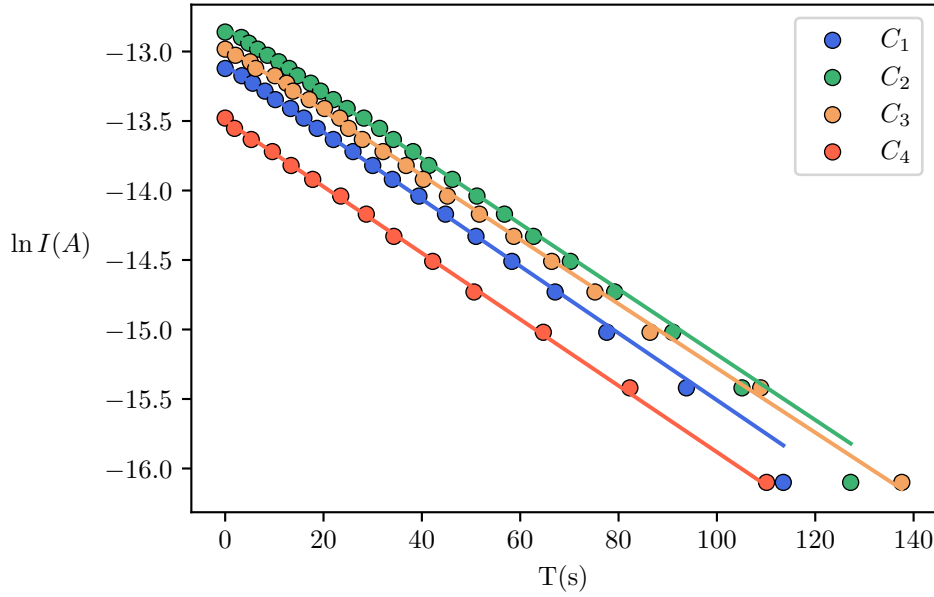


Figura 21: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R) con ajuste por mínimos cuadrados ponderado con término independiente

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -13,099 \pm 0,026 & b_1 &= -0,0241 \pm 0,0014s^{-1} & s_1 &= 0,013 & r_1 &= 0,9993 \\
 a_2 &= -12,829 \pm 0,018 & b_2 &= -0,02352 \pm 0,00090s^{-1} & s_2 &= 0,015 & r_2 &= 0,9991 \\
 a_3 &= -12,965 \pm 0,021 & b_3 &= -0,0231 \pm 0,0011s^{-1} & s_3 &= 0,019 & r_3 &= 0,998 \\
 a_4 &= -13,495 \pm 0,041 & b_4 &= -0,0231 \pm 0,0023s^{-1} & s_4 &= 0,013 & r_4 &= 0,9993
 \end{aligned}$$

4.4 a y b teóricos

Finalmente, volveremos a utilizar las ecuaciones 22, 23 y 24 para calcular a y b teóricos junto a sus incertidumbres. Como podemos observar los resultados son prácticamente idénticos.

$$a_1 = -13,157 \pm -0,051 \quad b_1 = -0,0227 \pm -0,0016s^{-1}$$

$$a_2 = -12,855 \pm -0,051 \quad b_2 = -0,0227 \pm -0,0016s^{-1}$$

$$a_3 = -12,975 \pm -0,051 \quad b_3 = -0,0227 \pm -0,0016s^{-1}$$

$$a_4 = -13,505 \pm -0,053 \quad b_4 = -0,0227 \pm -0,0016s^{-1}$$

5 Conclusiones: PENDIENTE