Stukan 21

Ordkunskap: Se till att du känner till definitionerna av och eventuellt de viktiga formlerna för följande begrepp:

symmetrisk matris

kvadratisk form

ortogonal diagonalisering

definithet (av en kvadratisk form)

Godis: Följande egenskaper är viktiga att känna till om du vill kunna lösa knepiga uppgifter om symmetriska matriser. Om den kvadratiska matrisen A är symmetrisk gäller följande:

E1. $A^T = A$.

E2. Alla egenvärden och egenvektorer till A är reella.

E3. Egenvektorer motsvarande olika egenvektorer är ortogonala mot varandra.

E4. A är garanterat diagonaliserbar, dvs. vi säkert kan skriva $A = PDP^{-1}$, där D är en diagonalmatris som bär egenvärdena till A och P är en inverterbar matris som bär egenvektorerna till A.

E4+. A är till och med garanterat ortogonalt diagonaliserbar, dvs. vi säkert kan skriva $A = PDP^T$ (eller med andra ord: $P^T AP = D$), där P är en ortogonal matris och D är en diagonalmatris.

(Minns att om P är en ortogonal matris gäller att $P^{-1} = P^T$.)

Spektralsatsen: En kvadratisk matris A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om A är en symmetrisk matris.

Övning 1. Den kvadratiska formen Q på $\mathbb{R}^2$ ges av $Q(\vec{x}) = x^2 + xy + y^2$, där $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

a) Ange den symmetriska matrisen A som uppfyller $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$.

b) Avgör om Q är positivt definit, negativt definit, positivt semidefinit, negativt semidefinit eller indefinit.

Anmärkning: Detta är uppgift **3** från tentamen 2016-03-17.

Övning 2. (**frivillig utmaning**) Låt Q vara den kvadratiska formen på $\mathbb{R}^{2n}$ som är definierad genom

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = x_1 x_{2n} + x_2 x_{2n-1} + \cdots + x_n x_{n+1}$$

a) Bestäm den symmetriska matrisen som motsvarar Q.

b) Avgör om Q är positivt definit, negativt definit, positivt semidefinit, negativt semidefinit eller indefinit.

Anmärkning: Detta är uppgift **5** från tentamen 2017-01-11.

Övning 3. a) Förklara varför matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & a & 2 \end{bmatrix}$$

är ortogonalt diagonaliserbar precis bara om $a = 0$.

b) Bestäm då $a = 0$ en ortogonal matris P sådan att $P^T AP$ blir diagonal.

Anmärkning: Detta är uppgift **5** från tentamen 2011-01-10.

Övning 4. (**frivillig utmaning**) Låt A vara en symmetrisk och inverterbar matris.

Bevisa att inversen A^{-1} också är en symmetrisk matris.

Ledtråd: Det är bra att veta att $(BC)^T = C^T B^T$ (observera ordningen!), om matriserna B och C har passande storlekar. Detta är en känd räknelag för transponat som du får använda utan bevis.

Anmärkning: Detta är uppgift **8** (a) från tentamen 2016-01-13.

Övning 5. (**frivillig utmaning**) Bestäm en symmetrisk matris A som uppfyller båda av följande egenskaper:

i) Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 2$ är $[2t \quad t \quad -t]^T$, där $t \in \mathbb{R}$.
ii) Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 4$ är har dimension två.

Tips: Denna uppgift är lite som **Övning 3** ovan fast omvänd.

Anmärkning: Detta är uppgift **6** från tentamen 2015-06-10.

Facit

Lingvistik för alla: Ordet ”ortonormal” (som i ”ortonormal bas”) är ett teleskopord (på engelska: portmanteau), dvs. ett ord som ofta bildas av att två (eller fler) ord kläms ihop så att endast vissa delar av de ursprungliga orden finns kvar. ”Ortonormal” betyder alltså ”**orto**gonal” + ”**normal**”.

Några kända engelska teleskopord: brunch (**br**eakfast + l**unch**), motel (**mo**tor + ho**tel**), emoticon (**emoti**on + **icon**), turducken (**tur**key + **duck** + chic**ken**), Brexit (**Br**itain + **exit**).

Ett känt svenskt teleskopord som inte är inlånat via engelskan är "Bankomat” (**bank** + aut**omat**). Trots att Bankomat är ett registrerat varumärke används det ganska flitigt i vardagen för att syfta på väldigt godtyckliga uttagsautomater.

Övning 1. a) $Q(\vec{x}) = x^2 + xy + y^2 = 1x^2 + 1xy + 1y^2$ motsvaras av den symmetriska matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Kontroll:

$$\vec{x}^T A\vec{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x + y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y\right)x + \left(\frac{1}{2}x + y\right)y = x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xy + y^2 = x^2 + xy + y^2 = Q(\vec{x})$$

Det stämmer!

b) Ett sätt att karakterisera Q är att titta på egenvärdena av A, vilka bestäms av den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi räknar på:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0$$

Härmed fås egenvärdena är $\lambda_1 = 1/2$ och $\lambda_2 = 3/2$. Eftersom de båda egenvärdena till A är positiva är Q positivt definit.

Anmärkning: Vi kan också kvadratkomplettera Q enligt följande:

$$Q(\vec{x}) = x^2 + xy + y^2 = \left(x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2\right) - \frac{1}{4}y^2 + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

Eftersom $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 \geq 0$ för alla x och y, samt att $\frac{3}{4}y^2 \geq 0$ för alla x och y, gäller att $Q \geq 0$ för alla x och y. Likheten $Q = 0$ inträffar endast om $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{3}{4}y^2 = 0$, dvs. endast om $x = y = 0$.

Per definition är Q positivt definit.

Övning 2. a) Inse först att om $Q(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \cdots + x_nx_{n+1}$ ska Q ha n termer för varje val av n. Vi testar med några små värden på n för att se om det möjligen finns något mönster.

Om $n = 1$ fås $Q(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Den motsvarande symmetriska matrisen är $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

Om $n = 2$ fås $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_4 + x_2 x_3$.

Den motsvarande symmetriska matrisen är $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

På samma sätt inser vi att den symmetriska matrisen som motsvarar $Q(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ bör vara en $2n \times 2n$-matris där antidiagonalelementen är $1/2$ och alla andra element är 0.

b) Om $n = 1$ har $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ egenvärdena $\lambda_1 = 1/2$ och $\lambda_2 = -1/2$ som bestäms av den karakteristiska ekvationen $\det(A_1 - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Då A_1 har både positiva och negativa egenvärden är $Q(x_1, x_2)$ indefinit.

Om $n = 2$ bestäms egenvärdena till $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ av $\det(A_2 - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \{ \text{ byt plats på } R_1 \text{ och } R_4 \ \} = -\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \{ \text{ byt plats på } R_2 \text{ och } R_3 \ \} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 2\lambda R_2 \\ R_4 + 2\lambda R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - 2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - 2\lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - 2\lambda^2\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 2\lambda^2\right)\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4} - \lambda^2\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4} - \lambda^2\right)\left(\frac{1}{4} - \lambda^2\right) = 0$$

vilket ger $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ och $\lambda_3 = \lambda_4 = -1/2$.

Generellt: Den karakteristiska ekvationen i fallet med en $2n \times 2n$-matris erhålls efter att vi gjort n stycken platsbyten på två rader (som är rad nummer i och rad nummer $(2n + 1 - i)$, där $1 \leq i \leq n$)

samt n stycken radadditioner (som är rad nummer $(2n+1-i)$ adderad med 2λ gånger rad nummer i, där $1 \leq i \leq n$). Denna är

$$(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 2\lambda^2\right)^n = 0$$

vilken kan förenklas till

$$\left(\frac{1}{2} - 2\lambda^2\right)^n = 0$$

som innebär egenvärdena $\lambda = 1/2$ (av algebraisk multiplicitet n) och $\lambda = -1/2$ (också av algebraisk multiplicitet n). Den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ är således indefinit.

Saken är biff.

Övning 3. a) Enligt en känd sats, nämligen spektralsatsen (på tyska: der Spektralsatz), vet vi att en kvadratisk matris A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om A är en symmetrisk matris. Detta inträffar precis då $a = 0$.

b) Kolonnerna i en sådan ortogonal matris P består som bekant av tre ortogonala, normerade egenvektorer till A.

Vi behöver göra följande steg: bestämma alla tre egenvärden till A, bestämma tre ortogonala egenvektorer, och slutligen normera varje funnen egenvektor.

Steg 1: Egenvärdena till A bestäms av den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.

Vi räknar på: $\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \{\text{ kofaktorutveckling längs kolonn 2 }\}$

$= (8-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)((2-\lambda)^2 - 16) = (8-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = 0$, dvs. egenvärdena är $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$ och $\lambda_3 = -2$.

Steg 2: En egenvektor $\vec{u}$ tillhörande $\lambda_1 = 8$ fås genom att lösas ekvationen $(A - 8I)\vec{u} = \vec{0}$, dvs.

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gausseliminering ger $\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + \frac{2}{3}R_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10/3 & 0 \end{array}\right]$, dvs. $u_1 = u_3 = 0$ men u_2 kan vara godtyckligt. En egenvektor här kan väljas till $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

En egenvektor $\vec{v}$ tillhörande $\lambda_2 = 6$ fås genom att lösas ekvationen $(A - 6I)\vec{v} = \vec{0}$, dvs.

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Med eller utan gausseliminering inser vi att systemet innebär $-4v_1 + 4v_3 = 0$ och $2v_2 = 0$. En egenvektor här kan väljas till $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

En egenvektor $\vec{w}$ tillhörande $\lambda_3 = -2$ fås genom att lösas ekvationen $(A - (-2)I)\vec{w} = \vec{0}$, dvs.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Med eller utan gausseliminering inser vi att systemet innebär $4w_1 + 4w_3 = 0$ och $10w_2 = 0$. En egenvektor här kan väljas till $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Steg 3: Nu har vi tre egenvektorer som är (parvis) ortogonala: $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Då $\vec{u}$ redan är en enhetsvektor behöver den inte normeras. Vi normerar $\vec{v}$ och $\vec{w}$ och får de ortonormerade egenvektorerna $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ respektive $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Slutsats: En ortogonal matris P sådan att $P^T AP$ blir diagonal är $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Kontroll:

$$P^T AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{6}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Saken är biff.

Övning 4. Det är givet att $A = A^T$ (ty A är symmetrisk). Vi vill visa att $(A^{-1})^T = A^{-1}$.

Vi vet att $AA^{-1} = I \Rightarrow (AA^{-1})^T = I^T \Rightarrow (A^{-1})^T A^T = I$.

Eftersom $A = A^T$ fås $(A^{-1})^T A^T = I$ till $(A^{-1})^T A = I$.

Multiplicera båda led med A^{-1} från höger och vi får

$(A^{-1})^T AA^{-1} = IA^{-1} \Rightarrow (A^{-1})^T = A^{-1}$, precis det vi vill uppnå.

Saken är biff.

Övning 5. En vanlig strategi i sådana uppgifter om att konstruera en matris A utifrån information om matrisens egenvärden och egenvektorer är att utnyttja egenvärdena och egenvektorerna för att konstruera en inverterbar matris P (av lämpliga egenvektorer) och en diagonalmatris D (av lämpliga egenvärden). Då fås $A = PDP^{-1}$. Om P dessutom är en ortogonal matris fås $A = PDP^T$. Eftersom A i detta fall är en symmetrisk matris är A säkert diagonaliserbar.

Steg 1: Vi försöker mjölka fram all information given i uppgiftslydelsen:

Av (i) vet vi att $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor tillhörande egenvärdet $\lambda = 2$. Detta ger även att A är en 3×3-matris. Av (ii) vet vi att egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 4$ är ett plan $\Pi = \operatorname{span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$, där $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är två egenvektorer tillhörande egenvärdet $\lambda = 4$ som är linjärt oberoende.

Steg 2: Dags att tillämpa någon relevant sats om symmetriska matriser:

Eftersom A är symmetrisk måste egenvektorer motsvarande olika egenvektorer vara (parvis) ortogonala, dvs. $\vec{u} = [2 \quad 1 \quad -1]^T$ måste vara ortogonal mot både $\vec{v}$ och $\vec{w}$, alltså mot hela planet Π. Då Π innehåller origo (ty Π är ett egenrum som innehåller $\vec{0}$) och har $\vec{u}$ som en normalvektor, kan Π beskrivas med ekvationen $2x + y - z = 0$.

Steg 3: Nu vill vi bestämma $\vec{v}$ och $\vec{w}$ för att kunna konstruera $P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ | & | & | \end{bmatrix}$. Om P är ortogonal blir det mycket lätt att räkna ut $P^{-1} = P^T$. Annars kan det ta betydligt längre tid att räkna ut P^{-1}, till exempel genom att radoperera matrisen $[P|I]$ till $[I|P^{-1}]$.

Låt oss försöka bestämma en ortogonal matris P genom att först bestämma två egenvektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i Π som är ortogonala. Tänker vi lite efter (med kladdpapper) ser vi att vi kan ta $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (**Tips:** Ta $\vec{v}$ och $\vec{w}$ som ser ungefär likadana ut, ändra sedan någon komponent till 0, och släng slutligen in några minustecken så att $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Glöm ej villkoret $2x + y - z = 0$.)

Steg 4: För att få en ortogonal matris P behöver vi även normera $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$. Detta är enkelt! Med de framtagna egenvektorerna vet vi nu att

$$A = PDP^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 11 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Saken är biff.