Stukan 16

Ordkunskap: Se till att du känner till definitionerna av och eventuellt de viktiga formlerna för följande begrepp:

determinant (både bestämningsmetoder och tillämpningar)

kofaktorutveckling

Övning 1. Beräkna följande determinanter genom att kofaktorutveckla längs en rad eller en kolonn av ditt eget val:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Övning 2. För att beräkna determinanten av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ kan det vara enklare att använda lämpliga radoperationer (än att endast kofaktorutveckla). Beräkna $\det A$.

Anmärkning: Detta är uppgift **1(d)** från tentamen 2013-10-28.

Övning 3. För konstanterna a och b ges den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ av

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 - x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_3 - x_4 \\ bx_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

Använd determinanten för att bestämma alla a och b sådana att T blir inverterbar. **Ledning:** Bestäm först avbildningsmatrisen till T. **Anmärkning:** Detta är uppgift **3(a)** från tentamen 2015-10-23.

Övning 4. För varje given konstant a har vi följande ekvationssystem i tre okända x, y och z:

$$\begin{cases} 2x + & 9y + & 4z & = 3 \\ -2x + & 7y + & 2z & = 1 \\ 2x + & y + & (a^2 - 1)z & = 1 \end{cases}$$

a) Ekvationssystemet kan skrivas $A\vec{x} = \vec{b}$, där $\vec{x} = [x \quad y \quad z]^T$ och $\vec{b} = [3 \quad 1 \quad 1]^T$. Bestäm A.

b) Beräkna determinanten av A. Utnyttja $\det A$ för att bestämma de värden på a för vilka systemet har en unik lösning.

c) För vilka a har systemet ingen lösning respektive oändligt många lösningar?

Anmärkning: Detta är en modifierad version av uppgift **2** från tentamen 2014-05-20. Har du lust kan du även lösa uppgift **1** från tentamen 2017-01-11 (med hjälp av determinanten, ty Gauss-Jordan-eliminering som i lösningsförslaget leder till väldigt krångliga bråkräkningar).

Övning 1.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \{\text{ kofaktorutveckling längs rad 1 }\} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$$= 2 \cdot (6-4) - 1 \cdot (-15-1) + 2 \cdot \big(20-(-2)\big) = 4 + 16 + 44 = 64$$

Vi kan dubbelkolla om 64 kan stämma genom att prova kofaktorutveckla längs en annan rad eller en annan kolonn, säg rad 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \{\text{ observera tecken }\} = -5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \cdot (-3-8) - 2 \cdot (-6-2) - 1 \cdot (8-1) = 55 + 16 - 7 = 64$$

Det stämmer!

Svar: 64.

b) Här är det smart att kofaktorutveckla längs en rad eller en kolonn med så många nollor som möjligt, säg kolonn 1:

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \{\text{ kofaktorutveckling längs kolonn 1 igen }\} = -4 \cdot 3 \cdot 2 = -24$$

Annars kan vi direkt notera att matrisen $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ är triangulär, varför dess determinant är precis produkten av huvuddiagonalelementen, nämligen $-4 \cdot 3 \cdot 2 = -24$.

Svar: -24.

c) Här är det smart att kofaktorutveckla längs en rad eller en kolonn med så många nollor som möjligt, säg kolonn 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Den mindre determinanten kan beräknas genom att kofaktorutveckla längs rad 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \big(-6-(-6)\big) - 2\big(-9-(-4)\big) = 10$$

Den sökta determinanten är således $2 \cdot 10 = 20$.

Svar: 20.

Övning 2. Vi försöker radoperera tills en trevlig matris uppstår. En sådan matris kan vara en matris med en nollrad (vars determinant är 0) eller en triangulär matris (vars determinant är produkten av huvuddiagonalelementen).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ty rad 3 är en nollrad.

Svar: 0.

Viktig erfarenhet: Om raderna i en matris A är linjärt beroende, gäller att $\det A = 0$ (ty A kan radopereras tills en nollrad erhålls). Om raderna däremot är linjärt oberoende, gäller att $\det A \neq 0$.

Övning 3. Avbildningsmatrisen A utgörs som bekant av koefficienterna till x_1, x_2, x_3 och x_4:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ b & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T är inverterbar precis om A är inverterbar, dvs. om $\det A \neq 0$. Determinanten av A kan beräknas genom att exempelvis kofaktorutveckla längs rad 1:

$$\det A = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Notera att $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, ty rad 3 är en nollrad, och att $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{ \text{kofaktorutveckling längs kolonn 1} \} = b \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = b \cdot (-1) = -b.$

Då fås $\det A = a \cdot 0 - 1 \cdot (-b) = b$. Slutsatsen är att T är inverterbar precis om $\det A \neq 0$, dvs. om $b \neq 0$.

Svar: T är inverterbar för alla $b \neq 0$ och för alla a.

Övning 4. a) Matrisen A är som bekant koefficientmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ -2 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & a^2 - 1 \end{bmatrix}$$

b) Determinanten av A kan beräknas med hjälp av direkt kofaktorutveckling eller radoperationer (så att en trevlig matris uppstår). Låt oss prova radoperera för lite variation:

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 \\ -2 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & a^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 0 & 16 & 6 \\ 0 & -8 & a^2 - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + \frac{1}{2} R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 0 & 16 & 6 \\ 0 & 0 & a^2 - 2 \end{vmatrix}$$

$= 2 \cdot 16 \cdot (a^2 - 2) = 32(a^2 - 2)$. Detta är $\det A$. (No puns intended.)

Systemet har en unik lösning precis om $\det A \neq 0$, dvs. om $32(a^2 - 2) \neq 0$. Detta gäller självklart om $a^2 \neq 2$, dvs. om $a \neq \pm\sqrt{2}$.

Svar: $\det A = 32(a^2 - 2)$ och systemet har en unik lösning om $a \neq \pm\sqrt{2}$.

Anmärkning: 1. Detta stämmer överens med det vi gjorde i **Modul 1**. Systemet har en unik lösning precis då trappstegsmatrisen $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 0 & 16 & 6 \\ 0 & 0 & a^2-2 \end{bmatrix}$ har tre ledande element (enligt satsen om lösbarhet), dvs. då $a^2 - 2 \neq 0$, dvs. då $a \neq \pm\sqrt{2}$.

Observera att om $a = \sqrt{2}$ eller $a = -\sqrt{2}$ (dvs. om $\det A = 0$) kan vi inte på rak arm säga något om antalet lösningar till systemet.

2. Allmänt gäller följande: Om A är en kvadratisk matris och $\det A \neq 0$, har ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ den unika lösningen $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Jämför **Stukan 14**, **Övning 1**.

3. Du kan tycka att determinanten är en krånglig lösningsmetod i just denna specifika uppgift. Detta är trots allt en nyttig övning eftersom vi ändå ska lära oss att beräkna determinanter (som kan användas i många andra sammanhang än enbart lösning av ekvationssystem).

Dessutom kan det vara så att vissa ekvationssystem enklare kan behandlas med hjälp av determinanten (än med hjälp av gausseliminering). Testa uppgift **1** från tentamen 2017-01-11.

c) Notera att oavsett om $a = \sqrt{2}$ eller $a = -\sqrt{2}$ motsvaras systemet ifråga av totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 9 & 4 & 3 \\ -2 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - R_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -3 & -2 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + \frac{1}{2}R_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Den sista totalmatrisen har en fullständig nollrad (på både vänster- och högerledet) samt två ledande element. Systemet har således säkert oändligt många lösningar.

Svar: Systemet har oändligt många lösningar om $a = \sqrt{2}$ eller $a = -\sqrt{2}$. (Alltså är systemet aldrig inkonsistent, oavsett vilket värde a antar.)