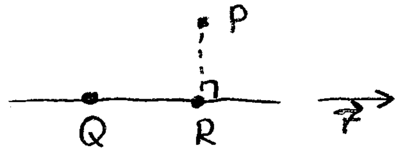
Algebra och Geometri 2017-11-09

Ex. Linje L: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ Punkt $P=(1,0,1)$



Sök punkten på L som ligger närmast P.

Sök alltså R. Påminnelse $A \longrightarrow B$ $\overrightarrow{AB}=B-A$

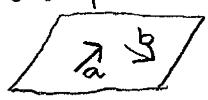
Steg 1 Se att $\overrightarrow{QR}=\text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{QP}=\text{proj}_{(1,-2,1)}(-1,-2,2)=\frac{(-1,-2,2)\cdot(1,-2,1)}{(1,-2,1)(1,-2,1)}(1,-2,1)$

$=\frac{-1+4+2}{1+4+1}(1,-2,1)=\frac{5}{6}(1,-2,1)=\left(\frac{5}{6},\frac{-10}{6},\frac{5}{6}\right)$

Steg 2 $\overrightarrow{QR}=R-Q$

$R=\overrightarrow{QR}+Q=\left(\frac{5}{6},\frac{-10}{6},\frac{5}{6}\right)+(2,2,-1)=\left(\frac{17}{6},\frac{2}{6},\frac{-1}{6}\right)$ $\blacksquare$

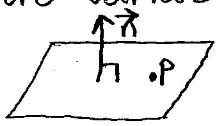
Planets ekvation på parameterform $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+s\underbrace{\begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix}}_{\vec{a}}+t\underbrace{\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$ två parametrar



på skalärform $3x-y+z=1$

$x+y-z+2=0$

Generellt $Ax+By+Cz+D=0$ tre variabler standardform normalform

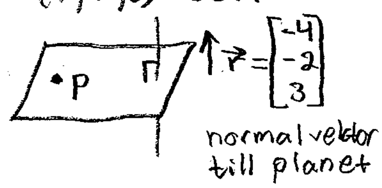


Behöver 2 saker:

1. En punkt i planet: $P=(a,b,c)$
2. En vektor som är vinkelrät/ortogonal mot planet: $\vec{n}=(A,B,C)$ normalvektor

Planets ekvation $A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$ $\blacksquare$

Ex. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller $(1,-2,3)$ och är vinkelrät mot linjen $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-4\\-2\\3\end{bmatrix}$ Idéskiss



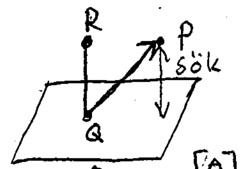
$-4(x-1)-2(y-(-2))+3(z-3)=0$

$-4x+4-2y-4+3z-9=0$ dvs $-4x-2y+3z-9=0$ $\blacksquare$

Anm. Om $\vec{n}$ är en normalvektor till ett plan, är $k\vec{n}$ också det, om $k\neq 0$.

Avståndsproblem #3 Punkt-plan

Sök avståndet mellan P och $Ax+By+Cz+D=0$



obs! $\vec{n}=\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}$

Metod#1: 1. Tag en punkt Q i planet.

2. Tag fram $\overrightarrow{QR}=\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{QP}$.

Svar: avståndet är $\|\overrightarrow{QR}\|=\|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{QP}\|$

Metod#2 Genväg

Sökta avståndet ges av $\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ $(P=(a,b,c))$

Ex. Plan Π: $3x - y + 4z = 5$, Punkt $P = (2,3,1)$

Sök $\text{dist}(P,\Pi) = d$

observera tecknet

Metod#2 $\quad d = \dfrac{3\cdot 2 - 3 + 4\cdot 1 - 5}{\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{26}}$

Metod#1 Notera att $\vec{n} = (3,-1,4)$

1. Tag en punkt i planet: $Q = (0,0,\frac{5}{4})$

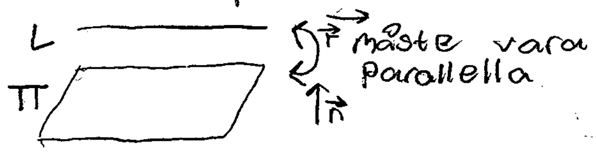
Bilda $\overrightarrow{QP} = P - Q = (2,4,0)$

2. $\text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{QP} = \dfrac{\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n} = \dots = \dfrac{2}{26}(3,-1,4)$

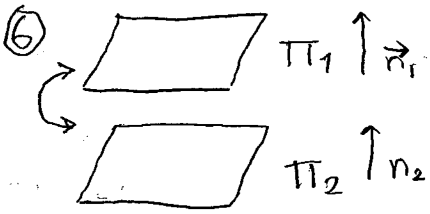
Svar: $d = \left\|\frac{2}{26}(3,-1,4)\right\| = \frac{2}{26}\|(3,-1,4)\| = \frac{1}{13}\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2} = \underline{\underline{\frac{1}{13}\sqrt{26}}}$

Anm $\frac{1}{13}\sqrt{26} = \frac{1}{13}\sqrt{13}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{13}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{26}}$ stämmer ■

Avståndsproblem 5



6



Tag en punkt P på L.

$\text{dist}(L,\Pi) = \text{dist}(P,\Pi)$ se 3

Tag en punkt P i/på Π_1

$\text{dist}(\Pi_1,\Pi_2) = \text{dist}(P,\Pi_2)$ se 3

Anm. Två plan är parallella om de är olika och har parallella normalvektorer.

Ex. $x - y + z = 3$ parallellt med $-x + y - z = 5$

$\vec{n}_1 = (1,-1,1)$ $\qquad \vec{n}_2 = (-1,1,-1)$

$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ ty $\vec{n}_2 = (-1)\vec{n}_1$ ■

Anm. Linjen L, med riktningsvektor $\vec{r}$, är parallell med planet Π, med normalvektor $\vec{n}$, om $\vec{r}\perp\vec{n}$, dvs. $\vec{r}\cdot\vec{n} = 0$ ■

Kryssprodukt (synonym: Vektorprodukt)

skalärprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ är en skalär

kryssprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ är en vektor

Beräkning Endast giltig om $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ Ex. $\vec{a}=(1,3,2)$ $\vec{b}=(4,1,2)$ $\vec{a}\times\vec{b}=?$ $\vec{b}\times\vec{a}=?$

<u>Koncept</u> Determinant av en 2×2 matris

$$A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

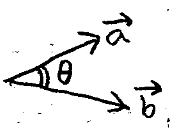
$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&2\\4&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\4&1\end{vmatrix}\right)=(3\cdot 2-1\cdot 2,-(1\cdot 2-4\cdot 2),1\cdot 1-4\cdot 3)=$$

$$=(4,6,-11).$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=\left(\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}4&2\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&1\\1&3\end{vmatrix}\right)=\dots=(-4,-6,11)$$

Några viktiga egenskaper

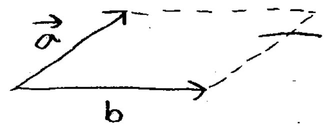
1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ antikommutativitet
2. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ är ortogonal mot både $\vec{a}$ & $\vec{b}$, dvs $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ & $\vec{c}\cdot\vec{b}=0$
3. $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\theta$



$0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ$

Tillämpning #1 Arean av en parallellogram P

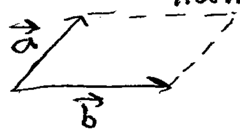
Låt $\vec{a}$ och $\vec{b}$ spänna upp P.



arean är $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$.

Anm. $\sin\theta=\frac{\text{mot}}{\text{hyp}}=\frac{\text{höjden}}{\|\vec{a}\|}$

Bevis

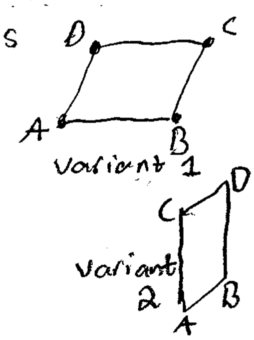


arean = basen · höjden
$=\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}\|\sin\theta$
$=\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ ∎

20140113#1(a) (2p)
$A=(1,1,1)$ $B=(2,3,0)$ $C(3,2,4)$ $D=(4,4,3)$

Finn arean av den P vars hörn är A,B,C,D

Idéskiss

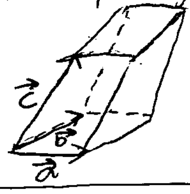


V1 $\text{Arean}=\|\vec{AB}\times\vec{AD}\|$
$\vec{AB}=B-A=(1,2,-1)$ och $\vec{AD}=D-A=(3,3,2)$
$\vec{AB}\times\vec{AD}=(7,-5,-3)\Rightarrow\|(7,-5,-3)\|=\dots=\sqrt{83}$

V2 $\vec{AC}=(2,1,3)$ $\vec{AB}\times\vec{AC}=(7,-5,-3)$ samma svar

samma resultat <u>till slut</u> ∎

Tillämpning #2 Volymen av en parallellepiped

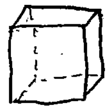


Volymen ges av $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$

$=|(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}|$

$=\underbrace{|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|}_{\text{skalärtrippelprodukt}}$

rätblock



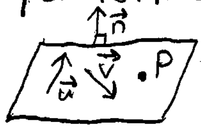
Planets ekvation i samband med kryssprodukt

Ex. Ett plan ges av

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+t\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}}_{\vec{u}}+s\underbrace{\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}}_{\vec{v}}$$

Finn planets ekvation på formen

$Ax+By+Cz+D=0.$



$P=(2,1,3)$

Behöver en punkt i planet (P) samt en normalvektor till planet. $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\3\\3\end{bmatrix}.$ Kan också ta $\vec{n}=(-2,1,1)$

Ekvationen. $-2(x-2)+1(y-1)+1(z-3)=0$

$-2x+y+z=0$

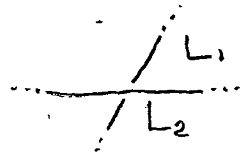
Kontroll: Från parameterformen: $\left.\begin{matrix}x=2+t+2s\\y=1+3s\\z=3+2t+s\end{matrix}\right\}$ Sätt in i $-2x+y+z$

$-2(2+t+2s)+1+3s+3+2t+s=0$

Lite om hyperplan

räta linje i $\mathbb{R}^2$ $Ax+By+C=0$
plan i $\mathbb{R}^3$ $Ax+By+Cz+D=0$
hyperplan i $\mathbb{R}^n$ $C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n+D=0$

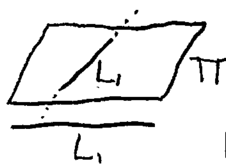
Avståndsproblem (4) avståndet mellan 2 linjer



Skeva linjer
Skew

Strategi Hitta först ett plan som innehåller L_1 och som är parallellt med L_2

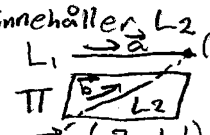
Det sökta avståndet $dist(L_1,L_2)=dist(L_2,\Pi)$
$=dist(P,\Pi)$ se problem (3).



20160317#1 Två linjer
$L_1:\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-3\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$ $L_2:\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix}$

a) Finn på parameterform det plan Π som är parallellt med L_1 och som innehåller L_2

$\Pi:\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}+h\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix}$ $(k,h\in\mathbb{R})$



$\vec{a}=(-2,-1,1)$
$\vec{b}=(1,5,1)$
$P=(-1,-3,0)$

b) Finn $dist(L_1,L_2)=dist(P,\Pi)$, där $P=(\overset{a}{-1},\overset{b}{-3},\overset{c}{0})$ se (3)

$dist(P,\Pi)=\dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ A, B, C och D från planets ekvation på skalärform