Stukan 3

Ordkunskap: Se till att du vet vad dessa begrepp innebär:

vektornorm (vektorlängd)

enhetsvektor

parallella vektorer

linjärkombination

linjärt hölje (eng. span)

delrum (eng. subspace)

Övning 1. Givet tre vektorer i $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) Bestäm normen av varje vektor.

b) Finns det några vektorer som är parvis parallella?

c) Bestäm en enhetsvektor som är parallell med $\vec{u}$.

Övning 2. Bestäm skalärer a och b sådana att

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -18 \end{bmatrix}$$

Övning 3. Betrakta det delrum av $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{w}$ som ges i **Övning 1**.

Avgör om vektorn

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

tillhör detta delrum.

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{35}$ och $\|\vec{w}\| = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$.

b) Javisst, $\vec{u}$ och $\vec{w}$ är parallella ty vi kan skriva $\vec{w} = -2\vec{u}$.

c) En sådan enhetsvektor kan fås genom att multiplicera $\vec{u}$ med $\frac{1}{\|\vec{u}\|}$, dvs. dividera $\vec{u}$ med $\|\vec{u}\|$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Alternativt skrivsätt:

$$\frac{(1,0,-2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Övning 2. Notera att

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -18 \end{bmatrix}$$

innebär att

$$\begin{bmatrix} a + 3b \\ 3a + b \\ -2a + 5b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -18 \end{bmatrix}$$

Detta är ju som att lösa det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} a + 3b = -2 \\ 3a + b = 10 \\ -2a + 5b = -18 \end{cases}$$

med två variabler a och b. Använd nu till exempel gausseliminering på totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 10 \\ -2 & 5 & -18 \end{array}\right]$$

och vi är klara.

Svar: $a = 4$ och $b = -2$.

Övning 3. Vi vill egentligen avgöra om vektorn $\vec{s}$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{w}$. Vi vill med andra ord kolla om det finns några skalärer a och b sådana att

$$a\vec{v} + b\vec{w} = \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow a\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Genomför nu till exempel samma process som i **Övning 2** och vi är klara.

Svar: Nej! No! Não!! Nein!!!!!