Stukan 4

Ordkunskap: Se till att du vet vad dessa begrepp och satser innebär:

rang (av en matris)

ledande element (i en matris på trappstegsform)

satser om lösbarhet (av ett linjärt ekvationssystem)

linjärkombination

linjärt hölje (eng. span)

delrum (eng. subspace)

Övning 1. Givet tre vektorer $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$.

a) Skriv $\vec{m} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

b) Visa att span $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \mathbb{R}^3$. Vi vill med andra ord visa att varje <u>godtycklig</u> vektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

Övning 2. a) Låt S vara mängden av alla vektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i vektorrummet $\mathbb{R}^2$ som uppfyller $x + 2y = 5$. Mängden S består alltså av sådana vektorer som $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

Förklara varför S <u>inte</u> är ett delrum till $\mathbb{R}^2$.

b) Låt T vara mängden av alla vektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i vektorrummet $\mathbb{R}^2$ som uppfyller $xy = 0$. Mängden T består alltså av sådana vektorer som $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Förklara varför T <u>inte</u> är ett delrum till $\mathbb{R}^2$.

Övning 3. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + & (a^2+1)y + & az & = 1 \\ x + & 2y + & az & = 1 \\ 2x + & 4y + & (1+3a)z & = 0 \end{cases}$$

där a är en konstant.

För vilka värden på a har systemet en unik lösning, ingen lösning alls respektive oändligt många lösningar?

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. a) $\vec{m} = -2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}$.

b) Vi vill visa att vi för varje <u>godtycklig</u> vektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ kan vi skriva

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

för några skalärer a, b och c. Detta innebär precis att ekvationssystemet

$$\begin{cases} a + \qquad\qquad 2c = p \\ \qquad b + \quad 3c = q \\ a + \quad 2b + \quad c = r \end{cases}$$

med a, b och c som variabler <u>alltid</u> har lösningar. Här räcker det med att titta på koefficientmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Trappstegsmatrisen har tydligen tre ledande element (dvs. har rang 3, som är lika med antalet variabler). Detta garanterar att systemet alltid har lösningar, oavsett högerled. Vi har nu visat att det alltid finns skalärer a, b och c sådana att

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

vad p, q och r än är.

Saken är biff.

Övning 2. Minns att S är ett delrum till $\mathbb{R}^2$ om följande tre villkor uppfylls:

i) $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in S$.
ii) Om $\vec{u}, \vec{v} \in S$ måste $\vec{u} + \vec{v} \in S$.
iii) Om $\vec{u} \in S$ måste $k\vec{u} \in S$, för alla skalärer $k \in \mathbb{R}$.

a) Givet att S är mängden av alla vektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ som uppfyller $x + 2y = 5$. Vi ser direkt att $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ <u>inte</u> ligger i S ty den <u>inte</u> uppfyller $x + 2y = 5$. Villkor i) uppfylls inte, så S är <u>inte</u> ett delrum till $\mathbb{R}^2$.

b) Givet att T är mängden av alla vektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ som uppfyller $xy = 0$. Vi ser direkt att $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ligger i T ty $0 \cdot 0 = 0$, så villkor i) uppfylls.

Däremot uppfylls <u>inte</u> villkor ii). Detta är för att $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \in T$ och $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \in T$, men $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ ligger <u>inte</u> i T ty $4 \cdot (-3) \neq 0$. Således är T <u>inte</u> ett delrum till $\mathbb{R}^2$.

Övning 3. Vi kan börja med gausseliminera som vanligt. ("When in doubt, Gauss!")

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & 4 & 1+3a & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \mathrm{R}_1 \\ \mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1 \\ \mathrm{R}_3 - 2\mathrm{R}_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2a^2 & 1+a & -2 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \mathrm{R}_1 \\ \mathrm{R}_2 \\ \mathrm{R}_3 - 2\mathrm{R}_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & -2 \end{array}\right]$$

Enligt satser om lösbarhet har systemet

i) ingen lösning alls om någon rad är på formen $[0 \quad 0 \quad 0|c]$, där $c \neq 0$
ii) en unik lösning om antalet ledande element är lika med 3 (som är antalet variabler)
iii) oändligt många lösningar om antalet ledande element är mindre än 3.

Betrakta den sista raden i den sista matrisen. Tydligen saknar systemet lösning om $1 + a = 0$, dvs. om $a = -1$.

Om $a \neq -1$ **men** $a = 1$ blir $1 - a^2 = 0$ (i den andra raden) och $1 + a = 2$ (i den sista raden). Den sista matrisen har då två ledande element, varför systemet har oändligt många lösningar.

Om $a \neq -1$ **och** $a \neq 1$ fås tre ledande element och systemet har en unik lösning.

Svar: Systemet en unik lösning om $a \neq \pm 1$, ingen lösning alls om $a = -1$ respektive oändligt många lösningar om $a = 1$.