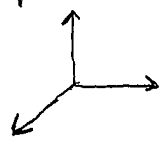
Algebra och Geometri 2017-12-04

F19 ON-baser Ortonormala baser



Påminnelse från Modul 2

Låt $\vec{u}$ och $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, där $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$

1. $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är ortogonala om $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
2. $\vec{u}$ sägs vara en enhetsvektor om $\|\vec{u}\| = 1$
3. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Anm. $\vec{u}$ enhetsvektor $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 1^2 = 1$

4. $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ är en enhetsvektor

Def. $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ är en ortogonal mängd om $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ om $i \neq j$

Ortogonal mängd

Ex. 1. $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

$$= \left\{\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ är parvis ortogonala ty $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$
$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

S kallas en ortogonal mängd (av vektorer).

Ortonormal mängd (ON-mängd)

Def. S är en ON-mängd om 1. S är ortogonal
och 2. $\|\vec{v}_i\| = 1$ (d.v.s. $\vec{v}_i$ är normerad)

Ex. 1 Den motsvarande ON-mängden är

$$\left\{\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}, \frac{1}{\|\vec{b}\|}\vec{b}, \frac{1}{\|\vec{c}\|}\vec{c}\right\} = \left\{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}}_{\vec{v}_3}\right\} = C$$

Fördel #1 Satsen om koordinater i en ON-bas

Låt $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_k\}$ vara en $\underset{\text{ON-bas}}{\text{bas}}$ för ett delrum W.

Då: varje $\vec{x} \in W$ kan skrivas $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k$

$c_1, c_2, \ldots, c_k$ kallas koordinaterna av $\vec{x}$ i basen B.

Sats: $c_i = \vec{x} \cdot \vec{v}_i$ den i:te koordinaten

Ex. 2 Låt C från Ex. 1 vara en ON-bas för $\mathbb{R}^3$.

Låt $\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ Sök $[\vec{x}]_C$

Lösn. Enligt satsen:

$$\vec{x} = \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{v}_1)}_{c_1}\vec{v}_1 + \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{v}_2)}_{c_2}\vec{v}_2 + \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{v}_3)}_{c_3}\vec{v}_3$$

$$c_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix} = \frac{11}{\sqrt{10}}$$

$$c_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 1$$

$$c_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Svar: $[\vec{x}]_C = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11/\sqrt{10}\\1\\3/\sqrt{10}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}11\\\sqrt{10}\\3\end{bmatrix}$

Bevis $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k$

Ta båda led skalärprodukt med $\vec{v}_1$:

$\vec{x}\cdot\vec{v}_1 = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k)\vec{v}_1$

$= c_1\underbrace{\vec{v}_1\vec{v}_1}_{1} + \cdots + c_k\underbrace{\vec{v}_k\vec{v}_1}_{\substack{0 \\ \text{ty } B \text{ är} \\ \text{en ON-bas}}} = c_1 \Rightarrow c_1 = \vec{x}\,\vec{v}_1$ p.s.s. fås $c_i = \vec{x}\cdot\vec{v}_i$ för alla $1 \le i \le k$ ∎

Fördel #2 Projektion på ett delrum W

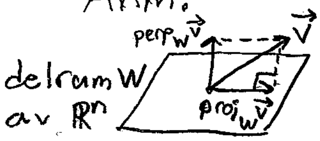
Låt $B = \{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k\}$ vara en <u>ortogonal</u> bas för W.

Def. $\text{proj}_W \vec{u} = \text{proj}_{\vec{v}_1}\vec{u} + \cdots + \text{proj}_{\vec{v}_k}\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\,\vec{v}_1}{\vec{v}_1\vec{v}_1}\vec{v}_1 + \cdots + \dfrac{\vec{u}\,\vec{v}_k}{\vec{v}_k\vec{v}_k}\vec{v}_k$

Anm. Om B är en ON-bas gäller: $\text{proj}_W \vec{u} = (\vec{u}\,\vec{v}_1)\vec{v}_1 + \cdots + (\vec{u}\,\vec{v}_k)\vec{v}_k$ ∎

ortonormal = <u>ortogonal</u> + <u>normal</u> (normerad)

Anm.



$\text{perp}_W \vec{v} = \vec{v} - \text{proj}_W \vec{v}$

Ex. 3. Låt planet W vara span $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Sök $\text{proj}_W \vec{x}$.

Modul 2: Ta fram en normalvektor till W: $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$

kan också ta $\vec{n} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\text{proj}_{\vec{n}} \vec{x} = \dfrac{\vec{x}\,\vec{n}}{\vec{n}\,\vec{n}}\vec{n} = \cdots = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{proj}_W \vec{x} = \vec{x} - \text{proj}_{\vec{n}} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix}}^{\text{Svar}}$

Modul 6: Ser att $\underset{\vec{a}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}}$ och $\underset{\vec{b}}{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$ bildar en <u>ortogonal</u> bas för W

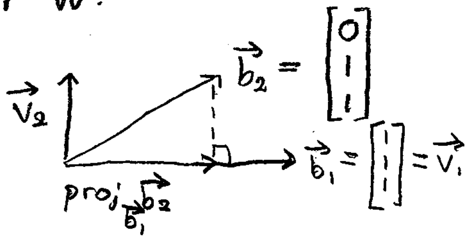
$\text{proj}_W \vec{x} = \text{proj}_{\vec{a}} \vec{x} + \text{proj}_{\vec{b}} \vec{x} = \ldots = \frac{3}{10}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix}}_{\text{Svar}}$ ∎

Ortogonalisering av baser

Ex. 4. Låt $W \subseteq \mathbb{R}^3$ ha en bas $B = \left\{ \overset{\vec{b}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{\vec{b}_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$ (<u>inte</u> en ortogonal bas)

Sök en <u>ortogonal</u> bas för W.

Lösn.: Sök $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$



Steg 1. Välj $\vec{v}_1 = \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Steg 2. Sök $\vec{v}_2$ så att
$\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$ och $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$

Inser att $\vec{v}_2 = \vec{b}_2 - \text{proj}_{b_1} \vec{b}_2 = \cdots = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

Svar
$\left\{ \overset{\vec{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{\vec{v}_2}{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$

Kontroll: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

Gram – Schmidt-ortogonaliseringsprocess
dansk balttysk

Givet en "vanlig" bas $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k\}$ för ett delrum W.
Sök en ortogonal bas för W: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Steg 1. Välj $\vec{v}_1 = \vec{b}_1$

Steg 2 $\quad \vec{v}_2 = \vec{b}_2 - \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{b}_2$

Steg 3 $\quad \vec{v}_3 = \vec{b}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{b}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_2} \vec{b}_3$

$\vdots$

Steg k $\quad \vec{v}_k = \vec{b}_k - \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{b}_k - \dots - \text{proj}_{\vec{v}_{k-1}} \vec{b}_k$ ∎

Anm. Den motsvarande ON-basen är

$\left\{ \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1, \dots, \frac{1}{\|\vec{v}_k\|}\vec{v}_k \right\}$ Ortonormeringsprocess

Lite om <u>ortogonala</u> matriser

Ex. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad B^{-1} = B^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$

Def. En nxn-matris A sägs vara <u>ortogonal</u> om kolonnerna (och raderna) bildar en <u>ortonormal</u> mängd, dvs. $AA^T = A^TA = I$ ∎

Rolig konsekvens $AA^T = I \Rightarrow A^{-1} = A^T$ ∎ $\quad$ Ex. $B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ∎