Stukan 7 & 8

Ordkunskap: Se till att du känner till de viktiga formlerna som berör följande begrepp:

räta linjens ekvation (på parameterform)

planets ekvation (på parameterform)

planets ekvation (på skalärform / standardform)

kryssprodukt (synonym: vektorprodukt)

Övning 1. a) Beräkna kryssprodukten $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

b) Givet ett plan som beskrivs parametriskt av ekvationen $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Finn en ekvation på skalärform, dvs. på formen $Ax + By + Cz + D = 0$, till detta plan.

c) Säg nu att vi har ett plan vars ekvation på skalärform är $x + y - z = 1$. Hur hittar vi en ekvation på parameterform till detta plan då?

Övning 2. Betrakta triangeln ABC med hörn i punkterna $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -3, 2)$ och $C = (4, 1, 0)$.

a) Utnyttja kryssprodukt för att bestämma triangelns area.

b) Utnyttja skalärprodukt för att bestämma cosinus för vinkeln vid hörnet A.

Övning 3. Bestäm skärningspunkten mellan de två räta linjerna som ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Övning 4. Givet fyra punkter $A = (6, -3, 0)$, $B = (3, -7, 1)$, $C = (3, 7, -1)$ och $D = (4, 5, -3)$.

a) Bestäm på parameterform en ekvation till den räta linjen $\mathcal{L}_1$ som går genom A och B.

b) Bestäm på parameterform en ekvation till den räta linjen $\mathcal{L}_2$ som går genom C och D.

c) Bestäm på skalärform en ekvation till det plan som innehåller $\mathcal{L}_2$ och som är parallellt med $\mathcal{L}_1$.

d) Bestäm slutligen det minsta avståndet mellan linjerna $\mathcal{L}_1$ och $\mathcal{L}_2$.

Övning 5. Beräkna det minsta avståndet från punkten $P = (2, -3, 8)$ till x-axeln.

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$. Ett bra sätt att dubbelkolla om svaret kan stämma är att se till att $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot både $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Enkla skalärprodukter ger $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$, vilket påvisar ortogonaliteten.

b) Vi behöver en punkt P i planet och en normalvektor $\vec{n}$ till planet. Med hjälp av planets ekvation på parameterform kan vi välja $P = (3, 0, -4)$. Notera också att $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ är två vektorer parallella med planet, så $\vec{n}$ borde vara vinkelrät mot båda dessa vektorer. Vi kan således ta fram $\vec{n}$ med hjälp av en kryssprodukt:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Planets ekvation på skalärform är således

$1(x - 3) + 9(y - 0) + 16\big(z - (-4)\big) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 + 9y + 16z + 64 = 0$

$\Leftrightarrow x + 9y + 16z + 61 = 0$, eller med andra ord $x + 9y + 16z = -61$.

c) Vi kan börja med att välja tre punkter i planet, säg $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 0, 1)$ och $R = (1, 0, 0)$. Två vektorer parallella med planet är $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 0)$ och $\overrightarrow{PR} = (0, -1, -1)$. Eftersom $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$ inte är varandras multipler är de inte parallella med varandra. En ekvation på parameterform till planet är då

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Anmärkning: 1. Vi kan naturligtvis också svara med till exempel

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Ett sätt att kontrollera svaret är att prova gå från parameterformen tillbaka till skalärformen med samma strategi som används på delfrågan b). En normalvektor till planet är

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Då $P = (1, 1, 1)$ ligger i planet är planets ekvation på skalärform

$1(x - 1) + 1(y - 1) + (-1)(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 + y - 1 - z + 1 = 0$, eller med andra ord $x + y - z = 1$. Det stämmer!

Övning 2. a) Det är bra att du ritar en idéskiss först. Notera att $\overrightarrow{AB} = (1, -3, 1)$ och $\overrightarrow{AC} = (3, 1, -1)$. Enligt ett känt samband kan vi räkna ut arean av den parallellogram som spänns upp av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ enligt

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \right\| = 2 \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\| = 2\sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = 2\sqrt{30}$$

Triangeln ABC har således arean

$$\frac{2\sqrt{30}}{2} = \sqrt{30}$$

b) Låt den avsedda vinkeln heta θ (eller Theodor). Enligt ett känt samband får vi

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(1, -3, 1) \cdot (3, 1, -1)}{\|(1, -3, 1)\| \|(3, 1, -1)\|} = \frac{-1}{\sqrt{11}\sqrt{11}} = -\frac{1}{11}$$

Övning 3. Ekvationerna innebär att varje punkt på den ena linjen har koordinater

$$(x, y, z) = (1 + 2t, 3t, t)$$

och att varje punkt på den andra linjen har koordinater

$$(x, y, z) = (5s, 5 + s, 5 - 3s)$$

Linjerna bör skära varandra där

$(1 + 2t, 3t, 1) = (5s, 5 + s, 5 - 3s)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 5s \\ 3t = 5 + s \\ t = 5 - 3s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 5s = -1 \\ 3t - s = 5 \\ t + 3s = 5 \end{cases}$$

Detta ekvationssystem kan lösas med hjälp av gymnasiematematik eller gausseliminering i samband med matriser. Gör vi rätt finner vi att $t = 2$ och $s = 1$.

Skärningspunkten är således $(x, y, z) = (1 + 2t, 3t, t) = (1 + 2 \cdot 2, 3 \cdot 2, 2) = (5, 6, 2)$. Vi kan förstås också räkna ut denna punkt med $(x, y, z) = (5s, 5 + s, 5 - 3s) = (5 \cdot 1, 5 + 1, 5 - 3 \cdot 1) = (5, 6, 2)$.

Övning 4. a) Detta är en standarduppgift. Vi kan svara med

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t\,\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Ett möjligt svar är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} + s\,\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

c) Detta plan borde vara parallellt med både $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$. En normalvektor till planet är

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

För enkelhets skull kan vi dock välja $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Då planet innehåller $\mathcal{L}_2$, innehåller det också punkten $C = (3, 7, -1)$. Planets ekvation på skalärform är

$2(x-3) + (-1)(y-7) + 2\big(z-(-1)\big) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 6 - y + 7 + 2z + 2 = 0$, dvs. $2x - y + 2z + 3 = 0$.

d) Detta är som att bestämma det minsta avståndet mellan linjen $\mathcal{L}_1$ och planet, ty planet är parallellt med $\mathcal{L}_1$ och innehåller $\mathcal{L}_2$. Eftersom A ligger på $\mathcal{L}_1$ är problemet ekvivalent med att bestämma det minsta avståndet mellan punkten $A = (6, -3, 0)$ och planet $2x - y + 2z + 3 = 0$.

Avståndsformeln (för det minsta avståndet mellan en punkt och ett plan) ger

$$\left|\frac{2 \cdot 6 - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}\right| = \left|\frac{18}{\sqrt{9}}\right| = 6$$

Alternativt kan vi beräkna avståndet mellan punkten $B = (3, -7, 1)$ och planet. Samma svar erhålls:

$$\left|\frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 1 + 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}\right| = \left|\frac{18}{\sqrt{9}}\right| = 6$$

Övning 5. Detta är som att beräkna det minsta avståndet mellan punkten $P = (2, -3, 8)$ och den räta linjen som ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tag en punkt på linjen, säg $Q = (0, 0, 0)$. Bilda vektorn $\overrightarrow{QP} = (2, -3, 8)$. En vektor parallell med linjen är $\vec{u} = (1, 0, 0)$. Det sökta avståndet är enligt en känd strategi precis

$$\left\|\overrightarrow{QP} - \text{proj}_{\vec{u}}\, \overrightarrow{QP}\right\| = \cdots = \left\|\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73}$$