Algebra och Geometri 2017-11-01

Tentamen 20120919 #1 (a)

$$\begin{array}{l} \text{vill} \\ \text{ha 0} \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 3 & 3 & 2 & 3 \\ \boxed{3} & 1 & 3 & 4 & 12 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{-5} & -3 & 1 & 12 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ R_3-5R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -1R_2 \\ \frac{1}{2}R_3 \end{array}$$

få en trappa först! vill ha 0 vill ha 1:or ··· trappa ej reducerad

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1-2R_3 \\ R_2-R_3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1-2R_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \blacksquare$$

vill ha 0:or vill ha 0

Viktig egenskap: varje matris är radekvivalent med exakt en matris på reducerad trappstegsform. ■

Avsnitt 1.1 & 1.2 Vektorer i $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^n$

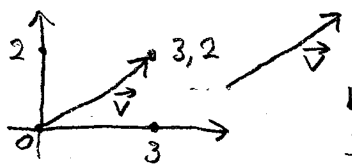
i $\mathbb{R}^2$: $\vec{v} = (x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i boken: $\vec{x} = (x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ talpar

i $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} = (x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ taltrippel

i $\mathbb{R}^n$: $\vec{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ n-tupel n-tuppel

Geometrisk framställning

Ex. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$



En vektor mäter/anger inte läge, bara längd och riktning.

Vektornorm/-längd/-belopp

Def. $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Ex. $\vec{v} = (1, 2, -3)$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$

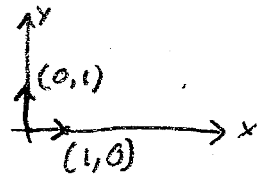
Enhetsvektor: en vektor med normen 1.

Ex. Ange en enhetsvektor som är parallell med $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

Svar: $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ ■

Några speciella enhetsvektorer

i $\mathbb{R}^2$: $\vec{i} = \vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{j} = \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e = enhet = Einheit



i $\mathbb{R}^3$: $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Parallella vektorer

Def: Låt $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, och $\vec{u} \neq \vec{0}$ samt $\vec{v} \neq \vec{0}$.

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ om det finns $k \in \mathbb{R}$ sådant att $\vec{u} = k\vec{v}$

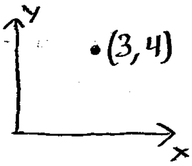
Ex. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ ty $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}$

alt. $\vec{v} = -2\vec{u}$ ■

Nytt begrepp: Linjärkombination av vektorer.

Ex. datorskärm 2 knappar 
$\vec{u}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$



Hur nås/fås $\vec{w}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$?

Svar Lätt: $\vec{w}=\underline{3\vec{v}+4\vec{u}}$ – linjär kombination av $\vec{u}$ och $\vec{v}$

Ex. knapparna $\vec{u}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ Svar: $\vec{w}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=1\vec{u}+3\vec{v}=\vec{u}+3\vec{v}$

$\uparrow$ $\nearrow$

Def. Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$

En linjärkombination av $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k$ är ett uttryck på formen
$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k$ där $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. ∎

Ex. Är det möjligt att skriva $\vec{w}=\begin{bmatrix}7\\5\\11\end{bmatrix}$ som en linjärkombination av $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$ och $\vec{v}=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$?

Lösning: Vill kolla om det går att skriva $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{w}$ där $a,b\in\mathbb{R}$.

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\\11\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a+2b\\a+2b\\3a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\\11\end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ konflikt Svar Nej!

Följdfråga Men om $\vec{v}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ då? Då fås $\begin{bmatrix}a+2b\\a+b\\3a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\\11\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a+2b=7\\a+b=5\\3a+b=11\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&2&7\\1&1&5\\3&1&11\end{array}\right]\begin{array}{l}\\R_2-R_1\\R_3-3R_1\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&-1&-2\\0&-5&-10\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\\R_3-5R_2\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&-1&-2\\0&0&0\end{array}\right]$$

enkel nu! Gör själv: $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$

Svar $\underset{\vec{w}}{\begin{bmatrix}7\\5\\11\end{bmatrix}}=3\underset{\vec{u}}{\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}}+2\underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}}$

Linjärt hölje (eng. Span)

Def. Låt $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$

Det linjära höljet, "täcket" av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är mängden av alla möjliga linjärkombinationer av $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Lmao, $\operatorname{span}\{\vec{u},\vec{v}\}=\{c_1\vec{u}+c_2\vec{v},\ \text{där } c_1,c_2\in\mathbb{R}\}$ ∎

Ex. Avgör om $\begin{bmatrix}7\\5\\11\end{bmatrix}$ ligger i $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$.

dvs. avgör om $\begin{bmatrix}7\\5\\11\end{bmatrix}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{u}$ & $\vec{v}$ Svar Ja!

DELRUM