Algebra och Geometri 2017-11-06

Svenska för ingenjörer

	singularis	pluralis
Bestämd	seminarium	seminarier
Obestämd	seminariet	seminarierna

Som förled i sammansättningar används "seminarie-", t.ex.
seminarieuppgift
seminarieledare
seminariefläskkarrékonsumtion

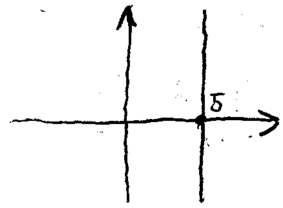
Modul 2 Geometri

punkter
räta linjer
plan
hyperplan

Räta linjers ekvation (i $\mathbb{R}^2$)

Skalärform $Ax+By+C=0$

Ex. $2x-y+4=0$, dvs $y=2x+4$
$x-5=0$, dvs $x=5$



vektorform/parameterform

Ex. $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

Skriv linjens ekvation på skalärform

$\begin{cases}x=1-2t\\ y=3+t\end{cases}$ lös ut t

$x=1-2t$ ger $t=\frac{x-1}{-2}=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

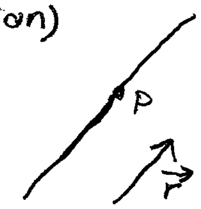
$\Downarrow$

$y=3+t=3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ ∎

Räta linjers ekvation på parameterform/vektorform (eng. parametric equation/ vector equation)

Behöver två saker:

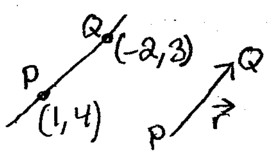
1. En punkt på linjen säg $P=(a,b)$.
2. En vektor parallell med linjen, säg $\vec{r}=(A,B)$
   namn: riktningsvektor



Ekvation $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$, där $t\in\mathbb{R}$

Ex. Finn en ekvation på parameterform till linjen genom $(1,4)$ och $(-2,3)$.

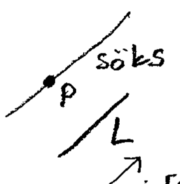
1. Välj $P=(1,4)$
2. Välj en riktningsvektor:
   $\vec{r}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}$



Svar: $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}$, där $t\in\mathbb{R}$. Alt. $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}+s\underbrace{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}}_{\overrightarrow{QP}}$, där $s\in\mathbb{R}$ ∎

Anm. i $\mathbb{R}^2$: $Ax+By+C=0$ 2 variabler rät linje
i $\mathbb{R}^3$: $Ax+By+Cz+D=0$ 3 variabler plan
ekvationer på skalärform ∎

Ex. Finn en ekvation på parameterform till linjen genom $P=(1,2,-5)$ som är parallell med linjen L: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\10\\201735\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\4\\-3\end{bmatrix}$ där $t\in\mathbb{R}$

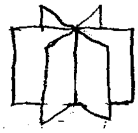


$\vec{r}=\begin{bmatrix}2\\4\\-3\end{bmatrix}$

Svar: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-5\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}2\\4\\-3\end{bmatrix}$, där $s\in\mathbb{R}$

2016·06·09 #5 Tre plan: $\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ y + 2z &= 7 \\ x + z &= 2 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$

a) Sök a så att planen har en rät linje gemensamt (2p)



Lösning: Vill att systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \text{ har oändligt mångalösningar } \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3-a & -6-2a \end{array}\right]$$

Kräv att $-3-a = -6-2a = 0 \Rightarrow a = -3$ ▨

b) Bestäm på parameterform en ekvation till skärningslinjen. (2p)

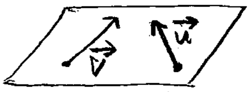
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x + z = 2 \\ y + 2z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - t \\ 7 - 2t \\ t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Svar}}, \text{ där } t \in \mathbb{R}$$

lös systemet

▨

Anm. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ är båda ekvationer på parameterform för räta linjer $\vec{x} = P + t\vec{r}$

<u>Utvidgning</u> Planets ekvation på parameterform



Behöver två saker: 1. En punkt i planet, säg $P = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

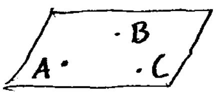
2. Två icke-parallella vektorer, säg $\vec{v}$ och $\vec{u}$, som är parallella med planet.

Planets ekvation $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P + t\vec{v} + s\vec{u}$, där $s, t \in \mathbb{R}$

Obs! Två parametrar!

Ex. Trepunktsproblemet

Bestäm en ekvation på parameterform till det plan som innehåller punkterna $A = (1,2,4)$, $B = (2,1,5)$ och $C = (3,6,3)$.



1. Välj en punkt i planet: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$
2. Välj två vektorer parallella med planet.

$\vec{v} = \vec{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{u} = \vec{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

ej parallella vektorer

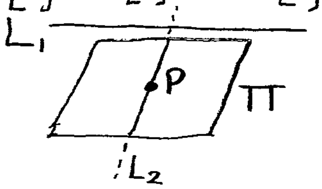
Svar: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ ▨

20160317 # 1(a) (2p)

Två linjer:

$L_1: \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-3\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$ $\quad L_2: \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix}$

Söker ekvation till ett plan Π som är parallellt med L_1 och som innehåller L_2.



väl i $P = \begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}$

Svar: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix} + a\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix}$, där $a, b \in \mathbb{R}$ ■

Anm. Notera att $\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix}$ inte är parallella med varandra. ■

räta linjens ekvation: skalärform och parameterform

planets ekvation: ———— " ————

skärningslinjen mellan olika plan,

Avsnitt 1.3 Skalärprodukt (synonym: Inre produkt)

(eng. dot product) (eng. inner product)

Def (i $\mathbb{R}^2$) Låt $\vec{a} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ och $\vec{b} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$

skalärprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2}_{\text{en skalär} \in \mathbb{R}}$

Ex. $\vec{a} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 3(-5) = 2 - 15 = -13$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 10$

$\vec{b} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + (-5)(-5) = 29$

Generalisering $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $\mathbb{R}^n$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

$\vec{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $\mathbb{R}^n$

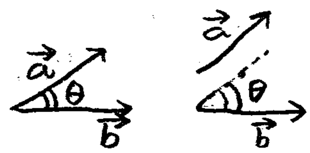
Räknelagar
1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ kommutativitet
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ distributivitet
3. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \underbrace{\|\vec{a}\|}_{\text{vektornorm}}{}^2$

Tillämpning #1 Vinkelberäkning

Sats: Låt $\vec{a}, \vec{b}$ vara i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$

Låt θ vara vinkeln mellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$

↖ theta



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$ dvs $$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$ ■

Ex. $\vec{a} = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ beräkna θ.

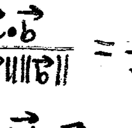
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 1 = 3$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{6}$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{4}\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\theta \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

Bevisidé: Cosinussatsen



$$c^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$ ■

Viktig konsekvens $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$

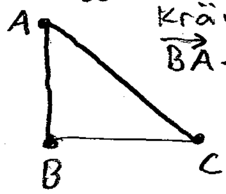
om $\vec{a} \perp \vec{b}$ så $\theta = 90^\circ$, dvs $\cos\theta = \cos 90^\circ = 0$

Tillämpning #2 $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad$ $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är vinkelräta/ ortogonala vektorer

Ex. $A=(1,0,-2)$ $B=(-1,1,-1)$ $C=(2,-1,a)$

Bestäm $a\in\mathbb{R}$ så att ΔABC är rätvinklig där $\hat{B}=90^\circ$

Idéskiss

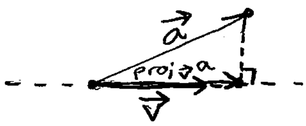


Kräv att $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$

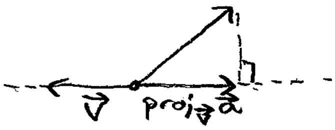
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow (2,-1,-1)\cdot(3,-2,a+1)=0$$

$$2\cdot 3-1(-2)-1(a+1)=0$$
$$6+2-a-1=0$$
$$7-a=0 \Rightarrow a=7 \quad \blacksquare$$

Tillämpning #3 Projektion (synonym: Ortogonal projektion)



projicera $\vec{a}$ på $\vec{v}$ (och få $proj_{\vec{v}}\vec{a}$)
$\shortparallel$
projicera $\vec{a}$ på den räta linjen som spänns upp av $\vec{v}$.
$\shortparallel$
projicera $\vec{a}$ på den räta linjen som är parallell med $\vec{v}$

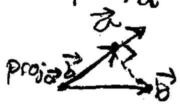


Definition $$proj_{\vec{v}}\vec{a}=\underbrace{\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}}_{\text{skalär}}\vec{v}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\|v\|^2}\vec{v} \quad \blacksquare$$

Ex. $\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$

$$proj_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}=\frac{1\cdot 2+0\cdot 1+(-2)(-1)}{2\cdot 2+1\cdot 1+(-1)(-1)}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\frac{4}{6}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\frac{2}{3}(2,1,-1)=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$proj_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}=\cdots=\left(\frac{4}{5},0,-\frac{8}{5}\right)$$



$\blacksquare$

Avståndsberäkningar

	punkt	linje	plan
punkt	1		
linje	2	4	
plan	3	5	6

(1) punkt-punkt (GyMa)

$P=(x_1,y_1,z_1)$

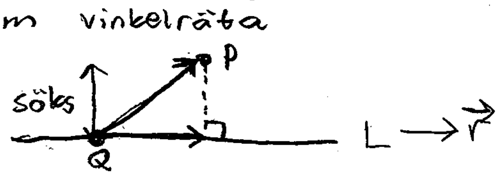
$Q=(x_2,y_2,z_2)$

$$dist(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

(2) punkt-linje i $\mathbb{R}^2$

Problem: Bestäm det minsta avståndet mellan punkten $P=(a,b)$ och linjen $y=kx+m$

alt $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+t\vec{r}$



1. Tag en punkt Q på L. Bilda $\overrightarrow{QP}$

2. Bestäm $\text{proj}_L \overrightarrow{QP} = \text{proj}_{\vec{r}} \overrightarrow{QP}$ $\qquad Q \longrightarrow R$

3. Notera att det sökta avståndet är $\|\overrightarrow{RP}\|$

$$\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QP} \Rightarrow \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} - \text{proj}_{\vec{r}} \overrightarrow{QP}.$$

Anm. $\overrightarrow{RP} = \text{perp}_{\vec{r}} \overrightarrow{QP}$ $\blacksquare$ perp = den perpendikulära delen
(lat.) perpendiculum = lodlina

Slutsats

$$\text{dist}(P, L) = \|\overrightarrow{QP} - \text{proj}_{\vec{r}} \overrightarrow{QP}\| \quad \blacksquare$$

Ex. $P = (2,7)$ linjen L: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \overset{Q}{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}} + t \overset{\vec{r}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

1. Välj $Q = (2, -2) \Rightarrow \overrightarrow{QP} = (0, 9)$.

2. $\text{proj}_{\vec{r}} \overrightarrow{QP} = \dfrac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{r}}{\vec{r} \cdot \vec{r}} \vec{r} = \ldots = \dfrac{9}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}$

3. $\overrightarrow{QP} - \text{proj}_{\vec{r}} \overrightarrow{QP} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18/5 \\ 9/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18/5 \\ 36/5 \end{bmatrix}$

Slutsats: Det sökta avståndet är $\left\| \left(-\frac{18}{5}, \frac{36}{5} \right) \right\|$

Väg 1 $\sqrt{\left(-\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2}$ jobbigt med 18^2 och 36^2

Väg 2 $\left\| \left(-\frac{18}{5}, \frac{36}{5} \right) \right\| = \left\| 18 \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right) \right\| = 18 \left\| \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right) \right\| = 18 \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} =$

$$= 18 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = 18 \sqrt{\frac{5}{25}} = 18 \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}} \quad \blacksquare$$

kryssprodukt $\qquad$ cross product
vector product