

Instrumentación Electrónica: Medición de circuitos de corriente continua y corriente alterna

Pazos Pérez, José
DNI

Índice

Introducción	3
1 Material	3
1.1 Corriente Continua (Experiencia I)	3
1.2 Corriente Alterna (Experiencia II)	3
2 Tratamiento de datos	3
2.1 Reglas de redondeo	4
2.2 Incertidumbre de medidas directas	4
2.3 Múltiples medidas directas	4
2.4 Regresión lineal simple	4
2.5 Propagación de incertidumbres	6
I Corriente Continua	7
1 Objetivos	7
2 Resultados	7
2.1 Medida de resistencias	7
2.1.1 Código de colores	7
2.1.2 Medida directa	8
2.2 Ley de Ohm	10
2.2.1 Explicación teórica	10
2.2.2 Estimación indirecta	10
2.2.3 Representación gráfica de V frente a I	12
2.2.4 Ajuste por mínimos cuadrados	13
2.3 Circuito en Serie	16
2.3.1 Procedimiento de medición	16
2.3.2 Resistencia equivalente	17
2.3.3 Medición experimental	17
2.3.4 Representación gráfica de V frente a I	18
2.3.5 Ajuste por mínimos cuadrados	19
2.4 Circuito en Paralelo	21
2.4.1 Procedimiento de medición	21
2.4.2 Resistencia equivalente	21
2.4.3 Medición experimental	22

2.4.4	Representación gráfica de V frente a I	23
2.4.5	Ajuste por mínimos cuadrados	24
2.5	Circuito Mixto	26
2.5.1	Procedimiento de medición	26
2.5.2	Reistencia equivalente	27
2.5.3	Medición experimental	28
2.5.4	Representación gráfica de V frente a I	28
2.5.5	Ajuste por mínimos cuadrados	29
3	Conclusiones	32
3.1	Ley de Ohm	32
II	Corriente Alterna	34
	Anexos	35
A	Bibliografía	35

Introducción

El objetivo de esta memoria es ofrecer un informe detallado de las prácticas de instrumentación, detallando las distintas experiencias llevadas a cabo con circuitos de **corriente continua** y **corriente alterna**.

1 Material

1.1 Corriente Continua (Experiencia I)

- Polímetro
- Fuente de alimentación (CC)
- Resistencias de $180k\Omega$, $220k\Omega$, $390k\Omega$ y $1M\Omega$
- Tablero de conexiones
- Cables

1.2 Corriente Alterna (Experiencia II)

- Osciloscopio
- Fuente de alimentación (CA, senoidal)
- Resistencia de $10k\Omega$
- Condensador de $12nF$
- Tablero de conexiones
- Cables

2 Tratamiento de datos

Para una correcta interpretación de los resultados expuestos en las próximas páginas, explicaremos las distintas metodologías y convenciones sobre el tratamiento de los datos de las mismas. En este apartado se incluyen la explicación de los métodos de **regresión lineal** y **propagación de incertidumbres**.

2.1 Reglas de redondeo

En todas las mediciones expuestas utilizaremos los siguientes métodos de redondeo, aquellos convenidos en las jornadas de introducción:

1. Si la cifra en la posición $n+1$ es mayor que 5, la cifra n se incrementa en una unidad.
2. Si la cifra en la posición $n+1$ es menor que 5, la cifra n se mantiene igual.
3. Si la cifra en la posición $n+1$ es igual a 5, y alguna de las otras cifras suprimidas es distinta de 0, la cifra n se incrementa en una unidad.
4. Si la cifra en la posición $n+1$ es igual a 5, y el resto de cifras suprimidas son iguales a 0, la cifra n se mantiene igual si es par y se incrementa en una unidad si es impar.

2.2 Incertidumbre de medidas directas

En la práctica de corriente continua debemos indicar las incertidumbres de las mediciones realizadas. Como el polímetro utilizado es un aparato digital, consideraremos que una estimación de la incertidumbre sobre el valor real será la resolución (Δx) del mismo. Por lo tanto, tomaremos una unidad de la última cifra que muestre el aparato como $s_B(x)$.

Como en estas medidas no existe otro tipo de incertidumbre a la que podamos aplicar un tratamiento estadístico, consideraremos $s_B(x)$ la incertidumbre final de la medida.

2.3 Múltiples medidas directas

Si realizamos una serie de medidas directas, la desviación típica de la media ($s_A(\bar{x})$) representa la incertidumbre de cualquier medida realizada con el mismo instrumento bajo las mismas condiciones. Con ambos datos podemos calcular la incertidumbre combinada:

$$s_C(\bar{x}) = \sqrt{[s_A(\bar{x})]^2 + [s_B(x)]^2} \quad (1)$$

2.4 Regresión lineal simple

Para ajustar los una serie de datos que parezcan seguir una relación lineal podemos utilizar el método de **ajuste por mínimos cuadrados**. Al ser *lineal*, podemos ajustarla por una recta general de la forma $y = \alpha + \beta x$. El problema a resolver es conseguir la mejor aproximación a , b de los parámetros α , β y sus incertidumbres utilizando nuestra serie de parámetros $\{x_i, y_i\}$.

Para ello minimizaremos la suma de los productos del peso estadístico de cada punto, w_i ,

por el cuadrado de la desviación de los datos, $[y_i - (a + bx_i)]^2$. Por lo tanto, las derivadas parciales respecto a a y b deben de ser 0.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n w_i [y_i - (a + bx_i)]^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0, \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \quad (3)$$

De aquí resultan dos posibles casos:

1. Si las incertidumbres de x_i no son despreciables respecto a las de y_i . Obtenemos la siguiente ecuación: $\omega_i = \frac{1}{s^2(y_i) + b^2 s^2(x_i)}$, que excede el nivel de este curso.
2. Si por el contrario podemos despreciar las incertidumbres de x_i respecto a y_i , podemos simplificar la ecuación anterior a $\omega_i = [s(y_i)]^{-2}$.

En nuestro caso, tanto en la estimación de una resistencia mediante la ley de Ohm como en el circuito en serie se pueden despreciar las incertidumbres. En ambos representaremos intensidad (I) frente a voltaje (V). La incertidumbre de la intensidad es del orden de 10^{-7} , mientras que la del voltaje es del orden de 10^{-2} , por lo que podremos aplicar el segundo método.

Además, podemos considerar que las incertidumbres de y_i permanecen constantes entre las diferentes medidas, por lo que también lo hará el peso estadístico $w = cte$. Podemos sustituir en la fórmula 2 y derivar respecto a a y b para obtener:

$$\chi^2 = w \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2$$

$$an + b \sum_i x_i = \sum_i y_i \quad \sum_i x_i + b \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i \quad (4)$$

Finalmente, conseguimos las expresiones matemáticas de a y b en base a la serie de medidas $\{x_i, y_i\}$:

$$a = \frac{(\sum_i y_i)(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)(\sum_i x_i y_i)}{n(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)^2} \quad (5)$$

$$b = \frac{n(\sum_i x_i y_i) - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)^2} \quad (6)$$

Además de los coeficientes para ajustar la recta, también podemos obtener otras magnitudes de interés sobre nuestra muestra:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - a - bx_i)^2}{1}} \quad (7)$$

Figura 1: Desviación típica del ajuste para la muestra

$$s(a) = s \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)^2}} \quad s(b) = s \sqrt{\frac{n}{n(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)^2}} \quad (8)$$

Figura 2: Incertidumbres de los parámetros a y b

$$r = \frac{n(\sum_i x_i y_i) - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{\sqrt{[n(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)^2][n(\sum_i y_i^2) - (\sum_i y_i)^2]}} \quad (9)$$

Figura 3: Coeficiente de regresión lineal

2.5 Propagación de incertidumbres

Hay que hayar la incertidumbre correcta para aquellas medidas que sean indirectas (no se miden experimentalmente, si no que se aplican fórmulas a mediciones experimentales). Para ello empleamos el método de propagación de incertidumbres, que nos da la desviación estándar combinada:

$$s(y) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 s^2(x_i)} \quad (10)$$

Las magnitudes x_i son aquellas medidas experimentalmente de las que depende la magnitud indirecta y . Todas las magnitudes x_i han de ser independientes entre si.

Experiencia I

Corriente Continua

1 Objetivos

- Comprobar que el código de colores de las resistencias se corresponde con su valor real.
- Verificar el cumplimiento de la ley de Ohm ($V = I \cdot R$) en un circuito simple.
- Verificar las leyes de asociación de resistencias (ley de Kirchhoff) en circuitos en serie, paralelo y mixto.
- Perfeccionar el manejo del polímetro y demás utensilios del laboratorio.

2 Resultados

2.1 Medida de resistencias

El material de la práctica incluye cuatro resistencias. Para conocer sus valores utilizaremos dos métodos distintos, uno teórico y uno experimental, y luego contrastaremos los resultados.

2.1.1 Código de colores

Las resistencias tienen cuatro bandas de colores que indican su **valor nominal**. Estos colores se rigen por el siguiente código de resistencias estándar para cuatro bandas.

Color	1º	2º	Multiplicador	Tolerancia
Negro	0	0	1Ω	-
Marrón	1	1	10Ω	±1%
Rojo	2	2	100Ω	±2%
Naranja	3	3	1kΩ	-
Amarillo	4	4	10kΩ	-
Verde	5	5	100kΩ	±0,5%
Azul	6	6	1MΩ	±0,25%
Violeta	7	7	10MΩ	±0,1%
Gris	8	8	100MΩ	±0,05%
Blanco	9	9	1GΩ	-
Dorado	-	-	0,1Ω	±5%
Plateado	-	-	0,01Ω	±10%

Figura 4: Código de colores para resistencias

En base a esta tabla podemos calcular el valor teórico de la resistencia y su indeterminación (La tolerancia por el valor nominal). La primera banda indicará la primera cifra (A), la segunda banda será la segunda cifra (B), y la tercera banda la potencia de diez a la que está elevado ($C = 10^n$). Por lo tanto, el número resultante será de la forma $AB \cdot C$. La última banda representa la tolerancia de acuerdo a la tabla anterior. Así tenemos los siguientes resultados, ordenados de menor a mayor.





Resistencia	Color	V. Nominal (Ω)	Tolerancia (%)	s(R) (Ω)
R_1		180000	5	9000
R_2		220000	5	11000
R_3		390000	5	19500
R_4		1000000	5	50000

Tabla 1: Medida del valor nominal de las resistencias

2.1.2 Medida directa

Ahora utilizaremos el polímetro para determinar el valor experimental de cada resistencia y comprobar si se corresponde al valor teórico. Configuramos el polímetro para la medición de resistencias, y obtenemos los siguientes resultados:

Resistencia	Lectura (Ω)	Resolución (Ω)	$R \pm s(R)$ (Ω)
R_1	175500	100	175500 ± 100
R_2	216000	1000	216000 ± 1000
R_3	394000	1000	394000 ± 1000
R_4	1006000	1000	1006000 ± 1000

Tabla 2: Medida del valor experimental de las resistencias

Podemos observar que los resultados experimentales entran dentro del umbral de confianza del 5% de los obtenidos teóricamente, por lo que asumiremos que son correctos.

2.2 Ley de Ohm

2.2.1 Explicación teórica

Si tomamos un circuito eléctrico de corriente continua, podemos derivar la siguiente relación entre la diferencia de potencial del circuito (V), la intensidad que circula por él (I) y la resistencia eléctrica del material (R). A esta relación la llamamos **Ley de Ohm**.

$$V = I \cdot R \quad (11)$$

Siguiendo el sistema internacional (SI), V se expresa en Voltios (V), I en Amperios (A) y R en Ohmios (Ω).

2.2.2 Estimación indirecta

Ahora comprobaremos experimentalmente el cumplimiento de la Ley de Ohm. Para ello construiremos un circuito simple, utilizando una fuente de corriente continua y una resistencia (R_1 : $180\text{k}\Omega$). Lo dispondremos de la siguiente manera:

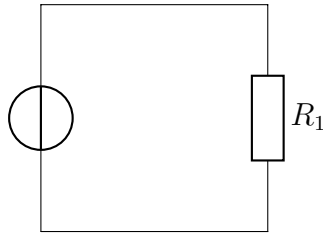


Figura 5: Circuito simple

Colocaremos el polímetro en dos posiciones: Para medir la intensidad, en serie; para medir el potencial, en paralelo alrededor de la resistencia. Podemos verlo en el diagrama mostrado a continuación.

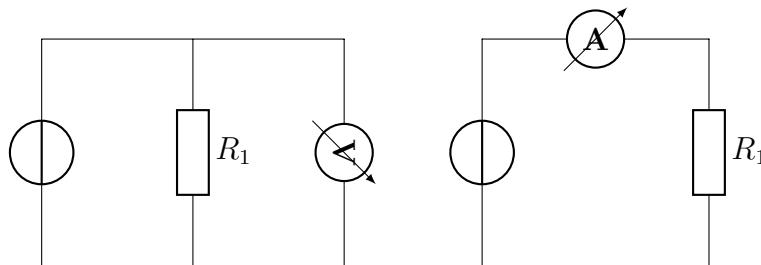


Figura 6: Medición de potenciales y intensidades

Ahora configuramos la fuente de corriente continua para un voltaje V_1 , y medimos con el polímetro primero el voltaje (Porque la medida de la fuente no siempre es fiable) y luego

la intensidad asociada a ese voltaje, I_1 . Realizamos sucesivas mediciones aumentando progresivamente el voltaje, y obtendremos unos datos, por ejemplo:

Medida	$V \pm s(V)$ (V)	$I \pm s(I)$ (I)
1	$1,184 \pm 0,001$	$6,7\text{E-}06 \pm 1\text{E-}07$
2	$2,11 \pm 0,01$	$1,20\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$

Tabla 3: Ejemplo de las mediciones de voltaje e intensidad

Sim embargo, nuestro objetivo es comprobar si se cumple la Ley de Ohm, y para eso debemos de calcular el valor de las resistencias de manera indirecta. Para eso utilizaremos la ecuación 11 y despejaremos para R .

$$R = \frac{V}{I}$$

Ahora debemos de calcular la incertidumbre de R , $s(R)$. Para ello utilizamos el método de propagación de incertidumbres descrito en la sección 2.5, y utilizaremos la ecuación 10. Tomaremos V como x_1 , I como x_2 y R como y .

$$\begin{aligned}
 s(R) &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)^2 s^2(V) + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 s^2(I)} & \frac{\partial R}{\partial V} &= \frac{1}{I} & \frac{\partial R}{\partial I} &= -\frac{V}{I^2} \\
 s(R) &= \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 s^2(V) + \left(-\frac{V}{I^2}\right)^2 s^2(I)} & & & & (12)
 \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula anterior para calcular las incertidumbres de R . Redondeamos $s(R)$ para que tenga dos cifras significativas (*Por ejemplo: De 2641 a $2,6 \cdot 10^3$*) y ajustamos R para que su última cifra significativa coincida con la posición decimal de la última cifra significativa de $s(R)$. (*Por ejemplo: con $s(R) = 2,6 \cdot 10^3$, R se redondearía a las centenas (10^2)*). Utilizamos las técnicas de redondeo del apartado 2.1.

Medida	$V \pm s(V)$ (V)	$I \pm s(I)$ (I)	$R \pm s(R)$ (Ω)
1	$1,184 \pm 0,001$	$6,7\text{E-}06 \pm 1\text{E-}07$	$1,767\text{E+}05 \pm 2,6\text{E+}03$
2	$2,11 \pm 0,01$	$1,20\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$	$1,758\text{E+}05 \pm 1,7\text{E+}03$
3	$3,04 \pm 0,01$	$1,72\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$	$1,767\text{E+}05 \pm 1,2\text{E+}03$
4	$4,06 \pm 0,01$	$2,30\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$	$1,7652\text{E+}05 \pm 8,8\text{E+}02$
5	$5,04 \pm 0,01$	$2,86\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$	$1,7622\text{E+}05 \pm 7,1\text{E+}02$
6	$6,08 \pm 0,01$	$3,45\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$	$1,7623\text{E+}05 \pm 5,9\text{E+}02$
7	$7,10 \pm 0,01$	$4,03\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$	$1,7618\text{E+}05 \pm 5,0\text{E+}02$
8	$8,10 \pm 0,01$	$4,60\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$	$1,7609\text{E+}05 \pm 4,4\text{E+}02$
9	$9,16 \pm 0,01$	$5,21\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$	$1,7582\text{E+}05 \pm 3,9\text{E+}02$
10	$10,14 \pm 0,01$	$5,76\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$	$1,7604\text{E+}05 \pm 3,5\text{E+}02$

Tabla 4: Potenciales e intensidades de un circuito simple con la resistencia R_1

Podemos observar que el valor de R es prácticamente constante para cualquier combinación de voltajes e intensidades que escojamos. Además, se adecua mucho al valor experimental que obtuvimos en el apartado 2.1.2 ($1,755 \cdot 10^5 \pm 10^2 \Omega$), por lo que podemos concluir que se cumple la **Ley de Ohm**.

2.2.3 Representación gráfica de V frente a I

Hagamos ahora una representación gráfica de los valores del potencial (V) frente a los de la intensidad (I). Para hacer la gráfica utilizaremos el paquete `matplotlib` y para cargar los datos desde un `.csv` en el que tabulamos los datos (que también usamos para generar las tablas en `LATEX`) añadiremos `pandas` (una extensión de `numpy`).

```
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

d = pd.read_csv(name + ".csv", sep=';', decimal=',')
x = d["i"] ; y = d["v"]
n = d.shape[0]

plt.scatter(x * (10**6), y)
plt.xlabel('I ($\mu$A)')
plt.ylabel('V(V)', rotation=0, labelpad=20)
```

Vamos a crear una gráfica *scatter* (de dispersión) para no unir los puntos de manera automática, ya que los valores medidos en el laboratorio son discretos. También cambiaremos la escala del eje x a μA para una leyenda más compacta. La exportamos a `.pgf`

para poder cargarla en L^AT_EX sin pérdida de calidad, y la representamos a continuación:

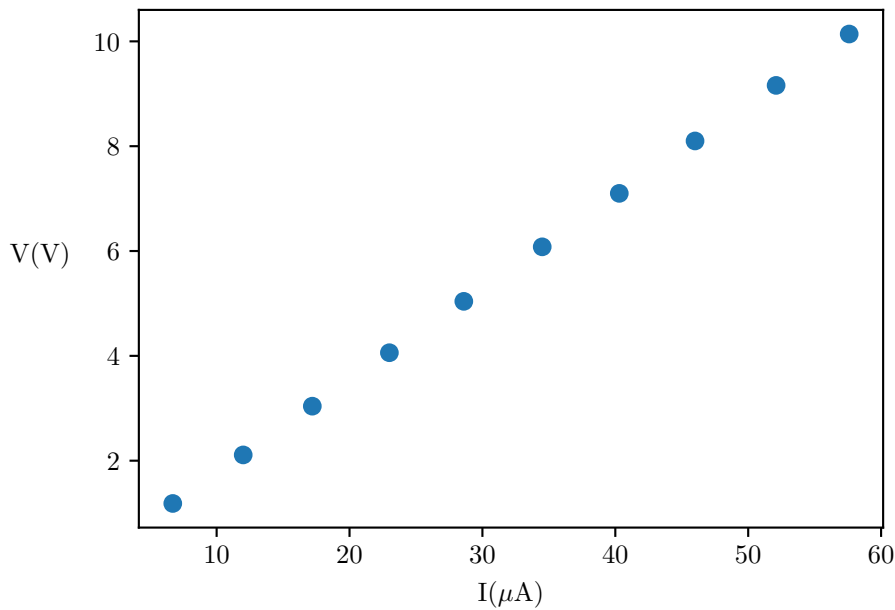


Figura 7: Voltaje (V) frente a intensidad (I)

2.2.4 Ajuste por mínimos cuadrados

Como podemos observar, parece que existe una relación lineal entre las dos magnitudes. Procedemos entonces a hacer un ajuste de regresión lineal por mínimos cuadrados. Como explicamos en la sección 2.4, tenemos que calcular los coeficientes a y b de la recta $a + bx$. Para ello utilizamos las ecuaciones 5 y 6. Como vemos, hay que calcular los siguientes términos:

$$\sum_i x_i \quad \sum_i y_i \quad \sum_i x_i y_i \quad \sum_i x_i^2$$

Para ello, utilizaremos la tabla en .csv en la que tenemos los datos, y la cargaremos en python. Ahora definiremos una función `reg_lin()` que calcule estas sumas a partir de las columnas de nuestra tabla y las almacene en variables separadas. Posteriormente, aplicaremos las fórmulas 5 y 6 y calcularemos así los términos a y b .

```
def reg_lin(x, y, n):
    sx = x.sum()
    sy = y.sum()
    sxy = (x*y).sum()
    sx2 = (x**2).sum()

    a = (sy*sx2 - sx*sxy) / (n*sx2 - sx**2)
```

```

b = (n*sxy - sx*sy) / (n*sx2 - sx**2)

sy2 = (y**2).sum()
r = (n*sxy - sx*sy) / (((n*sx2 - sx**2)*(n*sy2 - sy**2))**0.5)

return a, b, r

a, b, r = reg_lin(x, y, n)

```

El comando `.sum()` de la tabla de cargamos en `pandas` simplemente suma todos los términos de la columna que especificamos. En este caso, tomamos la columna `x` como la intensidad (I) y la columna `y` como el potencial (V) de la tabla 4, que cargamos directamente en `python`. También podemos realizar operaciones con las columnas antes de sumar sus términos, como multiplicar una por otra o elevar sus términos al cuadrado. Así podemos crear los sumatorios necesarios para resolver las fórmulas de a y b . Obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
\sum_i x_i &= 3,18 \cdot 10^{-4} & \sum_i y_i &= 56,0 & \sum_i x_i y_i &= 2,25 \cdot 10^{-3} & \sum_i x_i^2 &= 1,28 \cdot 10^{-8} \\
a &= 9,19 \cdot 10^{-3} & b &= 1,75 \cdot 10^5
\end{aligned}$$

Podemos utilizar ahora estos valores para crear la gráfica con la recta que mejor se ajuste a los datos, creando una función `plot()` que permita crear gráficas con y sin regresión lineal:

```

def plot(x, y, n, reg, cc, cr):
    if reg:
        a, b, r = reg_lin(x, y, n)
        xr = np.linspace(min(x) * (10**6), max(x) * (10**6), 10)
        yr = (a + b*xr) / (10**6)
        plt.plot(xr, yr, color=cr, zorder=1)
        plt.scatter(x * (10**6), y, color=cc, zorder=2)

plot(x, y, n, True, "color1", "color2")

```

Y, ahora sí, podemos ver nuestra gráfica completa.

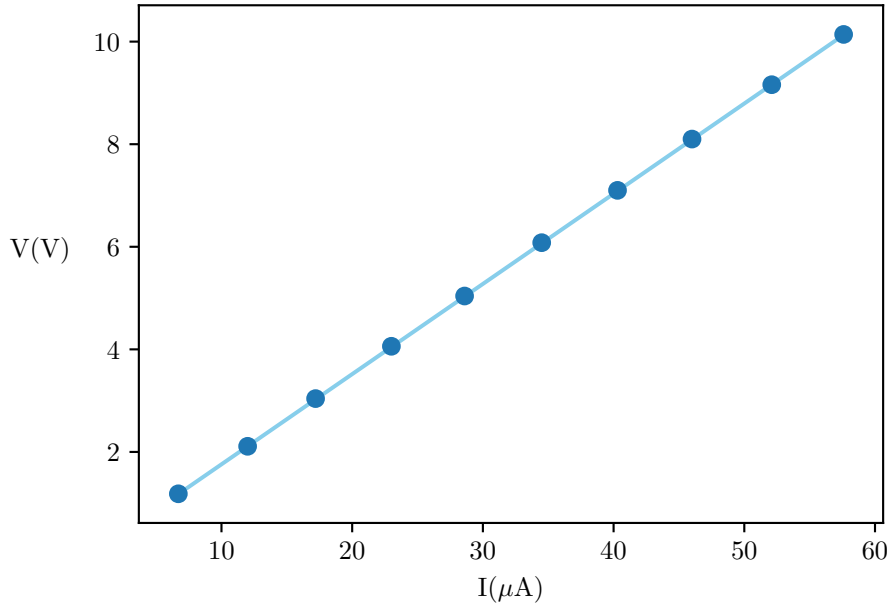


Figura 8: Voltaje (V) frente a intensidad (I) con regresión lineal

A simple vista se puede observar que el ajuste es razonablemente preciso. Sin embargo, podemos obtener una medida fiable de cuán preciso es. Para ello utilizamos el coeficiente de regresión lineal (Ecuación 9). En este caso, obtenemos que es $r = 0.999997$, un ajuste con cinco nueves, lo cual muestra una precisión notable.

Una propiedad interesante de esta gráfica se puede derivar de la Ley de Ohm 11. Si despejamos R en función de I y V , obtenemos $R = \frac{V}{I}$. De esto se puede deducir que la pendiente de la gráfica ($\frac{\Delta V}{\Delta I}$) será constante e igual a la resistencia. Este término no es otro que nuestra constante de regresión lineal $b = 1,75 \cdot 10^5$. Si nos fijamos, es prácticamente igual al valor experimental que obtuvimos al medir las resistencias (2) y del que conseguimos al aplicar la Ley de Ohm (4).

2.3 Circuito en Serie

La siguiente experiencia consiste en crear un circuito con tres resistencias (R_1 , R_2 y R_3) en serie con el objetivo de medir la intensidad del circuito, y el potencial total y en cada resistencia. Para ello colocaremos los componentes de la siguiente manera:

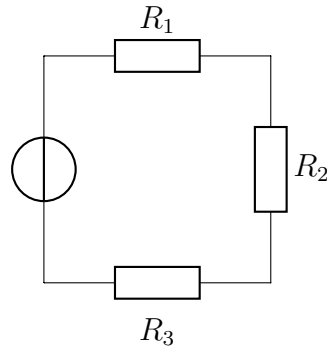


Figura 9: Circuito con tres resistencias en serie

2.3.1 Procedimiento de medición

Para medir las diferentes magnitudes, colocaremos el polímetro en serie para las intensidades y en paralelo para los voltajes.

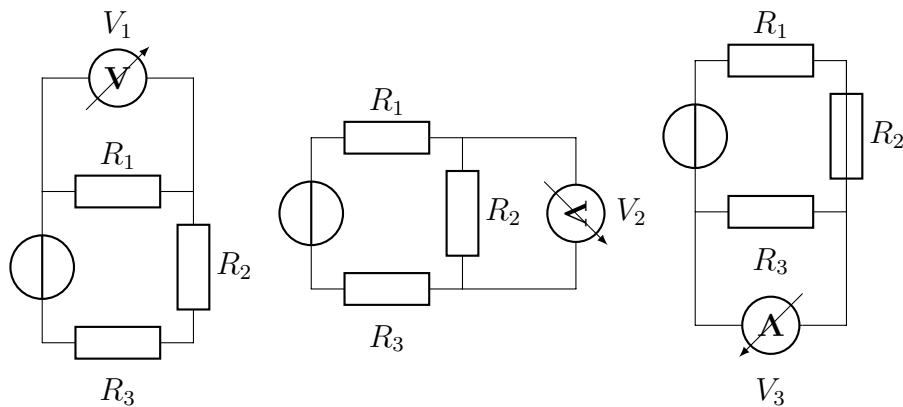


Figura 10: Medición de potenciales de R_1 , R_2 y R_3 respectivamente

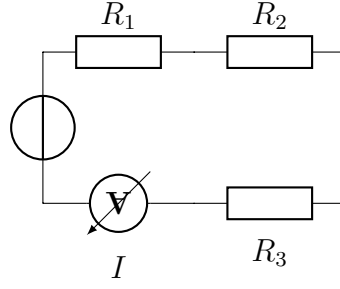


Figura 11: Medición de la intensidad total del circuito

2.3.2 Resistencia equivalente

Primero debemos de averiguar cual es la resistencia equivalente de todo el circuito. Para ello utilizamos la siguiente fórmula, que se aplica a resistencias en serie:

$$R_S = \sum_{k=1}^N R_k \quad R = R_1 + R_2 + R_3 \quad (13)$$

De aquí podemos deducir que la diferencia de potencial para cada resistencia será distinta, y que su suma ha de resultar en la total del circuito, y que la intensidad será la misma para todas las resistencias (**Leyes de Kirchhoff**) En este caso:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^N V_k & V &= V_1 + V_2 + V_3 \\ I &= I_k & I &= I_1 = I_2 = I_3 \end{aligned} \quad (14)$$

Por lo tanto, calculamos la resistencia equivalente del circuito aplicando la fórmula 13:

$$\begin{aligned} R_S &= 175500 + 216000 + 394000 = 7,855 \cdot 10^5 \Omega \\ s(R_S) &= \pm(100 + 1000 + 1000) = \pm 2100 \Omega \\ R_S &= 7,855 \cdot 10^5 \pm 2,1 \cdot 10^3 \Omega \end{aligned}$$

Si medimos experimentalmente el valor de la resistencia total del circuito obtenemos un valor $R_E = 7,89 \cdot 10^5 \pm 10^3$. No entra por completo dentro de nuestro intervalo de confianza ($R_T + 2,1 \cdot 10^3 = 7,876 \cdot 10^5$ y $R_E - 10^3 = 7,88 \cdot 10^5$), pero queda razonablemente cerca, difieren en una cantidad del orden de 10^2 , por lo que podemos considerar que se debe a condiciones del experimento (Humedad, temperatura...).

2.3.3 Medición experimental

Siguiendo el procedimiento anterior, realizamos una serie de medidas en el circuito 9. Iremos variando el potencial (V) de la fuente y anotando los cambios del resto de mag-

nitudes. Como especificamos en el apartado 2.2 tomaremos la resolución de la medida como su incertidumbre.

Medida	$V \text{ (V)} \pm s(V)$	$V_1 \text{ (V)} \pm s(V_1)$	$V_2 \text{ (V)} \pm s(V_2)$	$V_3 \text{ (V)} \pm s(V_3)$	$I \text{ (A)} \pm s(I)$
1	$1,063 \pm 0,001$	$0,233 \pm 0,001$	$0,289 \pm 0,001$	$0,523 \pm 0,001$	$1,3\text{E-}06 \pm 1\text{E-}07$
2	$2,05 \pm 0,01$	$0,451 \pm 0,001$	$0,558 \pm 0,001$	$1,011 \pm 0,001$	$2,5\text{E-}06 \pm 1\text{E-}07$
3	$3,04 \pm 0,01$	$0,671 \pm 0,001$	$0,830 \pm 0,001$	$1,502 \pm 0,001$	$3,8\text{E-}06 \pm 1\text{E-}07$
4	$4,06 \pm 0,01$	$0,894 \pm 0,001$	$1,106 \pm 0,001$	$1,990 \pm 0,001$	$5,1\text{E-}06 \pm 1\text{E-}07$
5	$5,04 \pm 0,01$	$1,110 \pm 0,001$	$1,374 \pm 0,001$	$2,47 \pm 0,01$	$6,3\text{E-}06 \pm 1\text{E-}07$
6	$6,12 \pm 0,01$	$1,347 \pm 0,001$	$1,667 \pm 0,001$	$3,00 \pm 0,01$	$7,7\text{E-}06 \pm 1\text{E-}07$
7	$7,08 \pm 0,01$	$1,558 \pm 0,001$	$1,928 \pm 0,001$	$3,47 \pm 0,01$	$8,9\text{E-}06 \pm 1\text{E-}07$
8	$8,07 \pm 0,01$	$1,777 \pm 0,001$	$2,19 \pm 0,01$	$3,96 \pm 0,01$	$1,02\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$
9	$9,00 \pm 0,01$	$1,970 \pm 0,001$	$2,44 \pm 0,01$	$4,42 \pm 0,01$	$1,13\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$
10	$10,08 \pm 0,01$	$2,21 \pm 0,01$	$2,74 \pm 0,01$	$4,95 \pm 0,01$	$1,27\text{E-}05 \pm 1\text{E-}07$

Tabla 5: Potenciales e intensidades del circuito en serie

2.3.4 Representación gráfica de V frente a I

Utilizaremos el mismo programa de `python` que en el apartado anterior para representar nuestro voltaje (V) frente a la intensidad (I).

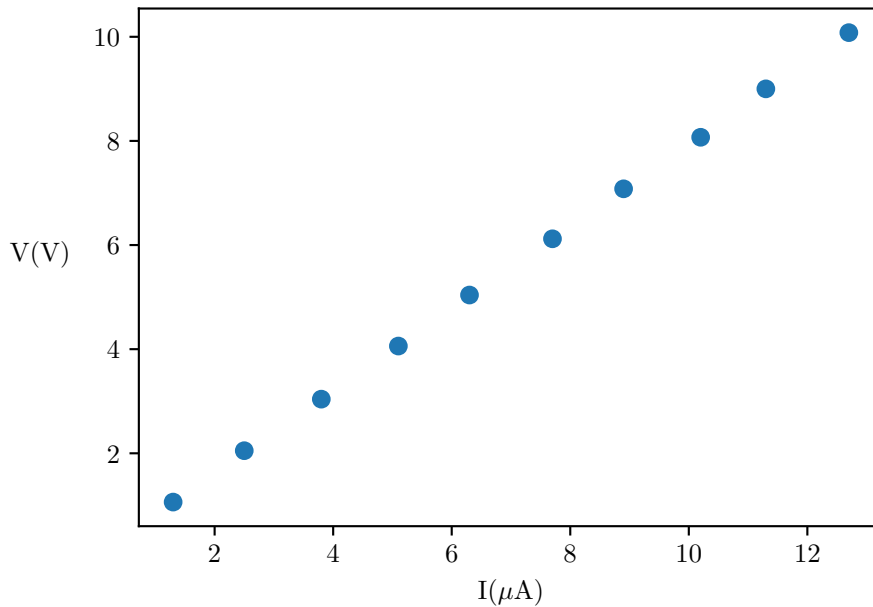


Figura 12: Voltaje (V) frente a intensidad (I)

También podemos comparar la diferencia entre los potenciales de las distintas resistencias en serie añadiendo las gráficas de V_1 , V_2 y V_3 frente a I .

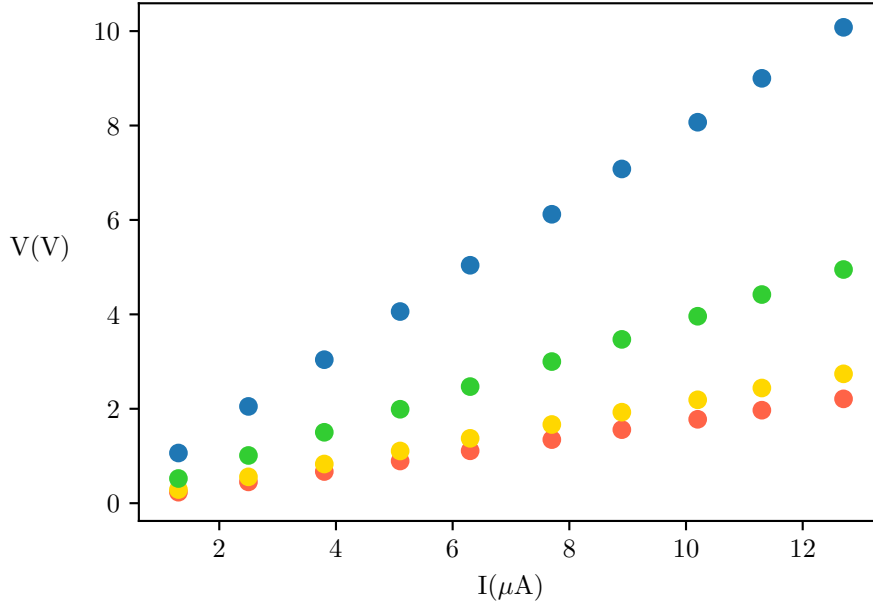


Figura 13: Voltajes (V , V_1 , V_2 , V_3) frente a intensidad (I)

2.3.5 Ajuste por mínimos cuadrados

Vuelve a aparecer lo que parece una relación lineal en la gráfica, por lo que pasaremos a hacer un ajuste por mínimos cuadrados. Como explicamos en el apartado inicial 2.4 y cómo ya aplicamos en la sección anterior, 2.2.4, calcularemos los parámetros a y b utilizando las ecuaciones 5 y 6, para ello calculando diversos sumatorios utilizando el programa de `python` que describimos, cargando la tabla en `.csv` con nuestros datos y aplicando las fórmulas de los sumatorias, con lo que obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \sum_i x_i &= 6,98 \cdot 10^{-5} & \sum_i y_i &= 55,6 & \sum_i x_i y_i &= 4,93 \cdot 10^{-4} & \sum_i x_i^2 &= 6,20 \cdot 10^{-10} \\ a &= 4,71 \cdot 10^{-2} & b &= 790000 \end{aligned}$$

El proceso sería el mismo para obtener los datos de las rectas de V_1 , V_2 y V_3 . Finalmente podríamos dibujar las gráficas, ahora con una recta creada por regresión lineal que se ajusta a los datos que obtuvimos.

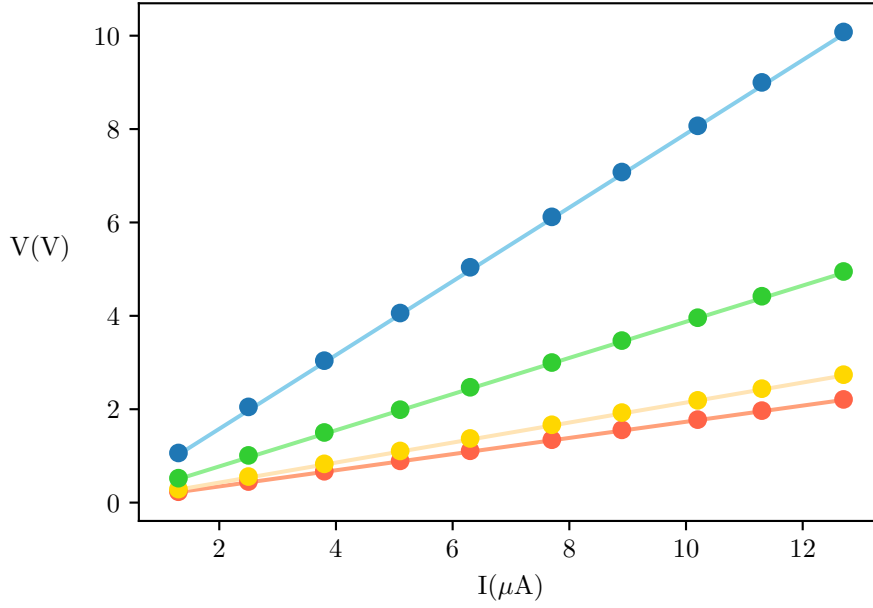


Figura 14: Voltajes (V , V_1 , V_2 , V_3) frente a intensidad (I) con regresión lineal

En cuanto a los coeficientes de regresión lineal, calculados con la fórmula 9, de nuevo obtenemos resultados satisfactorios: $r = 0,99997$, $r_1 = 0,99998$, $r_2 = 0,99997$ y $r_3 = 0,99997$, un ajuste de cuatro nueves en ambos casos.

También podemos comprobar si el valor de la resistencia equivalente calculado en 2.3.2 ($R_S = 7,855 \cdot 10^5$) se corresponde con la pendiente de la gráfica ($b = 7,90 \cdot 10^5$), y podemos ver que se adecuan. Pasa lo mismo si tomamos cualquiera de las otras rectas con respecto a V_1 , V_2 y V_3 , cada una tiene una pendiente similar a la resistencia de ese tramo. Se puede observar a simple vista viendo que la recta roja corresponde a R_1 , la resistencia más pequeña, y también la que menor pendiente tiene, mientras que la recta verde es de R_3 , la más grande y la de mayor pendiente. La recta azul tiene más pendiente que todas ya que es la suma de las tres resistencias en serie.

2.4 Circuito en Paralelo

En este apartado construiremos un circuito utilizando tres resistencias (R_1 , R_2 y R_3) colocadas en paralelo. Ahora mediremos la intensidad en cada resistencia y total, además del voltaje del circuito. Colocamos los componentes siguiendo el diagrama:

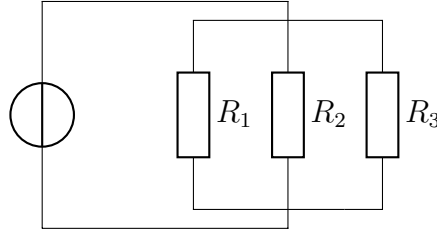


Figura 15: Circuito con tres resistencias en paralelo

2.4.1 Procedimiento de medición

Con el objetivo de medir las distintas magnitudes, conectaremos el polímetro en serie para las intensidades y en paralelo para los voltajes.

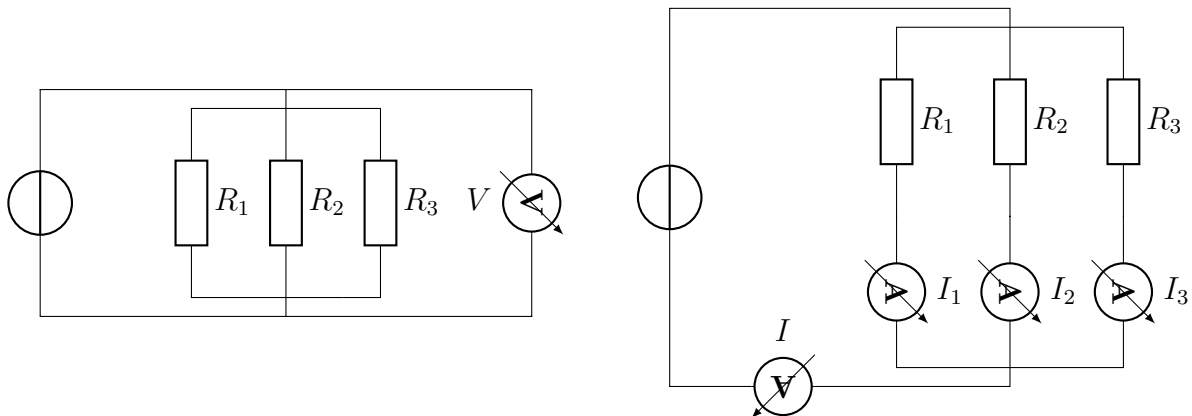


Figura 16: Medición de potencial del circuito (V) y de intensidades, total (I) y de cada resistencia (I_1 , I_2 y I_3 respectivamente)

2.4.2 Resistencia equivalente

Calculemos la resistencia equivalente al circuito aplicando la fórmula para resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R_P} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k} \quad \frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (15)$$

Además de esto sabemos que la intensidad total del circuito se distribuirá entre las tres resistencias, mientras que el potencial permanecerá constante (**Leyes de Kirchhoff**),

verificándose que:

$$I = \sum_{k=1}^N I_k \quad I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$V = V_k \quad V = V_1 = V_2 = V_3 \quad (16)$$

Con esta información podemos calcular la resistencia equivalente al circuito aplicando la fórmula 15:

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{175500} + \frac{1}{216000} + \frac{1}{394000} \quad R_P = \frac{1}{\frac{1}{175500} + \frac{1}{216000} + \frac{1}{394000}} = 7,7726 \cdot 10^4 \Omega$$

$$s(R_P) = \frac{1}{\frac{1}{\pm 100} + \frac{1}{\pm 1000} + \frac{1}{\pm 1000}} = \pm 83 \Omega \quad R_P = 7,7726 \cdot 10^4 \pm 83 \Omega$$

Si tomamos el valor de la resistencia total del circuito de manera experimental obtenemos un valor de $R_E = 7,8 \cdot 10^4 \pm 10^3$. En este caso si que entra dentro de nuestro intervalo de confianza, por lo que consideramos que el cálculo teórico es correcto.

2.4.3 Medición experimental

Utilizando el procedimiento descrito con anterioridad, realizamos una serie de mediciones en el circuito 15. Variaremos el voltaje para obtener diferentes medidas de los voltajes (V) e intensidades (I). El resultado se expone en la siguiente tabla (Por cuestiones de presentación se omitirá $\pm s(I)$ en las columnas correspondientes, ya que quedaría redundante y sólo dificultaría la lectura sin aportar información. $s(I) = s(I_1) = s(I_2) = s(I_3) = 1 \cdot 10^{-7} A$):

Medida	$V (V) \pm s(V)$	$I_1 (V)$	$I_2 (V)$	$I_3 (V)$	$I (A)$
1	$1,132 \pm 0,001$	6,40E-06	5,10E-06	2,80E-06	1,45E-05
2	$2,07 \pm 0,01$	1,17E-05	9,40E-06	5,20E-06	2,64E-05
3	$3,01 \pm 0,01$	1,70E-05	1,37E-05	7,40E-06	3,83E-05
4	$4,04 \pm 0,01$	2,29E-05	1,85E-05	1,02E-05	5,16E-05
5	$5,06 \pm 0,01$	2,88E-05	2,32E-05	1,27E-05	6,48E-05
6	$6,07 \pm 0,01$	3,45E-05	2,78E-05	1,53E-05	7,76E-05
7	$7,09 \pm 0,01$	4,03E-05	3,25E-05	1,79E-05	9,07E-05
8	$8,08 \pm 0,01$	4,59E-05	3,70E-05	2,04E-05	1,03E-04
9	$9,07 \pm 0,01$	5,15E-05	4,16E-05	2,29E-05	1,16E-04
10	$10,12 \pm 0,01$	5,75E-05	4,64E-05	2,56E-05	1,29E-04

Tabla 6: Potenciales e intensidades del circuito en paralelo

2.4.4 Representación gráfica de V frente a I

Cargamos estos datos en nuestro programa de `python` y representamos la gráfica correspondiente.

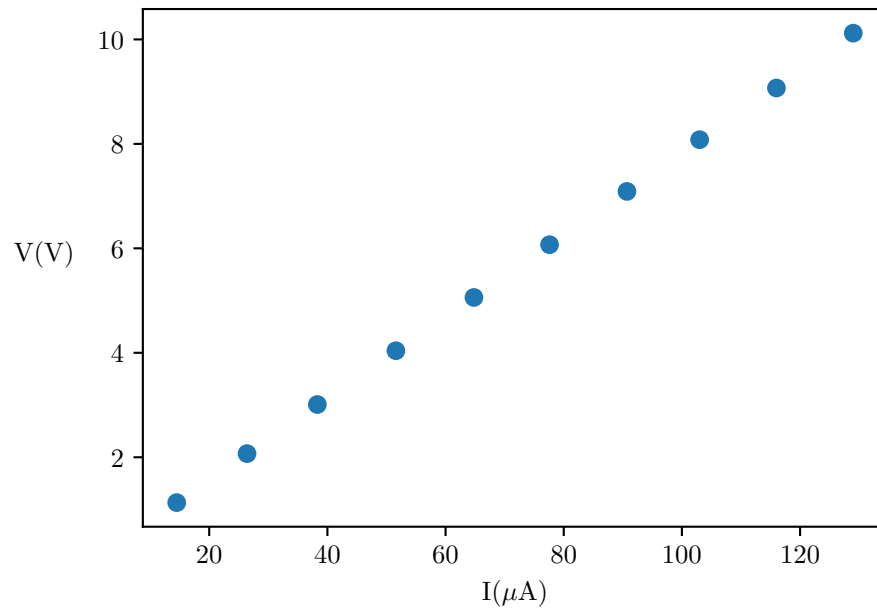


Figura 17: Voltaje (V) frente a intensidad (I)

Así mismo, también podemos comparar la diferencia de las intensidades para un potencial fijo en cada resistencia en paralelo, añadiendo a la anterior las gráficas de V frente a I_1 , I_2 e I_3 .

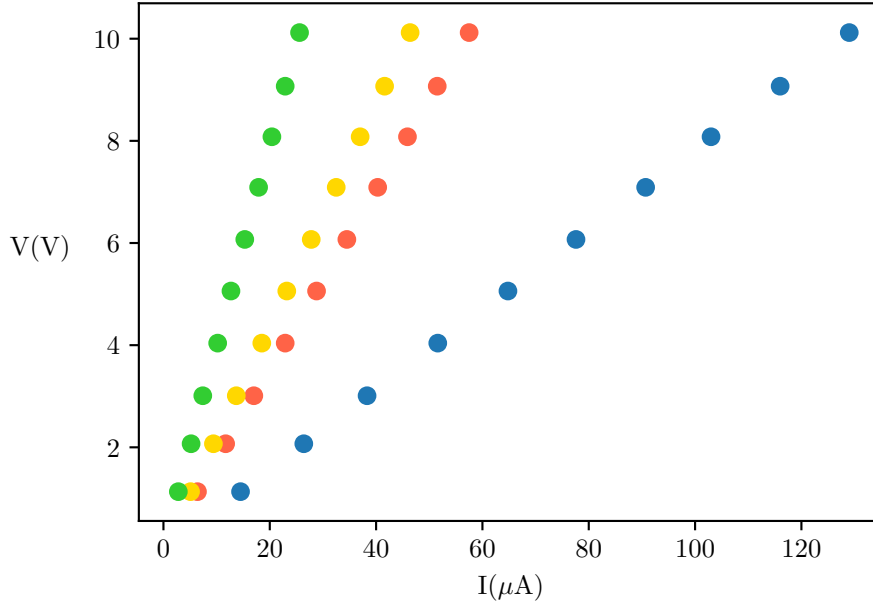


Figura 18: Voltajes (V) frente a intensidades (I , I_1 , I_2 , I_3)

2.4.5 Ajuste por mínimos cuadrados

De nuevo parece que nos encontramos ante una relación lineal de las magnitudes, por lo que aplicaremos los métodos que ya describimos (2.4) para ajustar las rectas y representarlas gráficamente. Para la intensidad total (I), los parámetros son $a = -2,84 \cdot 10^{-3}$ y $b = 78300$. El resto se pueden calcular análogamente con las fórmulas 5 y 6.

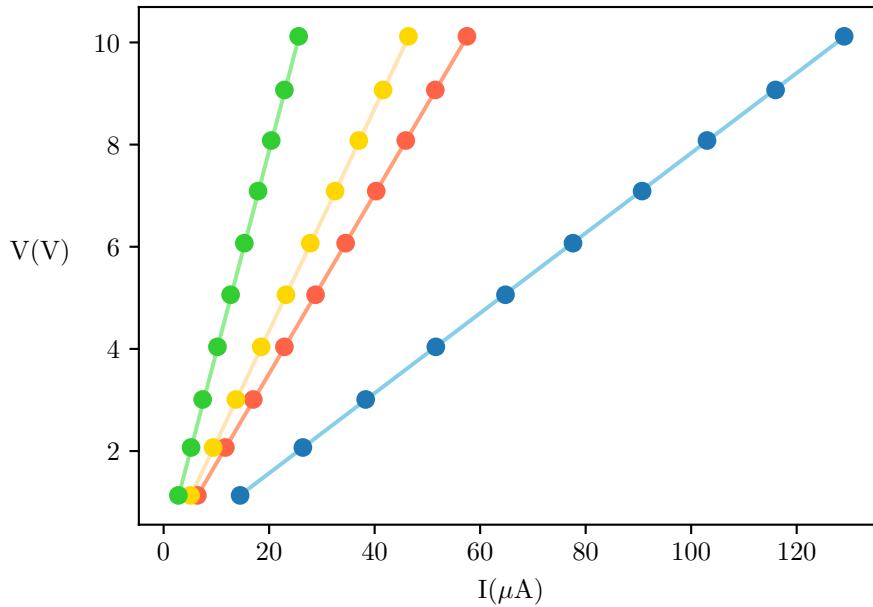


Figura 19: Voltajes (V) frente a intensidades (I , I_1 , I_2 , I_3) con regresión lineal

Calculamos los coeficientes de regresión lineal con la fórmula 9 y los resultados son adecuados: $r = 0,999992$, $r_1 = 0,999997$, $r_2 = 0,999998$ y $r_3 = 0,99997$. Excepto r_3 , los resultados tienen un ajuste excelente de cinco nueves. En el caso de r_3 son cuatro nueves, lo cual también es satisfactorio.

Comprobamos también si el valor de la resistencia equivalente calculado en 2.4.2 ($R_P = 7,7726 \cdot 10^4$) se corresponde con la pendiente de la gráfica ($b = 7,83 \cdot 10^4$), y vemos que son muy similares.

2.5 Circuito Mixto

La última práctica de corriente continua comprende la construcción de un circuito mixto utilizando las cuatro resistencias (R_1 , R_2 , R_3 y R_4). Colocaremos R_2 y R_3 en paralelo entre sí, en un grupo llamado R_{23} , y luego conectaremos en serie R_1 , R_{23} y R_4 . Podemos ver la disposición en el siguiente diagrama:

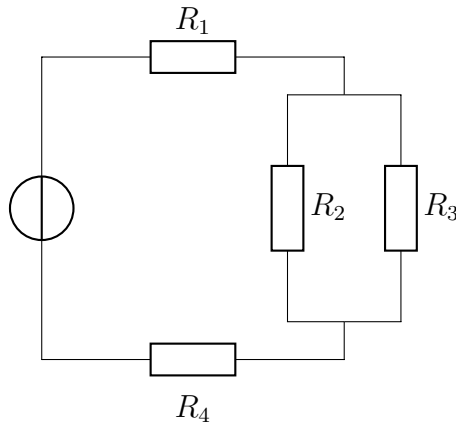


Figura 20: Circuito mixto

2.5.1 Procedimiento de medición

Para medir los diferentes valores que se piden, tenemos que utilizar ambas técnicas que aprendimos en los circuitos anteriores. Primero, trataremos a las dos resistencias R_2 y R_3 como un circuito aislado en paralelo, y así determinaremos su voltaje total (V_{23}) y cada una de sus intensidades (I_1 y I_2).

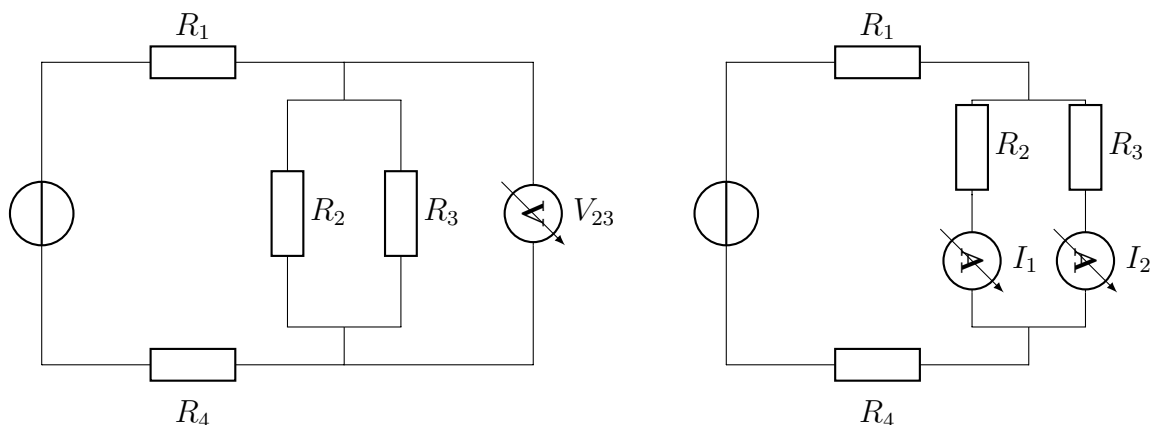


Figura 21: Medición de potencial (V_{23}) y intensidades (I_1 y I_2) de las resistencias R_2 y R_3 en paralelo dentro del circuito mixto

Ahora que tenemos esos datos, trataremos a la unión de las resistencias R_2 y R_3 como un componente más de un circuito en serie, en conjunto con las otras resistencias, R_1 y R_4 . Mediremos los voltajes de estas últimas resistencias en paralelo (V_1 y V_4). Luego tomaremos el voltaje de todo el circuito también en paralelo (V) y la intensidad del mismo, en serie (I).

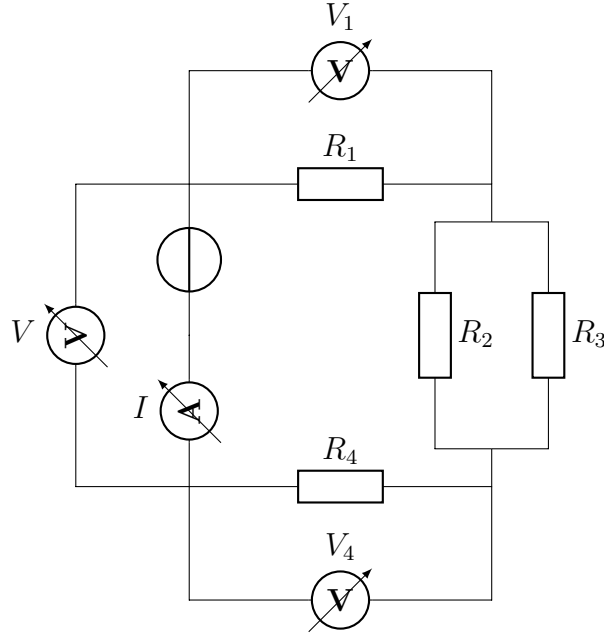


Figura 22: Medición de potenciales (V_1 y V_4) de las resistencias R_1 y R_4 en serie y del potencial (V) e intensidad (I) total del circuito mixto

2.5.2 Reistencia equivalente

Para calcular la resistencia equivalente del circuito, primero utilizaremos la ecuación 15 para calcular la de las dos resistencias en paralelo R_2 y R_3 , a la que llamaremos R_{23} . Posteriormente, aplicamos la ecuación 13 a R_1 , R_{23} y R_4 , que están en serie. Así obtenemos la reistencia total.

$$R_{23} = \frac{1}{\frac{1}{216000} + \frac{1}{394000}} = 1,395 \cdot 10^5 \Omega \quad s(R_{23}) = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}} = 500 \Omega$$

$$R = 175500 + 139500 + 1006000 = 1,3210 \cdot 10^6 \Omega \quad s(R) = 100 + 500 + 1000 = 1600 \Omega$$

$$R = 1,3210 \cdot 10^6 \pm 1,6 \cdot 10^3 \Omega \quad (17)$$

Si calculamos experimentalmente el valor de la resistencia total del circuito obtenemos $R_E = 1,324 \cdot 10^6 \pm 10^3$, lo cual entra en nuestro intervalo de confianza, así que consideraremos ambas medidas correctas.

2.5.3 Medición experimental

Construimos el circuito 20 y tomamos las medidas descritas con anterioridad. Variaremos el voltaje (V) desde la fuente de alimentación para obtener distintos valores a medir. Exponemos el resultado en la siguiente tabla dónde, como en la sección anterior, omitiremos las incertidumbres de las intensidades ($s(I)$) por ser todas iguales $s(I) = s(I_1) = s(I_2) = 1 \cdot 10^{-7}A$, con el objetivo de hacer la tabla más compacta.

Medida	$V (V) \pm s(V)$	$V_1 (V) \pm s(V_1)$	$V_{s3} (V) \pm s(V_{23})$	$V_4 (V) \pm s(V_4)$	$I_1 (V)$	$I_2 (V)$	$I (A)$
1	$1,032 \pm 0,001$	$0,1367 \pm 0,0001$	$0,1092 \pm 0,0001$	$0,769 \pm 0,001$	4,0E-07	2,0E-07	7,0E-07
2	$2,00 \pm 0,01$	$0,261 \pm 0,001$	$0,209 \pm 0,001$	$1,492 \pm 0,001$	9,0E-07	5,0E-07	1,5E-06
3	$3,04 \pm 0,01$	$0,297 \pm 0,001$	$0,317 \pm 0,001$	$2,25 \pm 0,01$	1,4E-06	7,0E-07	2,2E-06
4	$4,06 \pm 0,01$	$0,531 \pm 0,001$	$0,423 \pm 0,001$	$3,02 \pm 0,01$	1,9E-06	1,0E-06	3,0E-06
5	$5,08 \pm 0,01$	$0,664 \pm 0,001$	$0,529 \pm 0,001$	$3,78 \pm 0,01$	2,4E-06	1,3E-06	3,8E-06
6	$6,05 \pm 0,01$	$0,791 \pm 0,001$	$0,630 \pm 0,001$	$4,50 \pm 0,01$	2,9E-06	1,5E-06	4,5E-06
7	$7,10 \pm 0,01$	$0,929 \pm 0,001$	$0,793 \pm 0,001$	$5,28 \pm 0,01$	3,4E-06	1,8E-06	5,3E-06
8	$8,11 \pm 0,01$	$1,059 \pm 0,001$	$0,845 \pm 0,001$	$6,03 \pm 0,01$	3,9E-06	2,1E-06	6,1E-06
9	$9,10 \pm 0,01$	$1,189 \pm 0,001$	$0,948 \pm 0,001$	$6,77 \pm 0,01$	4,4E-06	2,4E-06	6,8E-06
10	$10,12 \pm 0,01$	$1,323 \pm 0,001$	$1,054 \pm 0,001$	$7,53 \pm 0,01$	4,9E-06	2,6E-06	7,6E-06

Tabla 7: Potenciales e intensidades del circuito mixto

2.5.4 Representación gráfica de V frente a I

Cargamos los datos de la tabla anterior en el programa de `python` para obtener la representación de la gráfica del voltaje total (V) frente a la intensidad total (I).

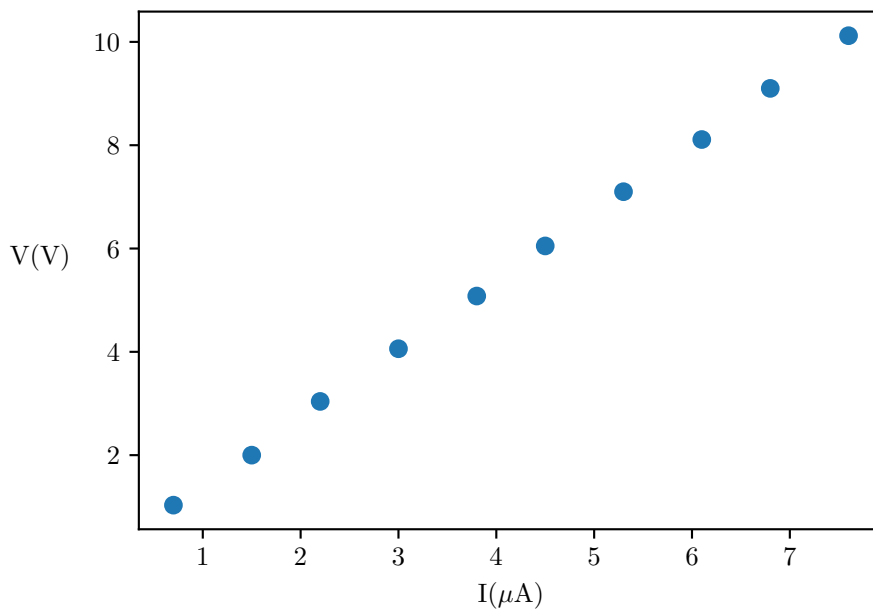


Figura 23: Voltaje (V) frente a intensidad (I)

También podemos probar a hacer gráficas más interesantes. Aquí no hay una relación tan clara como en los anteriores ejemplos, ya que existen varias magnitudes tanto en el eje x (I) como en el eje y (V). Podríamos probar a representar los diferentes valores de V (V , V_1 , V_{23} y V_4) frente a la intensidad total (I), como en la primera gráfica. También podemos hacer lo contrario, y representar el potencial total (V) frente a distintas intensidades (I , I_1 e I_2), como en la segunda gráfica. Como curiosidad más que como experimento, podemos mezclar ambas gráficas, y representar todas las combinaciones entre V , V_1 , V_{23} , V_4 (*color*) y I , I_1 , I_2 (*luminosidad*).

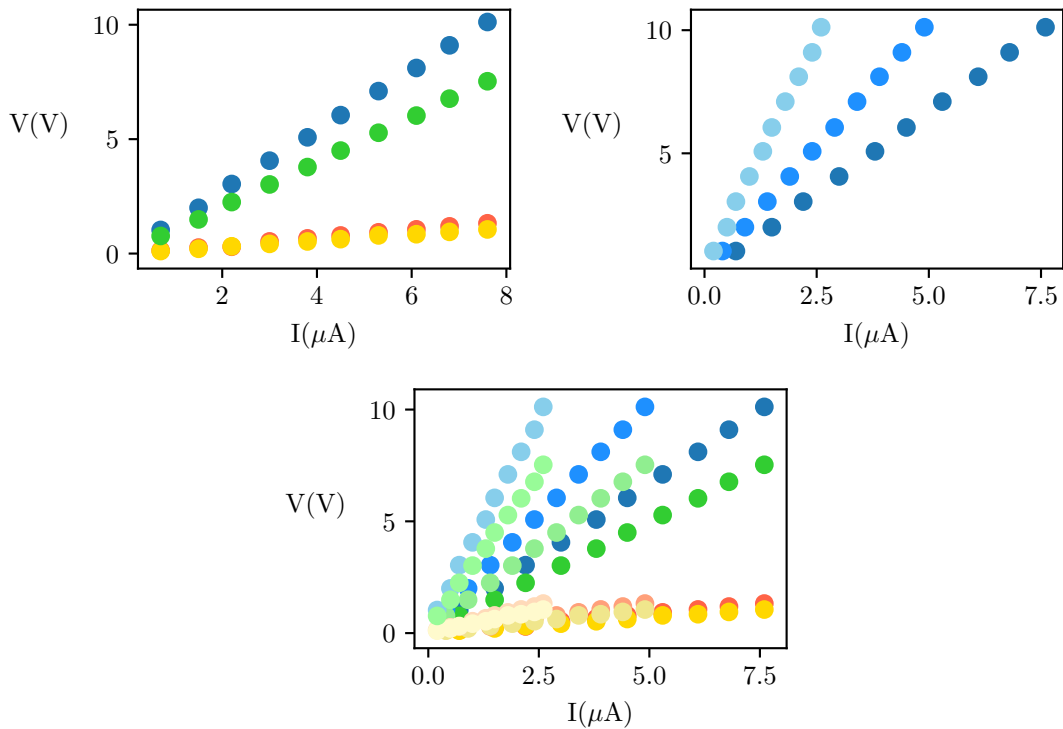


Figura 24: Voltajes (V , V_1 , V_{23} , V_4) frente a intensidades (I , I_1 , I_2)

2.5.5 Ajuste por mínimos cuadrados

Procedemos a aplicar el método de regresión lineal con el ajuste por mínimos cuadrados (2.4). Ajustamos las rectas y las representamos gráficamente. Para la gráfica 23 (voltaje frente intensidad total) los parámetros son $a = 8,47 \cdot 10^{-2}$ y $b = 1,32 \cdot 10^6$. El resto se pueden calcular análogamente con las fórmulas 5 y 6. Para este ajuste obtenemos un coeficiente de regresión lineal utilizando la fórmula 9 de $r = 0,99993$ que, pese a ser el más bajo de las prácticas realizadas sigue teniendo cuatro nueves, lo cual hace que sea satisfactorio.

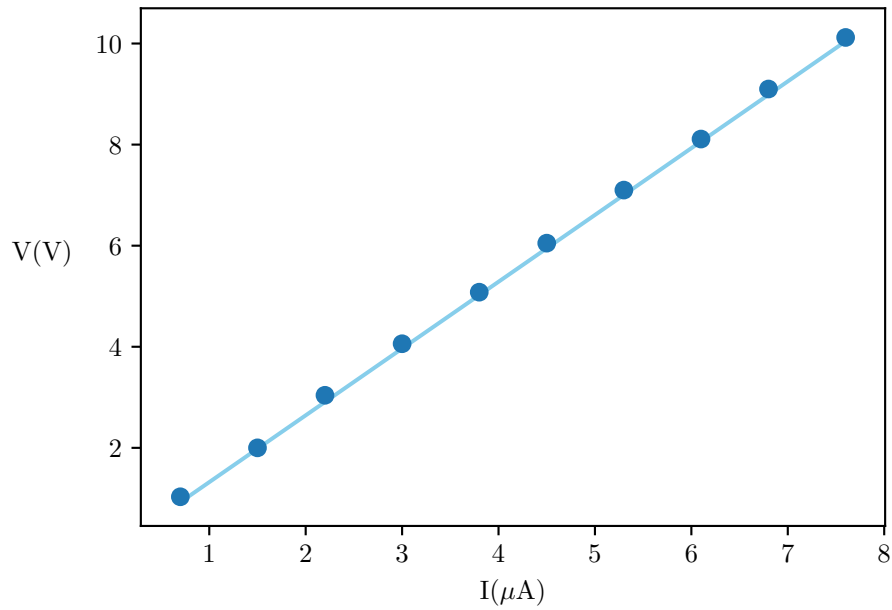


Figura 25: Voltaje (V) frente a intensidad (I) con regresión lineal

Si comprobamos el valor de la resistencia equivalente calculado en 2.5.2 ($R = 1,3210 \cdot 10^6$) y lo comparamos con la pendiente de la recta ($b = 1,32 \cdot 10^6$) vemos que son prácticamente la misma.

Podemos probar a hacer la regresión de las diferentes gráficas de la figura 24 simplemente como curiosidad, y para verificar que todos los datos siguen patrones lineales.

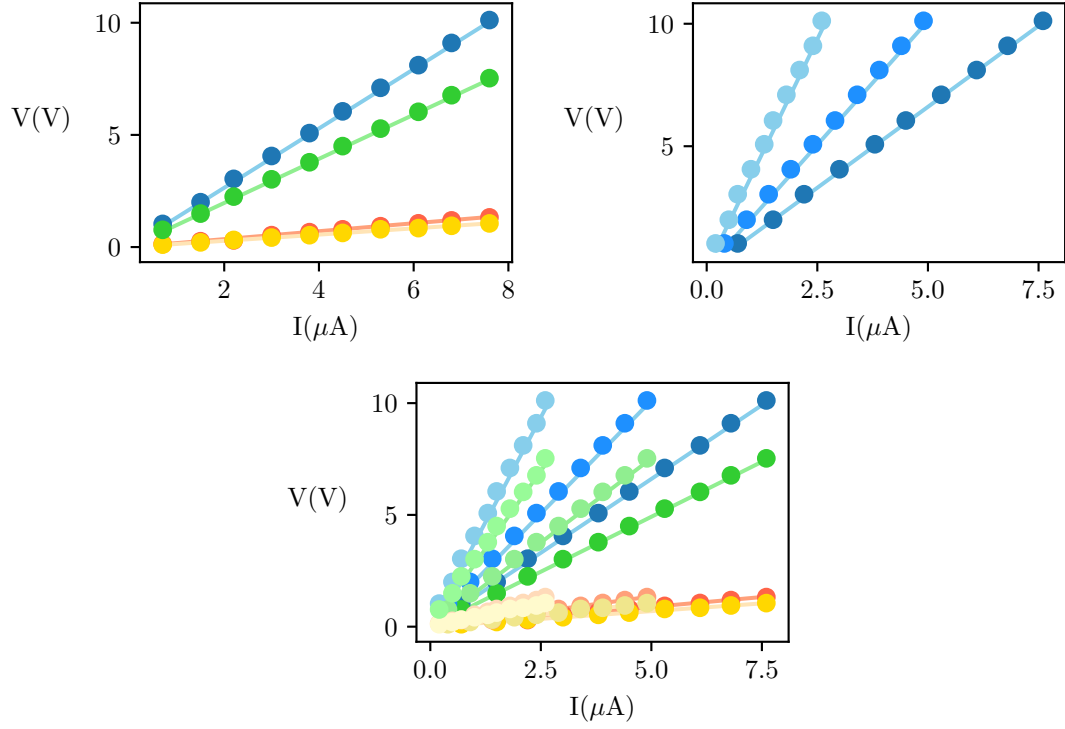


Figura 26: Voltajes (V , V_1 , V_{23} , V_4) frente a intensidades (I , I_1 , I_2) con regresión lineal

En esta última regresión nos encontramos problemas que hasta ahora no habían aparecido. Pese a que alguna de las rectas tiene coeficientes de regresión de hasta $r = 0,99998$ (V frente a I_1 y V_4 frente a I_1), otras no se encuentran tan próximas. Son varias las que sólo tienen un ajuste de dos nueves, cómo V_1 frente a I ($r = 0,997$) o V_{23} frente a I_2 ($r = 0,997$). Discutiremos esto en el apartado de conclusiones.

3 Conclusiones

3.1 Ley de Ohm

Comprobamos que los valores nominales de las resistencias (1) y las mediciones experimentales de las mismas (2) se encuentran dentro de la incertidumbre marcada por el fabricante.

Hemos verificado la Ley de Ohm (11) en múltiples ocasiones, ya que en nuestras gráficas de Voltaje (V) frente a Intensidad (I) la línea obtenida mediante ajuste por mínimos cuadrados cumplía varias condiciones:

- Es una recta que prácticamente pasa por el origen. Los términos a (Ordenada en el origen) son despreciables frente a las magnitudes de V . Lo calculamos manualmente en 2.2.4 y 2.3.5 para los dos primeros circuitos, y en los apartados 2.4.5 y 2.5.5 para los segundos. En todos los casos utilizamos la ecuación 5 para calcular el valor de a .
- La pendiente de esta recta, b , coincide con el valor teórico de la resistencia equivalente (13 en serie y 15 en paralelo) y del valor de la medida del polímetro dentro del margen de incertidumbre. El caso del circuito en serie (2.3.2) es una excepción, ya que el valor de la resistencia equivalente y la medida del polímetro no entran dentro del margen de error, pero por un orden de magnitud de 10^2 , mientras que la medida es del orden de 10^5 . Consideraremos que se trata de un error en las condiciones del experimento, por ejemplo, a causa de la humedad, la temperatura, etc... En el resto de secciones se verifica perfectamente, y podemos ver los ajustes y valores de b en las secciones 2.2.4, 2.3.5, 2.4.5 y 2.5.5.

También hemos verificados las Leyes de Kirchhoff (14 en serie y 16 en paralelo) en los distintos circuitos:

- En el circuito en serie, la suma de los voltajes en bornes de cada resistencia fue aproximadamente igual al voltaje total del circuito para cada medición, con incertidumbres atribuibles a los aparatos de medición o a los cables de conexión.
- En el circuito en paralelo, la suma de las intensidades en bornes de cada resistencia se aproximó a la intensidad total del circuito para cada medición, de nuevo con incertidumbres atribuibles a las técnicas de medición.
- En el circuito mixto, la suma de los voltajes en bornes de R_1 , R_{23} y R_4 coincide

con el voltaje total, mientras que las intensidades en bornes de las resistencias R_2 y R_3 suman el valor de la intensidad total del circuito.

Por último, es necesario discutir una menor precisión de ajuste en el apartado 2.5.5. Mientras que el resto de regresiones lineales tenían un coeficiente (9) de al menos cuatro nueves, en algunas de las rectas que ajustamos en la última sección la precisión disminuyó a dos. Si bien la recta principal (V total frente a I total) cuenta con un $r = 0,99993$ que es bastante decente, otras como V_1 frente a I o V_{23} frente a I_2 tan solo llegan a $r = 0,997$. Esto se puede deber tanto a errores causados por las condiciones del laboratorio tras un periodo de tiempo prolongado (Mayor temperatura por la agrupación de tantos cuerpos, sudoración en las manos...), y también a algún error humano debido a la repetición de mediciones, pese a que tratamos de evitarlos en la medida de lo posible. De todas maneras, la desviación sobre el resultado no es crítica, y los datos siguen siendo coherentes (excepto el valor tres de V_1 que es menor que el de V_{23} cuando debería de ser al revés), pero queríamos dejar constancia de esta disminución en la precisión del último experimento.

En general, consideraríamos la práctica exitosa, ya que comprobamos tanto la **Ley de Ohm** como la **Ley de Kirchhoff** para la asociación de resistencias, y los resultados fueron satisfactorios.

Experiencia II

Corriente Alterna

Anexos

A Bibliografía

(All the info)