Algebra och Geometri 2017-12-01

Två viktiga ekvationer:

1. $\det(A - \lambda I) = 0$ ger egenvärdena λ
2. $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ ger egenvektorerna $\vec{v}$

Exempel i anteckningarna från förra föreläsningen

Egenvektorn $\vec{v}$ får inte vara $\vec{0}$ ($\vec{0}$ är ingen egenvektor)

Egenrummet tillhörande ett egenvärde är rummet som de tillhörande egenvektorer spänner upp.

Varje egenvärde motsvarar <u>alltid</u> oändligt många egenvektorer $\vec{v}$, ty $\det(A-\lambda I) = 0$.

Ex. 2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ har $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$

ty: Karekv. $\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -4 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(6-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 8\lambda = 0$,
dvs $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 8$

Anm. Att $\lambda = 0$ innebär att den motsvarande egenvektorn $\vec{v}$ uppfyller $A\vec{v} = 0\vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} = \vec{0}$, dvs. $\vec{v} \in \text{Null}A$. $\blacksquare$

Ex. 3 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ har $\begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2i \\ \lambda_2 = 1 - 2i \end{cases}$ ingår <u>inte</u> i kursen

Ex. 4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Bestäm alla $\underbrace{\text{egenvärden}}_{(a)}$, och alla motsvarande $\underbrace{\text{egenvektorer}}_{(b)}$.

(a) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda) - 1) =$

$= (2-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$

Nollproduktmetoden $2 - \lambda = 0$ ger $\lambda_1 = 2$ } upprepade
eller $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ ger $\lambda_2 = 2$ } egenvärden
$= \lambda(\lambda - 2)$ $\quad \lambda_3 = 0$

(b) För $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Vill lösa $(A - 2I)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ ger $-u_1 + u_3 = 0$

Vanligt fel $u_2 = 0$

$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, där $(t, s) \neq (0, 0)$

krav: $\vec{u} \neq 0$

fel att kräva $s \neq 0$ och $t \neq 0$

Anm. Egenrummet är $E_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

För $\lambda_3 = 0$ Låt p.s.s $(A - 0I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \vec{v} = r\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, där $r \neq 0$. ∎

Ex. 5 $A = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&4\end{bmatrix}$

har eg. värd. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ motsvarar eg. vekt $\vec{u} = t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 4$ motsvarar eg. vekt $\vec{v} = s\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}$ ∎

Nya begrepp

1. algebraisk multiplicitet A.M. av λ = mult. av λ som rot till kar.ekv $\det(A-\lambda I) = 0$
2. geometrisk multiplicitet G.M. av λ = dimensionen av egenrummet E_λ
   = antalet linjärt oberoende egenvektorer som λ motsvarar ∎

Ex 4. diagonaliserbar matris	$\lambda = 2$	A.M. är 2	G.M. är 2
	$\lambda = 0$	A.M. är 1	G.M. är 1
Ex 5 inte dia.bar.	$\lambda = 1$	A.M. är 2	G.M. är 1
	$\lambda = 4$	A.M. är 1	G.M. är 1

Två viktiga egenskaper

1. För varje egenvärde λ gäller att $1 \leq$ G.M. $\leq$ A.M.
2. Egenvektorer motsvarande <u>olika</u> egenvärden är linjärt oberoende.

Nyhet: Diagonalisering av en matris.

Begrepp #1 Diagonalmatris

Ex. $A = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Def. En matris där alla element utom huvuddiagonalelementen är 0.

$$\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Begrepp #2

Def. En $n \times n$-matris A sägs vara diagonaliserbar om det finns en matris P s.a. $P^{-1}AP = D$, där D är någon diagonalmatris.

Ex. 1 $A = \begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}$ är diagonaliserbar, där $P = \begin{bmatrix}-1&1\\1&2\end{bmatrix}$.

Testa:

$$P^{-1}AP = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\1&2\end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}2&-1\\-4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\1&2\end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-3&0\\0&-12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix} = D$$

diagonalmatris ∎

Anm. I praktiska beräkningar skrivs oftast $A = PDP^{-1}$

ty $P^{-1}AP = D$

$\Downarrow$ $\underline{PP^{-1}}A\underline{PP^{-1}} = PDP^{-1}$

Diagonalmatrisformeln

Givet en $n \times n$-matris A.

Vill hitta P och D s.a. $A = PDP^{-1}$

inverterbar (P), diagonalmatris (D)

Steg 1 Bestäm alla egenvärden till A:
$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$

Steg 2 Bestäm n linjärt oberoende egenvektorer:
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$ ← en bas för $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer

Steg 3 Bilda $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$

Ex. 1 Vi kan också välja $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Satsen om diagonaliserbarhet.

En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ A har n linjärt oberoende egenvektorer $\Leftrightarrow$ varje egenvärde till A har A.M. lika med G.M.

Konsekvens: Om A har n olika egenvärden är A säkert diagonaliserbar. ty enligt (*) har A då n oberoende egenvektorer

Tillämpning av diagonalisering

Stukan 18+

Problem Beräkna t.ex. A^{972}.

$$A = PDP^{-1}$$

Modul 4

$$A_{S \leftarrow S} = P_{S \leftarrow B} A_{B \leftarrow B} P_{B \leftarrow S}$$