2014.03.14 #9

Väg #1 ① Bestäm L:

Lös $\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 3/4 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3/4 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{L är en rät linje}}$, där $t \in \mathbb{R}$

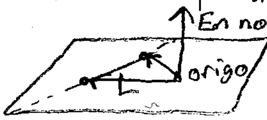
② Låt V vara det sökta delrummet:

Fall 3 $V = \mathbb{R}^3$ duger

Fall 1 V är en rät linje <u>genom</u> <u>origo</u> $\Rightarrow V = L$ omöjligt!

L går inte genom origo ty $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ uppfyller inte ekv.sys!

Fall 2 V är ett plan <u>genom</u> <u>origo</u>

Planet V 

$\vec{n} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ (alt. $\vec{n} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA}$)

Välj två punkter på linjen L, t.ex. $A = (\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 0)$ och $B = (\frac{2}{4}, \frac{2}{4}, 1)$

$\Downarrow$

En normalvektor till planet V är $\begin{bmatrix} 5/4 \\ 3/4 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2/4 \\ 2/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -5/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Slutsats Planets ekvation är $3x - 5y + z = 0$ (*)

Svar: $V = \mathbb{R}^3$ eller V är planet som ges av ekvationen $3x - 5y + z = 0$

Väg #2 Sök (*): Inse att planets ekvation kan läggas in i systemet utan att förändra systemets lösning.

$\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ Ta 2·rad 1 − rad 2

$3x - 5y + z = \underset{\text{viktigt}}{\underline{\underline{0}}}$ ∎

2014.05.20 #7

Sök avbildningsmatrisen A (3 × 3-matris)

Ansätt $\underbrace{\text{med hjälp av villkoret (b)}}_{\operatorname{im}T=\operatorname{Col}A=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}}$ $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&p&q\end{bmatrix}$, där $p,q\in\mathbb{R}$

$p\ q$ måste vara linjärt oberoende av $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

Sök nu p och q m.h.a villkoret (a)

$A\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&p&q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0\\0\\1-p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow p=1$

$A\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&p&q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0\\0\\p+q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow q=-1$

Slutsats $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$ duger

Svar: $A=k\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\k&k&-k\end{bmatrix}$, där $k\in\mathbb{R}$ ock $\underbrace{k\neq0}_{\text{OBS!}}$

$\overbrace{\text{Anm.}}^{\text{frivillig}}$ Annat sätt att svara: $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\k&k&-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\k(x+y+z)\end{bmatrix}$

$\overbrace{\text{Anm.}}^{\text{Viktig att ha med}}$ Om vi ansätter $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\a&1&b\end{bmatrix}\Rightarrow\ldots\Rightarrow a=1\quad b=-1$ samma resultat.

Om $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\c&d&1\end{bmatrix}\Rightarrow\ldots\Rightarrow c=-1\quad b=-1$ Som ovan, med $k=-1$

∎

2013·01·17 #7 Vad kan vi göra?

① $\vec{v}$ i planet $x-y+2z=0$ är en egenvektor motsvarande egenvärdet 2.

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-2t\\s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$, d.v.s två egenvektorer motsvarande $\lambda=2$ är $\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{\vec{a}}$ och $\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$

② Från föreläsning 21 (eller 20):

A är symmetrisk $\Rightarrow$ Egenvektorer motsv. $\lambda=1$ är ortogonala mot egenvektorer motsv. $\lambda=2$

En egenvektor motsv. $\lambda=1$ är $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ Kontroll $\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{b}=0$

Väg #1 Sök A, sedan $A\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$.

Diagonalisering "baklänges" ger $A=PDP^{-1}=\begin{array}{c}\begin{matrix}\vec{a}&\vec{b}&\vec{c}\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}\end{array}\cdot\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\underbrace{P^{-1}}_{\text{känd men lång process}}$

Väg #2

$A\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}=A\underbrace{\left(3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right)}_{\text{linjärkombination av egenvektorerna}}$

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&2\\1&0&-1&2\\0&1&2&3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&2\\0&2&-2&0\\0&1&2&3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&2\\0&1&2&3\\0&2&-2&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&2\\0&1&2&3\\0&0&-6&-6\end{array}\right]$

$=3A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+A\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}+A\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=3\cdot2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\ldots=\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$ ∎

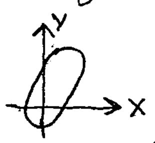
Kvadratiska former på huvudaxelform,
synonym: diagonalform

Ex. $Q(x,y)=5x^2\underbrace{-4xy}_{\text{blandad term}}+2y^2$ Vill byta variabler, (x,y) till (a,b), s.a. $Q(a,b)$ endast har rent kvadratiska termer.

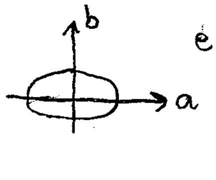
Faktum Byt $\begin{cases}a=\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)\\b=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y)\end{cases}$ och vi får $Q(x,y)=Q(a,b)=a^2+6b^2$
Imorgon: Hur?

Kontroll $Q(a,b)=a^2+6b^2=\frac{1}{5}(x+2y)^2+\frac{6}{5}(-2x+y)=\ldots=5x^2-4xy+2y^2$

Lite geometri från SF1625 & SF1626



kurvan vars ekv. är $5x^2-4xy+2y^2=1$ t.ex.



ellipsen i nya variabler $a^2+6b^2=1$
är symmetrisk kring koordinataxlarna