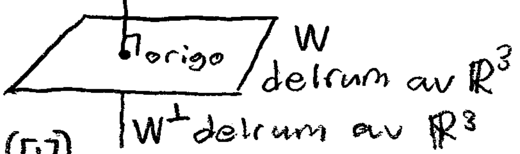
Algebra och Geometri 2017-12-05

Ortogonalt komplement

Def. Givet ett delrum W av $\mathbb{R}^n$.
Det ortogonala komplementet till W är det delrum av $\mathbb{R}^n$ som består av <u>alla</u> vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot <u>alla</u> vektorer i W.

Notation $W^\perp$

Ex. 1. Plan $W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\7\end{bmatrix}\right\}$ Sök $W^\perp$.



En normalvektor till W är

$$\vec{n} = \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5\\2\\7\end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix}13\\13\\-13\end{bmatrix} \doteq 13\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \qquad W^\perp = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}13\\13\\-13\end{bmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

Anm. En ekvation för $W^\perp$ är $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, där $t \in \mathbb{R}$

Ex. 2. $W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\5\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\7\\3\\12\end{bmatrix}\right\}$. Sök $W^\perp$.

Lösning Betrakta en $\vec{v} \in W^\perp$.
Vill att $\vec{v}$ är <u>ortogonal</u> mot alla vektorer i W

$\Downarrow$

Kräv att $\vec{v}$ är ortogonal mot både $\vec{a}$ och $\vec{b}$.

$\Downarrow$

$$\begin{cases}\vec{v}\cdot\vec{a} = 0\\ \vec{v}\cdot\vec{b} = 0\end{cases} \qquad \text{Låt } \vec{v} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}x + 2y + 5z + 4w = 0\\ 3x + 7y + 3z + 12w = 0\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&5&4&0\\3&7&3&12&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&5&4&0\\0&1&-12&0&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&29&4&0\\0&1&-12&0&0\end{array}\right] \text{ ger } \begin{cases}x + 29z + 4w = 0\\ y - 12z = 0\end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix}-29s-4t\\12s\\s\\t\end{bmatrix} \doteq s\begin{bmatrix}-29\\12\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-4\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \text{ där } s,t \in \mathbb{R}$$

Svar: $W^\perp = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}-29\\12\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

Generellt: Låt W ha en bas $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\}$

$W^\perp$ bestäms av systemet

$$\left[\begin{array}{c|c}- \vec{b}_1 - & 0\\ - \vec{b}_2 - & 0\\ \vdots & \vdots\\ - \vec{b}_k - & 0\end{array}\right]$$

Viktiga observationer

1. $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$ för alla $W \subseteq \mathbb{R}^n$
2. $(W^\perp)^\perp = W$
3. $\dim W + \dim(W^\perp) = \dim \mathbb{R}^n = n$
<u>men</u> $W \cup W^\perp \neq \mathbb{R}^n$

Nyhet: Minsta kvadratmetoden (för kurvanpassning)

Ex. 3. Mätdata:

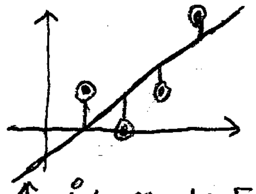
x	1	2	3	4
y	1	0	1	3

Sök ett samband mellan x och y på formen $y = c_1 x + c_2$ (eget val).

Försök: Insättning ger

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_2 = 1 \\ 4c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$$

Problem: Systemet saknar lösning.



Språk: Systemet sägs vara överbestämt, där #ekvationer > #variabler.

Åtgärd: En approximation, d.v.s. en rät linje som ligger så nära punkterna som möjligt!

Tänk $y = c_1 x + c_2$

Varje datapar nummer i ger $y_i = c_1 x_i + c_2$, där $1 \leq i \leq 4$.

Inför felet $y_i - (c_1 x_i + c_2)$. Vill minimera $\sum_{i=1}^{4} (y_i - (c_1 x_i + c_2))^2$

Hur bestäms c_1 och c_2 då?

Knep

$$(*) \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\vec{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\vec{y}} \quad A\vec{c} = \vec{y}$$

Multiplicera båda led med A^T: $A^T A \vec{c} = A^T \vec{y}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{4\times 2} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 5 \end{bmatrix}$$

#ekvationer = #variabler $\Rightarrow$ systemet har (oftast) lösning

$\vdots$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{7}{10} = 0,7 \\ c_2 = -\frac{1}{2} = -0,5 \end{cases} \Rightarrow \text{Svar: } y = \frac{7}{10}x - \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

Generell sammanfattning

Antag att systemet $A\vec{c} = \vec{y}$ saknar lösning.

Minsta-kvadrat-lösningen ges av $\underline{A^T A \vec{c} = A^T \vec{y}}$,

namn: Normalekvationen $\blacksquare$

Symmetriska matriser

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 5 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Def. En $n \times n$-matris A sägs vara symmetrisk om $A^T = A$

Speciella egenskaper

vanliga $n \times n$-matriser	vs. Symmetriska matriser
1. Vissa egenvärden och egenvektorer kan vara komplexa	<u>Alla</u> egenvärden och egenvektorer är reella.
2. Egenvektorer tillhörande <u>olika</u> egenvärden är linjärt oberoende	" ___ ___ linjärt oberoende och ortagonala mot varandra.
3. Vissa är diagonaliserbara	<u>Alla</u> är diagonaliserbara.