Metoda sjekućih ravni. Gomorijev rez.

Ema Djedović

Odsjek za matematičke i kompjuterske nauke
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Sarajevu

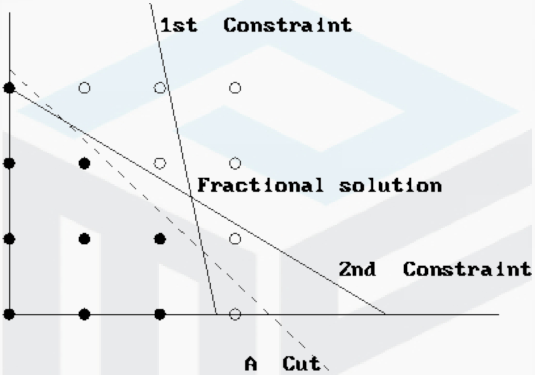
06/2024

Uvod

Algoritam sjekućih ravni rješava cjelobrojne programe modificirajući rješenja linearnih programa dok se ne dobije cjelobrojno rješenje. Ne dijeli dopušteno područje na podpodručja, kao u pristupima grananja i ograničavanja, već radi s jednim linearnim programom koji se rafinira **dodavanjem novih ograničenja**.

Nova ograničenja sukcesivno smanjuju dopušteno područje dok se ne pronađe optimalno cjelobrojno rješenje. Iako su u praksi postupci grananja i ograničavanja gotovo uvijek efikasniji, algoritam sjekućih ravni je bio važan za evoluciju cjelobrojnog programiranja. Historijski gledano, to je bio prvi algoritam za koji se moglo dokazati da **konvergira u konačno mnogo koraka** i koji je doveo do drugih, efikasnijih algoritama.

Uvod



Slika: Linearni program s realnim rješenjem (**Fractional solution**) na sjecištu prvog i drugog ograničenja. Cilj je doći do cjelobrojnih rješenja istaknutih crnim tačkama. U tu svrhu dodajemo jedan po jedan rez kako bismo "odsjekli" realna rješenja.

Primjer

Maksimizirati $Z = 7x_1 + 9x_2$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\
7x_1 + x_2 &\leq 35 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$

Maksimizirati $Z = 7x_1 + 9x_2$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 3x_2 + s_1 &= 6 \\
7x_1 + x_2 + s_2 &= 35 \\
x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \\
x_1, x_2, s_1, s_2 &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Bit će nam od koristi da izrazimo s_1 i s_2 preko varijabli x_1 i x_2:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 6 + x_1 - 3x_2 \\
s_2 &= 35 - 7x_1 - x_2
\end{aligned}
$$

Primjer

Ako zanemarimo cjelobrojnost, dobit ćemo sljedeću optimalnu simplex tablicu:

Variable	x_1	x_2	s_1	s_2	$-z$	RHS
x_2	0	1	7/22	1/22	0	7/2
x_1	1	0	-1/22	3/22	0	9/2
$-z$	0	0	28/11	15/11	1	63

Posmatrajmo **prvo ograničenje**:

$$x_2 = \frac{7}{22}s_1 + \frac{1}{22}s_2 = \frac{7}{2}$$

Stavimo sve cijele dijelove na lijevu stranu, a sve razlomke na desnu:

$$x_2 - 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{22}s_1 - \frac{1}{22}s_2$$

Primjer

$$x_2 - 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{22}s_1 - \frac{1}{22}s_2$$

Sada, budući da lijeva strana sadrži samo cijele brojeve, desna strana također mora biti cjelobrojna. Kako imamo neki pozitivni razlomak (u našem slučaju $\frac{1}{2}$) umanjen za niz nekih pozitivnih vrijednosti, tako desna strana može biti samo 0, -1, -2, ... Dakle, dobijamo sljedeće ograničenje:

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{22}s_1 - \frac{1}{22}s_2 \leq 0$$

Uvrstimo vrijednosti $s_1 = 6 + x_1 - 3x_2$ i $s_2 = 35 - 7x_1 - x_2$.

Primjer

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{22}(6 + x_1 - 3x_2) - \frac{1}{22}(35 - 7x_1 - x_2) \leq 0$$

Sređivanjem dobivamo $-3 + x_2 \leq 0$ odnosno $x_2 \leq 3.$

Ograničenje koje smo dobili nazivamo **rez**, dodajemo ga u naš linearni program i isti ponovo rješavamo. Postupak ponavljamo sve dok optimalne vrijednosti za varijable odluke ne postanu cijeli brojevi - tada algoritam staje.

Primjer

Rez smo mogli generirati i iz **drugog ograničenja**. Osmotrimo ponovo tablicu s početka:

Variable	x_1	x_2	s_1	s_2	$-z$	RHS
x_2	0	1	7/22	1/22	0	7/2
x_1	1	0	-1/22	3/22	0	9/2
$-z$	0	0	28/11	15/11	1	63

Ovdje moramo biti oprezni da dobijemo pravilne znakove.

$$
\begin{aligned}
x_1 - \frac{1}{22}s_1 + \frac{3}{22}s_2 &= \frac{9}{2} \\
x_1 + \left(-1 + \frac{21}{22}\right)s_1 + \frac{3}{22}s_2 &= 4 + \frac{1}{2} \\
x_1 - s_1 - 4 &= \frac{1}{2} - \frac{21}{22}s_1 - \frac{3}{22}s_2
\end{aligned}
$$

Primjer

$$x_1 - s_1 - 4 = \frac{1}{2} - \frac{21}{22}s_1 - \frac{3}{22}s_2$$

Odavdje dobivamo ograničenje (rez):

$$\frac{1}{2} - \frac{21}{22}s_1 - \frac{3}{22}s_2 \leq 0$$

Ponovo izrazimo s_1 i s_2 preko varijabli odluke:

$$\frac{1}{2} - \frac{21}{22}(6 + x_1 - 3x_2) - \frac{3}{22}(35 - 7x_1 - x_2) \leq 0$$

čijim se sređivanjem dobije:

$$x_2 \leq \frac{10}{3} \quad \text{odnosno} \quad x_2 \leq 3 \quad \text{(radi cjelobrojnosti)}$$

Generalizirano

Ako imamo ograničenje $x_k + \sum a_i x_i = b$, gdje b **nije cijeli broj**, možemo pisati $a_i = \lfloor a_i \rfloor + a'_i$, za neko $0 \leq a'_i < 1$, i $b = \lfloor b \rfloor + b'$ za neko $0 < b' < 1$:

$$x_k + \sum (\lfloor a_i \rfloor + a'_i) x_i = \lfloor b \rfloor + b'$$

$$x_k + \sum \lfloor a_i \rfloor x_i + \sum a'_i x_i = \lfloor b \rfloor + b'$$

$$x_k + \sum \lfloor a_i \rfloor x_i = \lfloor b \rfloor + b' - \sum a'_i x_i$$

$$x_k + \sum \lfloor a_i \rfloor x_i - \lfloor b \rfloor = b' - \sum a'_i x_i$$

Tako dobijamo rez:

$$b' - \sum a'_i x_i \leq 0$$

Ovo novo ograničenje dodajemo u linearni program i ponovo rješavamo problem.

Komentar

Metoda sjekućih ravni može garantirati pronalaženje optimalnog cjelobrojnog rješenja. Međutim, postoje neki nedostaci:

- Greška zaokruživanja može uzrokovati velike poteškoće: Je li to 3.000000001 stvarno 3, ili trebamo generirati rez?
- Kao što metoda grananja i ograničenje može generirati veliki broj podproblema, ova tehnika može generirati veliki broj ograničenja (rezova).

Python biblioteka lippy

```
import lippy as lp
# biblioteka za rjesavanje problema linearnog programiranja

c_vektor = [3, 3, 7]

a_matrica =
[[1, 1, 1],
 [1, 4, 0],
 [0, 0.5, 3]]

b_vektor = [3, 5, 7]

gomory = lp.CuttingPlaneMethod(c_vektor, a_matrica, b_vektor)
print("Rjesenje: ", gomory.solve())
```

Optimizacijski problem: Maksimizirati profit knjižare

Cilj: Maksimizirati profit knjižare određivanjem optimalnog broja knjiga iz različitih kategorija.

- Beletristika
- Publicistika
- Edukativne knjige

Ograničenja su postavljena u odnosu na budžet, prostor na policama i minimalne zalihe knjiga za svaku kategoriju.

Formulacija problema

Varijable odluke:

- x_1: broj beletrističkih knjiga
- x_2: broj publicističkih knjiga
- x_3: broj edukativnih knjiga

Koeficijenti:

- $p_1 = 5\,€,\ p_2 = 6\,€,\ p_3 = 8\,€$ (profit po knjizi za svaku kategoriju)
- $c_1 = 12\,€,\ c_2 = 15\,€,\ c_3 = 20\,€$ (trošak po knjizi za svaku kategoriju)
- $s_1 = 0.5\,\mathrm{m}^2,\ s_2 = 0.7\,\mathrm{m}^2,\ s_3 = 1.0\,\mathrm{m}^2$ (prostor po knjizi za svaku kategoriju)
- $B = 2000\,€$ (ukupni budžet)
- $S = 100\,\mathrm{m}^2$ (ukupni prostor na policama)
- $m_1 = 10,\ m_2 = 5,\ m_3 = 8$ (minimalne zalihe za svaku kategoriju)

Funkcija cilja

Maksimizirati $Z = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$

$$
\begin{aligned}
12x_1 + 15x_2 + 20x_3 &\leq 2000 && \text{(budžetsko ograničenje)} \\
0.5x_1 + 0.7x_2 + x_3 &\leq 100 && \text{(ograničenje prostora)} \\
x_1 &\geq 10 && \text{(minimalne zalihe beletristike)} \\
x_2 &\geq 5 && \text{(minimalne zalihe publicistike)} \\
x_3 &\geq 8 && \text{(minimalne zalihe edukativnih knjiga)} \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 && \text{(nenegativnost)} \\
x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{Z} && \text{(cjelobrojnost)}
\end{aligned}
$$

Primjena metode sjekućih ravni

Algoritam:

- Riješiti linearnu relaksaciju problema.
- Ako rješenje nije cjelobrojno, generirati Gomorijev rez.
- Dodati rez u originalni problem.
- Ponovno riješiti LP relaksaciju s novim ograničenjem.
- Ponavljati dok se ne pronađe cjelobrojno rješenje.

Primjena metode sjekućih ravni

Riješimo LP relaksaciju koristeći Simplex metodu, a zatim primijenimo Gomory rezove kako bismo dobili cjelobrojno rješenje. Prvo ćemo nejednadžbe pretvoriti u jednadžbe uvođenjem varijabli viška.

$$\text{Maksimizirati} \quad Z = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$12x_1 + 15x_2 + 20x_3 + s_1 = 2000$$

$$0.5x_1 + 0.7x_2 + 1.0x_3 + s_2 = 100$$

$$x_1 - s_3 = 10$$

$$x_2 - s_4 = 5$$

$$x_3 - s_5 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0$$

Primjena metode sjekućih ravni

Postavimo početnu Simplex tablicu.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	RHS
Z	5	6	8	0	0	0	0	0	0
1	12	15	20	1	0	0	0	0	2000
2	0.5	0.7	1.0	0	1	0	0	0	100
3	1	0	0	0	0	-1	0	0	10
4	0	1	0	0	0	0	-1	0	5
5	0	0	1	0	0	0	0	-1	8

Izvori

- https://pypi.org/project/lippy
- https://mat.tepper.cmu.edu
- Marija Ivanović (2009) *Vežbe iz Operacionih istraživanja* Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet
- Bradley, S.P., Hax, A.C. and Magnanti, T.L. (1977) *Applied mathematical programming* Reading, Mass: Addison-Wesley.