

Metoda sjekućih ravni. Gomorijev rez.

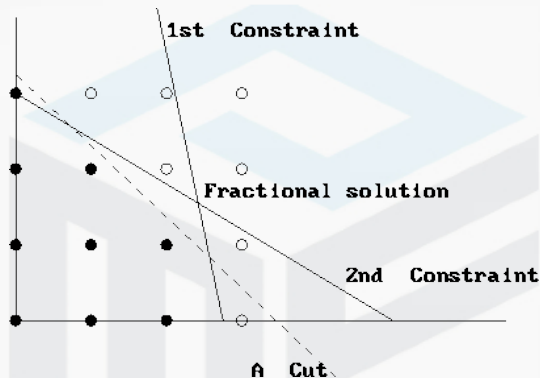
Ema Djedović

Odsjek za matematičke i kompjuterske nauke
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Sarajevu

06/2024

Algoritam sjekućih ravni rješava cjelobrojne programe modificirajući rješenja linearnih programa dok se ne dobije cjelobrojno rješenje. Ne dijeli dopušteno područje na podpodručja, kao u pristupima grananja i ograničavanja, već radi s jednim linearnim programom koji se rafinira **dodavanjem novih ograničenja**.

Nova ograničenja sukcesivno smanjuju dopušteno područje dok se ne pronade optimalno cjelobrojno rješenje. Iako su u praksi postupci grananja i ograničavanja gotovo uvijek efikasniji, algoritam sjekućih ravni je bio važan za evoluciju cjelobrojnog programiranja. Historijski gledano, to je bio prvi algoritam za koji se moglo dokazati da **konvergira u konačno mnogo koraka** i koji je doveo do drugih, efikasnijih algoritama.



Slika: Linearni program s realnim rješenjem (**Fractional solution**) na sjecištu prvog i drugog ograničenja. Cilj je doći do cjelobrojnih rješenja istaknutih crnim tačkama. U tu svrhu dodajemo jedan po jedan rez kako bismo "odsjekli" realna rješenja.

Primjer

Maksimizirati $Z = 7x_1 + 9x_2$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

→

Maksimizirati $Z = 7x_1 + 9x_2$

$$-x_1 + 3x_2 + s_1 = 6$$

$$7x_1 + x_2 + s_2 = 35$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$$

Bit će nam od koristi da izrazimo s_1 i s_2 preko varijabli x_1 i x_2 :

$$s_1 = 6 + x_1 - 3x_2$$

$$s_2 = 35 - 7x_1 - x_2$$

Primjer

Ako zanemarimo cjelobrojnost, dobit ćemo sljedeću optimalnu simplex tablicu:

Variable	x_1	x_2	s_1	s_2	$-z$	RHS
x_2	0	1	$7/22$	$1/22$	0	$7/2$
x_1	1	0	$-1/22$	$3/22$	0	$9/2$
$-z$	0	0	$28/11$	$15/11$	1	63

Posmatrajmo **prvo ograničenje**:

$$x_2 = \frac{7}{22}s_1 + \frac{1}{22}s_2 = \frac{7}{2}$$

Stavimo sve cijele dijelove na lijevu stranu, a sve razlomke na desnu:

$$x_2 - 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{22}s_1 - \frac{1}{22}s_2$$

Primjer

$$x_2 - 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{22}s_1 - \frac{1}{22}s_2$$

Sada, budući da lijeva strana sadrži samo cijele brojeve, desna strana također mora biti cjelobrojna. Kako imamo neki pozitivni razlomak (u našem slučaju $\frac{1}{2}$) umanjen za niz nekih pozitivnih vrijednosti, tako desna strana može biti samo 0, -1, -2, Dakle, dobijamo sljedeće ograničenje:

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{22}s_1 - \frac{1}{22}s_2 \leq 0$$

Uvrstimo vrijednosti $s_1 = 6 + x_1 - 3x_2$ i $s_2 = 35 - 7x_1 - x_2$.

Primjer

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{22}(6 + x_1 - 3x_2) - \frac{1}{22}(35 - 7x_1 - x_2) \leq 0$$

Sređivanjem dobivamo $-3 + x_2 \leq 0$ odnosno $x_2 \leq 3$.

Ograničenje koje smo dobili nazivamo **rez**, dodajemo ga u naš linearni program i isti ponovo rješavamo. Postupak ponavljamo sve dok optimalne vrijednosti za varijable odluke ne postanu cijeli brojevi - tada algoritam staje.

Primjer

Rez smo mogli generirati i iz **drugog ograničenja**. Osmotrimo ponovo tablicu s početka:

Variable	x_1	x_2	s_1	s_2	$-z$	RHS
x_2	0	1	$7/22$	$1/22$	0	$7/2$
x_1	1	0	$-1/22$	$3/22$	0	$9/2$
$-z$	0	0	$28/11$	$15/11$	1	63

Ovdje moramo biti oprezni da dobijemo pravilne znakove.

$$\begin{aligned}x_1 - \frac{1}{22}s_1 + \frac{3}{22}s_2 &= \frac{9}{2} \\x_1 + \left(-1 + \frac{21}{22}\right)s_1 + \frac{3}{22}s_2 &= 4 + \frac{1}{2} \\x_1 - s_1 - 4 &= \frac{1}{2} - \frac{21}{22}s_1 - \frac{3}{22}s_2\end{aligned}$$

Primjer

$$x_1 - s_1 - 4 = \frac{1}{2} - \frac{21}{22}s_1 - \frac{3}{22}s_2$$

Oдавдје dobivamo ograničenje (rez):

$$\frac{1}{2} - \frac{21}{22}s_1 - \frac{3}{22}s_2 \leq 0$$

Ponovo izrazimo s_1 i s_2 preko varijabli odluke:

$$\frac{1}{2} - \frac{21}{22}(6 + x_1 - 3x_2) - \frac{3}{22}(35 - 7x_1 - x_2) \leq 0$$

čijim se sređivanjem dobije:

$$x_2 \leq \frac{10}{3} \quad \text{odnosno} \quad x_2 \leq 3 \quad (\text{radi cjelobrojnosti})$$

Generalizirano

Ako imamo ograničenje $x_k + \sum a_i x_i = b$, gdje b **nije cijeli broj**, možemo pisati $a_i = \lfloor a_i \rfloor + a'_i$, za neko $0 \leq a'_i < 1$, i $b = \lfloor b \rfloor + b'$ za neko $0 < b' < 1$:

$$x_k + \sum (\lfloor a_i \rfloor + a'_i) x_i = \lfloor b \rfloor + b'$$

$$x_k + \sum \lfloor a_i \rfloor x_i + \sum a'_i x_i = \lfloor b \rfloor + b'$$

$$x_k + \sum \lfloor a_i \rfloor x_i = \lfloor b \rfloor + b' - \sum a'_i x_i$$

$$x_k + \sum \lfloor a_i \rfloor x_i - \lfloor b \rfloor = b' - \sum a'_i x_i$$

Tako dobijamo rez:

$$b' - \sum a'_i x_i \leq 0$$

Ovo novo ograničenje dodajemo u linearni program i ponovo rješavamo problem.

Metoda sjekućih ravni može garantirati pronalaženje optimalnog cjelobrojnog rješenja. Međutim, postoje neki nedostaci:

- ▶ Greška zaokruživanja može uzrokovati velike poteškoće: Je li to 3.000000001 stvarno 3, ili trebamo generirati rez?
- ▶ Kao što metoda grananja i ograničenje može generirati veliki broj podproblema, ova tehnika može generirati veliki broj ograničenja (rezova).

Python biblioteka lippy



```
import lippy as lp
# biblioteka za rjesavanje
# problema linearnog programiranja

c_vektor = [3, 3, 7]

a_matrica = [[1, 1, 1],
              [1, 4, 0],
              [0, 0.5, 3]]

b_vektor = [3, 5, 7]

gomory = lp.CuttingPlaneMethod(c_vektor, a_matrica, b_vektor)
print(" Rjesenje: ~", gomory.solve())
```

Optimizacijski problem: Maksimizirati profit knjižare

Cilj: Maksimizirati profit knjižare određivanjem optimalnog broja knjiga iz različitih kategorija.

- ▶ Beletristika
- ▶ Publicistika
- ▶ Edukativne knjige

Ograničenja su postavljena u odnosu na budžet, prostor na policama i minimalne zalihe knjiga za svaku kategoriju.



Optimizacijski problem: Maksimizirati profit knjižare

Variable odluke:

- ▶ x_1 : broj beletrističkih knjiga
- ▶ x_2 : broj publicističkih knjiga
- ▶ x_3 : broj edukativnih knjiga

Koeficijenti:

- ▶ $p_1 = 5 \text{ €}$, $p_2 = 6 \text{ €}$, $p_3 = 8 \text{ €}$ (profit po knjizi za svaku kategoriju)
- ▶ $c_1 = 12 \text{ €}$, $c_2 = 15 \text{ €}$, $c_3 = 20 \text{ €}$ (trošak po knjizi za svaku kategoriju)
- ▶ $s_1 = 0.5 \text{ m}^2$, $s_2 = 0.7 \text{ m}^2$, $s_3 = 1.0 \text{ m}^2$ (prostor po knjizi za svaku kategoriju)
- ▶ $B = 2000 \text{ €}$ (ukupni budžet)
- ▶ $S = 100 \text{ m}^2$ (ukupni prostor na policama)
- ▶ $m_1 = 10$, $m_2 = 5$, $m_3 = 8$ (minimalne zalihe za svaku kategoriju)

Optimizacijski problem: Maksimizirati profit knjižare

Maksimizirati $Z = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$

$12x_1 + 15x_2 + 20x_3 \leq 2000$ (budžetsko ograničenje)

$0.5x_1 + 0.7x_2 + x_3 \leq 100$ (ograničenje prostora)

$x_1 \geq 10$ (minimalne zalihe beletristike)

$x_2 \geq 5$ (minimalne zalihe publicistike)

$x_3 \geq 8$ (minimalne zalihe edukativnih knjiga)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ (nenegativnost)

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ (cjelobrojnost)

Optimizacijski problem: Maksimizirati profit knjižare

Algoritam:

- ▶ Riješiti linearnu relaksaciju problema.
- ▶ Ako rješenje nije cjelobrojno, generirati Gomorijev rez.
- ▶ Dodati rez u originalni problem.
- ▶ Ponovno riješiti LP relaksaciju s novim ograničenjem.
- ▶ Ponavljati dok se ne pronade cjelobrojno rješenje.



Optimizacijski problem: Maksimizirati profit knjižare

Sve znakove " \geq " pretvorimo u " \leq " kako bismo dobili oblik pogodan za rješavanje u biblioteci lippy. Imamo:

$$\text{Maksimizirati } Z = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$12x_1 + 15x_2 + 20x_3 \leq 2000$$

$$0.5x_1 + 0.7x_2 + x_3 \leq 100$$

$$-x_1 \leq -10$$

$$-x_2 \leq -5$$

$$-x_3 \leq -8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$



Optimizacijski problem: Maksimizirati profit knjižare



```
c_vektor = [5, 6, 8]
```

```
a_matrica = [[12, 15, 20],  
              [0.5, 0.7, 1],  
              [-1, 0, 0],  
              [0, -1, 0],  
              [0, 0, -1]]
```

```
b_vektor = [2000, 100, -10, -5, -8]
```

```
gomory = lp.CuttingPlaneMethod(c_vektor, a_matrica, b_vektor)  
rjesenje = gomory.solve()
```

```
print("Optimalan broj knjiga za svaku kategoriju: ", rjesenje[0])  
print("Maksimalni profit: ", rjesenje[1])
```

Optimizacijski problem: Maksimizirati profit knjižare

- `rjesenje[0]` nam daje niz `[147, 5, 8]` što nam daje uvid u optimalne vrijednosti varijabli odluke:

$x_1 = 147$ (broj knjiga beletristike)

$x_2 = 5$ (broj knjiga publicistike)

$x_3 = 8$ (broj edukativnih knjiga)

- `rjesenje[1]` ima vrijednost 829 što predstavlja maksimalnu vrijednost funkcije cilja, odnosno profit od 829\$.



- ▶ <https://pypi.org/project/lippy>
- ▶ <https://mat.tepper.cmu.edu>
- ▶ Marija Ivanović (2009) *Vežbe iz Operacionih istraživanja* Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet
- ▶ Bradley, S.P., Hax, A.C. and Magnanti, T.L. (1977) *Applied mathematical programming* Reading, Mass: Addison-Wesley.