Algebra och Geometri 2017-11-13

Inledning Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ $\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\7\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ $\vec{c}=\begin{bmatrix}5\\2\\9\end{bmatrix}$

Är det möjligt att skriva en av dem som en linjärkombination av de andra?

Faktum $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{c}$ dvs $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$ $(3\vec{a}+6\vec{b}-3\vec{c}=\vec{0})$

<u>Alltså</u> Ekvationen $\underbrace{k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}}_{\text{(homogen ekvation)}}$ har oändligt antal lösningar.

Vi säger att $\vec{a},\vec{b}$ och $\vec{c}$ är linjärt beroende (eng. linearly dependent)

Linjärt oberoende vektorer (eng.) independent.

<u>Definition</u> $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ sägs vara linjärt oberoende om <u>ingen</u> av dessa kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

Lmao Ekvationen $c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_k\vec{v}_k=\vec{0}$ har endast en lösning (den triviala lösningen) $c_1=c_2=\dots=c_3=0$

Ex.1 Avgör om $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ och $\vec{b}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ är beroende.

Titta på ekvationen $c_1\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\vec{0}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, som t.ex. har den icke-triviala lösningen $c_1=0,\ c_2=17$.

Ex.2 Samma fråga, för $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\vec{c}=\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}$

Systematisk undersökning

Betrakta $c_1\vec{a}+c_2\vec{b}+c_3\vec{c}=0$. Hur många lösningar har denna ekv.?

$$c_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&2&0\\1&2&3&0\\0&3&3&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&1&2&0\\0&3&3&0\end{array}\right]R_2-2R_1\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-3&-4&0\\0&3&3&0\end{array}\right]R_3+R_2\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-3&-4&0\\0&0&-1&0\end{array}\right]\text{trappstegsform}$$

$$\begin{cases}c_1+2c_2+3c_3=0\\ \quad -3c_2-4c_3=0\\ \quad\quad -c_3=0\end{cases}\Rightarrow c_1=c_2=c_3=0 \text{ den enda lösningen}$$

Strategi: Hur kollar vi om $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ är beroende eller inte?

1. Bilda en matris $\begin{bmatrix}\vec{a}&\vec{b}&\vec{c}\end{bmatrix}$
2. Överför matrisen till trappstegsform och räkna antalet ledande element (= rang).

Antalet ledande element = antalet variabler: oberoende

Antalet ledande element < antalet variabler: beroende

Ex. 3. $\vec{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix}3\\4\\0\\5\end{bmatrix}$ Visa att dessa 3 är beroende. Bestäm bland dessa så många oberoende vektorer som möjligt.

Systematisk lösning

1. Bilda $\begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&4\\0&0&0\\2&1&5\end{bmatrix}$ 2. $\sim \cdots \sim \begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

3. De kolonner i den sista matrisen med ledande element visar att $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är oberoende, men $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ är beroende. ∎

Bas (eng. Basis) av ett vektorrum/delrum

Ex. "Tangentbordet" $\vec{a} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\vec{b}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ kan ej nå alla punkter i $\mathbb{R}^2$ med $\vec{a}, \vec{b}$, ty $\vec{a}$ & $\vec{b}$ är beroende. Vi säger att $\vec{a}$ & $\vec{b}$ inte utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

Ex. $\vec{a} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ $\vec{c} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ utgör inte heller en bas för $\mathbb{R}^2$ (pga. överflödiga vektoren)

Definition En mängd av vektorer $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ utgör en bas för ett delrum V av $\mathbb{R}^n$ om:

i) $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$ är beroende
och
ii) $\text{span}\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k\} = V$, dvs varje vektor i V kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$.

Ex. En bas för $\mathbb{R}^2$ är $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ Annan bas $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}\right\}$

basvektorerna

Ex. En bas för $\mathbb{R}^3$ är $\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{\vec{e}_x}, \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{\vec{e}_y}, \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{\vec{e}_z}\right\}$ Standardbasen

Ex. 4, 2011-06-09 # 2(c) (1p)

$\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\-2\\1\end{bmatrix}$ $\vec{w} = \begin{bmatrix}1\\-4\\4\\1\end{bmatrix}$ Bestäm en bas för det delrum av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Lösning Behöver bara (bland dessa) välja ut så många oberoende vektorer som möjligt. Se Ex. 3.

1. $\begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\-1&2&-4\\1&-2&4\\-1&1&1\end{bmatrix}$ 2. $\sim \cdots \sim \begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är oberoende.
$\Rightarrow$ en bas för delrummet ifråga är $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. ∎

Dimension(-en) av ett delrum V

Def. Låt en bas för V innehålla n vektorer.
Vi säger att dimensionen av V är n, dvs. $\dim V = n$ ∎

Anm. ① Alla baser för samma V har lika många basvektorer.
② n st oberoende vektorer utgör garanterat en bas för $\mathbb{R}^n$.