Universidad Católica San pablo

Matemática para la Computación

Lista de Ejercicios Nro.1

Entregado por:
Choqueluque Roman David
Flores Benites, Victor
Moreno Vera, Felipe Adrian
Palomino Paucar, Daniel
Ramos Cooper, Solange Griselly

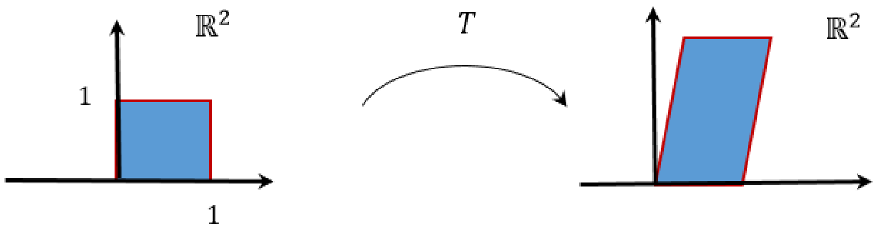
Profesor:
Sergio Aquise Escobedo

17 de julio de 2018

1. Lista de ejercicios de repaso

Ejercicio 16:

Para la región dada en la Figura 1, la transformación $T(X) = AX$ definida por $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ para $k > 0$ realiza una compresión si $0 < k < 1$, o expansión para $k > 1$ (trasquila un cuadrado en un paralelogramo) verifique que los vectores dados por los vértices del cuadrado corresponden a los vértices del paralelogramo. Determine si la transformación lineal tiene inversa, en caso de existir, halle dicha transformación y explique el efecto gráfico de la transformación inversa.



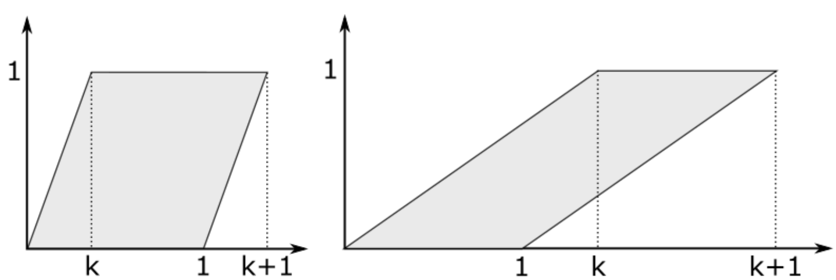
Solución:

Al aplicar la transformada

$$T(X) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1}$$

en los vertices del cuadrado se obtiene:

$$\begin{array}{cc} T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix} & T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k+1\\1\end{bmatrix} \\ T\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \end{array} \tag{2}$$



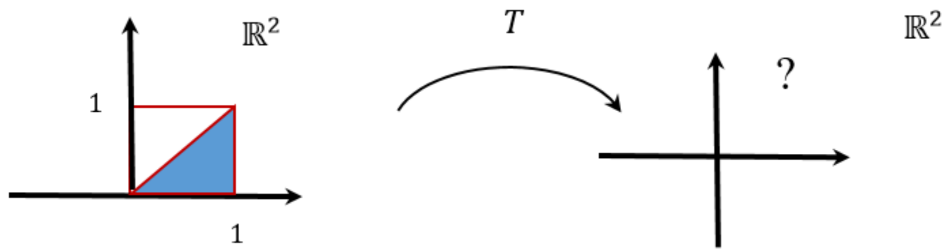
(a) Compresión $0 < k < 1$ (b) Expansión $1 < k$

Para demostrar que la transformación lineal tiene inversa, verificamos que la determinante es diferente de cero:

$$|T| = \left| \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 1 \tag{3}$$

entonces, se demuestra que la transformación lineal es invertible para todo valor de k.

Ejercicio 17:
Para cada una de las siguientes matrices:
$a)\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\quad b)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $\quad c)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $\quad d)\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ $\quad e)\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$
determine la transformación lineal asociada y en efecto grafico que producirá en la región descrita en la Figura 2.

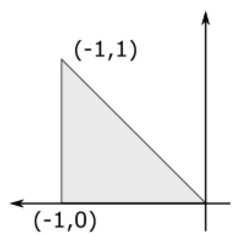


Solución:

(a) Dado $T = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, aplicamos la transformación lineal a los vértices del triángulo:

$$T\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \tag{4}$$

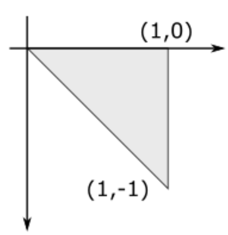
Entonces, el efecto gráfico de la transformación lineal es:



(b) Dado $T = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, aplicamos la transformación lineal a los vértices del triángulo:

$$T\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{5}$$

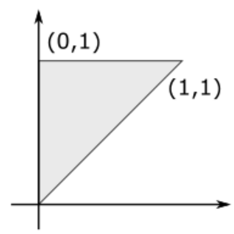
Entonces, el efecto gráfico de la transformación lineal es:



(c) Dado $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, aplicamos la transformación lineal a los vértices del triángulo:

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

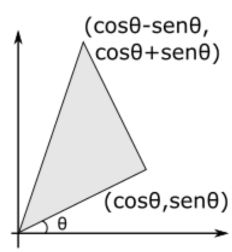
Entonces, el efecto gráfico de la transformación lineal es:



(d) Dado $T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, aplicamos la transformación lineal a los vértices del triángulo:

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - \sin\theta \\ \sin\theta + \cos\theta \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \tag{7}$$

Entonces, el efecto gráfico de la transformación lineal es:

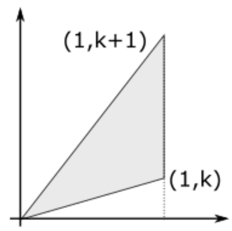


Es decir, el efecto gráfico de la transformación lineal es una rotación en θ grados sobre el origen de coordenadas.

(e) Dado $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ con $k > 0$, aplicamos la transformación lineal a los vértices del triángulo:

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k+1 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} \tag{8}$$

Entonces, el efecto gráfico de la transformación lineal es:

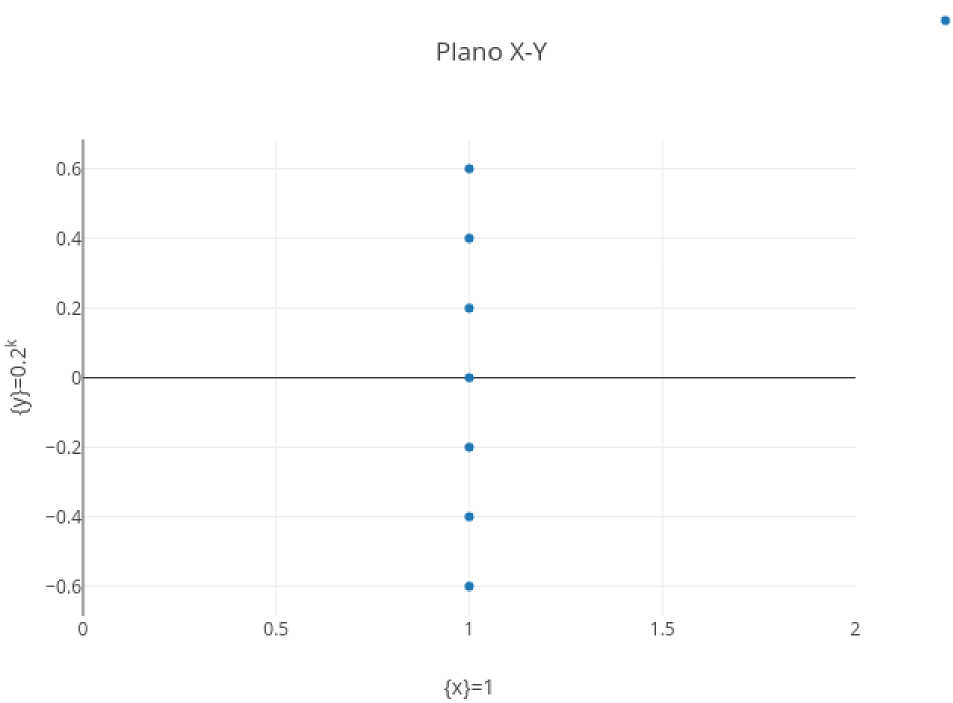


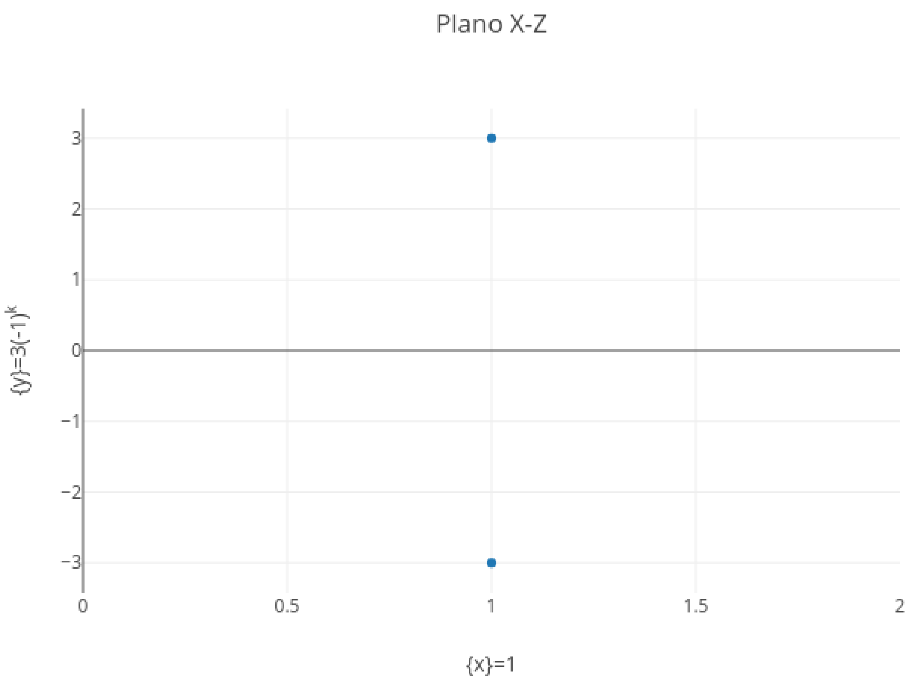
Ejercicio 18:
Sea S el espacio vectorial de las señales de tiempo discreto. Grafique las siguientes señales $\{y_k\} = 0{,}2^k$, $\{x_k\} = 1^k$, $\{z_k\} = 3(-1)^k$.

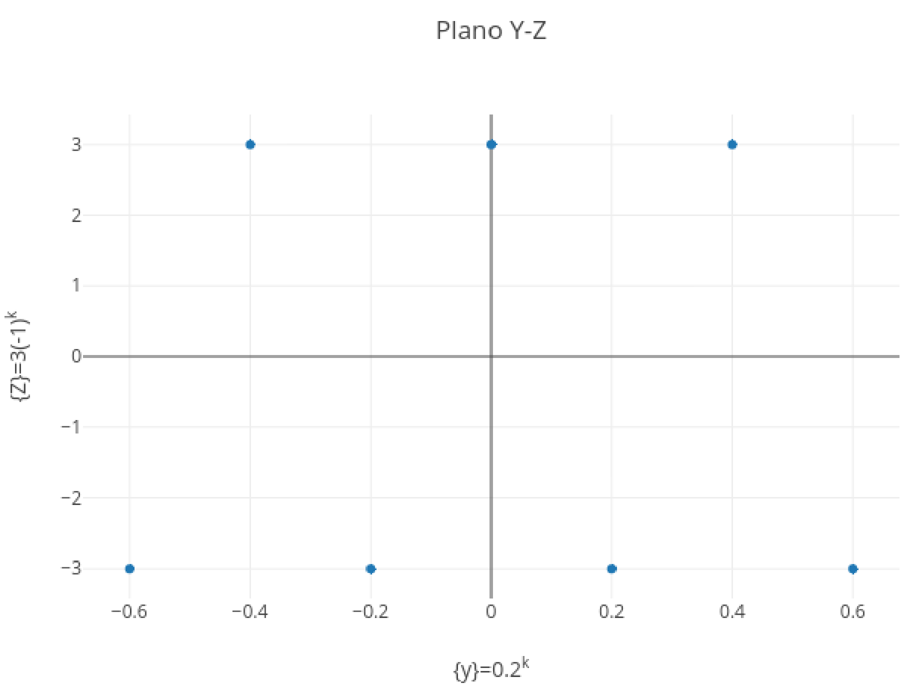
Solución:

Simplificando:
$\{x_k\} = 1$, $\forall k \in Z$
$\{y_k\} = 0{,}2^k$
$\{z_k\} = 3(-1)^k$

Graficando por planos:







Ejercicio 19:
Verifique que las señales $u_k = 1^k$, $v_k = (-2)^k$, $w_k = 3^k$ son linealmente independientes.

Solución:

Dada la combinación lineal

$$c_1u_k + c_2v_k + c_3w_k = 0 \tag{9}$$

Suponiendo que la ecuación es cierta para todo k, obtenemos:

$$\begin{aligned} c_1u_{k+1} + c_2v_{k+1} + c_3w_{k+1} = 0 \\ c_1u_{k+2} + c_2v_{k+2} + c_3w_{k+2} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Transformando la Ecuación 10 en términos de c_1, c_2, c_3, w_k:

$$\begin{aligned} c_1u_k + c_2v_k + c_3w_k = 0 \\ c_1u_k - 2c_2v_k + 3c_3w_k = 0 \\ c_1u_k + 4c_2v_k + 9c_3w_k = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Se obtiene la matriz de Casorati:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1u_k \\ c_2v_k \\ c_3w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Las señales u_k, v_k , w_k son linealmente independientes si la determinante de la matriz de Casorati es diferente de cero.

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \right| = -30 \tag{13}$$

Como la determinante es diferente de cero, entonces $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_3 = 0$. Por lo tanto $\{u_k, v_k, w_k\}$ son linealmente independientes.

Ejercicio 20

Dados los escalares $a_0, ..., a_n$ con a_0 y a_n distintos de cero y dada una señal $\{z_k\}$, la ecuación definida por:

$$a_0y_{k+n} + a_1y_{k+n-1} + ... + a_{n-1}y_{k+1} + a_ny_k = z_k, \quad \forall k$$

Se denomina ecuación lineal en diferencias o relación lineal de recurrencia de orden n. En el procesamiento digital de señales, una ecuación en diferencias describe un filtro lineal y los coeficientes a_i se denominan coeficientes del filtro. Para el filtro:

$$0{,}35y_{k+2} + 0{,}5y_{k+1} + 0{,}35y_k = z_k$$

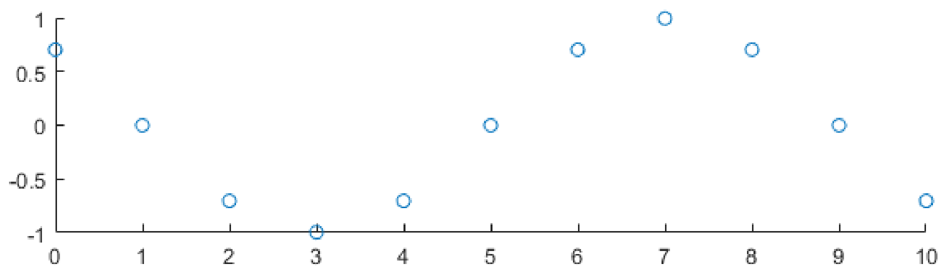
Usando la señal discreta $\{y_k = \cos(\pi k/4)\}$, para algunos valores de $k \geq 0$ calcule y grafique la señal del filtro $\{z_k\}$.

Solución:

Tabulamos la señal del filtro:

k	y_k	y_{k+1}	y_{k+1}	$0{,}35y_{k+2} + 0{,}5y_{k+1} + 0{,}33y_k$
0	1	0.70711	0	0.70355
1	0.70711	0	-0.70711	0
2	0	-0.70711	-1	-0.70355
3	-0.70711	-1	-0.70711	-0.99497
4	-1	-0.70711	0	-0.70355
5	-0.70711	0	0.70711	0
6	0	0.70711	1	0.70355
7	0.70711	1	0.70711	0.99497
8	1	0.70711	0	0.70355
9	0.70711	0	-0.70711	0
10	0	-0.70711	-1	-0.70355

Graficando:



Ejercicio 21:
Dadas dos funciones f_1, f_2 se denomina ortogonales en el intervalo $[a, b]$ si $\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0$.

(a) Demostrar que el conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, ...\}$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

(b) Demostrar que el conjunto $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, ...\right\}$ es ortonormal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución:

Realizamos las demostraciones por inducción.

(a) Partimos demostrando el caso base: $f_1(x) = 1$ y $f_2(x) = \cos x$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = sen(\pi) - sen(-\pi) = 0 \tag{14}$$

Suponiendo que el conjunto $\{1, \cos x, \dots, \cos nx\}$ es ortogonal, demostramos para $\cos{(n+1)x}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos{(n+1)x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos x + \cos{(n+1)x}\right] dx \tag{15}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos{(n+1)x} dx = \frac{1}{2}\left[\sin x + \frac{1}{n+1}\sin{(n+1)x}\right]\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0 \tag{16}$$

Por lo tanto, concluimos que el conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, ...\}$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

(b) Para que el conjunto sea ortonormal, hacemos que cada función tenga módulo 1. Para el caso base tenemos $f(x) = 1/\sqrt{2\pi}$:

$$\|f(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (1/\sqrt{2\pi})dx = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1)dx = 1 \tag{17}$$

Para $\cos nx$:

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + cos2nx)dx} = \sqrt{\pi} \tag{18}$$

Por tanto, el conjunto ortonormal es $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, ...\right\}$.

Ejercicio 22:
Si suponemos que $\{\phi_n(x))\}_{n\in\mathbb{Z}}$, es un conjunto ortogonal infinito de funciones en un intervalo $a \leq x \leq b$. Si $y = f(x)$ es una funcion definida en el intervalo $[a, b]$, es posible determinar los coeficientes c_n para los cuales $f(x)$ se describe como:

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots$$

a la cual se le denomina Serie de Fourier Generalizada de $f(x)$. Pruebe que sus coeficientes son dados por $c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\|\phi_n(x)\|^2}$.

Solución:

Sea la función: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\phi_k(x)$, donde $\{\phi_n(x))\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortogonal infinito de funciones en un intervalo $a \leq x \leq b$. Se aplica la multiplicación punto entre la funcion $f(x)$ y $\phi_n(x)$, se obtiene:

$$\langle f(x), \phi_n(x)\rangle = c_0 \langle \phi_0(x), \phi_n(x)\rangle + c_1 \langle \phi_1(x), \phi_n(x)\rangle + \cdots + c_n \langle \phi_n(x), \phi_n(x)\rangle + \dots \tag{19}$$

Como el producto punto de dos funciones ortogonales es cero, la ecuación queda:

$$\langle f(x), \phi_n(x)\rangle = c_n \langle \phi_n(x), \phi_n(x)\rangle \tag{20}$$

Teniendo en cuenta que $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\langle \phi_n(x), \phi_n(x)\rangle}$:

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx = c_n \|\phi_n(x)\|^2 \tag{21}$$

Finalmente:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\|\phi_n(x)\|^2} \tag{22}$$

Ejercicio 25:
Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es una matriz banda de amplitud de banda $2k+1$ si $|i-j| > k$ implica que $a_{ij} = 0$ ¿Cuales son las amplitudes de banda de las matrices tridiagonales y pentadiagonales? ¿es el producto de dos matrices banda con una longitud de banda dada nuevamente una matriz de banda con la misma longitud de banda?
Solución:

1. ¿Cuales son las amplitudes de banda de las matrices tridiagonales?

   Una matriz tridiagonal es una matriz cuadrada con elementos distintos a cero en la diagonal principal y las diagonales inmediatamente adyacentes. Es decir, para $|i-j| > 1$ los elementos $a_{ij} = 0$. La amplitud de banda se define como la cantidad de diagonales diferentes de cero, en el caso de la matriz tridiagonal es igual a 3.

2. ¿Cuales son las amplitudes de banda de las matrices pentadiagonales?

   Una matriz pentadiagonal es una matriz cuadrada con elementos distintos a cero en la diagonal principal y las dos diagonales más cercanas en la parte superior de la matriz, y las dos diagonales más cercanas en la parte inferior de la matriz. Es decir, para $|i-j| > 2$ los elementos $a_{ij} = 0$. La amplitud de banda de matriz pentadiagonal es 5.

3. ¿Es el producto de dos matrices banda con una longitud de banda dada nuevamente una matriz de banda con la misma longitud de banda?

   Sean las matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ de dimensiones $n \times n$, donde A y B son matrices banda de amplitud de banda $2k+1$ (es decir, para $|i-j| > k$ los coeficientes a_{ij} son iguales a cero), tal que: $AB = C$.

   Analizamos únicamente c_{0n}:

   $$c_{0n} = \sum_{p=0}^{n} a_{0p} b_{pn} \tag{23}$$

   como $a_{0p} = 0$ para $p > k$ y $b_{p0} = 0$ para $p < k$, tenemos:

   $$c_{0n} = \sum_{p=k}^{k} a_{0p} b_{p0} = a_{kp} b_{pk} \tag{24}$$

   como $a_{kp} b_{pk} \neq 0$, entonces la matriz C no es una matrices banda de amplitud $2k+1$.

Ejercicio 26:
Pruebe la desigualdad de Schwarz.

Solución:
La desigualdad de Schwarz es:

$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle \tag{25}$$

En $\mathbb{R}^n$ queda expresado:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \tag{26}$$

Para demostrar, partimos de la suma de cuadrados:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)x^2 + 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq 0 \tag{27}$$

Esta ecuación es un polinomio cuadrático. Para que el polinomio sea siempre positivo, este debe poseer solo una solución o no debe poseer soluciones reales. Entonces, el discriminante del polinomio debe ser menor o igual a cero.

$$\Delta = \left(2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0 \tag{28}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0 \tag{29}$$

Finalmente:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \tag{30}$$

Ejercicio 36:

Considerando la matriz de Hilbert de orden n:

$$H_n = \left[\frac{1}{i+j-1}\right], 1 \leq i, j \leq n$$

(a) Determine H_4 y muestre que es inversible.

(b) Halle $(H_4)^{-1}$ y use para resolver el sistema $H_4 x = b$, donde $b = [2 \quad -1 \quad 3 \quad 5]^\intercal$

Solución:

(a) Matriz de Hilbert H_4:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Verificamos que la determinante es diferente de cero:

$$|H_4| = \left|\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}\right| = 1{,}653439 \times 10^{-7} \tag{32}$$

Se comprueba que la matriz H_4 es invertible.

(b) La inversa de la Matriz de Hilbert H_4:

$$H_4^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Resolviendo la ecuación $H_4x = b$, obtenemos $x = H_4^{-1}b$:

$$x = H_4^{-1}b = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 172 \\ -1140 \\ 1620 \\ -560 \end{bmatrix} \tag{34}$$

2. Ben Noble

Ejercicio 3:
Sea V igual a P^3, el espacio de polinomios con grado estrictamente menor a 3, y sea W el espacio análogo P^4. Defina T de V a W de modo que, para cada polinomio f en V, $T(f)$ sea el polinomio de W cuyo valor en t sea igual a $tf(t) + (f(t) - f(0))/t$. Encuentre la representación matricial de T con respecto a las bases ordenadas:

$$B = 1, 1+t, 1+t+t^2 \quad \text{para } V, \text{ y}$$

$$C = 1, 1-t, 1+2t+t^2, 1-3t+3t^2-t^3 \quad \text{para } W.$$

Compruebe que la representación es correcta calculando $T(-2+3t-t^2)$.

Solución:

Sea A la representación matricial de la transformación lineal T de la base B a la base C, entonces:

$$A = (T_C(1,0,0)_B, T_C(0,1,0)_B, T_C(0,0,1)_B)$$

Calculando:

$$T_C(1,0,0)_B = t * 1 + (1-1)/t = t$$

Haciendo los caĺculos de la combinación lineal de C:

$$T_C(1,0,0)_B = t = 1 * a + (1-t) * b + (1+2t+t^2) * c + (1-3t+3t^2-t^3) * d = (a,b,c,d)_C$$

$$T_C(1,0,0)_B = (1,-1,0,0)_C$$

$$T_C(0,1,0)_B = t(1+t) + (1+t-1)/t = 1+t+t^2$$

$$T_C(0,1,0)_B = -1*1 + 1(1-t) + 1(1+2t+t^2)$$
$$T_C(0,1,0)_B = (-1,1,1,0)_C$$

$$T_C(0,0,1)_B = t(1+t+t^2) + (1+t+t^2-1)/t = 1+2t+t^2+t^3$$
$$T_C(0,0,1)_B = -11*1 + 9(1-t) + 4(1+2t+t^2) - 1(1-3t+3t^2-t^3)$$
$$T_C(0,0,1)_B = (-11,9,4,-1)_C$$

Reemplazando se tendría:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -11 \\ -1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La cual es la representación matricial de T:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -11 \\ -1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}_C$$

El valor de $T(-2+3t-t^2)$ se puede obtener de 2 maneras.
Primero: (Reemplazando en la Transformación Lineal T)

$$T(-2+3t-t^2) = t(-2+3t-t^2) + (-2+3t-t^2-(-2))/t$$
$$T(-2+3t-t^2) = 3-3t+3t^2-t^3$$

Segundo: (Usando la representación matricial)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -11 \\ -1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_C$$

Resolviendo se tendría:

$$T_C(-2+3t-t^2) = (2,0,0,1)_C$$
$$T(-2+3t-t^2) = 2*1 + 1(1-3t+3t^2-t^3)$$
$$T(-2+3t-t^2) = 3-3t+3t^2-t^3$$

Por lo tanto queda demostrado la transformación lineal.

Ejercicio 6

Sea P^4 como en el problema 3 y sea T la transformacion lineal de P^4 a P^4 que transforma cada polinomio f en la derivada de $tf(t)$. Utilice la base ordenada $(1, t, t^2, t^3)$ de P^4 tanto como dominio como contradominio para encontrar una representacion matricial de T y compruebe que la representación es correcta calculando $T(2 - 3t + t^2 - t^3)$ por dos caminos.

Solución:

Sabemos que:

$$T(P(t)) = (tP(t))'$$

Transformamos cada vector de la base a su imagen:

$$T(1, 0, 0, 0) = (t, 0, 0, 0)' = (1, 0, 0, 0)$$

$$T(0, 1, 0, 0) = (0, t^2, 0, 0)' = (0, 2, 0, 0)$$

$$T(0, 0, 1, 0) = (0, 0, t^3, 0)' = (0, 0, 3, 0)$$

$$T(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, t^4)' = (0, 0, 0, 4)$$

Entonces la representación matricial de la matriz es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculamos $T(2 - 3t + t^2 - t^3)$ que transforma un polinomio en la derivada:

$$T(2 - 3t + t^2 - t^3) = \frac{\partial(t(2 - 3t + t^2 - t^3))}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial(2t - 3t^2 + t^3 - t^4)}{\partial t}$$

$$= 2 - 6t + 3t^2 - 4t^3 \qquad ...(1)$$

Ahora calculamos la transformada del polinommio $2 - 3t + t^2 - t^3$ con la ecuacion $Ax = B$:

$$v_1 = 2 - 3t + t^2 - t^3 = [2, -3, 1, -1]$$

$$Ax = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad ...(2)$$

Con la igualdad de (1) y (2) se comprueba la validez de la transformación lineal.

Ejercicio 15

Sea $C' = \{[1\ 2\ 3]^T; [0\ 3\ \ -1]^T; [0\ 0\ 1]^T\}$. Mediante el teorema 6.17, encuentre la matriz que representa a T del problema 13 con respecto a B y a C'. Compruebe calculando $T[2\ 1]^T$ por dos caminos.

Solución:

- La matriz que representa a T del ejercicio 13 con respecto a B y a C'.

$$T : \Re^2 \to \Re^3$$
$$T\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ 2v_1 + v_2 \\ v_1 - 2v_2 \end{bmatrix}$$

Donde: $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}; C' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

La matriz de T con respecto a B y C es:

$$A_T = [T]_C^B \in M_{3x2}$$
$$A_T = \begin{bmatrix} T(v_1) & T(v_2) \end{bmatrix}$$

$$T(v_1) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 = \alpha \\ 2 = 2\alpha + 3\beta \\ 1 = \alpha - \beta + \gamma \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{array} \right.$$

$$T(v_2) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -1 = \alpha \\ 1 = 2\alpha + 3\beta \\ -2 = \alpha - \beta + \gamma \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{array} \right.$$

Entonces: $A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Compruebe calculando $T([2\ 1]^T)$

Primera Forma:

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Segunda Forma:

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ 2v_1 + v_2 \\ v_1 - 2v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cambiando de base:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 5 = 2\alpha + 3\beta \\ 0 = \alpha - \beta + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 8:
Suponga que T es una transformación lineal de V a V siendo $||T||_{v,v} < 1$. Demuestre que $T^i(v)$ converge a 0 cuando i tiende a infinito para cada vector v.

Solución:
Siendo la norma del la (transformación) $||.||_{v.w}$ inducida por $||.||_v$ y $||.||_w$ definida como:

$$||F||_{v,w} = \sup_{v\neq 0, v\in V} \frac{||F(v)||_w}{||v||_v} \tag{35}$$

donde $||F||_{v,w}$ es la cota superior mínima. entonces sea la transformación lineal $F : V \to V$, llamemos α al **infimo** de todos los $v_i \in V$,donde $i = 0, 1, \ldots, \infty$, tales que:

$$\| F(\alpha) \| < \| F(v_i) \| \qquad \forall v_i \in V$$

y β es el supremo $\beta := \sup_{\|v\|\leq 1} \| v \|$, entonces en el infinito

$$\alpha = \beta = \| F(\alpha) \|.$$

por la condición dada en el problema tenemos que $||F||_{v,v} < 1$ y además la propiedad a de la norma de una transformación lineal $\| \; F(v) \; \| \geq 0$, se puede concluir $F^i(v)$ converge a 0 cuando i tiende a infinito para cada vector v.

Ejercicio 12
Para cada una de las siguientes matrices A:

$$A = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 6 & 6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

evalúe $\|A\|_1$ y $\|A\|_\infty$ y compruebe la desigualdad del siguiente teorema:
Dada la matriz A_{pxq} se cumple que:

$$\tfrac{\|A\|_1}{p} \leq \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 q$$

Solución:

- $A = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

  Hallando las matrices normales:

  $$\|A\|_1 = |-6| + |1| + |3| = 10$$
  $$\|A\|_\infty = \max\left(|-6|, |1|, |3|\right) = 6$$

  Comprobamos que se cumpla la desigualdad del enunciado:

  $$\frac{\|A\|_1}{p} \leq \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 q$$
  $$\frac{10}{3} \leq 6 \leq 10(1)$$

- $A = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

  Hallamos las matrices normales:

  $$\|A\|_1 = \max\left(|-8|, |1|, |2|, |8|\right) = 8$$
  $$\|A\|_\infty = |-8| + |1| + |2| + |8| = 19$$

  Comprobamos que se cumpla la desigualdad del enunciado:

  $$\frac{\|A\|_1}{p} \leq \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 q$$
  $$\frac{8}{1} \leq 19 \leq 8(4)$$

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

  Hallamos las matrices normales:

$$\|A\|_1 = 0$$
$$\|A\|_\infty = 0$$

  Comprobamos que se cumpla la desigualdad del enunciado:

$$\frac{\|A\|_1}{p} \leq \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 q$$
$$\frac{0}{2} \leq 0 \leq 0(2)$$

- $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 6 & 6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

  Hallamos las matrices normales:

$$\|A\|_1 = \text{máx}\,(|8| + |-6| + |2|, |-3| + |6| + |-6|) = \text{máx}\,(15, 16) = 16$$
$$\|A\|_\infty = \text{máx}\,(|8| + |-3|, |-6| + |6|, |-2| + |-6|) = \text{máx}\,(11, 12, 8) = 12$$

  Comprobamos que se cumpla la desigualdad del enunciado:

$$\frac{\|A\|_1}{p} \leq \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 q$$
$$\frac{16}{3} \leq 12 \leq 16(2)$$

3. Biswa Datta

Ejercicio 1
Probar cada uno de los siguientes enunciados:

1. Un conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n es base para R^n
2. Un conjunto $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ es base para R^n
3. Un conjunto de m vectores en R^n, donde $m > n$, es linealmente dependiente
4. Dos bases en R^n tienen el mismo numero de vectores
5. Span$(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$ es un subespacio de R^n, donde span$(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$ es el conjunto de vectores de combinación lineal de los k vectores $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$ desde un vector en el espacio R^n

6. Span$(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$ es el mas pequeño subespacio de R^n conteniendo $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$

Solución:

1. *Un conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n es base para R^n*
   Solución: Sea S un conjunto de n vectores en R^n

   $$S = v_1, v_2, v_3, ..., v_n$$

   Las dos condiciones para que S sea una base de R^n son; que S sea un conjunto de vectores linealmente independientes y que sea generador de R^n, sabemos que S es un conjunto de vectores linealmente independientes, por lo tanto faltaría demostrar que es un generador de R^n

   Supongamos que:

   $$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n) \in R^n$$

   La combinación lineal con el conjunto S es:

   $$\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n = \beta_1(v_1) + \beta_2(v_2) + \beta_3(v_3) + ... + \beta_n(v_n)$$

   Supongamos que S es un conjunto de vectores de base canónica, entonces tenemos:

   $$\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n = \beta_1(1, 0, 0, ..., 0) + \beta_2(0, 1, 0, ..., 0) + \beta_3(0, 0, 1, ..., 0) + ... + \beta_n(0, 0, 0, 0, ..., 1)$$

   Asi que S genera R^n

   $$R^n \ = < S >$$

   Por lo tanto, S es base para R^n.

2. *Un conjunto $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ es base para R^n*
   Solución: Sea S un conjunto de n vectores

   $$S = e_1, e_2, e_3, ..., e_n$$

   Las dos condiciones para que S sea una base de R^n son; que S sea un conjunto de vectores linealmente independientes y que sea generador de R^n, por lo tanto se debe comprobar las dos cosas. Supongamos que:

   $$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n) \in R^n$$

   La combinación lineal con el conjunto S es:

   $$\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n = \beta_1(e_1) + \beta_2(e_2) + \beta_3(e_3) + ... + \beta_n(e_n)$$

Supongamos que S es un conjunto de vectores de base canónica, entonces tenemos:

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n = \beta_1(1,0,0,...,0) + \beta_2(0,1,0,...,0) + \beta_3(0,0,1,...,0) + ... + \beta_n(0,0,0,0,...,1)$

Asi que S genera R^n

$$R^n \; = < S >$$

Ahora se debe comprobar que el conjunto S es linealmente independiente:

$$\beta_1(1,0,0,...,0) + \beta_2(0,1,0,...,0) + \beta_3(0,0,1,...,0) + ... + \beta_n(0,0,0,0,...,1) = 0$$

Como desde $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ tienen entradas diferentes a 0, entonces: $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$, ..., $\beta_n = 0$ Se confirma que S es un conjunto linealmente independiente.

Por lo tanto, S es base para R^n.

3. *Un conjunto de m vectores en R^n, donde $m > n$, es linealmente dependiente*
Solución: Sea el conjunto S con n vectores una base para R^n

$$S = e_1, e_2, e_3, ..., e_n$$

Ademas, Sea W un conjunto de m vectores, donde $m > n$. Supongamos que m = n+1

$$W = v_1, v_2, v_3, ..., v_n, v_{n+1}$$

Como S es una base, entonces:

$$v_i = c_{1i}e_1 + c_{2i}e_2 + c_{3i}e_3 + ... + c_{ni}e_n$$

por lo tanto, la combinación lineal de vectores en W es:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... + a_nv_n + a_{n+1}v_{n+1} = 0$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\begin{aligned} a_1(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3 + ... + c_{n1}e_n) + a_2(c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3 + ... + c_{n2}e_n) + \\ a_3(c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3 + ... + c_{n3}e_n) + ... + a_n(c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + c_{3n}e_3 + ... + c_{nn}e_n) \\ + a_{n+1}(c_{1(n+1)}e_1 + c_{2(n+1)}e_2 + c_{3(n+1)}e_3 + ... + c_{n(n+1)}e_n) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1(a_1c_{11} + a_2c_{12} + ... + a_nc_{1n} + a_{n+1}c_{1(n+1)}) + e_2(a_1c_{21} + a_2c_{22} + ... + a_nc_{2n} + a_{n+1}c_{2(n+1)}) + \\ e_n(a_1c_{n1} + a_2c_{n2} + ... + a_nc_{nn} + a_{n+1}c_{n(n+1)}) = 0 \end{aligned}$$

Esto nos da un sistema de soluciones:

$$\begin{aligned} a_1c_{11} + a_2c_{12} + ... + a_nc_{1n} + a_{n+1}c_{1(n+1)} = 0 \\ a_1c_{21} + a_2c_{22} + ... + a_nc_{2n} + a_{n+1}c_{2(n+1)} = 0 \\ ... \\ a_1c_{n1} + a_2c_{n2} + ... + a_nc_{nn} + a_{n+1}c_{n(n+1)} = 0 \end{aligned}$$

Es un sistema de $n + 1$ (m) variables en n ecuaciones, por lo tanto existirá mas de una solución, y no hay solución trivial, se demuestra ademas que W es linealmente dependiente, por lo tanto no puede ser base de R^n

4. *Dos bases en R^n tienen el mismo numero de vectores*

   Solución: Supongamos que una base es m, y otra n para R^n. Se pueden dar dos casos:

   Caso I: Si $m < n$
   Suponemos que $S = e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ es un conjunto de n vectores, y $W = v_1, v_2, v_3, ..., v_m$ es un conjunto de m vectores, donde $m < n$.
   Como W es base, entonces:

$$e_n = c_{1n}v_1 + c_{2n}v_2 + c_{3n}v_3 + ... + c_{mn}v_m$$

$$e_n = \sum_{i=1}^{m} c_{in}v_i$$

$$=> \sum_{i=1}^{m} c_{in}v_i - e_n = 0$$

   Por lo tanto, W no puede ser una base, es linealmente dependiente.

   Caso II: Si $m > n$
   Como se resolvió en el apartado (3) de este mismo ejercicio, cuando la base es mayor genera mas de una solución en el sistema de ecuaciones, razón por la cual es un conjunto de vectores linealmente dependientes.
   Por lo tanto, en base a los dos casos verificados, dos bases para R^n deben tener el mismo numero de vectores (m=n).

5. *Span($v_1, v_2, v_3, ..., v_k$) es un subespacio de R^n, donde span($v_1, v_2, v_3, ..., v_k$) es el conjunto de vectores de combinación lineal de los k vectores $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$ desde un vector en el espacio R^n*

   Solución: Para demostrar que Span$(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$ es un subespacio de R^n, se debe comprobar a través de las operaciones de adición y multiplicación por un escalar.

   Sean β y w dos vectores que pertenecen a Span$(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$, β y w pueden representarse de la siguiente manera:

$$ß = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$$

sumando ambos vectores: $\beta + w$

$$ß + w = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i + \sum_{i=1}^{k} a_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (a_i + c_i) v_i$$

Donde $(a_i + c_i)$ es una constante, entonces $\beta + w$ pertenece también a Span$(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$.

Multiplicando por un escalar, nos da el siguiente resultado:

$$\phi\beta = \phi \sum_{i=1}^{k} c_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \phi c_i v_i$$

Siendo ø un escalar, entonces $\phi\beta$ pertenece también a $Span(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$.

Habiendo comprobado las dos propiedades, se puede afirmar que $Spam$ es un subespacio de R^n.

6. *Span*$(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$ *es el mas pequeño subespacio de* R^n *conteniendo* $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$

   Solución: Si $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$ es un conjunto de vectores del espacio vectorial R^n, así como también Span$(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$ es un subespacio vectorial de R^n como se demostró en la sección (5) de este mismo ejercicio, entonces la combinación lineal $c_1v_1, c_2v_2, c_3v_3, ..., c_kv_k$ es un subespacio en R^n, donde cada c_k es una constante, entonces el mas pequeño subespacio en R^n es Span$(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$ compuesto por los vectores $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$.

Ejercicio 3
Sea S un subespacio m-dimensional de R^n. Pruebe que S tiene una base ortonormal

Solución:
El método de Gram-Schmidt permite obtener una base ortonormal a partir de otra base.

1. Sea B una base ortonormal de S definida como: B $=\{u_1, u_2\}$ y se debe cumplir que $< u_1, u_2 >= 0$. Teenemos que:

$$u_1 = v_1$$
$$u_2 = v_2 - \frac{< v_2, u_2 >}{\|u_1^2\|} u_1$$

   Para que B sea una base ortonormal el producto punto de sus elementos debe ser igual a cero:

$$< u_1, u_2 >= 0$$
$$< u_1, v_2 - < v_2, u_1 > u_1 >= 0$$
$$< u_1, v_2 - < v_2, u_1 > u_1 >= 0$$

$$< u_1, v_2 > -(< v_2, u_1 > u_1 >)u_1 = 0$$

$$< u_1, v_2 > - < v_2, u_1 >< u_1, u_1 >= 0$$

$$< u_1, v_2 > - < v_2, u_1 >= 0$$

$$< u_1, v_2 > - < v_2, u_1 >= 0$$

Se concluye que u_1, u_2 es ortonormal.

2. Sea $U = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ una base ortonormal, entonces se debe probar que $\{u_1, u_2, ..., u_k, u_{k+1}\}$ tambien es una base ortonormal.

$$< u_k, u_{k+1} >= 0$$

$$< u_k, v_{k+1} - < v_{k+1}, u_1 > u_1 - < v_{k+1}, u_2 > u_2 - \cdots - < v_{k+1}, u_k > u_k = 0$$

$$< u_k, v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, u_i > u_i = 0$$

$$< u_k, v_{k+1} > -(\sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, u_i > u_i)u_k = 0$$

$$< u_k, v_{k+1} > -(\sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, u_i >< u_i, u_k >) = 0$$

$$< u_k, v_{k+1} > -(< v_{k+1}, u_1 >< u_1, u_k > + \cdots + < v_{k+1}, u_k >< u_k, u_k >) = 0$$

Por definicion una base ortonormal se define lo siguiente:

$$< u_i, u_j >= 0 \quad \text{si:} \quad i \neq j \quad \text{y} \quad < u_j, u_j >= 1$$

Entonces:

$$< u_k, v_{k+1} > -(< v_{k+1}, u_1 >< u_1, u_k > +...+ < v_{k+1}, u_k >< u_k, u_k >) = 0$$
$$< u_k, v_{k+1} > -[< v_{k+1}, u_k > (1)] = 0$$
$$< u_k, v_{k+1} > - < v_{k+1}, u_k >= 0$$

Por lo tanto, podemos concluir que $U\{u_1, u_2, ..., u_k, u_{k+1}\}$ es una base ortonormal.

Ejercicio 8
Probar cada uno de los siguientes:

(a) $null(A) = 0$ si y solo si A tiene columnas linealmente independientes.

(b) $rank(A) = rank(A^T)$.

Solución:

(a) $null(A) = 0$ si y solo si A tiene columnas linealmente independientes.

Si $null(A) = 0$, entonces el único elemento en el espacio nulo es el elemento nulo.
Sea $A = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ una matriz formada por c columnas, y $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ el conjunto de escalares, tales que:

$$\begin{aligned} Ax &= \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_n c_n \\ 0 &= \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_n c_n \end{aligned}$$

Sabemos que para que un conjunto de sea linealmente independiente la única solución debe ser la trivial.

(b) $rank(A) = rank(A^T)$.
Si reducimos la matriz A usando cualquier método obtendremos una matriz de la forma:

$$R = \begin{bmatrix} I & M_0 \\ M_1 & M_2 \end{bmatrix}$$

Donde I es la matriz identidad, y M_n son matrices de ceros. Se sabe que el $Rank(A)$ está determinado por el número de columnas independientes. Si hallamos la transpuesta de R.

$$R^T = \begin{bmatrix} I & M_1 \\ M_0 & M_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $R(A^T) = dim(R^T) = rank(A)$

Ejercicio 9
Sea A una matriz de mxn. Entonces A tiene rango 1 si A puede ser escrita como $A = ab^T$, donde a y b son vectores columna diferentes de 0.

Solución:
Demostraremos la afirmacion del problema:
Sea:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{bmatrix} \; y \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si se cumple la igualdad: $A = ab^T$ entonces:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 b^T \\ a_2 b^T \\ \ldots \\ a_m b^T \end{bmatrix}$$

Sabemos que a y b son diferentes de 0 entonces:

$$\exists a_i \neq 0 \forall i \in (1, 2, .., m)$$
$$\exists a_i b^T \neq 0 \forall i \in (1, 2, .., m)$$

a_i es un escalar, los vectores fila de la matriz son paralelos. Aplicamos $Gauss - Jordan$ para alguna fila $a_i b^T \neq 0$ y obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ a_i b^T \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto: $rank(A) = 1$.

Ejercicio 10
Probar los siguientes hechos básicos sobre la no singularidad y la inversa de A:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

c) $(c.A)^{-1} = \frac{1}{c}.A^{-1}$, $\forall c \neq 0$

d) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Solución:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$:

Sea $A.B = \theta$, donde θ es el elemento neutro se cumple que:

$$A = B^{-1}...(1)$$

$$B = A^{-1}...(2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$A = B^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$:

Sea:

$$A^T.B = I \quad ...(1)$$
$$(A^T.B)^T = I^T \quad ...(2)$$

Sabemos que: $(A.B)^T = B^T.A^T$
Entonces:

$$(A^T.B)^T = B^T.(A^T)^T$$

$$B^T.A = I \quad \text{(elemento inverso)}$$
$$A^{-1} = B^T$$
$$(A^{-1})^T = (B^T)^T \quad \text{(aplicando transpuesta)}$$
$$(A^{-1})^T = B \quad ...(3)$$
$$B = (A^T)^{-1} \quad ...(4) \quad \text{(aplicando inverso en (1))}$$

Finalmente remplazando B de (3) en (4):

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

c) $(c.A)^{-1} = \frac{1}{c}.A^{-1}$, $\forall c \neq 0$
Dada la siguiente igualdad:

$$(c.A).B = I \quad ...(1)$$
$$B = (c.A)^{-1} \quad ...(2)$$

De (1) se tiene:

$$(c.A).B = A.(c.B) = I \quad \text{(aplicando inverso en (1))}$$

$$A^{-1} = c.B$$
$$B = \frac{1}{c}.A^{-1} \quad ...(3)$$

Remplazando B de (2) y (3) se tiene:

$$(c.A)^{-1} = \frac{1}{c}.A^{-1}$$

d) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$:

Dada la siguiente igualdad:

$$(A.B).C = I \quad ...(1)$$
$$C = (A.B)^{-1} \quad ...(2)$$

De (1) se tiene:

$$A^{-1}.A.B.C = A^{-1}.I$$
$$B^{-1}.B.C = B^{-1}.A^{-1}$$
$$C = B^{-1}.A^{-1} \quad ...(3)$$

Finalmente remplazando C de (2) y (3):

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

Ejercicio 11
Supongamos que una matriz A puede ser escrita como:

$$A = LU$$

Donde L es una matriz triangular inferior con 1s a lo largo de la diagonal y $U = (u_{ij})$ es una matriz triangular superior. Prueba que:

$$detA = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Solución
Sea la matriz $A = LU$
Donde:

- Sea L: triangular inferior.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & . & . & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & . & . & l_{nn} \end{bmatrix}$$

  Considerando que la diagonal está integrada por el valor '1'; la matriz L queda definida de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & . & . & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

- Sea U: triangular superior

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & . & . & . & u_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- Calculando el determinante de A:

$$detA = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

$$detA = u_{11}.u_{22}.....u_{nn}$$

- Por propiedad, el determinante de una matriz triangular es el producto de la diagonales.

$$det(A) = det(L).det(U)$$

$$det(A) = 1.(u_{11}.u_{22}.....u_{nn})$$

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

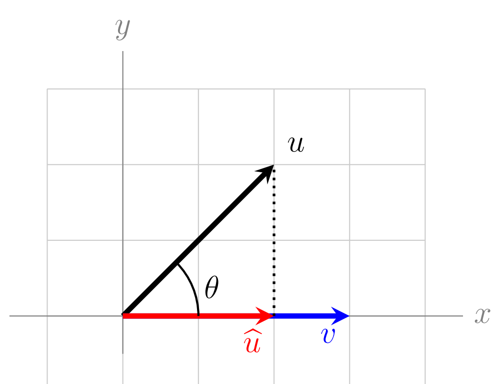
Por lo tanto, se demuestra que $detA = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$.

Ejercicio 17
(Distancia entre 2 subespacios.) Sean S_1 y S_2 dos subespacios de R^n tal que la $dim(S_1) = dim(S_2)$. Sean P_1 y P_2 las proyecciones ortogonales sobre S_1 y S_2 respectivamente. Entonces $||P_1 - P_2||_2$ es definida para ser la distancia entre S_1 y S_2.
Probar que la distancia entre S_1 y S_2, $dist(S_1, S_2) = \sin\theta$, donde θ es el ángulo entre S_1 y S_2 ($\|A\|_2 = \sqrt{maximo\ eigenvalue\ de\ A^T A}$).

Solución
Se sabe que la proyección ortogonal de $u \in S_1 \subset R^n$ sobre el subespacio $S_2 \subset R^n$, donde $v \in S_2$, es el vector $\widehat{u}$.

$$\widehat{u} = \frac{<u,v>v}{<v,v>} \quad ...(1)$$

$$\|\widehat{u}\| = \frac{<u,v>\|v\|}{<v,v>} \quad ...(2)$$



Donde $d(u, \widehat{u}) = \|u - \widehat{u}\| = t$, siendo $P_S(u) = \widehat{u}$ el vector de S que minimiza la distancia a u. Así tambien para el angulo θ:

$$\cos\theta = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|} \text{ ...(3)}$$

Dividiendo (3) entre (2):

$$\frac{\cos\theta}{\|\widehat{u}\|} = \frac{<v,v>}{\|u\|\|v\|\|v\|}$$

$$\cos\theta = \frac{< v, v > \|\widehat{u}\|}{\|u\|\|v\|\|v\|} = \frac{\|v\|\|v\|\|\widehat{u}\|}{\|u\|\|v\|\|v\|}$$

$$\cos\theta = \frac{\|\widehat{u}\|}{\|u\|} \text{ ...(4)}$$

Pero del gráfico se observa que $d(u, \widehat{u}) = \|u\| \sin\theta$, considerando $\|u\| = 1$:

$$d(u, \widehat{u}) = \sin\theta, \text{ donde } u \in S_1 \wedge \widehat{u} \in S_2$$

Ejercicio 26

Sea A una matriz simétrica definida positiva y x un vector no nulo. Probar que A + xx^T es definida positiva.

Solución

Como A es simétrica, se puede expresar como una $\sum_{i=1}^{n} v_i v_i^T$, donde $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ es no nulo.
Tomemos como $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$ y sea $u_i = \alpha_i x_i + \beta_i x_{i+1} = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in})$.
y $v_i = \beta_i x_i - \alpha_i x_{i+1}$, donde $\beta_i, \alpha_i > 0$ y $\beta_i^2 + \alpha_i^2 = 1$.
Entonces cuando $x_{ik} \neq 0$ o $x_{(i+1)k} \neq 0$ se tiene $u_{ik} \neq 0$.
Por lo tanto:

$$x_i x_i^T + x_{i+1} x_{i+1}^T = u_i u_i^T + v_i v_i^T \text{ ...(1)}$$

Además, podemos expresar al vector u_i como: $u_{i+1} = \alpha_{i+1} u_i + \beta_{i+1} x_{i+2}$
Finalmente, generalizando para i = n-1 en (1):

$$u_{n-1} u_{n-1}^T + \sum_{i=1}^{n} v_i v_i^T = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^T$$

Donde hacemos x = u_{n-1} y reemplazando A:

$$xx^T + A = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^T$$

El cual es una matriz definida positiva y simétrica.

Ejercicio 28
Pruebe que si los $eigen - valores$ de una matriz A son todos distintos, entonces A es no-derogatoria.

Solución
Sean A una matriz y C una companion matriz ambas de dimensiones $n \times n$, cuyos eigen valores son todos distintos. Debido a que toda matriz con eigen valores diferentes son similares a la matriz $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ matriz diagonal conformada por los eigen valores de A y C. Entonces tenemos:

$$TAT^{-1} = \Lambda$$

$$PCP^{-1} = \Lambda$$

Debido a la propiedad de similitud. Entonces comparando ambas expresiones

$$TAT^{-1} = PCP^{-1} \& \rightarrow \& P^{-1}TAT^{-1}P = C$$

Podemos ver que $P^{-1}T^{-1} = T^{-1}P$ lo que prueba que existe matriz no singular $S = P^{-1}T$ tal que $SAS^{-1} = C$, A es similar a C y por lo tanto A es no derogatoria.

Ejercicio 30
Let A be an mxn matrix $m \leq n$ having full rank. Then A^TA is positive definite.

Solución
Se sabe que $M = A^TA \Rightarrow M$ es simétrica
Probaremos que $Z^TA^TAZ \geq 0$

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & ... & Z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1c_1 & ... & r_1c_n \\ : & ... & : \\ r_nc_1 & ... & r_nc_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1r_1 & ... & c_1r_n \\ : & ... & : \\ c_nr_1 & ... & c_nr_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ : \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Zr_1 & Zr_2... & Zr_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1Z \\ r_2Z \\ : \\ r_nZ \end{bmatrix} = (Zr_1)^2 + (Zr_2)^2 + ... + (Zr_n)^2$$

$$Z^TA^TAZ \geq 0$$

$$A^TA \textbf{ es definida positiva}$$

Ejercicio 32
Let A a symmetric matrix with eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ and orthormal eigenvectors $v_1, v_2, ..., v_n$ Then show that

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^T, \lambda_2 v_2 v_2^T, ..., \lambda_n v_n v_n^T$$

Solución

Del enunciado es importante resaltar que ya los autovectores dados son ortonormales, es decir que cumple la ortogonalidad y su norma es 1. De la forma espectral, podemos definir lo siguiente:

Sea $A \in M_{mxm}$ una matriz real simétrica.

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^t \\
Av_j &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^t (v_j) \\
Av_j &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i (v_i^t v_j) \\
Av_j &= \lambda_j v_j
\end{aligned}
$$

$v_i^t vj = 0$, si $i \neq j$ y $v_i^t vj = 1$, si $i = j$

Sea un v_j que es autovector ortogonal y por ser un autovector asociado a λ_j del problema estándar $Av = \lambda v$

Ejercicio 34

What are the singular values of a symmetric matrix? What are the singular values of a symmetric positive definite matrix? Prove that a square matrix A is nonsingular iff it has no zero singular value.

Solución

1. **¿Cuáles son los valores singulares de una matriz simétrica?**

   La factorización de la matriz A:

   $$A = U\Sigma V^* \tag{36}$$

   es conocida como descomposición por valores singulares. Donde U y V son matrices con columnas ortogonales,y V^* es la matriz transpuesta conjugada de V. En el caso de matrices en $\mathbb{R}^n$, $V^* = V^\intercal$.

   Siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de $A^\intercal A$, además $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, se demuestra:

   $$\Sigma = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \tag{37}$$

   donde $\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$ es el i-ésimo valor singular.

   Partiendo de:

   $$|A - \lambda I| = 0 \tag{38}$$

   donde λ son los valores propios de la matriz A. Multiplicamos por $|A^\intercal + \lambda I|$

   $$|A^\intercal + \lambda I|\,|A - \lambda I| = 0 \tag{39}$$

$$\left|A^{\intercal}A - \lambda^2 I + \lambda(A - A^{\intercal})\right| = 0 \tag{40}$$

como A es simétrica $A = A^{\intercal}$, por tanto:

$$\left|A^{\intercal}A - \lambda^2 I\right| = 0 \tag{41}$$

entonces los valores propios de $A^{\intercal}A$ es λ^2

Remplazando en $\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$, obtenemos que los valores singulares son los valores absolutos de los valores propios, es decir $\sigma_i = |\lambda_i|$.

2. **¿Cuáles son los valores singulares de una matriz definida positiva simétrica?**

   Una matriz Hermitiana es una matriz cuadra que cumple la propiedad: $\overline{a_{ij}} = \overline{a_{ji}}$, donde $\overline{a_{ij}}$ es la conjugada del elemento a_{ij} de la matriz A. Es decir: $A = A^*$. Una matriz Hermitiana en $\mathbb{R}^n$ es una matriz simétrica.

   Una matriz definida positiva es una matriz Hermitiana que cumple las siguientes condiciones equivalentes:

   - Para todo vector no nulo $z \in \mathbb{C}^n$: $z^* A z > 0$.
   - Todos los autovalores λ_i de A son positivos
   - Todos los determinantes de los menores principales de A son positivos

   Anteriormente se demostró que para una matriz simétrica (matriz Hermitiana en $\mathbb{R}^n$) los valores singulares son $\sigma_i = |\lambda_i|$. Como para todo i los valores propios $\lambda_i > 0$, entonces para una matriz definida positiva simétrica los valores singulares son iguales a los valores propios de la matriz $\sigma_i = \lambda_i$.

3. **Demostrar que una matriz cuadrada A es no singular si y sólo si no tiene valor singular cero.**

   Una matriz cuadrada A puede ser factorizada como $A = U\Sigma V^{\intercal}$, donde Σ es una matriz $n \times n$ tal que:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

   donde σ_i son los valores singulares de A, además para $r < i \leq n$ los valores singulares $\sigma_i = 0$.

   La determinante de A:

$$|A| = |U\Sigma V^\intercal| = |U|\,|\Sigma|\,|V^\intercal| \tag{43}$$

siendo $|U|, |V^\intercal| \neq 0$. Entonces, para que A sea singular $|\Sigma|$ debe ser cero. Esto se cumple cuando existe un r tal que en el intervalo $r < i \leq n$ los valores singulares σ_i son igual a cero.

Ejercicio 35
Let $trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ Then Prove the following:

(a) $\quad$ **trace(AB) = trace(BA)**
(b) $\quad trace(AA^T) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$ **donde** $A = (a_{ij})$ **es de orden** mxn
(c) $\quad$ **trace(A + B) = trace(A) + trace(B)**
(d) $\quad$ **trace(TAT^{-1}) = trace(A)**

Solución

(a) $\quad$ **trace(AB) = trace(BA)**

Sea las matrices A_{nxm} y B_{mxn}, los ordenes de las matrices son tales que estas se puedan multiplicar.
Sea la multiplicación de A y B, $C = AB$, ya que para el calculo de la traza solo nos interesa los términos en la diagonal.

$$\textit{El ii th termino esta dado por: } c_{ii} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji}$$

La traza de C puede ser expresada como la suma de todos los terminos de la diagonal de la matriz C, y ya que la matriz C es de orden nxn:

$$trace(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji} \quad \ldots \quad (1)$$

Ahora, sea la multiplicacion de B y A, $D = BA$, se puede expresar cualquier termino de la diagonal de D de la siguiente manera.

$$\textit{El ii th termino de D esta dado por: } d_{ii} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}$$

Dado la definicion de los terminos de la diagonal, la traza puede ser expresada de la siguiente manera, considerando que la nueva matriz D es de orden mxm:

$$trace(BA) = \sum_{i=1}^{m} d_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} \quad \ldots \quad (2)$$

Por induccion probaremos que las ecuaciones (1) y (2) son iguales.

$$\textbf{Hipotesis: } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$$

Sea el caso base para cuando $n = 1$, de la ecuacion (1)

$$\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{j1}$$

De la ecuacion (2)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{1} b_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^{m} b_{i1}a_{1i}$$

Observando las 2 ecuaciones anteriores se puede observar que ambas sumatorias van de 1 hasta m y que la unica diferencia es el nombre del iterador, por tanto haciendo un cambio de variable simple, se comprueba que ambas ecuaciones son iguales, por tanto el caso base cumple con la hipotesis.
Paso inductivo, para cuando $n = k$, se dice que cumple con la hipotesis por tanto:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}a_{ji}$$

Para cuando $n = k + 1$, se debe probar que la hipotesis se mantiene, sea:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} + \sum_{j=1}^{m} a_{(k+1)j}b_{j(k+1)}$$

La hipotesis cuando $n = k$, aparece en el primer termino de la suma anterior, por tanto:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}a_{ji} + \sum_{j=1}^{m} a_{(k+1)j}b_{j(k+1)}$$

Al segundo termino se le podria cambiar el nombre del iterador j por i:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}a_{ji} + \sum_{i=1}^{m} a_{(k+1)i}b_{i(k+1)}$$

Agrupando el primer sumando:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{m}\{(\sum_{j=1}^{k} b_{ij}a_{ji}) + a_{(k+1)i}b_{i(k+1)}\}$$

Lo cual puede expresarse de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k+1} b_{ij}a_{ji}$$

Ya que la hipotesis se mantiene en el paso inductivo y se cumple para el caso base, se puede afirmar que la hipotesis es correcta, y esta igualdad implica que:

$$trace(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji} = trace(BA)$$

Por tanto:

$$Trace(AB) = Trace(BA)$$

(b) $trace(AA^T) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$ **donde** $A = (a_{ij})$ **es de orden** mxn

Si $A = (a_{ij})$ es mxn entonces $A^T = (a^t_{ji}) = a_{ij}$ y A^T es de orden nxm. Sea la multiplicacion de matrices $C = AA^T$ y ya que solo analizaremos los terminos de la diagonal, se puede expresar cualquier termino en base a sus indices de la siguiente manera c_{ii}:

$$c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a^t_{ji}$$

Ya que la matriz resultante es de orden mxm ya que $C = A_{mxn}A^T_{nxm}$

Por tanto para obtener $trace(AA^T)$

$$trace(AA^T) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a^t_{ji}$$

Ya uno de los terminos es la transpuesta del otro: $(a^t_{ji}) = a_{ij}$, se obtiene

$$trace(AA^T) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a^t_{ij}$$

$$trace(AA^T) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

(c) trace(A + B) = trace(A) + trace(B)

Sea $A = (a_{ij})$ de orden nxn y $B = (b_{ij})$ de orden nxn

$$Trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \dots \quad (1)$$

$$Trace(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \quad \dots \quad (2)$$

Sea $C = A + B$, cualquier termino de C puede ser expresado como $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$Trace(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii})$$

Por propiedad de sumatorias, la suma anterior se puede dividir:

$$Trace(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}) + \sum_{i=1}^{n}(b_{ii})$$

Las ecuaciones (1) y (2) pueden ser observadas en la ecuacion anterior, por tanto:

$$Trace(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = Trace(A) + Trace(B)$$

(d) $\mathbf{trace(TAT^{-1}) = trace(A)}$

Por la propiedad de trazas demostrado en el item (a) $trace(AB) = trace(BA)$, agrupando:

$$trace((TA)(T^{-1})) = trace((T^{-1})(TA)) = trace(T^{-1}TA) = trace(IA)$$

Por tanto:

$$trace(TAT^{-1}) = trace(A))$$

Ejercicio 36

Problema 36. Probar que $\|x\|_1, \|x\|_\infty, \|x\|_2$ son normas vectoriales.

Solución

Para que sea una norma vectorial deb cumplir con las siguientes propiedades:
$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
$\|A\| > 0; \|A\| = 0$ si es una matriz cero.
$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

La norma de p o Norma de Holder esta definida por $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

1. **Probar** $\|x\|_1$

$$\|x\|_1 = (|x_1|^1 + |x_2|^1 + ... + |x_n|^1)^{\frac{1}{1}}$$
$$\|x\|_1 = (|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|)$$

Prpiedad 1: $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$

$$\|\alpha x\|_1 = |\alpha|\|x\|_1$$
$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$(|\alpha x_1| + |\alpha x_2| + ... + |\alpha x_n|) = |\alpha|(|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|)$$
$$(\underbrace{|\alpha x_1|} + |\alpha x_2| + ... + |\alpha x_n|) = (\underbrace{|\alpha||x_1|} + |\alpha||x_2| + ... + |\alpha||x_n|)$$

Se tiene la siguiente propiedad de valor abosluto $|ab| = |a||b|$, por lo que si comparamos cada termino se mantiene la igualdad:

$$|\alpha x_1| = |\alpha||x_1|$$

Propiedad 2: $\|A\| > 0$, si no es una matriz cero.

$$\|x\|_1 > 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| > 0$$

$$(|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|) > 0$$

Para que se cumpla esta desigualdad nos basamos en la propiedad del valor absoluto $|a| \geq 0$ y que $x_1, x_2, ..., x_n > 0$.
Propiedad 3: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$

$$(|x_1 + y_1|) + ... + (|x_n + y_n|) \leq (\underbrace{|x_1|} + ... + |x_n|) + (\underbrace{|y_1|} + ... + |y_n|)$$

$$\underbrace{(|x_1 + y_1|)} + (|x_2 + y_2|) + ... + (|x_n + y_n|) \leq \underbrace{(|x_1| + |y_1|)} + (|x_2| + |y_2|) + ... + (|x_n| + |y_n|)$$

La desigualdad triangular propone los siguiente $|a + b| \leq |a| + |b|$, por lo que si se analiza para cada termino la esigualdad se cumple:

$$|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1|$$

$$|x_2 + y_2| \leq |x_2| + |y_2|$$

$$\vdots$$

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$$

2. **Probar** $\|x\|_2$

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}$$

Prpiedad 1: $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

$$\|\alpha x\|_2 = |\alpha| \|x\|_2$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (|\alpha x_i|)^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\sqrt{((|\alpha x_1|)^2 + (|\alpha x_2|)^2 + ... + (|\alpha x_n|)^2} = |\alpha| \sqrt{(|x_1|)^2 + (|x_2|)^2 + ... + (|x_n|)^2}$$

Por la propiedad de valor absoluto $|ab| = |a||b|$

$$\sqrt{((|\alpha||x_1|)^2+(|\alpha||x_2|)^2+...+(|\alpha||x_n|)^2} = |\alpha|\sqrt{(|x_1|)^2+(|x_2|)^2+...+(|x_n|)^2}$$

$$\sqrt{((|\alpha|)^2(|x_1|)^2+(|\alpha|)^2(|x_2|)^2+...+(|\alpha|)^2(|x_n|)^2} = |\alpha|\sqrt{(|x_1|)^2+(|x_2|)^2+...+(|x_n|)^2}$$

$$\sqrt{((|\alpha|)^2[(|x_1|)^2+(|x_2|)^2+...+(|x_n|)^2]} = |\alpha|\sqrt{(|x_1|)^2+(|x_2|)^2+...+(|x_n|)^2}$$

$$|\alpha|\sqrt{((|x_1|)^2+(|x_2|)^2+...+(|x_n|)^2} = |\alpha|\sqrt{(|x_1|)^2+(|x_2|)^2+...+(|x_n|)^2}$$

Propiedad 2: $\|A\| > 0$, si no es una matriz cero.

$$\|x\|_2 > 0$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(|\alpha x_i|)^2} > 0$$

$$|\alpha|\sqrt{((|x_1|)^2+(|x_2|)^2+...+(|x_n|)^2} > 0$$

Para que se cumpla la desigualdad $\alpha \neq 0$ y $\sqrt{((|x_1|)^2+(|x_2|)^2+...+(|x_n|)^2} \neq 0$

Propiedad 3: $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}$$

$$\sqrt{(|x_1+y_1|)^2+...+(|x_n+y_n|)^2} \leq \sqrt{(|x_1|)^2+...+(|x_n|)^2} + \sqrt{(|y_1|)^2+...+(|y_n|)^2}$$

3. **Probar** $\|x\|_\infty$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

Prpiedad 1: $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$

$$\|\alpha x\|_\infty = |\alpha|\|x\|_\infty$$

$$\max_{1\leq i\leq n} |\alpha x_i| = |\alpha|(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|)$$

Sea $|x_a|$ el mayor valor de X, entonces

$$|\alpha x_a| = |\alpha||x_a|$$

En la igualdad se cumple la propiedad de valor absoluto $|ab| = |a||b|$.

Propiedad 2: $\|A\| > 0$, si no es una matriz cero.

$$\|x\|_\infty > 0$$

Sea $|x_a|$ el mayor valor de X, siempre que x no sea una matriz cero y $x_a \neq 0$, se cumple

$$|x_a| > 0$$

Propiedad 3: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Definimos a $|x_a|$ en mayor valor de X y $|y_a|$ el mayor valor de Y.

$$|x_a + y_a| \leq |x_a| + |y_a|$$

Debemos analizar dos casos:
Si $x_a < 0$ y $y_a > 0$

$$|-x_a + y_a| \leq |-x_a| + |y_a|$$

Aplicamos valor absoluto y

$$y_a - x_a < x_a + y_a$$

Si $x_a > 0$ y $y_a > 0$

$$|x_a + y_a| \leq |-x_a| + |y_a|$$

Aplicamos valor absolutos y

$$x_a + y_a = x_a + y_a$$

Podemos concluir que $|x_a + y_a|$ como máximo puede tomar el valor de $x_a + y_a$.

Ejercicio 38
Si x e y son dos n-vectores entonces probar que:

(a)

$$|x^T y| \leq \|x\|_2\|y\|_2$$

(b)

$$\|xy^T\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2$$

Solución

(a)

$$|x^Ty| \leq \|x\|_2\|y\|_2$$

- Partimos de la siguiente función:

$$F(t) = \|\vec{y}t - \vec{x}\|^2 \geq 0$$

$$F(t) = (\vec{y}t - \vec{x})(\vec{y}t - \vec{x}) \geq 0$$

$$F(t) = \vec{y}.\vec{y}t^2 - 2\vec{x}\vec{y}t - \vec{x}.\vec{x} \geq 0$$

Hacemos cambio de variables $a = \vec{y}.\vec{y}, b = 2\vec{x}.\vec{y}, c = \vec{x}.\vec{x}$
Entonces:

$$F(t) = at^2 - bt + c \geq 0$$

$$F(\frac{b}{2a}) = a(\frac{b}{2a})^2 - b\frac{b}{2a} + c \geq 0$$

$$F(\frac{b}{2a}) = (\frac{b^2}{4a}) - \frac{b^2}{2a} + c \geq 0$$

$$F(\frac{b}{2a}) = c \geq (\frac{b^2}{4a})$$

$$F(\frac{b}{2a}) = 4ac \geq b^2$$

Regresando a las variables anteriores

$$4\|\vec{y}.\vec{y}\|\|\vec{x}.\vec{x}\| \geq (2\vec{x}.\vec{y})^2$$

$$\|\vec{y}.\vec{y}\|\|\vec{x}.\vec{x}\| \geq (\vec{x}.\vec{y})^2$$

$$\frac{(\vec{x}.\vec{y})}{\sqrt{\vec{y}.\vec{y}}\sqrt{\vec{x}.\vec{x}}} \leq 1$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos da un ángulo entre dos vectores diferentes de 0 en $\mathbb{R}^n$, por ello

$$cos(\theta) = \frac{(\vec{x}.\vec{y})}{\sqrt{\vec{y}.\vec{y}}\sqrt{\vec{x}.\vec{x}}} = \frac{(x^Ty)}{\|x\|_2\|y\|_2}$$

Reemplazando en la ecuación anterior

$$\frac{(x^Ty)}{\|x\|_2\|y\|_2} \leq 1$$

$$(x^Ty) \leq \|x\|_2\|y\|_2$$

(b)

$$\|xy^T\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2$$

- Por propiedad de normas matriciales donde:

$$\|A\|_2 = \sqrt{max(autovalores(AA^T))}$$

Entonces:

$$\|xy^T\|_2 = \sqrt{max(autovalores((xy^T)((xy^T)^T)}$$
$$\|xy^T\|_2 = \sqrt{max(autovalores(xy^T yx^T)}$$
$$\|xy^T\|_2 = \sqrt{max(autovalores(xx^T y^T y)}$$
$$\|xy^T\|_2 = \sqrt{max(autovalores(xx^T)}\sqrt{max(autovalores(yy^T)}$$
$$\|xy^T\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2$$

Por lo tanto se demuestra que $\|xy^T\|_2$ es igual a $\|x\|_2\|y\|_2$

Ejercicio 41
Pruebe que $||A||_1, ||A||_\infty, ||A||_2$ son normas matriciales.
Solución
Para comprobar que sean normas matriciales deben cumplirse las siguientes propiedades:

1. $||A|| > 0$
2. $||\alpha A|| = |\alpha|||A||$
3. $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$

Dada la matriz A de mxn elementos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para $||A||_1 = \underset{1\leq j\leq n}{max} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

1. $||A||_1 > 0$

$$||A||_1 = max\{(|a_{11}|+|a_{21}|+...+|a_{m1}|), (|a_{12}|+|a_{22}|+...+|a_{m2}|), ..., (|a_{1n}|+|a_{2n}|+...+|a_{mn}|)\}$$

Por lo tanto: $\quad ||A||_1 > 0$

2. $||\alpha A||_1 = |\alpha|||A||_1$

$$||A||_1 = max\{(|\alpha a_{11}| + |\alpha a_{21}| + ... + |\alpha a_{m1}|), (|\alpha a_{12}| + |\alpha a_{22}| + ... + |\alpha a_{m2}|), ..., (|\alpha a_{1n}| + |\alpha a_{2n}| + ... + |\alpha a_{mn}|)\}$$

$$||A||_1 = max\{|\alpha|(|a_{11}| + |a_{21}| + ... + |a_{m1}|), |\alpha|(|a_{12}| + |a_{22}| + ... + |a_{m2}|), ..., |\alpha|(|a_{1n}| + |a_{2n}| + ... + |a_{mn}|)\}$$

$$||A||_1 = |\alpha| max\{(|a_{11}| + |a_{21}| + ... + |a_{m1}|), (|a_{12}| + |a_{22}| + ... + |a_{m2}|), (|a_{13}| + |a_{23}| + ... + |a_{m3}|), ..., (|a_{1n}| + |a_{2n}| + ... + |a_{mn}|)\}$$

Por lo tanto: $||\alpha A||_1 = |\alpha| ||A||_1$

3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & ... & a_{m1} + b_{m1} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2n} + b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$||A + B||_1 = max\{(|a_{11} + b_{11}| + |a_{21} + b_{21}| + ... + |a_{m1} + b_{m1}|), (|a_{12} + b_{12}| + |a_{22} + b_{22}| + ... + |a_{m2} + b_{m2}|), ..., (|a_{1n} + b_{1n}| + |a_{2n} + b_{2n}| + ... + |a_{mn} + b_{mn}|)\}$$

$$||A + B||_1 \leq max\{(|a_{11}| + |b_{11}| + |a_{21}| + |b_{21}| + ... + |a_{m1}| + |b_{m1}|), (|a_{12}| + |b_{12}| + |a_{22}| + |b_{22}| + ... + |a_{m2}| + |b_{m2}|), ..., (|a_{1n}| + |b_{1n}| + |a_{2n}| + |b_{2n}| + ... + |a_{mn}| + |b_{mn}|)\}$$

$$||A+B||_1 \leq max\{(|a_{11}| + |a_{21}| + ... + |a_{m1}| + |b_{11}| + |b_{21}| + ... + |b_{m1}|), (|a_{12}| + |a_{22}| + ... + |a_{m2}| + |b_{12}| + |b_{22}| + ... + |b_{m2}|), ...(|a_{1n}| + |a_{2n}| + ... + |a_{mn}| + |b_{1n}| + |b_{2n}| + ... + |b_{mn}|)\}$$

Por lo tanto: $||A + B||_1 \leq ||A||_1 + ||B||_1$

Para $||A||_\infty = \underset{1 \leq i \leq m}{max} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

1. $||A||_\infty > 0$

$$||A||_\infty = max\{(|a_{11}|+|a_{12}|+...+|a_{1n}|), (|a_{12}|+|a_{22}|+...+|a_{2n}|), ..., (|a_{m1}|+|a_{m2}|+...+|a_{mn}|)\}$$

Por lo tanto: $||A||_1 > 0$

2. $||\alpha A||_\infty = |\alpha| ||A||_\infty$

$$||A||_\infty = max\{(|\alpha a_{11}| + |\alpha a_{12}| + ... + |\alpha a_{1n}|), (|\alpha a_{21}| + |\alpha a_{22}| + ... + |\alpha a_{2n}|), ..., (|\alpha a_{m1}| + |\alpha a_{m2}| + ... + |\alpha a_{mn}|)\}$$

$$||A||_\infty = max\{|\alpha|(|a_{11}| + |a_{12}| + ... + |a_{1n}|), |\alpha|(|a_{21}| + |a_{22}| + ... + |a_{2n}|), ..., |\alpha|(|a_{m1}| + |a_{m2}| + ... + |a_{mn}|)\}$$

$$||A||_\infty = |\alpha| max\{(|a_{11}| + |a_{12}| + ... + |a_{1n}|), (|a_{21}| + |a_{22}| + ... + |a_{2n}|), (|a_{31}| + |a_{32}| + ... + |a_{3n}|), ..., (|a_{m1}| + |a_{m2}| + ... + |a_{mn}|)\}$$

$$\text{Por lo tanto: } ||\alpha A||_\infty = |\alpha|||A||_\infty$$

3. $||A+B||_\infty \leq ||A||_\infty + ||B||_\infty$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+a_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$||A+B||_\infty = max\{(|a_{11}+b_{11}|+|a_{12}+b_{12}|+...+|a_{1n}+b_{1n}|),(|a_{21}+b_{21}|+|a_{22}+b_{22}|+...+|a_{2n}+b_{2n}|),...,(|a_{m1}+b_{m1}|+|a_{m2}+b_{m2}|+...+|a_{mn}+b_{mn}|)\}$$

$$||A+B||_\infty \leq max\{(|a_{11}|+|b_{11}|+|a_{21}|+|b_{21}|+...+|a_{1n}|+|b_{1n}|),(|a_{21}|+|b_{21}|+|a_{22}|+|b_{22}|+...+|a_{2n}|+|b_{2n}|),...,(|a_{m1}|+|b_{m1}|+|a_{m2}|+|b_{m2}|+...+|a_{mn}|+|b_{mn}|)\}$$

$$||A+B||_\infty \leq max\{(|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{1n}|+...+|b_{11}|+|b_{12}|+...+|b_{1n}|),(|a_{21}|+|a_{22}|+...+|a_{2n}|+|b_{12}|+|b_{22}|+...+|b_{2n}|),...(|a_{m1}|+|a_{m2}|+...+|a_{mn}|+|b_{m1}|+|b_{m2}|+...+|b_{mn}|)\}$$

$$\text{Por lo tanto: } \quad ||A+B||_\infty \leq ||A||_\infty + ||B||_\infty$$

4. Para $||A||_2 = \max\limits_{x\neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2}$

Sabemos que la norma $||A||_2$ es la norma inducida por la norma vectorial $||Ax||_2$ (norma euclidiana).

1. $||A||_2 > 0$
   Se cumple que $||A||_2 > 0$ ya que la norma vectorial $||Ax||_2 \geq 0$

2. $||\alpha A||_2 = |\alpha|||A||_2$

$$||\alpha A||_2 = \max_{x\neq 0} \frac{||\alpha Ax||_2}{||x||_2} = \max_{x\neq 0} \frac{|\alpha|||Ax||_2}{||x||_2}$$

$$\text{Por lo tanto: } ||\alpha A||_2 = |\alpha|||A||_2$$

3. $||A+B||_2 \leq ||A||_2 + ||B||_2$
   Sean A y B matrices de tamaño nxn tenemos que:

$$||A+B||_2 = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax+Bx||_2}{||x||_2} \leq \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_2+||Bx||_2}{||x||_2}$$

$$\leq \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} + \max_{x\neq 0} \frac{||Bx||_2}{||x||_2}$$
$$= ||A||_2 + ||B||_2$$

$$\text{Por lo tanto: } ||A+B||_2 \leq ||A||_2 + ||B||_2$$

Ejercicio 43
a) Pruebe que la longitud vectorial es preservada por la multiplicación con una matriz ortogonal. Esto es, si x pertenece R^n y Q pertenece R^{nxn} y es ortogonal, entonces $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ (lemma de la isometría).

Solución

Tomando en cuenta que:
Recordemos que, una matriz es ortogonal si su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta, de tal forma que:

$$A.A^T = I \qquad ... \quad (1)$$

Luego:

$$\|Qx\|_2 = \sqrt{max(autovalor(Qx)^t Qx)}$$

$$\|Qx\|_2 = \sqrt{max(autovalor Q^t Q x^t x)} \qquad ... \quad (2)$$

Aplicando (1) en (2) para Q ortogonal.

$$\|Qx\|_2 = \sqrt{max(autovalor x^t x)} \qquad ... \quad (2)$$

Por lo tanto:

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2$$

b) Lo declarado en la parte (a), ¿Se cumple usando las normas 1 e infinito? De razones. ¿Que sucede si la norma Forbenius es usada? No se cumple en otras normas, debido a que:
Solución

- Solo la norma 2 puede hallarse mediante autovalores de la multiplicación de la transpuesta por la matriz (para poder aplicar la propiedad (1)).
- Las normas 1/infinito/forbenius están basadas en el la suma por columnas/filas/columnas*filas de la matriz, suma que no se preserva al multiplicar un vector por una matriz, a excepción de que dicha matriz sea ortogonal, y conocemos que no toda matriz ortogonal es la matriz identidad.

Por tanto, no se cumple para otras normas.

Ejercicio 44
Probar que $\|I\|_2 = 1$ y $\|I\|_F = \sqrt{n}$

Solución

$\|I\|_2 = 1$

I = Identidad
$I^t = I$

$$I * I^t = I$$

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 1$$
$$\lambda_3 = 1$$

$$\|I\|_2 = \sqrt{MAX\{Autovalores\}}$$
$$\|I\|_2 = \sqrt{MAX\{1,1,1,..,1\}}$$
$$\|I\|_2 = \sqrt{1}$$
$$\|I\|_2 = 1$$

$\|I\|_F = \sqrt{n}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Al sumar cada fila o cada columna será siempre 1.
$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} = |a_{ij}|^2}$

$\sum_{i=1}^{m} = (1,1,1,1,1,...,1)$ ... m veces
$\sum_{j=1}^{n} = 1+1+1+1+1+1+1+...+1$ ... n veces
m = n
$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} = |a_{ij}|^2} = \sqrt{n}$

Ejercicio 45
Pruebe que si Q y P son matrices ortogonales , entonces

- $\| QAP \|_F = \| A \|_F$
  Solución
  Propiedad:si A,B $\in M_n(R)$ son ortogonales , AB y BA son ortogonales también tal

que

$$(AB)(BA)^t = (AB)(B^tA^t) \qquad \text{matriz ortogonal y distributibidad} \qquad \begin{array}{r} A = A^t \to AA^t = I_n \\ A(BB^t)A^t = I_n \end{array}$$

como Q y P son matrices ortogonales entonces $QP = I$ por lo cual podemos percivir que:

$$\| QPA \|_F = \| A \|_F$$

de otra forma también podemos también generalizar por el teorema de de Ortogonalidad de una matriz si P es ortogonal entonces $\| AP \|_F = \| A \|_F$ entonces aplicando esto tenemos:

$$\begin{aligned} \| QAP \|_F = \| A \|_F & \text{ absocion de A} \\ \| QA \|_F = \| A \|_F & \text{ para Q ortogonal} \\ \| A \|_F = \| A \|_F & \end{aligned}$$

por lo cual podemos inducir quer $\| QAP \|_F = \| A \|_F$

- $\| QAP \|_2 = \| A \|_2$
  Solución
  Teorema de de Ortogonalidad de una matriz si P es ortogonal entonces $\| AP \|_2 = \| A \|_2$ entonces aplicando esto tenemos:

  $$\begin{aligned} \| QAP \|_2 = \| A \|_2 & \text{ absorción de A} \\ \| QA \|_2 = \| A \|_2 & \text{ para Q ortogonal} \\ \| A \|_2 = \| A \|_2 & \end{aligned}$$

  debido a que: $\| OA \|_2 = \sqrt{p(A^TO^TOA)} \to \| OA \|_2 = \sqrt{p(A^TA)} = \| A \|_2$ y $\| OA \|_2 = \sqrt{p(O^TA^TAO)}$ por lo cual podemos inducir quer $\| QAP \|_2 = \| A \|_2$

Ejercicio 46
Probar que la norma espectral de una matriz simétrica es igual a su radio espectral.
Solución

Sea la matriz A simétrica de dimensión nxn, entonces sea e_i base ortonormal de autovector y λ_i un auto valor respectivo, tal que:

$$Ae_i = \lambda_i e_i \text{ ...(1)}$$

Sea $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vector no nulo, tal que: $x = \sum x_ie_i$.
Entonces, multiplicando en (1):

$$Ax = \lambda_i \sum x_ie_i$$

Tomando la norma 2:

$$\|Ax\|^2 = \sum {\lambda_i}^2 {x_i}^2$$

Por definición:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq |\lambda_{max}|$$

Donde λ_{max} es el máximo autovector conocido como el radio espectal, por lo tanto:

$$\|A\| \leq |\lambda_{max}| \text{ ...(a)}$$

Ahora, sea e_{max} el autovector asociado a λ_{max}, de (1) tenemos:

$$Ae_{max} = \lambda_{max} e_{max}$$

Tomando la norma, obtenemoos:

$$\|Ae_{max}\| = |\lambda_{max}|$$

Por Propiedad:

$$\|A\| = \|A\| \|e_{max}\| \geq \|Ae_{max}\| = |\lambda_{max}| \text{ ... (b)}$$

De (a) y (b), finalmente tenemos que:

$$\|A\| = |\lambda_{max}|$$

Ejercicio 50
Demostrar que $||A^T A||_2 = ||A||_2^2$
Solución

Primero por propiedad conmutativa, operamos el lado izquierdo de la ecuación

$$||A^T||_2 ||A||_2 = ||A||_2^2$$

Sabemos que $||A||_2^2 = trace(A^T A)$, entonces:

$$||A||_2^2 = d_k$$

Donde $d_k = max_i(d_i)$
Entonces: $||A||_2 = {d_k}^{1/2}$

Por otro lado, considerando que las diagonales de A^T, son las mismas a las de A, y por ende tienen los mismos valores propios, entonces: $||A^T||_2 = ||A||_2$

Remplazando en la ecuación del problema, tenemos:

$$\begin{aligned} ||A^T||_2 ||A||_2 &= ||A||_2^2 \\ {d_k}^{1/2} * {d_k}^{1/2} &= d_k \\ d_k &= d_k \end{aligned}$$

Por lo tanto la igualdad se cumple.

Ejercicio 51
Probar que $\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$ y $\|AB\|_F \leq \|A\|_2\|B\|_F$
Solución

•$\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$
Sea $B = b_1, b_2, ..., b_r$ columnas de B

$$\|AB\|_F^2 = \|A(b_1, b_2, ..., b_r)\|^2$$
$$= b_1^T A^T Ab_1 + b_2^T A^T Ab_2 + ... + b_1^T A^T Ab_r$$
$$\|AB\|_F^2 = \|Ab_1\|_2^2 + \|Ab_2\|_2^2 + ... + \|Ab_r\|_2^2$$

Debido a la consistencia de la norma F tenemos $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F\|x\|_2$

$$\|Ab_1\|_2^2 + ... + \|Ab_r\|_2^2 \leq \|A\|_F^2\|b_1\|_F^2 + ... + \|A\|_F^2\|b_r\|_F^2$$

$$\leq \|A\|\_F^2(\|b_1\|_2^2 + ... + \|b_r\|_2^2) = \|A\|_F^2\|B\|_F^2$$
$$\|AB\|_F^2 \leq \|A\|_F^2\|B\|_F^2$$
$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$$

•$\|AB\|_F \leq \|A\|_2\|B\|_F$
Sabiendo que:

$$\|AB\|_F^2 = \|Ab_1\|_2^2 + \|Ab_2\|_2^2 + ... + \|Ab_r\|_2^2 \text{ , como} \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2\|x\|_2$$

$$\|Ab_1\|_2^2 + ... + \|Ab_r\|_2^2 \leq \|A\|_2^2\|b_1\|_2^2 + ... + \|A\|_2^2\|b_r\|_2^2$$
$$\leq \|A\|_2^2(\|b_1\|_2^2 + ... + \|b_r\|_2^2)$$
$$\|AB\|_F^2 \leq \|A\|_2^2\|B\|_F^2$$
$$\|AB\|_F \leq \|A\|_2\|B\|_F$$

Ejercicio 55
Mostrar que las siguientes matrices no son convergentes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

Para demostrar que no es convergente, vamos a usar el corolario 1.7.1. definido en el libro en la página 31, que indica que: Una matriz es convergente si $\|A\| < 1$.
Para cada uno de ellos usaremos la norma: $\|.\|_2$.

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Autovalores:
$\lambda_1 \approx 119{,}296$,
$\lambda_2 \approx 0{,}704152$,
$\lambda_3 = 0$.

Luego

$$\| A \|_2 = \sqrt{119{,}296}$$
$$\| A \|_2 = 10{,}972 > 1$$

No es convergente

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, A^t A = \begin{bmatrix} \frac{49}{36} & \frac{3}{4} & \frac{21}{40} \\ \frac{3}{4} & \frac{61}{144} & \frac{3}{10} \\ \frac{21}{40} & \frac{3}{10} & \frac{769}{3600} \end{bmatrix}$$

Autovalores:
$\lambda_1 \approx 1{,}98336$,
$\lambda_2 \approx 0{,}0149632$,
$\lambda_3 \approx 7{,}2218 \text{ x } e^{-6}$

Luego:

$$\| A \|_2 = \sqrt{1{,}98336}$$
$$\| A \|_2 = 1{,}4083 > 1$$

No es convergente

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 29 & 26 \\ 3 & 26 & 26 \end{bmatrix}$$

Autovalores:
$\lambda_1 \approx 53{,}7772$,
$\lambda_2 \approx 1{,}98907$,

$\lambda_3 \approx 0{,}233718.$

Luego

$$\begin{aligned} \| \ A \ \|_2 &= \sqrt{53{,}7772} \\ \| \ A \ \|_2 &= 7{,}3333\ldots > 1 \end{aligned}$$

No es convergente

4.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Autovalores:
$\lambda_1 = \frac{1}{2}(15 + \sqrt{221}),$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = \frac{1}{2}(15 - \sqrt{221}),$

Luego

$$\begin{aligned} \| \ A \ \|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(15 + \sqrt{221})} \\ \| \ A \ \|_2 &\approx 3{,}8643 > 1 \end{aligned}$$

No es convergente

Ejercicio 56
Construya un ejemplo simple donde la prueba de la norma para matrices convergentes falla, pero la matriz es aun convergente.

Solución
Sea la matriz A definida como:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que la matriz A converge, es decir:

$$\lim_{k \to \infty} A^k = 0$$

Y a su vez no cumple con la prueba de la norma:

$$||A|| < 1$$

Esto puede ser comprobado calculando sus normas matriciales subordinadas:

$$||A||_1 = \underset{1\leq j\leq n}{max} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = 1 \nless 1$$

$$||A||_\infty = \underset{1\leq i\leq m}{max} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1 \nless 1$$

Ejercicio 57
Probar que las series $(I + A + A^2 + ...)$ convergen si $||B|| < 1$, donde $B = P.A.P^{-1}$. ¿Cual es la implicación de este resultado?Construir un ejemplo simple para ver la utilidad del resultado en computación práctica.

Solución
Según el ejercicio:
$B = P.A.P^{-1}$, multiplicando por P^{-1} a ambos lados por la izquierda:
$P^{-1}.B = P^{-1}.P.A.P^{-1}$
$P^{-1}.B = A.P^{-1}$, multiplicando por P a ambos lados por la derecha:
$P^{-1}.B.P = A.P^{-1}.P$
$A = P^{-1}.B.P$
Determinando A^2:
$A^2 = (P^{-1}.B.P).(P^{-1}.B.P) = P^{-1}.B^2.P$
Similarmente para A^n:
$A^n = P^{-1}.B^n.P \quad ...(1)$

De la serie inicial remplazando A de (1) se tiene:
$M = P^{-1}.I.P + P^{-1}.B.P + P^{-1}.B^2.P + ...$
$M = P^{-1}.(I + B + B^2 + ...).P \quad ...(1)$

Demostrando la convergencia de la serie $N = I + B + B^2 + ...$ se puede demostrar la convergencia de la serie original. Para ello se procede a demostrar la convergencia de N dado $||B|| < 1$.

En general para la serie con un número finito de elementos:
$N = I + B + B^2 + ... + B^n$
$N.B = B + B^2 + ... + B^{n+1}$
Restando las ecuaciones:
$N.(I - B) = I - B^{n+1}...(2)$
Para despejar N es necesario demostrar que la matriz $(I - B)$ tiene inversa.

Dada la matriz B y sus valores propios λ_i se tiene para cada autovalor:
$B.x = \lambda.x$
Según esto usando la norma:
$||B.x|| = |\lambda|.||x||$

$|\lambda|.||x|| \leq ||B||.||x||$
$|\lambda| \leq ||B|| < 1$
$|\lambda| < 1$
Se sabe adémás que $det(B - \lambda.I) = 0$, sin embargo dado que $\lambda_i < 1 \rightarrow det(B - I) \neq 0$.
Dado que $det(I - B) \neq 0$ entonces (I-B) tiene inverso multiplicativo.
Regresando a la ecuación (2): $N = (I - B)^{-1}.(I - B^{n+1})$
$N = (I - B)^{-1} - (I - B)^{-1}.B^{n+1} \quad ...(3)$

Dado que $n \rightarrow \infty$ entonces para que la serie converja se debe demostrar que el termino B^{n+1} converge.
Para ello se utiliza la propiedad $||A.B|| \leq ||A||.||B||$, de lo cual se deduce:
$||B^n|| \leq ||B||^n \quad ...(4)$.

Dado que $||B|| < 1$ entonces $lim_{n\rightarrow\infty}||B||^n = 0$.Remplazando en (4):
$||B^n|| \leq 0$, considerando que la norma por definición es mayor o igual a 0 se deduce:
$||B^n|| = 0$, por definición esto solo cumple cuando:
$B^n = 0 \quad ...(5)$

Utilizando lo demostrado en la ecuación (3):
$N = (I - B)^{-1} - (I - B)^{-1}.\mathbf{0}$
$N = (I - B)^{-1}$
Se demuestra la convergencia de una serie de potencias de una matriz

Luego, remplazando en (1):
$M = P^{-1}.(I - B)^{-1}.P$
Se demuestra la convergencia de la serie original

4. Alfio Quarteroni

Ejercicio 4
Sea B una matriz a simétrica sesgada, llamada, $B^T = -B$. Sea $A = (I + B)(I - B)^{-1}$ muestre que $A^{-1} = A^T$. Si $B^T = -B$ para $A = (I + B)(I - B)^{-1}$

Solución
$A(I - B) = (I + B)$
$I - B = A^{-1}(I + B)$
$I - B = A^{-1} + A^{-1}B$, aplicando la transpuesta
$I - B^T = (A^{-1})^T + (A^{-1})^T B^T$
$I + B = (A^{-1})^T [I + (-B)]$

$(A^{-1})^T = (I + B)(I - B)^{-1}$

Se tiene, $(A^{-1})^T = A$ y al aplicar la transpuesta a ambos miembros se cumple para

A:

$$A^{-1} = A^T$$

Ejercicio 7
Dada la matriz real no simetrica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifique si es similar a la matriz $D = diag(1, 0, -1)$ y calcule sus eigenvectores.¿Es esta matriz normal?

Solución
Para verificar si las matrices A y D son semejantes se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$D = C^{-1}AC$$

Diagonalizando A:

- Calculando los eigenvalores de A:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \lambda(\lambda^2 - 1)$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

- Calculamos los eigenvectores reemplazando cada λ en la matriz $A - \lambda I$:

$$Para \quad \lambda = 0 : \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Para \quad \lambda = 1 : \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Para \quad \lambda = -1 : \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Construimos C con los eigenvectores de A:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculamos C^{-1}:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos $B = C^{-1}AC$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Diagonalizamos B:

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|B - \lambda I| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Resultando las siguientes matrices diagonales D_i:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que $D_2 = D$, por lo que queda verificado que A y D son similares.

Ejercicio 15
Pruebe la propiedad 1.11 en el caso en que A sea una matriz $n \times m$ con m columnas independientes.
Sea A una matriz de dimensión $n \times m$ y X un vector de dimensión $m \times 1$ tenemos:

$$\|X\|_A = \|AX\|$$

Solución

1. Si $X = \theta \Rightarrow AX = \theta$ por lo tanto $\left\|AX\right\| = 0$ y $\left\|X\right\|_A = 0$
Si $X \neq \theta \Rightarrow AX \neq \theta$ por lo tanto $\left\|AX\right\| > 0$ y $\left\|X\right\|_A > 0$
La norma es igual o mayor a cero.

2.

$$\left\|\lambda X\right\|_A = \left\|\lambda AX\right\|$$
$$\left\|\lambda AX\right\| = \mid \lambda \mid \left\|\lambda AX\right\|$$
$$\mid \lambda \mid \left\|\lambda AX\right\| = \mid \lambda \mid \left\|X\right\|_A$$

Cumpliéndose la propiedad del producto de un escalar:

$$\left\|\lambda X\right\|_A = \mid \lambda \mid \left\|X\right\|_A$$

3.

$$\left\|X + Y\right\|_A = \left\|A(X + Y)\right\|$$
$$\left\|A(X + Y)\right\| = \left\|AX + AY\right\|$$

Por la propiedad de la norma se tiene

$$\left\|AX + AY\right\| \leq \left\|AX\right\| + \left\|AY\right\|$$
$$\left\|AX\right\| + \left\|AY\right\| = \left\|X\right\|_A + \left\|Y\right\|_A$$
$$\left\|X + Y\right\|_A \leq \left\|X\right\|_A + \left\|Y\right\|_A$$

Por lo tanto, se cumple que la norma A cumple las propiedades de una norma.

5. James R. Schott

Ejercicio 2.2
Considere el siguiente espacio vectorial

$$S = \{(a, a+b, a+b, -b)' : -\infty < a < \infty, -\infty < a < \infty\}$$

Determine cual de los siguientes conjuntos de vectores son conjuntos generadores de S:
(a) $\{(1, 0, 0, 1)', (1, 2, 2, -1)'\}$.
(b) $\{(1, 1, 0, 0)', (0, 0, 1, -1)'\}$.
(c) $\{(2, 1, 1, 1)', (3, 1, 1, 2)', (3, 2, 2, 1)'\}$.
(d) $\{(1, 0, 0, 0)', (0, 1, 1, 0)', (0, 0, 0, 1)'\}$.

Solución
Básicamente podemos definir que es un Sistema Generador cuando en una Combinación

Lineal de vectores que pertenecen a un Espacio Vectorial, tiene una solución definida de los escalares $\in$ R $c_1, c_2, .., c_n$ en un sistema de ecuaciones que forma dicha Combinación Lineal, entonces:

(a)

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a+b \\ a+b \\ -b \end{bmatrix}$$

donde $c_2 = a + b$ y $c_1 = -b = -2b - a$
Lo cual no es un espacio generado debido a que la solución de la ecuación es inconsistente

(b)

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a+b \\ a+b \\ -b \end{bmatrix}$$

donde $c_2 = a + b = b$ y $c_1 = a = a + b$
Lo cual no es un espacio generado debido a que la solución de la ecuación es inconsistente

(c)

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a+b \\ a+b \\ -b \end{bmatrix}$$

donde $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{a}{2} + b$ y $c_3 = \frac{2a+3b}{3}$
Lo cual es un espacio generado debido a que existe una solución de la ecuación construida.

(d)

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a+b \\ a+b \\ -b \end{bmatrix}$$

donde $c_1 = a$, $c_2 = a + b$ y $c_3 = -b$
Lo cual es un espacio generado debido a que existe una solución de la ecuación construida.

Ejercicio 2.3
¿Son parte del espacio vectorial S del ejercicio 2.2 los siguientes vectores?

Siendo el espacio vectorial $S = a(1, 1, 1, 0) + b(0, 1, 1, -1)$

Solución

- $x = (1, 1, 1, 1)$
  Para este caso, no existen valores para a ni b tal que indique que el vector x se encuentre en S.

- $y = (4, 1, 1, 3)$
  Para este otro caso, si consideramos $a = 4$ y $b = -3$ podemos obtener el vector $y = (4, 1, 1, 3)$. Lo que indica que y se encuentra en S.

Ejercicio 2.5
Suponga que x es un vector aleatorio que tiene una distribución con un vector promedio μ y una matriz de covarianza Ω dada por:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $x_1 = (2, 2)'$ y $x_2 = (2, 0)'$ dos anotaciones de esta distribución. Use la función de distancia de Mahalanobis para determinar cuál de estas dos anotaciones esta más cerca al medio.

Solución
Sea la distancia de Mahalanobis definida en un espacio vectorial

$$d_m(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^T V^{-1} (x_1 - x_2)$$

Se debe calcular la distancia de Mahalanobis desde cada punto a la media y comparar estos valores.
Distancia entre x_1 y la media (μ)

$$d_m(\mu, x_1) = ((2, 2)^T - (1, 1)^T)^T \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} ((2, 2)^T - (1, 1)^T)$$

$$d_m(\mu, x_1) = (1, 1) \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_m(\mu, x_1) = 4$$

Distancia entre x_2 y la media (μ)

$$d_m(\mu, x_2) = ((2, 0)^T - (1, 1)^T)^T \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} ((2, 0)^T - (1, 1)^T)$$

$$d_m(\mu, x_1) = (1, -1) \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d_m(\mu, x_2) = 1{,}33$$

Ya que $d_m(\mu, x_2) < d_m(\mu, x_1)$, se puede concluir que x_2 esta mas cerca a la media que x_1

Ejercicio 2.43
Considere la transformada lineal definida por:

$$u(x) = \begin{bmatrix} x_1 - \overline{x} \\ x_2 - \overline{x} \\ . \\ . \\ . \\ x_m - \overline{x} \end{bmatrix}$$

Para todo $x \ \epsilon \ R^m$, donde $\overline{x} = (\frac{1}{m}) \sum x_i$. Encontrar la matriz A tal que $u(x) = Ax$, y entonces determina la dimensión del rango y los espacios nulos de A.

Solución
Según el enunciado, se tiene que :

$$u(x) = Ax$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - \overline{x} \\ x_2 - \overline{x} \\ x_3 - \overline{x} \\ . \\ . \\ x_m - \overline{x} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - \overline{x} \\ x_2 - \overline{x} \\ x_3 - \overline{x} \\ . \\ . \\ x_m - \overline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} \ldots. & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} & 1 - \frac{1}{m} \ldots. & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} \ldots. & -\frac{1}{m} \\ . & & \\ . & & \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} \ldots. & 1 - \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix}$$

La matriz $u(x)$ es de orden $mx1$, la matriz x es de orden $mx1$, y la matriz A es de orden mxm

- Determinamos la dimensión del rango de A:

$$dim(R^m) = dim(Nul(A)) + Rango(A)$$

  En el ejercicio siguiente la Nulidad es determinada por el vector 1, por lo tanto su dimensión es 1.

$$m = 1 + Rango(A)$$

$$Rango(A) = m - 1$$

- Vamos a determinar los espacios nulos de A:

$$N(A) = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{m} & -\frac{1}{m}.... & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} & 1-\frac{1}{m}.... & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m}.... & -\frac{1}{m} \\ . & & \\ . & & \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m}.... & 1-\frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$N(A) = \begin{bmatrix} x_1 - \overline{x} \\ x_2 - \overline{x} \\ x_3 - \overline{x} \\ . \\ . \\ x_m - \overline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definimos las ecuaciones:

$$x_1 - \overline{x} = 0$$
$$x_2 - \overline{x} = 0$$
$$x_3 - \overline{x} = 0$$
$$...$$
$$x_m = \overline{x}$$

Entonces:

$$x_1 = \overline{x}$$
$$x_2 = \overline{x}$$
$$x_3 = \overline{x}$$
$$...$$
$$x_m = \overline{x}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \overline{x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se concluye que:

$$N(A) = EspacioVectorialGenerado \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

5.1. sections 5.2 y 5.3 pag 176

Ejercicio 9

Compare las reducciones de Dolittle y Crout con la eliminacion Gausiana con respecto a flop count, requerimientos de almacenamiento y posibilidad de acumulacion de productos internos in double precision.

Solución
Si definimos cada punto en cuestion:

- Flops: Numero de operaciones de multiplicacion y division que representan el esfuerzo numerico.
- Requerimientos de almacenamiento: Cantidad de almacenamiento necesario para realizar calculos durante la ejecucion del metodo.
- Acumulacion de productos internos en precision doble: Técnica para mminimizar la propagacion del error.

Eiminacion Gaussiana. El numero de flops del algoritmo es:

- Bucle interno: Çonvertir en cero los elementos abajo del pivote"

$$\sum_{j=k+1}^{n} 1 = n - (k+1) \approx n - k$$

- Bucle intermedio: 'Calcular los multiplicadores de cada fila'

$$\sum_{j=k+1}^{n} 2 + (\text{flops del bucle interno}) = \sum_{j=k+1}^{n} 2 + (n-k) = (2+n-k)(n-k)$$

$$= (n^2 + 2n) - 2(n+1)k + k^2$$

- Bucle exterior:

$$\sum_{k=1}^{n-1} n^2 + 2n{,}2(n+1)k + k^2$$

$$= (n^2 + 2n) \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2(n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{n^3}{3} + O(n^3)$$

En cuanto a los requerimientos de almacenamiento, el metodo sobrescribe en la misma matriz nxn los valores obtenidos. Por lo que el metodo solo necesita almacenar una matriz de tamaño nxn durante su ejecucion.

Reduccion Dolittle: Este metodo es una forma alternativa para descomponer una matriz en las matrices LU sin tener que utilizar eliminacion Gaussiana.

Sea la matriz A_{nxn}:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Asumimos que existen dos matrices L y U tal que:

$$A = LU$$

y las matrices L y U son de la forma:

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & l_{1,2} & ... & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & ... & u_{2,n} \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{2,1} & 1 & ... & 0 \\ ... & & & \\ l_{1,1} & l_{n,2} & ... & 1 \end{bmatrix}$$

El metodo de Dolittle calcula los valores $u_{i,j}$ y $l_{i,j}$ con el siguiente algoritmo:

Entrada: A, Salida: L,U

for k=1:n **do**
    $l_{k,k} = 1$
    for j=k...n **do**
        for i=1:k-1 **do**
            $p = l_{k,j} u_{i,j}$
        end for
        $u_{k,j} = a_{k,j} - p$
    end for
    for j=k+1...n **do**
        for i=1:k-1 **do**
            $p = l_{j,i} u_{i,k}$

```
12:         end for
13:         l_{k,j} = a_{j,k} − p/u_{k,k}
14:     end for
15: end for
```

Si analizamos el algoritmo anterior:

- Para el primer bucle (linea 3):

$$\sum_{j=k}^{n}\sum_{i=1}^{k-1} 1 = \sum_{j=k}^{n}(k-1) = (k-1)(n-k)$$

- Para el segundo bucle interno (linea 9):

$$\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{i=1}^{k-1} 1 = \sum_{j=k+1}^{n}(k-1)$$
$$= (n-k-1)(k-1)$$

- Para el bucle externo:

$$\sum_{k=1}^{n} = (k-1)(n-k) + (n-k-1)(k-1) = \sum_{k=1}^{n} 1 + k - 2k^2 - 2n + 2kn$$

  Entonces el numero total de FLOPS seria:

$$= (7n)/6 - (3n^2)/2 + n^3/3$$

En cuanto a los requerimientos de almacenamiento de este metodo, es necesario que durante todo el proceso de calculo se mantengan 3 matrices de tamaño nxn que corresponden a las matrices: A, L y U.
Metodo de Crout:
Este metodo es muy similar al metodo de Dolittle con la diferencia de que Crout retorna la descomposicion LU de ma matriz de la forma:

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & l_{1,2} & ... & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & ... & u_{2,n} \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{2,1} & 1 & ... & 0 \\ ... & & & \\ l_{1,1} & l_{n,2} & ... & 1 \end{bmatrix}$$

mientras que Crout retorna:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & l_{1,2} & ... & u_{1,n} \\ 0 & 1 & ... & u_{2,n} \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & ... & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & ... & 0 \\ ... & & & \\ l_{1,1} & l_{n,2} & ... & l_{n,n} \end{bmatrix}$$

El conteo de flops del algoritmo de Crout es muy similar al metodo de Dolittle. Es decir $O(n^3/3)$. En cuanto a los requerimientos de almacenamiento. Es necesario mantener 3 matrices nxn que corresponden a las matrices A, L y U.

Por lo tanto al comparar los 3 metodos tendriamos que:

- Flops: Los 3 metodos realizan una cantidad total de FLOPS parecidas de orden $O(n^3/3)$.
- Requerimientos de almacenamiento: La eliminacion de Gauss utiliza la matriz original nxn. Tanto Dolittle como Crout utilizan 2 matrices nxn que corresponden a las matrices L y U, ademas de la matriz original.
- Acumulacion de productos internos en precision doble: Crout permite la acumulacion de productos internos en doble precision. Gauss no permite esto

5.2. sections 6.6 y 6.7:

Ejercicio 26

Considere el sistema simetrico $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}4445 & 0{,}4444 & -0{,}2222 \\ 0{,}4444 & 0{,}4445 & -0{,}2222 \\ -0{,}2222 & -0{,}2222 & 0{,}1112 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0{,}6667 \\ 0{,}6667 \\ -0{,}3332 \end{bmatrix}$$

La solucion exacta de el sistema es:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Realice una pequeña perturbacion δb en b, manteniendo A sin cambiar. Resuelva el sistema $Ax' = b + \delta b$. Compare x' con x. Calcule $Cond(A)$ y verifique la desigualdad en el texto.
(b)Realice una pequeña perturbacion $\triangle A$ en A tal que $|| \triangle A|| \leq 1/||A^{-1}||$. Resuelva el sistema $(A + \triangle A)x' = b$. Compare x' con x y verifique la desigualdad en el libro. (Hint: $||A^{-1}||_2 = O(10^4)$)

Solución
(a) Sea $b' = b + \delta b$, con $\delta b = [0{,}0001 \quad 0{,}0001 \quad 0{,}0001]^t$, entonces:

$$b' = \begin{bmatrix} 0{,}6668 \\ 0{,}6668 \\ -0{,}3333 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el nuevo sistema:

$$Ax = b'$$

$$x' = \begin{bmatrix} 1{,}3334 \\ 1{,}3334 \\ 2{,}3333 \end{bmatrix}$$

Al comparar x y x' podemos observar un cambio considerable en sus valores:

$$x' = \begin{bmatrix} 1{,}3334 \\ 1{,}3334 \\ 2{,}3333 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculando la diferencia:

$$x' = x + \delta x$$

$$\delta x = x' - x$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} 0{,}3334 \\ 0{,}3334 \\ 1{,}3333 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos el numero condicionante:

$$Cond(A) = ||A||||A^{-1}|| = (1)(10000) = 10000$$

Verificamos la desigualdad:

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq Cond(A)\frac{||\delta b||}{||b||}$$

$$\frac{1{,}4142}{1{,}7321} \leq (10000)\frac{1{,}7221x10^{-4}}{1}$$

(b) Sea $A' = A + \triangle A$, donde:

$$\triangle A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0001 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0{,}4445 & 0{,}4444 & -0{,}2222 \\ 0{,}4444 & 0{,}4445 & -0{,}2221 \\ -0{,}2222 & -0{,}2222 & 0{,}1112 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el nuevo sistema:

$$A'x = b$$

$$x' = \begin{bmatrix} 1{,}3636 \\ 1{,}5454 \\ 1{,}8182 \end{bmatrix}$$

Al comparar x y x' calculamos la diferencia:

$$x' = x + \delta x$$

$$\delta x = x' - x$$
$$\delta x = \begin{bmatrix} 0{,}3636 \\ -0{,}4546 \\ -0{,}1818 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos el numero condicionante:

$$Cond(A) = ||A||||A^{-1}|| = (1)(10000) = 10000$$

Verificamos la desigualdad:

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq Cond(A)\frac{||\triangle A||}{||A||}/(1 - Cond(A)\frac{||\triangle A||}{||A||})$$

$$0{,}3521 \leq (10000)1{,}0000x10^{-4}/(1 - 1{,}0000x10^{-4})$$
$$0{,}3521 \leq (10000)1{,}0000x10^{-4}/(0{,}9999)$$
$$0{,}3521 \leq 1{,}0001$$

Implemente un programa que realice la descompocision de Cholesky **Cholesky** La descompocision de Cholesky factoriza una matriz A simetrica y definida positiva en dos matrices L y L^t, de tal manera que se cumple la siguiente igualdad:

$$A = LL^t$$

Sea A una matriz $3x3$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Para hallar los elementos de L operamos:

$$a_{11} = l_{11}^2$$
$$a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2$$
$$a_{33} = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2$$
$$a_{21} = l_{21} * l_{11}$$
$$a_{31} = l_{31} * l_{11}$$
$$a_{32} = l_{31} * l_{21} + l_{32} * l_{22}$$

Despejando:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$
$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$
$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$
$$l_{21} = a_{21}/l_{11}$$
$$l_{31} = a_{31}/l_{11}$$
$$l_{32} = (a_{32} - l_{31} * l_{21})/l_{22}$$