

# Proyecto de Tesis Doctoral:

## “Métodos Eficientes para la Calibración y la Valoración de Opciones sobre Tipos de Interés”

Lluís Navarro Girbés

### Introducción

Cualquier modelo de valoración de derivados sobre tipos de interés que merezca el calificativo de realista, debe ajustarse de forma óptima a la estructura temporal de tipos de interés (ETTI en adelante) observada en el instante de valoración.

Esta idea, de la que fueron pioneros Ho y Lee [16], ha sido posteriormente explorada por otros muchos investigadores, desde los primeros modelos de libres arbitraje para el tipo de interés instantáneo<sup>1</sup> hasta los modelos más recientes y complejos que consideran la evolución, en su conjunto, de la curva de tipos *forward* implícitos como un sistema de dimensión infinita de ecuaciones diferenciales estocásticas –Heath et al. [15]. En particular, esta clase de modelos exige como *input* una curva continua de tipos *forward* observados inicialmente. Sin embargo, en los mercados financieros solamente están disponibles un conjunto discreto de precios de bonos, por lo que en la práctica, se recurre a utilizar distintas familias parametrizadas para estimar esta curva continua mediante los datos disponibles.

Llegados a este punto, surge de modo natural el siguiente dilema: Escojamos una determinada familia parametrizada de funciones,  $\mathcal{G}$ , para representar la curva observada inicialmente, y además un modelo de tipos de interés,  $\mathcal{M}$ , libre de arbitraje. Supongamos que utilizamos como *input* del modelo  $\mathcal{M}$  una curva inicial perteneciente

---

<sup>1</sup>Cabe destacar los trabajos de Black y Karasinski [6] y Hull y White [17], entre otros.

a la familia paramétrica  $\mathcal{G}$ . ¿Generará este modelo de tipos de interés curvas *forward* que se mantengan dentro de esa misma familia  $\mathcal{G}$ ?

Como cabe suponer, la respuesta será generalmente negativa.

Así, Björk y Christensen [5], definen los pares consistentes  $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$  como aquéllos que cumplen con la condición anteriormente mencionada. En particular, centran su análisis sobre el problema de la consistencia, tomando como referencia a la familia de Nelson y Siegel [20] y cualquier modelo de tipos de interés de la clase Heath-Jarrow--Morton (HJM, en adelante) con una estructura de volatilidades determinista. En este trabajo precursor, dichos investigadores llegan a la relevante conclusión de que ninguno de tales modelos es consistente con la familia.

El modelo de Nelson-Siegel resulta ser un ejemplo paradigmático de familia paramétrica para la estimación de curvas *forward*, puesto que ha sido bien acogido por numerosos bancos centrales europeos como instrumento en su gestión –véase Anderson y Sleath [1]. Aunque podemos calificar como elevado su grado de aceptación entre la comunidad financiera, poco después de que Björk y Christensen obtuviesen objeciones teóricas a la utilización de esta familia paramétrica, Filipovic [14] demostró que no existe ningún proceso de Itô, incluyendo aquéllos que incorporen volatilidad estocástica, que sea consistente con la familia.

En estudios recientes, como los de Herzel y Angelini [2, 3] y los de De Rossi [3], se encuentran aplicaciones empíricas de la Teoría de la Consistencia en el entorno HJM, tal y como fue formulada originalmente por Björk y Christensen. La principal motivación para este tipo de investigaciones radica en el hecho de que cada vez que se requiere la consistencia entre una familia paramétrica de curvas y un determinado modelo de tipos de interés, si esta familia paramétrica permite un ajuste bueno de la ETTI, la combinación  $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$  será muy útil para la valoración y la gestión de carteras de derivados, manteniéndose la coherencia con un análisis econométrico de la dinámica de la estructura temporal. En ese sentido, Herzel y Angelini apuntan que, si se utiliza este entorno de trabajo para la calibración de opciones sobre tipos de interés, además de que se reduce la arbitrariedad que supone escoger una determinada familia de funciones interpolantes para estimar la ETTI inicial, se mejora la eficiencia en el algoritmo de calibración sin, por ello, empeorar la precisión de las estimaciones. Sin embargo, el

resultado más sobresaliente que arrojan sus trabajos tiene que ver, a nuestro juicio, con la incidencia directa que tiene el uso de familias consistentes con cada uno de los modelos de valoración propuestos. En general, el uso de la *calibración consistente* mejora la estabilidad de las estimaciones de los parámetros de cada uno de los modelos analizados, así como, su capacidad de ajuste y predicción de los precios de derivados.

Buraschi y Corielli [8], van más allá, presentando resultados teóricos que indican que el uso de familias paramétricas inconsistentes para obtener estructuras temporales iniciales suaves, introduce errores inconsistentes temporalmente, que violan los argumentos estándar para la construcción de carteras autofinanciadas en la implementación de estrategias de cobertura. Por lo tanto, el uso de pares inconsistentes  $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$  puede conducir a una deficiente gestión de riesgos de mercado de carteras de renta fija.

En conclusión, parece bastante natural sospechar que la elección de un determinado procedimiento de estimación de la estructura temporal no se puede desligar del modelo dinámico de valoración de activos utilizado. De hecho, si se cree en un determinado modelo de valoración de derivados, sólo es coherente hacer uso de curvas parametrizadas que sean *consistentes* con ese modelo.

Sin embargo, aunque existe una gran cantidad de trabajos relacionados con la estimación de la estructura temporal de tipos de interés, su influencia en la implementación efectiva de modelos HJM ha sido obviada. Moraleda y Pelsser [18], comparan algunos modelos *spot* y *forward* con datos de *swaps*, *caps* y *floors* del mercado americano entre 1993 y 1994, utilizando funciones *spline* lineales para construir la curva inicial a partir de los precios de bonos disponibles. Bühler et al. [7], utilizan *splines* cúbicos para implementar modelos *forward* y *spot* en el mercado alemán y contrastar su validez empírica entre 1990 y 1993. En el caso español, encontramos los trabajos de Navas [19] y Díaz y Tolentino [10] en los que, siguiendo la tónica internacional, se adoptan *splines* cúbicos y exponenciales<sup>2</sup>, respectivamente. Desafortunadamente, en ninguno de estas investigaciones se analiza si tales métodos de estimación de la ETTI inicial basados en funciones *spline*, son coherentes con la dinámica para los *forward* que impone cada modelo particular. Es preciso remarcar que en todos estos análisis el uso del término

---

<sup>2</sup>En concreto, estos investigadores utilizan una adaptación del método de Vasicek y Fong [21] a las características del mercado español.

*consistencia* se refiere única y exclusivamente a la capacidad que tienen los modelos analizados para ajustarse a la estructura temporal observada inicialmente en contraposición a los modelos clásicos de equilibrio. La ingeniosa redefinición del concepto de *consistencia* que hace Björk [4], basada en fundamentos de geometría diferencial sobre variedades, es enteramente diferente, llevando consigo profundas consecuencias, tanto en la correcta comprensión de los postulados en los que se asientan los modelos de no-arbitraje como en la implementación práctica que se hace de éstos en la gestión diaria de carteras financieras.

## Objetivos

El objetivo de este trabajo es exponer los principales aspectos estudiados por la literatura que ha originado el trabajo seminal de Björk y Christensen [5]. El grado de abstracción que supone dotar a la clase de modelos de Heath-Jarrow-Morton de *autoconsistencia*, tal y como lo entienden todos estos autores, es considerable, por lo que no se pretende explorar la teoría de forma meticulosa, sino mostrar los rasgos principales de ésta haciendo especial énfasis en sus aplicaciones en la valoración de derivados sobre tipos de interés en un contexto de estimación consistente de la ETTI. Se persigue pues, mostrar los resultados empíricos más relevantes obtenidos, de modo que sirva de guía para enfocar futuros trabajos de investigación en un contexto teórico sólidamente cimentado.

## Metodología

El plan de trabajo consta de 4 fases:

- Construir una base de datos de la ETTI y de precios de opciones sobre tipos de interés ultralíquidas.
- Calibrar modelos de valoración de la clase HJM utilizando los precios de opciones sobre tipos de interés así como los datos de la ETTI. Para este fin se estudiarán extensiones que, siendo capaces de preservar la autoconsistencia dinámica de estos modelos, mejoren las metodologías apuntadas en la introducción.

- Realizar el análisis de los resultados empíricos obtenidos para contrastarlos con los métodos tradicionales inconsistentes.
- Finalmente, se abordará el estudio comparativo de distintos métodos numéricos en diferencias finitas, que siendo coherentes con la metodología de calibración consistente y extensiones, permitan la valoración de opciones más complejas en su especificación, dada la falta de analiticidad frecuente en ese caso.

## Referencias

- [1] ANDERSON, N., & J. SLEATH (1999). New Estimates of the UK Real and Nominal Yield Curves, *Bank of England Quaterly Bulletin*.
- [2] ANGELINI, F., & S. HERZEL (2002). Consistent Initial Curves for Interest Rate Models, *Journal of Derivatives* 9(4), 8–18.
- [3] ANGELINI, F., & S. HERZEL (2005). Consistent Calibration of HJM Models to Cap Implied Volatilities, *Journal of Future Markets* 25, 1093–1120.
- [4] BJÖRK, T., (2001). A Geometric View of Interest Rate Theory, en: Jouini, E., Cvitanic, J. & M. Musiela, *Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*, Cambridge University Press.
- [5] BJÖRK, T., & B.J. CHRISTENSEN (1999). Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves, *Mathematical Finance* 9, 323–348.
- [6] BLACK, F., & P. KARASINSKI (1991). Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal, *Financial Analysts Journal* 4, 52–59. 127–155.
- [7] BÜHLER, M., UHRIG-HOMBURG M., WALTER U. & T. WEBER (1999) An Empirical Comparison of Forward Rate and Spot Rate Models for Valuing Interest Rate Options, *The Journal of Finance* 54, 269–305.
- [8] BURASCHI, A., & F. CORIELLI (2005). Risk Management Implications of Time-Inconsistency: Model Updating and Recalibration of No-Arbitrage Models. *Journal of Banking & Finance* 29(11), 2883–2907.

- [9] DE ROSSI, G., (2004). Kalman Filtering of Consistent Forward Rate Curves: a Tool to Estimate and Model Dynamically the Term Structure, *Journal of Empirical Finance* 11, 277–308.
- [10] DÍAZ A. & M. TOLENTINO (2003). La Constrastación del Modelo de Black-Derman-Toy en el Mercado Español, Working Paper, ICAE-Univ. Complutense de Madrid.
- [11] FALCÓ A., NAVARRO LL., & J. NAVE (2011). On the Calibration of a Gaussian Heath-Jarrow-Morton model using Consistent Forward Rate Curves. *Quantitative Finance*, 11(4), 495–504.
- [12] FALCÓ A., NAVARRO LL., & J. NAVE (2009). The Hull-White Model and Multiobjective Calibration with Consistent Curves: Empirical Evidence. *RACSAM Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.*, 103(2), 235–249.
- [13] FALCÓ A., NAVARRO LL., & J. NAVE (2008). A multiobjective approach using consistent rate curves to the calibration of a Gaussian Heath-Jarrow-Morton model, WP-AD Series, 2008-09, IVIE.
- [14] FILIPOVIC D., (1999). A Note on the Nelson and Siegel Family. *Mathematical Finance* 9(4), 349–359.
- [15] HEATH, D., R. JARROW & A. MORTON (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation, *Econometrica* 60(1), 77–105.
- [16] HO, T.S.Y, & S.B. LEE (1986). Term Structure Movements and the Pricing of Interest Rate Contingent Claims. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 411011-1029.
- [17] HULL, J., & A. WHITE (1990). Pricing Interest Rate Derivatives Securities. *The Review of Financial Studies* 3(4), 573–592.

- [18] MORALEDA, J., & A. PELSSER (2000). Forward versus Spot Interest-Rate Models of the Term Structure: An Empirical Comparison. *The Journal of Derivatives* 7(3)9–21.
- [19] NAVAS, J.F., (1999). Consistent versus Non Consistent Term Structure Models: Some Evidence from the Spanish Market, *The Journal of Fixed Income*, December, 42-60.
- [20] NELSON C.R. & A.F. SIEGEL (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business* 60(4), 473–489.
- [21] VASICEK, O.A. & H.G. FONG (1982). Term Structure Modelling using Exponential Splines, *The Journal of Finance* 37, 339–348.