Stukan 12

Ordkunskap: Se till att du förstår vad följande begrepp innebär:

bas (för ett vektorrum)

koordinatvektor

koordinater (med avseende på en viss bas)

basbytesmatris (synonym: övergångsmatris)

Övning 1. Betrakta delrummet V (av $\mathbb{R}^4$) som spänns upp av vektorerna $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Visa att $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ är en bas för V.

b) Givet $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Visa att $\vec{v} \in V$.

c) Bestäm koordinatvektorn för $\vec{v}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$.

Alternativt talesätt: Bestäm koordinatvektorn för $\vec{v}$ i basen $\mathcal{B}$.

Övning 2. Betrakta vektorrummet $\mathbb{R}^2$ med två baser $\mathcal{S}$ och $\mathcal{B}$. Låt $\mathcal{S}$ vara standardbasen $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, där $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Låt $\mathcal{B}$ vara $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\}$, där $\overrightarrow{b_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{b_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Betrakta vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$.

a) Bestäm $[\vec{v}]_{\mathcal{S}}$, dvs. koordinatvektorn för $\vec{v}$ med avseende på basen $\mathcal{S}$.

b) Bestäm $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$, dvs. koordinatvektorn för $\vec{v}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$.

c) Bestäm $P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}}$, dvs. basbytesmatrisen (synonym: övergångsmatrisen) från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{S}$.

d) Bestäm $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{S}}$, dvs. basbytesmatrisen från $\mathcal{S}$ till $\mathcal{B}$.

Övning 3. Låt $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ och $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ vara två baser för $\mathbb{R}^2$.

a) Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ respektive $[\vec{v}]_{\mathcal{C}}$.

b) Bestäm $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$, dvs. basbytesmatrisen från $\mathcal{C}$ till $\mathcal{B}$.

Facit: Se nästa sida.

Övning 1. a) Vi vill alltså visa att $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är linjärt oberoende. Vi inser lätt att $\vec{a}$ och $\vec{b}$ inte är parallella, dvs. det inte finns någon skalär $c \in \mathbb{R}$ sådan att $c\vec{a} = \vec{b}$. Således är $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är linjärt oberoende och utgör en bas för V.

b) Vi vill alltså visa att $\vec{v} \in \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$, dvs. $\vec{v}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{a}$ och $\vec{b}$.

Betrakta ekvationen $k_1\vec{a} + k_2\vec{b} = \vec{v}$, dvs. $k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Låt oss finna k_1 och k_2 med hjälp av gausseliminering:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - 4R_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_4 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu kan vi se att $k_1 = 2$ och $k_2 = -5$, dvs. vi kan skriva $\vec{v}$ som $2\vec{a} - 5\vec{b}$, där $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är vektorer som spänner upp V. Vi har härmed visat att $\vec{v} \in V$.

c) Enligt beräkningarna på delfråga (b) är $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ koordinatvektorn för $\vec{v}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$.

Svar: $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Anmärkning: Lägg märke till att $\vec{v}$ har två koordinater med avseende på basen $\mathcal{B}$ (nämligen 2 och -5) trots att $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ har fyra komponenter. Antalet koordinater, med avseende på en viss bas, till en vektor är alltså lika med antalet vektorer i basen.

Övning 2. a) Vi vill alltså bestämma vektorn $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ som uppfyller $c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} = \vec{v}$, dvs.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Vi kan se direkt att $c_1 = 3$ och $c_2 = 11$. Koordinatvektorn för $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$ med avseende på standardbasen $\mathcal{S}$ är alltså $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$, vilket stämmer överens med det som vi på gymnasiet brukade säga: "Koordinaterna av punkten $(3, 11)$ är 3 och 11".

Svar: $[\vec{v}]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$.

b) Vi vill alltså bestämma vektorn $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ som uppfyller $k_1\overrightarrow{b_1} + k_2\overrightarrow{b_2} = \vec{v}$, dvs.

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Detta är som att lösa det ekvationssystem som representeras av matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c}3 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 11\end{array}\right] \sim \begin{bmatrix}R_2\\ R_1\end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 4 & 11\\ 3 & 2 & 3\end{array}\right] \sim \begin{bmatrix}R_1\\ R_2 - 3R_1\end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 4 & 11\\ 0 & -10 & -30\end{array}\right] \sim \begin{bmatrix}R_1\\ -\frac{1}{10}R_2\end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 4 & 11\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix}R_1 - 4R_2\\ R_2\end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

vilket innebär att $k_1 = -1$ och $k_2 = 3$. Koordinatvektorn för $\vec{v} = \begin{bmatrix}3\\ 11\end{bmatrix}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$ är alltså $\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$.

Svar: $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$.

c) Eftersom $\mathcal{S} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ och $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\} = \left\{\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}\right\}$, gäller enligt en känd teori att

$P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}| & |\\ [\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{S}} & [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{S}}\\ | & |\end{bmatrix}$.

Gör som vi gjorde på delfråga (a) och vi finner att $[\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{S}} = \overrightarrow{b_1} = \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$, ty $3\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$, samt att $[\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{S}} = \overrightarrow{b_2} = \begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$, ty $2\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$.

Svar: $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$.

Anmärkning: Minns att $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}$ har egenskapen $[\vec{u}]_{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$, för <u>alla</u> $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Vi att kontrollera om $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ kan stämma genom att testa om $[\vec{v}]_{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$, där $[\vec{v}]_{\mathcal{S}}$ och $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ fås från delfrågor (a) och (b). En enkel matrismultiplikation ger $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 11\end{bmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{S}}$. Det stämmer!

d) **Metod 1:** Eftersom $\mathcal{S} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ och $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\} = \left\{\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}\right\}$, gäller enligt en känd teori att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}| & |\\ [\overrightarrow{e_1}]_{\mathcal{B}} & [\overrightarrow{e_2}]_{\mathcal{B}}\\ | & |\end{bmatrix}$.

Gör som vi gjorde på delfråga (b) och vi finner att $[\overrightarrow{e_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{10}\end{bmatrix}$, ty $\frac{2}{5}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, samt att $[\overrightarrow{e_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{3}{10}\end{bmatrix}$, ty $-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} + \frac{3}{10}\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$. Härmed fås $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, då vi bryter ut $\frac{1}{10}$ från den jobbiga matrisen $\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\end{bmatrix}$.

Metod 2: Enligt en känd teori gäller att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}$ är den inversa matrisen av $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}$. Om vi inte lärt oss att invertera matriser (vilket tillhör **Modul 4**) kan denna metod vara knepig att använda.

Har du tjuvläst vet du säkert att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = (P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3\cdot4-1\cdot2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$.

Svar: $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Anmärkning: Minns att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}$ har egenskapen $[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}[\vec{u}]_{\mathcal{S}}$, för <u>alla</u> $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Vi att kontrollera om $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ kan stämma genom att testa om $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}[\vec{v}]_{\mathcal{S}}$, där $[\vec{v}]_{\mathcal{S}}$ och $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ fås från delfrågor (a) och (b). En enkel matrismultiplikation ger $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}[\vec{v}]_{\mathcal{S}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -10 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$. Det stämmer!

Övning 3. a) Att bestämma $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ är som att lösa ekvationen $k_1\overrightarrow{b_1} + k_2\overrightarrow{b_2} = \vec{v}$, dvs. $k_1\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Med hjälp gausseliminering eller skarp syn finner vi att $k_1 = 1$ och $k_2 = -1$, dvs. $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

På samma sätt finner vi att $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Svar: $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, medan $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) **Metod 1:** Eftersom $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ och $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, gäller enligt en känd teori att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} | & | \\ [\overrightarrow{c_1}]_{\mathcal{B}} & [\overrightarrow{c_2}]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{bmatrix}$.

Gör som vi gjorde på **Övning 2**, delfråga (b) och vi finner att $[\overrightarrow{c_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, ty $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, samt att $[\overrightarrow{c_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$, ty $-\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{7}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Härmed fås $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$.

Metod 2: Låt oss tillämpa kedjeregeln som säger att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}}$, där $\mathcal{S}$ är standardbasen $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, där $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Lösningen blir en aning kortare ty matrisen $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}}$ kan enkelt bestämmas som vi gjorde på **Övning 2**, delfråga (c).

Minns att $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ och $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Vi ser direkt att $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} | & | \\ [\overrightarrow{c_1}]_{\mathcal{S}} & [\overrightarrow{c_2}]_{\mathcal{S}} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Vidare gäller att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} | & | \\ [\overrightarrow{e_1}]_{\mathcal{B}} & [\overrightarrow{e_2}]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{bmatrix}$. Gör som vi gjorde på **Övning 2**, delfråga (b) och vi finner att $[\overrightarrow{e_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, ty $1\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, samt att $[\overrightarrow{e_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, ty $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Härmed fås $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Äntligen kan vi beräkna $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2} & -1-\frac{1}{2} \\ -2+\frac{3}{2} & 2+\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$.

Metod 3: Låt oss tillämpa kedjeregeln igen, fast på ett lite annorlunda sätt. Istället för att skriva $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}}$, där $\mathcal{S}$ är standardbasen $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, kan vi skriva $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$. Matriserna $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}}$ och $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}$ kan enkelt bestämmas som vi gjorde på **Övning 2**, delfråga (c).

Minns att $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ och $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Vi ser direkt att $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} | & | \\ [\overrightarrow{c_1}]_{\mathcal{S}} & [\overrightarrow{c_2}]_{\mathcal{S}} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Vi ser också direkt att $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} | & | \\ [\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{S}} & [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{S}} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{b_2} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Ansätt $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix}$. Notera att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ måste vara en 2×2-matris, annars är matrismultiplikationen $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ odefinierad.

Eftersom $P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ gäller att $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p_1 + p_2 & 3p_3 + p_4 \\ 4p_1 + 2p_2 & 4p_3 + 2p_4 \end{bmatrix}$, vilket innebär $\begin{cases} 3p_1 + p_2 = 1 \\ 4p_1 + 2p_2 = 1 \end{cases}$ och $\begin{cases} 3p_3 + p_4 = -1 \\ 4p_3 + 2p_4 = 1 \end{cases}$.

Lös varje system med valfri metod (till exempel gymnasiematematik) och vi får $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = -\frac{1}{2}$, $p_3 = -\frac{3}{2}$ samt $p_4 = \frac{7}{2}$. Då erhålls $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$.

Anmärkning: Minns att $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ har egenskapen $[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\vec{u}]_{\mathcal{C}}$, för alla $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Vi att kontrollera om $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ kan stämma genom att testa om $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\vec{v}]_{\mathcal{C}}$, där $[\vec{v}]_{\mathcal{C}}$ och $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ fås från delfråga (a). En enkel matrismultiplikation ger $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$. Det stämmer!