Stukan 20

Ordkunskap: Se till att du känner till definitionerna av och eventuellt de viktiga formlerna för följande begrepp:

ortogonalt komplement

minsta-kvadrat-metoden

Övning 1. Låt $V = \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ vara ett delrum till $\mathbb{R}^5$. (Notera att $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är linjärt oberoende och utgör en bas för V.)

a) Bestäm det ortogonala komplementet till V, betecknat $V^\perp$, och sedan en bas för $V^\perp$.

b) Verifiera (för detta fall) dimensionssatsen som lyder: Om V är ett delrum till $\mathbb{R}^n$ gäller att

$$\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^n = n$$

Övning 2. Låt V vara skärningsområdet mellan de två hyperplan i $\mathbb{R}^4$ som ges av

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Bestäm en bas för delrummet V.

b) Finn ett ekvationssystem vars lösningar utgör delrummet $W = V^\perp$.

Anmärkning: Detta är uppgift **2**, från tentamen 2016-10-21, med polerad formulering.

Övning 3. Klimatstatistiken visar att vintermedeltemperaturen i Stockholms län förändras enligt följande tabell (temperaturen är avrundad till heltalsgrader):

Period 0 (1961-1970)	-5 ℃
Period 1 (1971-1980)	-2 ℃
Period 2 (1981-1990)	-3 ℃
Period 3 (1991-2000)	-1 ℃
Period 4 (2001-2010)	-1 ℃

Bestäm en ekvation på formen $T(k) = Ak + B$ som stämmer bäst med dessa värden i minsta-kvadrat-mening. Här är k nummer av perioden och $T(k)$ är medeltemperaturen i period k.

Anmärkning: Detta är uppgift **2** från tentamen 2016-06-09.

Övning 4. Anpassa kurvan $y = ax^2 + bx + c$ med minsta-kvadrat-metoden till följande mätdata:

x	-1	0	1	2
y	2	0	2	4

Anmärkning: Detta är uppgift **3** från tentamen 2015-01-19.

Facit

Latin för alla: Ordet ”vektor” på svenska och ”vector” på engelska kommer av latinets ”vector” som bokstavligen betyder ”bärare”, bland annat.

En vektor $\overrightarrow{PQ}$ är alltså något som bär punkten P till punkten Q.

Övning 1. a) Betrakta en godtycklig vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^5$ som ligger i $V^\perp$.

I så fall måste $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$ vara ortogonal mot $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ samtidigt:

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Detta ekvationssystem löses lätt:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ (-1)R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$, vilket innebär att

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -s + t \\ -t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$, där s och t är godtyckliga reella tal.

Nu ser vi att $V^\perp = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och en bas för $V^\perp$ är $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) I detta fall har vi

$$\dim V + \dim V^\perp = 3 + 2 = 5 = \dim \mathbb{R}^5$$

Det stämmer!

Anmärkning: 1. Om delrummet V har en bas $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_k}\}$ bestäms det ortogonala komplementet $V^\perp$ av ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} — & \overrightarrow{b_1} & — & 0 \\ — & \overrightarrow{b_2} & — & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ — & \overrightarrow{b_k} & — & 0 \end{array}\right]$$

2. Att $\vec{x} \in V^\perp$ betyder egentligen att $\vec{x}$ ska vara ortogonal mot alla vektorer i V. I våra beräkningar räcker det dock med att kräva att $\vec{x}$ är ortogonal mot $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ (som är vektorerna i en bas för V).

Motivering: Att $\vec{x}$ är ortogonal mot $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ innebär att $\vec{x} \cdot \vec{a} = \vec{x} \cdot \vec{b} = \vec{x} \cdot \vec{c} = 0$.

Varje godtycklig vektor $\vec{v} \in V$ kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$:

$$\vec{v} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c}$$

Detta innebär att

$$\vec{x} \cdot \vec{v} = \vec{x} \cdot \left(k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c}\right) = k_1\vec{x} \cdot \vec{a} + k_2\vec{x} \cdot \vec{b} + k_3\vec{x} \cdot \vec{c} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Nu har vi visat att om $\vec{x}$ är ortogonal mot $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är $\vec{x}$ automatiskt ortogonal mot alla vektorer i V.

Övning 2. a) Vi börjar med att bestämma V, vilket görs helt enkelt genom att lösa det givna ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Vi gaussar på:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - R_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ \left(-\frac{1}{2}\right) R_2 \end{bmatrix}$$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 - R_2 \\ R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$, vilket innebär att

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, där s och t är godtyckliga reella tal.

Nu ser vi att $V = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, dvs. en bas för V är $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

b) Enligt det vi lärt oss på **Övning 1** ovan ges det ortogonala komplementet $W = V^{\perp}$ av systemet

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

vilket innebär

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Övning 3. Insättning av de givna värdena i uttrycket $T(k) = Ak + B$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} B = -5 \\ A + B = -2 \\ 2A + B = -3 \\ 3A + B = -1 \\ 4A + B = -1 \end{cases}$$

det vill säga

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Minsta-kvadrat-lösningen kan fås då vi multiplicerar båda led med koefficientmatrisens transponat:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vilket efter matrismultiplikationer ger

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Vi gaussar på

$$\left[\begin{array}{cc|c} 30 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & -12 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 - 2R_2 \\ R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 9 \\ 10 & 5 & -12 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - R_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & -21 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{10} R_1 \\ \frac{1}{5} R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{9}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{21}{5} \end{array}\right]$$

Nu ser vi att $A = 9/10$ och $B = -21/5$.

Slutsats: Den sökta ekvationen på formen $T(k) = Ak + B$ är

$$T(k) = \frac{9}{10}k - \frac{21}{5}$$

Övning 4. Insättning av de givna värdena i uttrycket $y = ax^2 + bx + c$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ c = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \end{cases}$$

det vill säga

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Minsta-kvadrat-lösningen kan fås då vi multiplicerar båda led med koefficientmatrisens transponat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vilket efter matrismultiplikationer ger

$$\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Vi gaussar på:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 20 \\ 8 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2}R_1 \\ \frac{1}{2}R_2 \\ \frac{1}{2}R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 4 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 - 2R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -3 & -4 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - 3R_3 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Den sista matrisen är inte en trappstegsmatris som vi brukade vilja ha. Detta gör dock inget!

Redan nu kan vi läsa av att

$$\begin{cases} a - 2b + c = 2 \\ -10b = 2 \\ 7b - c = -2 \end{cases}$$

Den andra ekvationen $-10b = 2$ ger $b = -\frac{2}{10} = -1/5$.

Den tredje ekvationen $7b - c = -2$ ger $c = 7b + 2 = 7\left(-\frac{1}{5}\right) + 2 = -\frac{7}{5} + 2 = 3/5$.

Den första ekvationen $a - 2b + c = 2$ ger $a = 2 - c + 2b = 2 - \frac{3}{5} + 2\left(-\frac{1}{5}\right) = 2 - \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = 1$.

Slutsats: Den sökta kurvan på formen $y = ax^2 + bx + c$ är

$$y = x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$