Algebra och Geometri 2017-11-15

En matris är ett rektangulärt schema som består av ordnade tal eller storheter.

Radmatris: en rad Kolonnmatris: en kolonn

Matriser Låt A vara en $m \times n$-matris, med m rader och n kolonner,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrisräkning

1. Multiplikation med skalär

Ex. $2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -6 & 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ Generellt: Låt $kA = B$, där $k \in \mathbb{R}$. $b_{ij} = ka_{ij}$

Några egenskaper

1) $k(A+B) = kA + kB$

2) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

2. Matrisaddition

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ matriserna måste vara lika stora

Generellt: Låt $A + B = C$, där A, B, C har samma storlek $m \times n$. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

3. Matrismultiplikation

Ex. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ Beräkna AB

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \leftarrow 2\cdot 4 + 1 \cdot 3 = 11 \\ \leftarrow 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18 \end{bmatrix} \end{array}$$

resultatet AB Svar: $AB = \begin{bmatrix} 11 \\ 18 \end{bmatrix}$

Följdfråga Vad är BA? Odefinierad

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cdot & \end{bmatrix} \end{array}$$

Definition Låt A vara en $m \times n$-matris
Låt B vara en $n \times p$-matris

AB är definierad om #kolonner i A = #rader i B.

Låt $AB = C$. Då definieras C enligt:

1. C är en $m \times p$-matris
2. c_{ij} = (rad i i A) $\cdot$ (Kolonn j i B)
   ↑ skalärprodukt

Ex. 1. $\underset{2\times 2}{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}$ $\underset{2\times 3}{B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}}$ Beräkna a) BA b) AB

a) odefinierat $(2 \neq 3)$

b) $\underset{2\times 2}{A}\,\underset{2\times 3}{B} = \underset{2\times 3}{C} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 2 & 16 \\ 11 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

Ex. 2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

$\underset{2\times2}{A}\ \underset{2\times2}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 11 & 18 \end{bmatrix}$; $\underset{2\times2}{B}\ \underset{2\times2}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 23 & 16 \end{bmatrix}$ ☒

Några egenskaper

1) $A + B = B + A$ för alla A, B av passande storlekar
men
$AB \neq BA$

2) $ABC = (AB)C = A(BC)$ Fler egenskaper finns i boken

Anm. Samband mellan matrismultiplikation och ekvationssystem

$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -1 - 3y = 4 \end{cases}$ Modul 1: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{array}\right]$ Nu: Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Systemet kan skrivas $A\vec{x} = \vec{b}$, dvs. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

4. Matristransponering

Låt A vara en $m \times n$-matris. Då är A^T, transponatet av A, en $n \times m$-matris

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ Anm. Det skrivs ibland $\vec{v} = [a\ b\ c]^T \underset{\text{menas}}{=} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Två delrum kopplade till en matris

① Kolonnrummet (eng. Columnspace) notation: Col A

② Nollrummet (eng. Nullspace) notation: Null A

① Kolonnrummet Det. Col $A = \text{span}\{\text{kolonnerna i } A\}$ ☒

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Col $A = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $(= \mathbb{R}^2)$

Tolkning kommer nästa vecka

Typiskt problem $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Bestäm en bas för Col A (2 p)

Systematisk lösning

1. Col $A = \text{span}\left\{\underset{\vec{a}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}, \underset{\vec{b}}{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}, \underset{\vec{c}}{\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}, \underset{\vec{d}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}\right\}$

2. För att få en bas för Col A väljer vi bland dessa ut så många oberoende vektorer som möjligt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Läs av}}$$
$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}$$

$\vec{a}$ och $\vec{b}$ är linjärt oberoende.

Svar: En bas för ColA är $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ■

② Nollrummet NullA

Def. NullA består av alla vektorer $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ sådana att $A\vec{x} = \vec{0}$ ■

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ Ligger $\vec{x}$ i NullA?

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Typiskt problem $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (2p) Bestäm en bas för NullA

sökes $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

1. Bestäm först NullA, dvs. lös ekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ x\ y\ z\ w \end{array} \sim \cdots \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\text{reducerad trappa}}$$

$$\begin{cases} x + z + w = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ -s \\ s \\ t \end{bmatrix}, \text{ där } s, t \in \mathbb{R}$$

$$= s\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $\text{NullA} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

↑ ↑ oberoende

Svar: En bas för NullA är $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ■

Språk

ColA kallas ibland (mindre korrekt) ImA ← Image

NullA ——— " ——— KerA ← kernel/kärna