Stukan 15

Ordkunskap: Se till att du känner till definitionerna av och eventuellt de viktiga formlerna för följande begrepp:

sammansatt avbildning

avbildningsmatris (med avseende på en viss bas $\mathcal{B}$)

sunt förnuft

hopp om framtiden

Övning 1. Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ och $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vara två linjära avbildningar. Låt avbildningsmatrisen till T vara $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ och avbildningsmatrisen till S vara $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Avgör om det finns någon av de två sammansatta avbildningarna $T \circ S$ och $S \circ T$ som är definierad. Om någon sammansatt avbildning är definierad, bestäm dess avbildningsmatris.

Övning 2. Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som projicerar varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ på den räta linjen $\mathcal{L}$ som ges av ekvationen $2x - 5y = 0$. (Med andra ord: $T(\vec{v}) = \text{proj}_{\mathcal{L}}\, \vec{v}$.)

Låt $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som speglar varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ kring linjen $\mathcal{L}$. (Med andra ord: $S(\vec{v}) = \text{ref}_{\mathcal{L}}\, \vec{v}$.)

Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Det är sant att $T(\vec{u}) = \text{proj}_{\mathcal{L}}\, \vec{u} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$. (Du behöver inte kontrollera detta.)

Bestäm $(T \circ T)(\vec{u})$, $(S \circ S)(\vec{u})$, $(S \circ T)(\vec{u})$ respektive $(T \circ S)(\vec{u})$. **Tips:** Använd inte algebraiska beräkningar om de inte faktiskt behövs.

Anmärkning: 1. $(S \circ T)(\vec{u})$ är densamma som $S\big(T(\vec{u})\big)$.

2. I vissa böcker skrivs $T^2(\vec{u})$ istället för $(T \circ T)(\vec{u}) = T\big(T(\vec{u})\big)$.

Övning 3. Låt den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 7y \end{bmatrix}$$

Låt $\mathcal{S}$ och $\mathcal{B}$ vara två baser för $\mathbb{R}^2$. Låt $\mathcal{S}$ vara standardbasen $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, där $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Låt $\mathcal{B}$ vara $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\}$, där $\overrightarrow{b_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{b_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm standardmatrisen till T. Vi söker alltså avbildningsmatrisen (till T) med avseende på standardbasen $\mathcal{S}$.

b) Bestäm avbildningsmatrisen (till T) med avseende på basen $\mathcal{B}$. **Ledtråd:** Använd exempelvis basbytesdiagrammet i samband med kedjeregeln som visades på föreläsningen.

c) Säg att vi nu har en ytterligare linjär avbildning $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vars avbildningsmatris med avseende på basen $\mathcal{B}$ är

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Bestäm $M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}}$, dvs. standardmatrisen till L.

Övning 4. (frivillig utmaning)

Låt den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara projektionen på den räta linjen $\mathcal{L}$ som ges av ekvationen $Ax - By = 0$, där A och B är några nollskilda konstanter.

Bestäm avbildningsmatrisen till T (med avseende på standardbasen, förstås).

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. Om $T \circ S$ vore definierad skulle den ha avbildningsmatrisen

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Denna matrismultiplikation är tydligen odefinierad (på grund av opassande storlekar), varför sammansättningen $T \circ S$ är odefinierad.

Däremot är $S \circ T$ definierad och har avbildningsmatrisen

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 14 & 5 \\ 12 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Övning 2. Sammansättningen $(T \circ T)(\vec{u}) = T\big(T(\vec{u})\big)$ innebär att vi först projicerar $\vec{u}$ på $\mathcal{L}$, och sedan projicerar resultatet på $\mathcal{L}$ igen. Med tanke på vad projektion gör är det självklart att

$$T\big(T(\vec{u})\big) = T(\vec{u}) = \mathrm{proj}_{\mathcal{L}}\, \vec{u} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Sammansättningen $(S \circ S)(\vec{u}) = S\big(S(\vec{u})\big)$ innebär att vi först speglar $\vec{u}$ kring $\mathcal{L}$, och sedan speglar resultatet kring $\mathcal{L}$ igen. Med tanke på vad spegling gör är det också självklart att

$$S\big(S(\vec{u})\big) = \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sammansättningen $(S \circ T)(\vec{u}) = S\big(T(\vec{u})\big)$ innebär att vi först projicerar $\vec{u}$ på $\mathcal{L}$, och sedan speglar resultatet kring $\mathcal{L}$. Med lite eftertanke inser vi att

$$S\big(T(\vec{u})\big) = T(\vec{u}) = \mathrm{proj}_{\mathcal{L}}\, \vec{u} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Sammansättningen $(T \circ S)(\vec{u}) = T\big(S(\vec{u})\big)$ innebär att vi först speglar $\vec{u}$ kring $\mathcal{L}$, och sedan projicerar resultatet på $\mathcal{L}$. Med lite eftertanke inser vi att

$$T\big(S(\vec{u})\big) = T(\vec{u}) = \mathrm{proj}_{\mathcal{L}}\, \vec{u} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Med andra ord gäller att $(T \circ T)(\vec{u}) = (S \circ T)(\vec{u}) = (T \circ S)(\vec{u}) = \mathrm{proj}_{\mathcal{L}}\, \vec{u}$.

Övning 3. a) Avbildningsmatrisen A utgörs som bekant av koefficienterna till x och y:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

För att betona att A är avbildningsmatrisen med avseende på standardbasen $\mathcal{S}$ kan vi döpa om

$$A = A_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}}$$

b) Enligt basbytesdiagrammet och kedjeregeln gäller att

$$A_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}\, A_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}}\, P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{bas } \mathcal{S} \arrow[r, "A_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}}", "\text{givet}"'] & \text{bas } \mathcal{S} \arrow[d, "P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}"] \\
\text{bas } \mathcal{B} \arrow[u, "P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\text{sökt}", "A_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}"'] & \text{bas } \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Från delfråga (a) vet vi att $A_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Från **Stukan 12**, **Övning 2**, vet vi att

$$P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} | & | \\ [\vec{b_1}]_{\mathcal{S}} & [\vec{b_2}]_{\mathcal{S}} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{b_1} & \vec{b_2} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Också från **Stukan 12**, **Övning 2**, vet vi att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = (P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Således gäller att

$$A_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 1 & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & -60 \\ 25 & 90 \end{bmatrix} = \{\text{ om vi vill }\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 5 & 18 \end{bmatrix}$$

c) Vi ritar ett nytt basbytesdiagram

$$\begin{tikzcd}
\text{bas } \mathcal{S} \arrow[r, "M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}}", "\text{sökt}"'] \arrow[d, "P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}"'] & \text{bas } \mathcal{S} \\
\text{bas } \mathcal{B} \arrow[r, "\text{givet}", "M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}"'] & \text{bas } \mathcal{B} \arrow[u, "P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}$$

och tillämpar kedjeregeln igen:

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\, P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ -12 & 46 \end{bmatrix} = \{\text{ om vi vill }\} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -6 & 23 \end{bmatrix}$$

Övning 4. Det finns lite olika sätt att lösa uppgiften.

Metod 1: Två punkter på $\mathcal{L}$ är $P_1 = (0,0)$ och $P_2 = (B, A)$. En riktningsvektor till $\mathcal{L}$ är därför $\overrightarrow{P_1P_2} = (B, A)$.

Minns att avbildningsmatrisen har strukturen $\begin{bmatrix} | & | \\ T(\vec{e_1}) & T(\vec{e_2}) \\ | & | \end{bmatrix}$. Vi beräknar en sak i taget:

$$T(\vec{e_1}) = \operatorname{proj}_{\mathcal{L}} \vec{e_1} = \operatorname{proj}_{(B,A)} (1,0) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \frac{B}{A^2 + B^2}\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \frac{1}{A^2 + B^2}\begin{bmatrix} B^2 \\ AB \end{bmatrix}$$

$$T(\overrightarrow{e_2}) = \mathrm{proj}_{\mathcal{L}}\, \overrightarrow{e_2} = \mathrm{proj}_{(B,A)}\,(0,1) = \frac{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix} = \frac{A}{A^2+B^2}\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2}\begin{bmatrix}AB\\A^2\end{bmatrix}$$

Den (ut)sökta avbildningsmatrisen är således $\frac{1}{A^2+B^2}\begin{bmatrix}B^2 & AB\\AB & A^2\end{bmatrix}$.

Anmärkning: Istället för att beräkna $T(\overrightarrow{e_1})$ och $T(\overrightarrow{e_2})$ separat kan vi också göra så här.

Betrakta $T(\vec{v})$, där $\vec{v} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ är en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^2$:

$$T(\vec{v}) = \mathrm{proj}_{(B,A)}\,(x,y) = \frac{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix} = \frac{Bx+Ay}{A^2+B^2}\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2}\begin{bmatrix}B^2x+ABy\\ABx+A^2y\end{bmatrix}$$

$$= \{\text{ tänk matrismultiplikation baklänges }\} = \frac{1}{A^2+B^2}\begin{bmatrix}B^2 & AB\\AB & A^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

Det sista uttrycket visar att avbildningsmatrisen är precis $\frac{1}{A^2+B^2}\begin{bmatrix}B^2 & AB\\AB & A^2\end{bmatrix}$.

Saken är biff.

Metod 2: För skojs skull kan vi också göra så här. Inför en bas $\mathcal{B} = \{\vec{r}, \vec{n}\}$ för $\mathbb{R}^2$, där $\vec{r} = \begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}$ är en riktningsvektor till linjen $\mathcal{L}$ och $\vec{n} = \begin{bmatrix}A\\-B\end{bmatrix}$ är en normalvektor till $\mathcal{L}$. (Notera att $\vec{r}$ och $\vec{n}$ är ortogonala mot varandra, ty $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$.)

Av naturliga skäl gäller att $T(\vec{r}) = \mathrm{proj}_{\mathcal{L}}\, \vec{r} = \vec{r} = \begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}$ och $T(\vec{n}) = \mathrm{proj}_{\mathcal{L}}\, \vec{n} = \vec{0} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, varför avbildningsmatrisen med avseende på basen $\mathcal{B}$ är

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} | & | \\ [T(\vec{r})]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{n})]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \left[\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

För att hitta avbildningsmatrisen med avseende på standardbasen $\mathcal{S}$ kan vi använda kedjeregeln:

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\, P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}B & A\\A & -B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & A\\A & -B\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}B & A\\A & -B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{-B^2-A^2}\begin{bmatrix}-B & -A\\-A & B\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-B^2-A^2}\left(\begin{bmatrix}B & A\\A & -B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-B & -A\\-A & B\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-B^2-A^2}\begin{bmatrix}B & 0\\A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-B & -A\\-A & B\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-B^2-A^2}\begin{bmatrix}-B^2 & -AB\\-AB & -A^2\end{bmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2}\begin{bmatrix}B^2 & AB\\AB & A^2\end{bmatrix}$$

Den (ut)sökta avbildningsmatrisen är således $\frac{1}{A^2+B^2}\begin{bmatrix}B^2 & AB\\AB & A^2\end{bmatrix}$. Saken är biff.