Stukan 2

Ordkunskap: Se till att du vet vad dessa begrepp innebär:

Gauss-Jordan-eliminering	homogent ekvationssystem
reducerad trappstegsform	fri variabel
rang	ledande variabel

Övning 1. Överför följande matriser till reducerad trappstegsform (eng. reduced row echelon form). Notera att den första matrisen förekom i Stukan 1.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Övning 2. a) Bestäm rank A respektive rank B, där A och B matriserna från **Övning 1**.

Övning 3. a) För vilket värde på konstanten k har följande ekvationssystem oändligt många lösningar?

$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 0 \\ -3x + 3y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + kz = 0 \end{cases}$$

Finn för denna k alla lösningar till systemet.

b) Finns det något värde på k för vilket systemet saknar lösning?

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. Observera att den resulterande matrisen på reducerad trappstegsform är unik (synonym: entydig) för varje given matris.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Övning 2. Läs av de matriser på reducerad trappstegsform och vi får direkt att $\operatorname{rank} A = 3$ samt att $\operatorname{rank} B = 2$.

Övning 3. a) Med hjälp av gausseliminering får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & k & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \\ 0 & -4 & k+10 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & k+6 & 0 \end{array}\right]$$

Systemet kan ha oändligt många lösningar om den nedersta raden är en nollrad, dvs. om $k = -6$. I så fall antar den sista matrisen formen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

där den sista raden kan strykas.

Nu kan vi, om vi vill, överföra matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{array}\right]$$

till reducerad trappstegsform för att bestämma alla lösningar till systemet:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

dvs.

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

eller med andra ord

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där t är ett godtyckligt reellt tal.

b) Nej, eftersom detta linjära ekvationssystem är homogent har det garanterat $x = y = z = 0$ som en lösning för varje val av konstanten k.