Stukan 13

Ordkunskap: Se till att du känner till definitionerna av och eventuellt de viktiga formlerna för följande begrepp:

linjär avbildning (eng: linear mapping)

avbildningsmatris

reflektion (synonym: spegling) kring en rät linje

reflektion (synonym: spegling) kring ett plan

Övning 1. Betrakta den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ 3x - y + 5z \\ x + z \end{bmatrix}$$

a) Bestäm avbildningsmatrisen A. Vi vill alltså bestämma den matris A med egenskapen $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ för alla $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ i definitionsmängden (synonym: domänen) $\mathbb{R}^3$.

b) Vad avbildar T vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ på? Vi vill alltså bestämma $T(\vec{v})$.

c) Beräkna $T(\overrightarrow{e_1})$, $T(\overrightarrow{e_2})$ respektive $T(\overrightarrow{e_3})$, där $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Betrakta den räta linjen $\mathcal{L}$ som ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$. Denna linje avbildas av T på en ny rät linje $\mathcal{L}'$. Bestäm en ekvation för $\mathcal{L}'$.

Ledning: Varje punkt på $\mathcal{L}$ kan skrivas $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-t \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$, för något $t \in \mathbb{R}$. Beräkna $T\left(\begin{bmatrix} 2-t \\ 1 \\ t \end{bmatrix}\right)$ och dra slutsats.

Anmärkning: Två liknande tentaproblem är 2014-01-13 #3 (c) och 2012-12-13 #2.

Övning 2. a) Betrakta den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som uppfyller

$$T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) Skriv standardbasvektorerna $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ respektive $\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Beräkna $T(\overrightarrow{e_1})$ respektive $T(\overrightarrow{e_2})$ genom att utnyttja linjäriteten av T. Minns att om $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en linjär avbildning gäller följande för alla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ och alla $k \in \mathbb{R}$:

i) $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$

ii) $T(k\vec{x}) = k\,T(\vec{x})$.

c) Bestäm slutligen avbildningsmatrisen till T.

Övning 3. Låt $\mathcal{L}$ vara den räta linjen i $\mathbb{R}^2$ som går genom origo och punkten $(5, -2)$.

a) Bestäm en ekvation på parameterform för $\mathcal{L}$.

b) Låt den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spegla varje vektor i $\mathbb{R}^2$ kring linjen $\mathcal{L}$. Finn avbildnings-matrisen till T genom att först beräkna $T(\overrightarrow{e_1})$ respektive $T(\overrightarrow{e_2})$, där $\overrightarrow{e_1}$ och $\overrightarrow{e_2}$ som bekant betecknar standardbasvektorerna för $\mathbb{R}^2$.

Övning 4. Låt Π vara det plan i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x - y + z = 0$. (Notera att planet passerar genom origo.)

Låt den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spegla varje vektor i $\mathbb{R}^3$ kring planet Π. Finn avbildnings-matrisen till T.

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. a) Avbildningsmatrisen A utgörs som bekant av koefficienterna till x, y och z:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $T(\vec{v}) = A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $T(\overrightarrow{e_1}) = A\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T(\overrightarrow{e_2}) = A\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(\overrightarrow{e_3}) = A\overrightarrow{e_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Otroligt viktig lärdom att minnas: Om $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning utgörs kolonnerna i avbildningsmatrisen A av bilderna av standardbasvektorerna $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\overrightarrow{e_1}) & T(\overrightarrow{e_2}) & \dots & T(\overrightarrow{e_n}) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

d) Varje punkt på $\mathcal{L}$ kan skrivas $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-t \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$, för något $t \in \mathbb{R}$.

Notera att $T\left(\begin{bmatrix} 2-t \\ 1 \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-t \\ 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-t)+2-t \\ 3(2-t)-1+5t \\ (2-t)+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2t \\ 5+2t \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

En ekvation för linjen $\mathcal{L}'$ är således $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$.

Övning 2. a) Med kända metoder (såsom gausseliminering i samband med linjära ekvationssystem) finner vi ganska snabbt att

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

samt att

$$\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Linjäriteten ger

$T(\overrightarrow{e_1}) = T\left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4} T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T(\overrightarrow{e_2}) = T\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2} T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) Avbildningsmatrisen till T är således

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ T(\overrightarrow{e_1}) & T(\overrightarrow{e_2}) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Anmärkning: Vi kan kontrollera om den framtagna A stämmer genom att beräkna $T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ respektive $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ med hjälp av A och jämför resultaten med den givna informationen i uppgiftslydelsen:

$T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

Det stämmer!

Övning 3. a) En ekvation på parameterform för $\mathcal{L}$ är till exempel $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$.

b) Minns formeln för speglingen (synonym: reflektionen) av en vektor $\vec{v}$ kring en rät linje $\mathcal{L}$ med $\vec{r}$ som riktningsvektor:

$$\text{ref}_{\mathcal{L}}\,\vec{v} = (2\,\text{proj}_{\vec{r}}\,\vec{v}) - \vec{v}$$

I detta fall kan vi ta $\vec{r} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. Då fås

$$T(\overrightarrow{e_1}) = \text{ref}_{\mathcal{L}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(2\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(2\frac{5}{29}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{29} \\ -\frac{20}{29} \end{bmatrix}$$

$$T(\overrightarrow{e_2}) = \text{ref}_{\mathcal{L}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(2\frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(2\frac{-2}{29}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{29} \\ -\frac{21}{29} \end{bmatrix}$$

Avbildningsmatrisen är således

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ T(\overrightarrow{e_1}) & T(\overrightarrow{e_2}) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{29} & -\frac{20}{29} \\ -\frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{bmatrix} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 21 & -20 \\ -20 & -21 \end{bmatrix}$$

Anmärkning: Samma matris kan snabbt fås med hjälp av beskyddaren WolframAlpha. Använd till exempel kommandot ”reflection across $2x + 5y = 0$”, där $2x + 5y = 0$ är en ekvation på skalärform $Ax + By = 0$ för linjen $\mathcal{L}$.

Övning 4. Minns formeln för speglingen (synonym: reflektionen) av en vektor $\vec{v}$ kring ett plan Π med $\vec{n}$ som normalvektor:

$$\text{ref}_{\Pi}\,\vec{v} = \vec{v} - (2\,\text{proj}_{\vec{n}}\,\vec{v})$$

I detta fall kan vi ta $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då fås

$$T(\overrightarrow{e_1}) = \mathrm{ref}_{\Pi}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(2\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(2\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$T(\overrightarrow{e_2}) = \mathrm{ref}_{\Pi}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(2\frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(2\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$T(\overrightarrow{e_3}) = \mathrm{ref}_{\Pi}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(2\frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(2\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Avbildningsmatrisen är således

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(\overrightarrow{e_1}) & T(\overrightarrow{e_2}) & T(\overrightarrow{e_3}) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Anmärkning: Prova gå in i WolframAlpha och skriva ”reflection across $x - y + z = 0$”.