# Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Lineáris egyenletrendszerek

# Lineáris egyenletrendszerek megoldása

## Példa

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 \\
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\
-4x_1 - 10x_2 - 5x_3 &= -12
\end{aligned}
$$

$Ax = b$, ahol

$$
A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}
$$

Gauss-elimináció (sorcsere nélküli):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -10 & -5 & -12 \end{array}\right) \overset{\substack{\ell_{21}=-1 \\ \ell_{31}=2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -13 & -18 \end{array}\right)$$

$$\overset{\ell_{32}=-4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

A visszahelyettesítés:

$$\begin{aligned} -x_3 &= -2 & \quad\to\quad & x_3 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 & \quad\to\quad & x_2 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 & \quad\to\quad & x_1 = 3 \end{aligned}$$

# Gauss-elimináció (sorcsere nélküli)

$Ax = b$, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A kibővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Tfh $a_{11} \neq 0$. Az $i$-edik sorból az 1. sor $\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$-szeresét levonva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

Képletekkel: legyen $a_{ij}^{(1)} := a_{ij}$, ekkor

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \ell_{i1} a_{1j}^{(1)} \qquad \ell_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \ell_{i1} b_1^{(1)} \qquad \begin{array}{l} i = 2, \ldots, n, \\ j = 2, \ldots, n \end{array}$$

Ha $a_{22}^{(2)} \neq 0$ akkor az $i$-edik sorból az 2. sor $\ell_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$-szeresét levonva:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array} \right)$$

A $k$-adik lépés képlettel (ha $a_{kk}^{(k)} \neq 0$):

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k)} \qquad \ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik} b_k^{(k)} \qquad \begin{array}{l} i = k+1, \ldots, n, \\ j = k+1, \ldots, n \end{array}$$

Ha $a_{11}^{(1)} \neq 0$, $a_{22}^{(2)} \neq 0$, ... , $a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \neq 0$, akkor az $(n-1)$-edik lépés után:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array} \right)$$

Ha $a_{nn}^{(n)} \neq 0$, akkor elkezdődhet a visszahelyettesítés.

A sorcsere nélküli Gauss-elimináció pontosan akkor hajtható végre, ha $a_{11}^{(1)} \neq 0$, $a_{22}^{(2)} \neq 0$, ... ,$a_{nn}^{(n)} \neq 0$.

**Műveletigény:**

1 művelet := 1 összeadás + 1 szorzás

Az $A$ mátrix átalakításához (eltekintve az $\ell_{ik}$ költségétől):

$$\frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

művelet.

A $b$ vektor átalakításához és a visszahelyettesítéshez összesen:

$$n^2$$

művelet.

# LU-felbontás

## Példa

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\ell_{21} = -1 \\ \ell_{31} = 2}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_{32} = -4} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{L:=} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U:=}$$

Az $A$ mátrix **LU-felbontás**a:

$$A = LU$$

ahol
$L$ alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es,
$U$ felsőháromszög mátrix.

# LU-felbontás

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{41} & \ell_{42} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}$$

Az $(n-1)$-edik lépés után:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

# LU-felbontás

Az $A$ mátrix LU-felbontása:

$$A = LU$$

ahol
$L$ alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es,
$U$ felsőháromszög mátrix.

Az eredeti feladat: $Ax = b$ megoldása.

$$LUx = b$$

A mátrix felbontása után a megoldás két lépésben történik:
1. $Ly = b$
2. $Ux = y$

Mindkét rendszer mátrixa háromszög alakú.

# A mátrix determinánsa

Ha $A = LU$, akkor a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

Háromszögmátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata, így $\det(L) = 1$ és

$$\det(A) = \det(U)$$

**Az $A$ determinánsa az $U$ főátlóbeli elemeinek szorzata.**

# LU-felbontás

## Példa (folytatás)

$Ax = b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

A mátrix felbontása:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U}$$

A visszahelyettesítések:

1. $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

felülről lefelé visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 & & \\ -y_1 + y_2 &= 1 & \quad \rightarrow \quad & y_2 = 4 \\ 2y_1 - 4y_2 + y_3 &= -12 & \quad \rightarrow \quad & y_3 = -2 \end{aligned}$$

2. $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

alulról felfelé visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} -x_3 = -2 \quad &\rightarrow \quad x_3 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 = 4 \quad &\rightarrow \quad x_2 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \quad &\rightarrow \quad x_1 = 3 \end{aligned}$$

Az $A$ determinánsa:

$$\det(A) = \det(U) = (-2) \cdot 2 \cdot (-1) = 4$$

Az **LU-felbontás műveletigénye** ugyanannyi, mint a Gauss-eliminációé:

A mátrix felbontása: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ művelet
A két visszahelyettesítés: összesen $n^2$ művelet

A **determináns kiszámítása** LU-felbontással: $\approx \frac{n^3}{3}$ művelet

# Az LU-felbontás tárigénye:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tömören:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

## Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert LU-felbontással!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \\ 6 & -1 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & -10 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$A \to \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & -12 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & \boxed{-2} & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & \boxed{-1} & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Így

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U}$$

A két visszahelyettesítés:

1. $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -3 & & \\ -2y_1 + y_2 &= -5 & \rightarrow \quad & y_2 = -11 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 &= 2 & \rightarrow \quad & y_3 = 0 \\ 2y_1 - 2y_2 + 4y_3 + y_4 &= 19 & \rightarrow \quad & y_4 = 3 \end{aligned}$$

2. $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_4 = 3 \quad &\rightarrow \quad x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 0 \quad &\rightarrow \quad x_3 = -2 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = -11 \quad &\rightarrow \quad x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -3 \quad &\rightarrow \quad x_1 = -1 \end{aligned}$$

Az $A$ mátrix determinánsa:

$$\det(A) = \det(U) = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 3 = 12$$

## 1. feladat

Oldja meg LU-felbontással az $Ax = b$ egyenletrendszert! Határozza meg az $A$ mátrix determinánsát!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

## 2. feladat

Oldja meg az $Ax = b$ és $Ax = c$ lineáris egyenletrendszereket LU-felbontással!

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 12 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

## Megjegyzés

Ha több lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, ahol a rendszerek mátrixa azonos, akkor a mátrix felbontását elegendő egyszer elvégezni.

# Cholesky-felbontás

## Cholesky-felbontás

Az $A$ felbontását $A = LL^T$ alakba, ahol $L$ alsóháromszög mátrix, Cholesky-felbontásnak nevezzük.

Az $A$ mátrixnak pontosan akkor létezik Cholesky felbontása invertálható $L$ mátrixszal, ha $A$ szimmetrikus és pozitív definit.

Mivel az $L^T$ mátrixot nem szükséges kiszámítani és tárolni, ezért a tár- és műveletigény kb fele az LU-felbontás tár- és műveletigényének.

# Cholesky-felbontás

A felbontás $k$-adik lépése ($k = 1, \ldots, n$):
($L$-lel felülírva $A$ alsóháromszög részét)

$$
\begin{aligned}
a_{kk} &= \sqrt{a_{kk}} \\
a_{ik} &= \frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \qquad\qquad i = k+1, \ldots, n \\
a_{ij} &= a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{jk}, \quad j = k+1, \ldots, n, \quad i = j, \ldots, n
\end{aligned}
$$

A visszahelyettesítések:

1. $Ly = b$ ($y$-nal felülírva $b$-t)

$$b_i = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} b_j \right) / a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n$$

2. $L^T x = y$ ($x$-szel felülírva $y$-t)

$$b_i = \left( b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ji} b_j \right) / a_{ii}, \quad i = n, \ldots, 1$$

# Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & \boxed{2} & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{L^T}$$

# A felbontás másképpen:

Az $L$-et oszloponként számítva a $k$-adik oszlop ($k = 1, \dots, n$):

$$\ell_{kk} = \left( a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2 \right)^{1/2},$$

$$\ell_{ik} = \left( a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij}\ell_{kj} \right) / \ell_{kk}, \quad i = k+1, \dots, n.$$

Megj.: itt is felülírható $L$-lel $A$.

A visszahelyettesítések ugyanúgy, mint az előbb.

## 3. feladat

Határozza meg az alábbi mátrixok Cholesky-felbontását! Számítsa ki a mátrixok determinánsát!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & 5 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 13 & 7 & 6 \\ -4 & 7 & 6 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 17 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & 5 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

## 4. feladat

Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Cholesky-felbontással!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 & 3 \\ -6 & 8 & 6 & -6 \\ -6 & 6 & 9 & -10 \\ 3 & -6 & -10 & 18 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 36 \\ -38 \\ -47 \\ 58 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -6 & 20 & -14 \\ 3 & -14 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -21 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix}$$

# PLU-felbontás (Gauss-elimináció sorcserével)

**Permutációs mátrix**: az egységmátrix sorainak permutálásával

Pl. az $i$-edik és $j$-edik sor cseréjével ($i < j$):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i. \\ \\ \leftarrow j. \\ \\ \\ \end{array}$$

Ekkor

$PA$: az $A$ mátrix $i$-edik és $j$-edik sora felcserélődik,

$AP$: az $A$ mátrix $i$-edik és $j$-edik oszlopa felcserélődik.

Gauss-elimináció:

1. ha $a_{11} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ végrehajtjuk az első lépést

2. ha $a_{11} = 0$ és $a_{i1} = 0$ minden $i = 2, \ldots, n$-re $\quad \rightarrow \quad$ az első oszlopban nincs kiküszöbölendő elem $\quad \rightarrow \quad$ a 2. lépéssel folytathatjuk

3. ha $a_{11} = 0$, de van olyan $i$, hogy $a_{i1} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ sorcsere

Ha $P_1$ az 1. és $i$-edik sort cseréli:

$$A = P_1 A_1 \quad \rightarrow \quad A_1\text{-re kezdődhet a felbontás}$$

az 1. lépés után:

$$A = P_1 A_1 = P_1 L_1 A^{(2)}$$

a 2. lépés:

1. ha $a_{22}^{(2)} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ végrehajtjuk a 2. lépést

2. ha $a_{22}^{(2)} = 0$ és $a_{i2}^{(2)} = 0$ minden $i = 3, \ldots, n$-re $\quad \rightarrow \quad$ a 2. oszlopban nincs kiküszöbölendő elem $\quad \rightarrow \quad$ a köv. lépéssel folytathatjuk

3. ha $a_{22}^{(2)} = 0$, de van olyan $i > 2$, hogy $a_{i2}^{(2)} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ sorcsere

Ha $P_2$ a 2. és $i$-edik sort cseréli:

$$A^{(2)} = P_2 A_2$$

$$A = P_1 L_1 P_2 A_2$$

$$
L_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{i1} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \ell_{i1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{i1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{21} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =: P_2 \widetilde{L}_1
$$

$$A = P_1 P_2 \widetilde{L}_1 A_2$$

$\to$ folytatható a felbontás.

Az $(n-1)$-edik lépés után:

$$A = \underbrace{P_1 P_2 \cdots P_{n-1}}_{P:=} LU$$

azaz

$$A = PLU$$

ahol
$P$: permutációs mátrix
$L$: alsóháromszög mátrix, átlójában 1-esek
$U$: felsőháromszög mátrix

Az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldása:

$$A = PLU$$

$$LUx = P^{-1}b$$

- 1. $Ly = P^{-1}b$ megoldása
- 2. $Ux = y$ megoldása

### Megjegyzés

$P^{-1} = P^T$, továbbá a gyakorlatban nem a $P$ hanem a $P^T$ mátrixot határozzuk meg, és egyetlen oszlopvektorba tömörítve tároljuk.

# Példa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. lépés (sorcsere+a felbontás 1. lépése)

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 14 & -28 & -7 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. lépés (sorcsere nem kell, a felbontás 2. lépése)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 4 \\ 4 & 14 & 0 & -63 \\ -1 & -3 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

1. lépés (sorcsere+a felbontás 1. lépése)

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 14 & -28 & -7 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. lépés (sorcsere nem kell, a felbontás 2. lépése)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 4 \\ 4 & 14 & 0 & -63 \\ -1 & -3 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

3. lépés (sorcsere és kész a felbontás)

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -3 & \boxed{-5} & 15 \\ 4 & 14 & 0 & -63 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}b = \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. $Ly = P^{-1}b \quad \rightarrow \quad y_1 = -11,\ y_2 = -6,\ y_3 = -30,\ y_4 = 126$
2. $Ux = y \quad \rightarrow \quad x_4 = -2,\ x_3 = 0,\ x_2 = 2,\ x_1 = -1$

# Lineáris algebra Octave/Matlab-bal

## Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

**Megoldás.** Használjuk a `backslash` operátort!

```
>>A=[-2 -1 4; 2 3 -1; -4 -10 -5];
>>b=[3; 1; -12];
>>x=A\b
x=
    3
   -1
    2
```

**Ügyeljünk rá, hogy a b oszlopvektorként legyen megadva!**

Ha az egyenletrendszer kibővített mátrixával meghívjuk az `rref` függvényt:

```
>>rref([A b])
ans=
   1 0 0  3
   0 1 0 -1
   0 0 1  2
```

akkor láthatjuk, hogy a Gauss-Jordan elimináció eredményeként valóban így állítható elő a $b$ vektor az $A$ oszlopvektoraiból, amelyek lineárisan függetlenek, tehát a megoldás egyértelmű.

## Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 2 & 12 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$$

**Megoldás.** Próbálkozzunk ismét a `backslash` operátorral!

```
>>A=[-4 -4 2; -2 -7 3; 2 12 -5];
>>b=[-2; 6; -13];
>>x=A\b
Warning: Matrix is singular to working precision
x=
   NaN
   NaN
   NaN
```

A Matlab arra figyelmeztetett, hogy a mátrix szinguláris (valóban, $\det(A) = 0$).

Próbálkozzunk az `rref` függvénnyel!

```
>>rref([A b])
ans=
   1.0000        0 -0.1000  1.9000
        0 1.0000 -0.4000 -1.4000
        0        0        0        0
```

Azt látjuk, hogy a mátrix oszlopvektorai lineárisan függőek, de a $b$ vektor benne van az oszlopvektorok által felfeszített térben. Tudjuk, hogy ilyenkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ezek közül egy:

$$x = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -1.4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha az egyenletrenszer összes megoldását szeretnénk tudni, akkor használjuk a `null` függvényt, amely előállítja a nulltér egy bázisát:

```
>>p=null(A,'r')
p=
   1/10
   2/5
     1
```

(az 'r' opció hatására a vektor racionális alakban jelenik meg)
Ezek szerint a lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$\begin{pmatrix} 1.9 \\ -1.4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/10 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

**Megoldás.** A `backslash` operátorral azt kapjuk, hogy

```
>>x=A\b
x=
  1.0000
  2.7000
```

Könnyen látható, hogy ez **nem megoldása** az egyenletrendszernek.

Az `rref` függvénnyel:

```
>>rref([A b])
ans=
   1 0 0
   0 1 0
   0 0 1
   0 0 0
```

láthatjuk, hogy az alapmátrix rangja 2, a kibővített mátrixé 3, az egyenletrendszer **ellentmondásos**.

**Ellentmondásos lineáris egyenletrendszerek esetén a backslash operátor egy olyan $x$ vektort ad vissza, melyre az $Ax$ és $b$ vektorok eltérése euklideszi normában a legkisebb (azaz $\|Ax - b\|_2$ minimális)**. Ilyenkor azt mondjuk, hogy x az egyenletrendszer legkisebb négyzetes értelemben vett megoldása.

## 5. feladat

Oldja meg Octave/Matlab-bal az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 24 \\ -23 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & -13 & 22 \\ 5 & -1 & 16 & -14 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 81 \\ -33 \\ 15 \end{pmatrix}$$

**Hasznos: ha az $x$ racionális elemű vektor koordinátáit nem tizedestört alakban akarjuk látni, akkor használhatjuk a `rats(x)` utasítást, vagy a kiiratás formátumát állítsuk át: `format rat`**

## 6. feladat

Olvassa el a `rank` függvény help-jét!

Írjon egy Matlab függvényt, mely adott $A$ mátrix és $b$ vektor esetén megadja, hogy az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható, ellentmondásos, vagy végtelen sok megoldása van.

Egészítse ki a kódot úgy, hogy ha az $A$ mátrix és a $b$ vektor mérete nem kompatibilis, akkor erre figyelmeztesse a felhasználót!

## 7. feladat

Matlab-ban egy konkrét $A$ mátrix és $b$ oszlopvektor megadása után kiadtuk az

```
>> x=A\b;
```

parancsot, amely után az `x` változó értéke a következő lett:

```
x=
     -1
      0
      1
      2
```

Mit mondhatunk az alábbi állításokról (külön-külön)? (Igaz/Hamis/Nem eldönthető). Válaszait indokolja.

(a) A $b$ vektornak 4 eleme van.

(b) Az $A$ mátrixnak 4 sora van.

(c) Az $A$ mátrixnak 4 oszlopa van.

(d) $Ax = b$

(e) $x = A^{-1}b$

(f) $cond_\infty(A) < 1$

# Több jobboldali vektor

## Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ és $Ax = c$ egyenletrendszereket, ha

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ -42 \end{pmatrix}$$

**Megoldás.** Mivel a két rendszer mátrixa azonos, ezért megoldhatjuk őket egyszerre.

```
>>A=[-2 -1 4; 2 3 -1; -4 -10 -5];
>>b=[3; 1; -12]; c=[17; 1; -42];
>>x=A\[b c]
x=
    3  -2
   -1   3
    2   4
```

# Több jobboldali vektor

Nagyméretű mátrixok esetén a futási időt jelentősen befolyásolhatja, hogy az azonos mátrixszal adott rendszereket egyszerre, vagy külön-külön oldjuk meg:

```
>> A=rand(10000);
>> b=ones(10000,1);
>> c=zeros(10000,1);
>> tic;x=A\[b,c];toc
Elapsed time is 6.116513 seconds.
>> tic;x=A\b; x2=A\c; toc
Elapsed time is 11.571959 seconds.
```

(A fenti eredmény egy Intel Core i5-4590 processzorral, 7.7 GiB memóriával rendelkező gépen született).

# LU-felbontás

`[L,U,P]=lu(A)`

Ekkor

- L: alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es
- U: felsőháromszög mátrix
- P: permutációs mátrix

úgy, hogy $PA = LU$.

`[L1,U1]=lu(A)`

Ekkor $A = L1 \cdot U1$ úgy, hogy $U1$ megegyezik az előző $U$ mátrixszal és $L1 = P^T L$.

# Több jobboldali vektor

Ha több lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, ahol a mátrix azonos, a jobboldali vektorok különbözőek, de a jobboldali vektorok nem állnak egyszerre rendelkezésre, akkor a következő utasításokat használjuk:

Egyetlen egyszer, a rendszerek megoldása előtt készítsük el a mátrix LU-felbontását:

```
>> [L,U]=lu(A);
```

Ahányszor egy újabb *b* jobboldali vektor rendelkezésünkre áll, adjuk ki az

```
>> x=U\(L\b);
```

utasítást, amivel megkapjuk az adott jobboldali vektor esetén a rendszer megoldását.

# Cholesky-felbontás

- `chol(A)`
  elkészítí az $A$ mátrix Cholesky-felbontását, a felbontásban szereplő felsőháromszög mátrixszal tér vissza.
- `chol(A,'lower')`
  elkészítí az $A$ mátrix Cholesky-felbontását, a felbontásban szereplő alsóháromszög mátrixszal tér vissza.

Ha az $A$ nem pozitív definit, akkor nem létezik a felbontás, hibaüzenetet kapunk.
A felbontás létezéséhez a mátrixnak szimmetrikusnak kell lennie, ezt nem vizsgálja, de első esetben csak az $A$ felső-, a másodikban az alsóháromszög részét használja.

## 8. feladat

Tekintse az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ennek megoldásához először alkalmazza a

```
c=A(2,2)-A(1,2)*A(2,1)/A(1,1);
d=b(2)-b(1)*A(2,1)/A(1,1);
x(2)=d/c
x(1)=(b(1)-A(1,2)*x(2))/A(1,1)
```

utasításokat (amik a sorcsere nélküli Gauss-eliminációnak felelnek meg a $2 \times 2$-es $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer esetén), majd ezek után a $x = A\backslash b$ utasítást. Magyarázza meg a tapasztalt jelenséget!

## 9. feladat

Legyen `A=pascal(10)` (azaz $A$ a $10 \times 10$-es Pascal mátrix, ami egy szimmetrikus, pozitív definit mátrix), `x=ones(10,1)` és definiálja a $b$ vektort úgy, hogy `b=A*x`. Oldja meg az $Ax = b$ rendszert az `lu`, `chol` és $A\backslash b$ utasításokat alkalmazva (használjon ,,format long"-ot)!

# Mátrix inverze Octave/Matlab-bal

Az `inv` függvénnyel számítható. Ha a mátrix nem négyzetes, vagy a determinánsa 0 (vagy 0-hoz közeli), akkor hibaüzenetet, illetve figyelmeztetést kapunk.

**Nagyméretű mátrixok inverzének kiszámítása túl költséges lehet. Csak akkor számoljuk ki, ha ténylegesen szükségünk van az inverzre.**

Pl. az $Ax = b$ négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszer megoldása $x = A^{-1}b$ módon kb háromszor annyi műveletbe kerül, mint az $x = A\backslash b$ megoldás.

# Ritka mátrixok

A `sparse` függvény

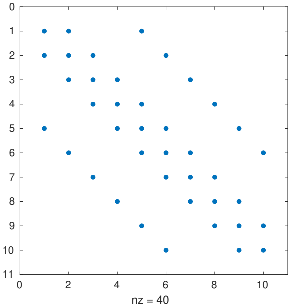
```
>> A=[-1.1 0 0 2; 0 0 2 0; 0 -1 0 1;0 0 0 3]
A =
   -1.1000         0         0    2.0000
         0         0    2.0000         0
         0   -1.0000         0    1.0000
         0         0         0    3.0000

>> S=sparse(A)
S =
   (1,1)      -1.1000
   (3,2)      -1.0000
   (2,3)       2.0000
   (1,4)       2.0000
   (3,4)       1.0000
   (4,4)       3.0000
```

Definiáljunk egy olyan $10 \times 10$-es ritka mátrixot, melyben csak 5 átlóban vannak 0-tól különböző elemek:

```
>> d=ones(10,1);
>> S=spdiags([d d -4*d d d],[-4 -1 0 1 4],10,10);
```

Megnézhetjük a nemnulla elemek elhelyezkedését:

```
>> spy(S)
```




A nemnulla elemek száma: `nnz(S)`

Hasonlítsuk össze egy nagyméretű ritka mátrix esetén a tárigényt a különböző tárolási módok esetén:

```
>> d=ones(10000,1);
>> S=spdiags([d d -4*d d d],[-4000 -1 0 1 4000],10000,10000);
>> F=full(S);
>> whos S F
```

Vizsgáljuk meg egy mátrix-vektor szorzás futási idejét:

```
>> x=rand(10000,1);
>> tic;b=S*x;toc
>> tic;b=F*x;toc
```

és egy lineáris egyenletrendszer megoldásának futási idejét

```
>> tic;y=F\b;toc
>> tic;y=S\b;toc
```