Institut für Informatik 4
Priv.-Doz. Dr. V. Steinhage
Friedrich-Ebert-Allee 144
53113 Bonn
Email: steinhage@cs.uni-bonn.de
WWW: http://net.cs.uni-bonn.de/ivs/

Blatt 6 (8 Punkte)

Abgabe durch Hochladen auf der eCampus-Seite bis Sonntag, 29.06.2015, 10:00 Uhr, in Gruppen von 2-3 Personen.

Aufgabe 6.1: Kombinatorik $(0.5 + 0.5 + 0.5 = 1.5)$

Betrachten Sie 5-Karten Poker mit 52 Karten, unter der Annahme, dass der Geber fair ist.

a) Wieviele verschiedene Elementarereignisse gibt es in der Verbundwahrscheinlichkeit, d.h. wieviele unterschiedliche Blätter zu 5 Karten gibt es? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein solches Elementarereignis?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach Austeilen der Karten einen royal flush erhalten zu haben (d.h. Ass, König, Dame, Bube und Zehn von einer Farbe)?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach Austeilen der Karten einen Vierer erhalten zu haben (d.h. vier Karten mit den gleichen Kartenwerten und eine beliebige Karte)?

Aufgabe 6.2: Totale Wahrscheinlichkeit **(1)**

In Wumpukistan finden kommendes Wochenende Präsidentschaftswahlen statt. Es gibt vier Kandidaten K_1, K_2, K_3, K_4 die laut Umfragen zu Wahrscheinlichkeiten von $P(K_1) = 0.25$, $P(K_2) = 0.1$, $P(K_3) = 0.45$ und $P(K_4) = 0.2$ die Wahl gewinnen. Zu Beginn seiner Amtszeit muss der neue Präsident über einen Antrag zur Einführung eines schärferen Waffengesetzes entscheiden (Ereignis W). Bedingt vom Ausgang der Wahl wird die Wahrscheinlichkeit für ein schärferes Waffengesetz unterschiedlich eingeschätzt: $P(W|K_1) = 1.0$, $P(W|K_2) = 0.5$, $P(W|K_3) = 0.0$, und $P(W|K_4) = 0.5$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Einführung eines schärferen Waffengesetzes $P(W)$ aus heutiger Sicht?

Aufgabe 6.3: Hintergrundevidenzen **(1)**

Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Bayes' Regel, bei der e eine Hintergrundevidenz darstellt. Es sollte klar sein, dass ein Beweis nicht aus dem Rechnen eines Beispiels folgt! Wenn Sie Definitionen aus der Vorlesung verwenden, geben Sie dies an der jeweiligen Stelle an.

$$P(Y|X,e) = \frac{P(X \mid Y, e) \cdot P(Y \mid e)}{P(X \mid e)}$$

Aufgabe 6.4: Bedingte Wahrscheinlichkeit **(1 + 1 = 2)**

Durch Information aus der Beobachtung statistisch abhängiger Zufallsvariablen ändern sich auch die Annahmen über die nicht beobachtete Zufallsvariable. Geben Sie zu folgenden Problemen die a priori Wahrscheinlichkeitsverteilungen und die bedingte Verteilung an.
$\mathbf{Beispiel}$: $\mathbf{P}(\mathrm{X})$: Das Ergebnis eines Wurfes mit einem Würfel ist 4. ⇒ $\mathbf{P}(\mathrm{X}) = \left\langle \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} \right\rangle$

a) $\mathbf{P}(\mathrm{A})$: Eine Person hat am 02.06. Geburtstag.
$\mathbf{P}(\mathrm{B})$: Eine Person ist Sternzeichen Zwilling (22.05.-21.06.).
$\mathbf{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{b})$: Eine Person, die Zwilling ist, hat am 02.06. Geburtstag.

b) $\mathbf{P}(\mathrm{C})$: Das Erstgeborene einer Familie mit zwei Kindern ist ein Mädchen.
$\mathbf{P}(\mathrm{D})$: Mindestens ein Kind ist ein Junge.
$\mathbf{P}(\mathrm{C} \mid \mathrm{d})$: Das Erstgeborene ist ein Mädchen, gegeben mindestens ein Kind ist ein Junge.

Aufgabe 6.5: Rechnen mit Verbundverteilungen **(0.5 + 0.5 + 1 = 2)**

Betrachten Sie die folgende Tabelle mit Verbundwahrscheinlichkeiten:

	übergewichtig		¬übergewichtig	
	raucher	¬ raucher	raucher	¬raucher
älter75	0,8%	2,0%	1%	2,2%
¬älter75	14%	15%	34%	31%

Berechnen Sie mit Hilfe der Tabelle folgende Wahrscheinlichkeits**verteilungen**:

a) $\mathbf{P}(\text{Älter75})$, $\mathbf{P}(\text{Raucher})$ und $\mathbf{P}(\text{Übergewichtig})$

b) $\mathbf{P}(\text{Übergewichtig} \mid \neg\text{raucher})$

c) $\mathbf{P}(\text{Raucher} \mid \text{älter75} \vee \text{übergewichtig})$

Aufgabe 6.6: Bayes' Regel **(0.5(+2Bonuspunkte))**

Angenommen das Wetter in London kann wie folgt zusammengefasst werden: Wenn es an einem Tag regnet, dann regnet es in 70% der Fälle den nächsten Tag auch; Wenn es an einem Tag sonnig ist, dann ist es in 40% der Fälle am nächsten Tag auch sonnig. Hierbei sei das Wetter nur sonnig oder regnerisch und nur abhängig vom Wetter des Vortrags.

a) Sei $W_t = \{r, s\}$ die Zufallsvariable für das Wetter an Tag t mit Werten r für regnerisch und s für sonnig. Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten an, die sich direkt aus dem Aufgabentext ergeben, sowie ihre Gegenwahrscheinlichkeiten.

b) **Bonus-Aufgabe:** Es hat *vorgestern* geregnet. Wie wahrscheinlich ist es, dass es *heute* sonnig ist? Für die Lösung ist die Ableitung vollständig mit Zwischenschritten und den verwendeten Regeln (z. B. Produktregel, Unhabhängigkeit, bedingte Unabhängigkeit, Marginalisierung etc.) zu dokumentieren wie im Beispiel der Folie 39 im 10. Vorlesungsfoliensatz.