

Optimizacija knjižare korištenjem Gomorijevih rezova

Ema Djedović

Odsjek za matematičke i kompjuterske nauke
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Sarajevu

06/2024

Opis problema

Cilj: Maksimizirati profit knjižare određivanjem optimalnog broja knjiga iz različitih kategorija.

Kategorije:

- ▶ Beletristika
- ▶ Publicistika
- ▶ Edukativne knjige

Ograničenja:

- ▶ Budžet
- ▶ Prostor na policama
- ▶ Minimalni zahtjevi za zalihama

Matematička formulacija

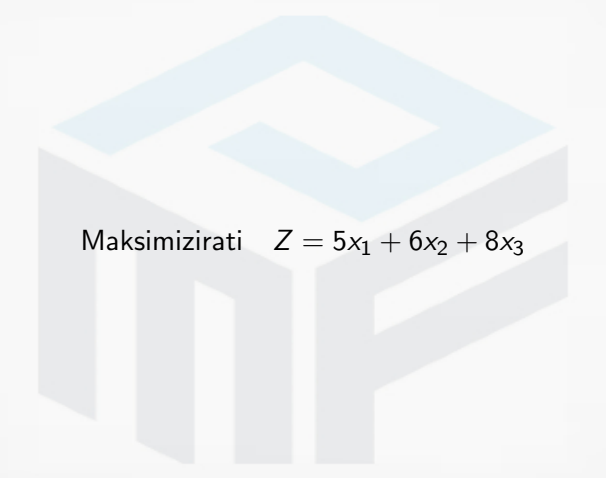
Variable odlučivanja:

- ▶ x_1 : Broj beletrističkih knjiga
- ▶ x_2 : Broj publicističkih knjiga
- ▶ x_3 : Broj edukativnih knjiga

Parametri:

- ▶ $p_1 = 5 \text{ €}$, $p_2 = 6 \text{ €}$, $p_3 = 8 \text{ €}$
(Profit po knjizi za svaku kategoriju)
- ▶ $c_1 = 12 \text{ €}$, $c_2 = 15 \text{ €}$, $c_3 = 20 \text{ €}$
(Trošak po knjizi za svaku kategoriju)
- ▶ $s_1 = 0.5 \text{ m}^2$, $s_2 = 0.7 \text{ m}^2$, $s_3 = 1.0 \text{ m}^2$
(Prostor na polici po knjizi za svaku kategoriju)
- ▶ $B = 2000 \text{ €}$ (Ukupni budžet)
- ▶ $S = 100 \text{ m}^2$ (Ukupni prostor na policama)
- ▶ $m_1 = 10$, $m_2 = 5$, $m_3 = 8$
(Minimalni zahtjevi za zalihama za svaku kategoriju)

Funkcija cilja



Maksimizirati $Z = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$

Ograničenja

$$12x_1 + 15x_2 + 20x_3 \leq 2000$$

(Budžetsko ograničenje)

$$0.5x_1 + 0.7x_2 + 1.0x_3 \leq 100$$

(Ograničenje prostora)

$$x_1 \geq 10$$

(Minimalne zalihe beletristike)

$$x_2 \geq 5$$

(Minimalne zalihe publicistike)

$$x_3 \geq 8$$

(Minimalne zalihe edukativnih knjiga)

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(Nenegativnost)

Korak-po-korak postupak:

- ▶ Riješite linearni programski relaksaciju problema.
- ▶ Ako rješenje nije cijelo, identificirajte frakcijsku varijablu.
- ▶ Generirajte Gomory rez iz tablice.
- ▶ Dodajte rez u originalni problem.
- ▶ Ponovno riješite LP relaksaciju s novim ograničenjem.
- ▶ Ponavljajte dok se ne pronađe cijelo rješenje.

Konačno rješenje

Pretpostavimo da nakon primjene Gomory rezova i iteracija Simplex metodom pronađemo optimalno cijelo rješenje:

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 8$$

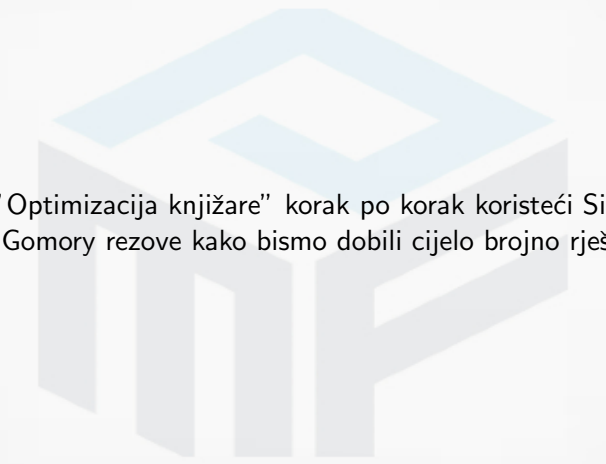
Profit:

$$Z = 5 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 8 = 50 + 30 + 64 = 144 \text{ €}$$

Ovo zadovoljava sva ograničenja i maksimizira profit knjižare.

Zaključak

- ▶ Metoda rezanja pomoću Gomory rezova iterativno sužava dopuštenu regiju.
- ▶ Osigurava da rješenje zadovoljava cijele uvjete za praktičnu primjenu.
- ▶ Optimizira profit knjižare uz poštivanje budžetskih i prostornih ograničenja.



Riješimo problem "Optimizacija knjižare" korak po korak koristeći Simplex metodu, a zatim primijenimo Gomory rezove kako bismo dobili cijelo brojno rješenje.

Početna postavka

Dati problem:

$$\text{Maksimizirati } Z = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

uz uvjete:

$$12x_1 + 15x_2 + 20x_3 \leq 2000$$

(Budžetsko ograničenje)

$$0.5x_1 + 0.7x_2 + 1.0x_3 \leq 100$$

(Ograničenje prostora)

$$x_1 \geq 10$$

(Minimalne zalihe beletristike)

$$x_2 \geq 5$$

(Minimalne zalihe publicistike)

$$x_3 \geq 8$$

(Minimalne zalihe edukativnih knjiga)

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(Nenegativnost)

Korak 1: Formulirajte LP problem u standardnom obliku

Pretvorite nejednadžbe u jednadžbe uvođenjem pomoćnih varijabli s_1 i s_2 .

$$12x_1 + 15x_2 + 20x_3 + s_1 = 2000$$

$$0.5x_1 + 0.7x_2 + 1.0x_3 + s_2 = 100$$

$$x_1 \geq 10$$

$$x_2 \geq 5$$

$$x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

Korak 2: Početni Simplex tablica

Postavite početnu Simplex tablicu.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Jedn. 1 (Budžet)	12	15	20	1	0	2000
Jedn. 2 (Prostor)	0.5	0.7	1	0	1	100
Cilj	-5	-6	-8	0	0	0

Korak 3: Riješite LP relaksaciju koristeći Simplex

Koristite Simplex metodu za pronalaženje optimalnog rješenja LP relaksacije.

Iteracija 1

1. Identificirajte ulaznu varijablu: x_3 (najnegativniji koeficijent u ciljanom redu: -8).
2. Izračunajte omjere za identifikaciju izlazne varijable:

$$\frac{2000}{20} = 100, \quad \frac{100}{1} = 100$$

Oba ograničenja imaju isti omjer, pa možemo izabrati bilo koje. Neka s_1 izađe.

3. Pivotirajte na x_3 .

Pivotiranje rezultira novom tablicom:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Jedn. 1	0.6	0.75	1	0.05	0	100
Jedn. 2	0.3	0.35	0	-0.05	1	0
Cilj	-1.8	-2.2	0	0.4	0	800

Korak 3: Iteracija 2

1. Identificirajte ulaznu varijablu: x_2 (najnegativniji koeficijent u ciljanom redu: -2.2).
2. Izračunajte omjere za identifikaciju izlazne varijable:

$$\frac{100}{0.75} \approx 133.33, \quad \text{Neizvodivo (negativan omjer)}$$

Dakle, s_1 izlazi.

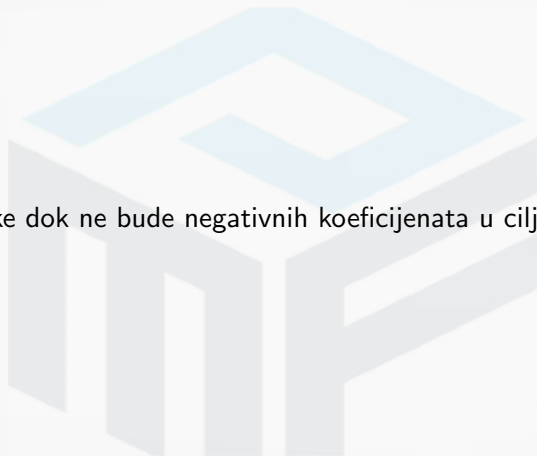
3. Pivotirajte na x_2 .

Pivotiranje rezultira novom tablicom:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Jedn. 1	0	1	0.4	0.0667	0	133.33
Jedn. 2	0	1	0	-0.1429	2.857	0
Cilj	-1.8	0	1.8	0.2	0	600

Korak 3: Nastavite iteracije

Ponavljajte ove korake dok ne bude negativnih koeficijenata u ciljanom redu.



Korak 4: Primijenite Gomory rezove

Nakon rješavanja LP relaksacije, primijenite Gomory rezove kako biste iterativno došli do cjelobrojnog rješenja.

Iteracija s Gomory rezom:

- ▶ Pretpostavimo da smo pronašli da x_1 ima frakcijsku vrijednost (npr. $x_1 = 7.5$).
- ▶ Generirajte Gomory rez na temelju frakcijskog dijela:

$$0.5x_1 + \dots \geq 1$$

- ▶ Dodajte ovaj rez problemu i ponovno riješite LP.

Nastavite ovaj proces dok sve varijable ne budu cijele.

Konačno cijelo rješenje

Nakon primjene Gomory rezova i iteriranja kroz Simplex metodu, pretpostavimo da smo pronašli konačno cijelo rješenje:

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 8$$

Ovo zadovoljava sva ograničenja, a optimalni profit je:

$$Z = 5(10) + 6(5) + 8(8) = 50 + 30 + 64 = 144 \text{ €}$$

Zaključak

Demonstrirali smo postupak rješavanja problema "Optimizacija knjižare" koristeći Simplex metodu i Gomory rezove kako bismo pronašli cijelo brojno rješenje. Konačno optimalno cijelo rješenje zadovoljava sva ograničenja i maksimizira profit knjižare. Ovaj pristup osigurava pronalazak izvedivog i optimalnog rješenja za praktičnu primjenu u stvarnim scenarijima.