Stukan 14

Ordkunskap: Se till att du känner till definitionerna av och eventuellt de viktiga formlerna för följande begrepp:

avbildningsmatris

inversa matriser

nollrum (eng. nullspace) / kärna (eng. kernel)

värderum (eng. range) / bildrum (eng. image)

dimensionssatsen

sunt förnuft

Övning 1. (Från **Stukan 11**, om du inte gjort den.)

a) Bestäm (med hjälp av lämpliga radoperationer) den inversa matrisen till $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Utnyttja den funna A^{-1} för att bestämma vektorn $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller $A\vec{x} = \vec{b}$, där $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Anmärkning: Ett liknande tentaproblem är 2014-10-29 #3.

Övning 2. Låt $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av avbildningsmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

a) Bestäm en bas för $\ker T$ (kärnan av T) och sedan $\dim(\ker T)$.

b) Bestäm en bas för $\operatorname{im} T$ (bildrummet av T) och sedan $\dim(\operatorname{im} T)$.

c) Verifiera dimensionssatsen med $\dim(\ker T)$ och $\dim(\operatorname{im} T)$ som erhålls från de förra delfrågorna.

Övning 3. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som projicerar varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ på planet Π som ges av ekvationen $x + 2y + 4z = 0$. (Med andra ord: $T(\vec{v}) = \operatorname{proj}_{\Pi} \vec{v}$.)

a) Bestäm en bas för $\ker T$.

b) Bestäm en bas för $\operatorname{im} T$.

Försök att besvara frågorna med så få beräkningar som möjligt. **Ledtråd:** Tänk geometriskt!

Anmärkning: Ett liknande tentaproblem är 2012-03-12 #2.

Övning 4. a) Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som roterar varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ med $60°$ i positiv riktning, dvs. $60°$ moturs (synonym: motsols).

Bestäm avbildningsmatrisen till T. (**Alternativt talesätt:** Bestäm standardmatrisen till T.)

Ledtråd: Du får direkt använda dig av rotationsmatrisen $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ om du kommer ihåg den och vet vad θ innebär.

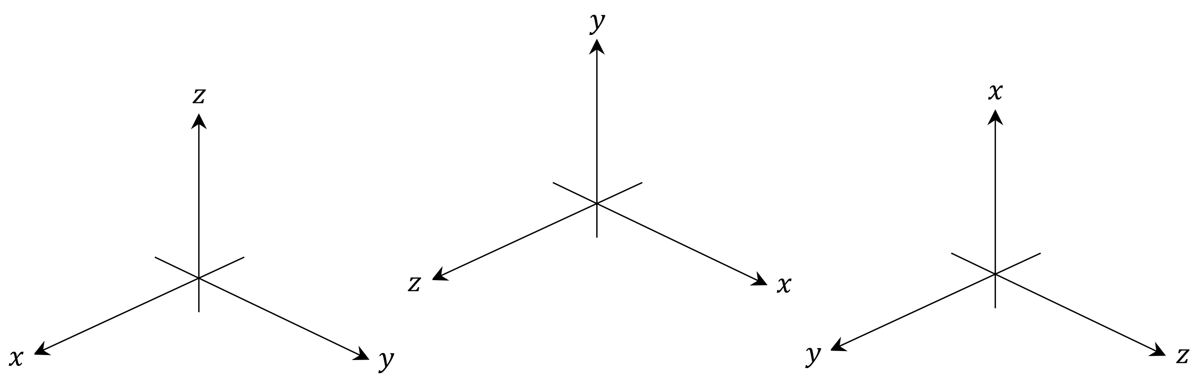
b) Låt $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som roterar varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ med $90°$ kring y-axeln. Rotationen ska ske moturs, i ett högerorienterat koordinatsystem. (**Alternativt talesätt:** Rotationen ska ske enligt högerhandsregeln).

Bestäm avbildningsmatrisen till S.

Ledtråd: För allmänna rotationer i tre dimensioner har vi ingen *enkel* färdig formel för avbildnings-matrisen. Du behöver dock ingen formel här. Rita ett lämpligt koordinatsystem och tänk geometriskt!

Anmärkning: Ett högerorienterat koordinatsystem (synonym: högersystem) i detta sammanhang syftar på ett xyz-system som ritas på ett sådant sätt att x-, y- och z-axelns positiva del pekar som högerhandens tumme, pekfinger respektive långfinger. Med andra ord: På pappret ska x-, y- och z-axelns positiva del synas (i den ordningen) i moturs riktning.

Se nedan för tre (lika legitima) sätt att rita ett typiskt högerhandsorienterat koordinatsystem.



I detta fall kan det vara enklast att utnyttja den mellersta ritningen.

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. a) Vi kan invertera A med en känd algoritm:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} R_1 \\ -\frac{1}{8}R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{3}{8} \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 8R_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -9 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 - 4R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -9 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{2}R_3 \\ R_2 - \frac{5}{8}R_3 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -9 & 3 \end{array}\right]$$

Den sökta matrisen är således $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 6 & -2 \\ 8 & -9 & 3 \end{bmatrix}$. Vi kan, om vi vill, kontrollera svaret med multiplikationen $A^{-1}A$ (eller AA^{-1}). Blir produkten $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ så har vi gjort rätt.

b) Multiplicera båda led av ekvationen med A^{-1} från vänster och vi får

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 6 & -2 \\ 8 & -9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 - 5 + 10 \\ 10 + 6 - 10 \\ -16 - 9 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Snabb kontroll:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 18 - 20 \\ -3 + 24 - 20 \\ -9 + 24 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

Det stämmer!

Övning 2. Vi kan börja med att överföra A till reducerad trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 10 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 2R_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} R_1 - 3R_3 \\ R_2 - 3R_3 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} R_1 - 5R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Kärnan av T består av alla vektorer $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$ (där $\mathbb{R}^5$ är domänen av T) sådana att $T(\vec{x}) = \vec{0}$, dvs. $A\vec{x} = \vec{0}$. Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ är, enligt Gauss-Jordan-elimineringen ovan, ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1 - 6x_3 + 6x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6s - 6t \\ -2s + 2t \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där s, t är godtyckliga tal. Kärnan av T kan alltså skrivas span $\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, dvs. en bas för ker T är $\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och $\dim(\ker T) = 2$.

b) Bildrummet av T (synonym: bilden av T) är detsamma som kolonnrummet av A (trots att ”bildrum” och ”kolonnrum” inte är synonymer), dvs. det vektorrum som spänns upp av kolonnerna i A:

$$\operatorname{im} T = \operatorname{Col} A = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$$

För att erhålla en bas för im T ska vi, bland de fem ovanstående vektorerna, välja ut så många linjärt oberoende vektorer som möjligt. De ledande (röda) elementen i $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (på trappstegsform) visar att det är de vektorer i kolonnerna nummer 1, 2 och 4 (i matrisen A) som är linjärt oberoende.

En bas för im T är således $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$ och $\dim(\operatorname{im} T) = 3$.

c) Dimensionssatsen lyder: Om $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning gäller att

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

I detta fall gäller att $\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = 2 + 3 = 5 = \dim(\mathbb{R}^5)$. Det stämmer!

Övning 3. a) Kärnan av T består av alla vektorer $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ sådana att $T(\vec{x}) = \vec{0}$, dvs. projektionen av $\vec{x}$ på planet Π är $\vec{0}$ (dvs. $\vec{x}$ ”krymper” till en punkt (med längden 0) när den projiceras på Π). Om vi tänker geometriskt inser vi att $\vec{x}$ är helt enkelt $\vec{0}$ eller vilken vektor som helst som är vinkelrät mot Π.

Utifrån från planets ekvation $x + 2y + 4z = 0$ ser vi att en normalvektor till planet är $(1, 2, 4)$. Alla $\vec{x}$ som uppfyller $T(\vec{x}) = \vec{0}$ kan således skrivas $\vec{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$.

Härmed fås $\ker T = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}\right\}$, dvs. en bas för $\ker T$ är $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}\right\}$.

b) Bildrummet av T består av alla vektorer $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ som T kan resultera i, dvs. alla vektorer som kan fås efter att vi projicerat någon $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ på planet Π. Om vi tänker geometriskt inser vi att $\vec{y}$ är helt enkelt vilken vektor som helst som är med i planet Π. Med andra ord är $\operatorname{im} T$ precis Π.

Utifrån från planets ekvation $x + 2y + 4z = 0$ på skalärform ser vi att en ekvation för samma plan på parameterform är

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2s-4t\\s\\t\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-4\\0\\1\end{bmatrix}$$

(Kommer du ihåg **Stukan 9**, **Övning 4**?)

Detta innebär att Π är $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\0\\1\end{bmatrix}\right\} = \operatorname{im} T$ och att en bas för $\operatorname{im} T$ är $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Övning 4. a) Den sökta avbildningsmatrisen är enligt en känd sats

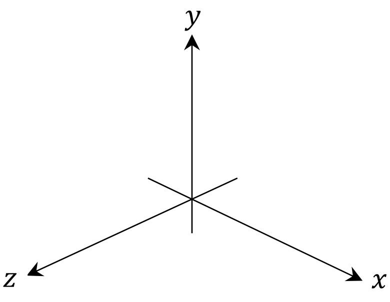
$$\begin{bmatrix}\cos 60° & -\sin 60°\\ \sin 60° & \cos 60°\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Anmärkning: Prova gå in i WolframAlpha och skriva "rotation matrix 60 degrees".

b) Minns att avbildningsmatrisen ges av $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ S(\vec{e_1}) & S(\vec{e_2}) & S(\vec{e_3}) \\ | & | & | \end{bmatrix}$.

För enkelhets skull ritar vi ett högersystem där y-axelns positiva del pekar uppåt. Eftersom S roterar varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ med 90° kring y-axeln, i moturs riktning, inser vi lätt att

$S(\vec{e_1}) = S\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$, dvs. en vektor som pekar i z-axelns negativa riktning.



$S(\vec{e_2}) = S\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, dvs. samma vektor!

$S(\vec{e_3}) = S\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, dvs. en vektor som pekar i x-axelns positiva riktning.

Den sökta avbildningsmatrisen är således $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ S(\vec{e_1}) & S(\vec{e_2}) & S(\vec{e_3}) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Anmärkning: Prova gå in i WolframAlpha och skriva "rotation 90 degrees around y-axis".