Algebra och Geometri 2017-10-31

Anmärkning: i $\mathbb{R}^2$ (t.ex. xy-planet) tolkas $x+2y=1$ som en rät linje. I $\mathbb{R}^3$ (tex. xyz-rummet) tolkas ekvationen istället som ett plan där $z \in \mathbb{R}$.

Ex. B
$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+2z=9 \\ 2x+3y+3z=16 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ \boxed{1} & 2 & 2 & 9 \\ \boxed{2} & 3 & 3 & 16 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2-R_1 \\ R_3-2R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3-R_2 \end{array} \sim \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftarrow \text{känslig rad} \\ \;\; x \;\; y \;\; z \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad\;\; y+z=3 \\ 0x+0y+0z=1 \end{cases}$$
dvs. $0=1$ omöjligt

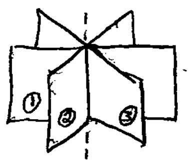
Svar: Systemet saknar lösning dvs. systemet är olösbart dvs. systemet är <u>inkonsistent</u>.

Ex. Lös systemet med totalmatriser

C
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right] \underbrace{\sim \cdots \sim}_{\text{gausselimenering}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad\;\; y+z=3 \\ \qquad\;\; 0=0 \leftarrow \text{kan strykas} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad\;\; y+\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kan vara godtycklig}}}{z}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-z-y=6-t-(3-t)=3 \\ y=3-z=3-t \\ z=t \end{cases}$$
, där $t \in \mathbb{R}$

Svar: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ svar på standardform



Satser om lösbarhet

Låt ekvationssystemet $[A|\vec{b}]$ vara ekvivalent med $[S|\vec{c}]$

1. Om någon rad i $[S|\vec{c}]$ är på formen $[0\,0 \ldots 0|a]$ där $a \neq 0$ har systemet ingen lösning. Ex. B

2. Annars: rank S = rank A
   om antalet ledande element i S = antalet variabler har systemet en (unik) lösning.

   om antalet ledande element i S < antalet variabler har systemet oändligt många lösningar. En parameterlösning.

<u>Speciellt</u> Linjära <u>homogena</u> system

Ex
$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x \qquad +z=0 \end{cases}$$
alla högerled är 0

har garanterat $x=y=z=0$ som en lösning

<u>Begrepp</u> Matris på <u>reducerad</u> trappstegsform

(eng: reduced row echelon form)

Ex. trappa, ej reducerad $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

trappa, reducerad $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3 villkor

1. matrisen A är redan på trappstegsform.
2. varje ledande element i A är en 1:a (ledande etta).
3. varje ledande 1:a har endast 0:or ovanför sig. ∎

Fördel: vi kan <u>direkt</u> läsa av lösningarna $x, y, z, \dots$

Ex. ej reducerad $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$ $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - 3y = 6 - 3 \cdot 2 = 0 \\ y = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$

däremot

reducerat $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

Ex. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_5 = 2 \\ x_3 + 2x_5 = 3 \\ x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$ ← börja här

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$

⇓

ledande variabler

fria variabler

(där $s, t \in \mathbb{R}$)

$\begin{cases} x_1 = 2 - 4t - 2s \\ x_2 = s \\ x_3 = 3 - 2t \\ x_4 = 5 - 3t \\ x_5 = t \end{cases}$

Svar på standardform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hur avläses lösningen? (om vi har en reducerad trappa)

1. Ringa in de ledande ettorna
2. De variabler som motsvaras av dessa ettor är ledande variabler.
3. De andra variablerna än fria variabler får vara godtyckliga parametrar.
4. Uttryck nu de ledande variablerna m.h.a. parametrarna.

<u>Begrepp</u> Rang (av en matris) (eng. rank)

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{R_2 - R_1}{\sim} S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\operatorname{rank} A = 2$

Def. En enkel formulering,

Låt matrisen A vara rad ekvivalent med S på trappstegsform.

Då:

$\operatorname{rank} A =$ antalet ledande element i S ∎

Ex. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{R_3 - 4R_1}{\sim} S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\operatorname{rank} C = 1$

Gauss-Jordan-eliminering