Stukan 10

Ordkunskap: Se till att du känner till de villkor som definierar ett *vektorrum* respektive ett *delrum* (av ett ofta större vektorrum). Dessa villkor återfinns på s. 203 respektive s. 207 i kursboken.

Boken formulerar endast två villkor S1 och S2 för ett delrum, istället för tre villkor som jag på föreläsningen visar. Detta är inget problem. Boken säger ”a non-empty subset $\mathbb{U}$ of $\mathbb{V}$” (en icke-tom delmängd $\mathbb{U}$ av $\mathbb{V}$), medan jag säger ”$\vec{0} \in \mathbb{U}$”, vilket innebär precis att $\mathbb{U}$ inte är en tom mängd.

Övning 1. a) Förklara varför mängden av alla vektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, vars (reella) koordinater uppfyller ekvationen $2x + y - z = 1$, inte är ett delrum av $\mathbb{R}^3$.

b) Visa, med hjälp av de tre kraven för ett delrum, att mängden S av alla vektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, vars (reella) koordinater uppfyller ekvationen $2x + y - z = 0$, är ett delrum av $\mathbb{R}^3$.

Anmärkning: Med mängdbeteckningar kan vi skriva $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : 2x + y - z = 0 \right\}$, där kolonet utläses som ”sådan(t) att”.

Övning 2. Låt V beteckna det vektorrum av alla reella polynom av grad högst 2, dvs. varje element i V kan skrivas $p(x) = ax^2 + bx + c$, där a, b och c är reella tal.

a) Vad räknas som nollvektorn $\vec{0}$ i V?

b) Låt S vara mängden av alla reella polynom i V som uppfyller $p(0) = 0$. Visa att S är ett delrum av V.

c) (**frivillig utmaning**) Visa att polynomen 1, $x + 1$ och $x^2 + x + 1$ utgör en bas för V.

Övning 3. a) Låt $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$, dvs. mängden av alla 2×2-matriser med heltalselement. Visa att G inte är ett vektorrum genom att visa att G inte uppfyller minst ett av de tio axiomatiska villkoren för ett vektorrum (se s. 203 i kursboken).

b) Låt $M(2,2)$ beteckna det vektorrum som består av alla reella matriser av storlek 2×2 (dvs. 2 rader och 2 kolonner, samt alla fyra element i varje matris är reella tal). Du behöver inte visa att $M(2,2)$ faktiskt är ett vektorrum.

Låt $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}$, dvs. mängden av alla 2×2-matriser med reella element och med endast nollor längs huvuddiagonalen (den vänstra diagonalen).

Vad räknas som nollvektorn $\vec{0}$ i $M(2,2)$? Visa att S är ett delrum av $M(2,2)$.

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. Minns att S är ett delrum av V (som i detta fall är $\mathbb{R}^3$) om följande tre villkor uppfylls:

i) $\vec{0} \in S$.
ii) Om $\vec{u}, \vec{v} \in S$ måste $\vec{u} + \vec{v} \in S$.
iii) Om $\vec{u} \in S$ måste $k\vec{u} \in S$, för alla skalärer $k \in \mathbb{R}$.

a) Tydligen ligger $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ <u>inte</u> i denna mängd, ty $2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$. Villkoret (i) uppfylls <u>inte</u> och mängden ifråga är således <u>inte</u> är ett delrum av $\mathbb{R}^3$.

b) Tydligen ligger $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i S, ty $2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$. Villkoret (i) uppfylls.

Nu ska vi visa att villkoret (ii) uppfylls. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ vara två vektorer i S. Vi vill visa att $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$ också är en vektor i S, dvs. $2(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) = 0$. Att $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ är i S betyder ju att $2u_1 + u_2 - u_3 = 0$ och $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$. Härmed fås $2(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) = 2u_1 + u_2 - u_3 + 2v_1 + v_2 - v_3 = 0 + 0 = 0$, precis vad vi vill visa.

Visa nu att villkoret (iii) också uppfylls. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ vara en vektor i S. Vi vill visa att $k\vec{u} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \end{bmatrix}$ också är en vektor i S, dvs. $2(ku_1) + (ku_2) - (ku_3) = 0$. Att $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ är i S betyder ju att $2u_1 + u_2 - u_3 = 0$. Härmed fås $2(ku_1) + (ku_2) - (ku_3) = k(2u_1 + u_2 - u_3) = k \cdot 0 = 0$, precis vad vi vill visa.

Saken är biff.

Övning 2. a) Nollvektorn $\vec{0}$ är ett element i V (dvs. ett polynom $f(x)$ av grad högst 2 i detta fall) med egenskapen

$$p(x) + f(x) = p(x)$$

för alla $p(x) \in V$. Den enda möjligheten är att $f(x)$ är nollpolynomet, dvs. $f(x) = 0$.

b) Minns att S är ett delrum av V om följande tre villkor uppfylls:

iv) $\vec{0} \in S$.
v) Om $\vec{u}, \vec{v} \in S$ måste $\vec{u} + \vec{v} \in S$.
vi) Om $\vec{u} \in S$ måste $k\vec{u} \in S$, för alla skalärer $k \in \mathbb{R}$.

I detta fall tolkas nollvektorn som nollpolynomet $f(x) = 0$. Eftersom $f(0) = 0$ ligger nollpolynomet i S. Härmed uppfylls villkoret (i).

Nu ska vi visa att villkoret (ii) uppfylls. Låt $\vec{u} = p(x)$ och $\vec{v} = q(x)$ vara två polynom i S som uppfyller $p(0) = q(0) = 0$. Vi vill visa att $\vec{u} + \vec{v} = p(x) + q(x) = r(x)$ också är ett polynom i S. Detta är ekvivalent med att visa att $r(0) = 0$. Detta är ju enkelt, ty $r(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$.

Visa nu att villkoret (iii) också uppfylls. Låt $\vec{u} = p(x)$ vara ett polynom i S som uppfyller $p(0) = 0$. Vi vill visa att $k\vec{u} = k\,p(x) = r(x)$ också är ett polynom i S, oavsett $k \in \mathbb{R}$. Detta är ekvivalent med att visa att $r(0) = 0$. Detta är också enkelt, ty $r(0) = k\,p(0) = k \cdot 0 = 0$, för alla $k \in \mathbb{R}$.

Saken är biff.

c) Visa först att 1, $x + 1$ och $x^2 + x + 1$ är linjärt oberoende, dvs. ekvationen

$$k_1 \cdot 1 + k_2(x+1) + k_3(x^2 + x + 1) = 0$$

endast har den triviala lösningen $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ (oavsett vad x är). Enkla omskrivningar ger

$k_1 \cdot 1 + k_2(x+1) + k_3(x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow k_1 + k_2 x + k_2 + k_3 x^2 + k_3 x + k_3 = 0$

$\Leftrightarrow (k_1 + k_2 + k_3) + (k_2 + k_3)x + k_3 x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (k_1 + k_2 + k_3) + (k_2 + k_3)x + k_3 x^2 = 0 + 0x + 0x^2$

Genom att matcha koefficienterna inser vi att ekvationen uppfylls om och endast om

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

dvs. $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Alltså är 1, $x + 1$ och $x^2 + x + 1$ linjärt oberoende.

Visa nu att 1, $x + 1$ och $x^2 + x + 1$ spänner upp hela V, dvs. varje polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ i V kan skrivas som en linjär kombination

$$k_1 \cdot 1 + k_2(x+1) + k_3(x^2 + x + 1) = ax^2 + bx + c$$

eller med andra ord att ekvationen

$$(k_1 + k_2 + k_3) + (k_2 + k_3)x + k_3 x^2 = c + bx + ax^2$$

alltid har lösning k_1, k_2 och k_3, oavsett vad a, b och c är. Genom att matcha koefficienterna inser vi att ekvationen uppfylls precis då

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = c \\ k_2 + k_3 = b \\ k_3 = a \end{cases}$$

dvs. ekvationen

$$(k_1 + k_2 + k_3) + (k_2 + k_3)x + k_3 x^2 = c + bx + ax^2$$

har lösningen

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - b \\ b - a \\ a \end{bmatrix}$$

Nu har vi visat att 1, $x + 1$ och $x^2 + x + 1$ spänner upp hela V.

Slutsats: En bas för V utgörs av 1, $x + 1$ och $x^2 + x + 1$. Saken är biff.

Övning 3. a) Mängden G uppfyller exempelvis inte villkoret V6 (se s. 203 i kursboken). Ta till exempel ett element $\vec{x}$ i G, såsom matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Ta till exempel en reell skalär såsom $s = 1/2$. Då fås $sA = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$, vilket inte är ett element i G, ty matrisen sA inte består av endast heltalselement.

Således är G inte ett vektorrum, ty G inte är sluten under multiplikation med skalär.

b) Nollvektorn $\vec{0}$ är ett element i $M(2,2)$ (dvs. en 2×2-matris N i detta fall) med egenskapen

$$A + N = A$$

för alla matriser $A \in V$. Den enda möjligheten är att N är nollmatrisen, dvs. $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Visa nu att $S = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R}\right\}$ är ett delrum av $M(2,2)$.

Minns att S är ett delrum av $M(2,2)$ om följande tre villkor uppfylls:

i) $\vec{0} \in S$.
ii) Om $\vec{u}, \vec{v} \in S$ måste $\vec{u} + \vec{v} \in S$.
iii) Om $\vec{u} \in S$ måste $k\vec{u} \in S$, för alla skalärer $k \in \mathbb{R}$.

I detta fall tolkas nollvektorn som nollmatrisen $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Eftersom denna matris har strukturen $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, ligger den i S. Härmed uppfylls villkoret (i).

Nu ska vi visa att villkoret (ii) uppfylls. Låt $\vec{u} = A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$ vara två matriser i S. Vi vill visa att $\vec{u} + \vec{v} = A + B$ också är en matris i S. Detta är enkelt, ty $A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{bmatrix}$, vilken har strukturen $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, ty om a_1, a_2, b_1 och b_2 är reella tal så är $a_1 + b_1$ samt $a_2 + b_2$ också reella tal.

Visa nu att villkoret (iii) också uppfylls. Låt $\vec{u} = A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}$ vara en matris i S. Vi vill visa att $k\vec{u} = kA$ också är en matris i S, oavsett $k \in \mathbb{R}$. Detta är också enkelt, ty $kA = \begin{bmatrix} 0 & ka_1 \\ ka_2 & 0 \end{bmatrix}$, vilken har strukturen $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, ty om a_1, a_2 och k är reella tal så är ka_1 samt ka_2 också reella tal.

Saken är biff.