Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Interpoláció

Lagrange-interpoláció

A feladat:

Adottak az
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző pontokban az
$f_0, f_1, \ldots, f_n$ megfigyelések.

Olyan minimális fokszámú $\varphi(x)$ polinomot keresünk melyre

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

Állítás

Egyértelműen létezik olyan legfeljebb n-edfokú polinom, amely teljesíti a

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

illeszkedési feltételeket.

(**$n+1$ alappont $\Longrightarrow$ n-edfokú polinom**)

Biz.: (A polinom konstrukciója)
Legyen

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

azaz

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i=0,\ldots,n$$

Ekkor $\ell_i(x)$ egy n-edfokú polinom és

$$\ell_i(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq i, \\ 1, & \text{ha } k = i \end{cases}$$

Legyen

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x)$$

Ekkor $\varphi(x)$ legfeljebb n-edfokú, és

$$\varphi(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x_k) = f_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

azaz $\varphi(x)$ eleget tesz a követelményeknek.

Egyértelműség

Tfh $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ legfeljebb n-edfokú polinomok, melyek teljesítik az illeszkedési feltételeket:

$$\varphi(x_i) = f_i \quad \text{és } \psi(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Legyen $\Phi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$

Ekkor Φ legfeljebb n-edfokú, és minden alappontban eltűnik
$\rightarrow$ a $\Phi(x)$ polinomnak legalább $n+1$ különböző gyöke van
$\rightarrow \quad \Phi(x) \equiv 0$

A Lagrange-polinom rekurzív előállítása (Newton-alak)

Jelölje $L_k(x)$ az (x_0, f_0), (x_1, f_1),..., (x_k, f_k) adatokra illeszkedő Lagrange-polinomot.

- ha csak 1 adat ismert, (x_0, f_0):

  $L_0(x) \equiv f_0$

- ha 2 adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1):

  $L_1(x) = L_0(x) + b_1(x - x_0)$

  Ekkor $L_1(x_0) = L_0(x_0) = f_0$. Ezután b_1-et úgy határozzuk meg, hogy $L_1(x_1) = f_1$ teljesüljön:

$$L_1(x_1) = f_0 + b_1(x_1 - x_0) = f_1$$

$$b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

- ha 3 adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2):

  $L_2(x) = L_1(x) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

  Ekkor
  $L_2(x_0) = L_1(x_0) = f_0$ és
  $L_2(x_1) = L_1(x_1) = f_1$.

  b_2-t úgy határozzuk meg, hogy $L_2(x_2) = f_2$ teljesüljön:

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)$$

- Ha $k+1$ adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1),..., (x_k, f_k):

  $L_k(x) = L_{k-1}(x) + b_k\omega_k(x)$,

  ahol $\omega_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})$.

  Ekkor
  $L_k(x_0) = L_{k-1}(x_0) = f_0$,
  $L_k(x_1) = L_{k-1}(x_1) = f_1$,
  $\vdots$
  $L_k(x_{k-1}) = L_{k-1}(x_{k-1}) = f_{k-1}$.

  b_k-t úgy határozzuk meg, hogy $L_k(x_k) = f_k$ teljesüljön:

  $$b_k = (f_k - L_{k-1}(x_k))/\omega_k(x_k)$$

  Hogyan lehet egyszerűen előállítani a b_k együtthatókat?

Osztott differenciák

Tfh adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző alappontok és az $f_0, f_1, \ldots, f_n$ értékek.
Az x_i, x_{i+1} pontokra támaszkodó elsőrendű osztott differencia:

$$[x_i, x_{i+1}]f := \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Az $x_i, \ldots, x_{i+k}$ pontokra támaszkodó k-adrendű osztott differencia:

$$[x_i, \ldots, x_{i+k}]f = \frac{[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f - [x_i, \ldots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i}$$

Legyen $[x_i]f = f_i$.

Állítás: A Lagrange-polinom Newton-alakjában

$$b_k = [x_0, \ldots, x_k]f$$

Számítási séma

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & [x_0]f \searrow & & & & & \\
 & & [x_0, x_1]f \searrow & & & & \\
x_1 & [x_1]f \nearrow & & [x_0, x_1, x_2]f \searrow & & & \\
 & \searrow & [x_1, x_2]f \nearrow & & \dots & & \\
\vdots & & \vdots & & & \searrow & \\
\vdots & & \vdots & & & & [x_0, \dots, x_n]f \\
\vdots & & \vdots & & \dots \nearrow & & \\
x_{n-1} & [x_{n-1}]f \searrow & & & & & \\
 & & [x_{n-1}, x_n]f \nearrow & & & & \\
x_n & [x_n]f \nearrow & & & & &
\end{array}
$$

A Lagrange-polinom Newton-alakja

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
x_0 & [x_0]f & \searrow & & & & & & & \\
 & & & [x_0,x_1]f & \searrow & & & & & \\
x_1 & [x_1]f & \nearrow & & & [x_0,x_1,x_2]f & \searrow & & & \\
 & & \searrow & [x_1,x_2]f & \nearrow & & & \dots & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \searrow & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & [x_0,\dots,x_n]f \\
\vdots & & \vdots & & & & & \dots & \nearrow & \\
x_{n-1} & [x_{n-1}]f & \searrow & & & & & & & \\
 & & & [x_{n-1},x_n]f & \nearrow & & & & & \\
x_n & [x_n]f & \nearrow & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
L_n(x) = {} & [x_0]f + [x_0,x_1]f \cdot (x-x_0) + [x_0,x_1,x_2]f \cdot (x-x_0)(x-x_1) \\
& + \dots + [x_0,\dots,x_n]f \cdot (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-31),(-1,-7),(0,-1),(2,5)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -31 & & & \\
 & & 24 & & \\
-1 & -7 & & -9 & \\
 & & 6 & & 2 \\
0 & -1 & & -1 & \\
 & & 3 & & \\
2 & 5 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -31 + 24(x+2) - 9(x+2)(x+1) + 2(x+2)(x+1)x$$

Megjegyzés

A Lagrange-polinom nem függ az adatok sorrendjétől, így választhattuk volna a táblázat alsó "élét" is:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -31 & & & \\
 & & 24 & & \\
-1 & -7 & & -9 & \\
 & & 6 & & 2 \\
0 & -1 & & -1 & \\
 & & 3 & & \\
2 & 5 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = 5 + 3(x-2) - 1 \cdot (x-2)x + 2(x-2)x(x+1)$$

Mindkét esetben

$$L_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(1,-5),(2,-9)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -4 & \\
 & & -4 & & 1 \\
1 & -5 & & 0 & \\
 & & -4 & & \\
2 & -9 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -5 + 8(x+2) - 4(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)(x-1)$$

Példa

Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző adatokon kívül a $(0, 9)$ pontra is illeszkedik!

Használjuk fel az előző feladat eredményét!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -4 & \\
 & & -4 & & 1 \\
1 & -5 & & 0 & \\
 & & -4 & & \\
2 & -9 & & &
\end{array}
$$

Egészítsük ki a táblázatot az új adattal és számítsuk ki a hiányzó értékeket!

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & -5 & & & & \\
 & & 8 & & & \\
-1 & 3 & & -4 & & \\
 & & -4 & & 1 & \\
1 & -5 & & 0 & & 2 \\
 & & -4 & & 5 & \\
2 & -9 & & 5 & & \\
 & & -9 & & & \\
0 & 9 & & & &
\end{array}
$$

$$L_4(x) = L_3(x) + 2(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

1. feladat

Írja fel az alábbi pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a) $(-3,-6)$, $(-2,-17)$, $(-1,-8)$, $(1,-2)$, $(2,19)$,

(b) $(-3,-31)$, $(-2,-8)$, $(1,1)$, $(2,24)$,

(c) $(-2,-13)$, $(-1,-4)$, $(1,2)$,

(d) $(-2,-5)$, $(-1,3)$, $(0,1)$, $(2,15)$,

(e) $(-1,4)$, $(1,2)$, $(2,10)$, $(3,40)$,

(f) $(-2,38)$, $(-1,5)$, $(1,-1)$, $(2,-10)$, $(3,-7)$,

(g) $(-2,-33)$, $(-1,-2)$, $(1,6)$, $(2,7)$, $(3,-18)$,

(h) $(-3,-209)$, $(-2,-43)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(2,-19)$.

Horner-algoritmus

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ahol $a_n \neq 0$. Legyen $x^\star \in \mathbb{R}$ adott, $p(x^\star) = ?$

$$p(x^\star) = (((\cdots(a_n x^\star + a_{n-1})x^\star + \cdots)x^\star + a_2)x^\star + a_1)x^\star + a_0$$

Az algoritmus:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_n \\
c_1 &= c_0 x^\star + a_{n-1} \\
c_2 &= c_1 x^\star + a_{n-2} \\
&\vdots \\
c_n &= c_{n-1} x^\star + a_0 = p(x^\star)
\end{aligned}$$

Táblázatban:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x^\star$	c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n

$p(x^\star) = c_n$

Példa

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 5x - 1, \qquad p(-2) = ?$$

	2	3	0	-3	5	-1
-2	2	-1	2	-7	19	-39

$p(-2) = -39$

Általánosított Horner-algoritmus

$$L_n(x) = b_0 + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \\ + \cdots + b_n \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})$$

ahol $b_k = [x_0, \ldots, x_k]f$. $L_n(x^\star) = ?$

$$\begin{aligned} c_0 &= b_n \\ c_1 &= c_0(x^\star - x_{n-1}) + b_{n-1} \\ c_2 &= c_1(x^\star - x_{n-2}) + b_{n-2} \\ &\vdots \\ c_n &= c_{n-1}(x^\star - x_0) + b_0 = L_n(x^\star) \end{aligned}$$

Megjegyzés

Ha nincs szükségünk a Lagrange-polinom együtthatóira, csak bizonyos helyeken a polinom értékeire, akkor nem érdemes a Newton-alakban kibontani a zárójeleket.

Lagrange-interpoláció Octave/Matlab-bal

A `polyfit` függvény

`polyfit(x,f,n-1)` Ha x és f n-elemű vektorok, akkor megadja annak a legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomnak az együtthatóit, amely illeszkedik az (x_i, f_i), $i = 1, \ldots, n$ adatokra.

Példa

Határozzuk meg a $(-2, -5), (-1, 3), (0, 1), (2, 15)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

Megoldás.

```
>>x=[-2, -1, 0, 2];
>>f=[-5, 3, 1, 15];
>>p=polyfit(x,f,3)
p=
   2.0000 1.0000 -3.0000 1.0000
```

Ábrázoljuk a pontokat és az illesztett függvényt!

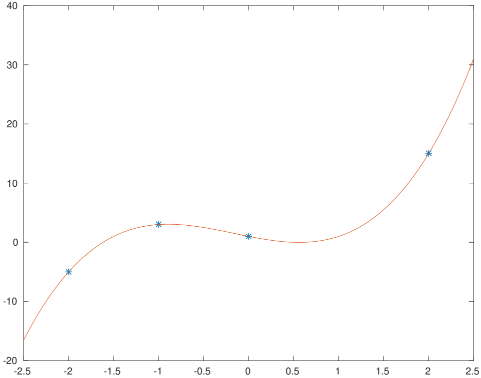
```
x=[-2, -1, 0, 2];
f=[-5, 3, 1, 15];
p=polyfit(x,f,3);
xx=linspace(-2.5,2.5);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```

A `polyval` függvény:

`yy=polyval(p,xx);`

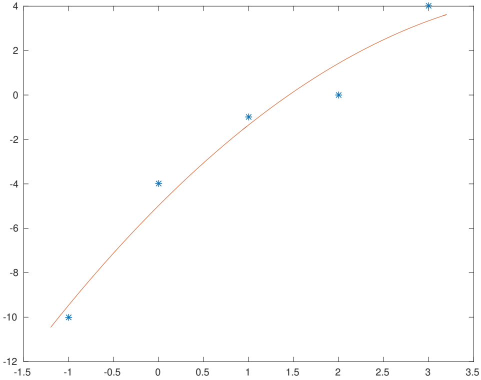
a `p` együtthatójú polinom értékeit adja az `xx` vektor koordinátáiban. (p-ben a polinom együtthatói a főegyütthatóval kezdve szerepelnek)

```
x=[-2, -1, 0, 2];
f=[-5, 3, 1, 15];
p=polyfit(x,f,3);
xx=linspace(-2.5,2.5);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```



Fontos! Ha a `polyfit` függvényben nem megfelelően írjuk elő a polinom fokszámát, akkor a polinom nem feltétlenül illeszkedik az adatokra.

```
x=[-1 0 1 2 3]; f=[-10 -4 -1 0 4]; p=polyfit(x,f,2);
xx=linspace(-1.2,3.2); ff=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,ff)
```



2. feladat (labor)

Közelítse az

$$f(x) = e^x - \sin(\pi x)$$

függvényt a $[0, 1]$ intervallumon egy másodfokú polinommal. Ábrázolja az eredeti és az illesztett függvényt közös ábrán.

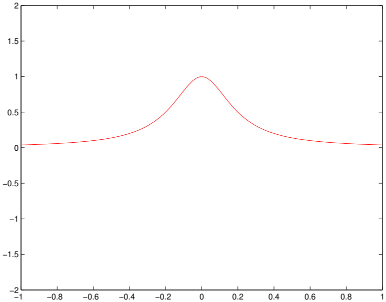
3. feladat (labor)

Tudjuk, hogy egy test méterben számolva s_0 utat tett meg, egyenletes v_0 (m/s) sebességgel, majd ezután egyenletesen gyorsítani kezdett a (m/s^2) gyorsulással. A gyorsulás kezdetétől számítva a 2., 4. és 5. másodperc végén az összes megtett út rendre 16, 38 és 52 m. Határozza meg s_0, v_0 és a értékét.

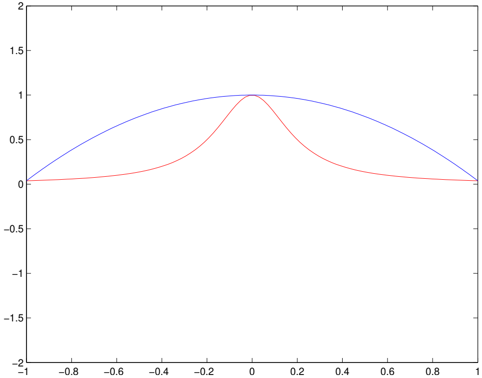
Megjegyzés

Ha egy függvényt szeretnénk közelíteni úgy, hogy elkészítjük adott alappontok esetén az illeszkedő Lagrange-polinomot, akkor az alappontok számának növelésével a hiba nem feltétlenül csökken, sőt akár tetszőlegesen naggyá válhat.

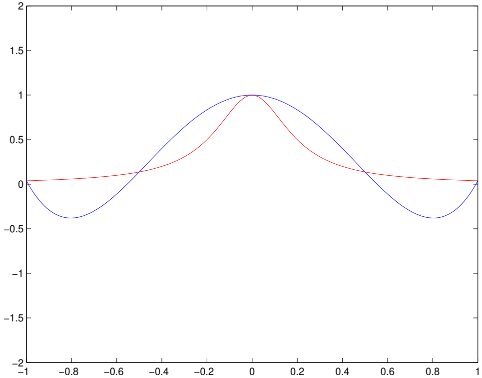
Példa: Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ függvény $[-1, 1]$ fölött



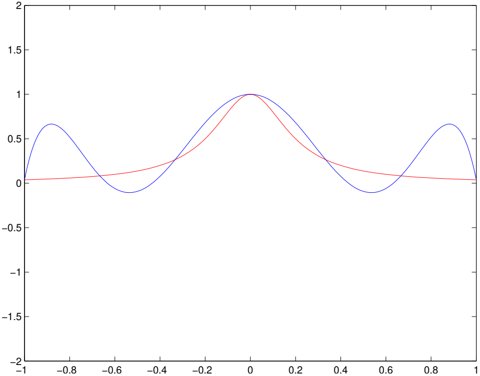
Lagrange-interpoláció, $n = 2$



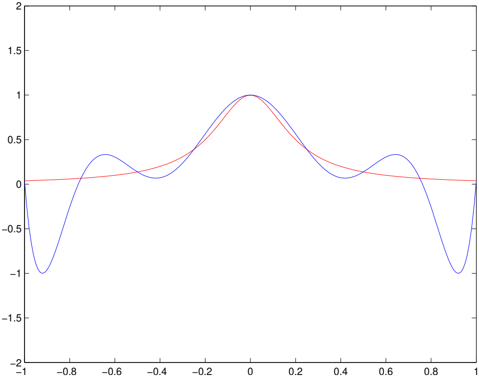
Lagrange-interpoláció, $n = 4$



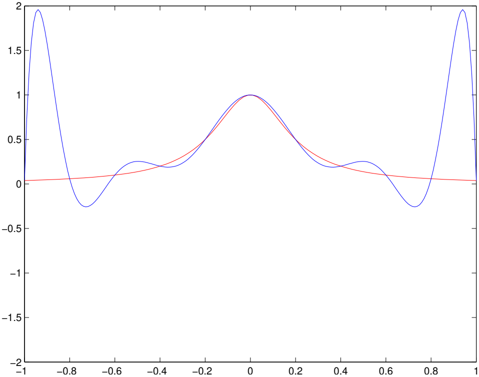
Lagrange-interpoláció, $n = 6$



Lagrange interpoláció, $n = 8$



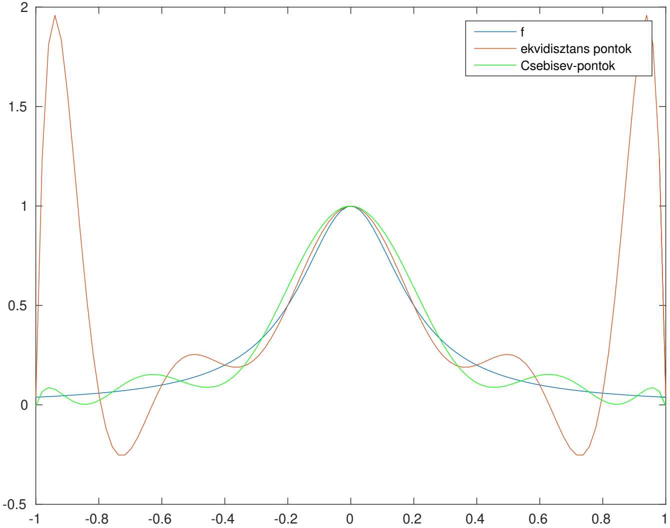
Lagrange-interpoláció, $n = 10$



4. feladat (labor)

Rajzoltassuk ki közös ábrára az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{22}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, 11$$
alappontokhoz (Csebisev-pontok) tartozó Lagrange-polinomját.



f
ekvidisztans pontok
Csebisev-pontok
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Megjegyzés

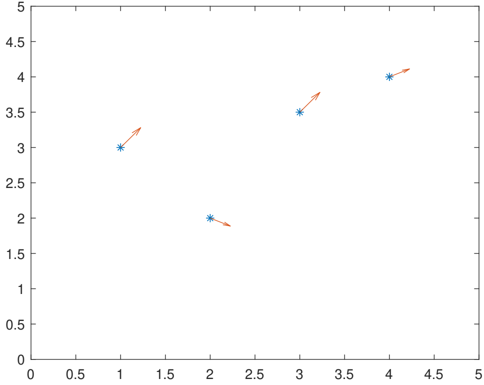
Ha az $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvényre n helyen illeszkedő Lagrange-polinomot szeretnénk elkészíteni, akkor az

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

alappontok (Csebisev-pontok) esetén lesz minimális a polinom és a függvény legnagyobb eltérése.
Ha f nem a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett, akkor megfelelő lineáris transzformációval leképezzük a pontokat a megadott intervallumra.

Hermite-interpoláció

Előfordulhat, hogy az alappontokban nem csak a függvény értéke van előírva, hanem az is, hogy a polinom a megadott pontokon ,,milyen irányban" haladjon át, azaz az alappontokban az első derivált értéke is, vagy esetleg további deriváltértékek is.



Hermite-interpoláció

A feladat:

Adottak

$$\begin{array}{llllll} \text{az} & x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \quad \text{alappontok } (x_i \neq x_j, \text{ ha } i \neq j) \\ \text{és az} & f_{00} & f_{10} & f_{20} & \dots & f_{n0} \\ & f_{01} & f_{11} & f_{21} & \dots & f_{n1} \\ & f_{02} & f_{12} & f_{22} & \dots & f_{n2} \\ & \vdots & & & & \\ & f_{0,m_0-1} & f_{1,m_1-1} & f_{2,m_2-1} & \dots & f_{n,m_n-1} \quad \text{értékek} \end{array}$$

Olyan $H(x)$ polinomot keresünk, melyre

$$H^{(j)}(x_i) = f_{ij}, \qquad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m_i - 1.$$

Legyen $m = \sum_{i=0}^{n} m_i$, az illeszkedési feltételek száma

Állítás: Az Hermite-interpoláció feladata egyértelműen megoldható a legfeljebb $(m-1)$-edfokú polinomok körében.

Hermite-interpoláció

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	1	6	-2
$f'(x_i)$	74	-12	-4
$f''(x_i)$		16	

Az illeszkedési feltételek száma: $m = 7$, így az Hermite-polinom legfeljebb 6-odfokú lesz.

Az adatok:

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	1	6	-2
$f'(x_i)$	74	-12	-4
$f''(x_i)$		16	

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & \\
 & & & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & & \\
1 & -2 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & &
\end{array}
$$

Számítsuk ki a hiányzó értékeket!

-2	1		
		74	
-2	1		
-1	6		
		-12	
-1	6		8
		-12	
-1	6		
1	-2		
		-4	
1	-2		

A hiányzó elsőrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & \\
 & & 5 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & &
\end{array}
$$

A hiányzó másodrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & -69 \\
 & & 5 & \\
-1 & 6 & & -17 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 4 \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & & 0 \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & &
\end{array}
$$

A harmadrendű osztott differenciák:

-2	1			
		74		
-2	1		-69	
		5		52
-1	6		-17	
		-12		25
-1	6		8	
		-12		-2
-1	6		4	
		-4		-2
1	-2		0	
		-4		
1	-2			

A negyedrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & 1 & & & & \\
 & & 74 & & & \\
-2 & 1 & & -69 & & \\
 & & 5 & & 52 & \\
-1 & 6 & & -17 & & -27 \\
 & & -12 & & 25 & \\
-1 & 6 & & 8 & & -9 \\
 & & -12 & & -2 & \\
-1 & 6 & & 4 & & 0 \\
 & & -4 & & -2 & \\
1 & -2 & & 0 & & \\
 & & -4 & & & \\
1 & -2 & & & &
\end{array}
$$

Az ötödrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
-2 & 1 & & & & & \\
 & & 74 & & & & \\
-2 & 1 & & -69 & & & \\
 & & 5 & & 52 & & \\
-1 & 6 & & -17 & & -27 & \\
 & & -12 & & 25 & & 6 \\
-1 & 6 & & 8 & & -9 & \\
 & & -12 & & -2 & & 3 \\
-1 & 6 & & 4 & & 0 & \\
 & & -4 & & -2 & & \\
1 & -2 & & 0 & & & \\
 & & -4 & & & & \\
1 & -2 & & & & &
\end{array}
$$

A hatodrendű osztott differencia:

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
-2 & 1 & & & & & & \\
 & & 74 & & & & & \\
-2 & 1 & & -69 & & & & \\
 & & 5 & & 52 & & & \\
-1 & 6 & & -17 & & -27 & & \\
 & & -12 & & 25 & & 6 & \\
-1 & 6 & & 8 & & -9 & & -1 \\
 & & -12 & & -2 & & 3 & \\
-1 & 6 & & 4 & & 0 & & \\
 & & -4 & & -2 & & & \\
1 & -2 & & 0 & & & & \\
 & & -4 & & & & & \\
1 & -2 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
-2 & \mathbf{1} & & & & & & \\
 & & \mathbf{74} & & & & & \\
-2 & 1 & & \mathbf{-69} & & & & \\
 & & 5 & & \mathbf{52} & & & \\
-1 & 6 & & -17 & & \mathbf{-27} & & \\
 & & -12 & & 25 & & \mathbf{6} & \\
-1 & 6 & & 8 & & -9 & & \mathbf{-1} \\
 & & -12 & & -2 & & 3 & \\
-1 & 6 & & 4 & & 0 & & \\
 & & -4 & & -2 & & & \\
1 & -2 & & 0 & & & & \\
 & & -4 & & & & & \\
1 & -2 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
H(x) =\, & 1 + 74(x+2) - 69(x+2)^2 + 52(x+2)^2(x+1) \\
& -27(x+2)^2(x+1)^2 + 6(x+2)^2(x+1)^3 \\
& -1(x+2)^2(x+1)^3(x-1)
\end{aligned}
$$

5. feladat

Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a)

x_i	-1	1
$f(x_i)$	7	3
$f'(x_i)$	-8	-4

(b)

x_i	-1	1
$f(x_i)$	3	1
$f'(x_i)$	9	-7
$f''(x_i)$		-18

(c)

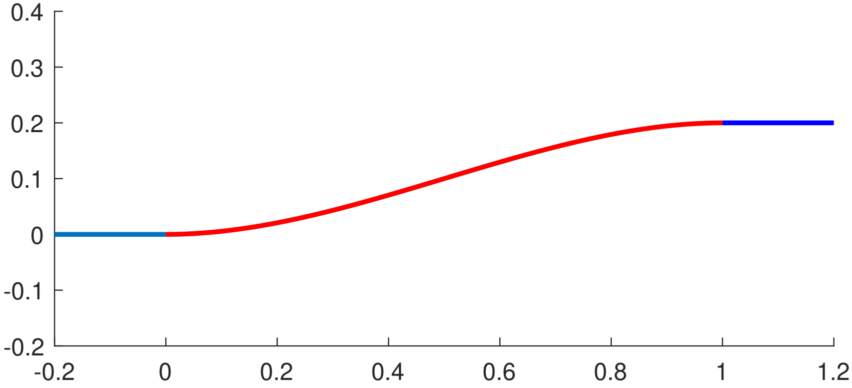
x_i	1	2
$f(x_i)$	6	94
$f'(x_i)$	17	213

(d)

x_i	-2	-1
$f(x_i)$	13	3
$f'(x_i)$		14

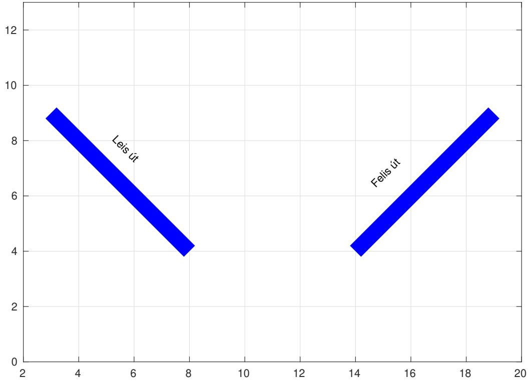
6. feladat (gyakorlat)

Egy garázs bejárata az úttól 1 méterre, az úttest szintje felett 20 cm-rel van. Tervezze meg az úttestet a bejárattal összekötő útszakaszt úgy, hogy a bejutás a garázsba minél simább legyen.



7. feladat (gyakorlat)

Az ábrán látható két útszakasz (Leis út, Felis út) egymáshoz közelebbi végei között szeretnénk utat építeni úgy, hogy az így kapott út menetében ne legyen törés. Adja meg a hiányzó útszakasz nyomvonalát leíró függvényt!



Alkalmazások

Példa

Legyen az f valós függvény differenciálható az x_0 pontban.
Hermite-interpoláció segítségével írjuk fel az f függvény x_0-beli értintőjének egyenletét!

Azt a $H(x)$ legfeljebb elsőfokú Hermite-polinomot keressük, melyre $H(x_0) = f(x_0)$ és $H'(x_0) = f'(x_0)$

$$\begin{array}{c|cc} x_0 & f(x_0) & \\ & & f'(x_0) \\ x_0 & f(x_0) & \end{array}$$

$$H(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Példa

Írjuk fel az x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ...,$f^{(n)}(x_0)$ adatokra illeszkedő Hermite-polinomot!

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & \frac{f''(x_0)}{2!} & & & \\
 & & f'(x_0) & & \frac{f'''(x_0)}{3!} & & \\
x_0 & f(x_0) & & \frac{f''(x_0)}{2!} & & \ddots & \\
 & & f'(x_0) & & & & \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \\
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & & & &
\end{array}
$$

Ekkor

$$H(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

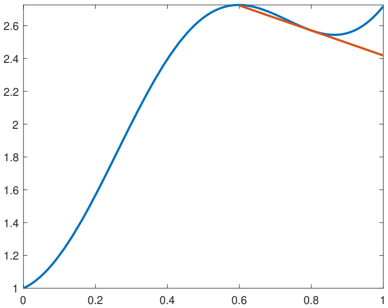
az f függvény x_0 körüli Taylor-polinomja.

Példa

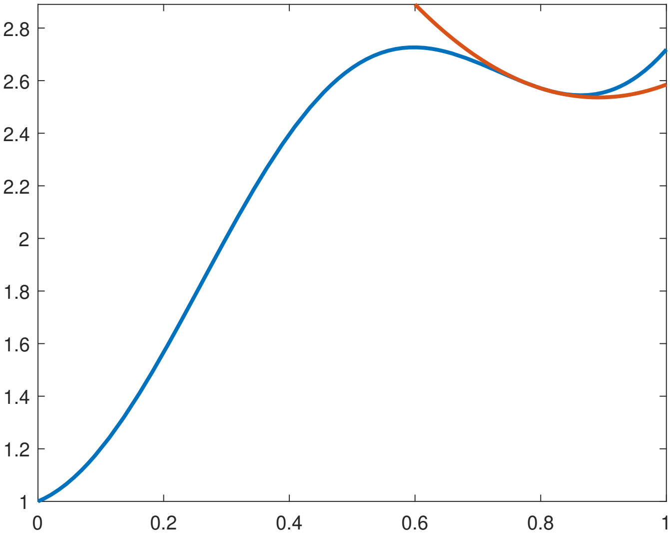
Az

$$f(x) = \sin^2(\pi x) + e^x$$

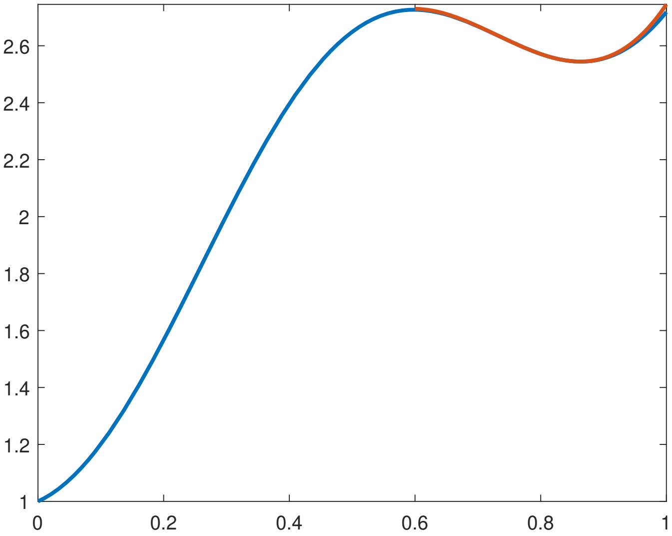
függvényt a $[0, 1]$ intervallumon és az f $x_0 = 0.8$ körüli n-edfokú Taylor-polinomja az x_0 egy kis környezetében.



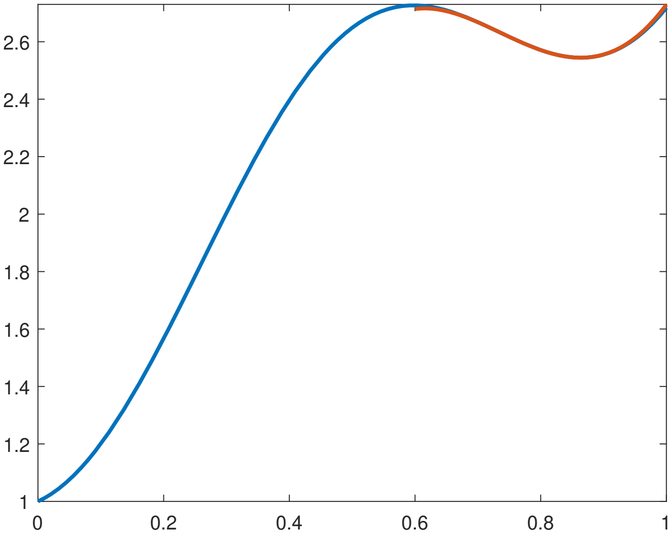
Az f függvény és az $x_0 = 0.8$ pont körüli elsőfokú Taylor-polinom.



Az f függvény és az $x_0 = 0.8$ pont körüli másodfokú Taylor-polinom.



Az f függvény és az $x_0 = 0.8$ pont körüli harmadfokú Taylor-polinom.



Az f függvény és az $x_0 = 0.8$ pont körüli negyedfokú Taylor-polinom.

Szakaszonkénti interpoláció

Az alappontok számának növelésével nő az illesztett polinom fokszáma, de a közelítés hibája nem feltétlenül csökken.

Egyetlen magas fokszámú polinom illesztése helyett részintervallumonként alacsonyabb fokszámú polinomok

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot m darab részintervallumra:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$$

Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon végezzük el a Lagrange-interpolációt!

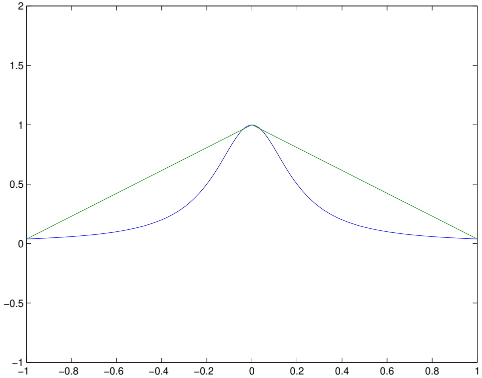
Ha az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon csak az $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ adatok ismertek, akkor **szakaszonkénti lineáris interpoláció** (töröttvonal interpoláció)

Ha $h := x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, m$, és f kétszer folyt. diff.ható $[a, b]$-n, akkor az $L_{m\times 1}(x)$ töröttvonalra:

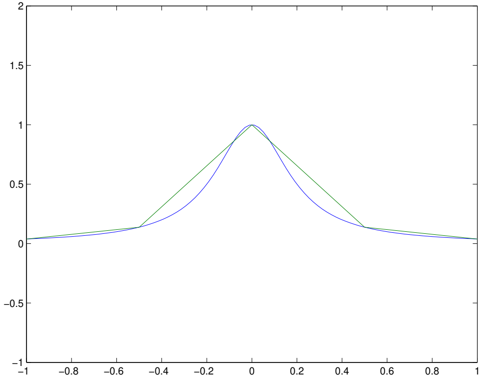
$$|f(x) - L_{m\times 1}(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2, \qquad x \in [a, b]$$

Ez tart 0-hoz, ha $h \to 0$

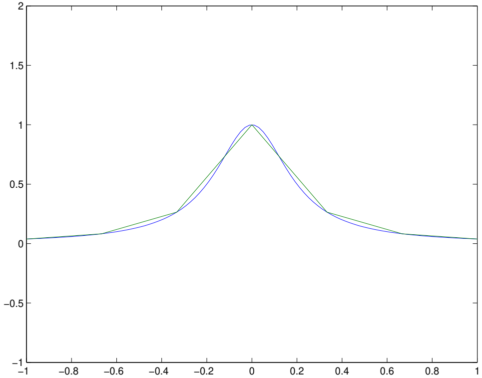
Szakaszonként lineáris interpoláció, 2 részintervallum



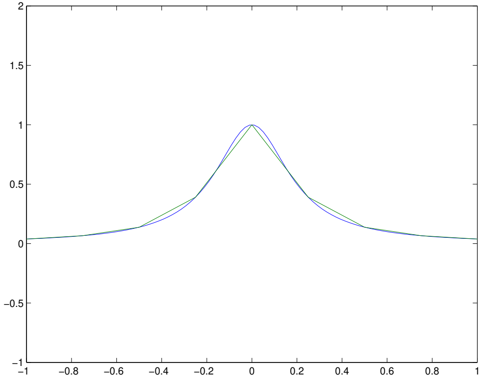
Szakaszonként lineáris interpoláció, 4 részintervallum



Szakaszonként lineáris interpoláció, 6 részintervallum



Szakaszonként lineáris interpoláció, 8 részintervallum



Szakaszonként harmadfokú Hermite-interpoláció

A töröttvonal interpolációval illesztett függvény folytonos, de az osztópontokban "törik", azaz nem differenciálható.

Sima (folytonosan differenciálható) függvény illesztése: az osztópontokban előírjuk az 1. derivált értékét is.

Ekkor az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon az

x_{i-1}	x_i
$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$
$f'(x_{i-1})$	$f'(x_i)$

adatok ismertek. 4 illeszkedési feltétel $\rightarrow$ legfeljebb harmadfokú polinom

Példa

Határozzuk meg azt a folytonosan differenciálható, szakaszonként harmadfokú

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha} \quad x \in [-1,1] \\ H_2(x), & \text{ha} \quad x \in (1,3] \end{cases}$$

polinomot, melyre $H(-1) = 4$, $H(1) = 6$, $H(3) = 12$, $H'(-1) = -3$, $H'(1) = 13$, $H'(3) = 9$ teljesül!

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

$$
\begin{array}{r|lllll}
-1 & 4 & & & \\
 & & -3 & & \\
-1 & 4 & & 2 & \\
 & & 1 & & 2 \\
1 & 6 & & 6 & \\
 & & 13 & & \\
1 & 6 & & &
\end{array}
$$

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

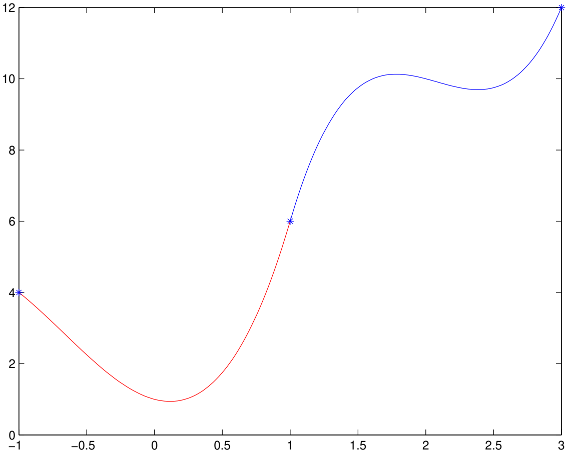
$$H_1(x) = 6 + 13(x-1) + 6(x-1)^2 + 2(x-1)^2(x+1)$$

$$
\begin{array}{r|lllll}
1 & 6 & & & \\
 & & 13 & & \\
1 & 6 & & -5 & \\
 & & 3 & & 4 \\
3 & 12 & & 3 & \\
 & & 9 & & \\
3 & 12 & & &
\end{array}
$$

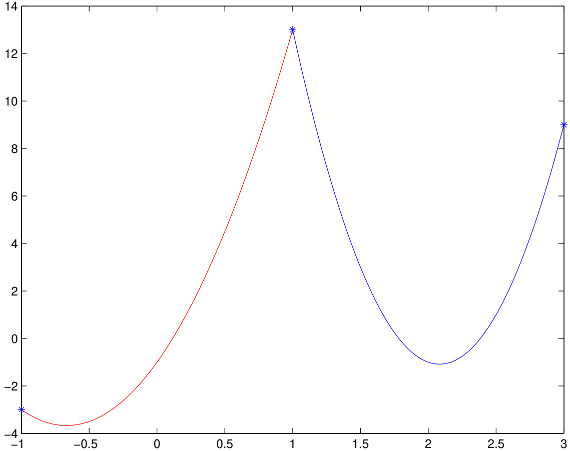
x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

$$H_2(x) = 6 + 13(x-1) - 5(x-1)^2 + 4(x-1)^2(x-3)$$

A H_1 és H_2 polinomok:



A H_1 és H_2 első deriváltja:



Harmadfokú spline-interpoláció

Ha a részintervallumok találkozásánál megköveteljük az 1. derivált folytonosságát, de nem írjuk elő a derivált értékét, akkor marad 1 szabad paraméterünk:

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	α	9

$$
\begin{array}{r|lllll}
-1 & 4 & & & \\
 & & -3 & & \\
-1 & 4 & & 2 & \\
 & & 1 & & \frac{\alpha-5}{4} \\
1 & 6 & & \frac{\alpha-1}{2} & \\
 & & \alpha & & \\
1 & 6 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|lllll}
1 & 6 & & & \\
 & & \alpha & & \\
1 & 6 & & \frac{3-\alpha}{2} & \\
 & & 3 & & \frac{3+\alpha}{4} \\
3 & 12 & & 3 & \\
 & & 9 & & \\
3 & 12 & & &
\end{array}
$$

$$H_1(x) = 6 + \alpha(x-1) + \frac{\alpha - 1}{2}(x-1)^2 + \frac{\alpha - 5}{4}(x-1)^2(x+1)$$
$$H_2(x) = 6 + \alpha(x-1) + \frac{3 - \alpha}{2}(x-1)^2 + \frac{3 + \alpha}{4}(x-1)^2(x-3)$$

A szabad paraméter lehetőséget ad még egy feltétel állítására: követeljük meg a 2. derivált folytonosságát is!

$$H_1''(1) = 2\alpha - 6$$
$$H_2''(1) = -2\alpha$$

Ekkor $H_1''(1) = H_2''(1)$-ből

$$2\alpha - 6 = -2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}$$

Harmadfokú spline-interpoláció alapötlete

Adottak

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
$f'(x_0)$					$f'(x_n)$

Olyan $S(x)$ függényt keresünk, melyre

- $S(x_i) = f(x_i)$
- $S'(x_0) = f'(x_0)$ és $S'(x_n) = f'(x_n)$
- $S|_{[x_{i-1},x_i]} = S_i$ harmadfokú polinom, $i = 1, \dots, n$
- S kétszer folytonosan differenciálható

1. Bevezetjük az $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ ismeretleneket:

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
$f'(x_0)$	α_1	α_2	$\ldots$	α_{n-1}	$f'(x_n)$

2. Felírjuk az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumok fölött az $S_i(x)$ harmadfokú Hermite-polinomokat.

3. Felírjuk az $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ egyenleteket $(i = 1, \ldots, n-1)$. Ezek az α_i ismeretlenekre egy lineáris egyenletrendszert adnak.

4. Megoldjuk az egyenletrendszert. (Az egyenletrendszer mátrixa tridiagonális.)

Spline interpoláció Octave/Matlab-bal

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline-t!

x_i	-2	-1	0	1	2	3
S	4	1	7	4	12	9
S'	15					8

Megoldás. Használjuk a `spline` függvényt!

```
p=spline(x,y)
```

Előállítja a szakaszonként harmadfokú spline együtthatóit. Itt `x` az alappontok vektora, az `y` vektor első és utolsó koordinátája a két végpontban adott deriváltérték, a többi koordináta a függvényértékek.

```
>>x=-2:3; y=[15 4 1 7 4 12 9 8]; p=spline(x,y)
p =
      form: 'pp'
    breaks: [-2 -1 0 1 2 3]
     coefs: [5x4 double]
    pieces: 5
     order: 4
       dim: 1
```

A spline együtthatói:

```
>> p.coefs

ans =
   19.0000  -37.0000   15.0000    4.0000
  -12.0000   20.0000   -2.0000    1.0000
   11.0000  -16.0000    2.0000    7.0000
  -12.0000   17.0000    3.0000    4.0000
   15.0000  -19.0000    1.0000   12.0000
```

Figyeljünk arra, hogy a polinomok együtthatóit a részintervallumok kezdőpontjaihoz viszonyítva kapjuk!

Az 5 illesztett polinom:

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= 19(x+2)^3 - 37(x+2)^2 + 15(x+2) + 4 \\
p_2(x) &= -12(x+1)^3 + 20(x+1)^2 - 2(x+1) + 1 \\
p_3(x) &= 11x^3 - 16x^2 + 2x + 7 \\
p_4(x) &= -12(x-1)^3 + 17(x-1)^2 + 3(x-1) + 4 \\
p_5(x) &= 15(x-2)^3 - 19(x-2)^2 + (x-2) + 12
\end{aligned}$$

Ellenőrizzük az illeszkedési feltételeket!

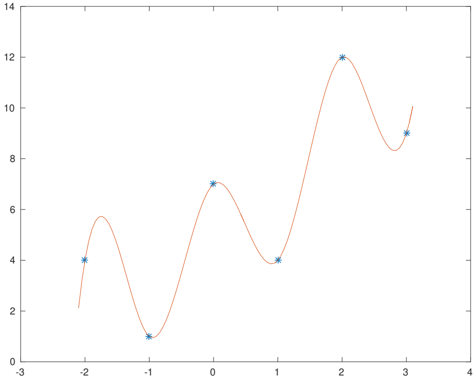
Ha nem az együtthatókat szeretnénk tudni, hanem a spline értékét valamely pont(ok)ban, akkor

```
yy=spline(x,y,xx)
```

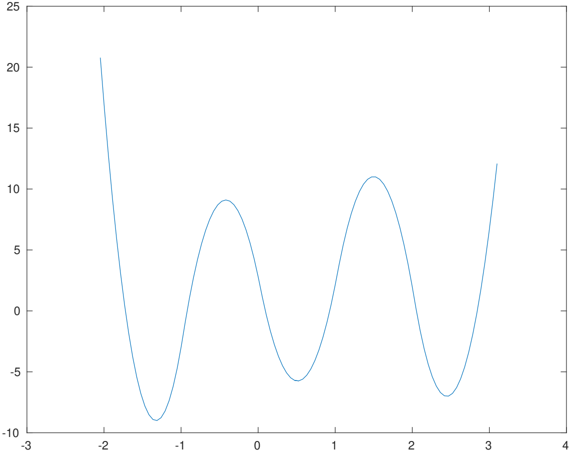
ahol `x` és `y` az előbbi vektorok, `xx` azon pontok vektora, ahol a helyettesítési értéket keressük. Ekkor `yy`-ba kerülnek a kiszámolt függvényértékek.

```
>> x=-2:3;
>> y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
>> xx=linspace(-2.1,3.1);
>> yy=spline(x,y,xx);
>> plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```

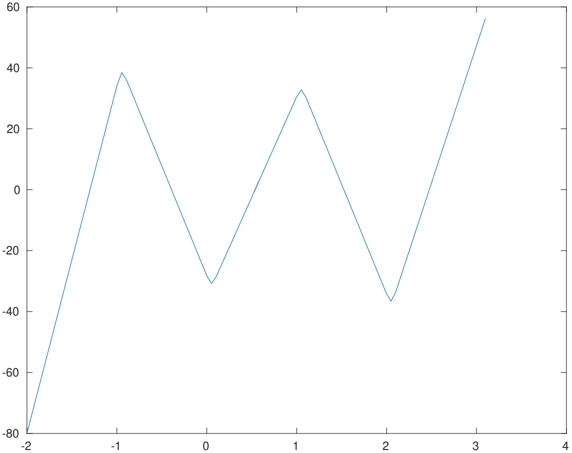
```
x=-2:3;
y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:



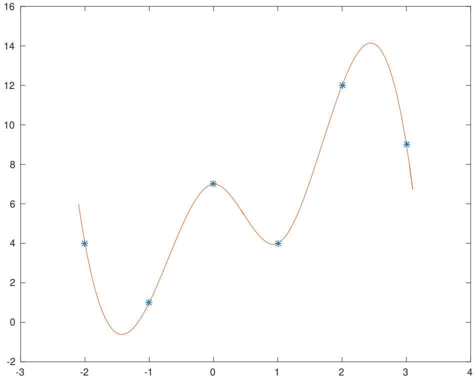
Ez még mindig folytonos, de a részintervallumok határainál töréspontja van.

Megj.

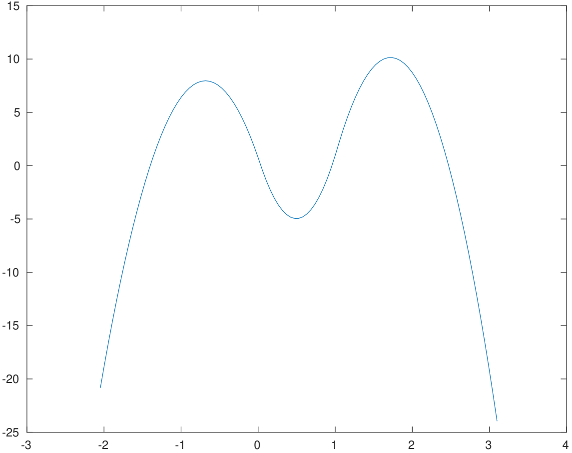
Ha a `spline` függvényt olyan `x` és `y` vektorokkal hívjuk, amelyek ugyanannyi koordinátát tartalmaznak, akkor a hiányzó két feltételt a Matlab azzal helyettesíti, hogy az első és utolsó két részintervallum találkozásánál a harmadik deriváltat is folytonosnak tekinti.

```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```

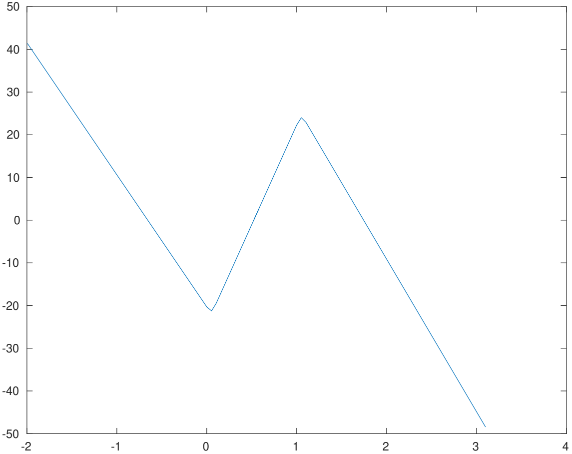
```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:

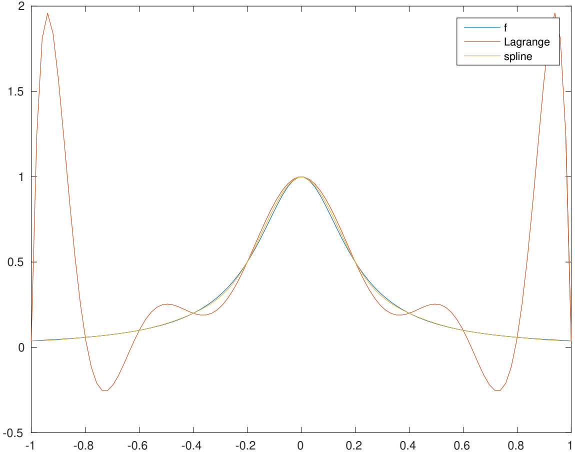


Most az első és utolsó osztópontban (-1-ben és 2-ben) már nincs töréspontja.

8. feladat (labor)

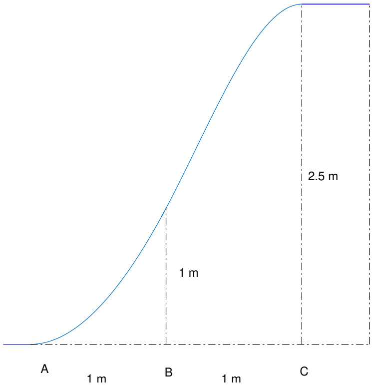
Rajzoltassuk ki közös ábrán az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
alappontokhoz tartozó harmadfokú spline polinomját. (A végpontokban a deriváltértékeket tekintsük 0-nak.)


f
Lagrange
spline
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

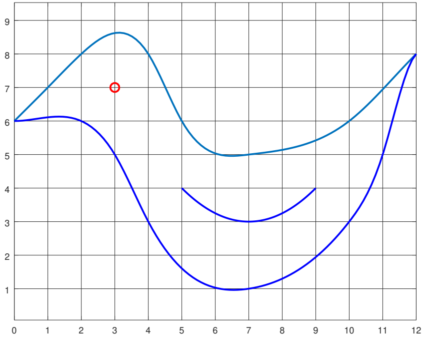
9. feladat (szorgalmi)

Az ábrán látható csúszda csúszófelületét szeretnénk elkészíteni két darabból úgy, hogy az A és C helyeken simán csatlakozzon a vízszintes felületekhez, illetve a két lemez is minél simábban csatlakozzon egymáshoz B-ben. Írja fel azt a függvényt, ami a csúszófelület lefutását modellezi!



10. feladat (szorgalmi)

Készítse el Matlabbal az ábrán látható rajzot.



Útmutatás: használja a bejelölt (egész koordinátájú) pontokat és a `spline` függvényt.