



دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی

جبر خطی

پروژه

استاد

دکتر سرافراز

۲۶ دی ۱۴۰۱

۱ پیاده سازی چند الگوریتم

۱.۱ درونیابی لاگرانژ

با کمک درونیابی لاگرانژ منحنی ای تخمین بزنید که از دادگان زیر عبور کند. منحنی مد $e^{\cos(3x)}$ نظر است.

| | | | | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | 0 | 0.6 | 1.03 | 1.39 | 1.76 | 2.09 | 2.29 |
| $f(x)$ | 2.718 | 0.797 | 0.368 | 0.597 | 1.712 | 2.718 | 0.455 |

۱. معادله منحنی تخمین زده شده را به ازای چند جمله ای های درجه های ۳ تا ۶ بیابید.
۲. به ازای درجه های مختلف در یک نمودار، $f(x)$ و منحنی یافته شده را در بازه رسم کنید.
۳. نمودار اندازه خطا بین دو منحنی را به ازای درجه های مختلف را در بازه رسم کنید.
۴. توضیح دهید کدام درجه برای تخمین این منحنی مناسب تر است و بهترین درجه پیدا شده را ذکر کنید.

۲.۱ تجزیه LU برای ماتریس بالاهسنبرگی

ماتریس A را بالاهسنبرگی^۱ گویند هرگاه عناصر زیر قطر فرعی زیر قطر اصلی این ماتریس صفر باشند، به عبارت دیگر:

$$A = [a_{ij}]_{n \times m} \forall i < j + 1 : a_{ij} = 0$$

همچنین با تجزیه نیز LU در درس آشنا شده اید.

۱. تابعی بنویسید که با دریافت ماتریس بالاهسنبرگی A تجزیه LU را انجام دهد. سپس تابع نوشته شده را بر روی یک ماتریس بالاهسنبرگی دلخواه تست کنید.
۲. تفاوت هزینه محاسباتی تابع طراحی شده را با الگوریتم LU عادی بررسی کنید. جهت مطالعه بیشتر و آشنایی با مفهوم هزینه محاسباتی در جبرخطی عددی درمورد مفهوم $flop$ جست و جو کنید.
۳. آیا هزینه محاسباتی تابع نوشته شده به تعداد سطر وابسته است؟ توضیح دهید.

۲ فشرده سازی SVD و FFT

در این بخش میخواهیم فشرده سازی تصاویر Image Compression را بررسی کنیم. در حالت کلی میتوان اطلاعات داخل تصویر را به صورت یک ماتریس داده در نظر گرفت سپس به شیوه ای پایه هایی مناسب برای این ماتریس اطلاعاتی یافته و با تصویر کردن ماتریس اولیه بر پایه های مهمتر و نگاه داشتن اطلاعات لازم، تصویر اولیه را با اطلاعات کمتری نمایش داده و در عمل فشرده سازی میکنیم. برای سادگی تصاویر مورد بررسی ما در این تمرین به صورت سیاه سفید در نظر گرفته میشوند اما روشهای مورد بررسی به سادگی و با تغییر شکل مناسب تنسورهای تصاویر چند کاناله (رنگی) هم قابل پیاده سازی میباشند. به کمک SVD میتوانیم برای فضای ستونی ماتریس تصویر مورد نظرمان پایه هایی یافته که ستون های تصویرمان بر آنها بیشترین correlation را داشته باشند. از نگاهی این پایه ها به ترتیب نزولی اندازهی

^۱ upper Hessenberg matrix

مقادیر تکین، شامل کلی ترین اطلاعات ستونهای تصویر خواهند بود، بنابراین با نگاه داشتن تنها τ ستون ابتدایی از پایههای یافته شده (U) به همراه بردارهای ترکیبی (V^T) و مقادیر تکین (Σ) متناظر با آنها میتوانیم با تقریب خوبی کلیتی از شمای تصویر را حفظ کنیم. از نگاه تخصصی بازسازی صورت گرفته در واقع نوعی بازسازی ماتریس اولیه در مرتبه ی پایین تر rank approximation بوده که پیش از این با آن آشنا شده بودید. مقدار نیز در این دیدگاه شیر کنترل میزان فشرده سازی مورد نظرمان میباشد.

به کمک FFT و تبدیل فوریه نیز میتوانیم اطلاعات موجود در سطرها و ستون های ماتریس تصویرمان را به صورت مقادیر سیگنال گسستههای دو بعدی در نظر گرفته و بر فضای پایه های موج تناوبی و اصلی دو بعدی تصویر کنیم. میتوان نشان داد که بزرگتر بودن اندازه ی بردار تصویر در جهت یک موج خاص به معنای اهمیت بیشتر آن موج در تشکیل pattern های موجود در تصویر است (مطالعه بیشتر) ، بنابراین نگاه داشتن موج پایه ای که اندازه ی بردار تصویر در جهت آنها بیشترین است میتواند برای بازسازی اطلاعات تصویر اولیه با تقریب خوبی مناسب باشد و برای فشرده سازی تصاویر به کار گرفته شود. در این نگاه نیز مقدار τ شیر کنترل میزان فشرده سازی مورد نظرمان خواهد بود.

مسئله ی دیگری که میتوانیم با ایدههای مشابه از کاربرد تبدیل پایه های شرح داده شده بررسی کنیم، denoise کردن تصاویر است. در شرایطی که نویز موجود در تصویر یکنواخت و به صورتی باشد که اطلاعات کلی موجود در تصویر را مخدوش نکند، از نگاه SVD با توجه به بررسی اطلاعات کلی، جهت بردار تصویر بر پایه های دارای مقادیر تکین بیشتر تغییر چندانی نکرده و حذف اطلاعات مربوط به بردارهای حائز اهمیت کمتر میتواند موجب حذف نویز و نگاه داشتن اطلاعات اصلی تصویر شود. از نگاه FFT با توجه به اینکه pattern نویز به صورت کلی با موج های فرکانس بالا مدل می شود، نگاه داشتن موج های تشکیل دهنده ی شامل فرکانس کمتر موجود در تصویر میتواند موجب جدا شدن اطلاعات تصویر از نویز شود (این کار به اصطلاح فیلتر کردن فرکانس پایین یا Low Pass Filter نامیده میشود).

الف) ابتدا محدوده رنگ تصاویر را به gray-scale تغییر دهید. سپس با کمک تابع `numpy.linalg.svd` و `numpy.fft.fft2` با ضرایب فشردگی 0.1, 0.5, 1, 4, 8, 10, 12 درصد عکس ها نمایش دهید.

ب) برای هر ضریب تصاویر دو حالت فشرده سازی را مقایسه کنید.

پ) حال به صورت کلی هر دو روش فشرده سازی را مقایسه کنید. سپس توضیح دهید کدام روش فشرده سازی بهتر و مناسب تر است و چه عاملی سبب شده تا این روش کارایی بیشتری داشته باشد؟

ت) درباره روش PCA تحقیق کنید. به نظر شما شباهت میان فشرده سازی به روش SVD با PCA چیست؟

ج) سعی کنید دو روش بالا را برای تصاویر رنگی امتحان کنید. آیا روشی از روش های بالا وجود دارد که برای تصاویر رنگی جواب مطلوب ندهد؟ چرا؟

د) حال میخواهیم تصویر داده شده را denoise کنیم. ابتدا به کمک روش SVD به ازای رنگ های مختلف denoising را انجام دهید. روش کار خود را توضیح دهید.

ه) ابتدا توضیح دهید که Low Pass Filter چگونه عمل میکند و چگونه میتوانیم آن را پیاده سازی کنیم. سپس به ازای شعاع های مختلف denoising را با کمک FFT انجام دهید. روش کار خود را توضیح دهید.

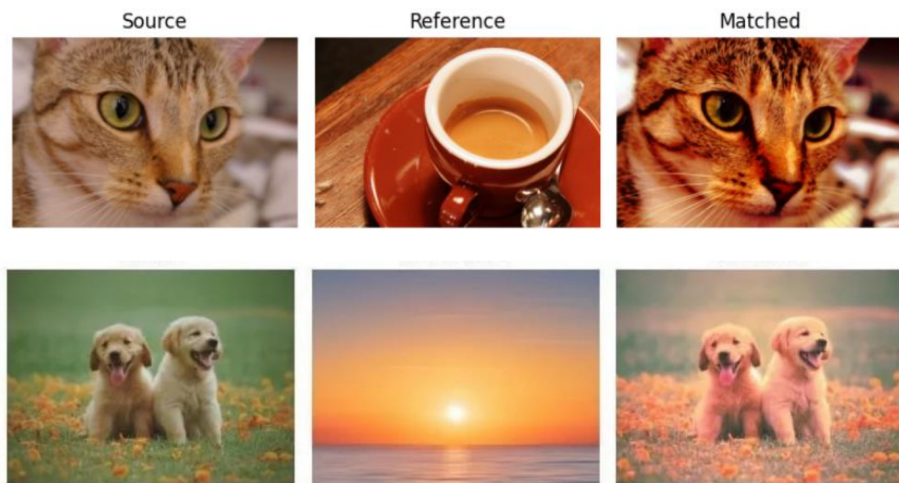
و) کدام روش denoising بهتر و مناسب تر است؟ توضیح دهید.

۳ تطبیق هیستوگرام

در این تمرین با تکنیک تطبیق هیستوگرام آشنا خواهیم شد. یک هیستوگرام توزیع رنگ قرمز، سبز و آبی را در محدود $[0, 255]$ خلاصه می کند. اگر هیستوگرام رنگی تصویر مرجع^۲ را داشته باشیم، می توان با

^۲Reference

تغییر در پیکسل های تصویر منبع^۳ به هیستوگرام مرجع دست پیدا کنیم.
به نمونه های زیر توجه کنید.



اگر تصاویر چند کانال داشته باشند، تا زمانی که تعداد کانال ها در تصویر ورودی و مرجع برابر باشند، تطبیق برای هر کانال مستقل انجام می شود.

تطبیق هیستوگرام می تواند به عنوان یک نرمال سازی سبک برای پردازش تصویر، مانند تطبیق ویژگی ها به ویژه در شرایطی که تصاویر از منابع یا شرایط مختلف گرفته شده اند استفاده گردد.

در این تمرین ۲ تصویر به شما داده می شود که توازن رنگی متفاوتی دارند و شما باید عمل تطبیق هیستوگرام را در آنها انجام دهید. توجه کنید بخشی از نمره برای پیاده سازی می باشد و استفاده از توابع آماده مجاز نیست.

ابتدا ۲ تصویر *.jpg* را بخوانید سپس برای هر بخش r, g, b عمل تطبیق را به صورت جداگانه انجام دهید. یعنی پس از نرمال سازی هر آرایه مربوط r, g, b تابع cdf مربوط را بدست آورید سپس برای هر درایه از cdf تصویر سورس، نزدیک ترین درایه مربوط در تصویر مبدا را جایگزین کنید و در نهایت با ساختن خروجی متناسب r, g, b تصویر نهایی را بسازید.

۴ گرام اشمیت تغییر یافته

همانطور که در درس مشاهده کردید، تجزیه QR یک الگوریتم بسیار مهم می باشد که برای محاسبه مقادیر ویژه و تخمین حداقل مربعات می تواند مورد استفاده قرار گیرد. برای محاسبه ماتریس Q در این تجزیه از الگوریتم گرام اشمیت^۴ که در درس مشاهده کردیم، استفاده می شود. الگوریتم گرام اشمیت به صورت کلی در برابر خطا های حاصل از گرد کردن و ... بسیار آسیب پذیر می باشد. به این منظور الگوریتم گرام اشمیت تغییر یافته معرفی می گردد. شبه کد زیر را برای الگوریتم گرام اشمیت کلاسیک در نظر بگیرید.

^۳Source
^۴Gram-Schmidt

1. set $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
2. for $j = 2, \dots, k$ compute:

$$y_j = x_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle x_j, y_i \rangle y_i$$

$$y_j = \frac{y_j}{\|y_j\|}$$

حالا برای الگوریتم گرام اشمیت تغییر یافته نیز می توان نوشت:

1. set $y_j = x_j$ for all j .
2. for $j = 1, \dots, k$ compute:

$$y_j = \frac{y_j}{\|y_j\|}$$

$$y_i = y_i - \langle y_j, y_i \rangle y_j \quad \forall i = j + 1, \dots, k$$

اگر از دیدگاه بلوکی دقت کنید می توان مشاهده کرد که متعامد سازی در هر مرحله بر اساس بردار های متعامد شده دیگر می باشد.

۱. تابعی بسازید که با دریافت ماتریس A به کمک الگوریتم گرام اشمیت، ماتریس متعامد Q را برگرداند.

۲. تابعی بسازید که با دریافت ماتریس A به کمک الگوریتم گرام اشمیت تغییر یافته، ماتریس متعامد Q را برگرداند.

۳. حالا با دادن ورودی های مختلف تابع های خود را تست کرده و مقدار های خروجی را مقایسه کنید و با رسم نمودار دقت بدست آمده هر روش و پایداری در برابر خطا را تحلیل نمایید. (برای تست از کد پایتون زیر می توانید استفاده کنید)

```

۱ n = 100
۲ U, X = np.linalg.qr(np.random.randn(n,n))
۳ # set U to a random orthogonal matrix
۴ V, X = np.linalg.qr(np.random.randn(n,n))
۵ # set V to a random orthogonal matrix
۶ S = np.diag(np.power(2,np.arange(-1,-(n+1),-1)), ...
dtype=float))
۷ # Set S to a diagonal matrix values between 2-1 and 2-(n+1)
۸ A = np.matmul(U,np.matmul(S,V))

```

نکات کلی

- در این پروژه موظف هستید از Python یا Matlab استفاده کنید.
- کدها و گزارش خود را در یک فایل فشرده با عنوان LA_PROJECT_<SID>_Name.zip تحویل دهید.
- در نوشتن گزارش کار دقت بیشتری به خرج دهید زیرا معیار اصلی نمره دهی گزارش کار می باشد.
- مهلت تحویل پروژه تا **چهارشنبه ۱۲ بهمن** می باشد و امکان ارسال با تاخیر وجود ندارد.
- در صورتی که سوالی در مورد پروژه داشتید از طریق ایمیل با فاطمه نائینیان یا علیرضا جاوید در ارتباط باشید.