Stukan 9

Ordkunskap: Se till att du förstår vad följande begrepp innebär:

linjärkombination

linjärt oberoende vektorer

bas (för ett vektorrum eller delrum)

dimension (av ett vektorrum eller delrum)

Övning 1. a) Avgör om vektorerna $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ är linjärt oberoende. Om de är linjärt beroende, skriv en av vektorerna som en linjärkombination av de övriga.

b) Samma uppdrag som ovan, men med de tre vektorerna $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Övning 2. a) Givet ett vektorrum V och k stycken vektorer $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ med lika många komponenter. Formulera de villkor för att dessa vektorer ska bilda en bas för V.

b) Visa med hjälp av de formulerade villkoren att vektorerna $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ från **Övning 1** (a) bildar en bas för $\mathbb{R}^3$.

Övning 3. Ange en bas $\mathcal{B}$ för det delrum V av $\mathbb{R}^4$ som vektorerna $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ spänner upp. Bestäm sedan dimensionen av V.

Övning 4. Ange en bas för det hyperplan som ges av ekvationen $x - 2y + z + 3w = 0$.

Ledning: Se $x - 2y + z + 3w = 0$ som ett ekvationssystem som består av en enda ekvation och fyra variabler. Bestäm först lösningarna $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ och utnyttja sedan svaret för att bestämma den avsedda basen.

Anmärkning: Detta hyperplan är ett delrum av $\mathbb{R}^4$.

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. a) Vi vill kolla om ekvationen (eller ekvationssystemet) $c_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ har några lösningar utöver den triviala lösningen $c_1=c_2=c_3=0$. Detta är som att lösa det ekvationssystem som motsvaras av matrisen

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\-2&1&5\\1&2&1\end{bmatrix}$$

(Vi behöver inte skriva ut högerleden om de är 0. Radoperationer kommer inte att kunna förändra dessa nollor.) Nu gausseliminerar vi:

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\-2&1&5\\1&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}R_1\\R_2+2R_1\\R_3-R_1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0\\0&7&5\\0&-1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}R_1\\R_3\\R_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-1&1\\0&7&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\R_3+7R_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-1&1\\0&0&12\end{bmatrix}$$

Den sista matrisen på trappstegsform har tre ledande element (lika många som antalet variabler), vilket innebär att systemet endast har den triviala lösningen $c_1=c_2=c_3=0$. Detta beror helt enkelt på att den sista matrisen motsvarar

$$\begin{cases}c_1+3c_2=0\\-c_2+c_3=0\\12c_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\\c_3=0\end{cases}$$

Svar: Vektorerna är linjärt oberoende.

b) Vi vill kolla om ekvationen (eller ekvationssystemet) $c_1\vec{u}+c_2\vec{v}+c_3\vec{w}=\vec{0}$ har några lösningar utöver den triviala lösningen $c_1=c_2=c_3=0$. Detta är som att lösa det ekvationssystem som motsvaras av matrisen

$$\begin{bmatrix}2&-3&-5\\1&2&8\\2&0&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}R_2\\R_1\\R_3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&8\\2&-3&-5\\2&0&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}R_1\\R_2-2R_1\\R_3-2R_1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&8\\0&-7&-21\\0&-4&-12\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}R_1\\-\frac{1}{7}R_2\\-\frac{1}{4}R_3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&8\\0&1&3\\0&1&3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\R_3-R_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&8\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Den sista matrisen på trappstegsform har endast 2 (istället för 3) ledande element, vilket innebär att vektorerna $\vec{u}=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix}$ och $\vec{w}=\begin{bmatrix}-5\\8\\4\end{bmatrix}$ är linjärt beroende. Alltså kan vi skriva en av dessa vektorer som en linjär kombination av de övriga. Hur då? Jo, den sista matrisen ger systemet

$$\begin{cases}c_1+2c_2+8c_3=0\\c_2+3c_3=0\end{cases}$$

Om vi väljer $c_3=1$ (efter vår egen smak) får vi $c_2=-3$ och $c_1=-2$, vilket innebär att

$$-2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}.$$

Svar: Vektorerna är linjärt beroende. En möjlig linjärkombination som påvisar detta är $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$.

Övning 2. a) Vektorerna $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$,…, $\overrightarrow{v_k}$ bildar en bas för V om

i) de är linjärt oberoende

och om

ii) de är spännande, dvs. span $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}\} = V$, dvs. varje godtycklig vektor i V kan skrivas som en linjärkombination av $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$.

b) Vi börjar med att visa att $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är linjärt oberoende. Enligt **Övning 1** (a) är de det.

Visa nu att $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ spänner upp $\mathbb{R}^3$, dvs. varje godtycklig vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$, dvs. ekvationssystemet

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

har lösningar. Känner du igen **Övning 1** (b) från Stukan 4?

Här räcker det med att titta på koefficientmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Trappstegsmatrisen har tydligen tre ledande element (dvs. har rang 3, som är lika med antalet variabler). Detta garanterar att systemet alltid har lösningar, oavsett högerled. Alltså spänner $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ upp $\mathbb{R}^3$. Saken är biff.

Viktig lärdom att komma ihåg: Om de n vektorerna $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ är linjärt oberoende, spänner de säkert upp $\mathbb{R}^n$ och bildar således en bas för $\mathbb{R}^n$.

Övning 3. Vi vill alltså bestämma bland $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ och $\vec{d}$ så många linjärt oberoende vektorer som möjligt. Ställ upp dessa fyra vektorer som kolonner i en matris (i vilken ordning som helst) och övergå sedan till trappstegsform. För enkelhets skull väljer vi ordningen $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{d}$ för att få en etta som matrisens första element:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 + R_1 \\ R_4 - R_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_4 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -6 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 2R_2 \\ R_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De ledande elementen (röda) i den sista matrisen visar att det är de vektorer i kolonnerna nummer 1, 2 och 3 i den första matrisen som är linjärt oberoende. Dessa är $\vec{c}$, $\vec{a}$ och $\vec{b}$.

Svar: En bas för V är $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Denna bas har 3 vektorer, varför $\dim V = 3$.

Anmärkning: Här finns det många korrekta svar. En annan bas för V är $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$, till exempel.

Övning 4. Ekvationen $x - 2y + z + 3w = 0$ har parameterlösningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r - s - 3t \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vilket innebär att hyperplanet ifråga är

$$\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Svar: En möjlig bas för hyperplanet är $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Anmärkning: Du kan, om du vill, dubbelkontrollera att $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ faktiskt är linjärt oberoende.