Algebra och Geometri 2017-11-27

Determinanter

En determinant är ett tal som är kopplat till varje kvadratisk matris. $n \times n$

<u>upplägg</u> determinant
- bestämning för
  - 2×2
  - 3×3
  - $n \times n$
- tillämpning
  - algebraisk
  - geometrisk

I 2×2-matriser

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Sats:

$$\det A = ad - bc$$

II 3×3-matriser

Metod #1 Sauvrus regel (från Pierre Frédéric Sauvrus)

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

$- \; - \; - \quad + \; + \; +$

Ex 1

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$- \; - \; - \quad + \; + \; +$

$$\det A = (-28) + (-6) + 0 - 0 - 40 - (-42)$$
$$= -28 - 6 - 40 + 42 = \underline{-32}$$

svar

III $n \times n$-matriser

Allmän metod (#2) Kofaktorutveckling (eng.) Cofactor expansion (från P.S. de Laplace)

Begrepp #1 Minor

Def. Givet en $n \times n$-matris A. En minor som genereras av ett element $a_{ij} \in A$ är en deldeterminant som fås då rad i och kolonn j stryks bort. ∎

Ex.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

element a_{13} genererar minoren

$$M_{13} = \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Ex.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \qquad M_{32} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

element a_{32}

Begrepp #2 Kofaktor

Def. Givet en minor M_{ij}. Den motsvarande kofaktorn är

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad ∎$$

teckenskiftare 1 eller -1

Ex.2 $C_{13} = \underbrace{(-1)^{1+3}}_{1} M_{13} = M_{13}$

Ex.3 $C_{32} = \underbrace{(-1)^{3+2}}_{-1} M_{32} = -M_{32}$

Minnesregel

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Generellt

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Begrepp #3 Kofaktorutveckling (KFU)

Def. Givet en $n \times n$-matris A.

$\det A$ kan bestämmas genom att KFU längs en <u>valfri</u> rad eller en valfri kolonn.

Längs rad i:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}$$

Längs kolonn j:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj} \quad \blacksquare$$

Ex. 1

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Alt #1 KFU längs rad 1 ger

$$\det A = +4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 0 \underbrace{\overbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}^{\text{minoren } M_{13}}}_{\text{det. av en } 2\times 2\text{-matris}}$$

$$\Downarrow$$

$$\det A = 4(-7-10) + 3(14-2) + 0$$
$$= 4(-17) + 3 \cdot 12 = -68 + 36 = \underline{-32}$$

Svar

Alt #2 KFU längs kolonn 2 ger

$$\det A = -(-3)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -32 \quad \blacksquare$$

Två speciella matriser

① A med en 0-rad eller 0-kolonn Ex. $\det \begin{bmatrix} a & 0 & d \\ b & 0 & e \\ c & 0 & f \end{bmatrix} = 0$ (KFU längs kolonn 2)

② Triangulär matris (endast 0:or ovanför eller nedanför huvuddiagonalen.

$\underbrace{\text{huvud}}_{=\text{vänster}}$

Ex.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 37 & 102 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 37 & 102 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{\underline{72}}$$

KFU längs kolonn 1

Svar

Generellt Låt A vara triangulär.

$\det A$ = produkten av huvuddiagonalelemanten $\blacksquare$

Metod #3 Radoperationer

Låt A vara en $n \times n$-matris. Då gäller:

① $\det(A \leftrightarrows) = -\det A$ Ex. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det A = ad - bc$ $B = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ $\det B = bc - ad = -\det A$

② $\det(A\ \textcircled{k}) = k \det A$ Ex. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ③ $\det A = -32$

$B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 15 & 21 \end{bmatrix}$ $\det B = 3 \cdot (-32) = -96$

③ $\det(A \hookleftarrow) = \det A$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\det A = 12 - 2 = 10$

$(R_1 + 4R_2)$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\det B = 28 - 18 = 10$

Stukan 16
Övn. 2

Allmänna räknelagar

1. $\det(AB) = \det A \det B$ men $\det(A \pm B) \neq \det A \pm \det B$

2. $\det(A^m) = (\det A)^m$ Anm. $A^m = AA \ldots A$ (m st. faktorer)

3. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

4. $\det(A^T) = \det A$ Stukan

Några algebraiska tolkningar av determinant

Låt A vara en $n \times n$-matris. Om $\det A \neq 0$ gäller allt följande:

1. A är inverterbar, dvs A^{-1} finns: $A^{-1} = \overbrace{\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A}^{\text{Avsnitt 5.3.}}$
2. Ekv.systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har en unik lösning enligt: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$
3. A (på trappstegsform) har n ledande element, d.v.s. $\operatorname{rank} A = n$ (enligt satsen om lösbarhet)
4. Alla kolonner i A är linjärt oberoende.

Stukan 16 övning 3&4