Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

5 Spiele = Adversiale Suche

Suchstrategien für Spiele, Spiele mit Zufall, Stand der Kunst

Volker Steinhage

Inhalt

- Brettspiele
- Minimax-Suche
- Alpha-Beta-Suche
- Spiele mit Zufallsereignissen
- Stand der Kunst

Spiele?

Kapitel 2 stellte *Multiagenten-Umgebungen* vor, in denen mehrere Agenten ihre Wechselwirkungen berücksichtigen müssen. *Spiele* sind *konkurrierende* Multiagenten-Umgebungen. Insbes. Brettspiele sind eines der ältesten Teilgebiete der KI (Shannon und Turing schon 1950).

Warum?

- Brettspiele sind eine abstrakte und reine Form des Wettbewerbs zwischen zwei *Gegnern* (lat. *Adversius*) und erfordern "offensichtlich" eine Form von Intelligenz.
- Die Zustände eines Spiels sind i. A. relativ einfach darstellbar.
- Die möglichen Aktionen der Spieler sind wohl definiert.
- → Realisierung des Spielens als Suchproblem (sog. *adversiale Suche*)
- → häufig mit deterministischen und vollständig beobachtbare Umgebungen
- → aber Kontingenzprobleme, weil die Züge des Gegners im voraus nicht bekannt sind.

Bei Backgammon stochastisch und vollständig beobachtbar

Probleme

Brettspiele sind herausfordernd, weil es eben Kontingenzprobleme sind,

und weil die Suchbäume sehr groß werden.

Beispiele:

Ein Halbzug ist ein einzelner Zug für jede Seite. Z.B. der Bauernzug von E2 nach E4 ist ein Halbzug

- Schach: ca. 35 mögliche Aktionen in jeder Position und 100 Halbzüge pro Spiel
 → 35¹⁰⁰ Knoten im Suchbaum (bei "nur" ca. 10⁴⁰ legalen Schachpositionen).
- Go: durchschnittlich 200 mögliche Aktionen bei ca. 300 Halbzügen
 → 200³⁰⁰ Knoten.
- Dame: vollständiger Suchbaum umfasst ca. 10⁴⁰ Knoten
 → ca. 10²¹ Jahrhunderte für Baumaufbau bei 1/3 ns pro Knotengenerierung.

Gute Spielprogramme zeichnen sich dadurch aus, dass sie

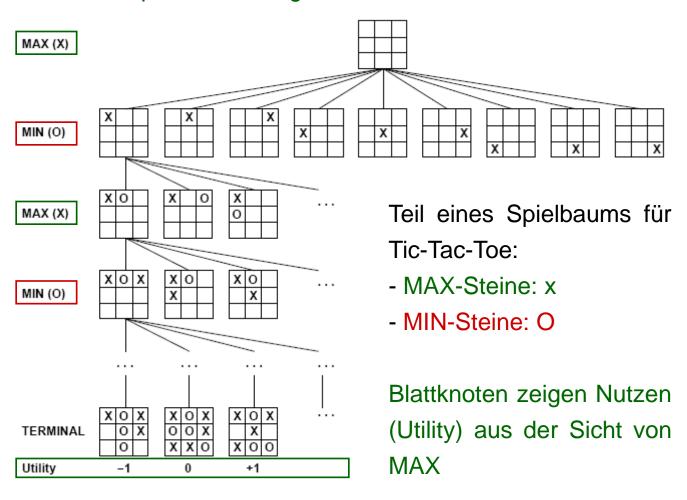
- irrelevante Äste im Spielbaum abschneiden (engl. pruning),
- gute Evaluierungsfunktion für Zwischenzustände benutzen und
- möglichst viele Halbzüge vorausschauen (engl. look ahead).

Terminologie bei Zweipersonen-Brettspielen

- Spieler: MAX und MIN
 - → MAX steht für das Spielprogramm und beginnt (weil am Zug)!
- Anfangszustand: gültige Start- bzw. Ausgangspositionen des jew. Spiels
- Operatoren = legale Züge
- Terminierungstest: wann ist ein Spiel beendet?
 - → Terminalzustand = Spielende
- <u>Nutzenfunktion</u> = Bewertung des Spielausgangs
 - ggf. einfach: +1 (Sieg), -1(Niederlage), 0 (unentschieden)
 - ggf. differenziert: bei Backgammon Werte zwischen +192 und -192
- Strategie:
 - bei regulärer Suche: Lösung = Pfad von Anfangs- zu Zielzustand.
 - hier: Siegstrategie für MAX → Ziel: Gewinnmaximierung
 - → Strategie, die *unabhängig von MINs Zügen* zum Gewinn führt!
 - → korrekte Reaktionen auf alle Züge von MIN!

Beispiel Tic-Tac-Toe

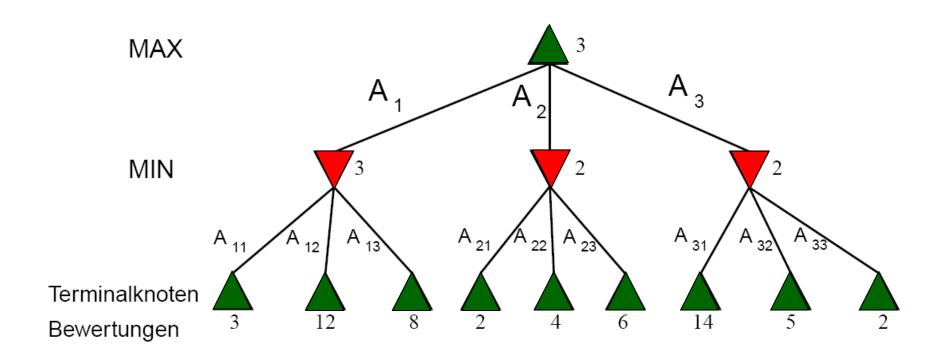
Jede Stufe des Suchbaums, auch Spielbaum genannt, wird mit dem Namen des Spielers bezeichnet, der am Zug ist (MAX- und MIN-Stufen). Wenn es wie hier möglich ist, den gesamten Spielbaum zu erzeugen, liefert der Minimax-Algorithmus eine optimale Strategie für MAX.



Minimax

- 1. Erzeuge vollständigen Spielbaum mit Tiefensuche.
- 2. Wende die Nutzenfunktion auf jeden Terminalzustand an.
- 3. Beginnend bei Terminalzuständen, berechne Werte der Vorgängerknoten:
 - Knoten ist MIN-Knoten:
 - → Wert übernimmt das Minimum der Nachfolgerknoten.
 - Knoten ist MAX-Knoten:
 - → Wert übernimmt das Maximum der Nachfolgerknoten.
 - Dann wählt MAX im Anfangszustand (Wurzel des Spielbaums) den Zug, der zu dem Nachfolgerknoten mit größtem berechneten Nutzen führt (Minimax-Entscheidung).
- Beachte: Minimax geht von perfektem Spiel von MIN aus. Jede Abweichung (d.h. Fehler von MIN) kann das Ergebnis für MAX nur verbessern.

Beispiel für Minimax



Ein Zwei-Schichten-Spielbaum: Die ∆-Knoten sind die MAX-Knoten und die ∇-Knoten sind die MIN-Knoten. Die Terminalknoten zeigen die Nutzenwerte für MAX. Alle anderen Knoten zeigen ihre MiniMax-Werte. MAX ist am Zug.

Minimax Algorithmus

Berechne rekursiv den besten Zug von der Anfangssituation ausgehend:

```
function Minimax-Decision(state) returns an action
   v \leftarrow \text{Max-Value}(state)
   return the action in Successors(state) with value v
function MAX-VALUE(state) returns a utility value
   if Terminal-Test(state) then return Utility(state)
   v \leftarrow -\infty
   for a, s in Successors(state) do
      v \leftarrow \text{Max}(v, \underline{\text{Min-Value}(s)})
   return v
function MIN-VALUE(state) returns a utility value
   if Terminal-Test(state) then return Utility(state)
   v \leftarrow \infty
   for a, s in Successors(state) do
      v \leftarrow \text{Min}(v, \text{Max-Value}(s))
   return v
```

Beachte: Minimax funktioniert so nur, wenn der Spielbaum nicht zu tief ist. Andernfalls sind *Approximationen* der Minimax-Werte zu bestimmen.

Evaluierungsfunktion

Bei zu großem Suchraum kann der Spielbaum nur bis zu einer maximalen Suchtiefe erzeugt werden.

Die Kunst besteht dann darin, die Güte der den Blättern entsprechenden Spielpositionen (i.A. keine Endpositionen!) korrekt zu bewerten.

Beispiele einfacher Bewertungskriterien im Schach:

- Materialbewertung: Bauer = 1, Springer = 3, Läufer = 5, Dame = 9, etc.
- Positionsbewertung: Sicherheit des Königs bis Positionen der Bauern
- Faustregeln wie "3-Punkte Vorsprung = (fast) sicherer Sieg"

Die Wahl der Evaluierungsfunktion ist spielentscheidend!

Der Wert einer Spielposition sollte die Gewinnchancen widerspiegeln, d.h. die Gewinnchancen bei einem Vorteil von +1 sollten geringer sein als die bei einem Vorteil von +3.

Evaluierungsfunktion - allgemein

Bevorzugte Evaluierungsfunktionen sind *gewichtete lineare Funktionen:*

$$W_1 \cdot f_1 + W_2 \cdot f_2 + \dots + W_n \cdot f_n$$
.

Hierbei ist f_i das i-te Kriterium und w_i das i-te Gewicht.

 \rightarrow Bsp: $w_1 = 3$, $f_1 = Z$ ahl der eigenen Springer auf dem Brett.

Annahme: Die Kriterien sind unabhängig voneinander.

- Die Gewichte können u.U. gelernt werden.
- Die Kriterien müssen allerdings vorgegeben werden. Die automatische Auswahl von geeigneten Kriterien ist generell nicht möglich.

Wann die Suche beenden? (1)

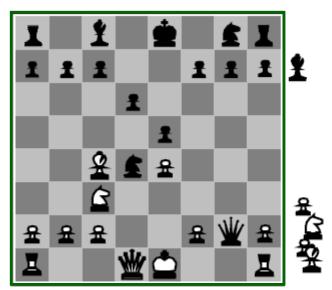
- Einfach: Tiefenbeschränkte Suche entsprechend vorgegebenem Zeitlimit.
- Robuster: Iterative Tiefensuche mit Abbruch beim Erreichen des Zeitlimits
 - → liefert beste Lösung der tiefsten *vollständigen* Suche.

Bedeutet hier bei großen Spielbäumen i.A.

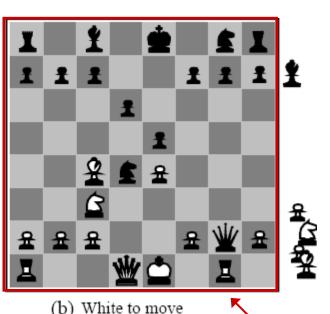
- nicht die optimale Problemlösung bzw. Zielstrategie zum Sieg,
- sondern die *optimale Zwischenlösung* bzw. Strategie zur *besten eigenen*Stellung, die bei max. Suchtiefe m erreichbar ist.

Wann die Suche beenden? (2)

- Evaluierung sollte für "ruhende" Positionen, die nicht zu großen Schwankungen bei der Evaluierung in den folgenden Zügen führen, enden.
- Annahme: alleinige Bewertung durch Materialvorteil!
- → Beide Stellungen (a) und (b) zeigen denselben Materialvorteil für Schwarz (1 Springer, 2 Bauern). Im Ggs. zur "ruhenden" Position in (a) gibt es eine "nicht ruhende" Position in (b), da der nächster Zug von Weiß durch den Turm zum unweigerlichen Damenverlust führt.
- → u.U. noch etwas weiter suchen und einen Schlagabtausch zu Ende führen
- → Extrasuche bis zu "stabiler" Bewertungsposition.





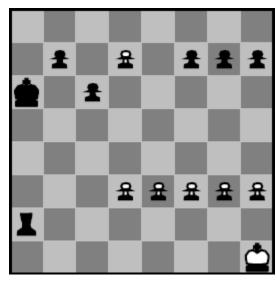


Wann die Suche beenden? (3)

 Horizonteffekt: ein letztlich unvermeidbarer schädigender Gegenzug wird durch eigene verzögernde Züge aus dem durch eine Tiefenschranke begrenzten "sichtbaren" Suchraum hinaus geschoben.



Vermeintliche Lösung: setze mehrmals Schach über Turm und verschiebe den Damenzug über den "Suchhorizont" hinaus, wo er nicht erkannt wird.



Schwarz mit Materialvorteil am Zug

Langfristig wird weißer Bauer zu Dame



Lösung entweder durch generell größere Suchtiefe (→ Hardware-Erweiterung) oder singuläre Erweiterung der Tiefensuche für "deutlich bessere Züge" (hier die Züge des schwarzen Turms und des weißen Königs).

Komplexität von Minimax ⇒ Alpha-Beta-Kürzung

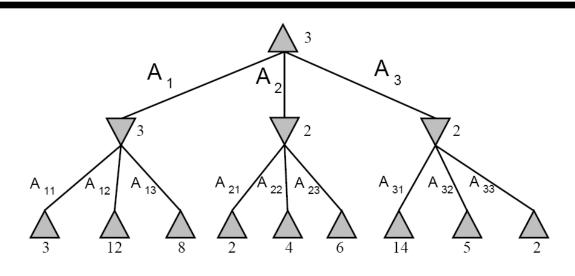
Minimax verwendet Tiefensuche:

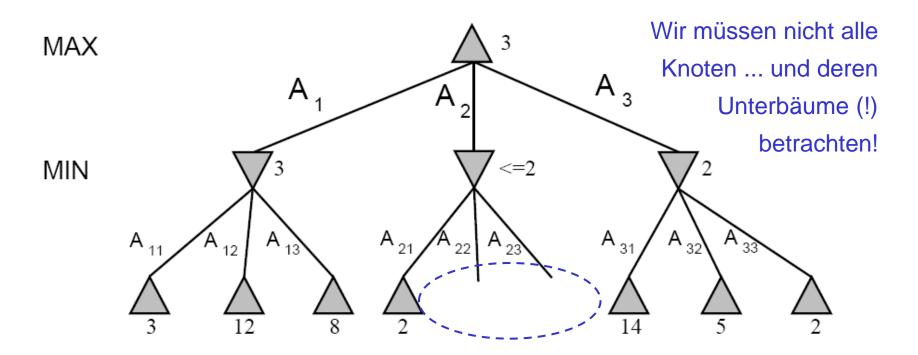
- \Rightarrow Speicherkomplexität $O(b \cdot m)$ für max. Spielbaumtiefe m und b erlaubte Züge
- \Rightarrow Speicherkomplexität O(m) für Backtracking-Variante
- \Rightarrow Zeitkomplexität $O(b^m)$

Für reale Spiele ist die Zeitkomplexität i.A. völlig impraktikabel!

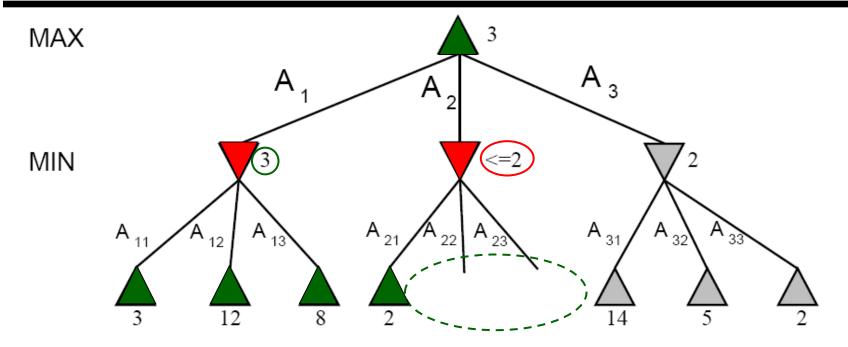
- ⇒ Reduktion der Laufzeit durch *Alpha-Beta-Kürzung* (engl. *Pruning*) durch Abschneiden von Knoten und Teilbäumen, die die Entscheidung überhaupt nicht beeinflussen können
- ⇒ Qualitativ dasselbe Ergebnis wie mit Minimax bei besserer Laufzeit!

Alpha-Beta-Kürzung: Beispiel





Alpha-Beta-Kürzung: Beispiel



- Falls die Züge A_{22} , A_{23} <u>höhere</u> Bewertungen als A_{21} erhalten, wird MIN diese verwerfen, da A_{21} besser ist für MIN.
- Falls Züge A_{22} , A_{23} <u>niedrigere</u> Bewertungen als A_{21} erhalten, wird MAX diese genauso wie A_{21} verwerfen, da A_{1} besser für MAX ist als das resultierende A_{2} .
- Allgemein: sobald für den aktuellen Knoten n durch Betrachtung einiger Nachfolger fest steht, dass eine bessere Wahl in einem Vorgängerknoten möglich ist,
 kann n mit gesamtem Unterbaum verworfen werden.

Alpha-Beta-Werte

zur Erinnerung: Minimax-Algorithmus setzt Tiefensuche ein!

→ immer Betrachtung <u>eines</u> aktiven Pfades.

Für diesen werden zwei Werte gehalten:

- α = aktuell bester Wert für MAX auf *aktivem* Pfad.
- β = aktuell bester Wert für MIN auf *aktivem* Pfad.

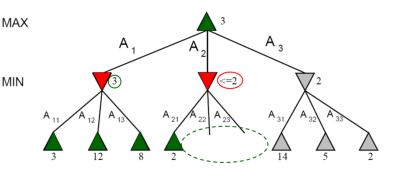
Initialisierung: $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$

Strategie: Fortlaufende Aktualisierung von α und β und sowie Verwerfen von Unterbäumen, deren Ergebnisse schlechter sein müssen als die aktuellen Werte von α und β .

Wann kann abgeschnitten werden?

Es gilt:

- α-Werte von MAX-Knoten starten mit -∞ und können nie abnehmen.
- β-Werte von MIN-Knoten starten mit +∞ und können nie zunehmen.
- (1) Abschneiden des restl. Unterbaums unterhalb eines MIN-Knotens, sobald der Wert eines Nachfolgeknotens kleiner oder gleich der α-Schranke seines MAX-Vorgängerknotens ist.

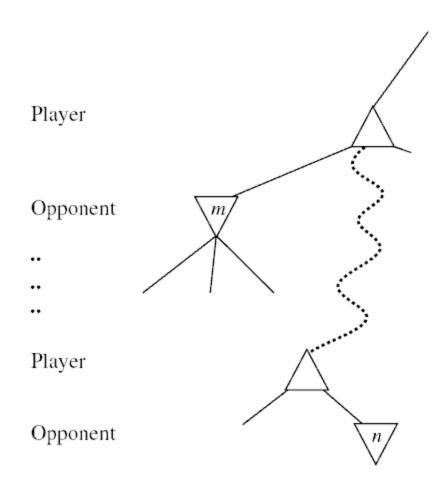


19

(2) Abschneiden des restl. Unterbaums unterhalb eines MAX-Knotens, sobald der Wert eines Nachfolgeknotens größer oder gleich der β-Schranke seines MIN-Vorgängerknotens ist.

Alpha-Beta-Suche liefert Ergebnisse, die genauso gut sind wie bei vollständiger Minimax-Suche bis zur gleichen Tiefe (weil nur irrelevante Zweige eliminiert werden).

Alpha-Beta-Kürzung: Allgemein



Allgemein: Falls Spieler in Elternknoten von n oder in noch höherem Vorgängerknoten von n bessere Alternative m findet, wird der Spieler nie zum Knoten n gehen!

Alpha-Beta-Algorithmus (1)

```
function Alpha-Beta-Search(state) returns an action
   inputs: state, current state in game
                                                           Initialisierung mit Zustand
                                                           und initialen \alpha- und \beta-Werten
   v \leftarrow \text{MAX-VALUE}(state, -\infty, +\infty)
   {f return} the action in {f Successors}(state) with value v
function MAX-VALUE(state, \alpha, \beta) returns a utility value
   inputs: state, current state in game
             lpha, the value of the best alternative for \, MAX along the path to state
             \beta, the value of the best alternative for MIN along the path to state
   if Terminal-Test(state) then return Utility(state)
   v \leftarrow -\infty
   for a, s in Successors(state) do
      v \leftarrow \underline{Max}(v, \underline{Min-Value}(s, \alpha, \beta))
      if v \geq \beta then return v
                                                        Pruning
      \alpha \leftarrow \text{Max}(\alpha, v)
                                          Nur MAX-Knoten verändern
   return v
                                            (= erhöhen) Alpha-Werte
```

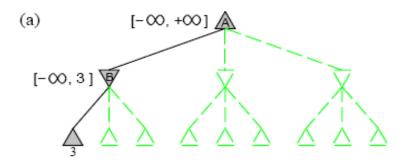
Alpha-Beta-Algorithmus (2)

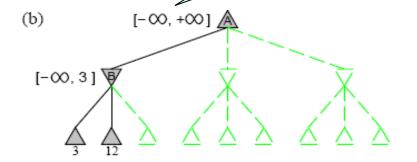
```
function MIN-VALUE(state, \alpha, \beta) returns a utility value inputs: state, current state in game \alpha, the value of the best alternative for MAX along the path to state \beta, the value of the best alternative for MIN along the path to state if Terminal-Test(state) then return Utility(state) v \leftarrow +\infty for a, s in Successors(state) do v \leftarrow \underline{\text{Min}(v, \text{Max-Value}(s, \alpha, \beta))} if v \leq \alpha then return v Pruning \beta \leftarrow \underline{\text{Min}(\beta, v)} Nur MIN-Knoten verändern return v (= verringern) Beta-Werte
```

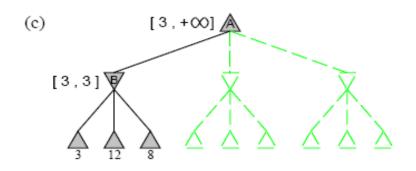
Alpha-Beta-Algorithmus: Beispiel

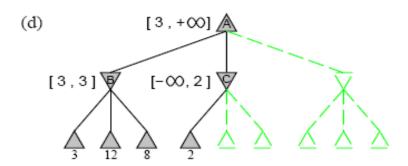
Alpha-Beta-Algm. im Zwei-Schichten-Spielbaum*:

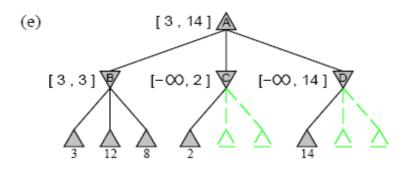
Bereiche möglicher Werte für alle inneren Knoten

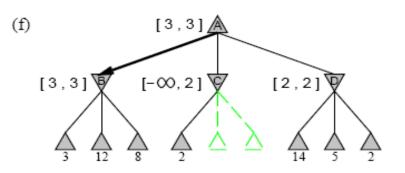












^{*} Darstellung entsprechend S. Russel, P. Norvig: Künstliche Intelligenz – Ein moderner Ansatz (2. Aufl.), Pearson Studium, 2004

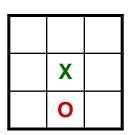
Alpha-Beta für Tic-Tac-Toe (1)

Beispiel für Tic-Tac-Toe auf Zwei-Schichten-Spielbaum (1 Zug MAX, 1 Zug MIN):

Bewertungs- bzw. Evaluierungsfunktion e(p) eines Spielzustandes p sei

- wenn Gewinnposition für MAX: +∞
- wenn Gewinnposition für MIN: -∞
- sonst: Zahl der offenen 3-Ketten für MAX
 - Zahl der offenen 3-Ketten für MIN.

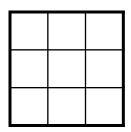
Beispiel:



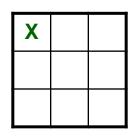
$$e(p) = 6 - 4 = 2$$

Alpha-Beta für Tic-Tac-Toe (2)

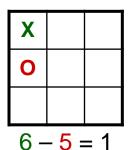
1) Start

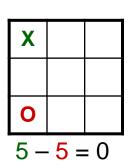


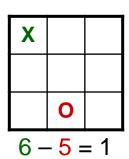
2) erster mögl. Zug MAX

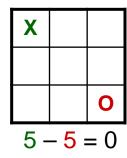


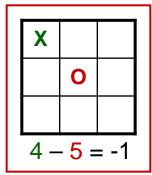
3) Mögliche Reaktionen MIN (unter Ausnutzung der Brettsymmetrie):











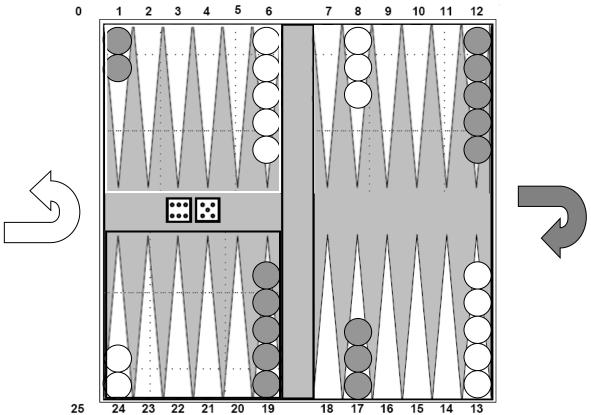
MIN wird -1 wählen:

- → MIN wird alternativ nur Zug mit Wert $w \le -1$ wählen:
- \rightarrow obere Schranke für MIN im entspr. Zustand: $\beta = -1$
- → für MAX ist -1 aktuell maximale Bewertung eines Nachfolgers von Start,
- → MAX wird in Start als Zug nur einen mit Wert größer oder gleich -1 wählen,
- \rightarrow untere Schranke für Bewertung des Zuges von Start für MAX: α = -1

Evaluierungsfunktion

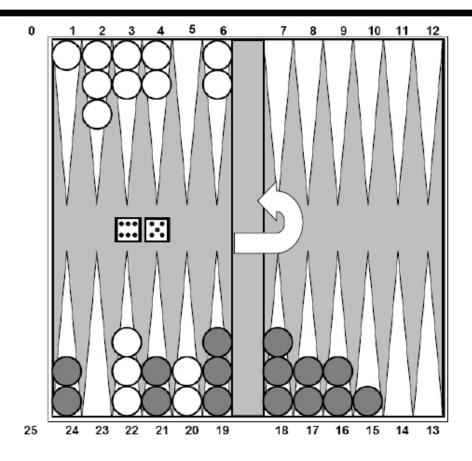
- Alpha-Beta-Suche schneidet am meisten ab, wenn jeweils der beste Zug als erstes betrachtet wird.
- Bester Fall (immer bester Zug zuerst) reduziert den Suchaufwand auf $O(b^{m/2})$ und nicht $O(b^m)$ wie bei Minimax.
- D.h. wir können doppelt so tief in der gleichen Zeit suchen.
- Knuth & Moore (1975): durchschnittlicher Fall (zufällig verteilte Züge) reduziert den Suchaufwand auf $O(b^{3m/4})$.
- Praktischer Fall: Schon mit relativ einfachen Anordnungsheuristiken (zuerst Schlagen, dann Drohen, dann Vorwärtsgehen, dann Rückzug) kommt man in die Nähe des besten Falls.

Spiele mit Zufallsereignissen: Backgammon



Hier relevant:

- Ziel: Eigene Steine erst ins eigene Feld und dann aus dem Spiel bringen.
 - Weiß zieht im Gegen-UZS ins Feld 1-6 und dann auf die 0.
 - Schwarz zieht im Uhrzeigersinn ins Feld 19-24 und dann auf die 25.
- Gültige Züge: dorthin, wo nicht mind. 2 gegnerische Steine sind.

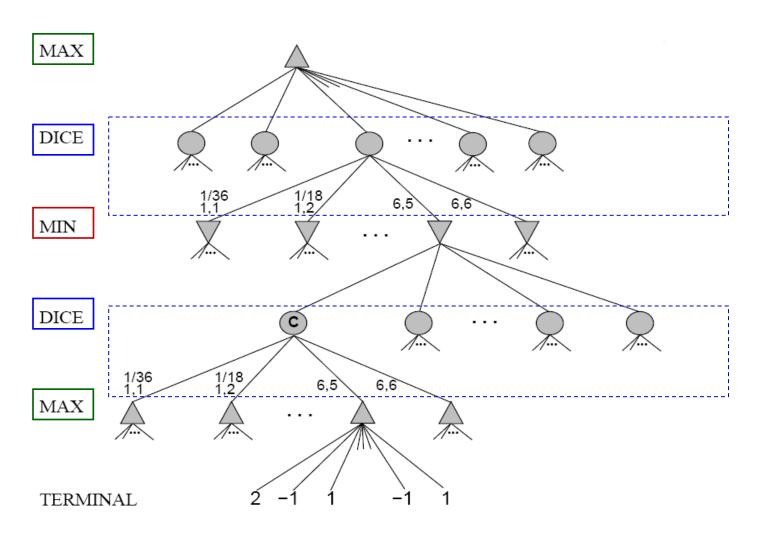


Weiß hat gerade 5 und 6 gewürfelt und hat 4 legale Züge:

$$(20 \xrightarrow{6} 14, 20 \xrightarrow{5} 15), (20 \xrightarrow{6} 14, 6 \xrightarrow{5} 1), (20 \xrightarrow{6} 14, 14 \xrightarrow{5} 9), (20 \xrightarrow{5} 15, 15 \xrightarrow{6} 9).$$

Spielbaum für Backgammon

Zusätzlich zu MIN- und MAX-Knoten brauchen wir Würfelknoten (chance nodes oder dice nodes). Deren ausgehende Kanten beschreiben die möglichen Ergebniswerte und deren Wahrscheinlichkeiten.

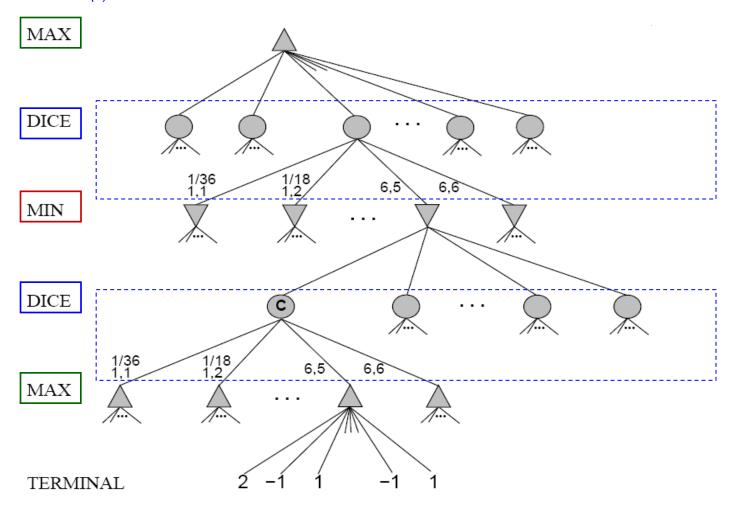


Berechnung des erwarteten Nutzens

EXPECTIMAX(n) =

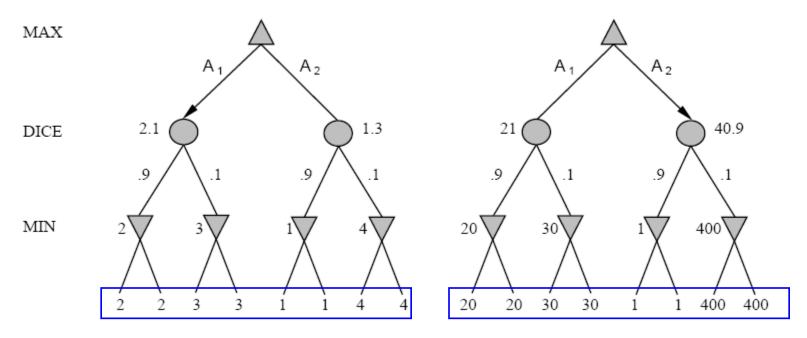
- UTILITY(n)
- max_{s∈Successors(n)} EXPECTIMAX(s)
- min_{s∈Successors(n)} EXPECTIMAX(s)
- $\Sigma_{s \in Successors(n)} P(s) \cdot EXPECTIMAX(s)$

if *n* is a terminal state if *n* is a MAX node if *n* is a MIN node if *n* is a chance node



Probleme

• Varianten von Evaluierungsfunktionen erhalten i. A. nicht die Ordnung zwischen Zügen: Auswahl links: A_1 , Auswahl rechts: A_2 .



Allg.: Bewertungsfunktion muss positiv lineare Transformation der Gewinnchancen sein.

• Die Suchkosten steigen: Statt des $O(b^m)$ von Minimax haben wir $O(b^m \cdot n^m)$, wenn n die Anzahl möglicher Würfelergebnisse ist. Bei Backgammon ist n = 21 und b durchschnittlich 20, manchmal aber sogar um 4000. Unter diesen Umständen kann m maximal 2 sein (also 2 Halbzüge).

Stand der Kunst (1)

Dame (Checkers, Draughts, d.h. nach internat. Regeln): Das Programm CHINOOK ist amtierender Weltmeister im Mensch-Maschine-Vergleich (anerkannt von ACF (American Checkers Federation) und EDA (English Draughts Ass.)) und höchst bewerteter Spieler.

Am 19. Juli 2007 veröffentlichte die Zeitschrift Science den Artikel von Schaeffers Team "Checkers Is Solved", der bewies, dass das beste Resultat eines Gegners von Chinook nur unentschieden sein kann.

http://de.wikipedia.org/wiki/Chinook_(Software) (27.4.15)

Stand der Kunst (2)

Backgammon: Das Programm BKG schlug den amtierenden Weltmeister 1980. Ein neueres Programm ist unter den ersten 3 Spielern.

Reversi (Othello): Sehr gut auch auf normalen Computern. Programme werden bei Turnieren nicht zugelassen.

Stand der Kunst (3)

😋: Die besten Programme spielen etwas besser als Anfänger (Verzwer-



Zitat aus http://de.wikipedia.org/wiki/Go (Spiel) (19.04.2012)

Schach (1)

Schach als "Drosophila" der KI-Forschung:

- begrenzte Anzahl von Regeln bringt unbegrenzte Zahl von Spielverläufen hervor. Für eine Partie von 40 Zügen gibt es 1.5 × 10¹²⁸ mögliche Spielverläufe;
- suggeriert Sieg durch Logik, Intuition, Kreativität, Vorwissen;
- erfordert nur spezielle Schachintelligenz, keine "Alltagsintelligenz".

Spielstärke wird in ELO-Punkten gemessen:

Spielstärken (Stand Juli 1999):

G. Kasparow	2851 ELO
V. Anand	2758 ELO
A. Karpow	2710 ELO
Deep Thought 2	2680 ELO

Siehe auch: http://de.wikipedia.org/wiki/Elo-Zahl (27.04.2015)

^{*} Arpad E. Elo, Administrator (1935 - 1937) of the Amer. Chess Federation.

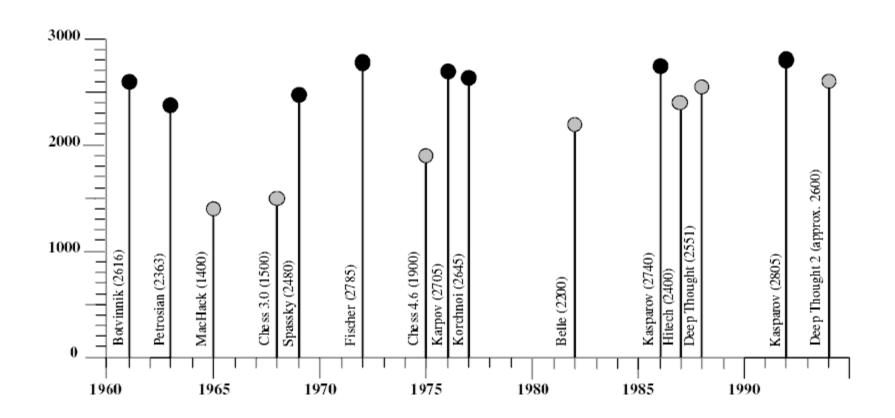
Schach (2)

1997 wird der amtierende Weltmeister G. Kasparow erstmals in einem Spiel aus 6 Partien von einem Computer geschlagen!

- → Deep Thought 2 (IBM Thomas J. Watson Research Center)
- spezielle Hardware (32 Rechner mit 8 Chips, 2 Mio Berechnungen pro Sekunde)
- heuristische Suche
- fallbasiertes Schließen + Lerntechniken
 - 1996 Wissen aus 600.000 Schachpartien
 - 1997 Wissen aus 2 Mio. Schachpartien
 - Training durch Großmeister

Duell "Maschinenmensch Kasparow - Menschmaschine Deep Thought 2"

Schach (3)



Schach (4)

Elo-Zahlen der stärksten Schachprogramme^[6]

Rang	Name	Punkte
1	Stockfish 7.0 x64 12CPU	3458
2	Komodo 9.3 x64 12CPU	3416
3	Houdini 4.0 x64 12CPU	3247
4	Gull 3.0 x64 12CPU	3242
5	Fritz 15 x64 12CPU	3180
6	Rybka 4.1 x64 12CPU	3133
7	Critter 1.6 x64 4CPU	3122
8	Equinox 3.00 x64 4CPU	3112
9	Ginkgo 1.5 x64 4CPU	3103
10	Sting SF 5 x64 4CPU	3046

CEGT-Rangliste

Quelle:

http://de.wikipedia.org/wiki/Schachprogramm

(Abruf: 21.04.2016)

Zum Vergleich: Ein Schachweltmeister von heute zeigt ca. ELO 2850 (Magnus Carlsen 2851 (https://de.wikipedia.org/wiki/Elo-Zahl, 21.04.2016). Diese ELO-Zahlen für Schachprogramme sind aber nicht ohne weiteres mit denen menschlicher Schachspieler zu vergleichen, da sie überwiegend durch Partien zwischen Computern ermittelt wurden und nicht durch Teilnahme an offiziellen Turnieren.

Schach (5)

Eingesetzte Methoden und Techniken in Schachcomputern:

- Alpha-Beta-Suche
- ... mit dynamischer Tiefenfestlegung bei unsicheren Positionen,
- gute (aber normalerweise einfache) Evaluierungsfunktionen,
- große Eröffnungsdatenbanken,
- sehr große Endspieldatenbanken (für Dame: alle 8-Steine Situationen),
- und sehr schnelle und parallele Rechner!

Zusammenfassung

- Ein Spiel ist i. A. ein Suchproblem in einer Multiagenten-Umgebung.
- Ein Spiel kann durch Angabe der *Zustandsmenge*, des *Anfangszustands*, der *Operatoren* (legale Züge), eines *Terminaltests* und einer *Nutzenfunktion* (Ausgang des Spiels) beschrieben werden.
- In 2-Personen-Brettspielen kann der Minimax-Algorithmus den besten Zug bestimmen, indem er den ganzen Spielbaum aufbaut.
- Der Alpha-Beta-Algorithmus liefert das gleiche Ergebnis, ist jedoch effizienter, da er überflüssige Zweige abschneidet.
- Normalerweise kann nicht der ganze Spielbaum aufgebaut werden, so dass man Zwischenzustände mit einer Evaluierungsfunktion bewerten muss.
- Spiele mit Zufallselement kann man mit einer Erweiterung des Minimax und auch des Alpha-Beta-Algorithmus behandeln.