Stukan 19

Ordkunskap: Se till att du känner till definitionerna av och eventuellt de viktiga formlerna för följande begrepp:

ortogonal & ortonormal mängd (av vektorer)

nollrum

projektion (på ett delrum)

Gram-Schmidt-ortogonaliseringsprocess

Övning 1. Betrakta mängden $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

a) Visa att S är en ortogonal mängd av vektorer.

b) Finn den motsvarande ortonormala mängden genom att normera varje vektor i S.

Övning 2. En kvadratisk matris A sägs vara en **ortogonal** matris om kolonnerna i A utgör en **ortonormal** mängd. Egentligen borde en sådan A ha kallats en **ortonormal** matris men av historiska skäl har den fått namnet ”ortogonal matris”…

Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

a) Verifiera att A är en ortogonal matris.

b) Visa med beräkningar att $A^T A = I$, där I är identitetsmatrisen.

Anmärkning: Ett annat sätt att definiera en ortogonal matris A är att A ska uppfylla $AA^T = A^T A = I$.

Övning 3. Låt $W = \ker T$ vara nollrummet till avbildningen $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ med avbildningsmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Bestäm en bas för W.

b) Bestäm, med hjälp av Gram-Schmidt-process, en ortogonal bas för W.

c) Beräkna den ortogonala projektionen på W av vektorn $\vec{v} = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 2]^T$.

d) Bestäm en ortonormal bas (ON-bas) för W.

Anmärkning: ”Ortogonal projektion” är detsamma som ”projektion”. Detta är (en smått modifierad version av) uppgift **5** från tentamen 2012-01-09.

Facit

Latin för alla: Ordet ”projektion” på svenska och ”projection” på engelska kommer av latinets ”proiectio”, vilket i sin tur kommer av latinets ”proicere” som betyder ”att kasta fram” eller ”att sträcka fram”. Själva verbet ”att kasta” heter på latin ”iacere”.

Känd fras: Alea **iacta** est. (Tärningen är **kastad**, dvs. Det finns ingen återvändo.)

Övning 1. a) Vi noterar lätt att

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix} = 2+1-3 = 0$, varför $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är ortogonala.

$\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\-5\\1\end{bmatrix} = 8-5-3 = 0$, varför $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är ortogonala.

$\vec{a}\cdot\vec{c} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\-5\\1\end{bmatrix} = 4-5+1 = 0$, varför $\vec{a}$ och $\vec{c}$ är ortogonala.

Eftersom vektorerna i S är parvis ortogonala är S en ortogonal mängd.

b) Den motsvarande ortonormala mängden är

$$\left\{\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}, \frac{1}{\|\vec{b}\|}\vec{b}, \frac{1}{\|\vec{c}\|}\vec{c}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{bmatrix}4\\-5\\1\end{bmatrix}\right\}$$

ty

$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{2^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$\|\vec{c}\| = \sqrt{4^2+(-5)^2+1^2} = \sqrt{16+25+1} = \sqrt{42}$

Övning 2. a) Låt $\vec{a} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$ och $\vec{c} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$. Vi noterar lätt att

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} = 0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{12}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{12}} = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{6}} - 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$$

Alltså är $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ parvis ortogonala. Nu är det bara att kolla upp längden av varje vektor:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{6}{6}} = 1$$

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

Alltså är $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ enhetsvektorer.

Nu är det uppenbart att $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ utgör en ortonormal mängd, alltså är A en ortogonal matris.

b) Här kan du matrismultiplicera på brute-force-vis om du vill. Annars kan du notera med hjälp av beräkningar från delfråga **(a)** att

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} — & \vec{a} & — \\ — & \vec{b} & — \\ — & \vec{c} & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{b}\cdot\vec{b} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{bmatrix}$$

Minns från **Modul 2** att för varje vektor $\vec{v}$ gäller att $\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$. Då $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är enhetsvektorer gäller att $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = 1^2 = 1$. På samma sätt fås $\vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{c} = 1$. Alltså gäller att

$$A^T A = \begin{bmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{b}\cdot\vec{b} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Saken är biff.

Övning 3. Låt $W = \ker T$ vara nollrummet till avbildningen $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ med avbildningsmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Vi bestämmer först $W = \ker T$. Vi detta lag borde vi veta att $\ker T = \text{Null}\, A$, dvs. det vektorrum som består av alla vektorer $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ sådana att $A\vec{x} = \vec{0}$. Notera att $\vec{x}$ måste ha fyra komponenter, annars är matrismultiplikationen $A\vec{x}$ odefinierad. Detta är som att lösa det ekvationssystem som motsvaras av matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} R_1 - R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

vilket innebär att

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + 2t \\ -2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ där } s,\, t \text{ är godtyckliga tal.}$$

Alltså kan $W = \ker T = \text{Null}\, A$ skrivas span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, dvs. en bas för W är $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) Låt $\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{b_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi vill finna en bas $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ sådan att span $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ = span $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ samt att $\vec{v_1}$ och $\vec{v_2}$ är ortogonala. Enligt Gram-Schmidt-process kan vi välja

$$\vec{v_1} = \vec{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Då fås

$$\vec{v_2} = \vec{b_2} - \text{proj}_{\vec{v_1}} \vec{b_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{8}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En ortogonal bas för W är således $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Snabb kontroll:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 0 = 0$$

Det stämmer!

c) Då $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ är en ortogonal bas för W gäller att

$$\text{proj}_W\, \vec{v} = \text{proj}_{\overrightarrow{v_1}}\, \vec{v} + \text{proj}_{\overrightarrow{v_2}}\, \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{v_1}}{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1}} \overrightarrow{v_1} + \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{v_2}}{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}} \overrightarrow{v_2}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{30}{9}\right)}\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -2/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2/30 \\ -1/30 \\ -4/30 \\ 1/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -3/10 \\ 3/10 \\ -1/10 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Anmärkning: För att slippa en del bråkräkning kan vi notera att om $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ är en ortogonal bas för W, bör $\{\overrightarrow{v_1}, 3\overrightarrow{v_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ också vara en ortogonal bas för W. Då fås

$$\text{proj}_W\, \vec{v} = \text{proj}_{\overrightarrow{v_1}}\, \vec{v} + \text{proj}_{3\overrightarrow{v_2}}\, \vec{v} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -2/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2/30 \\ -1/30 \\ -4/30 \\ 3/30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -3/10 \\ 3/10 \\ -1/10 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

d) Minns att en ortogonal bas för W är $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. En ortonormal bas för W kan fås genom att normera $\overrightarrow{v_1}$ och $\overrightarrow{v_2}$, dvs. vi söker $\left\{\frac{1}{\|\overrightarrow{v_1}\|}\overrightarrow{v_1}, \frac{1}{\|\overrightarrow{v_2}\|}\overrightarrow{v_2}\right\}$. Notera att

$$\|\overrightarrow{v_1}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1+4+1+0} = \sqrt{6}$$

$$\|\overrightarrow{v_2}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{16}{9} + 1} = \sqrt{\frac{30}{9}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

En ortonormal bas för W är således

$$\left\{\frac{1}{\|\overrightarrow{v_1}\|}\overrightarrow{v_1}, \frac{1}{\|\overrightarrow{v_2}\|}\overrightarrow{v_2}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \{\text{ om vi vill }\} = \left\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2/15} \\ -1/\sqrt{30} \\ -\sqrt{8/15} \\ \sqrt{3/10} \end{bmatrix}\right\}$$

Anmärkning: Från delfråga **(a)** vet vi att en bas för W är $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. För att få en ortonormal bas (ON-bas) för W kan vi gå in i WolframAlpha och skriva

Gram-Schmidt (1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)