2011·10·17 #4

① Skriv $x+3y-7z=0$ som ett span.

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3s+7t\\ s\\ t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} -3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 7\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad s,t\in\mathbb{R}$$

$\Downarrow$ planet är $\text{span}\left\{\begin{bmatrix} -3\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 7\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}=\text{im}\,T=\text{Col}\,A$

② Slutsats helt fel $\quad A=\begin{bmatrix} -3 & 7\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ty $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

rätt $\quad A=\begin{bmatrix} -3 & 7 & \boxed{4}\\ 1 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 1 & \boxed{1}\end{bmatrix}$ Ska vara beroende av de två första, annars fås $\text{im}\,T\neq$ planet ifråga

Anm. $\quad A=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 7\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ funkar också ▨

2012·03·12 #4

a) ① Planet är $\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -3\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ egentligen ett hyperplan

② $\quad A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

b) Dimensionssatsen $\quad T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \quad \dim(\ker T)+\dim(\text{im}\,T)=n$

Här: $\quad S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4 \quad \dim(\ker S)+\underbrace{\dim(\text{im}\,S)}_{=3}=2$

$\Downarrow$ $\dim(\ker S)=2-3=-1$ omöjligt ▨

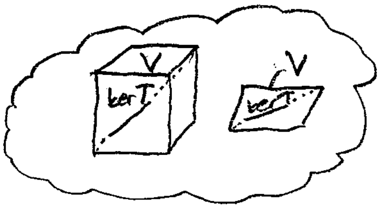
2016·01·18 #3 $A=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&7&11\end{bmatrix}$

a) kerT = NullA bestäms av systemet $\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&0\\0&7&11&0\end{array}\right]\sim\dots\sim\overbrace{\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{7}&0\\0&1&\frac{11}{7}&0\end{array}\right]}^{\text{reducerad trappa}}$

ger $\begin{cases}x+\frac{1}{7}z=0\\y+\frac{11}{7}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{7}t\\-\frac{11}{7}t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-\frac{1}{7}\\-\frac{11}{7}\\1\end{bmatrix}=\underbrace{s}_{\frac{1}{7}t}\begin{bmatrix}-1\\-11\\7\end{bmatrix}$, där $s\in\mathbb{R}$

Svar: En bas för kerT är $\left\{\begin{bmatrix}-1\\-11\\7\end{bmatrix}\right\}$ $\blacksquare$

b) Vill kolla om kerT är med i V



$\Downarrow$ Vill kolla om $\begin{bmatrix}-1\\-11\\7\end{bmatrix}\in\text{span}\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$

$\Downarrow$

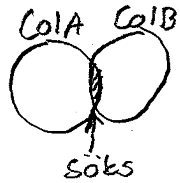
kolla om $\begin{bmatrix}-1\\-11\\7\end{bmatrix}$ kan skrivas som en lin.komb. av $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

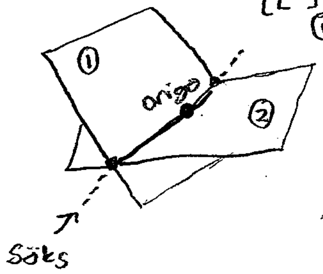
$\left[\begin{array}{ccc|c}4&3&1&-1\\0&2&-2&-11\\1&1&0&7\end{array}\right]\sim\dots\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&7\\0&-1&1&-29\\0&0&0&-80\end{array}\right]$ Systemet saknar lösning

Svar: Nej!

2017·10·20 #4

Col A = span$\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ ① Col B = span$\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ ②





Steg 1 Bestäm en ekv. för ColA (skalärform)

$\vec{n}_A=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\-2\end{bmatrix}$ $\quad -2(x-0)-2(y-0)-2(z-0)=0$

$\Downarrow$

$x+y+z=0$

Steg 2 ekv. för Col B

$x-z=0$

Steg 3 Lös $\begin{cases}x+y+z=0\\x-z=0\end{cases}$ ger skärningslinjen [hemma]

Delsvar: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

Detta är ett delrum i $\mathbb{R}^3$, ty det är en rät linje genom origo

Dimensionen är 1

b) $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ ligger i Col(A) men inte Col(B)

Bas $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_k\}$ för ett vektorrum V

2 villkor

① $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ är oberoende

② $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} = V$

Ex. $B = \left\{ \overset{\vec{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{\vec{v}_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}} \right\}$ en bas för $\mathbb{R}^2$

② $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \mathbb{R}^2$

$\Updownarrow$

varje $\vec{a}$ i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas
$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \vec{a}$

Kvadratiska former

Påminnelse: $Q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy = \vec{x}^T A \vec{x} = [x \ y] \begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Ex. $Q(x,y) = x^2 + y^2 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ex. $Q(x,y) = xy \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

2017·01·11 #5 ** Låt Q vara den kvadratiska formen på $\mathbb{R}^{2n}$ som ges av $Q(x_1, \dots x_{2n}) = x_1 x_{2n} + x_2 x_{2n-1} + \dots + x_n x_{n+1}$

a) Sök den motsvarande symmetriska matrisen A.

Testa: Om $n = 1$: $Q(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$n = 2$: $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_4 + x_2 x_3 \quad \underset{4\times4}{A} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

Generellt: $A = \begin{bmatrix} 0 & & \frac{1}{2} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \frac{1}{2} & & 0 \end{bmatrix}$ En $2n \times 2n$-matris med $\frac{1}{2}$ längs antidiagonalen. Resten av elementen är 0.

Om a_{ij} är ett element i A gäller

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{om } i+j = 2n+1, \text{ där } 1 \le i,j \le 2n \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

b) Klassificera $Q(x_1, \dots, x_{2n})$ m.a.p. definitet. Strategi: Kolla A:s egenvärden.

Om $n=1$: $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{matrix} \lambda_1 = \frac{1}{2} > 0 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0 \end{matrix} \Rightarrow Q(x_1, x_2)$ är <u>indefinit</u>.

Om $n=2$: Vill hitta $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ med ekv. $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 2\lambda R_2 \\ R_4 + 2\lambda R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-2\lambda^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - 2\lambda^2\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - 2\lambda^2\right)\left(\frac{1}{2} - 2\lambda^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow Q \text{ är indefinit}$$
$$\lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{1}{2} < 0$$

Ex $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ Beräkna egenvärdena

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 7 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) - 12 = \ldots = \lambda^2 - \lambda - 20 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -4 \end{array}$$

Sats Om A har egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gäller <u>alltid</u>

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A \quad (\overbrace{\text{trace of } A = \text{spåret av } A}^{= \text{summan av huvuddiagonalelementen}}) \end{cases}$$ ∎

Vet att $\lambda_1 \lambda_2 = \det A = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 7 = -20$

$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = 3 + (-2) = 1$

A: $\vec{v}$ egenvektor? $\quad A\vec{v} = \overset{\text{konstant}}{k}\vec{v}$