SF1624 Algebra och Geometri

2017-10-30

Tâm Vũ tamv@kth.se universitetsadjunkt Inst. för Matematik

Tentamen
- Del A 12p
- Del B 12p
- Del C 12p

Algebra (linjär algebra)

6 seminarier ger poäng till del A på Tentan.

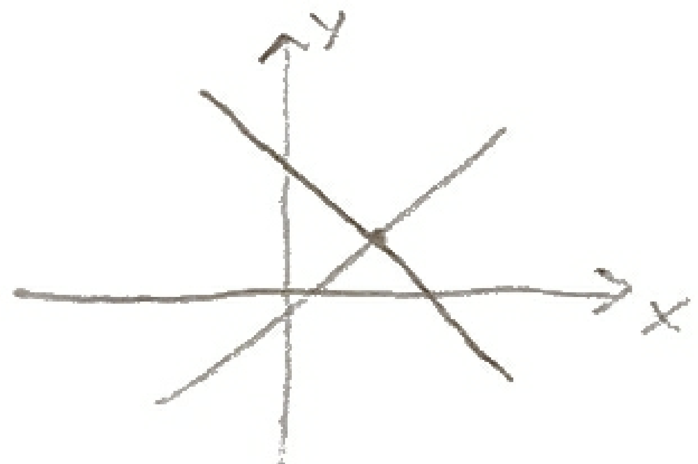
Geometri	Algebra
punkt •	vektor
rät linje	matris
plan	linjär avbildning
hyperplan	linjärt ekvations-system

Geometriskt exempel

Ex. Två räta linjer i xy-planet:

$x - 2y = 1$
$3x + 4y = 13$

Bestäm skärningspunkten.



Lösning: vill lösa

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & \times 3 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

vill ha bort x

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases} \quad \text{rad2} - \text{rad1}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ 10y = 10 \end{cases} \quad \text{lös ut } y$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ y = 1 \end{cases} , \text{dvs } x = \frac{3 + 6y}{3} = 3$$

Svar: $(x, y) = (3, 1)$ ▢

Flera exempel

Ex.
$$\begin{cases} x + 2y = 5 & \times 3 \\ 3x + 6y = 17 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 3x + 6y = 15 \\ 3x + 6y = 17 \end{cases} \quad \text{rad 2} - \text{rad 1}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 3x + 6y = 15 \\ 0 = 2 \end{cases} \quad \text{omöjligt}$$

Systemet saknar lösning Dvs.

parallella linjer ingen skärningspunkt

Ex.
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases} \quad \text{samma process}$$

$\Updownarrow$

$\vdots$

$$\begin{cases} 3x + 6y = 15 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{alltid sant}$$

dvs. $3x + 6y = 15$

Svar: oändligt många lösningar

sammanfallande linjer

Sammanfattning

Ett linjärt system har antingen exakt en lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar.

Linjär ekvation

Def. En ekvation sägs vara linjär om den kan skrivas

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots a_n x_n = b$

där $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är obekanta

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ och b är de bekanta

Ex. linjär $x + 2y - 3z + w = 4$
$x - 3z = 2$

icke linjär
$x^3 = 2$
$x + y + \sin(z) = 1$

Tre elementära radoperationer

1. Multiplicera en rad med en nollskild konstant.

Ex. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \quad \times 4 \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 12y = 20 \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$

2. Addera (eller subtrahera) en rad med en multipel av en annan rad.

Ex. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ \ldots \\ x - 2y = 1 \quad \text{rad2} + 4 \times \text{rad1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ \ldots \\ 9x + 10y = 21 \end{cases}$

3. Byta plats på två rader

Ex. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ \ldots \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \ldots \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

"är radekvivalent med"

Större system

Ex. Lös systemet

$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 4x - 6y = -2 & R_2 - 2R_1 \\ \underbrace{-2x}_{\text{vill trolla bort } x} + 7y + 2z = 9 & R_3 + R_1 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ -8y - 2z = -12 \\ 8y + 3z = 14 \end{cases}$ ...

Matrisrepresentation – Några begrepp

Ex. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ koefficientmatrisen

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & \uparrow \\ & & & \text{högerleden} \end{array} \end{array}$$

totalmatrisen/utökade matrisen (eng. augmented matrix)

$\equiv$ rader $|||$ kolonner/kolumner (svengelska)

Ex,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ \boxed{4} & -6 & 0 & -2 \\ \boxed{-2} & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & \boxed{8} & 3 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

vill ha nollor — vill ha noll — avläsa systemet

Gausseliminering
-elimination

dvs. $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ \quad -8y - 2z = -12 \\ \quad\quad \underbrace{z = 2}_{\text{najs!}} \end{cases}$

Återsubstitution

$$y = \frac{-12 + 2z}{-8} = \frac{-12 + 2 \cdot 2}{-8} = \underline{\underline{1}}$$

$$x = \frac{5 - z - y}{2} = \frac{5 - 2 - 1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Svar $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Stukan på Canvas

! Trappmatris/Matris på trappstegsform (eng. row echelon form)

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>inte</u> $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Definition Trappmatris 2 villkor

1. Eventuella nollrader hamnar längst ned i matrisen.

2. För två rader bredvid varandra ska <u>ledande elementet</u>, i den övre raden
   det 1:a nollskilda elementet
   stå strikt till vänster om ledande elementet i den undre raden.