Algebra och Geometri 2017-12-06

En symmetrisk matris är diagonaliserbar och kan även diagonaliseras ortogonalt.

"vanlig diagonalisering" $A = PDP^{-1}$ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $P = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{\text{Linjärt oberoende egenvektorer}}$

Ortogonal diagonalisering

symmetrisk

$A = PDP^{-1}$ D: som ovan $\quad P^{\perp} = P^{-1}$

P: Ska vara en ortogonal matris,

$A = PDP^T$ d.v.s. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ bildar en ortogonal mängd.

Ex. 1 Ortogonalt diagonalisera $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ symmetrisk matris.

Steg 1 Sök egenvärdena: Lös $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$

Steg 2. Sök 3 motsvarande egenvektorer:

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_1 = 0 & \text{Lös } (A - 0I)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 3 & \text{Lös } (A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow & \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_3 = -3 & \text{Lös } (A + 3I)\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow & \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \text{är parvis ortogonala}$$

Steg 3. Normera varje egenvektor:

$\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{u}$, ty $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{v}$

$\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{w}$

Steg 4. Skriv $A = PDP^T$, där

$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $P^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ▨

Ex. 2 「svårare」 Finn en ortogonal diagonalisering till $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ symmetrisk

Steg 1 & 2 $\lambda_1 = 0$: $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underbrace{\lambda_2 = \lambda_3 = 3}_{\text{knepigt}}$: Lös $(A - 3I)\vec{v} = \vec{0}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$ ger $v_1 + v_2 + v_3 = 0$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problem: Två egenvektorer motsv. $\lambda = 3$ är $\underbrace{\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{ej ortogonala då } \vec{a}\cdot\vec{b} = 1 \neq 0}$

Steg 3 Finn 2 ortogonala egenvektorer motsvarande $\lambda = 3$.

Sätt #1 Sakta men säkert (SS): Kör Gram-Schmidt-process med $\vec{a}$ och $\vec{b}$.

Sätt #2 Fast and Fabolous (FF): Vill ha en ny egenvektor $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ s.a. $\begin{cases} \vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$

Ett förslag: $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Steg 4 Diagonalisera: $A = PDP^T$, där

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} & \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} & \frac{1}{\|\vec{c}\|}\vec{c} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

och $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Spektralsatsen

A är symmetrisk $\Leftrightarrow$ A är ortogonalt diagonaliserbar. ∎

Nyhet Kvadratiska former (Q-form)

Ex. en Q-form på $\mathbb{R}^2$ är $Q(\vec{x}) = Q(x,y) = \overbrace{2x^2 - 4xy + y^2}^{\text{Varje term har grad 2}}$

på $\mathbb{R}^3$ är $Q(\vec{x}) = Q(x,y,z) = x^2 - z^2 + 6xy - 4xc$

Allmänt: $ax^2 + by^2 + cxy$ ($\mathbb{R}^2$)

$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ ($\mathbb{R}^3$) a,b,c,d,e,f är konstanter

Def. En kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$ är ett uttryck på formen

$$Q(\vec{x}) = Q(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_j$$ ▨

Representation för $Q(\vec{x})$ mha. symmetriska matriser:

$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ där A är en symmetrisk matris

Ex. på $\mathbb{R}^2$: $[x\ y]\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = [2x+5y \quad 5x+3y]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = (2x+5y)x + (5x+3y)y$

$= 2x^2 + 10xy + 3y^2 = Q(x,y)$

Generellt $Q(x,y) = ax^2 + by^2 + \underbrace{cxy}_{\substack{\text{blandad term}\\ \text{(olika variabler)}}}$ motsvaras av $A = \begin{bmatrix}a & c/2\\ c/2 & b\end{bmatrix}$

P.s.s. $Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ $A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ & \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2\\ d/2 & b & f/2\\ e/2 & f/2 & c\end{bmatrix} \begin{matrix} x\\ y\\ z\end{matrix}\end{array}$

Ex. $Q(x,y,z) = x^2 - z^2 + 6xy - 4xz$ motsvaras av $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix} \begin{matrix} x\\ y\\ z\end{matrix} \\ \begin{matrix} x & y & z \end{matrix}\end{array}$

Klassificering av $Q(\vec{x})$ med avseende på definithet ($\approx$ tecken) 5 typer

1 Q är positivt definit om $Q \geq 0$ $\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ och $Q=0$ endast om $\vec{x} = \vec{0}$

Ex. $Q(x,y) = x^2 + y^2$ $Q \geq 0$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ och $Q=0$ endast om $x=y=0$

2. Q är positivt semidefinit: $Q \geq 0$ $\forall \vec{x}$ och $Q=0$ för någon $\vec{x} \neq \vec{0}$

Ex. $Q(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 \geq 0$ $\forall x,y$ och $Q=0$ t.ex. då $(x,y) = (5,-5)$

3. Q är negativt definit: som 1. men $Q \leq 0$ $\forall \vec{x}$ och $Q=0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

4. Q är negativt semidefinit: som 2. men $Q \leq 0$ $\forall \vec{x}$ och $Q=0$ för någon $\vec{x} \neq \vec{0}$

5. Q är indefinit: både $Q>0$ och $Q<0$ kan inträffa

Ex. $Q(x,y) = x^2 - xy$ ▨

Ex. Klassificera $Q(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

Sätt #1 Kvadratkomplettera:

$$Q(x,y) = \underbrace{(x+y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y^2}_{\geq 0} \geq 0 \ \forall x,y \text{ och } Q = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 2y^2 = 0$$

d.v.s. $x = y = 0$

Sätt #2 Bilda $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Egenvärdena är $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 2 - \sqrt{2} > 0 \\ \lambda_2 = 2 + \sqrt{2} > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Q$ är positivt definit

<u>Svar</u>: positivt definit

Sats $Q(\vec{x})$ är

1. $\Leftrightarrow$ alla eg. värd är positiva, d.v.s. $\lambda_{min} > 0$
2. $\Leftrightarrow$ $\lambda_{min} = 0$ (något/några $\lambda = 0$)
3. $\Leftrightarrow$ alla eg. värd är negativa, d.v.s. $\lambda_{max} < 0$
4. $\Leftrightarrow$ $\lambda_{max} = 0$ (____ " ____)
5. $\Leftrightarrow$ vissa $\lambda > 0$ och vissa $\lambda < 0$