Stukan 17

Ordkunskap: Se till att du känner till definitionerna av och eventuellt de viktiga formlerna för följande begrepp:

determinant	algebraisk multiplicitet (av ett egenvärde)
egenvärde, egenvektor & egenrum	geometrisk multiplicitet (av ett egenvärde)

Övning 1. Låt $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm samtliga egenvärden till A.

b) Bestäm alla egenvektorer respektive egenrummet tillhörande varje egenvärde.

Övning 2. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm samtliga egenvärden till A.

b) Bestäm alla egenvektorer tillhörande varje egenvärde.

c) (**frivillig utmaning**) Visa att om k är ett egenvärde till A, är k^2 ett egenvärde till $B = A^2$.

Tips: Vad du än gör, beräkna inte A^2 och lös inte heller ekvationen $\det(B - \lambda I) = 0$.

Övning 3. a) Låt $A = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. Bestäm samtliga egenvärden till A. Bestäm för varje egenvärde dess algebraiska respektive geometriska multiplicitet.

b) Samma uppdrag som ovan, men med matrisen $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, där b är en konstant. **Anmärkning:** B sägs vara en diagonalmatris, dvs. en matris där alla element, utom huvuddiagonalelementen, är 0.

Övning 4. Den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är bestämd av

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Enhetskvadraten Ω har hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$, och avbildas genom T på en parallellogram $T(\Omega)$.

a) Bestäm matrisen för avbildningen T. **Ledtråd:** En lösningsmetod nämndes i **Stukan 13**, **Övning 2**, men det finns andra (eventuellt enklare) metoder.

b) Visa att bildrummet till T är hela $\mathbb{R}^2$.

c) Bestäm arean av parallellogrammen $T(\Omega)$.

Anmärkning: Detta är (en smått modifierad version av) uppgift **3** från tentamen 2014-03-14.

Facit

Latin för alla: Ordet ”facit” på svenska och ”Fazit” på tyska kommer av latinets ”facit” som bokstavligen betyder ”det gör” eller ”det utgör”.

Några användbara citat:

1. Coactus **feci**. (Jag **har gjort** det av tvång, dvs. Härtill är jag nödd och tvungen.)
2. Dictum **factum**. (Det som är sagt är **gjort**, dvs. Sagt och gjort.)
3. **Factum** est. (Det är **gjort**, dvs. Saken är klar, dvs. Saken är biff.)
4. Examinator me lacrimantem **facere** non potest. (Examinatorn kan inte **göra** mig gråtande, dvs. Examinatorn kan inte få mig att gråta.)

Övning 1. a) Egenvärdena till A bestäms av den karakteristiska ekvationen $\det(A-\lambda I)=0$.

Vi räknar på: $\det\begin{bmatrix}5-\lambda & 8\\ -3 & -5-\lambda\end{bmatrix}=(5-\lambda)(-5-\lambda)-(-24)=\lambda^2-1=0$, dvs. egenvärdena är $\lambda_1=1$ och $\lambda_2=-1$.

b) **För $\lambda_1=1$:** De motsvarande egenvektorerna $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$ uppfyller $(A-\lambda_1 I)\vec{u}=\vec{0}$, dvs.

$$(A-I)\vec{u}=\vec{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}4 & 8\\ -3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Detta ekvationssystem löses enkelt med exempelvis gausseliminering:

$\left[\begin{array}{cc|c}4 & 8 & 0\\ -3 & -6 & 0\end{array}\right]\sim\begin{bmatrix}\frac{1}{4}R_1\\ -\frac{1}{3}R_2\end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{array}\right]$, vilket innebär $u_1+2u_2=0$, dvs. $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$.

Samtliga egenvektorer tillhörande egenvärdet $\lambda_1=1$ ges av $\vec{u}=t\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$, där $t\neq 0$. (Minns att en egenvektor, per definition, inte får vara $\vec{0}$.)

Egenrummet tillhörande $\lambda_1=1$ är per definition det vektorrum som består av $\vec{0}$ och alla egenvektorer tillhörande $\lambda_1=1$, vilket är inget annat än $\left\{t\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}\right\}$.

För $\lambda_2=-1$: De motsvarande egenvektorerna $\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$ uppfyller $(A-\lambda_2 I)\vec{v}=\vec{0}$, dvs.

$$(A+I)\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}6 & 8\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Detta ekvationssystem löses enkelt med exempelvis gausseliminering:

$\left[\begin{array}{cc|c}6 & 8 & 0\\ -3 & -4 & 0\end{array}\right]\sim\begin{bmatrix}\frac{1}{2}R_1\\ -R_2\end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{cc|c}3 & 4 & 0\\ 3 & 4 & 0\end{array}\right]$, vilket innebär $3v_1+4v_2=0$, dvs. $\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{3}s\\ s\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-\frac{4}{3}\\ 1\end{bmatrix}$.

Samtliga egenvektorer motsvarande egenvärdet $\lambda_2=-1$ ges av $\vec{v}=s\begin{bmatrix}-\frac{4}{3}\\ 1\end{bmatrix}$, där $s\neq 0$. Egenrummet tillhörande $\lambda_2=-1$ är härmed $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-\frac{4}{3}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$.

Anmärkning: Vi kan från ekvationen $3v_1 + 4v_2 = 0$ också säga att $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4s \\ 3s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, där $s \neq 0$ (ty $3 \cdot (-4s) + 4 \cdot (3s) = 0$). Egenrummet tillhörande $\lambda_2 = -1$ är då span $\left\{\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$, vilket är precis detsamma som span $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Övning 2. a) Egenvärdena till A bestäms av den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.

Vi räknar på:

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \{\text{ kofaktorutveckling längs kolonn 1 }\} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$(2-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$, dvs. egenvärdena är $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 3$.

b) **För $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$:** De motsvarande egenvektorerna $\vec{u}$ uppfyller $(A - \lambda_1 I)\vec{u} = \vec{0}$, dvs.

$$(A - 2I)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta ekvationssystem löses enkelt med exempelvis gausseliminering:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_3 \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$, vilket innebär $u_2 + u_3 = 0$.

Denna ekvation innehåller inte u_1 (på ett explicit sätt), vilket innebär att u_1 inte behöver uppfylla några specifika krav och kan därför anta vilket värde $s \in \mathbb{R}$ som helst.

Alla egenvektorer tillhörande egenvärdet $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ges av $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, där $(s, t) \neq (0, 0)$ (dvs. s får vara 0, t får vara 0, men s och t får inte vara 0 båda två).

Anmärkning: Det är fel att kräva både $s \neq 0$ och $t \neq 0$. Per definition får en egenvektor $\vec{u}$ inte vara $\vec{0}$, varför det räcker med att kräva $(s, t) \neq (0, 0)$.

För $\lambda_3 = 3$: De motsvarande egenvektorerna $\vec{v}$ uppfyller $(A - \lambda_3 I)\vec{u} = \vec{0}$, dvs.

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta ekvationssystem löses enkelt med exempelvis gausseliminering:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -R_1 \\ -R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 + 2R_2 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$, vilket innebär att

$$\begin{cases} v_1 - 2v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$, där $r \neq 0$.

c) Att k är ett egenvärde till A innebär definitionsmässigt att $A\vec{v} = k\vec{v}$, där $\vec{v}$ är en egenvektor tillhörande egenvärdet k. Då fås $B\vec{v} = A^2\vec{v} = AA\vec{v} = A(A\vec{v}) = A(k\vec{v}) = k(A\vec{v}) = k(k\vec{v}) = k^2\vec{v}$.

Vi har alltså visat att $B\vec{v} = k^2\vec{v}$, vilket innebär precis att k^2 är ett egenvärde till B (och $\vec{v}$ är en egenvektor tillhörande egenvärdet k^2).

Saken är biff.

Övning 3. a) Egenvärdena till A bestäms av den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.

Vi räknar på: $\det\begin{bmatrix} 9-\lambda & -9 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (9-\lambda)(-3-\lambda) + 36 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, dvs. egenvärdena är $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Eftersom $\lambda = 3$ är en dubbelrot till ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ säger vi att egenvärdet $\lambda = 3$ har algebraisk multiplicitet 2.

För att bestämma detta egenvärdes geometriska multiplicitet, som är dimensionen av dess egenrum, behöver vi först ta fram dess egenvektorer $\vec{u}$ genom att lösa ekvationen $(A - 3I)\vec{u} = \vec{0}$, dvs.

$$\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta ekvationssystem löses enkelt med exempelvis gausseliminering:

$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -9 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{3}R_1 \\ \frac{1}{2}R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$, vilket innebär $2u_1 - 3u_2 = 0$, dvs. $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, där $t \neq 0$. Egenrummet till $\lambda = 3$ är således span $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ och har dimension 1 (ty en bas till detta egenrum är $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$). Vi säger att egenvärdet $\lambda = 3$ har geometrisk multiplicitet 1.

Anmärkning: Notera att den geometriska multipliciteten av $\lambda = 3$ är precis antalet fria variabler i ekvationen $2u_1 - 3u_2 = 0$. Detta fungerar bra som en legitim genväg.

b) Egenvärdena till B bestäms av den karakteristiska ekvationen $\det(B - \lambda I) = 0$.

Vi räknar på: $\det\begin{bmatrix} b-\lambda & 0 \\ 0 & b-\lambda \end{bmatrix} = (b-\lambda)^2 = 0$, dvs. egenvärdena är $\lambda_1 = \lambda_2 = b$.

Eftersom $\lambda = b$ är en dubbelrot till ekvationen $\det(B - \lambda I) = 0$ säger vi att egenvärdet $\lambda = b$ har algebraisk multiplicitet 2.

För att bestämma detta egenvärdes geometriska multiplicitet löser vi ekvationen $(B - bI)\vec{u} = \vec{0}$, dvs.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta innebär helt enkelt att alla vektorer $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ (utom $\vec{0}$) är egenvektorer till B. Egenrummet motsvarande egenvärdet $\lambda = b$ är $\mathbb{R}^2$ (som tydligen har dimension 2). Den geometriska multipliciteten av $\lambda = b$ är härmed 2.

Anmärkning: I allmänhet gäller följande: Om ett egenvärde $\lambda = k$ har algebraisk multiplicitet $\mathrm{A.M.}$ och geometrisk multiplicitet $\mathrm{G.M.}$ gäller att

$$1 \leq \mathrm{G.M.} \leq \mathrm{A.M.}$$

Övning 4. a) Låt avbildningsmatrisen till T vara A.

Att $T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ och $T\left(\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ innebär att $A\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ respektive $A\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Med tanke på hur matrismultiplikation fungerar kan vi skriva dessa två samband som

$$A\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

vilket ger

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -4\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -4\end{bmatrix}^{-1} = \{\text{ adjunktformeln }\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix}$$

b) Bildrummet till T är precis $\operatorname{Col} A = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}$. Då vektorerna $\begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ inte är parallella, är de linjärt oberoende och bildar en bas för $\mathbb{R}^2$. Med andra ord gäller att

$$\operatorname{im} T = \mathbb{R}^2$$

Saken är biff.

c) Arean av parallellogrammen $T(\Omega)$ är enligt en känd sats arean av Ω multiplicerad med absolutbeloppet av $\det A$.

Arean av enhetskvadraten Ω är tydligen 1. Determinanten av A är

$$\det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix}-2 & 1\\-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = -2\cdot\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\cdot 1\right) = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Arean av $T(\Omega)$ är således

$$1\cdot\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Anmärkning: Det är helt fel att beräkna determinanten av A som

$$\det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}-4 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

För att få rätt resultat måste vi snarare räkna så här:

$$\det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \det\begin{bmatrix}-4 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Allmänt gäller följande: Om A är en $n\times n$-matris fås

$$\det(kA) = k^n \det A$$