Algebra och Geometri 2017-11-20

Linjära avbildningar (eng. Linear maps/mappings)
(funktioner)

Ex. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ y \\ x+y-2 \end{bmatrix}$ ↙ Icke-linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$

Beräkna $T\Big(\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\vec{a}}\Big) = \begin{bmatrix} 2-4 \\ 4 \\ 2+4-2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$

Språk: T transformerar $\vec{a}$ till $\vec{b}$
= T avbildar $\vec{a}$ på $\vec{b}$
= $\vec{a}$ avbildas av T på $\vec{b}$

Def. ⌜en formulering⌟: Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en avbildning.

T sägs vara linjär om det finns en $\underset{\text{av } mn \text{ reella tal}}{\underline{m \times n\text{-matris}}}$, A sådan att $T(\vec{x}) = A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ▨

Ex. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y + 2z \\ x - 3y \end{bmatrix} \quad \underline{\text{linjär}}$$

skrivs om $= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}}_{A \text{ (2×3-matris)}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Två viktiga egenskaper $\quad T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\underline{\text{linjär}}$ s.a. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$

1. $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ additivitet
2. $T(k\vec{x}) = kT(\vec{x})$ homogenitet

] gemensamt namn: linjäritet.

för alla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ och alla $k \in \mathbb{R}$

Ex. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad T(\vec{a}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad T(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Beräkna $T(4\vec{a} - 2\vec{b}) = T(4\vec{a}) - T(2\vec{b}) = 4\,T(\vec{a}) - 2\,T(\vec{b}) = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Kort bevis

1. $T(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$
2. $T(k\vec{x}) = A(k\vec{x}) = k\underline{A\vec{x}} = k\,\underline{T(\vec{x})}$ ▨

Viktig konsekvens

② → ③ $T(\vec{0}) = \vec{0}$ $\quad$ ty: ② ger $T(k\vec{x}) = kT(\vec{x})$

Om $k = 0$ så $T(0\vec{x}) = 0\,T(\vec{x}) \Rightarrow T(\vec{0}) = \vec{0}$

Terminologi: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad T(\vec{x}) = A\vec{x}$

1. $\mathbb{R}^n$ definitionsmängden = domänen
2. $\mathbb{R}^m$ målmängden = kodomänen
3. A avbildningsmatrisen

Ex. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad T(\vec{x}) = A\vec{x}$, där $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

1. $T(\vec{e_x}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}}}$

2. $T(\vec{e_y}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}}}$

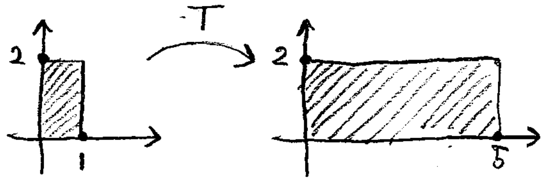
dvs. $A = \begin{bmatrix} | & | \\ T(\vec{e_x}) & T(\vec{e_y}) \\ | & | \end{bmatrix}$

Generellt $\quad T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{e_1}) & T(\vec{e_2}) & \dots & T(\vec{e_n}) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \uparrow \quad \uparrow \qquad\quad \nearrow$

kallas bilderna (eng. the images)
av standardbasvektorerna

Linjära <u>geometriska</u> avbildningar



töjning i x-led

① Töjning (synonym: skalning)

Ex. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Bestäm avbildningsmatrisen A s.a. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

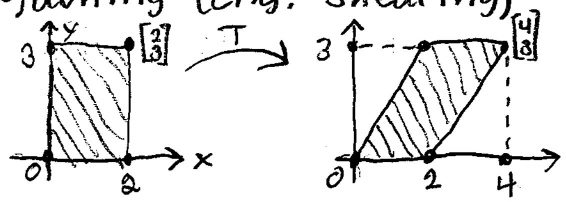
Minns att $A = \begin{bmatrix} | & | \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ | & | \end{bmatrix}$ $\quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ Kontroll: Vi vet att $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ enligt figuren.

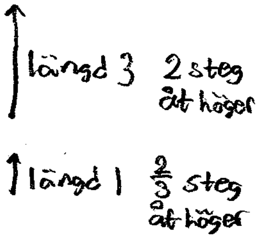
$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ stämmer!

② Skjuvning (eng. Shearing)

Ex.



$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$



$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ Kontroll: $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2/3 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ stämmer!

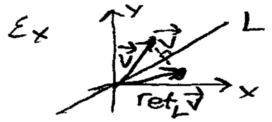
③ Rotation (synonym: Vridning) i $\mathbb{R}^2$

Rotera varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ med en vinkel θ <u>moturs</u>.

Sats. Avbildningsmatrisen är $A = \begin{bmatrix} | & | \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ■

④ Projektion se Modul 2.

⑤ Reflektion (synonym: Spegling)

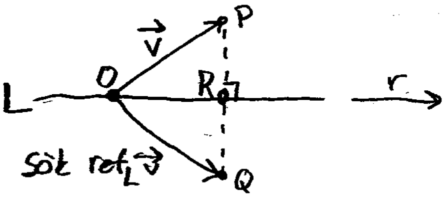


5.1 Kring en rät linje (i $\mathbb{R}^2$ & $\mathbb{R}^3$) genom $\underline{\text{origo}}$.

Problem. Givet en vektor $\vec v$ och en rät linje L med $\vec r$ som riktningsvektor. Bestäm $\text{ref}_L\vec v$

Alt. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ som speglar varje $\vec v\in\mathbb{R}^2$ kring L
eller $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\vec v\in\mathbb{R}^3$

Bestäm avbildningsmatrisen A.



1. Se att $\text{ref}_L\vec v = \vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} = \underbrace{\vec{OP}}_{\substack{\vec v\\ \text{given}}} + 2\underbrace{\vec{PR}}_{\text{hur?}}$

2. $\underline{\text{Notera att}}$ $\vec{PR} = -\vec{RP}$ och $\vec{OR} + \vec{RP} = \vec{OP} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{RP} = \vec{OP} - \vec{OR}}}$

Slutsats

$$\text{ref}_L\vec v = \vec{OP} + 2\vec{PR} = \vec{OP} - 2\underline{\underline{\vec{RP}}} = \vec{OP} - 2(\vec{OP} - \vec{OR}) = 2\vec{OR} - \vec{OP}$$

$$= (2\,\text{proj}_{\vec r}\vec v) - \vec v = \text{ref}_L\vec v$$ ▨

Ex. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ speglar varje $\vec v\in\mathbb{R}^2$ kring $L:\ 2x+y=0$ (dvs. $y=-2x$)

Sök avbildningsmatrisen $A = \begin{bmatrix} | & | \\ T(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) & T(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) \\ | & | \end{bmatrix}$.

1. Bestäm en riktningsvektor $\vec r$ för L: Ta 2 punkter på L. $O=(0,0)$ & $C=(1,-2)$
$\Rightarrow \vec r = \vec{OC} = (1,-2)$

2. $T(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) = \text{ref}_L\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = (2\,\text{proj}_{\vec r}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \left(2\frac{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \left(2\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix}2/5\\-4/5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3/5\\-4/5\end{bmatrix}$

3. $T(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = \text{ref}_L\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = (2\,\text{proj}_{\vec r}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \left(2\frac{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \left(2\cdot\frac{-2}{5}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix}-4/5\\8/5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4/5\\3/5\end{bmatrix}$

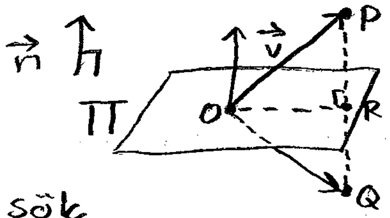
Svar: $A = \begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3 & -4\\ -4 & 3\end{bmatrix}$ ▨ WolframAlpha "reflection across $2x+y=0$"

5.2 Kring ett plan (i $\mathbb{R}^3$) genom origo.

Problem: Givet en vektor $\vec v$ och ett plan Π med $\vec n$ som normalvektor. Bestäm $\text{ref}_\Pi \vec v$.

Alt. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som speglar varje $\vec v \in \mathbb{R}^3$ kring Π.

Bestäm avbildningsmatrisen A.

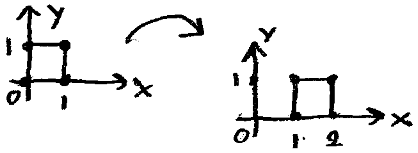


$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OP} + 2\vec{PR}$$
$$= \vec{OP} - 2\vec{RP}$$
$$= \vec{OP} - 2\,\text{proj}_{\vec n}\vec{OP}$$
$$= \underbrace{\vec v - 2\cdot\text{proj}_{\vec n}\vec v = \text{ref}_\Pi \vec v}$$

sök
$\vec{OQ} = \text{ref}_\Pi \vec v$

▨

<u>Icke-linjär</u> avbildning



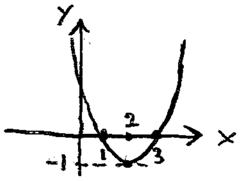
<u>namn</u>: parallellförflyttning
synonym: translation

$t_y \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \neq \vec 0$

Två vektorrum associerade med T (linjär)

Inledning funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$



nollställemängden $= \{1, 3\}$
värdemängden $= [-1, \infty)$

① Nollrummet av T (synonym: <u>Kärnan</u>, av T)
(eng.) kernel of T

Def. $\text{Null}\,T = \ker T = \{\vec x \in \mathbb{R}^n : T(\vec x) = \vec 0\}$ ▨

20160118 #3 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ med avbildningsmatrisen $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 7 & 11\end{bmatrix}$

a) (2 p) Bestäm en bas för $\ker T = \text{Null}\,T$.

Steg 1 Bestäm $\text{Null}\,T$, dvs. lös ekvationen $T(\overset{\text{från } \mathbb{R}^3}{\vec x}) = \vec 0 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A\vec x = \vec 0 \Rightarrow A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -3 & 0\\ 0 & 7 & 11 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & 0\end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{1}{7} & 0\\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & 0\end{array}\right]$ reducerad trappa

$\begin{cases} x + \frac{1}{7}z = 0 \\ y + \frac{11}{7}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{7}t\\ -\frac{11}{7}t\\ t\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}-\frac{1}{7}\\ -\frac{11}{7}\\ 1\end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{7}t}_{s}\begin{bmatrix}-1\\-11\\7\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}-1\\-11\\7\end{bmatrix}$, där $s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \text{Null}\,T = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\-11\\7\end{bmatrix}\right\}$

Steg 2 En bas för $\text{Null}\,T$ är $\left\{\begin{bmatrix}-1\\-11\\7\end{bmatrix}\right\}$

#1 Anm $\text{Null}\,T = \text{Null}\,A$
från modul 3
$\dim(\text{Null}\,T) =$ antalet fria variabler

▨

② Värderummet av T (synonym: Bildrummet/Bilden av T)

(eng.) Range (eng.) Image

Notation: $\mathrm{im}T$

Def. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\mathrm{im}T = \{T(\vec{x}) : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ ▨

! Faktum $\mathrm{im}T = \mathrm{span}\{\text{kolonnerna i } A\}$
$= \mathrm{Col}A$ ▨

Samma tentaproblem: Bestäm $\mathrm{im}T$ och en bas för $\mathrm{im}T$.

Steg 1. $\mathrm{im}T = \mathrm{Col}A = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\11\end{bmatrix}\right\}$

Steg 2. Från A (trappa) syns att $\underset{\vec{a}}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}$ & $\underset{\vec{b}}{\begin{bmatrix}-2\\7\end{bmatrix}}$ är linjärt oberoende
$\Rightarrow$ en bas för $\mathrm{im}T$ är $\{\vec{a}, \vec{b}\}$

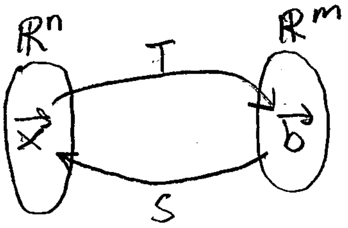
Anm #2 $\mathrm{im}T = \mathrm{Col}A$ (ibland skrivs: $\mathrm{im}A$) ← gillar inte Tâm

$\dim(\mathrm{im}T)$ = antalet ledande variabler = rank A

#1 & #2 ger Dimensionssatsen

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (linjär avbildning) $\dim(\ker T) + \dim(\mathrm{im}T) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$ ▨

Inversa avbildningar



Givet $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s.a. $T(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{b}$

Avb. $S: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ s.a. $S(\vec{b}) = B\vec{b} = \vec{x}$
för alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ och alla $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Vi säger att S och T är inversa avbildningar; $T^{-1} = S$ dvs. $S^{-1} = t$
$A^{-1} = B$ dvs. $B^{-1} = A$

Förra veckan: Endast $\overset{n\times n}{\text{kvadratiska}}$ matriser A kan ha en invers.

Om $\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ så $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}A = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$. A^{-1} finns $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Idag: Metod för bestämning av $\underset{m\times n}{A^{-1}}$:

Skapa $[A|I] \sim \cdots \sim [I|B]$. Då gäller: $A^{-1} = B$

$A\overbrace{A^{-1}}^{\text{söks}} = I$ $[A|I]$
$\sim \cdots \sim [I \quad | B]$

Ex. Bestäm A^{-1} om $A = \begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -5 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -9 & 8 & 3\end{array}\right]$$

A^{-1}

Kontroll: AA^{-1} ska alltid bli I.

! Om vi vid något läge får en nollrad i den vänstra delen så saknar A en invers. ▨

Invertible matrix theorem

Om A har en invers A^{-1}, gäller allt följande:
nxn-matris

1. A är radekvivalent med I
2. $\text{rank} A = n$
3. $\dim(\text{Col} A) = n$
4. kolonnerna i A är linjärt oberoende
5. kolonnerna i A utgör en bas för rummet $\mathbb{R}^n$