Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Numerikus integrálás

Integrálközelítések.

Az

$$\mathcal{I}(f) := \int_a^b f(x)dx$$

határozott integrált szeretnénk kiszámítani, ahol $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Miért lehet szükség integrálközelítésre?

- f nem elemien integrálható
- f primitív függvényének felírása bonyolult
- nagyszámú integrál kiszámítására van szükségünk
- f nem explicit képlettel adott, csak bizonyos pontokban ismerjük az értékét

Az $\mathcal{I}(f)$ közelítését

$$\mathcal{I}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

alakban keressük, ahol

$x_1, \ldots, x_n$ a közelítés alappontjai, ($x_i \in [a, b]$),

$a_1, \ldots, a_n$ súlyok (melyek az f függvénytől nem függnek).

$\mathcal{I}_n(f)$: kvadratúraképlet (szabad paraméterei: n, $x_1, \ldots, x_n$, $a_1, \ldots, a_n$)

Interpolációs kvadratúraképletek.

Legyenek adottak az $x_1, \ldots, x_n$ alappontok.

Közelítsük f-et az $x_1, \ldots, x_n$-re támaszkodó Lagrange polinomjával:

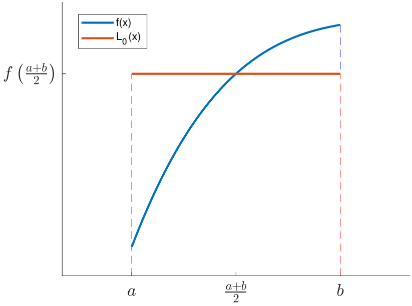
$$f(x) \approx L_{n-1}(x).$$

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_{n-1}dx = \mathcal{I}_n(f)$$

Egyszerű érintőképlet.

$n = 1$, azaz 1 alappont adott, és ez az $\frac{a+b}{2}$ pont.

Ekkor a közelítő polinom egy konstansfüggvény: $L_0(x) \equiv f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



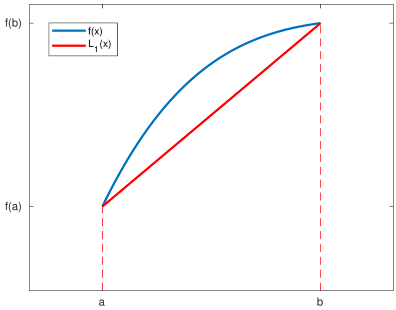
$$\boxed{\mathcal{I}_1(f) = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Egyszerű trapéz-képlet.

$n = 2$, azaz 2 alappont adott, és ezek az intervallum végpontjai: a és b.

Ekkor a f-et az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ adatokra illeszkedő egyenessel közelítjük.



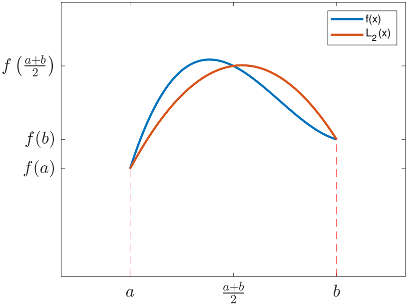
$$\boxed{\mathcal{I}_2(f) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Egyszerű Simpson-képlet.

$n = 3$, azaz 3 alappont adott, és ezek az a, $\frac{a+b}{2}$ és b pontok.

Az f-et egy másodfokú polinommal közelítjük.



$$\boxed{\mathcal{I}_3(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

A képlet pontos minden legfeljebb harmadfokú polinom esetén.

Összetett képletek.

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot m egyforma hosszúságú részintervallumra:

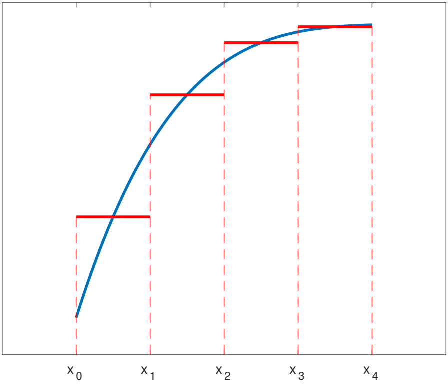
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$

A részintervallumok hosszát jelölje h:

$$h := \frac{b-a}{m} = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Minden részintervallumon alkalmazzuk ugyanazt az egyszerű képletet.

Összetett érintőképlet



Összetett érintőképlet

$$\mathcal{I}_{m\times 1}(f) = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\dots f\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}\right)\right]$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m\times 1}(f) = h\sum_{i=0}^{m-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$$

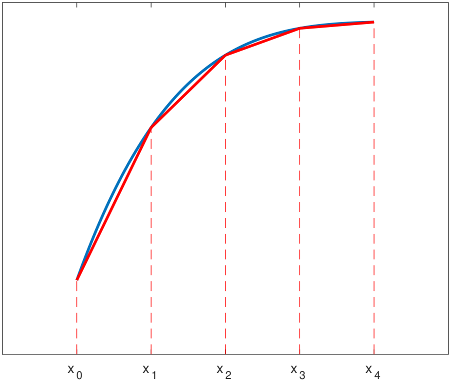
Az összetett érintőképlet hibája:
Ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor

$$|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}_{m\times 1}(f)| \le \frac{(b-a)^3}{24m^2}M_2,$$

ahol $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Összetett trapéz-képlet



Összetett trapéz-képlet.

$$\mathcal{I}_{m\times 2}(f) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2}\right].$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m\times 2}(f) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{f(x_m)}{2}\right]$$

Az összetett trapéz-képlet hibája:

Ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{m\times 2}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2,$$

ahol $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Összetett Simpson-képlet.

$$\mathcal{I}_{m\times 3} = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots \right.$$
$$\left. + 2f(x_{m-1}) + 4f\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}\right) + f(x_m)\right].$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m\times 3} = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m)\right]$$

Az összetett Simpson-képlet hibája:
Ha f négyszer folytonosan differenciálható, akkor

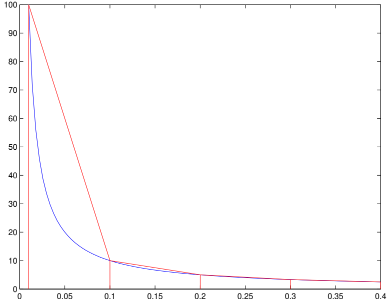
$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{m\times 3}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4,$$

ahol $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

A képlet pontos minden legfeljebb harmadfokú polinom esetén.

Adaptív eljárások

- a kvadratúra képlet költsége arányos a függvénykiértékelések (alappontok) számával
- az ekvidisztáns alappontrendszer időnként indokolatlanul sok számítást igényel



Adaptív eljárások

A függvény viselkedését figyelembe véve a számítás költsége csökkenthető

- Az aktuális intervallumon végezzük el az integrál közelítését két különböző módon (vagy ugyanazt a kvadratúra képletet alkalmazzuk két különböző -pl n és $2n$- alappontszám esetén, vagy ugyanarra az alappontszámra két különböző kvadratúra képletet)
- ha a két közelítés eltérése abszolútértékben nagyobb, mint $h_i\varepsilon/(b-a)$ (ahol ε adott, h_i az aktuális intervallum hossza), akkor az intervallumot osszuk fel két egyforma hosszúságú részintervallumra, és mindkettőre ismételjük meg az eljárást

Matlab: Anoním függvények, function handle

Függvényeket definiálhatunk parancssorban is:

```
>> f1= @(x) x.*sin(x);
```

Ilyen módon az $f1(x) = x\sin(x)$ függvényt definiáltuk, hívása pl.:

```
>> y=f1(pi/4)
y=
  0.5554
```

A @ szimbólum után zárójelben szerepelnek a függvény változói (most x), ezt követi a függvény (ez egy ú.n. anoním függvény). Az $=$ baloldalán szereplő változó (most f1) egy ú.n. ,,function handle" típusú változó lesz.

Akár többváltozós függvényeket is megadhatunk így:

```
>> f2= @(x,y) x.^2+x.*y-y+3;
```

Ekkor pl.

```
>> z=f2(2,-1)
z=
   6
```

A function handle tárolja azon változók értékét is, amelyek szükségesek a függvény kiértékeléséhez:

```
>> a=2.5; b=3;
>> f3= @(x) a*sin(x)+b*cos(x);
>> y=f3(-4)
y=
   -0.0689
>> clear a b
>> y=f3(-4)
y=
   -0.0689
```

Numerikus integrálás Matlab-bal

Egyváltozós függvények integrálására pl az `integral` függvényt használhatjuk.

Példa

Matlab segítségével számítsuk ki az

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$$

integrál értékét!

Megoldás.

```
>> f= @(x) x.*sqrt(1+x);
>> integral(f,0,3)
ans=
   7.7333
```

Az `integral` függvény hívása:

```
>> integral(fv,xmin,xmax)
```

ahol

- `fv` az integrálandó függvény (`fv` egy function handle típusú változó),
- `xmin` és `xmax` az alsó és felső határ.

Az `integral` függvény az `fv` függvényt vektor argumentummal fogja meghívni. Figyeljünk rá, hogy az `fv` ennek megfelelően legyen megadva (elemenkénti operátorok!).

Az `integral` függvény adaptív kvadratúrát használ, és alapértelmezésként 10^{-10} abszolút, vagy 10^{-6} relatív hibával számítja ki az integrál értékét.

A hibahatárok átállíthatóak:

```
>> integral(f,0,3,'RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-13)
```

Az előző példában nem feltétlenül szükséges létrehozni a `f` változót:

```
>> integral(@(x) x.*sqrt(1+x),0,3)
ans =


    7.7333
```

Ha a függvényt korábban egy m-fájlban definiáltuk, pl.

```
function y=myfnc(x)
   y=x.*sqrt(1+x)
end
```

akkor az `integral` függvénynek átadhatjuk a függvény nevét is (function handle-ként):

```
>> integral(@myfnc,0,3)
```

Hasonló a helyzet a Matlab beépített függvényeivel:

```
>> integral(@sin,0,pi)
ans=
    2.0000
```

Impropius integrálok

- Az integrálás határai lehetnek $-\infty$ és ∞ is:

```
>> f= @(x) exp(-x);
>> integral(f,0,Inf)
ans =
     1
```

- Az sem probléma, ha a függvény az intervallum végpontjaiban nincs értelmezve:

```
>> f= @(x) 1./sqrt(1-x.^2);
>> integral(f,-1,1)
ans=
   3.1416
```

Paraméteres függvények integrálja

Példa:

$$\int_0^5 x^2 - cx + 3dx$$

Adott paraméterérték esetén kiszámítható az integrál:

```
>> f= @(x,c) x.^2-c*x+3;
```

Az integrál értéke $c = 4.5$ esetén a $[0, 5]$ intervallum felett:

```
>> integral(@(x) f(x,4.5),0,5)
ans =
     0.4167
```

Ha nem ismert a függvény

Előfordulhat, hogy nem ismerünk egzakt képletet az integrálandó függvényre, csak bizonyos pontokban ismerjük az értékeit. Ilyenkor a `trapz` Matlab-függvényt használhatjuk.

Példa

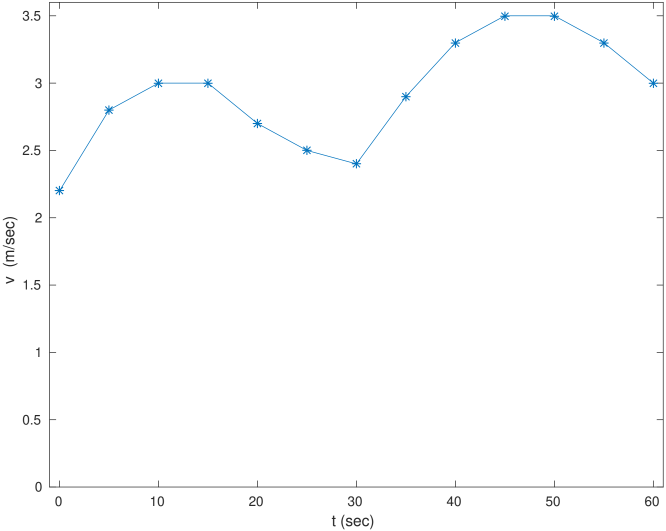
Egy jármű sebességét 1 percen keresztül mértük 5 másodperces időközönként:

t (sec)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
v (m/sec)	2.2	2.8	3	3	2.7	2.5	2.4	2.9	3.3	3.5	3.5	3.3	3

Becsüljük meg a jármű által megtett utat!

Megoldás. Tudjuk, hogy az a idő alatt megtett út:

$$S = \int_0^a v(t)dt$$


3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
v (m/sec)
0
10
20
30
40
50
60
t (sec)

A `trapz` függvény segítségével az integrál becslése:

```
>> x=0:5:60;
>> f=[ 2.2 2.8 3 3 2.7 2.5 2.4 2.9 3.3 3.5 3.5 3.3 3];
>> trapz(x,f)
ans =
    177.5000

>> y=cumtrapz(x,f);
```

Ekkor

$$y = (0, 12.5, 27, 42, 56.25, 69.25, 81.5, 94.75, 110.25, 127.25, 144.75, 161.75, 177.5)$$

Az `y` vektor *i*-edik koordinátája az *i*-edik időpillanatig megtett utat mutatja.

1. feladat

Matlab segítségével számítsa ki az alábbi határozott integrálok értékét!

(a)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin(x^2) dx$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(c)

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$$

2. feladat

Közelítse az

$$\int_0^{10} x \sin(5x) dx$$

integrált a Matlab `integral` függvényével, illetve a `trapz` függvénnyel úgy, hogy alappontoknak az

- `xi=0:10` pontokat
- `xi=[0 0.5:9.5 10]` pontokat

választja. Próbálja megmagyarázni a tapasztalt jelenséget (ábrázolja az integrálandó függvényt a megadott intervallum felett). Növelje az alappontok számát a `trapz` függvény esetén.

Kétváltozós függvények numerikus integrálása Matlab-bal

Használjuk az `integral2` függvényt!

Példa

Matlab segítségével számítsuk ki a

$$\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} xe^{-x^2-y^2}\,dydx$$

integrál értékét!

Megoldás.

```
>> f= @(x,y) x.*exp(-x.^2-y.^2)
>> integral2(f,-2,2,-1,1)
ans=
   -4.4007e-14
```

Példa

Matlab segítségével számítsuk ki a

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx$$

integrál értékét!

Megoldás. Mivel most a belső integrál határai is függvények, ezért ezeket is function handle-ként adjuk meg:

```
>> f= @(x,y) sqrt(1-x.^2-y.^2);
>> ymin= @(x) -sqrt(1-x.^2);
>> ymax= @(x) sqrt(1-x.^2);
>> integral2(f,-1,1,ymin,ymax)
ans=
    2.0944
```

3. feladat

Matlab segítségével számítsa ki a következő integrálok értékét!

(a)

$$\int_0^{\pi/4} \int_{-\pi/3}^{0} 2y \sin x \cos^2 x dydx$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

(c)

$$\int_1^{e} \int_{x}^{x^2} ln(xy) dydx$$