Inferência Bayesiana: exemplo

Elias Teixeira Krainski
eliaskr@ufpr.br

62ª RBras & 17º SEAGRO,
Jul–2017, Lavras/MG

O paradigma de inferência

Inferência:

- Inferência: passos do raciocínio, das premissas a conclusões, Charles Sanders Peirce
- geração de conhecimento sobre um parâmetro

Teorema de Bayes

- usar regras de probabilidade para calcular

$$P(\text{Parâmetros}|\text{Dados})$$

- Usando o teorema de Bayes, temos que

$$\begin{aligned} P(\text{Parâmetros}|\text{Dados}) &= \frac{P(\text{Parâmetros,Dados})}{P(\text{Dados})} \\ &= \frac{P(\text{Parâmetros})P(\text{Dados}|\text{Parâmetros})}{P(\text{Dados})} \end{aligned}$$

  em que

$$\begin{aligned} P(\text{Dados}) &= \int P(\text{Parâmetros}, \text{Dados})\partial\text{Parâmetros} \\ &= \int P(\text{Parâmetros})P(\text{Dados}|\text{Parâmetros})\partial\text{Parâmetros} \end{aligned}$$

- considera possíveis configurações dos parâmetros
- a distribuição dos dados condicional aos parâmetros é ponderada pela distribuição dos parâmetros
- $P(\text{Dados}|\text{Parâmetros})$ é chamada de **função de verossimilhança**
- dados fixados, mede quão verossímel é o parâmetro para os dados
- $P(\text{Dados})$ é a constante normalizadora

Distribuição *à priori*

- necessário especificar uma distribuição de probabilidade para os parâmetros, $P(\text{Parâmetros})$
- não depende dos dados, chamada de distribuição *à priori*
- representa a informação antes de se coletar os dados
- $P(\text{Parâmetros}|\text{Dados})$ atualiza a informaçao, distribuição *à posteriori*

Dessa forma, o problema se resume em

- assumir uma distribuição para os dados condicional à parâmetros
- assumir uma distribuição para cada parâmetro desse modelo
- calcular a distribuição *à posteriori* dos parâmetros do modelo

Tokyo: Informação *à priori*

Consideremos:

- choveu dia primeiro de Janeiro nos dois anos;
- não houve crianças com cinco anos de idade na amostra;
- não houve óbitos infantis num município no período de estudo
- proporção ou média amostral como estimativa:
- estimativas não realísticas ou em estimativa alguma

modelar em função do tempo, idade

- modelo razoável, resultados razoáveis

Tokyo: cada dia separadamente

Exemplificando

- Verossimilhança:

$$P(y|p) = \binom{2}{y} p^y (1-p)^{2-y}$$

- distribuição *Beta*(a, b) *à priori*:
- representar o conhecimento *à priori* sobre a probabilidade de chuva

$$P(p|a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1}$$

- distribuição *à posteriori*:

$$P(p|a,b,n,y) \propto p^{a-1}(1-p)^{b-1} p^y (1-p)^{n-y} = p^{a+y-1}(1-p)^{b+n-y-1}$$

identificada como Beta$(a+y,\ b+n-y)$

Com a, b e y (dados coletados)

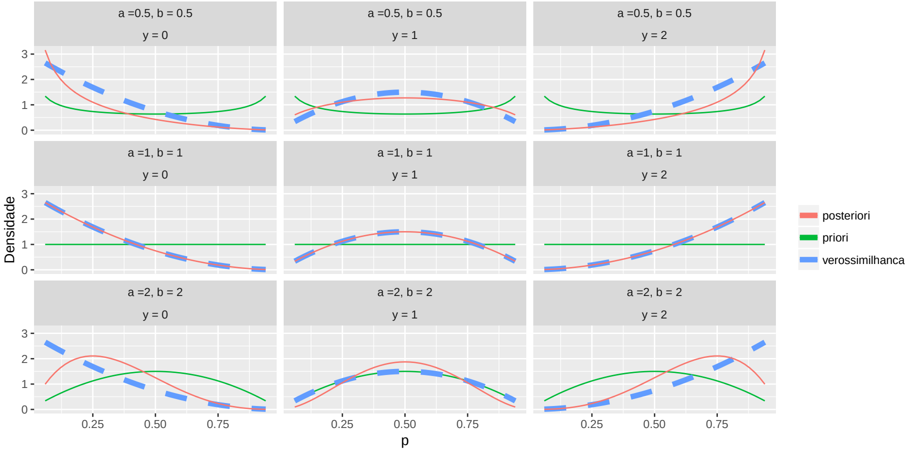

Figura 1: Distribuição de p a priori, verossimilhança de p escalonada e distribuição à posteriori de p, considerando algumas combinações de a, b e y.