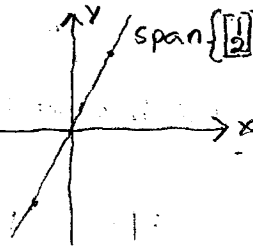
# Algebra och geometri 2017-11-02

Ex. span$\{\vec{v}\}$, där $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

Def. span$\{\vec{v}\} = \{c\vec{v}$, där $c\in\mathbb{R}\}$ t.ex. $\vec{0}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \ldots$




span$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$: en rät linje i $\mathbb{R}^2$ genom origo och punkten $(1,2)$

Ex. span$\{\vec{u},\vec{v}\}$, där $\vec{u}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ och $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

Faktum: span$\left\{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$, dvs. varje godtycklig vektor $\vec{w}=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas som en linjärkombination $a\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\vec{w}=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ (*)

Bevis: (*) motsvarar $\begin{cases}3a+b=p\\2a\phantom{+b}=q\end{cases}$ vill visa att detta system har lösning för alla $p,q\in\mathbb{R}$.

$\begin{bmatrix}3&1\\2&0\end{bmatrix} R_2-\frac{2}{3}R_1 \sim \begin{bmatrix}3&1\\0&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ 2 ledande element ⇒ systemet har lösning enligt satser om lösbarhet. ∎

Generellt: Givet $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ som inte är parallella. Om $\vec{u}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ och $\vec{v}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ så span$\{\vec{u},\vec{v}\}=\mathbb{R}^2$ ∎

Språk: vi säger att span$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$ är ett delrum av/till vektorrummet $\mathbb{R}^2$.
(sv. underrum) (en. subspace) (en. vector space)

## Vektorrum

En mängd där vektorer finns, som dessutom uppfyller följande axiom:

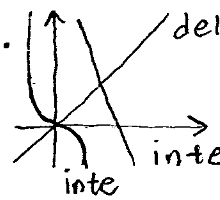
1. om $\vec{u},\vec{v}\in V$ så måste $\vec{u}+\vec{v}\in V$
2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ för alla $\vec{u},\vec{v}\in V$

⋮

10. $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$ för alla $\vec{u}\in V$

(se boken)

Ex.




**Delrum/Underrum**

Def. Låt $S$ vara en delmängd av vektorrummet $V$.
$S$ sägs vara ett delrum till $V$ om

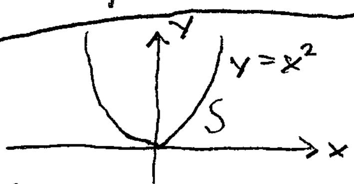
K1. $\vec{0}\in S$

K2. om $\vec{u},\vec{v}\in S$ måste $\vec{u}+\vec{v}\in S$
slutenhet under vektoraddition.

K3. Om $\vec{v}\in S$ måste $c\vec{v}\in S$, för alla $c\in\mathbb{R}$
slutenhet under multiplikation med skalär. ∎

Anm. De vanligaste vektorrummen (i kursen) är $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$.

Ex. Mängden av alla vektorer $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ som uppfyller $x+y=2$, dvs. $y=2-x$ är inte ett delrum till $\mathbb{R}^2$, ty K1 uppfylls inte




Ex. ... $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ som uppfyller $y=x^2$ är inte ett delrum.
ty vi ser att $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\in S$ och $\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}\in S$ men $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\13\end{bmatrix}\notin S$ ty $5^2\neq 13$, K2 uppfylls ej!

Sats: Alla linjära höljen är delrum. dvs. om $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\in\mathbb{R}^n$ så är span$\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ ett delrum till $\mathbb{R}^n$. ∎

Ex. 3 typer av delrum i $\mathbb{R}^2$

1. $\{\vec{0}\} = \text{span}\{\vec{0}\}$ det triviala delrummet.
2. $\mathbb{R}^2$ t.ex. $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$
3. En rät linje genom origo t.ex. $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$.

2015.10.23 # 5(b) (modifierad)

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \text{ i } \mathbb{R}^4 \quad \vec{w} = \begin{bmatrix}7\\-4\\3\\a\end{bmatrix}, \text{ där } a \in \mathbb{R}.$$

Bestäm a så att $\vec{w} \in \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Lösning: Vill hitta a så att $\vec{w}$ kan skrivas $c_1\vec{u} + c_2\vec{v} = \vec{w}$, för $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & \phantom{-4} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & a \end{array}\right] \end{array} \text{ har lösning}$$

Sätt 1: rad2 ger $c_1 = -4$
rad4 ger $2c_1 = a \Rightarrow a = 2(-4) = -8$
"Solution by inspection" $\blacksquare$

Sätt 2 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+8 \end{array}\right]$ Systemet har lösning om och endast om $a + 8 = 0$, dvs. $a = -8$. $\blacksquare$

2015.01.19 # 1(a)

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 & 1 \\ 3 & a+1 & a & 2 \end{array}\right]$ Finn a så att systemet har ingen lösning, en lösning respektive oändligt många lösningar.

$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{array}\right]$

Tänk på satsen om lösbarhet från F2.

1. Systemet har en unik lösning om trappmatrisen har 3 ledande element, dvs.

$$\begin{cases} a - 2 \neq 0 \\ a - 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a \neq 4 \end{cases}$$

2. Undersök $a = 2$
3. Undersök $a = 4$