Algebra och Geometri 2017-11-14

Från Modul 1: Minns att ett plan som går genom origo är ett delrum av $\mathbb{R}^3$.

Ex. Givet ett plan med ekvationen $x+y-2z=0$
Anm. Detta plan är ett delrum av $\mathbb{R}^3$.

a) Beskriv planet med en ekvation på parameterform.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s+2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ där } s,t \in \mathbb{R}$$

b) Beskriv planet som ett linjärt hölje (span).
Per definition av span fås direkt att planet är $\text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

c) Ange en bas för detta plan.
Notera att $\vec{a}, \vec{b}$ är linjärt oberoende, och att $\text{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ är planet $\Rightarrow$ en bas för planet är $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

d) Vad är dimensionen av planet Π?
Per definition: $\dim \Pi$ = antalet vektorer i en bas för $\Pi = 2$
(nummertecken)

Generaliserade vektorrum / Abstrakta vektorrum

vektorrum mer än bara $\mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^3$ vektor mer än bara $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Def Ett vektorrum V är en mängd element (kallade vektorer) som uppfyller följande 10 axiomatiska villkor:
För alla $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ och alla $k, h \in \mathbb{R}$ så:

1. $\vec{u} + \vec{v} \in V$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
5. För varje $\vec{v} \in V$ finns det en $\vec{a} \in V$ med egenskapen: $\vec{v} + \vec{a} = \vec{0}$ $(\vec{a} = -\vec{v})$
4. Det finns en vektor kallad nollvektorn $\vec{0}$ med egenskapen: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
6. $k\vec{v} \in V$
7. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
8. $(k+h)\vec{v} = k\vec{v} + h\vec{v}$
9. $(kh)\vec{v} = k(h\vec{v})$
10. $1\vec{v} = \vec{v}$ ▨

Ex. $\mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$ kallas de euklidiska vektorrummen (eng.) Euclidean

Ex. P_2, mängden av alla (reella) polynom av grad högst 2:

$P_2 = \{p(x) = ax^2 + bx + c : a,b,c \in \mathbb{R}^3\}$ $\vec{0}$ i P_2 räknas som nollpolynomet $g(x) = 0$, ty $p(x) + 0 = p(x)$ för alla $p(x) \in P_2$.

↑ där/sådant att

Rättelse: Nollpolynomet $g(x)=0$ räknas som nollvektorn $\vec{0}$

Ex. $\{p(x) = ax^2 + bx + c : \underbrace{a, b, c \in \mathbb{Z}}_{\text{heltalskoefficienter}}\} = S$

är inte ett vektorrum.

Tänk på villkoret 6: Ta en $\vec{v} \in S$, t.ex. $\vec{v} = p(x) = 3x^2$.

Ta en $k \in \mathbb{R}$, t.ex. $k = \frac{1}{2}$

Se att $k\vec{v} = \frac{3}{2}x^2 \notin S$ ∎

Lite om matrisräkning

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 2×2-matris Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

matrisaddition $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ skalärmultiplikation $3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ ∎

Ex. $M(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ är ett vektorrum

Nollmatrisen $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ räknas som $\vec{0}$, ty $A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$ föralla $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2)$. ∎

Delrum

Def. Låt V vara ett vektorrum.
Låt S vara en delmängd av V.
S sägs vara ett delrum av V om:
K_1: $\vec{0} \in S$
K_2: Om $\vec{u}, \vec{v} \in S$ måste $\vec{u} + \vec{v} \in S$
K_3: Om $\vec{u} \in S$ måste $k\vec{u} \in S$ föralla $k \in \mathbb{R}$. ∎

Ex. Delrum #1 $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ och } a + d = 5 \right\}$

Visa att S <u>inte</u> är ett delrum av $M(2,2)$.

Notera att $\vec{0} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin S$, ty $0 + 0 = 0 \neq 5 \Rightarrow$ K1 uppfylls ej $\Rightarrow S$ är ej ett delrum. ∎

Anm. Ta en vektor $\vec{u} \in S$, t.ex. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ta en $k \in \mathbb{R}$, t.ex. $k = \frac{1}{2}$ $k\vec{u} = \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, där $\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \neq 5 \Rightarrow \frac{1}{2}A \notin S$

K3 uppfylls ej heller. ∎

Ex. Delrum #2 $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \text{ och } a + d = 0 \right\}$

Visa att S är ett delrum av $M(2,2)$

K1. Vill visa att $\vec{0} \in S$. Se att $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$, ty $0 + 0 = 0$. Uppfyllt

K2 Vill visa att $\vec{u} + \vec{v} \in S$ för alla $\vec{u}, \vec{v} \in S$

Låt $\vec{u} \in S$ vara $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} \in S$ vara $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$. Vill visa att $A + B \in S$

$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ har egenskapen $a_1 + a_2 + d_1 + d_2 = (a_1 + d_1) + (a_2 + d_2) = 0 + 0 = 0$

Uppfylls.

K3 Vill visa att $k\vec{v} \in S$, för alla $\vec{v} \in S$ och alla $k \in \mathbb{R}$.

Låt $\vec{v} \in S$ vara $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ $k\vec{v} = kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ 0 & kd \end{bmatrix}$ Ser att $ka + kd = k(a + d) = k \cdot 0 = 0$

för alla $k \in \mathbb{R} \Rightarrow kA \in S$ Uppfyllt ∎