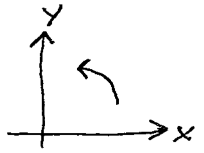
Algebra och Geometri 2017-11-24

Linjära geometriska avbildningar (forts.)

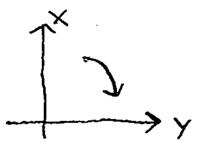
6. Rotation (i $\mathbb{R}^3$) kring en koordinataxel

Förkunskap: Högerorienterat koordinatsystem (alt. Högersystem)
=Moturs

i $\mathbb{R}^2$

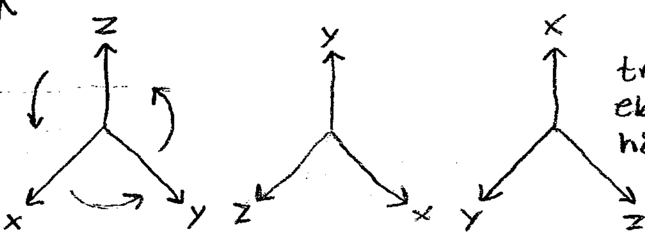


högersystem



vänstersystem

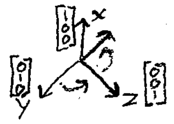
i $\mathbb{R}^3$



tre ekvivalenta högersystem

Ex. Låt $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (linjär avbildning) vara rotation med $90°$ kring x-axeln enligt högerhandsregeln (dvs. moturs i ett högersystem) Sök avbildngsmatrisen A.

$$A = \left[T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right]$$



$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

WolframAlpha: Rotation $90°$ around x-axis

Följdexempel: $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, som T fast $90°$ medurs

Avbildningsmatrisen bör vara $B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$ Anm. $S = T^{-1}$; dvs. $B = A^{-1}$ logiskt

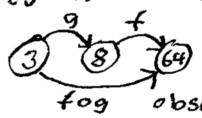
Kontroll:

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = I \quad \blacksquare$$

Sammansatta avbildningar

Inledning: Sammansatta funktioner
(eng.) Composite

Ex. $f(x) = x^2 \quad g(x) = x + 5$ Sök $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(8) = 64$
respektive $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(9) = 14$



observera ordningen!

Nu Sammansatta avbildningar

Def. Låt T och S vara två linjära avbildningar med A respektive B som avbildningsmatris.

Då gäller: $(T \circ S)(\vec{x}) = \overbrace{AB}^{\text{avb.matrisen av/till } T\circ S}\vec{x}$ $(*)$

$(S \circ T)(\vec{x}) = BA\vec{x}$ om A och B har passande storlekar

$(*)$ stämmer ty: $(T \circ S)(\vec{x}) = T(S(\vec{x})) = T(B\vec{x}) = AB\vec{x}$ $\blacksquare$

Ex. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med avb.mat. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ med avb.mat $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Sök avb.mat för $T \circ S$ resp $S \circ T$.

$T \circ S$ bör ha avb.mat. $\underset{2\times 2}{A}\,\underset{3\times 2}{B}$

$\uparrow\ \uparrow$
olika $\Rightarrow AB$ är odefinierad $\Rightarrow T\circ S$ är odefinierad.

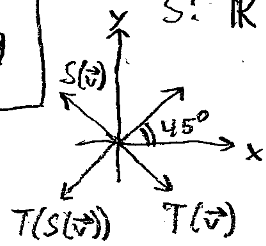
Däremot: $S \circ T$ bör ha avb.mat

$$BA = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}$$

▨

Ex. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reflektion kring x-axeln

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotation med 90° moturs



Beräkna $(T \circ S)(\vec{v}) = T(S(\vec{v})) = -\vec{v}$

resp $(S \circ T)(\vec{v}) = S(T(\vec{v})) = \vec{v}$

▨

Linjära avbildningar i olika baser

Låt avbildningen T ha avbildningsmatrisen A.

$$\begin{array}{ccc} \vec{v} & \xrightarrow{A = A_{S\leftarrow S}} & T(\vec{v}) = A\vec{v} \\ \vdots & & \vdots \\ [\vec{v}]_B & \xrightarrow[A_{B\leftarrow B}]{} & [T(\vec{v})]_B \end{array}$$

$A_{B\leftarrow B}$
avbildningsmatrisen med avseende på bas B

Ex. Låt avb. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 4x+5y \end{bmatrix}$

Låt S vara standardbasen $S = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Låt B vara en annan bas (för $\mathbb{R}^2$) $B = \left\{\underset{\vec{b}_1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{\vec{b}_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}\right\}$

a) Bestäm $\underbrace{\text{standardmatrisen}}_{=\text{avb.mat med avseende på basen } S = A_{S\leftarrow S}}$ till T.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 4x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow A_{S\leftarrow S} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Bestäm avb.mat. (till T) m.a.p. basen B, dvs. sök $A_{B\leftarrow B}$

Basbytesdiagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{bas } S & \xrightarrow{A_{S\leftarrow S}\ (\text{från a)})} & \text{bas } S \\ P_{S\leftarrow B} \uparrow & & \downarrow P_{B\leftarrow S} \\ \text{bas } B & \xrightarrow[A_{B\leftarrow B}\ \text{söks}]{} & \text{bas } B \end{array}$$

Kedjeregeln ger

$$A_{B\leftarrow B} = P_{B\leftarrow S}\, A_{S\leftarrow S}\, P_{S\leftarrow B}$$

Steg 1: Enklast att börja med $P_{\underline{\underline{S}}\leftarrow B}$ = {förra veckan} =

$$= \begin{bmatrix} [\vec{b}_1]_S & [\vec{b}_2]_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Steg 2: Ta fram $P_{B\leftarrow S} = (P_{S\leftarrow B})^{-1} =$

$= \left\{\text{adjunktformeln! } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A\right\} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

matrismultiplikation
$ABC = (AB)C = A(BC)$

Slutsats $A_{B\leftarrow B} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 42 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 21 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{svar}}$ ▨

4.5 Avbildning mellan abstrakta vektorrum

4.5 Avbildning mellan abstrakta vektorrum

Ex. $T: \mathbb{R}^2 \to P_3$ (vektorrummet av alla polynom av grad högst 3)

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = (a+b)x^3 + ax^2 + bx + (a-b)$$

T.ex. $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 3x^3 + x^2 + 2x - 1$

tänk: $a = 1$
$b = 2$