Metoda sjekuće ravni. Gomorijev rez.

Ema Djedović

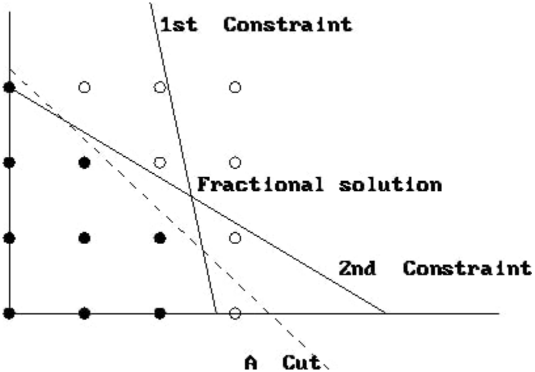
Odsjek za matematičke i kompjuterske nauke
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Sarajevu

06/2024

Sample frame title

Postoji alternativa metodi grananja i ograđivanja zvana rezne ravnine koja se također može koristiti za rješavanje cijelobrojnih programa. Temeljna ideja iza reznih ravnina je dodavanje ograničenja linearnom programu sve dok optimalno osnovno dopušteno rješenje ne poprimi cijelobrojne vrijednosti. Naravno, moramo biti oprezni koje ograničenja dodajemo: ne bismo željeli promijeniti problem dodavanjem ograničenja. Dodati ćemo posebnu vrstu ograničenja zvanu rez. Rez u odnosu na trenutno frakcijsko rješenje zadovoljava sljedeće kriterije:

- svako dopušteno cijelobrojno rješenje je dopušteno za rez, i
- trenutno frakcijsko rješenje nije dopušteno za rez.



Slika: Primjer slike u LaTeX dokumentu

Sample frame title

Postoje dva načina za generiranje rezova. Prvi, nazvan Gomoryjevi rezovi, generira rezove iz bilo kojeg tabloa linearnog programiranja. Ovo ima prednost da može "rješavati" bilo koji problem, ali ima nedostatak da metoda može biti vrlo spora. Drugi pristup je koristiti strukturu problema za generiranje vrlo dobrih rezova. Ovaj pristup zahtijeva analizu od problema do problema, ali može pružiti vrlo učinkovite tehnike rješenja.

Osmotrimo sljedeći cjelobrojni program:

$$\begin{aligned} \text{Maksimizirati} \quad Z &= 7x_1 + 9x_2 \\ \text{Uz ograničenja:} \quad -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 7x_1 + x_2 &\leq 35 \\ x_1, x_2 &\geq 0 (\text{cjelobrojni}) \end{aligned}$$

Ako zanemarimo cjelobrojnost, dobit ćemo sljedeću optimalnu tablicu (s ažuriranim stupcima i smanjenim troškovima prikazanim za nebazične varijable):

Variable	x_1	x_2	s_1	s_2	$-z$	RHS
x_2	0	1	7/22	1/22	0	7/2
x_1	1	0	-1/22	3/22	0	9/2
$-z$	0	0	28/11	15/11	1	63

Slika: Primjer slike u LaTeX dokumentu

Posmatrajmo prvo ograničenje:

$$x_2 = \frac{7}{22}s_1 + \frac{1}{22}s_2 = \frac{7}{2}$$

Možemo to preurediti tako da sve cijele dijelove stavimo na lijevu stranu, a sve razlomke na desnu:

$$x_2 - 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{22}s_1 - \frac{1}{22}s_2$$

Sada, budući da lijeva strana sadrži samo cijele brojeve, desna strana mora zbrajati do cijelog broja. Koji cijeli broj može biti? Pa, ona se sastoji od nekog pozitivnog razlomka umanjenog za niz pozitivnih vrijednosti. Stoga desna strana može biti samo 0, -1, -2,...; ne može biti pozitivna vrijednost. Dakle, dobili smo sljedeće ograničenje:

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{22}s_1 - \frac{1}{22}s_2 \leq 0$$

Ovo ograničenje zadovoljava svako izvedivo cjelobrojno rješenje za naš izvorni problem. Međutim, u našem trenutnom rješenju, s_1 i s_2 su oba jednaka 0, što nije izvedivo s obzirom na gore navedeno ograničenje. To znači da je gore navedeno ograničenje rez, nazvan Gomoryjev rez po svom otkrivaču. Sada možemo dodati ovo ograničenje u linearni program i biti sigurni da ćemo pronaći drugačije rješenje, ono koje bi moglo biti cijelo.

Također možemo generirati rez iz drugog ograničenja. Ovdje moramo biti oprezni da dobijemo pravilne znakove:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 1/22 s_1 + 3/22 s_2 &= 9/2 \\
x_1 + (-1 + 21/22) s_1 + 3/22 s_2 &= 4 + 1/2 \\
x_1 - s_1 - 4 &= 1/2 - 21/22 s_1 - 3/22 s_2
\end{aligned}
$$

Slika: Primjer slike u LaTeX dokumentu

daje ograničenje:

$$\frac{1}{2} - \frac{21}{22} s_1 - \frac{3}{22} s_2 \leq 0$$

Općenito, neka je $\lfloor a \rfloor$ najveći cijeli broj manji ili jednak a. Na primjer, $\lfloor 3.9 \rfloor = 3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$ i $\lfloor -1.3 \rfloor = -2$.

Ako imamo ograničenje $x_k + \sum a_i x_i = b$ gdje b nije cijeli broj, možemo pisati $a_i = \lfloor a_i \rfloor + a'_i$, za neko $0 \leq a'_i < 1$, i $b = \lfloor b \rfloor + b'$ za neko $0 < b' < 1$. Koristeći iste korake dobivamo:

$$x_k + \sum \lfloor a_i \rfloor x_i - \lfloor b \rfloor = b' - \sum a'_i x_i$$

da bismo tako dobili rez:

$$b' - \sum a'_i x_i \leq 0$$

Ovaj rez možemo dodati u linearni program i ponovo riješiti problem. Problem je zajamčeno da neće dobiti isto rješenje.

Ova metoda može garantirati pronalaženje optimalnog cjelobrojnog rješenja. Međutim, postoje neki nedostaci:

- Greška zaokruživanja može uzrokovati velike poteškoće: Je li to 3.000000001 stvarno 3, ili trebam generirati rez? Ako donesem pogrešnu odluku, mogao bih ili odbaciti izvedivo rješenje (ako je stvarno 3, ali generiram rez) ili bih mogao završiti s neizvedivim rješenjem (ako nije 3, ali ga tretiram kao takvog).
- Broj generiranih ograničenja može biti ogroman. Kao što grana i ograničenje može generirati veliki broj podproblema, ova tehnika može generirati veliki broj ograničenja.

Primjer uz Python biblioteku `lippy`

```
import lippy as lp
# lippy je Python biblioteka za rjesavanje problema
# linearnog programiranja

c_vektor = [3, 3, 7]
a_matrica =
[[1, 1, 1],
 [1, 4, 0],
 [0, 0.5, 3]]
b_vektor = [3, 5, 7]

gomory = lp.CuttingPlaneMethod(c_vektor, a_matrica, b_vektor)
print("Rjesenje: ", gomory.solve())
```

Izvori

- https://pypi.org/project/lippy
- https://mat.tepper.cmu.edu
- Marija Ivanović (2009) *Vežbe iz Operacionih istraživanja* Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet
- Bradley, S.P., Hax, A.C. and Magnanti, T.L. (1977) *Applied mathematical programming* Reading, Mass: Addison-Wesley.