Algebra och Geometri 2017-12-14

Från gårdagen

Kvadratiska ekvationer på huvudaxelform

Ex. $Q(x,y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2$

Variabelbyte $\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y) \\ b = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y) \end{cases}$

Då fås $Q(x,y) = Q(a,b) = a^2 + 6b^2$

Idé: Vi vill byta variabler så att Q endast innehåller rent kvadratiska termer.

Hur kommer vi fram till variabelbytet?

Transponat-Räknelagar

0. $(A^T)^T = A$
1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T = B^T A^T$ $(\neq A^T B^T)$ OBS!
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$

ex. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\vec{u}^T \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = \vec{u} \cdot \vec{v}$

Härledning för variabelbytet

$Q(x,y) = \vec{x}^T A \vec{x}$, där $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

symmetrisk matris som kan ortogonalt diagonaliseras

$= \vec{x}^T P D P^T \vec{x}$

$= (P^T\vec{x})^T D (P^T \vec{x})$

$(P^T \vec{x})^T \overset{2}{=} \vec{x}^T (P^T)^T \overset{0}{=} \vec{x}^T P$

Om vi byter $\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = P^T \vec{x}$ får vi $Q(x,y) = \vec{a}^T D \vec{a} = Q(a,b)$

diagonalmatris

Ex. $Q(x,y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2 = \vec{x}^T A \vec{x}$, där $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

Steg 1 Diagonalisera A ortogonalt:

$\lambda_1 = 1$ ger en egenvektor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 6$ ger en egenvektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$A = PDP^{-1}$, där $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ och $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Steg 2 Byt variabler:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = P^T \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} x + 2y \\ -2x + y \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow a \\ \leftarrow b \end{matrix}$$

dvs. $\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \\ b = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) \end{cases}$

Anm. $Q(a,b) = \vec{a}^T D \vec{a} = [a\ b] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^2 + 6b^2$ ∎

2016-10-21 #6

Skevsymmetrisk $A^T = -A$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \neq \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{-A}$

Steg 1 Prova att konkretisera problemet:

Ta en 2×2-matris $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$, där $k \in \mathbb{R}$

Ta en godt. $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$(A\vec{v}) \cdot \vec{v} = \left(\begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kb \\ -ka \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = kba - kab = 0$

Misstanke: $(A\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ för alla skevsym. matriser A och alla $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Steg 2 $(A\vec{v}) \cdot \vec{v} \overset{③}{=} (A\vec{v})^T \vec{v} \overset{②}{=} \vec{v}^T A^T \vec{v} = -\vec{v}^T A \vec{v} = -\vec{v} \cdot (A\vec{v}) =$

$= -A(\vec{v}^T \cdot \vec{v} = -(A\vec{v}) \cdot \vec{v}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
Modul 2

dvs. $(A\vec{v}) \cdot \vec{v} = -(A\vec{v}) \cdot \vec{v}$

$\Downarrow$

$2(A\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (A\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$

Svar: $(A\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ för alla $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ∎

2013·06·04 #7

$T(A) = A + A^T$

$\uparrow$

7x7-matris från V

a) Visa att T är linjär, d.v.s.

1. $T(A+B) = T(A) + T(B)$ additivitet

2. $T(kA) = kT(A)$ homogenitet

för alla $A, B \in V$ och alla $k \in \mathbb{R}$

1. $T(A+B) = (A+B) + (A+B)^T = A + B + A^T + B^T = (A + A^T) + (B + B^T) = T(A) = T(B)$

2. $T(kA) = kA + kA^T = k(A + A^T) = kT(A)$

Alltså: T är linjär ∎

b) "Vanliga" egenvektorer $\vec{v}$: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Om A är avb.matrisen till $T \Rightarrow T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$

Generaliserade egen"vektorer" M, som är nollskilda symmetriska matriser. $M \neq 0$

$M^T = M$

Vi vill visa att $T(M) = \lambda M$, där $\lambda \in \mathbb{R}$

Ser att $T(M) = M + M^T = M + M = 2M$, d.v.s. M är en egenvektor motsvarande egenvärdet $\lambda = 2$.

2017·10·20 #6

Två populära abstrakta vektorrum

1. $\mathbb{P}_n(x)$ rummet av alla polynom av grad högst n

Ex. $\mathbb{P}_2(x) = \{p(x) = ax^2 + bx + c, \text{ där } a,b,c \in \mathbb{R}\}$

"Standard" basen för $\mathbb{P}_2$ är $\{x^2, x, 1\}$, ty varje $p(x) \in \mathbb{P}_2(x)$ kan skrivas $ax^2 + bx + c1$.

2. $M(m,n)$ rummet av alla $m \times n$-matriser

Ex. $M(2,2) = \{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ där } a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

"Standard" basen är $\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_4} \right\}$,

ty $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = aB_1 + bB_2 + cB_3 + dB_4$

Anm. $\dim \mathbb{P}_2(x) = 3 \quad \dim M(2,2) = 4$

Avbildningsmatris i godtyckliga baser

Påminnelse $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Standardbasen $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Avb.mat. $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ T(\vec{e}_1) & \dots & T(\vec{e}_n) \\ | & & | \end{bmatrix}$

Nu $T: V \to V$ Godt. bas $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$

Avb.mat. $A_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(\vec{b}_k)]_{\mathcal{B}} \\ | & & | \end{bmatrix}$ ∎

2017·10·20 #6

$f: V \to V \quad f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} M$ Sök $\det A$ där $A = A_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$

Steg 1 Vet att $A_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ [f(B_1)]_{\mathcal{B}} & [f(B_2)]_{\mathcal{B}} & [f(B_3)]_{\mathcal{B}} & [f(B_4)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$

$f(B_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2B_1 + 0B_2 + 1B_3 + 0B_4$

$\Downarrow$

$$A_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Steg 2 Beräkna determinanten $\det A = 9$ ∎