Stukan 5 & 6

Ordkunskap: Se till att du känner till de viktiga formlerna som berör följande begrepp:

räta linjens ekvation (på parameterform)

planets ekvation (på parameterform)

planets ekvation (på skalärform / standardform)

skalärprodukt

vektornorm (synonym: -längd, -belopp)

projektion (synonym: ortogonal projektion)

Övning 1. a) Bestäm på parameterform en ekvation till den räta linjen $y = 2x - 3$ i xy-planet.

b) Bestäm på parameterform en ekvation till den räta linjen i xyz-rummet som går genom punkten $P = (4, -1, 5)$ och som är parallell med linjen $\mathcal{L}$ som ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$.

Övning 2. a) Bestäm på skalärform en ekvation till planet Π som innehåller punkten $P = (4, -1, 5)$ och som är vinkelrätt mot linjen $\mathcal{L}$ som ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$.

b) Bestäm skärningspunkten mellan planet Π och den räta linjen som ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, där $k \in \mathbb{R}$.

Övning 3. Ange en ekvation till skärningslinjen mellan de två planen som ges av $x + 2y - 3z = 0$ respektive $-2x + 6y + z - 5 = 0$.

Övning 4. Låt $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ och $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm $\operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$. Bestäm sedan $\|\operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b}\|$.

b) Bestäm $\operatorname{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Övning 5. a) Beräkna (det minsta) avståndet mellan punkten $P = (2, -5)$ och den räta linjen som ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$.

b) Beräkna (det minsta) avståndet mellan punkten $Q = (3, 1, 4)$ och planet $x + 2y - 3z + 2 = 0$.

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. a) Två punkter på denna linje är till exempel $P = (0, -3)$ och $Q = (2, 1)$. En riktningsvektor till linjen kan tas som $\overrightarrow{PQ} = (2, 4)$.

Svar: En möjlig ekvation (på parameterform) till linjen är $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$.

b) Om den sökta linjen är parallell med linjen $\mathcal{L}$ som ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ är det naturligt att den är parallell med vektorn $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, som är en riktningsvektor till linjen $\mathcal{L}$.

Svar: En möjlig ekvation (på parameterform) till linjen är $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$.

Övning 2. a) Om det sökta planet är vinkelrätt mot linjen $\mathcal{L}$ som ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ är det naturligt att det är vinkelrätt mot vektorn $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, som är en riktningsvektor till linjen $\mathcal{L}$. Vektorn $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ kan således tas som en normalvektor till planet Π.

En ekvation (på skalärform) till planet Π är

$5(x-4) + 0\big(y-(-1)\big) + 2(z-5) = 0$

$\Leftrightarrow 5x - 20 + 2z - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 5x + 2z - 30 = 0$

eller med andra ord $5x + 2z = 30$.

Svar: $5x + 2z = 30$.

b) Varje punkt på denna linje har koordinater $x = -1 + 4k$, $y = 4 + 2k$ och $z = 3 + k$. Insättning i planets ekvation $5x + 2z = 30$ ger

$$5(-1+4k) + 2(3+k) = 30 \Leftrightarrow -5 + 20k + 6 + 2k = 30 \Leftrightarrow k = \frac{29}{22}$$

Skärningspunkten har således koordinater

$x = -1 + 4 \cdot \frac{29}{22} = \frac{47}{11}$

$y = 4 + 2 \cdot \frac{29}{22} = \frac{73}{11}$

$z = 3 + \frac{29}{22} = \frac{95}{22}$

Svar: $(x, y, z) = \left(\frac{47}{11}, \frac{73}{11}, \frac{95}{22}\right)$.

Övning 3. Detta är som att lösa det ekvationssystem som utgörs av ekvationerna $x + 2y - 3z = 0$ och $-2x + 6y + z = 5$. Nu är det Modul 1 igen!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \mathrm{R}_1 \\ \mathrm{R}_2 + 2\mathrm{R}_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \mathrm{R}_1 - \frac{1}{5}\mathrm{R}_2 \\ \mathrm{R}_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} \mathrm{R}_1 \\ \frac{1}{10}\mathrm{R}_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Känner du igen en matris på reducerad trappstegsform, där vi direkt kan läsa av lösningen?

Skärningslinjens ekvation (på parameterform) är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2t \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där $t \in \mathbb{R}$.

Övning 4. a) Använd projektionsformeln och vi får $\operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

Härmed fås $\|\operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b}\| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{162}{4}} = \sqrt{\frac{81}{2}} = 9/\sqrt{2}$.

b) På samma sätt fås $\operatorname{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\frac{252}{53}, -\frac{72}{53}\right)$.

Övning 5. a) Det är bra att du först ritar en idéskiss.

Tag en punkt på linjen, säg $Q = (0, 2)$. Bilda vektorn $\overrightarrow{QP} = (2, -7)$. Notera att en vektor parallell med linjen är $\vec{u} = (1, -2)$. Med lite eftertanke inser vi att det sökta avståndet är precis

$$\|\overrightarrow{QP} - \operatorname{proj}_{\vec{u}} \overrightarrow{QP}\| = \cdots = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ -\frac{32}{5} \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Svar: $3/\sqrt{5}$ (längdenheter).

b) Här kan vi använda projektionstänkandet eller den snabba avståndsformeln:

$$\left| \frac{3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} \right| = \left| \frac{-5}{\sqrt{14}} \right| = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

Svar: $5/\sqrt{14}$ (längdenheter).

Anmärkning: På WolframAlpha kan vi köra kommandot ”distance from $(3, 1, 4)$ to $x + 2y - 3z + 2 = 0$” som resulterar i samma svar.