Minnesanteckningar

Algebra och Geometri SF1624

Modul 1: Linjära ekvationssystem & matriser

Om en matris har rang n och n variabler. Så har systemet alltid lösningar oavsett högerled. Detta betyder att systemet spänner upp hela rummet n.

Antal ledande element = antalet variabler: oberoende
Antal ledande element < antalet variabler: beroende

Satser om lösbarhet för ekvationssystem

1, Om någon rad är på formen 0 0 … 0 | a där a ≠ 0 har systemet ingen lösning

2, Om antalet ledande element i S = antalet variabler har systemet en (unik) lösning.

3, Om antalet ledande element i S < antalet variabler har systemet oändligt många lösningar. En parameterlösning.

Vid multiplikation av två godtyckliga matriser ty n x m * a x b blir resultaten en matris av storleken n x b.

Matrismultiplikation AB är definierad om antal kolonner i A är lika med antal rader i B.

Låt A vara en mxn-matris och låt B vara en nxp-matris.

De inre avgör om multiplikation är möjligt. n x n
De yttre bestämmer storleken. m x p

Skalärprodukt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (u_1 * v_1) + (u_2 * v_2)$$

Modul 2: Analytisk geometri

Planets ekvation på parameterform

Behöver två saker:

1, En punkt i planet, säg P = $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
2, Två icke-parallella vektorer, säg v och u. Som är parallella med planet.

Planets ekvation på skalärform

Ax + By + Cz + D = 0

Behöver två saker:

1, En punkt i planet. P = (a, b, c)
2, En vektor som är vinkelrät/ortogonal mot planet. Normalvektor n = (A, B, C)

Planets ekvation = A(x – a) + B(y – b) + C(z – c) = 0.

Avstånd mellan punkt och plan

$$\frac{|xa + yb + zc + D\ |}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

P = (a, b, c)
n = (x, y, z)

Normalvektor till ett plan på skalärform

Ax + By + Cz + D = 0

Normalvektorn är (A, B, C)

Normalvektor till ett plan på parameterform

På parameterform så kryssar man riktningsvektorerna

Planets ekvation på skalärform omvandlad till parameterform.

Utifrån från planets ekvation $x + 2y + 4z = 0$ på skalärform ser vi att en ekvation för samma plan på parameterform är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - 4t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kryssprodukt

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

Volymen av en parallellepiped ges av:

$|(a\ x\ b) * c|$

$Alternativt\ ges\ volymen\ av\ determinanten\ av\ den\ matris\ som\ har\ de\ tre\ vektorerna\ som\ kolonner.$

Projektionen av en normalvektor resulterar i en punkt (0,0,0) i R^3

$Minns\ formeln\ f$ör $spegling\ av\ en\ vektor\ \vec{v}\ kring\ en\ rät\ linje$ L med $\vec{r}$ $som\ riktningsvektor$:

$ref_L \vec{v} = (2\ proj_{\vec{r}}\ \vec{v}) - \vec{v}$

Minns formeln för speglingen (synonym: reflektionen) av en vektor $\vec{v}$ kring ett plan Π med $\vec{n}$ som normalvektor:

ref $_\Pi\ \vec{v} = \vec{v} - (2\ \text{proj}_{\vec{n}}\ \vec{v})$

Arean av ett parallellogram

$||u\ x\ v|| = ||u|| * ||v|| * \sin\theta$

Bestäm avståndet mellan P och linjen u

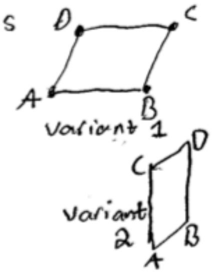
Ta ut en punkt Q på u.

Bestäm QP

$$\left\|\overrightarrow{QP} - \text{proj}_{\vec{u}}\ \overrightarrow{QP}\right\| = \cdots = \left\|\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73}$$

Finn arean av den P vars hörn är A,B,C,D

Idéskiss



V1 $\text{Arean} = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\|$

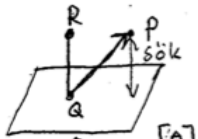
$\vec{AB} = B - A = (1,2,-1)$ och $\vec{AD} = D - A = (3,3,2)$

$\vec{AB} \times \vec{AD} = (7,-5,-3) \Rightarrow \|(7,-5,-3)\| = \dots = \sqrt{83}$

V2 $\vec{AC} = (2,1,3)$ $\vec{AB} \times \vec{AC} = (7,-5,-3)$ samma svar

samma resultat <u>till slut</u>

Avståndsproblem #3 Punkt-plan



obs! $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$

Sök avståndet mellan P och $Ax + By + Cz + D = 0$

Metod#1: 1. Tag en punkt Q i planet.

2. Tag fram $\vec{QR} = \text{proj}_{\vec{n}} \vec{QP}$.

Svar: avståndet är $\|\vec{QR}\| = \|\text{proj}_{\vec{n}} \vec{QP}\|$

Metod#2 Genväg

Sökta avståndet ges av $\dfrac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ $(P = (a,b,c))$

Modul 3: Vektorrum & Baser

Vektorerna v_1 , v_2 ,..., v_k bildar en bas för V om

1, De är linjärt oberoende

2, De är spännande, dvs. varje godtycklig vektor i V kan skrivas som en linjärkombination av v_1 , v_2 ,..., v_k

---

Minns att S är ett delrum av V om följande tre villkor uppfylls:

1, $0 \in S$.

2, Om $\vec{u}, v \in S$ måste $\vec{u} + v \in S$.

3, Om $\vec{u} \in S$ måste $k\vec{u} \in S$, för alla skalärer $k \in$ R.

Viktig erfarenhet: Om raderna i en matris A är linjärt beroende, gäller att $\det A = 0$ (ty A kan radopereras tills en nollrad erhålls). Om raderna däremot är linjärt oberoende, gäller att $\det A \neq 0$.

---

im(T)= col(A)

dim(col A) = rank A

Nollrummet Null(A) består av alla vektorer sådana att $\text{Ax} = \vec{0}$

Inversen av en 2x2-matris bestäms genom adjunktformeln:

$$\frac{1}{\det\ A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Allmänna räknelagar för determinanter

1, $\det(AB) = \det A \det B$

2, $\det(A^m) = (\det A)^m$

3, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

4, $\det(A^T) = \det A$

Övning 4. Ekvationen $x - 2y + z + 3w = 0$ har parameterlösningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r - s - 3t \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vilket innebär att hyperplanet ifråga är

$$\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Svar: En möjlig bas för hyperplanet är $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Villkor för vektorrum

1. $\vec{u} + \vec{v} \in V$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
5. För varje $\vec{v} \in V$ finns det en $\vec{\alpha} \in V$ med egenskapen: $\vec{v} + \vec{\alpha} = \vec{0}$ $(\vec{\alpha} = -\vec{v})$
4. Det finns en vektor kallad nollvektorn $\vec{0}$ med egenskapen: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
6. $k\vec{v} \in V$
7. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
8. $(k + h)\vec{v} = k\vec{v} + h\vec{v}$
9. $(k\,h)\vec{v} = k(h\,\vec{v})$
10. $1\vec{v} = \vec{v}$

Basbyte

Övning 2. Betrakta vektorrummet $\mathbb{R}^2$ med två baser $\mathcal{S}$ och $\mathcal{B}$. Låt $\mathcal{S}$ vara standardbasen $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, där $\vec{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ och $\vec{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Låt $\mathcal{B}$ vara $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$, där $\vec{b_1} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ och $\vec{b_2} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$.

d) Bestäm $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}$, dvs. basbytesmatrisen från $\mathcal{S}$ till $\mathcal{B}$.

$P_{S\to B}$ fås då genom att ansätta $\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/5\\-1/10\end{bmatrix}$ $Föjlt\ av$ $\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/5\\3/10\end{bmatrix}$

Basbytesmatrisen är då $\begin{bmatrix}2/5 & -1/5\\-1/10 & 3/10\end{bmatrix}$

Metod 2 är att finna inversen till $P_{B\to S}$

Dvs. $(P_{S\to B}) = (P_{B\to S})^{-1}$

För att finna koordinaterna ansätts målbasen som matris och den nuvarande basen som högerled.

Övning 3. Låt den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x - y\\x + 7y\end{bmatrix}$$

Låt $\mathcal{S}$ och $\mathcal{B}$ vara två baser för $\mathbb{R}^2$. Låt $\mathcal{S}$ vara standardbasen $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, där $\vec{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ och $\vec{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Låt $\mathcal{B}$ vara $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$, där $\vec{b_1} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ och $\vec{b_2} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$.

a) Bestäm standardmatrisen till T. Vi söker alltså avbildningsmatrisen (till T) med avseende på standardbasen $\mathcal{S}$.

b) Bestäm avbildningsmatrisen (till T) med avseende på basen $\mathcal{B}$. **Ledtråd:** Använd exempelvis basbytesdiagrammet i samband med kedjeregeln som visades på föreläsningen.

b) Enligt basbytesdiagrammet och kedjeregeln gäller att

$A_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}\, A_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}}\, P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}$

$$\begin{tikzcd}
\text{bas } \mathcal{S} \arrow[r, "A_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}}", "\text{givet}"'] & \text{bas } \mathcal{S} \arrow[d, "P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}"] \\
\text{bas } \mathcal{B} \arrow[u, "P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\text{sökt}", "A_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}"'] & \text{bas } \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Från delfråga (a) vet vi att $A_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Från **Stukan 12**, **Övning 2**, vet vi att

$$P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} | & | \\ [\vec{b}_1]_{\mathcal{S}} & [\vec{b}_2]_{\mathcal{S}} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Också från **Stukan 12**, **Övning 2**, vet vi att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = (P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Således gäller att

$$A_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 1 & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & -60 \\ 25 & 90 \end{bmatrix} = \{\text{ om vi vill }\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 5 & 18 \end{bmatrix}$$

Modul 4: Linjära avbildningar

Otroligt viktig lärdom att minnas: Om $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning utgörs kolonnerna i avbildningsmatrisen A av bilderna av standardbasvektorerna $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{e_1}) & T(\vec{e_2}) & \ldots & T(\vec{e_n}) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Minns att om T: $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ är en linjär avbildning gäller följande för alla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathrm{R}^n$ och alla $k \in \mathrm{R}$:

1, $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$

2, $T(k\vec{x}) = k\,T(\vec{x})$.

Dimensionssatsen lyder: Om T: $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ är en linjär avbildning gäller att

$\dim(\ker T) + \dim(\mathrm{im}\, T) = \dim(\mathrm{R}^n) = n$

Bildrummet av T består av alla vektorer $\vec{y} \in \mathrm{R}^3$ som T kan resultera i, dvs. alla vektorer som kan fås efter att vi projicerat någon $\vec{x} \in \mathrm{R}^3$ på planet Π. Om vi tänker geometriskt inser vi att $\vec{y}$ är helt enkelt vilken vektor som helst som är med i planet Π. Med andra ord är im T precis Π.

Rotationsmatrisen för R^2 moturs

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Då varje vektor i R^2 reflekteras kring en linje L kan avbildningsmatrisen finnas genom att $\text{ref}_L\, v = 2\,(\text{proj}_L\, v) - v$. Dvs projicera standardvektorerna e1 och e2 på riktningsvektorn.

$$T(\vec{e_1}) = \text{ref}_{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(2 \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(2 \frac{5}{29} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{29} \\ -\frac{20}{29} \end{bmatrix}$$

Låt den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spegla varje vektor i $\mathbb{R}^3$ kring planet Π. Finn avbildnings-matrisen till T.

För att finna avbildningsmatrisen använder man formeln

$$\text{ref}_\Pi\, \vec{v} = \vec{v} - (2\, \text{proj}_{\vec{n}}\, \vec{v})$$

Det vill säga projicera varje standardvektor på normalvektorn.

$$T(\vec{e_1}) = \text{ref}_\Pi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(2 \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(2 \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm matrisen som representerar den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som uppfyller

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finn inversen till $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ och multiplicera på båda sidor

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Modul 5: Egenvärden, egenvektorer & egenrum

Två viktiga ekvationer:

1, $\det(A - \lambda I) = 0$ ger egenvärdena λ
2, $\det(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ ger egenvärdena $\vec{v}$

Egenvektorer motsvarande olika egenvärden är linjärt oberoende

---

För varje egenvärde gäller att $1 \leq \text{GM} \leq \text{AM}$

Den **algebraiska multipliciteten** för ett egenvärde är multipliciteten för egenvärdet som nollställe till det karakteristiska polynomet.

Den **geometriska multipliciteten** definieras av antalet vektorer som varje enskilt egenvärde ger upphov till och motsvarar dimensionen på egenrummet.

Produkten av alla egenvärden är alltid lika med matrisens determinant

Summan av alla egenvärden är alltid lika med matrisens spår

Diagonalisering

$A = PDP^{-1}$

P utgörs av egenvektorerna till A som kolonner i P
D utgörs av egenvärdena till A på diagonalen.
P^{-1} är inversen av P

Satsen om diagonaliserbarhet

En nxn-matris A är diagonaliserbar då A har n linjärt oberoende egenvektorer. Dvs varje egenvärde till A har AM = GM.

Om A har n olika egenvärden är A säkert diagonaliserbar. A har då n linjärt oberoende egenvektorer.

Modul 6: ON-baser, MK-metoden & Q – former

Ett sätt att definiera en ortogonal matris A är att A ska uppfylla $AA^T = A^T A = I$.

Ortogonal mängd är där vektorerna är parvis ortogonala

Ortonormal mängd är där vektorerna även är normerade

Gram-Schmidt-ortogonaliseringsprocess

Givet en ”vanlig” bas för B $= \{\overrightarrow{b1}, \overrightarrow{b2}, \dots, \overrightarrow{bk}\}$ för ett delrum w. Sök en ortogonal bas för w : $\{\overrightarrow{v1}, \overrightarrow{v2}, \dots, \overrightarrow{vk}\}$

Steg 1: Välj $\overrightarrow{v1} = \overrightarrow{b1}$

Steg 2: $\overrightarrow{v2} = \overrightarrow{b2} - proj_{\overrightarrow{v1}}\overrightarrow{b2}$

Steg 3: $\overrightarrow{v3} = \overrightarrow{b3} - proj_{\overrightarrow{v1}}\overrightarrow{b3} - proj_{\overrightarrow{v2}}\overrightarrow{b3}$

.

.

.

Steg k $\overrightarrow{vk} = \overrightarrow{bk} - proj_{\overrightarrow{v1}}\overrightarrow{bk} - \cdots - proj_{\overrightarrow{k-1}}\overrightarrow{bk}$

Den motsvarande ON-basen är $\left\{\frac{1}{||\overrightarrow{v1}||}\overrightarrow{v1}, \dots, \frac{1}{||\overrightarrow{vk}||}\overrightarrow{vk}\right\}$

c) Då $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ är en ortogonal bas för W gäller att

$$\text{proj}_W\,\vec{v} = \text{proj}_{\overrightarrow{v_1}}\,\vec{v} + \text{proj}_{\overrightarrow{v_2}}\,\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{v_1}}{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1}}\overrightarrow{v_1} + \frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{v_2}}{\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}}\overrightarrow{v_2}$$

Givet ett delrum w av R^n

Det ortogonala komplementet till w är det delrum av R^n som består av alla vektorer i R^n som är ortogonala mot alla vektorer i w.

Anmärkning: 1. Om delrummet V har en bas $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}\}$ bestäms det ortogonala komplementet $V^\perp$ av ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} - & \overrightarrow{b_1} & - & 0 \\ - & \overrightarrow{b_2} & - & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ - & \overrightarrow{b_k} & - & 0 \end{array}\right]$$

Minsta-kvadrat-metoden

Steg 1: Sätt in värdena i ekvationen och y-värdet i HL.
Steg 2: Överför till matris. Med antal variabler som vektor.
Steg 3: Om antalet rader > variabler skall båda led multipliceras med A^T.
Steg 4: Gausseliminera
Steg 5: Variablerna sätts in i ursprungsekvationen.

Den kvadratiska formen Q på R^2 ges av $Q(\vec{x}) = ax^2 + bxy + cy^2$, där $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Ange den symmetriska matrisen A som uppfyller $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Alla symmetriska matriser är diagonaliserbara.
