

Electricidad: Bobinas de Helmholtz y Curva de Carga

Pazos Pérez, José
CAMBIAR DNI

Índice

I	Bobinas de Helmholtz	3
1	Objetivos	3
1.1	Expresión para el campo magnético	3
1.2	Diagrama	4
2	Variación del campo en el eje central	5
2.1	Tablas de datos	5
2.1.1	Tabla 1: Separación $a=R$	5
2.1.2	Tabla 2: Separación $a=R/2$	6
2.1.3	Tabla 3: Separación $a=2R$	6
2.2	Campo teórico	7
2.3	Representación gráfica	9
3	Permeabilidad magnética del vacío	11
3.1	Tablas de datos	12
3.2	Representación gráfica	12
3.3	Ajuste por mínimos cuadrados	13
3.4	Cálculo de la permeabilidad magnética	16
4	Conclusiones	17
4.1	Primera parte	17
4.2	Segunda parte	17
II	Curva de Carga	19
1	Objetivos	19
1.1	Expresión de la intensidad	20
1.2	Diagrama	20
1.3	Incertidumbres	20
2	Medidas con V y C constantes, variando R	22
2.1	Tablas de datos	22
2.2	Representación gráfica	24
2.3	Ajuste por mínimos cuadrados	26
2.4	Interpretación	28
3	Medidas con R y V constantes, variando C	30

3.1	Tablas de datos	30
3.2	Representación gráfica	32
3.3	Ajuste por mínimos cuadrados	33
3.4	a y b teóricos	33
4	Medidas con C y R constantes, variando V	34
4.1	Tablas de datos	34
4.2	Representación gráfica	36
4.3	Ajuste por mínimos cuadrados	37
4.4	a y b teóricos	38
5	Conclusiones	39
	Apéndice	40
	Código y datos	40
	Bibliografía	40

Experiencia I

Bobinas de Helmholtz

1 Objetivos

En esta práctica exploraremos las **Bobinas de Helmholtz**, una distribución de dos bobinas enfrentadas por las que circula corriente eléctrica en el mismo sentido. Estas generarán un campo magnético que contará con la peculiaridad de ser prácticamente uniforme entre ambos aparatos. Tendremos dos metas principales:

- Comparar el campo magnético entre las dos espiras predicho por la teoría con el que mediremos de manera experimental, mientras variamos la distancia entre las bobinas.
- Obtener el valor de la permeabilidad magnética del vacío mediante un ajuste por mínimos cuadrados realizado sobre datos tomados manteniendo la distancia entre las bobinas fija.

1.1 Expresión para el campo magnético

La siguiente expresión describe el campo magnético que ambas bobinas producirán en un punto en el eje entre las dos.

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2R} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z - \frac{a}{2}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z + \frac{a}{2}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] \quad (1)$$

En la que:

- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ - Permeabilidad magnética del vacío
- $R = 0.20m$ - Radio de las bobinas
- a - Distancia entre las bobinas
- I - Intensidad que recorre las bobinas
- $N = 154$ - Número de espiras
- z - Distancia entre el punto medio entre las bobinas y otro punto de el eje que une sus centros

1.2 Diagrama

Para verificar esta ley y comprender mejor el funcionamiento de este dispositivo, utilizaremos dos bobinas con 154 espiras enrolladas, y las enfrentaremos. Les suministraremos corriente eléctrica y mediremos el campo magnético con un teslámetro. No entraremos en detalles sobre el montaje pormenorizado ya que por culpa la situación excepcional no fue posible asistir al laboratorio. Sin embargo, en la próxima imagen se puede observar cómo las bobinas enfrentadas producen el campo que mediremos.

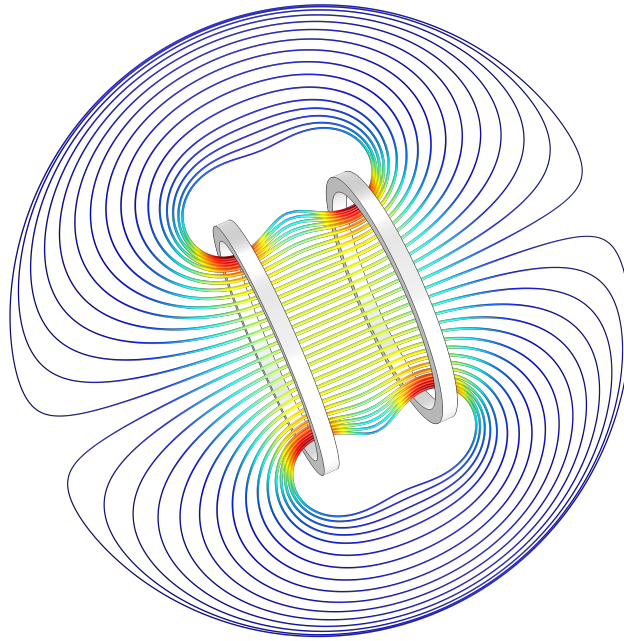


Figura 1: Diagrama del campo generado por dos Bobinas de Helmholtz

En cada una de las dos partes de la práctica explicaremos más en detalle la clase de mediciones que tomaremos y las leyes que queremos demostrar.

2 Variación del campo en el eje central

En esta primera experiencia colocaremos las bobinas de la manera descrita a tres distancias: Igual al radio, la mitad del radio y el doble del radio. Luego moveremos el teslamómetro desde el punto central hacia los lados, siempre siguiendo el eje central. De esta manera, obtendremos 50 medidas en las que lo único que variamos es la distancia, dejando la intensidad constante.

2.1 Tablas de datos

Procedemos a exponer las tablas que obtuvimos. En ellas se representa la distancia al centro (z) en metros (m) y el campo que medimos (B_{exp}) en teslas (T). La incertidumbre de ambas medidas es constante, por lo que la explicitaremos aquí y no en las tablas:

$$s(B_{exp}) = 0.01mT = 10^{-5}T$$

$$z = d - d_0 \quad s(z) = \sqrt{s(d)^2 + s(d_0)^2} = \sqrt{2} \cdot s(d) = \sqrt{2} \cdot 0,001m = 0,0014m$$

La intensidad también será constante y su valor e incertidumbre se fijarán en $I = 2,55 \pm 0,01A$.

2.1.1 Tabla 1: Separación a=R

Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$	Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$
1	0,145	0,00146	26	-0,100	0,00160
2	0,135	0,00150	27	-0,110	0,00155
3	0,125	0,00155	28	-0,120	0,00151
4	0,115	0,00158	29	-0,130	0,00145
5	0,105	0,00162	30	-0,140	0,00140
6	0,095	0,00166	31	-0,150	0,00134
7	0,085	0,00168	32	-0,160	0,00128
8	0,075	0,00170	33	-0,170	0,00121
9	0,065	0,00171	34	-0,180	0,00114
10	0,055	0,00170	35	-0,190	0,00107
11	0,045	0,00171	36	-0,200	0,00101
12	0,035	0,00171	37	-0,210	0,00095
13	0,025	0,00170	38	-0,220	0,00089
14	0,015	0,00171	39	-0,230	0,00082
15	0,005	0,00170	40	-0,240	0,00077
16	0,000	0,00170	41	-0,250	0,00067
17	-0,010	0,00169	42	-0,260	0,00062
18	-0,020	0,00169	43	-0,270	0,00057
19	-0,030	0,00169	44	-0,280	0,00052
20	-0,040	0,00168	45	-0,290	0,00048
21	-0,050	0,00168	46	-0,300	0,00045
22	-0,060	0,00167	47	-0,310	0,00042
23	-0,070	0,00166	48	-0,320	0,00039
24	-0,080	0,00164	49	-0,330	0,00037
25	-0,090	0,00162	50	-0,340	0,00034

Figura 2: Variación de B con a=R

Para determinar la desviación cuadrática de los datos de la tabla anterior usaremos la siguiente fórmula:

$$s = \frac{1}{N} \sqrt{\sum (B_{exp} - B_{teo})^2} \quad (2)$$

Para nuestras medidas, obtenemos $s_1 = 1,1 \cdot 10^{-5}T$.

2.1.2 Tabla 2: Separación a=R/2

Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$
1	0,175	0,00110
2	0,165	0,00118
3	0,155	0,00125
4	0,145	0,00134
5	0,135	0,00143
6	0,125	0,00151
7	0,115	0,00160
8	0,105	0,00168
9	0,095	0,00177
10	0,085	0,00185
11	0,075	0,00192
12	0,065	0,00200
13	0,055	0,00205
14	0,045	0,00208
15	0,035	0,00213
16	0,025	0,00216
17	0,015	0,00217
18	0,005	0,00217
19	0,000	0,00217
20	-0,010	0,00216
21	-0,020	0,00213
22	-0,030	0,00210
23	-0,040	0,00205
24	-0,050	0,00200
25	-0,060	0,00194

Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$
26	-0,070	0,00186
27	-0,080	0,00178
28	-0,090	0,00169
29	-0,100	0,00162
30	-0,110	0,00154
31	-0,120	0,00145
32	-0,130	0,00136
33	-0,140	0,00127
34	-0,150	0,00120
35	-0,160	0,00111
36	-0,170	0,00104
37	-0,180	0,00096
38	-0,190	0,00090
39	-0,200	0,00083
40	-0,210	0,00076
41	-0,220	0,00071
42	-0,230	0,00066
43	-0,240	0,00061
44	-0,250	0,00056
45	-0,260	0,00052
46	-0,270	0,00049
47	-0,280	0,00045
48	-0,290	0,00042
49	-0,300	0,00040
50	-0,310	0,00038

2.1.3 Tabla 3: Separación a=2R

Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$
1	0,035	0,00085
2	0,025	0,00085
3	0,015	0,00084
4	0,005	0,00083
5	0,000	0,00083
6	-0,010	0,00083
7	-0,020	0,00083
8	-0,030	0,00084
9	-0,040	0,00085
10	-0,050	0,00087
11	-0,060	0,00089
12	-0,070	0,00091
13	-0,080	0,00093
14	-0,090	0,00096
15	-0,100	0,00100
16	-0,110	0,00104
17	-0,120	0,00108
18	-0,130	0,00112
19	-0,140	0,00115
20	-0,150	0,00119
21	-0,160	0,00121
22	-0,170	0,00126
23	-0,180	0,00127
24	-0,190	0,00128
25	-0,200	0,00128

Medida	$z(m)$	$B_{exp}(T)$
26	-0,210	0,00125
27	-0,220	0,00123
28	-0,230	0,00119
29	-0,240	0,00116
30	-0,250	0,00111
31	-0,260	0,00107
32	-0,270	0,00102
33	-0,280	0,00097
34	-0,290	0,00091
35	-0,300	0,00086
36	-0,310	0,00080
37	-0,320	0,00075
38	-0,330	0,00070
39	-0,340	0,00065
40	-0,350	0,00059
41	-0,360	0,00056
42	-0,370	0,00052
43	-0,380	0,00048
44	-0,390	0,00045
45	-0,400	0,00042
46	-0,410	0,00038
47	-0,420	0,00036
48	-0,430	0,00033
49	-0,440	0,00030
50	-0,450	0,00028

Figura 3: Variación de B con a=R/2

Figura 4: Variación de B con a=2R

Calculamos la desviación cuadrática (2) con estos datos y obtenemos $s_2 = 3,3 \cdot 10^{-5}T$.

Calculamos la desviación cuadrática (2) con estos datos y obtenemos $s_3 = 7,5 \cdot 10^{-5}T$.

2.2 Campo teórico

Ahora debemos calcular el campo magnético teórico para poder compararlo con los datos que obtuvimos y poder crear la gráfica que contenga a ambos.

Utilizaremos la ecuación 1 y sustituiremos los valores de $a=R$, $a=R/2$ y $a=2R$.

$$B1_{teo} = \frac{\mu_0 I N}{2R} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z-\frac{R}{2}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z+\frac{R}{2}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right]$$
$$B2_{teo} = \frac{\mu_0 I N}{2R} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z-\frac{R}{4}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z+\frac{R}{4}}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right]$$
$$B3_{teo} = \frac{\mu_0 I N}{2R} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z-R}{R}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z+R}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right]$$

Haciendo uso de estas ecuaciones sustituiremos el valor del radio $R=0.20\text{m}$, la permeabilidad magnética $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$, el número de espiras $N=154$ y la intensidad $I=2,55\text{A}$. Esto nos dará una fórmula general para calcular los valores de B sustituyendo las distancias z correspondientes. Presentamos los resultados correspondientes en las siguientes tablas:

(En la siguiente página por comodidad de representación.)

Medida	$z1(m)$	$B1_{exp}(T)$	$B1_{teo}(T)$	$z2(m)$	$B2_{exp}(T)$	$B2_{teo}(T)$	$z3(m)$	$B3_{exp}(T)$	$B3_{teo}(T)$
1	0,145	0,00146	0,00146	0,175	0,00110	0,00111	0,035	0,00085	0,00090
2	0,135	0,00150	0,00152	0,165	0,00118	0,00119	0,025	0,00085	0,00089
3	0,125	0,00155	0,00157	0,155	0,00125	0,00128	0,015	0,00084	0,00088
4	0,115	0,00158	0,00161	0,145	0,00134	0,00136	0,005	0,00083	0,00087
5	0,105	0,00162	0,00165	0,135	0,00143	0,00145	0,000	0,00083	0,00087
6	0,095	0,00166	0,00169	0,125	0,00151	0,00154	-0,010	0,00083	0,00088
7	0,085	0,00168	0,00171	0,115	0,00160	0,00163	-0,020	0,00083	0,00088
8	0,075	0,00170	0,00173	0,105	0,00168	0,00172	-0,030	0,00084	0,00089
9	0,065	0,00171	0,00175	0,095	0,00177	0,00180	-0,040	0,00085	0,00091
10	0,055	0,00170	0,00176	0,085	0,00185	0,00188	-0,050	0,00087	0,00093
11	0,045	0,00171	0,00176	0,075	0,00192	0,00196	-0,060	0,00089	0,00096
12	0,035	0,00171	0,00176	0,065	0,00200	0,00203	-0,070	0,00091	0,00099
13	0,025	0,00170	0,00177	0,055	0,00205	0,00209	-0,080	0,00093	0,00102
14	0,015	0,00171	0,00177	0,045	0,00208	0,00214	-0,090	0,00096	0,00106
15	0,005	0,00170	0,00177	0,035	0,00213	0,00219	-0,100	0,00100	0,00109
16	0,000	0,00170	0,00177	0,025	0,00216	0,00222	-0,110	0,00104	0,00113
17	-0,010	0,00169	0,00177	0,015	0,00217	0,00224	-0,120	0,00108	0,00117
18	-0,020	0,00169	0,00177	0,005	0,00217	0,00225	-0,130	0,00112	0,00121
19	-0,030	0,00169	0,00177	0,000	0,00217	0,00225	-0,140	0,00115	0,00125
20	-0,040	0,00168	0,00176	-0,010	0,00216	0,00225	-0,150	0,00119	0,00128
21	-0,050	0,00168	0,00176	-0,020	0,00213	0,00223	-0,160	0,00121	0,00131
22	-0,060	0,00167	0,00175	-0,030	0,00210	0,00220	-0,170	0,00126	0,00133
23	-0,070	0,00166	0,00174	-0,040	0,00205	0,00217	-0,180	0,00127	0,00134
24	-0,080	0,00164	0,00172	-0,050	0,00200	0,00212	-0,190	0,00128	0,00135
25	-0,090	0,00162	0,00170	-0,060	0,00194	0,00206	-0,200	0,00128	0,00134
26	-0,100	0,00160	0,00167	-0,070	0,00186	0,00199	-0,210	0,00125	0,00133
27	-0,110	0,00155	0,00163	-0,080	0,00178	0,00192	-0,220	0,00123	0,00131
28	-0,120	0,00151	0,00159	-0,090	0,00169	0,00184	-0,230	0,00119	0,00129
29	-0,130	0,00145	0,00154	-0,100	0,00162	0,00176	-0,240	0,00116	0,00125
30	-0,140	0,00140	0,00149	-0,110	0,00154	0,00167	-0,250	0,00111	0,00121
31	-0,150	0,00134	0,00143	-0,120	0,00145	0,00158	-0,260	0,00107	0,00116
32	-0,160	0,00128	0,00136	-0,130	0,00136	0,00149	-0,270	0,00102	0,00111
33	-0,170	0,00121	0,00130	-0,140	0,00127	0,00141	-0,280	0,00097	0,00106
34	-0,180	0,00114	0,00123	-0,150	0,00120	0,00132	-0,290	0,00091	0,00100
35	-0,190	0,00107	0,00116	-0,160	0,00111	0,00124	-0,300	0,00086	0,00095
36	-0,200	0,00101	0,00109	-0,170	0,00104	0,00115	-0,310	0,00080	0,00089
37	-0,210	0,00095	0,00103	-0,180	0,00096	0,00108	-0,320	0,00075	0,00084
38	-0,220	0,00089	0,00096	-0,190	0,00090	0,00100	-0,330	0,00070	0,00078
39	-0,230	0,00082	0,00090	-0,200	0,00083	0,00093	-0,340	0,00065	0,00073
40	-0,240	0,00077	0,00084	-0,210	0,00076	0,00087	-0,350	0,00059	0,00068
41	-0,250	0,00067	0,00078	-0,220	0,00071	0,00081	-0,360	0,00056	0,00063
42	-0,260	0,00062	0,00073	-0,230	0,00066	0,00075	-0,370	0,00052	0,00059
43	-0,270	0,00057	0,00068	-0,240	0,00061	0,00070	-0,380	0,00048	0,00055
44	-0,280	0,00052	0,00063	-0,250	0,00056	0,00065	-0,390	0,00045	0,00051
45	-0,290	0,00048	0,00059	-0,260	0,00052	0,00060	-0,400	0,00042	0,00048
46	-0,300	0,00045	0,00055	-0,270	0,00049	0,00056	-0,410	0,00038	0,00044
47	-0,310	0,00042	0,00051	-0,280	0,00045	0,00052	-0,420	0,00036	0,00041
48	-0,320	0,00039	0,00047	-0,290	0,00042	0,00048	-0,430	0,00033	0,00038
49	-0,330	0,00037	0,00044	-0,300	0,00040	0,00045	-0,440	0,00030	0,00036
50	-0,340	0,00034	0,00041	-0,310	0,00038	0,00042	-0,450	0,00028	0,00033

Figura 5: Campo magnético experimental frente a teórico para $a=R$, $a=R/2$ y $a=2R$

2.3 Representación gráfica

Finalmente, teniendo los datos del campo magnético experimental y sabiendo calcular los del campo magnético teórico, representaremos ambos para poder compararlos. Cabe destacar que no utilizaremos los datos B_{teo} de la tabla anterior, si no que computaremos la fórmula directamente en python para obtener una curva más suave.

Primero procesaremos los datos en **python**, y para ello haremos uso de la librería **pandas**, que nos permite importar directamente archivos **.csv**, el mismo formato que usamos para representar las tablas de **L^AT_EX**.

```
import pandas as pd

#Constantes
pm = 4 * np.pi * 10**(-7); i = 2.55; n = 154; r = 0.2

#Leer datos
d1 = pd.read_csv("BH-1.csv", sep=';', decimal=',')
z1 = d1["z"]; Be1 = d1["Bexp"] #Similarmente para las otras tablas
```

El siguiente paso es calcular las curvas teóricas, para las que utilizaremos una función por comodidad. Para ellas definiremos $z \in [-0,450, 0,450]$ con medidas cada 0,02m, ya que nos dará una representación simétrica y que contenga todas las medidas experimentales.

```
#Calculo campo magnetico
B = lambda pm, i, n, r, a, z: ((pm * i * n) / (2 * r)) *
    ((1 / (1 + ((z - (a/2)) / (r))**2)**(3/2)) +
    (1 / (1 + ((z + (a/2)) / (r))**2)**(3/2)))

#Curvas teoricas
z = np.linspace(-0.450, 0.450, 450)
Bt1 = B(pm, i, n, r, r, z)
Bt2 = B(pm, i, n, r, r/2, z)
Bt3 = B(pm, i, n, r, 2*r, z)
```

Por fin estamos listos para representar las gráficas, lo que haremos con ayuda de **matplotlib**. Las exportaremos utilizando un formato **.pgf** que **L^AT_EX** puede leer de manera vectorial.

```
import matplotlib.pyplot as plt

#Graficas experimentales (puntos)
plt.scatter(z1, Be1); plt.scatter(z2, Be2); plt.scatter(z3, Be3)
#Graficas teoricas (curvas)
plt.plot(z, Bt1); plt.plot(z, Bt2); plt.plot(z, Bt2)
```

Además de nuestro programa original, utilizaremos un complemento común para todas las

memorias que define el estilo de las gráficas y configura `matplotlib` para exportar `.pgf` y utilizar nuestra paleta de colores.

Al ejecutar el código, obtenemos la siguiente gráfica:

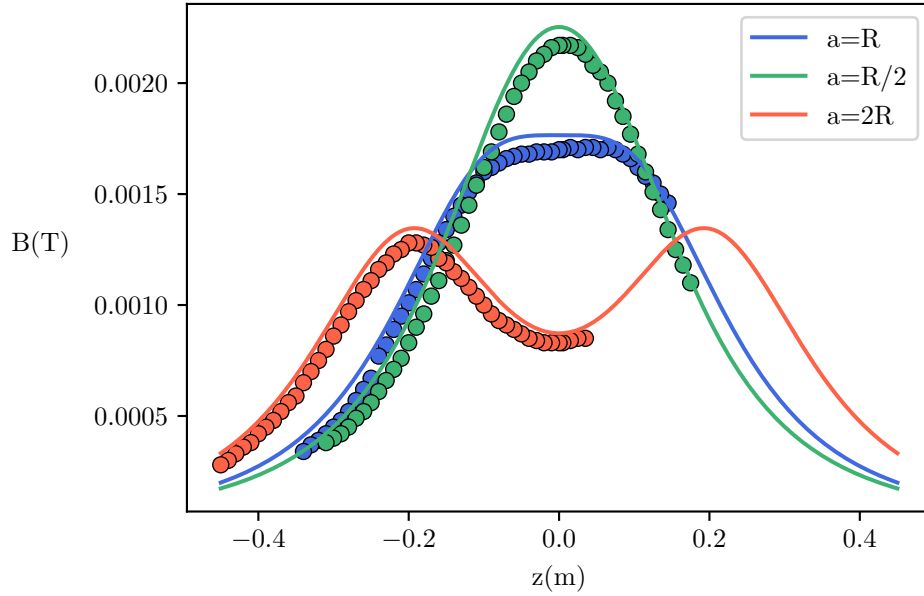


Figura 6: Campo magnético (B) frente a distancia del punto medio (z) para tres separaciones de bobinas ($a=R$, $a=R/2$, $a=2R$)

Podemos observar que los datos experimentales no están exactamente encima de la gráfica, pero siguen la misma forma. Esto se debe a que las medidas de laboratorio pueden tener algún error, pero igualmente comprueba que las leyes se verifican puesto que siguen la misma tendencia.

3 Permeabilidad magnética del vacío

En esta segunda parte de la práctica mantendremos el teslámetro en el centro de ambas bobinas y variaremos la intensidad. De esta manera podremos calcular la constante de permeabilidad magnética del vacío a partir de datos experimentales y compararla con su valor teórico ($\mu_0 = 4 \pi 10^{-7}$).

Si analizamos la ecuación de B (1), observamos que al dejar z constante, B se relaciona con I a través de una constante:

$$B = c \cdot I \quad c = \frac{\mu_0 N}{2R} \cdot \left[\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{a/2}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right]$$

Podemos simplificar todavía más este resultado si sustituímos a por R, R/2 y 2R respectivamente:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\mu_0 N}{2R} \cdot \left[\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{R}{2R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] = \frac{\mu_0 N}{R} \cdot \frac{2^3}{5\sqrt{5}} \\ c_2 &= \frac{\mu_0 N}{2R} \cdot \left[\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{R}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] = \frac{\mu_0 N}{R} \cdot \frac{2^6}{17\sqrt{17}} \\ c_3 &= \frac{\mu_0 N}{2R} \cdot \left[\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{R}{4R}\right)^2\right)^{3/2}} \right] = \frac{\mu_0 N}{R} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es encontrar las constantes c_n , la pendiente de la recta $B = c \cdot I$, para conseguir el valor de μ_0 . Para ello haremos un ajuste por mínimos cuadrados sin término independiente (de la forma $y_i = bx_i$). Luego utilizaremos estas fórmulas para calcular μ_0 en base a c.

$$\mu_0 = \frac{c_1 R \cdot 5\sqrt{5}}{N \cdot 2^3} = \frac{c_2 R \cdot 17\sqrt{17}}{N \cdot 2^6} = \frac{c_3 R \cdot 2\sqrt{2}}{N} \quad (3)$$

También podemos calcular la indeterminación de μ_0 mediante propagación de incertidumbres. Por comodidad usaremos K para referirnos a la fracción en corchetes en la fórmula superior que sustituímos por la constante al incluir $a=R$, $a=R/2$ y $a=2R$.

$$s(\mu_0) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu_0}{\partial c}\right)^2 \cdot s^2(c)} = \sqrt{\left(\frac{2R}{N} \cdot K\right)^2 \cdot s^2(c)} = \frac{2R}{N} \cdot K \cdot s(c) \quad (4)$$

3.1 Tablas de datos

En las siguientes tablas de datos representamos el campo magnético (B_{exp}) en teslas (T) que medimos desde el punto medio de las bobinas junto a la intensidad (I) en amperios (A). La incertidumbre del campo magnético sigue siendo constante $s(B_{exp}) = 10^{-5}T$, pero no se especifica la incertidumbre de I . En la parte anterior de la práctica podemos ver en el enunciado de las tablas que $s(I) = 0,01A$, sin embargo, al no especificarse en esta parte y de ser 0,01 causaría problemas a la hora de hacer una regresión lineal, consideraremos que es nula o despreciable frente a la incertidumbre de B .

Medida	$I1(A)$	$B1_{exp}(T)$	$I2(A)$	$B2_{exp}(T)$	$I3(A)$	$B3_{exp}(T)$
1	0,22	0,00013	0,15	0,00011	0,28	0,00007
2	0,49	0,00031	0,34	0,00027	0,49	0,00014
3	0,72	0,00046	0,66	0,00055	0,72	0,00022
4	0,95	0,00061	0,94	0,00078	0,98	0,00031
5	1,12	0,00073	1,19	0,00099	1,18	0,00038
6	1,36	0,00089	1,39	0,00116	1,37	0,00044
7	1,58	0,00103	1,62	0,00134	1,59	0,00052
8	1,77	0,00115	1,80	0,00151	1,81	0,00059
9	1,95	0,00128	1,99	0,00166	2,01	0,00065
10	2,16	0,00142	2,16	0,00182	2,23	0,00074
11	2,39	0,00157	2,34	0,00196	2,48	0,00080
12	2,62	0,00172	2,56	0,00215	2,62	0,00085
13	2,72	0,00180	2,75	0,00232	2,77	0,00090
14	2,92	0,00193	2,95	0,00249	2,95	0,00097
15	3,16	0,00208	3,19	0,00269	3,23	0,00105
16	3,37	0,00222	3,42	0,00289	3,47	0,00114
17	3,61	0,00238	3,59	0,00304	3,65	0,00121
18	3,74	0,00245	3,74	0,00317	3,74	0,00123

Figura 7: Variación del campo magnético con la intensidad para $a=R$, $a=R/2$ y $a=2R$

3.2 Representación gráfica

Utilizaremos un programa de `python` muy similar al anterior para representar los datos experimentales como puntos. Sin embargo, en esta ocasión tenemos que hacer un ajuste por mínimos cuadrados, que explicaremos en la siguiente sección.

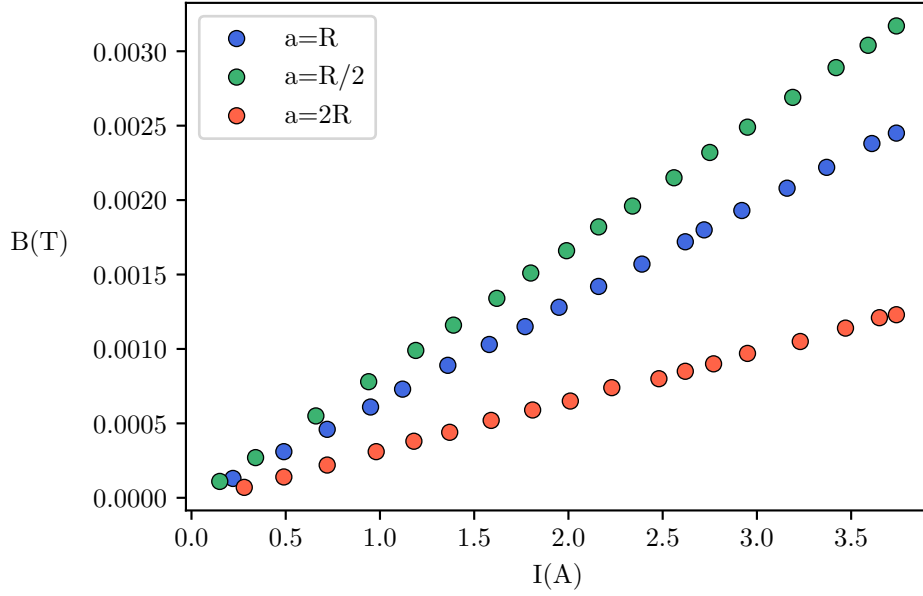


Figura 8: Campo magnético (B) frente a la intensidad (I) para tres separaciones de las bobinas ($a=R$, $a=R/2$, $a=2R$)

3.3 Ajuste por mínimos cuadrados

Para ajustar los una serie de datos que parezcan seguir una relación lineal podemos utilizar el método de **ajuste por mínimos cuadrados**. Al ser *lineal*, podemos ajustarla por una recta general de la forma $y = \alpha + \beta x$. El problema a resolver sería conseguir la mejor aproximación a , b de los parámetros α , β y sus incertidumbres utilizando nuestra serie de parámetros $\{x_i, y_i\}$. Sin embargo, en este caso sabemos que las rectas pasan por el origen (Puesto que para $I=0$, $B=0$), por lo tanto el parámetro a va a ser igual a 0, ya que si sustituimos $y=0$ y $x=0$, obtenemos $0 = \alpha + \beta \cdot 0$. Este tipo de regresión de la forma $y = \beta x$ llama **ajuste por mínimos cuadrados sin término independiente**, y es la que encaja con nuestra ecuación $B = c \cdot I$.

Para ello minimizaremos la suma de los productos del peso estadístico de cada punto, w_i , por el cuadrado de la desviación de los datos, $[y_i - bx_i]^2$. Por lo tanto, la derivada respecto a b debe de ser 0.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n w_i [y_i - bx_i]^2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \quad (6)$$

De aquí resultan dos posibles casos:

1. Si las incertidumbres de x_i no son despreciables respecto a las de y_i . Obtenemos la siguiente ecuación: $\omega_i = \frac{1}{s^2(y_i) + b^2 s^2(x_i)}$, que excede el nivel de este curso.

2. Si por el contrario podemos despreciar las incertidumbres de x_i respecto a y_i , podemos simplificar la ecuación anterior a $\omega_i = [s(y_i)]^{-2}$.

En nuestro caso, estamos representando $B(y_i)$ frente a $I(x_i)$, y como ya comentamos la incertidumbre de I no está especificada por lo que consideraremos que es despreciable frente a la de B , así que podemos aplicar el segundo caso.

Además, podemos considerar que las incertidumbres de y_i permanecen constantes entre las diferentes medidas, por lo que también lo hará el peso estadístico $w = cte$. Finalmente, conseguimos la expresión matemática de b en base a la serie de medidas $\{x_i, y_i\}$, que sustituiremos por I y B . También podemos calcular la desviación típica (s), la incertidumbre de b ($s(b)$) y el coeficiente de regresión lineal (r).

$$b = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{\sum_i IB}{\sum_i I^2} \quad (7)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - bx_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_i (B - bI)^2}{n-1}} \quad (8)$$

$$s(b) = \frac{s}{\sqrt{\sum_i x_i^2}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_i I^2}} \quad (9)$$

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sqrt{(\sum_i x_i^2) \cdot (\sum_i y_i^2)}} = \frac{\sum_i IB}{\sqrt{(\sum_i I^2) \cdot (\sum_i B^2)}} \quad (10)$$

Implementaremos este procedimiento utilizando una vez más **python**. Lo haremos en una librería a parte para poder utilizarlo en el resto de las memorias. El código se describe a continuación, donde los parámetros x e y son arrays de **numpy** o series de **pandas**, lo equivalente a una columna de nuestras tablas. Contienen la función `.sum()`, que hace un sumatorio de todos sus miembros. Como vemos, podemos operar antes de hacer la suma, por ejemplo, para calcular $\sum_i x_i y_i$.

```
def reg_lin_b(x, y):
    n = len(x) #Numero de datos

    #Sumatorios necesarios
    sxy = (x*y).sum()
    sx2 = (x**2).sum()
    sybx = ((y - b*x)**2).sum()
    sy2 = (y**2).sum()

    b = sxy / sx2 #Pendiente de la recta
    s = (sybx / (n-1))**0.5 #Desviacion tipica
    sb = s / (sx2)**0.5 #Incertidumbre de b
    r = sxy / (sx2 * sy2)**0.5 #Coeficiente de regresion lineal

    return (b, s, sb, r)
```

Ahora crearemos el programa que nos permitirá representar las rectas junto a los puntos experimentales, y nos devolverá los datos de la regresión lineal.

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from reg_lin import reg_lin_b as rl

#Datos, similarmente para las otras dos tablas
d1 = pd.read_csv("BH-4.csv", sep=';', decimal=',')
I1 = d1["I"]; Be1 = d1["Bexp"]

#Regresion lineal sin termino independiente
b1 = rl(I1, Be1)[0]
xr1 = np.linspace(0, max(I1), 10); yr1 = b1 * xr1

#Graficas
plt.scatter(I1, Be1) #Experimental, puntos
plt.plot(xr1, yr1) #Teorica, recta regresion lineal
```

Y obtenemos la siguiente gráfica con los parámetros de regresión indicados.

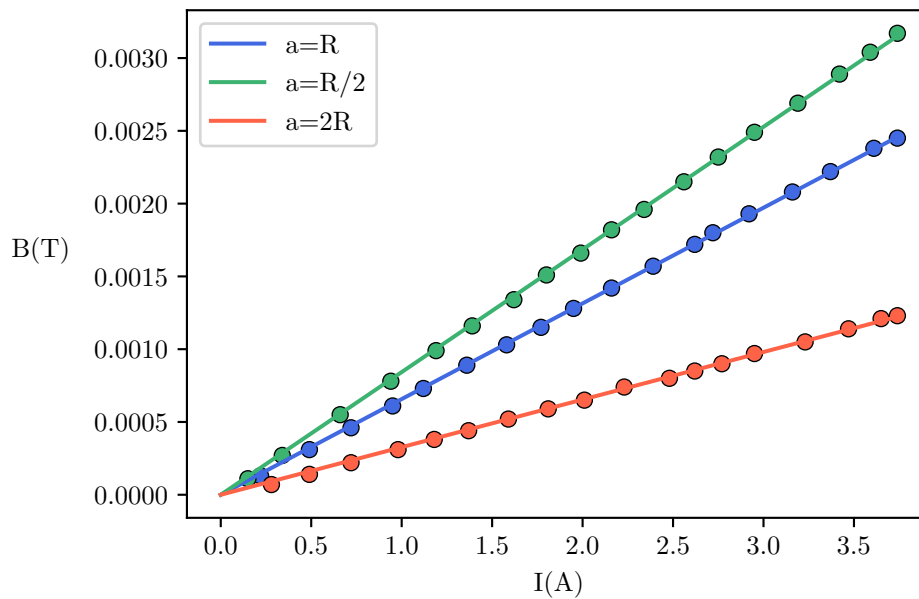


Figura 9: Campo magnético (B) frente a la intensidad (I) para tres separaciones de las bobinas ($a=R$, $a=R/2$, $a=2R$) con regresión lineal simple sin término independiente

$b_1 = 0,0006572T/A$	$s_1 = 9,3 \cdot 10^{-6}T$	$sb_1 = 9,5 \cdot 10^{-7}T/A$	$r_1 = 0,99998$
$b_2 = 0,000843T/A$	$s_2 = 1,3 \cdot 10^{-5}T$	$sb_2 = 1,3 \cdot 10^{-6}T/A$	$r_2 = 0,99997$
$b_3 = 0,000327T/A$	$s_3 = 1,1 \cdot 10^{-5}T$	$sb_3 = 1,1 \cdot 10^{-6}T/A$	$r_3 = 0,99990$

3.4 Cálculo de la permeabilidad magnética

Ahora que tenemos las pendientes de las tres rectas, podemos calcular la permeabilidad magnética con las ecuaciones que describimos antes (3). Tenemos así:

$$\begin{aligned}\mu_{0(1)} &= \frac{b_1 R \cdot 5\sqrt{5}}{N \cdot 2^3} = \frac{0,0006572 \cdot 0,2 \cdot 5\sqrt{5}}{154 \cdot 2^3} = 1,193 \cdot 10^{-6} \frac{m \cdot T}{A} \\ \mu_{0(2)} &= \frac{b_2 R \cdot 17\sqrt{17}}{N \cdot 2^6} = \frac{0,000843 \cdot 0,2 \cdot 17\sqrt{17}}{154 \cdot 2^6} = 1,199 \cdot 10^{-6} \frac{m \cdot T}{A} \\ \mu_{0(3)} &= \frac{b_3 R \cdot 2\sqrt{2}}{N} = \frac{0,000327 \cdot 0,2 \cdot 2\sqrt{2}}{154} = 1,201 \cdot 10^{-6} \frac{m \cdot T}{A}\end{aligned}$$

Calcular la incertidumbre de nuestras medidas es sencillo utilizando propagación de incertidumbres. A partir de la expresión 4 obtenemos estos resultados:

$$\begin{aligned}s(\mu_{0(1)}) &= \frac{s(b_1) R \cdot 5\sqrt{5}}{N \cdot 2^3} = 1,7 \cdot 10^{-9} \frac{m \cdot T}{A} \\ s(\mu_{0(2)}) &= \frac{s(b_2) R \cdot 17\sqrt{17}}{N \cdot 2^6} = 1,8 \cdot 10^{-9} \frac{m \cdot T}{A} \\ s(\mu_{0(3)}) &= \frac{s(b_3) R \cdot 2\sqrt{2}}{N} = 4,0 \cdot 10^{-9} \frac{m \cdot T}{A}\end{aligned}$$

Podemos observar que los resultados se ajustan bastante bien a la constante de permeabilidad magnética original, el ligero desvío se produce por el mismo motivo que las gráficas experimentales no coinciden del todo con las teóricas, probablemente pequeños fallos en la obtención de los datos en el laboratorio. De cualquier manera, podemos afirmar con seguridad que μ_0 tiene un valor muy similar al obtenido.

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi 10^{-7} \frac{m \cdot T}{A} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \\ \mu_0 &\approx 1,193 \cdot 10^{-6} \pm 1,7 \cdot 10^{-9} \approx 1,199 \cdot 10^{-6} \pm 1,8 \cdot 10^{-9} \approx 1,201 \cdot 10^{-6} \pm 4,0 \cdot 10^{-9}\end{aligned}$$

4 Conclusiones

4.1 Primera parte

En la primera parte de la práctica comparamos el campo teórico con el experimental a través del eje central. Podemos decir que los resultados fueron satisfactorios ya que las curvas que obtuvimos, pese a estar ligeramente desplazadas de las teóricas, se ajustaban perfectamente a su forma. Quizá este desplazamiento se deba a algún pequeño problema de medida en el laboratorio o al aparato usado, ya que todas las medidas difieren de la misma manera.

Observando la gráfica podemos ver que cuánto más cerca estén las bobinas mayor será el campo en el centro, pero más rápido decaerá conforme nos vayamos alejando. También apreciamos que cuando separamos las bobinas una distancia mayor que su radio se crea en el centro un valle donde el campo magnético es menor que su máximo, mientras que si la distancia es menor o igual a su radio el punto central es el máximo.

Una nota final sobre este experimento es que los datos no están uniformemente tomados debido a la disposición del experimento en el laboratorio. Por ese motivo los puntos teóricos no se extienden de igual manera en ambas direcciones.

4.2 Segunda parte

En el segundo experimento demostramos una relación lineal entre el campo magnético en el punto central de las bobinas y la intensidad que pasa por ellas. Para comprobarlo hicimos uso de un ajuste simple por mínimos cuadrados sin término independiente que consideramos muy satisfactorio, ya que las tres curvas contaban con un coeficiente de regresión lineal de 4 nueves.

Utilizando la pendiente de estas rectas pudimos calcular la constante de permeabilidad magnética (μ_0) y obtuvimos valores muy similares a los teóricos (Diferían en menos de una décima de orden). La pequeña diferencia se puede deber a lo mismo que el apartado anterior, además de que la constante teórica implica la permeabilidad en el vacío y el laboratorio está lleno de aire y otras partículas.

En general hemos completado esta práctica con datos bastante similares a los teóricos y consideraremos que ha sido exitosa.

Experiencia II

Curva de Carga

1 Objetivos

En esta práctica trabajaremos con un **circuito RC**. Este tipo de circuito cuenta con una resistencia R y un condensador C . A continuación mostramos un diagrama de cómo podría montarse:

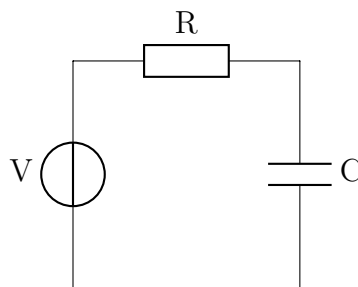


Figura 10: Circuito RC

Experimentaremos sobre las propiedades de la curva de carga del condensador. Este dispositivo es capaz de almacenar energía potencial eléctrica en sus dos superficies conductoras. Cuando se somete a una diferencia de potencial sus placas se *cargan* con una carga Q de signo opuesto, haciendo que la intensidad del circuito decrezca tendiendo a 0.

Mediremos la curva de carga del condensador en tres escenarios diferentes:

- Manteniendo V y C constantes, variando R
- Manteniendo R y V constantes, variando C
- Manteniendo C y R constantes, variando V

1.1 Expresión de la intensidad

Si utilizamos la **ley de Ohm** en el circuito, obtenemos una ecuación diferencial de $Q(t)$, y utilizando su resultado podemos calcular $I(t)$ dado que $I(t) = \partial Q / \partial t$

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta V_R + \Delta V_C = IR + \frac{Q}{C} = \frac{\partial Q}{\partial t}R + \frac{Q}{C} \\ Q(t) &= C\Delta V(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \\ I(t) &= \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\Delta V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\end{aligned}\tag{11}$$

1.2 Diagrama

Pese a que no explicaremos de manera pormenorizada el montaje experimental, daremos unas nociones básicas del funcionamiento del circuito y cómo tomaremos las medidas.

Necesitamos una fuente de alimentación que conectaremos a una resistencia y un condensador. Además, añadiremos un amperímetro que nos permita visualizar la intensidad. También colocaremos otro circuito de descarga, para que moviendo un interruptor podamos conectar el condensador directamente a una resistencia muy pequeña para que se descargue de manera casi instantánea. En el siguiente diagrama se ve una posible configuración:

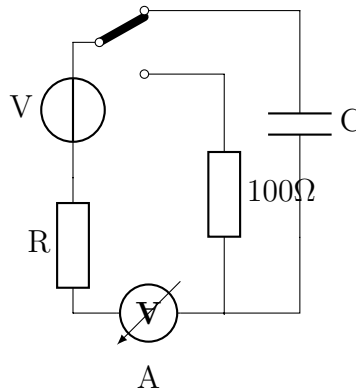


Figura 11: Montaje experimental

Al tomar las medidas, debemos de asegurarnos de que el condensador esté descargado. Conectaremos el circuito RC a la corriente y anotaremos el tiempo cada vez que el amperímetro varíe el $0,1\mu A$, su precisión instrumental.

1.3 Incertidumbres

Sabemos que la incertidumbre experimental del amperímetro es de $0,1\mu A = 10^{-7}A$, sin embargo, en el caso de la incertidumbre del tiempo debemos realizar una matización. Pese a que el cronómetro tiene una precisión experimental de $0,01s$, no podemos tomarla cómo tal.

Hay un desfase entre que el amperímetro cambia y nosotros anotamos el tiempo, por lo que tenemos que tener en cuenta las limitaciones de nuestra propia percepción. Estimaremos que la incertidumbre del tiempo es de $0,3s$.

Para representar la curva de carga preferiremos hacer uso del logaritmo de la intensidad ($\ln I$) en lugar de la medida directa, por lo que procederemos a calcular su fórmula de propagación de incertidumbres para utilizarla en el momento en que sea necesario.

$$s(\ln I) = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln I}{\partial I}\right)^2 \cdot s^2(I)} = \sqrt{\frac{1}{I^2} \cdot s^2(I)} = \frac{s(I)}{I} \quad (12)$$

2 Medidas con V y C constantes, variando R

En la primera experiencia dejaremos $V = 10V$ y $C = 3 \cdot 10^{-5}F$ constantes mientras variamos el valor de la resistencia. Para cuatro valores distintos obtenemos los datos expuestos.

2.1 Tablas de datos

Como discutimos en el apartado anterior, la incertidumbre del tiempo y de la intensidad son constantes a lo largo de los experimentos, siendo respectivamente $s(T) = 0,3s$ y $s(I) = 10^{-7}A$, por lo que no las incluiremos en las tablas. La incertidumbre del logaritmo de I si que varía de la manera que explicamos en la ecuación 12. Presentamos los resultados a continuación.

$R_1 = 4,7 \cdot 10^6 \Omega$			$R_2 = 6,9 \cdot 10^6 \Omega$		
$T_1(s)$	$I_1(A)$	$\ln I_1 \pm s(I_1)(A)$	$T_2(s)$	$I_2(A)$	$\ln I_2 \pm s(I_2)(A)$
0,0	0,0000022	$-13,027 \pm 0,045$	0,0	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
2,7	0,0000021	$-13,074 \pm 0,048$	14,3	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
9,0	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$	28,9	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
14,6	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$	46,5	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
23,1	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$	62,9	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
30,4	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$	83,2	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
38,4	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$	103,4	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
47,0	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$	128,1	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
56,5	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$	153,7	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
64,7	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$	184,1	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
75,6	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$	218,3	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
87,6	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$	262,0	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
97,6	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$	318,2	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
111,3	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$	392,7	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$
126,7	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$			
141,2	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$			
162,3	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$			
183,4	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$			
205,6	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$			
235,9	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$			
274,3	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$			
350,2	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$			

$$\mathbf{R}_3 = 3,2 \cdot 10^6 \Omega$$

$T_3(s)$	$I_3(A)$	$\ln I_3 \pm s(I_3)(A)$
0,0	0,0000031	$-12,684 \pm 0,032$
3,5	0,0000030	$-12,717 \pm 0,033$
6,9	0,0000029	$-12,751 \pm 0,034$
9,8	0,0000028	$-12,786 \pm 0,036$
13,2	0,0000027	$-12,822 \pm 0,037$
16,5	0,0000026	$-12,860 \pm 0,038$
19,8	0,0000025	$-12,899 \pm 0,040$
24,7	0,0000024	$-12,940 \pm 0,042$
29,3	0,0000023	$-12,983 \pm 0,043$
32,3	0,0000022	$-13,027 \pm 0,045$
37,8	0,0000021	$-13,074 \pm 0,048$
41,5	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$
46,7	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$
52,1	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
57,6	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
63,2	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
69,8	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
75,7	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
83,4	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
90,9	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
99,8	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
107,6	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
117,8	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
130,8	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
142,3	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
157,9	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
175,4	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
196,3	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
223,5	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
263,2	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
328,7	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

$$\mathbf{R}_4 = 5 \cdot 10^6 \Omega$$

$T_4(s)$	$I_4(A)$	$\ln I_4 \pm s(I_4)(A)$
0,0	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$
7,3	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$
14,7	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
23,3	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
30,8	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
40,7	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
51,2	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
61,3	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
70,9	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
82,1	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
95,7	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
112,2	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
124,7	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
140,3	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$

2.2 Representación gráfica

Primero, representaremos los datos de I_i frente a T_i directamente. Utilizando `pandas` y `matplotlib` de una manera muy similar a la primera práctica, obtenemos la siguiente gráfica:

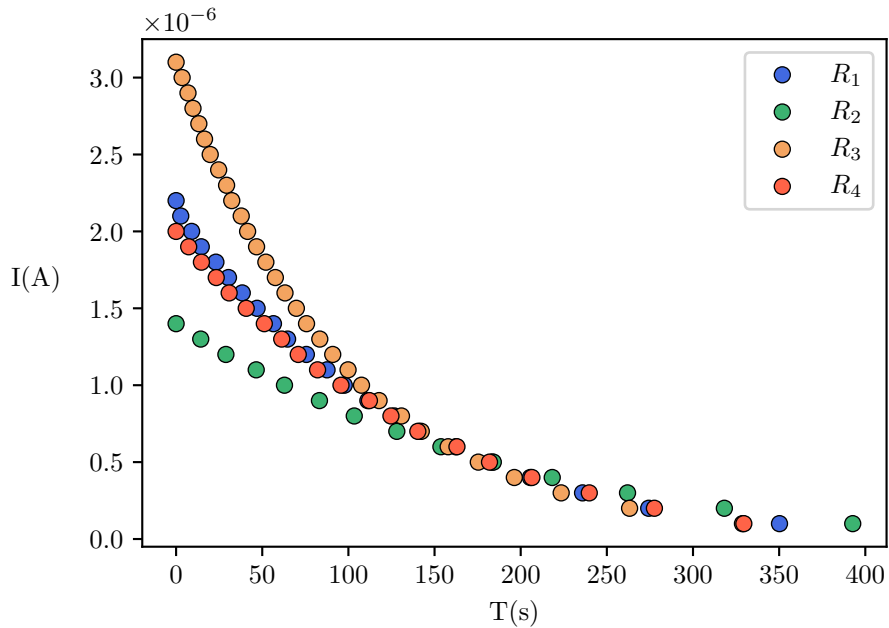


Figura 12: Intensidad (I) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

Como podemos ver, las curvas parecen indicar algún tipo de relación de decaimiento exponencial. Para observarlo con mayor claridad, sustituiremos I por su logaritmo ($\ln I$). Si obtenemos rectas, eso significará que en efecto es una relación exponencial. Además, nos permitirá hacer un ajuste lineal de los datos.

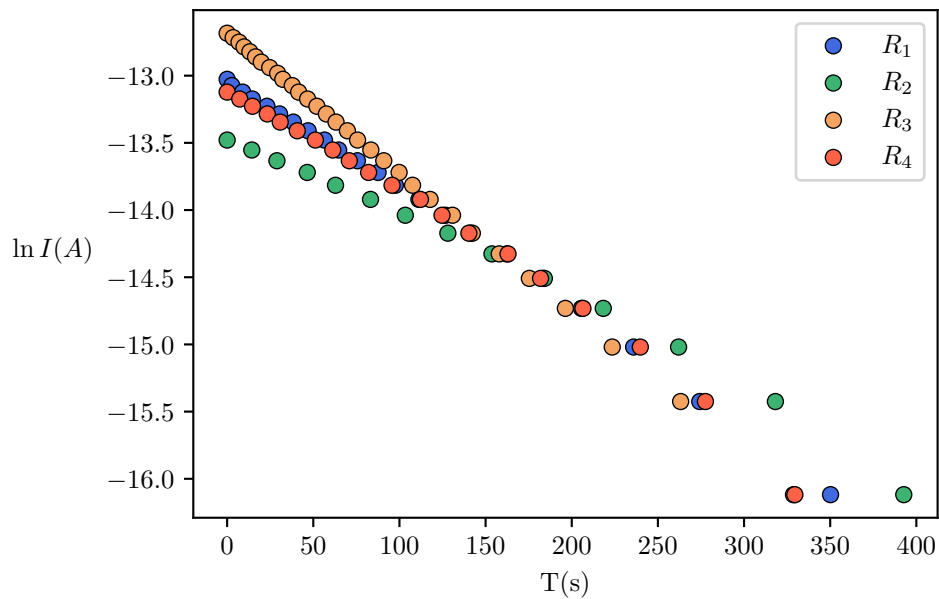


Figura 13: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

Las líneas se cruzan demasiado al representarlas todas juntas, por lo que dividiremos la gráfica en cuatro.

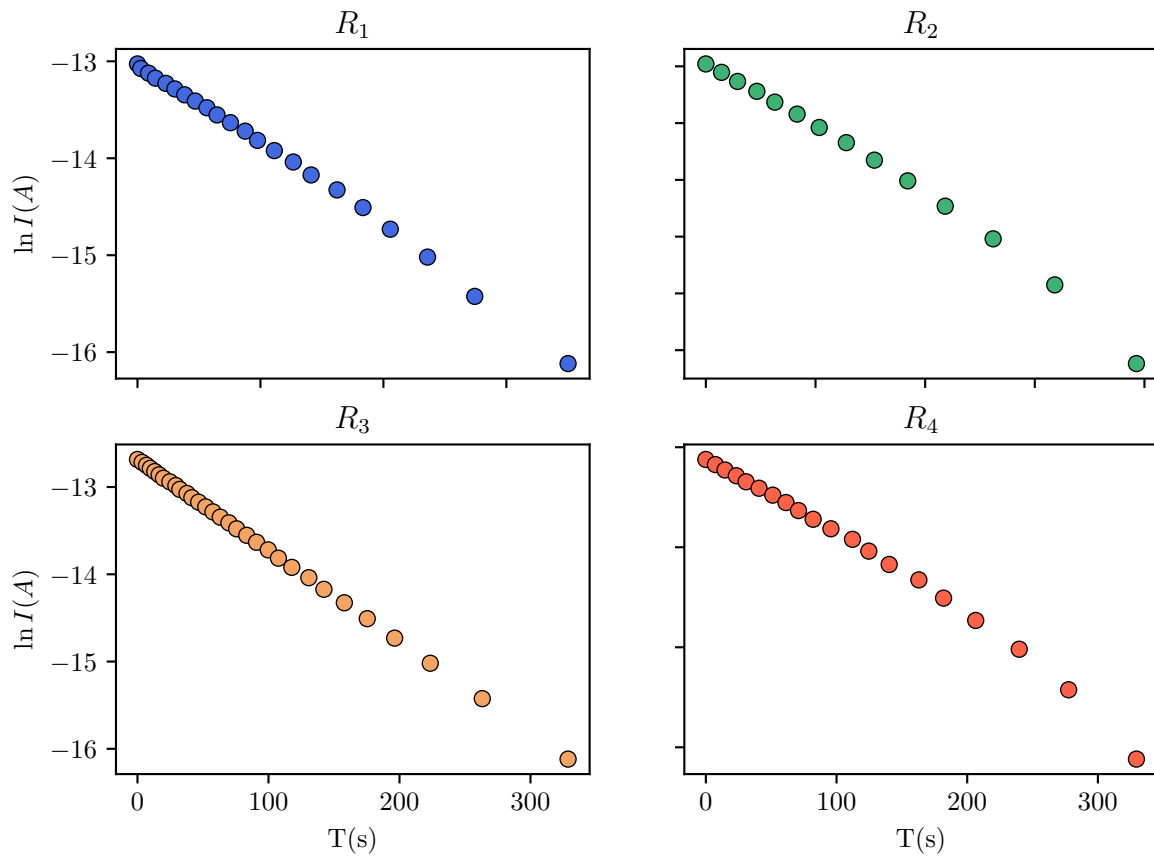


Figura 14: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

Ahora sí, podemos observar que en efecto se asemejan a rectas con razonable precisión. El siguiente paso será hacer una regresión lineal para descubrir qué línea teórica se ajusta a ellas.

2.3 Ajuste por mínimos cuadrados

En esta ocasión, la incertidumbre de $\ln I$ ($s(\ln I) = s(y_i)$) varía con el tiempo, cómo indican las tablas. Por lo tanto, tendremos que realizar un ajuste por mínimos cuadrados ponderado, a diferencia del ajuste simple que hicimos en la práctica anterior.

Además, será un ajuste con término independiente de la forma $y_i = a + bx_i$, porque en $T = 0$, $\ln I \neq 0$. Las fórmulas correspondientes a este ajuste son:

$$a = \frac{(\sum_i w_i y_i)(\sum_i w_i x_i^2) - (\sum_i w_i x_i)(\sum_i w_i x_i y_i)}{\Delta} \quad (13)$$

$$b = \frac{(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i y_i) - (\sum_i w_i x_i)(\sum_i w_i y_i)}{\Delta} \quad (14)$$

$$s(a) = \sqrt{\frac{\sum_i w_i x_i^2}{\Delta}} \quad s(b) = \sqrt{\frac{\sum_i w_i}{\Delta}} \quad (15)$$

$$s = \sqrt{\frac{n}{(n-2) \sum_i w_i} \left[\sum_i w_i (y_i - a - bx_i)^2 \right]} \quad (16)$$

$$r = \frac{(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i y_i) - (\sum_i w_i x_i)(\sum_i w_i y_i)}{\sqrt{[(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i^2) - (\sum_i w_i x_i)^2][(\sum_i w_i)(\sum_i w_i y_i^2) - (\sum_i w_i y_i)^2]}} \quad (17)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_i w_i & \sum_i w_i x_i \\ \sum_i w_i x_i & \sum_i w_i x_i^2 \end{vmatrix} \quad w = \frac{1}{sy^2} \quad (18)$$

Lo implementamos en `python` con el siguiente código, de manera similar a la anterior regresión.

```
def reg_lin_w(x, y, sy):
    n = len(x); w = sy**(-2)

    sw = w.sum(); swxy = (w*x*y).sum()
    swx = (w*x).sum(); swy = (w*y).sum()
    swx2 = (w*x**2).sum(); swy2 = (w*y**2).sum()
    det = sw * swx2 - swx**2

    a = (swy*swx2 - swx*swxy) / det
    b = (sw*swxy - swx*swy) / det

    sa = (swx2 / det)**0.5
    sb = (sw / det)**0.5

    swab = (w*(y - a - b*x)**2).sum()
    s = ((n / ((n-2) * sw)) * swab)**0.5

    r = (sw*swxy - swx*swy) / ((sw*swx2 - swx**2) * (sw*swy2 - swy**2))
        **0.5

    return (a, b, s, sa, sb, r)
```

Además, añadimos un programa específico para nuestros datos, que iterará entre los distintos puntos y hará una regresión lineal para cada una de las resistencias. Con todo eso, obtenemos las siguientes gráficas con sus correspondientes parámetros de ajuste:

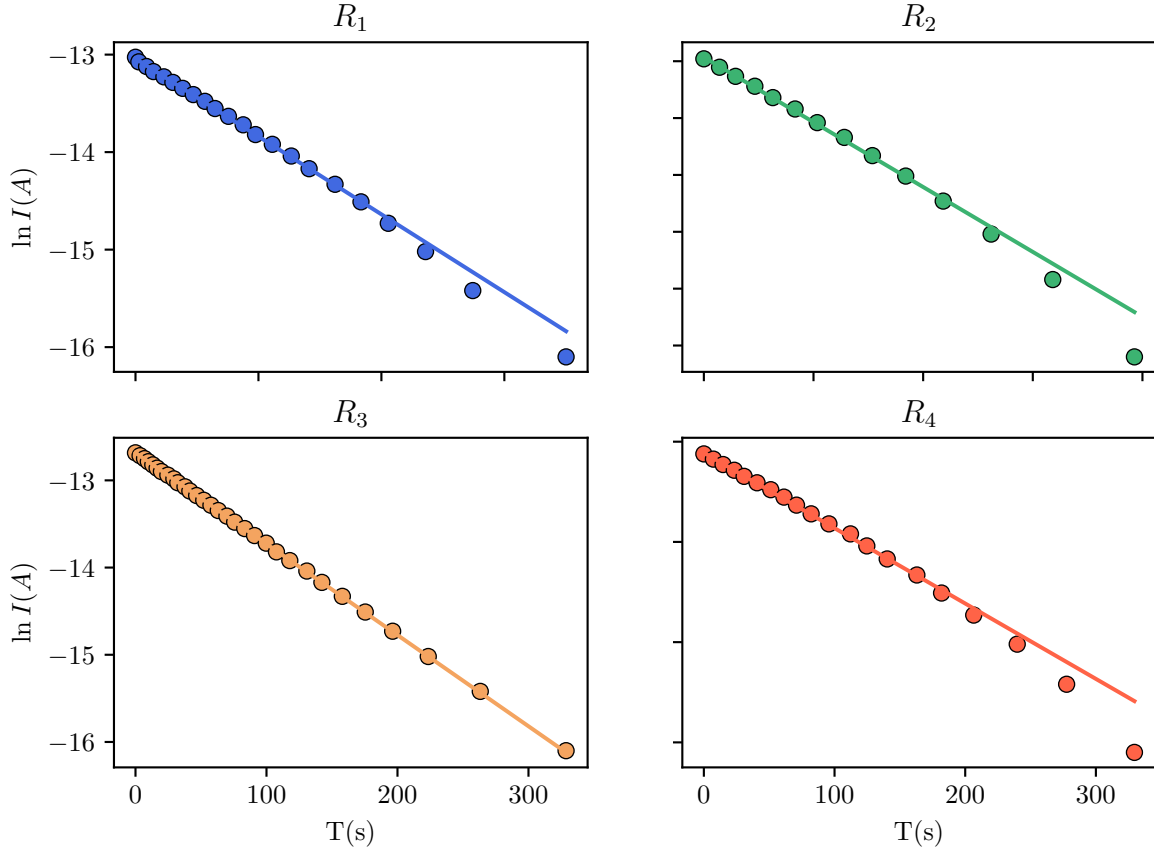


Figura 15: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R) con ajuste por mínimos cuadrados ponderado con término independiente

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -13,041 \pm 0,022 & b_1 &= -0,00798 \pm 0,00038s^{-1} & s_1 &= 0,015 & r_1 &= 0,9991 \\
 a_2 &= -13,465 \pm 0,043 & b_2 &= -0,00571 \pm 0,00054s^{-1} & s_2 &= 0,022 & r_2 &= 0,998 \\
 a_3 &= -12,684 \pm 0,013 & b_3 &= -0,01045 \pm 0,00031s^{-1} & s_3 &= 0,0044 & r_3 &= 0,99991 \\
 a_4 &= -13,111 \pm 0,026 & b_4 &= -0,00752 \pm 0,00042s^{-1} & s_4 &= 0,020 & r_4 &= 0,998
 \end{aligned}$$

2.4 Interpretación

Ahora que tenemos los términos de ajuste de las distintas rectas, a y b correspondientes a $y_i = a + bx_i$, podemos interpretar su significado. Tomaremos la siguiente expresión y la convertiremos para obtener $\ln I$ en función del tiempo.

$$I(T) = \frac{\Delta V}{R} e^{-T/RC} \quad \ln I(T) = \ln \frac{\Delta V}{R} - \frac{1}{RC} \cdot T \quad (19)$$

Podemos justaponer esta ecuación a $y_i = a + bx_i$ siendo $y_i = \ln I(T)$ y $x_i = T$ para obtener los parámetros a y b teóricos:

$$a = \ln \frac{\Delta V}{R} \quad b = -\frac{1}{RC} \quad (20)$$

Calcularemos los distintos valores de a y b teóricos para comprobar nuestros resultados experimentales:

$$\begin{aligned} a_1 &= \ln \frac{10}{4,7 \cdot 10^6} = -13,060 & b_1 &= -\frac{1}{4,7 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = -0,00709s^{-1} \\ a_2 &= \ln \frac{10}{6,9 \cdot 10^6} = -13,444 & b_2 &= -\frac{1}{6,9 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = -0,00483s^{-1} \\ a_3 &= \ln \frac{10}{3,2 \cdot 10^6} = -12,676 & b_3 &= -\frac{1}{3,2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = -0,01042s^{-1} \\ a_4 &= \ln \frac{10}{5,0 \cdot 10^6} = -13,122 & b_4 &= -\frac{1}{5,0 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = -0,00667s^{-1} \end{aligned}$$

Debemos medir la incertidumbre de a y b mediante propagación de incertidumbres. Tomamos $s(\Delta V) = 0,1V$, y tanto $s(C)$ como $s(R)$ serán un 5% de su valor nominal. Primero anotamos las incertidumbres de R (múltiples valores) y C.

$$\begin{aligned} s(R_1) &= 0,05 \cdot 4,7 \cdot 10^6 = 2,35 \cdot 10^5 \Omega & s(R_2) &= 0,05 \cdot 6,9 \cdot 10^6 = 3,45 \cdot 10^5 \Omega \\ s(R_3) &= 0,05 \cdot 3,2 \cdot 10^6 = 1,6 \cdot 10^5 \Omega & s(R_4) &= 0,05 \cdot 5,0 \cdot 10^6 = 2,5 \cdot 10^5 \Omega \\ s(C) &= 0,05 \cdot 3 \cdot 10^{-5} = 1,5 \cdot 10^{-6} F \end{aligned}$$

Tomaremos la incertidumbre de los términos independientes, a_i :

$$s(a) = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial \Delta V}\right)^2 \cdot s(\Delta V)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial R}\right)^2 \cdot s(R)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta V}\right)^2 \cdot s(\Delta V)^2 + \left(\frac{-1}{R}\right)^2 \cdot s(R)^2} \quad (21)$$

$$s(a_1) = \sqrt{\frac{1}{10^2} \cdot 0,1^2 + \left(\frac{-1}{4,7 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (2,35 \cdot 10^5)^2} = 0,051$$

$$s(a_2) = \sqrt{\frac{1}{10^2} \cdot 0,1^2 + \left(\frac{-1}{6,9 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (3,45 \cdot 10^5)^2} = 0,051$$

$$s(a_3) = \sqrt{\frac{1}{10^2} \cdot 0,1^2 + \left(\frac{-1}{3,2 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (1,6 \cdot 10^5)^2} = 0,051$$

$$s(a_4) = \sqrt{\frac{1}{10^2} \cdot 0,1^2 + \left(\frac{-1}{5,0 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (2,5 \cdot 10^5)^2} = 0,051$$

$$s(a_1) = s(a_2) = s(a_3) = s(a_4) = 0,051$$

Y por último la incertidumbre de las pendientes de las rectas, b_i :

$$s(b) = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial R}\right)^2 \cdot s(R)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial C}\right)^2 \cdot s(C)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{CR^2}\right)^2 \cdot s(R)^2 + \left(\frac{1}{C^2R}\right)^2 \cdot s(C)^2} \quad (22)$$

$$s(b_1) = \sqrt{\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-5} \cdot (4,7 \cdot 10^6)^2}\right)^2 \cdot (2,35 \cdot 10^5)^2 + \left(\frac{1}{(3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 4,7 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$s(b_2) = \sqrt{\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-5} \cdot (6,9 \cdot 10^6)^2}\right)^2 \cdot (3,45 \cdot 10^5)^2 + \left(\frac{1}{(3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,9 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$s(b_3) = \sqrt{\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-5} \cdot (3,2 \cdot 10^6)^2}\right)^2 \cdot (1,6 \cdot 10^5)^2 + \left(\frac{1}{(3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 3,2 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$s(b_4) = \sqrt{\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-5} \cdot (5,0 \cdot 10^6)^2}\right)^2 \cdot (2,5 \cdot 10^5)^2 + \left(\frac{1}{(3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 5,0 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$s(b_1) = 0,00050s^{-1} \quad s(b_2) = 0,00034s^{-1} \quad s(b_3) = 0,00074s^{-1} \quad s(b_4) = 0,00047s^{-1}$$

Tan solo nos queda comparar los valores de a y b teóricos y experimentales. Podemos ver que son todos razonablemente cercanos y que cumplen las tendencias. Cualquier desviación pequeña puede deberse al procedimiento de medida y a los errores en el laboratorio. Consideramos comprobada la ley en esta situación.

Antes de dejar el experimento, analizaremos el valor $I(0)$. Si nos referimos a la ecuación 19 y sustituimos t por 0 nos queda $I(0) = \frac{\Delta V}{R} e^{0/RC}$, simplificando $I(0) = \frac{\Delta V}{R}$. Podemos comprobar que el logaritmo de $I(0)$ nos da el término independiente del ajuste, o lo que es lo mismo, la ordenada en el origen, lo cual tiene completo sentido ($\ln I(0) = a$) y coincide con nuestros datos.

3 Medidas con R y V constantes, variando C

En esta segunda experiencia repetiremos el mismo procedimiento, pero esta vez dejando $V = 10V$ y $R = 5,7 \cdot 10^6 \Omega$ constantes y cambiando los valores del condensador. Realizaremos pruebas con cuatro condensadores diferentes.

3.1 Tablas de datos

Igual que en el apartado anterior, la incertidumbre del tiempo y de la intensidad son constantes a lo largo de los experimentos, siendo respectivamente $s(T) = 0,3s$ y $s(I) = 10^{-7}A$ mientras que la del logaritmo de I varía y es calculada con 12. Presentamos las tablas obtenidas a continuación.

$C_1 = 4,7 \cdot 10^{-6}F$			$C_2 = 1,0 \cdot 10^{-5}F$		
$T_1(s)$	$I_1(A)$	$\ln I_1 \pm s(I_1)(A)$	$T_2(s)$	$I_2(A)$	$\ln I_2 \pm s(I_2)(A)$
0,0	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$	0,0	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
0,8	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$	1,5	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
2,7	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$	5,1	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
4,2	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$	8,6	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
6,3	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$	12,7	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
7,7	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$	16,8	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
9,6	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$	20,9	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
12,3	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$	25,4	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
14,8	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$	30,1	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
17,5	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$	36,5	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
20,7	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$	43,9	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
24,3	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$	51,8	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
28,4	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$	60,7	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
32,3	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$	69,9	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
38,9	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$	83,2	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
46,5	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$	98,9	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
56,4	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$	120,2	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
74,3	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$	160,1	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

$$\mathbf{C}_3 = 3,0 \cdot 10^{-5} \mathbf{F}$$

$T_3(s)$	$I_3(A)$	$\ln I_3 \pm s(I_3)(A)$
0,0	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
5,6	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
16,2	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
27,3	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
39,4	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
52,3	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
66,6	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
80,3	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
98,4	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
117,2	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
135,6	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
158,1	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
183,2	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
216,4	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
260,3	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
304,2	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
372,3	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
491,5	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

$$\mathbf{C}_4 = 6,0 \cdot 10^{-5} \mathbf{F}$$

$T_4(s)$	$I_4(A)$	$\ln I_4 \pm s(I_4)(A)$
0,0	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
8,7	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
28,5	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
50,3	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
74,7	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
98,6	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
120,5	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
150,1	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
182,0	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
210,3	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
270,4	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
310,7	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
365,4	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
427,8	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
503,2	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
599,8	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
738,5	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
960,5	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

3.2 Representación gráfica

Representamos directamente los datos de I_i frente a T_i utilizando el mismo programa.

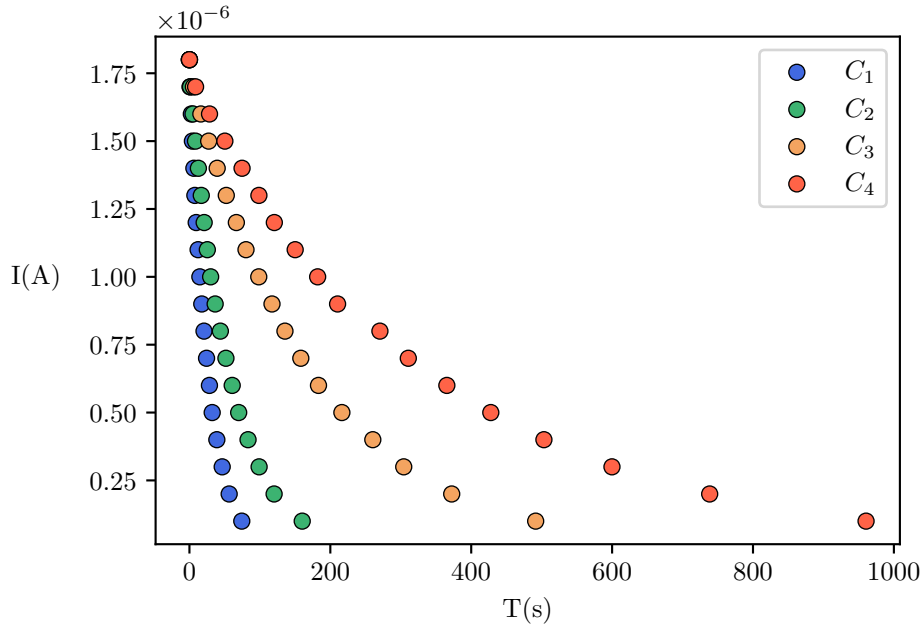


Figura 16: Intensidad (I) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

Vuelve a aparecer el decaimiento exponencial, por lo que cambiaremos de nuevo I por su logaritmo y representaremos las gráficas otra vez. Como en esta ocasión la gráfica queda mucho más clara y se distinguen perfectamente las líneas, no la separaremos como antes.

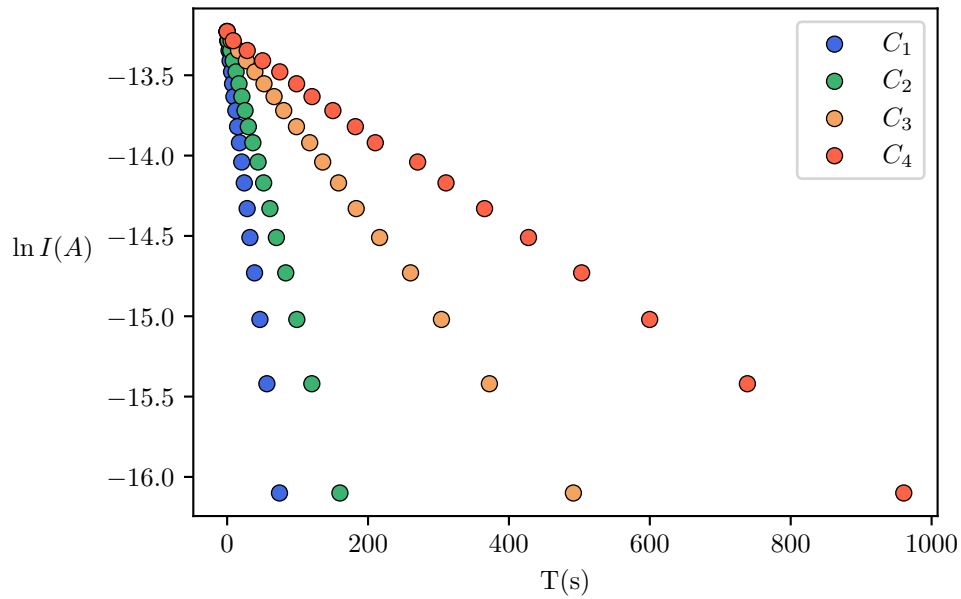


Figura 17: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

3.3 Ajuste por mínimos cuadrados

Ejecutaremos el programa de regresión lineal ponderada con término independiente que construimos en el apartado anterior y dibujaremos de nuevo la gráfica con sus parámetros de ajuste.

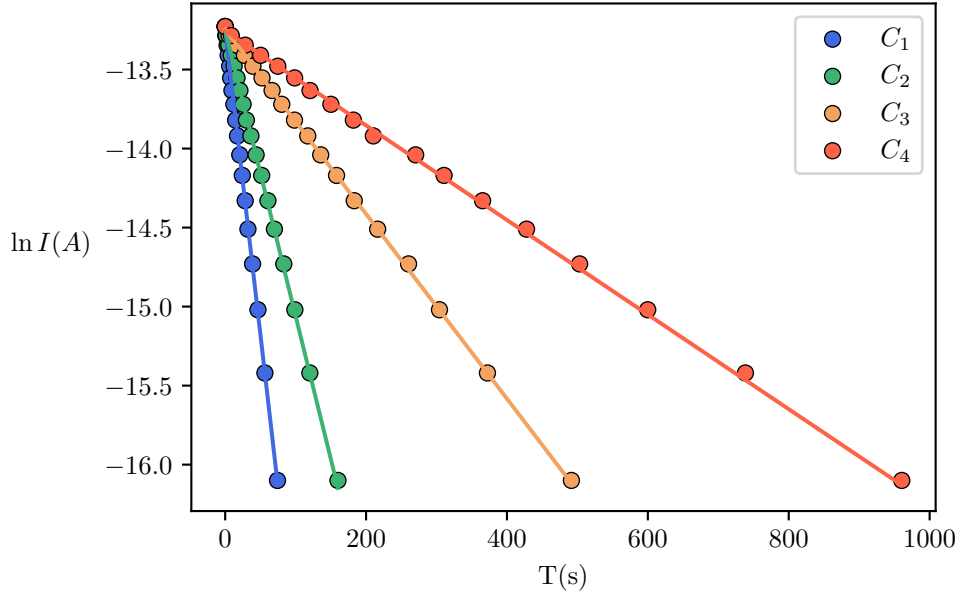


Figura 18: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R) con ajuste por mínimos cuadrados ponderado con término independiente

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -13,244 \pm 0,029 & b_1 &= -0,0386 \pm 0,0025s^{-1} & s_1 &= 0,011 & r_1 &= 0,9995 \\
 a_2 &= -13,250 \pm 0,029 & b_2 &= -0,0181 \pm 0,0012s^{-1} & s_2 &= 0,013 & r_2 &= 0,993 \\
 a_3 &= -13,245 \pm 0,029 & b_3 &= -0,00584 \pm 0,00038s^{-1} & s_3 &= 0,0095 & r_3 &= 0,9996 \\
 a_4 &= -13,255 \pm 0,029 & b_4 &= -0,00299 \pm 0,00020s^{-1} & s_4 &= 0,018 & r_4 &= 0,998
 \end{aligned}$$

3.4 a y b teóricos

Cómo en el apartado anterior, utilizaremos las ecuaciones 20, 21 y 22 para calcular a y b teóricos junto a sus incertidumbres, y vemos que son muy similares. Por comodidad, simplemente indicaremos el resultado final tras aplicar esas fórmulas.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -13,253 \pm 0,051 & b_1 &= -0,0373 \pm 0,0026s^{-1} \\
 a_2 &= -13,253 \pm 0,051 & b_2 &= -0,0175 \pm 0,0012s^{-1} \\
 a_3 &= -13,253 \pm 0,051 & b_3 &= -0,00585 \pm 0,00041s^{-1} \\
 a_4 &= -13,253 \pm 0,051 & b_4 &= -0,00292 \pm 0,00021s^{-1}
 \end{aligned}$$

4 Medidas con C y R constantes, variando V

En la última experiencia repetiremos el mismo procedimiento que en las dos anteriores, aunque ahora fijaremos $\mathbf{C} = 10^{-5}\mathbf{F}$ y $\mathbf{R} = 4,4 \cdot 10^6\Omega$, y variaremos la diferencia de potencial en cuatro experimentos distintos.

4.1 Tablas de datos

La incertidumbre del tiempo y de la intensidad son constantes para todas las tablas, siendo respectivamente $s(T) = 0,3s$ y $s(I) = 10^{-7}A$, mientras que $s(\ln I)$ cambia con cada medida.

$V_1 = 8,5V$			$V_2 = 11,5V$		
$T_1(s)$	$I_1(A)$	$\ln I_1 \pm s(I_1)(A)$	$T_2(s)$	$I_2(A)$	$\ln I_2 \pm s(I_2)(A)$
0,0	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$	0,0	0,0000026	$-12,860 \pm 0,038$
3,4	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$	3,3	0,0000025	$-12,899 \pm 0,040$
5,6	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$	4,8	0,0000024	$-12,940 \pm 0,042$
8,1	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$	6,6	0,0000023	$-12,983 \pm 0,043$
10,2	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$	8,6	0,0000022	$-13,027 \pm 0,045$
13,3	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$	10,9	0,0000021	$-13,074 \pm 0,048$
16,0	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$	13,0	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$
18,7	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$	14,7	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$
22,0	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$	17,4	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
26,0	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$	19,4	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
30,0	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$	22,0	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
34,0	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$	24,8	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
39,4	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$	28,2	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
44,8	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$	31,4	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
51,0	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$	34,2	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
58,3	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$	38,2	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
67,1	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$	41,4	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
77,6	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$	46,2	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
93,8	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$	51,2	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
113,5	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$	56,8	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
			62,7	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
			70,2	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
			79,2	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
			91,0	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
			105,1	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
			127,2	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

V₃ = 10,2V

$T_3(s)$	$I_3(A)$	$\ln I_3 \pm s(I_3)(A)$
0,0	0,0000023	$-12,983 \pm 0,043$
2,1	0,0000022	$-13,027 \pm 0,045$
5,1	0,0000021	$-13,074 \pm 0,048$
6,2	0,0000020	$-13,122 \pm 0,050$
10,1	0,0000019	$-13,174 \pm 0,053$
12,5	0,0000018	$-13,228 \pm 0,056$
13,8	0,0000017	$-13,285 \pm 0,059$
17,1	0,0000016	$-13,346 \pm 0,063$
20,2	0,0000015	$-13,410 \pm 0,067$
23,3	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
25,1	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
27,9	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
32,1	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
36,8	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
40,3	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
45,2	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
51,7	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
58,7	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
66,4	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
75,2	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
86,4	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
108,9	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
137,6	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

V₄ = 6,0V

$T_4(s)$	$I_4(A)$	$\ln I_4 \pm s(I_4)(A)$
0,0	0,0000014	$-13,479 \pm 0,071$
1,9	0,0000013	$-13,553 \pm 0,077$
5,3	0,0000012	$-13,633 \pm 0,083$
9,6	0,0000011	$-13,720 \pm 0,091$
13,4	0,0000010	$-13,82 \pm 0,10$
17,8	0,0000009	$-13,92 \pm 0,11$
23,5	0,0000008	$-14,04 \pm 0,13$
28,7	0,0000007	$-14,17 \pm 0,14$
34,3	0,0000006	$-14,33 \pm 0,17$
42,2	0,0000005	$-14,51 \pm 0,20$
50,6	0,0000004	$-14,73 \pm 0,25$
64,7	0,0000003	$-15,02 \pm 0,33$
82,3	0,0000002	$-15,42 \pm 0,50$
110,1	0,0000001	$-16,1 \pm 1,0$

4.2 Representación gráfica

Representamos directamente los datos de I_i frente a T_i utilizando el mismo programa.

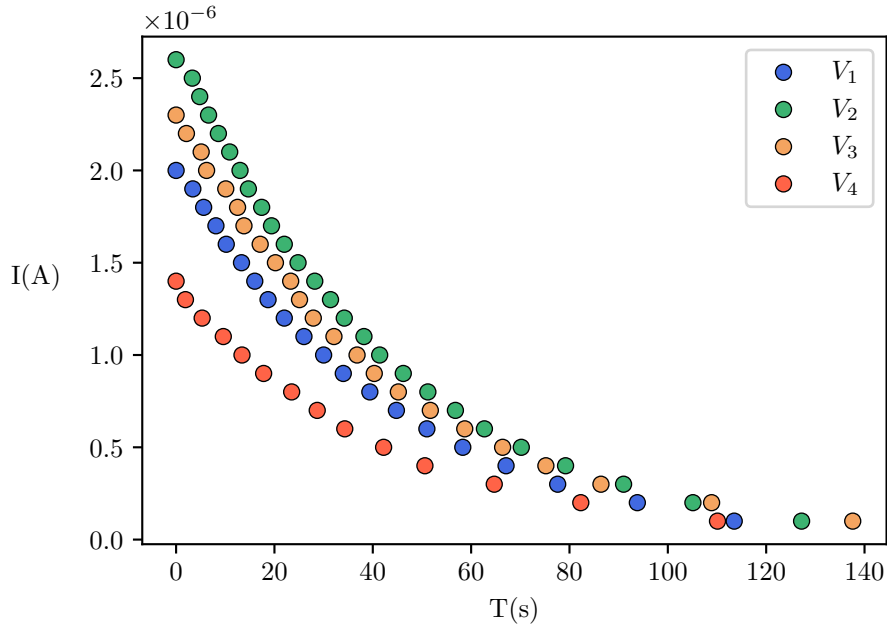


Figura 19: Intensidad (I) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

Se observa decaimiento exponencial, así que representaremos $\ln I$ en lugar de I .

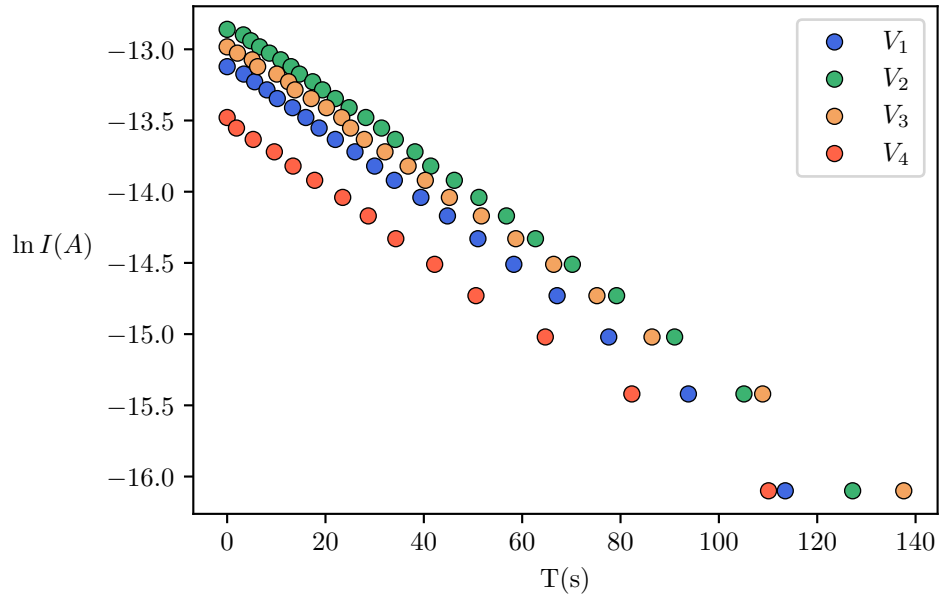


Figura 20: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R)

En esta ocasión las líneas están bastante cerca unas de otras, pero tienen una cualidad importante que se ve mejor si se representan juntas. A primera vista parece que son paralelas, y

separando las gráficas perderíamos ese detalle. Tendremos que realizar un ajuste para comprobar si esta suposición es correcta.

4.3 Ajuste por mínimos cuadrados

Ejecutaremos el programa de regresión lineal ponderada con término independiente que construimos en el apartado anterior y dibujaremos de nuevo la gráfica con sus parámetros de ajuste

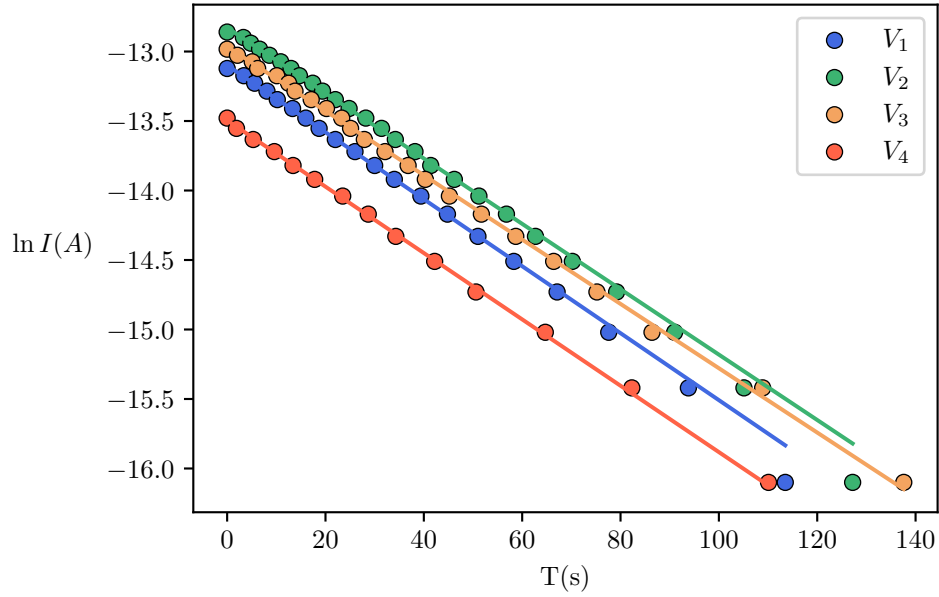


Figura 21: Logaritmo de la intensidad ($\ln I$) frente a tiempo (T) variando la resistencia (R) con ajuste por mínimos cuadrados ponderado con término independiente

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -13,099 \pm 0,026 & b_1 &= -0,0241 \pm 0,0014s^{-1} & s_1 &= 0,013 & r_1 &= 0,9993 \\
 a_2 &= -12,829 \pm 0,018 & b_2 &= -0,02352 \pm 0,00090s^{-1} & s_2 &= 0,015 & r_2 &= 0,9991 \\
 a_3 &= -12,965 \pm 0,021 & b_3 &= -0,0231 \pm 0,0011s^{-1} & s_3 &= 0,019 & r_3 &= 0,998 \\
 a_4 &= -13,495 \pm 0,041 & b_4 &= -0,0231 \pm 0,0023s^{-1} & s_4 &= 0,013 & r_4 &= 0,9993
 \end{aligned}$$

4.4 a y b teóricos

Finalmente, volveremos a utilizar las ecuaciones 20, 21 y 22 para calcular a y b teóricos junto a sus incertidumbres. Como podemos observar los resultados son prácticamente idénticos.

$$a_1 = -13,157 \pm -0,051 \quad b_1 = -0,0227 \pm -0,0016s^{-1}$$

$$a_2 = -12,855 \pm -0,051 \quad b_2 = -0,0227 \pm -0,0016s^{-1}$$

$$a_3 = -12,975 \pm -0,051 \quad b_3 = -0,0227 \pm -0,0016s^{-1}$$

$$a_4 = -13,505 \pm -0,053 \quad b_4 = -0,0227 \pm -0,0016s^{-1}$$

5 Conclusiones

En esta práctica hemos intentado verificar las relaciones de decaimiento exponencial de la corriente conforme se carga un condensador. Hemos hecho tres tipos de experimentos, manteniendo dos de los parámetros constantes y variando el restante.

En la primera experiencia, con V y C constantes y variando R , vimos que todas las rectas tenían pendientes y términos independientes distintos, y que parecían cruzarse en el medio. Esto puede sugerir que cuánto más baja es la resistencia del circuito, mayor corriente pasa por él al principio ($\ln I_0$ menos negativo) pero decae con más rapidez (mayor pendiente negativa) porque el condensador se carga con mayor velocidad.

También comprobamos que el término independiente del ajuste era igual a $\ln I_0$ aplicando dos formulas distintas que nos condujeron al mismo resultado. Además, los valores de a y b que obtuvimos de manera teórica y experimental se correspondieron de una manera muy cercana, entrando aproximadamanete dentro de los intervalos de confianza que especificamos.

En la segunda experiencia dejamos R y V constantes y variamos C . En esta ocasión todas las gráficas tenían el mismo término independiente, $\ln I_0$, por lo que en todas circulaba la misma corriente al iniciar el experimento. Sin embargo, dependiendo de la capacitancia del condensador, este se cargó más o menos rápido dando lugar a distintas pendientes. Verificamos que los condensadores con mayor capacitancia tardaron más tiempo en cargarse y por lo tanto el decaimiento exponencial de la intensidad fue más lento. Los resultados también se acercaron mucho a los teóricos, especialmente el de a , que casi era exactamente igual, aunque el de b también tuvo una relación más cercana que en el apartado anterior.

Finalmente, en la tercera experiencia variamos V con C y R constantes. Las gráficas son paralelas, con distintos términos independientes $\ln I_0$ pero decayendo a la misma velocidad. Observamos que el circuito con una mayor diferencia de potencial fue el que tuvo la mayor intensidad inicial. Los parámetros a y b también se ajustaron perfectamente a los teóricos.

Concluimos pues que se cumplen las leyes que queríamos verificar sobre los condensadores, y que la práctica fue exitosa porque averiguamos factores sobre el funcionamiento de los circuitos RC de manera empírica, por ejemplo, cómo afectan los cambios de V , R y C a la velocidad de carga del condensador y a la intensidad inicial del circuito.

Apéndice

Código y datos

Todo el código y los datos utilizados para la creación de esta memoria se encuentran en un repositorio hospedado en GitHub. Puede accederse desde el siguiente enlace:

<https://github.com/josekoalas/andromeda/tree/master/Electricidad>

Dentro de la carpeta **Electricidad** pueden encontrarse los siguientes ficheros:

- **Electricidad.tex** y **Electricidad.pdf**: Archivo LaTeX y pdf generado para esta memoria.
- ***.py**: Archivos con código python para crear las gráficas en formato .pgf.
- ***.pgf**: Las distintas gráficas en formato vectorial adecuado para su uso en LaTeX, de corriente alterna y corriente continua.
- ***.csv**: Tablas con los datos de la práctica utilizadas tanto en LaTeX cómo en python.
- ***.png**: Imágenes utilizadas.

En la carpeta **Base** se encuentran varios programas de **python** comunes a todas las memorias:

- **varias-medidas.py**: Tratamiento de errores
- **reg-lin.py**: Diferentes tipos de ajustes por mínimos cuadrados
- **mpl-config.py**: Archivo para configurar los parámetros generales de **matplotlib** para que las gráficas tengan un estilo cohesivo y se exporten en .pgf.

Bibliografía

Facultad de física

Amigo, Alfredo. *Análisis de incertidumbres*. Apuntes de Técnicas Experimentales I, Facultad de Física, 2019-20.

Guión: Bobinas de Helmholtz Apuntes de Técnicas Experimentales I, Facultad de Física, 2019-20.

Datos: Bobinas de Helmholtz Apuntes de Técnicas Experimentales I, Facultad de Física, 2019-20.

Guión: Curva de Carga Apuntes de Técnicas Experimentales I, Facultad de Física, 2019-20.

Datos: Curva de Carga Apuntes de Técnicas Experimentales I, Facultad de Física, 2019-20.

Carballeira, Carlos. Campus Virtual. *Videos explicativos: Análisis de datos* <https://cv.usc.es/mod/resource/view.php?id=389413>, <https://cv.usc.es/mod/resource/view.php?id=389415>

Carballeira, Carlos. Campus Virtual. *Video explicativo: Bobinas de Helmholtz* <https://cv.usc.es/mod/resource/view.php?id=383264>

Carballeira, Carlos. Campus Virtual. *Videos explicativos: Curva de Carga* <https://cv.usc.es/mod/resource/view.php?id=3894364>, <https://cv.usc.es/mod/resource/view.php?id=389433>

Otras fuentes

Zakiea. *Imágen Bobinas Helmholtz* <https://www.cleanpng.com/png-helmholtz-coil-comsol-multiph>

LaTeX

Eiras, Jorge. *Edición de textos de carácter científico con LaTeX*. <https://cv.usc.es/course/view.php?id=18484>

Redaelli, Massimo. *CircuitikZ*. <http://texdoc.net/texmf-dist/doc/latex/circuitikz/circuitikzmanual.pdf>

Sturm, Thomas. *The csvsimple package*. <https://osl.ugr.es/CTAN/macros/latex/contrib/csvsimple/csvsimple.pdf>