Algebra och Geometri 2017-11-17

Inversa matriser

Identitetsmatris I

Def. Låt A vara en kvadratisk $n\times n$-matris. I är en $n\times n$-matris sådan att $AI = IA = A$ Anm. Synonym: Enhetsmatris. ■

Faktum $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $I_n=\begin{bmatrix}1&&0\\&1&\\0&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

$AI=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\cdot1+b\cdot0 & a\cdot0+b\cdot1\\c\cdot1+d\cdot0 & c\cdot0+d\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ ■

Inversa matriser

Existerar endast för en del kvadratiska matriser.

Def: A sägs ha en invers om det finns en $n\times n$-matris sådan att $AB=BA=I$. Vi säger att B är inversen av A. Notation: $B=A^{-1}$ ■

Ex. $A=\begin{bmatrix}2&5\\2&6\end{bmatrix}$ A är inverterbar! (eng. invertible) $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-\frac{5}{2}\\-1&1\end{bmatrix}$

Testa $AA^{-1}=\begin{bmatrix}2&5\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-\frac{5}{2}\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot3+5\cdot(-1) & 2\cdot(-\frac{5}{2})+5\cdot1\\2\cdot3+6\cdot(-1) & 2\cdot(-\frac{5}{2})+6\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$ ■

Ex. $B=\begin{bmatrix}2&5\\8&20\end{bmatrix}$ B är icke-inverterbar, ty B^{-1} saknas/existerar inte
$\det B=2\cdot20-5\cdot8=0$

$C=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ C är icke-inverterbar
$\det C=0\cdot0-0\cdot0=0$

<u>Metod</u> Adjunktformeln (Idag: för 2×2-matriser)

Om $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ så är $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A$

determinanten av A: $\det A=ad-bc$

adjunktmatrisen av A: $\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ (eng. adjoint/adjugate matrix)

Anm. Om $\det A=0$ saknas A^{-1}

Ex. $A=\begin{bmatrix}2&5\\2&6\end{bmatrix}$ $\det A=2\cdot6-5\cdot2=2$ $\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}6&-5\\-2&2\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&-5\\-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-\frac{5}{2}\\-1&1\end{bmatrix}$ ■ Anm. $I^{-1}=I$, ty $II^{-1}=II=I$ ■

Lite om matrisekvationer

Ex. Lös ekvationen $A\vec{x}=\vec{b}$, där $A=\begin{bmatrix}2&5\\2&6\end{bmatrix}$ och $\vec{b}=\begin{bmatrix}12\\14\end{bmatrix}$

Metod 1 $\left[\begin{array}{cc|c}2&5&12\\2&6&14\end{array}\right]$ gaussa!

Metod 2 $A\vec{x}=\vec{b}$ multiplicera <u>båda</u> led med A^{-1} från <u>vänster</u>
$\Rightarrow A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{b}\Rightarrow I\vec{x}=A^{-1}\vec{b}\Rightarrow\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\begin{bmatrix}3&-\frac{5}{2}\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\14\end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ■

<u>Nytt koncept</u> Koordinater av en vektor $\vec{v}$

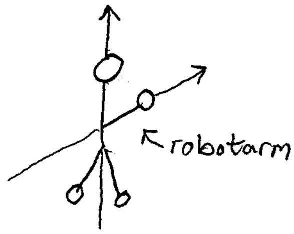
Ex. Ta två baser för $\mathbb{R}^2$:

$S = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\}$ standardbasen $\qquad B = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\}$

Två olika sätt att få/generera $\vec{v} = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$:

$$5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$



Språk: Vi säger att koordinaterna av $\vec{v}$ med avseende på basen B är 3 och 2.

Notation $[\vec{v}]_B = \underbrace{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}}$ kallas koordinatvektorn

Def. Låt $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ vara en bas för ett vektorrum V.
Låt $\vec{v} \in V$ sådan att $c_1\vec{b}_1 + \dots + c_k\vec{b}_k = \vec{v}$
Då gäller att $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_k\end{bmatrix}$ $\blacksquare$

Ex. 1. $B = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbb{R}^3$. Om $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$, vad är $\vec{v} = [\vec{v}]_S$?

Svar $\vec{v} = 3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \dots = \underline{\underline{\begin{bmatrix}3\\4\\12\end{bmatrix}}}$ $\blacksquare$

Ex. 2. $\mathbb{R}^2$ med 2 baser: $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\}$ Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix}-2\\7\end{bmatrix} = [\vec{v}]_S$

$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} \right\}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix}1\\16\end{bmatrix} = [\vec{w}]_S$

a) Beräkna $[\vec{v}]_B$

Sök $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$, där $c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 = \vec{v}$, dvs. $c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\7\end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 7\end{array}\right]$ Svar $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ $\blacksquare$

gaussa!

b) Bestäm $[\vec{w}]_B$: På samma sätt fås $[\vec{w}]_B = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}}}$ Svar $\blacksquare$

<u>Nytt koncept</u> Basbytesmatris/övergångsmatris

Ex. 2

Fråga Finns det någon matris A s.a. $[\vec{v}]_B = A[\vec{v}]_S$?

Ja! Vi betecknar $A = P_{B \leftarrow S}$ Faktum $P_{B \leftarrow S} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[\vec{e}_1]_B & [\vec{e}_2]_B\end{bmatrix}$

Testa $P_{B \leftarrow S}[\vec{v}]_S = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(-2) + 0\cdot 7\\ (-\frac{1}{3})(-2) + (\frac{1}{3})\cdot 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} = [\vec{v}]_B$

P.s.s. $P_{B \leftarrow S}[\vec{w}]_S = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\16\end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = [\vec{w}]_B$

$\underline{\text{Metod}}$ Låt V ha 2 baser: $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k\}$

$C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_k\}$

Sats $$P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [\vec{b}_1]_C & [\vec{b}_2]_C & \cdots & [\vec{b}_k]_C \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

(*) $$P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [\vec{c}_1]_B & [\vec{c}_2]_B & \cdots & [\vec{c}_k]_B \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Räkneregler

① $P_{C \leftarrow B} = (P_{B \leftarrow C})^{-1}$

$$\begin{tikzcd} {[\vec{v}]_B} \arrow[r, bend left, "P_{C \leftarrow B}"] & {[\vec{v}]_C} \arrow[l, bend left, "B_{B \leftarrow C}"] \end{tikzcd}$$

② $P_{C \leftarrow A} = P_{C \leftarrow B} P_{B \leftarrow A}$ kedjeregeln

Ex. 3. $$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

Finn $P_{B \leftarrow C}$

Metod 1: Använd (*) Se Ex. 2.

Metod 2: Kedjeregeln $\underbrace{P_{S \leftarrow C}}_{\text{lätt}} = \underbrace{P_{S \leftarrow B}}_{\text{lätt}} \overbrace{P_{B \leftarrow C}}^{\text{söks}}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} | & | \\ [\vec{c}_1]_S & [\vec{c}_2]_S \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ [\vec{b}_1]_S & [\vec{b}_2]_S \\ | & | \end{bmatrix} \underbrace{P_{B \leftarrow C}}_{\text{ansätts}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}}_{3\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{2\times 2} = \left(\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \\ -a-b & -c-d \end{bmatrix} \right)$$

Svar

$$P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$