Algebra och Geometri 2017-11-29

2011·10·17 #3 $\quad A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&4&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}$

a)(2p) Beräkna $\det A$

$\det A = \{\text{KFU längs rad } 1\} = 1\begin{vmatrix}4&1\\-1&-1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}3&1\\0&-1\end{vmatrix} = 1(-4-(-1))-2(-3) = -3+6 = \underline{\underline{3}}$

b)(2p) Beräkna $\det((A^TA)^{-5})$ $\quad$ Anm. $M^{-5} = (M^{-1})^5 = M^{-1}M^{-1}M^{-1}M^{-1}M^{-1}$

$\det((A^TA)^{-5}) = (\det(A^TA))^{-5} = (\det(A^T)\det A)^{-5} = (\det A \det A)^{-5} = (3\cdot 3)^{-5} = \underline{\underline{9^{-5}}} = \underline{\underline{3^{-10}}}$

2017·01·11 #1 a)(4p)

Ekv.sys. $\left[\begin{array}{ccc|c}k&k&1&3\\2&k&1&2\\4&3&3&8\end{array}\right]$ with $\underbrace{}_{A}$ $\underbrace{}_{\vec{b}}$ $\quad$ Bestäm konstanten k så att systemet har 1, 0 resp. ∞ många lösningar.

Modul 1: Jobbigt att gausseliminera!

Modul 5: Systemet har 1 lösning $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

$\det A = \{\text{KFU längs rad } 1\} = k\begin{vmatrix}k&1\\3&3\end{vmatrix} - k\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2&k\\4&3\end{vmatrix} = 3k^2-9k+6$

Betrakta $\det A \neq 0 : 3k^2-9k+6 \neq 0$ $\quad$ Anm. Helt fel att förkorta till $\det A = k^2-3k+2$.

$\Leftrightarrow k^2-3k+2 \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{k\neq 1 \text{ och } k \neq 2}_{\text{ger en unik lösning}}$

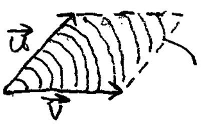
Om $k=1$ fås $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&1&1&2\\4&3&3&8\end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right]$ oändligt många lösningar

Om $k=2$ fås $\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&1&3\\2&2&1&2\\4&3&3&8\end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c}2&2&1&3\\0&0&0&-1\\4&3&3&8\end{array}\right]$ ingen lösning

Svar: 1 lösning om $k\neq 1$ och $k\neq 2$
$\quad$ 0 $\quad k=2$
$\quad \infty \quad k=1$ ∎

Några geometriska tolkningar

1. I planet ($\mathbb{R}^2$)



Modul 2
arean ges av $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{v}\times\vec{u}\|$ om $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$

Modul 5
Om $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ så

$\text{arean} = \left|\det\begin{bmatrix}|&|\\\vec{u}&\vec{v}\\|&|\end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix}-&\vec{u}&-\\-&\vec{v}&-\end{bmatrix}\right|$

Ex. $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\quad \vec{v}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

Modul 5 $\text{arean} = \left|\det\begin{bmatrix}1&1\\1&-2\end{bmatrix}\right| = |-3| = 3$

Modul 2 $\text{arean} = \left\|\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix}\right\| = 3$

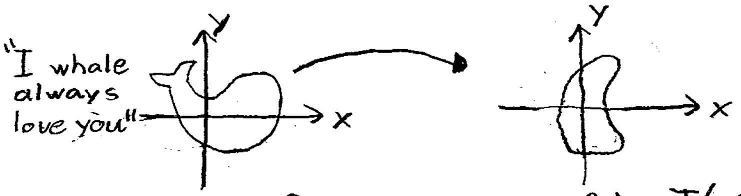
ty $z=0$ där $\vec{u}$ och $\vec{v}$ "ligger" (xy-planet) ∎

2. I rummet ($\mathbb{R}^3$)

Volymen av den parallellepiped som spänns upp av $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ges av $\left|\det\begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ | & | & | \end{bmatrix}\right|$

Linjär avbildning, area och volym

1. I $\mathbb{R}^2$: Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ha avb. mat A.



område Ω område $T(\Omega)$

Sats

$\text{Area}(T(\Omega)) = \text{Area}(\Omega)|\det A|$ ▨

Bevis för en parallellogram Ω

$$\text{Area}(T(\Omega)) = \left|\det\begin{bmatrix} | & | \\ T(\vec{u}) & T(\vec{v}) \\ | & | \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} | & | \\ A\vec{u} & A\vec{v} \\ | & | \end{bmatrix}\right| = |\det A|\left|\det\begin{bmatrix} | & | \\ \vec{u} & \vec{v} \\ | & | \end{bmatrix}\right| = |\det A| \text{Area}(\Omega)$$ ▨

Stukan 17 övning 4

Det(AB) = detA detB

2. I $\mathbb{R}^3$: Låt $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha avb. mat A

Sats: $\text{Volym}(T(\Omega)) = \text{Volym}(\Omega)|\det A|$ ▨

Nyhet Egenvektor, egenvärde och egenrum

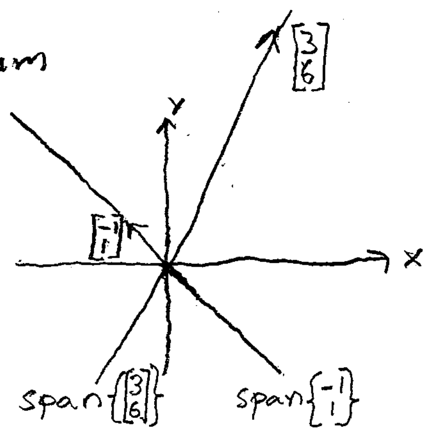
Inledning $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Beräkna

$A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

dessa vägrar lämna sitt respektive delrum



Def. Låt A vara en $n \times n$-matris

Om $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ uppfyller

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ lambda $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x}$
$g(x) = e^{-2x} \Rightarrow g'(x) = -2e^{-2x}$

säger vi att $\vec{v}$ är en <u>egenvektor</u> till A motsvarande <u>egenvärdet</u> λ,

! om $\vec{v} \neq 0$ ▨

Anm: Om $\vec{v} = \vec{0}$ så $A\vec{v} = A\vec{0} = \vec{0}$ för alla A
Inget intressant fenomen!

Anm. Men ett egenvärde λ får vara 0.

Inledning: $A=\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}$ har 2 egenvärden $\begin{cases}\lambda_1=1\\\lambda_2=4\end{cases}$

$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ är en egenvektor motsvarande/tillhörande $\lambda_1=1$

$\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ " är en egenvektor motsvarande/tillhörande $\lambda_2=4$

Bestämningsmetod

$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$

$\Downarrow$

$A\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0}$

$\Downarrow$

$\boxed{(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}}$ ger egenvektorer $\vec{v}$

Detta ekv.sys är homogent

Om $\det(A-\lambda I)\neq 0$ fås en unik lösning $\vec{v}=\vec{0}$ vill inte ha

Om $\boxed{\det(A-\lambda I)=0}$ fås icke-triviala $\vec{v}$ ger egenvärdena λ

2012.01.09 #3 $A=\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}$

a) Bestäm alla egenvärden till A

Lösn. Använd $\det(A-\lambda I)=0$ den karakteristiska ekvationen

$\det\left(\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}2-\lambda&1\\2&3-\lambda\end{bmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-2$

$\vdots$

pq-formeln $\lambda^2-5\lambda+4=0$

ger $\lambda_1=1$ och $\lambda_2=4$

b) Bestäm egenvektorerna till A

För $\lambda_1=1$: Lös $(A-1I)\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}2-1&1\\2&3-1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}}_{\vec{v}}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\ldots\Rightarrow\vec{v}=t\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, där $t\neq 0$

För $\lambda_2=4$: Lös $(A-4I)\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}2-4&1\\2&3-4\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}}_{\vec{u}}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\ldots\Rightarrow\vec{u}=s\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, där $s\neq 0$

Egenrum Def. Givet ett egenvärde λ. Egenrummet tillhörande λ, betecknat E_λ, är vektorrummet av $\vec{0}$ och alla egenvektorer till λ. ▨

I detta fall $E_1=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$

$E_4=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$