Stukan 11

Ordkunskap: Se till att du förstår vad följande begrepp innebär:

matrismultiplikation

transponat (av en matris)

inversa matriser

nollrum (till en matris) (eng. nullspace)

kolonnrum (till en matris) (eng. columnspace)

bas (för ett vektorrum)

Övning 1. Givet matriserna $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Beräkna AB respektive BA.

b) Verifiera med beräkningar att $(AB)^T = B^T A^T$. (Observera ordningen! Högerledet är <u>inte</u> $A^T B^T$.)

c) Bestäm A^{-1} respektive B^{-1}.

d) Lös matrisekvationen $A\vec{x} = \vec{b}$, där $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$. (Vi vill alltså bestämma vektorn $\vec{x}$ sådan att $A\vec{x} = \vec{b}$.)

Övning 2. Bestäm (med hjälp av lämpliga radoperationer) den inversa matrisen till $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Övning 3. Givet matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som redan är på (reducerad) trappstegsform.

a) Bestäm $\operatorname{rank} A$ (rangen av A).

b) Bestäm en bas för $\operatorname{Col} A$ (kolonnrummet till A) och sedan $\dim(\operatorname{Col} A)$.

c) Bestäm en bas för $\operatorname{Null} A$ (nollrummet till A) och sedan $\dim(\operatorname{Null} A)$.

d) Nulliteten (eng. the nullity) av A, betecknad $\operatorname{nullity} A$, är ett annat ord för dimensionen av nollrummet till A. Bestäm $\operatorname{nullity} A$.

Övning 4. Givet matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 13 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm en bas för $\operatorname{Null} A$ (nollrummet till A) och sedan $\dim(\operatorname{Null} A)$.

b) Bestäm en bas för $\operatorname{Col} A$ (kolonnrummet till A) och sedan $\dim(\operatorname{Col} A)$.

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. a) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & -1 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 21 \\ 11 & 17 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) & 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 35 \end{bmatrix}$

Kom ihåg att matrismultiplikation <u>inte</u> är kommutativ, dvs. AB <u>inte</u> är nödvändigtvis lika med BA.

b) $(AB)^T = \begin{bmatrix} 22 & 21 \\ 11 & 17 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 22 & 11 \\ 21 & 17 \end{bmatrix}$

$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \\ (-2) \cdot 2 + 5 \cdot 5 & (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 11 \\ 21 & 17 \end{bmatrix}$$

Det stämmer!

c) Vi kan räkna ut de inversa matriserna med hjälp av adjunktformeln för en 2×2-matris:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{2 \cdot 3 - (-1) \cdot 5} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \operatorname{adj} B = \frac{1}{1 \cdot 5 - 4 \cdot (-2)} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Snabb kontroll:

$$A^{-1}A = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \left(\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B^{-1}B = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Det stämmer!

d) Multiplicera båda led av ekvationen med A^{-1} från vänster och vi får

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + (-5) \cdot 6 \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -18 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{18}{11} \\ \frac{16}{11} \end{bmatrix}$$

Snabb kontroll:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -18 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 \\ 16 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 44 \\ 66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

Det stämmer!

Övning 2. Vi kan invertera A med en känd algoritm:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} R_1 \\ -\frac{1}{8}R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{3}{8} \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 8R_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -9 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 - 4R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -9 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{2}R_3 \\ R_2 - \frac{5}{8}R_3 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -9 & 3 \end{array}\right]$$

Den sökta matrisen är således $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 6 & -2 \\ 8 & -9 & 3 \end{bmatrix}$. Vi kan, om vi vill, kontrollera svaret med multiplikationen $A^{-1}A$ (eller AA^{-1}). Blir produkten $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ så har vi gjort rätt.

Övning 3. Givet att $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Rangen av A är lika med antalet ledande element i en trappstegsmatris som är radekvivalent med A. Eftersom A redan är på trappstegsform är rangen av A just antalet (röda) ledande element i A, alltså 3.

Svar: $\operatorname{rank} A = 3$.

b) Kolonnrummet till A är per definition det vektorrum som spänns upp av kolonnerna i A:

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

För att erhålla en bas för Col A ska vi, bland de fem ovanstående vektorerna, välja ut så många linjärt oberoende vektorer som möjligt. De ledande elementen (röda) i matrisen A (på trappstegsform) visar att det är de vektorer i kolonnerna nummer 1, 3 och 5 som är linjärt oberoende.

Svar: En bas för Col A är $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Härmed fås $\dim(\operatorname{Col} A) = 3$.

Viktig lärdom: För varje matris A gäller att $\dim(\operatorname{Col} A) = \operatorname{rank} A$.

c) Nollrummet till A är per definition det vektorrum som består av alla vektorer $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ sådana att $A\vec{x} = \vec{0}$. Notera att $\vec{x}$ måste ha fem komponenter, annars är matrismultiplikationen $A\vec{x}$ odefinierad. Detta är som att lösa det ekvationssystem som motsvaras av matrisen

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

vilket innebär att

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t - s \\ t \\ 2s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

där s, t är godtyckliga tal. Nollrummet till A kan alltså skrivas span $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, dvs. en bas för Null A är $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ och $\dim(\text{Null } A) = 2$.

d) Vi ser enkelt att nullity $A = \dim(\text{Null } A) = 2$.

Viktig lärdom: För varje matris A med n kolonner gäller att rank $A +$ nullity $A = n$. I detta fall gäller att rank $A +$ nullity $A = 3 + 2 = 5$, vilket är just antalet kolonner i A.

Eftersom rank $A = \dim(\text{Col } A)$ (lärdomen från delfråga (b)) och nullity $A = \dim(\text{Null } A)$, kan vi även skriva $\dim(\text{Col } A) + \dim(\text{Null } A) = n$. Dessa samband är kända under namnet *rangsatsen*, alternativt *dimensionssatsen*.

Nästa vecka (**Modul 4**) kommer vi att få se ett ytterligare utseende för samma sats.

Kort (och begriplig om du kommer ihåg Modul 1) motivering för sambanden: Låt matrisen A vara radekvivalent med en matris S på trappstegsform.

i) Minns att rank A är lika med antalet ledande element i S, alltså lika med antalet ledande variabler i det motsvarande ekvationssystemet.

ii) Minns också att nullity A lika med antalet parametrar i lösningen till det motsvarande ekvationssystemet (enligt det vi gjorde på delfråga (c)), alltså lika med antalet fria variabler i det motsvarande ekvationssystemet.

Eftersom summan av antalet ledande variabler och antalet fria variabler är n (som är lika med antalet kolonner i A), är det naturligt att rank $A +$ nullity $A = n$.

Övning 4. Här behöver vi först överföra A till trappstegsform:

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\3 & 5 & 2\\5 & 13 & 4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}R_1\\R_2-3R_1\\R_3-5R_1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\0 & -7 & -1\\0 & -7 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}R_1\\R_2\\R_3-R_2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\0 & -7 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

a) Nollrummet till A är per definition det vektorrum som består av alla vektorer $\vec{x} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ sådana att $A\vec{x} = \vec{0}$. Notera att $\vec{x}$ måste ha tre komponenter, annars är matrismultiplikationen $A\vec{x}$ odefinierad. Detta är som att lösa det ekvationssystem som motsvaras av matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & 0\\3 & 5 & 2 & 0\\5 & 13 & 4 & 0\end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & 0\\0 & -7 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

vilket innebär att

$$\begin{cases}x+4y+z=0\\-7y-z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-t-4\left(-\frac{1}{7}t\right)\\-\frac{1}{7}t\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{7}t\\-\frac{1}{7}t\\t\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}\\-\frac{1}{7}\\1\end{bmatrix}$$

där t är ett godtyckligt tal. För enkelhets skull kan vi också bryta ut $1/7$ och få

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \frac{1}{7}t\begin{bmatrix}-3\\-1\\7\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}-3\\-1\\7\end{bmatrix}$$

där s är ett godtyckligt tal.

Nollrummet till A kan alltså skrivas span $\left\{\begin{bmatrix}-3\\-1\\7\end{bmatrix}\right\}$, dvs. en bas för Null A är $\left\{\begin{bmatrix}-3\\-1\\7\end{bmatrix}\right\}$ och $\dim(\text{Null } A) = 1$.

b) Tänk som vi gjorde i **Övning 3**. Med hjälp av $\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\0 & -7 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ på trappstegsform ser vi att en bas för Col A är $\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\13\end{bmatrix}\right\}$. Härmed fås $\dim(\text{Col } A) = 2$.