Universidad Católica San Pablo
Algoritmos y Estructura de Datos
Prof. Jorge Poco
Alumno: Moreno Vera, Felipe Adrian

Práctica 2
Entrega: 1 de Julio, 2018

Análisis Asintótico

1 Análisis Asintótico

a. Ordene las siguientes funciones en orden $O()$ creciente, indicando los grupos que tienen el mismo orden: $\sqrt{n}$, $n \log n$, n^2, $n^{1/3} + \log n$, $\log n$, $(1/3)^n$, n, $n - n^3 + 7n^5$, n^3, $(\log n)^2$, $n/\log n$, $(3/2)^n$, 2^n, $n^2 + \log n$, $\log n$, $\log \log n$, 6.

Solución:

Ordenando en orden creciente las funciones:
$(\frac{1}{3})^n$, $log(log(n))$, 6, $log(n)$, $n^{1/3}+\log n$, $(\log n)^2$, $\sqrt{n}$, $n/\log n$, n, $nlog(n)$, n^2, $n^2+\log n$, n^3, $n-n^3+7n^5$, $(3/2)^n$ 2^n.

Ordenando en función de complejidad:
$O(1)$: 6,
$O(\log \log n)$: $\log \log n$
$O(n^{1/3})$: $n^{1/3} + \log n$
$O(\log n)$: $\log n$
$O(\log^2 n)$: $(\log n)^2$
$O(n^{1/2})$: $\sqrt{n}$
$O(n/logn)$: $n/logn$
$O(n)$: n
$O(n \log n)$: $n \log n$
$O(n^2)$: n^2, $n^2 + \log n$
$O(n^3)$: n^3
$O(n^5)$: $n - n^3 + 7n^5$
$O(c^n)$: $(1/3)^n$, $(3/2)^n$, 2^n

b. Haga los mismo con las siguientes funciones: $\log n$, $n^2(1 + \sqrt{n})$, $n^{3/2}$, $n^2/\log n$, n^2, $n/\log n$, $n^{1/3}$, 1, $1/n$, 5^n, $n^{1.00001}$, n, $\log \log n$, n^n, $(\log n)^2$, n^{n^2} , 2^n, $(\log n)^n$, $n^{\log n}$.

Solución:

Ordenando en orden creciente las funciones:
$1/n$, 1, $\log \log n$, $\log n$, $n^{1/3}$, $(\log n)^2$, $n/\log n$, n, $n^{1.00001}$, $n^{3/2}$, $n^2/\log n$, n^2, $n^2(1 + \sqrt{n})$, $n^{\log n}$, 2^n, 5^n, $(\log n)^n$, n^n, n^{n^2}.

Ordenando en función de complejidad:
$O(1/n)$: $1/n$

$O(1)$: 1
$O(\log\log n)$: $\log\log n$
$O(\log n)$: $\log n$
$O(n^{1/3})$: $n^{1/3}$
$O(\log^2 n)$: $(\log n)^2$
$O(n/\log n)$: $n/\log n$
$O(n)$: n
$O(n^{1.00001})$: $n^{1.00001}$
$O(n^{3/2})$: $n^{3/2}$
$O(n^2/\log n)$: $n^2/\log n$
$O(n^2)$: n^2
$O(n^{5/2})$: $n^2(1+\sqrt{n})$
$O(n^{\log n})$: $n^{\log n}$
$O(c^n)$: 2^n, 5^n
$O((logn)^n)$: $(logn)^n$
$O(n^n)$: n^n
$O(n^{n^2})$: n^{n^2}

c. De los siguientes pares f y g, determine si f es $O(g)$, $\Omega(g)$, $o(g)$, $\Theta(g)$: n^2+3n+4 vs $6n+7$, $\sqrt{n}$ vs $\log(n+3)$, $n\sqrt{n}$ vs n^2-n, $n\sqrt{n}$ vs $4n\log(n^2+1)$, $(n^2+2)/(1+2-n)$ vs $n+3$, 2^n-n^2 vs n^4+n^2, $n\log n$ vs $(\log n)^{\log n}$, $n2^n$ vs 3^n , $100n+\log n$ vs $n+(\log n)^2$, $\log n$ vs $\log\log n^2$, $(\log n)^{10^6}$ vs $n^{10^{-6}}$

Solución:

1. n^2+3n+4 vs $6n+7$:

- O(g):
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} > 0$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{6n+7}{n^2+3n+4} > 0$
  $0 > 0$, es una contradicción, por tanto n^2+3n+4 no es $O(6n+7)$.
- $\Omega(g)$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{6n+7}{n^2+3n+4} = c \geq 0$
  $c = 0 \geq 0$, es verdadero, por tanto n^2+3n+4 si es $\Omega(6n+7)$.
- $o(g)$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{6n+7}{n^2+3n+4} = \infty$
  $0 = \infty$, es una contradicción, por tanto n^2+3n+4 no es $o(6n+7)$.
- $\Theta(g)$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{6n+7}{n^2+3n+4} = c, 0 < c < \infty$
  $0 = c$
  $0 < 0 < \infty$ es una contradicción, por tanto n^2+3n+4 no es $\Theta(6n+7)$.

2. $\sqrt{n}$ vs $\log(n+3)$:

- O(g):

$\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(n+3)}{\sqrt{n}} > 0$
$0 > 0$, es una contradicción, por tanto $\sqrt{n}$ no es $O(\log(n+3))$.

- $\Omega(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(n+3)}{\sqrt{n}} = c \geq 0$
  $0 = c \geq 0$, es verdadero, por tanto $\sqrt{n}$ si es $\Omega(\log(n+3))$.

- $o(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(n+3)}{\sqrt{n}} = \infty$
  $0 = \infty$, es una contradicción, por tanto $\sqrt{n}$ no es $o(\log(n+3))$.

- $\Theta(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(n+3)}{\sqrt{n}} = c, 0 < c < \infty$
  $0 = c$
  $0 < 0 < \infty$ es una contradicción, por tanto $\sqrt{n}$ no es $\Theta(\log(n+3))$.

3. $n\sqrt{n}$ vs $n^2 - n$:

- O(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n^2-n}{n\sqrt{n}} > 0$
  $\infty > 0$ es verdadero, por tanto $n\sqrt{n}$ si es $O(n^2 - n)$.

- $\Omega(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n^2-n}{n\sqrt{n}} = c \geq 0$
  $\infty \geq 0$ es verdadero, por tanto $n\sqrt{n}$ si es $\Omega(n^2 - n)$.

- $o(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n^2-n}{n\sqrt{n}} = \infty$
  $\infty = \infty$ es verdadero, por tanto $n\sqrt{n}$ si es $o(n^2 - n)$.

- $\Theta(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n^2-n}{n\sqrt{n}} = c, 0 < c < \infty$
  $\infty = c$
  $0 < \infty < \infty$ es una contradicción, por tanto $n\sqrt{n}$ no es $\Theta(n^2 - n)$.

4. $n\sqrt{n}$ vs $4n\log(n^2+1)$:

- O(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{4n\log(n^2+1)}{n\sqrt{n}} > 0$
  $0 > 0$, es una contradicción, por tanto $n\sqrt{n}$ no es $O(4n\log(n^2+1))$.

- $\Omega(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{4n\log(n^2+1)}{n\sqrt{n}} = c \geq 0$
  $c = 0 \geq 0$, es verdadero, por tanto $n\sqrt{n}$ si es $\Omega(4n\log(n^2+1))$.
- $o(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{4n\log(n^2+1)}{n\sqrt{n}} = \infty$
  $0 = \infty$, es una contradicción, por tanto $n\sqrt{n}$ no es $o(4n\log(n^2+1))$.
- $\Theta(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$

  $lim_{x\to\infty} \frac{4n\log(n^2+1)}{n\sqrt{n}} = c, 0 < c < \infty$
  $0 = c$
  $0 < 0 < \infty$ es una contradicción, por tanto $n\sqrt{n}$ no es $\Theta(4n\log(n^2+1))$.

5. $(n^2+2)/(1+2-n)$ vs $n+3$:

- O(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n+3}{(n^2+2)/(1+2-n)} > 0$
  $\infty > 0$, es una verdadero, por tanto $(n^2+2)/(1+2-n)$ si es $O(n+3)$.
- $\Omega(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n+3}{(n^2+2)/(1+2-n)} = c \geq 0$
  $c = \infty \geq 0$, es verdadero, por tanto $(n^2+2)/(1+2-n)$ si es $\Omega(n+3)$.
- o(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n+3}{(n^2+2)/(1+2-n)} = \infty$
  $\infty = \infty$, es verdad, por tanto $(n^2+2)/(1+2-n)$ si es $o(n+3)$.
- $\Theta(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$

  $lim_{x\to\infty} \frac{n+3}{(n^2+2)/(1+2-n)} = c, 0 < c < \infty$
  $\infty = c$
  $0 < \infty < \infty$ es una contradicción, por tanto $(n^2+2)/(1+2-n)$ no es $\Theta(n+3)$.

6. $2^n - n^2$ vs $n^4 + n^2$:

- O(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n^4+n^2}{2^n-n^2} > 0$
  $\infty > 0$, es una verdadero, por tanto $2^n - n^2$ si es $O(n^4+n^2)$.
- $\Omega(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n^4+n^2}{2^n-n^2} = c \geq 0$
  $c = \infty \geq 0$, es verdadero, por tanto $(2^n - n^2$ si es $\Omega(n^4+n^2)$.

- o(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n^4+n^2}{2^n-n^2} = \infty$
  $\infty = \infty$, es verdad, por tanto $2^n - n^2$ si es $o(n^4 + n^2)$.
- $\Theta(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$

  $lim_{x\to\infty} \frac{n^4+n^2}{2^n-n^2} = c, 0 < c < \infty$
  $c = \infty$
  $0 < \infty < \infty$ es una contradicción, por tanto $2^n - n^2$ no es $\Theta(n^4 + n^2)$.

7. $n \log n$ vs $(\log n)^{\log n}$:

- O(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{n \log n} > 0$
  $\infty > 0$, es una verdadero, por tanto $n \log n$ si es $O((\log n)^{\log n})$.
- $\Omega(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{n \log n} = c \geq 0$
  $c = \infty \geq 0$, es verdadero, por tanto $n \log n$ si es $\Omega((\log n)^{\log n})$.
- o(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{n \log n} = \infty$
  $\infty = \infty$, es verdad, por tanto $n \log n$ si es $o((\log n)^{\log n})$.
- $\Theta(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$

  $lim_{x\to\infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{n \log n} = c, 0 < c < \infty$
  $c = \infty$
  $0 < \infty < \infty$ es una contradicción, por tanto $n \log n$ no es $\Theta((\log n)^{\log n})$.

8. $n2^n$ vs 3^n:

- O(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{3^n}{n2^n} > 0$
  $\infty > 0$, es una verdadero, por tanto $n2^n$ si es $O(3^n)$.
- $\Omega(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{3^n}{n2^n} = c \geq 0$
  $c = \infty \geq 0$
  $\infty \geq 0$, es verdadero, por tanto $n2^n$ si es $\Omega(3^n)$.
- o(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{3^n}{n2^n} = \infty$
  $\infty = \infty$, es verdad, por tanto $n2^n$ si es $o(3^n)$.

- $\Theta(g)$:
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$

  $lim_{x\to\infty}\frac{3^n}{n2^n} = c, 0 < c < \infty$
  $c = \infty$
  $0 < \infty < \infty$ es una contradicción, por tanto $n2^n$ no es $\Theta(3^n)$.

9. $100n + \log n$ vs $n + (\log n)^2$:

- O(g):
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} > 0$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{n+(\log n)^2}{100n+\log n} > 0$
  $1/100 > 0$, es una verdadero, por tanto $100n + \log n$ si es $O(n + (\log n)^2)$.
- $\Omega(g)$:
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{n+(\log n)^2}{100n+\log n} = c \geq 0$
  $c = 1/100 \geq 0$, es verdadero, por tanto $100n + \log n$ si es $\Omega(n + (\log n)^2)$.
- o(g):
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{n+(\log n)^2}{100n+\log n} = \infty$
  $1/100 = \infty$, es una contradicción, por tanto $100n + \log n$ si es $o(n + (\log n)^2)$.
- $\Theta(g)$:
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$

  $lim_{x\to\infty}\frac{n+(\log n)^2}{100n+\log n} = c, 0 < c < \infty$
  $c = 1/100$
  $0 < 1/100 < \infty$ es verdadero, por tanto $100n + \log n$ si es $\Theta(n + (\log n)^2)$.

10. $\log n$ vs $\log\log n^2$:

- O(g):
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} > 0$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{\log\log n^2}{\log n} > 0$
  $0 > 0$, es una contradicción, por tanto $\log n$ no es $O(\log\log n^2)$.
- $\Omega(g)$:
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{\log\log n^2}{\log n} = c \geq 0$
  $c = 0 \geq 0$ es verdadero, por tanto $\log n$ si es $\Omega(\log\log n^2)$.
- o(g):
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{\log\log n^2}{\log n} = \infty$
  $0 = \infty$, es una contradicción, por tanto $\log n$ no es $o(\log\log n^2)$.
- $\Theta(g)$:
  $\lim_{x\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$
  $\lim_{x\to\infty}\frac{\log\log n^2}{\log n} = c, 0 < c < \infty$

$c = 0$
$0 < 0 < \infty$ es una contradicción, por tanto $\log n$ no es $\Theta(\log\log n^2)$.

11. $(\log n)^{10^6}$ vs $n^{10^{-6}}$:

- O(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n^{10^{-6}}}{(\log n)^{10^6}} > 0$
  $\infty > 0$, es una verdadero, por tanto $(\log n)^{10^6}$ si es $O(n^{10^{-6}})$.
- $\Omega(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n^{10^{-6}}}{(\log n)^{10^6}} = c \geq 0$
  $c = \infty \geq 0$, es verdadero, por tanto $(\log n)^{10^6}$ si es $\Omega(n^{10^{-6}})$.
- o(g):
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{n^{10^{-6}}}{(\log n)^{10^6}} = \infty$
  $\infty = \infty$, es verdad, por tanto $(\log n)^{10^6}$ si es $o(n^{10^{-6}})$.
- $\Theta(g)$:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c, 0 < c < \infty$

  $lim_{x\to\infty} \frac{n^{10^{-6}}}{(\log n)^{10^6}} = c, 0 < c < \infty$
  $c = \infty$
  $0 < \infty < \infty$ es una contradicción, por tanto $(\log n)^{10^6}$ no es $\Theta(n^{10^{-6}})$.

d. Demostrar que n^2 no es $O(n)$

Solución:

Sea:
$f(n) = n^2, g(n) = n$
Entonces, f(n) = O(g(n)) si:
Existe $n_0, c > 0$, Tal que:
$\forall n \geq n_0 > 0 : f(n) \leq cg(n)$

Por definición, se tiene que $n > 0$, entonces:
$n^2 = f(n) > 0$ y $n = g(n) > 0$
De donde:
$n_0 > 0$
Entonces, en la ecuación:
$0 \leq n^2 \leq cn$
Vemos que no existe constante c que satisfaga la ecuación.

e. Demostrar que $7n - 2 = O(n)$

Solución:

Sea:
$f(n) = 7n - 2, g(n) = n$
Por definición, se tiene que $n > 0$, entonces:
$7n - 2 = f(n) \geq 0$ y $n = g(n) \geq 0$

De donde:
$n_0 \geq \frac{2}{7}$
Entonces, en la ecuación:
$0 \leq 7n - 2 \leq cn$
Basta tomar c=8 para que satisfaga la ecuación.

f. Demostrar que $20n^3 + 10\log n + 5$ es $O(n^3)$

Solución:

Sea:
$f(n) = 20n^3 + 10logn + 5, g(n) = n^3$
Por definición, se tiene que $n > 0$, entonces:
$20n^3 + 10logn + 5 = f(n) \geq 0$ y $n^3 = g(n) \geq 0$
De donde:
$n_0 \geq 1$
Entonces, en la ecuación:
$0 \leq 20n^3 + 10logn + 5 \leq cn^3$
Basta tomar c=25 para que satisfaga la ecuación.

g. Demostrar que $3\log n + \log\log n$ es $O(\log n)$

Solución:

Sea:
$f(n) = 3logn + loglogn, g(n) = logn$
Por definición, se tiene que $n > 0$, entonces:
$3logn + loglogn = f(n) \geq 0$ y $logn = g(n) \geq 0$
De donde:
$n_0 \geq 2$
Entonces, en la ecuación:
$0 \leq 3logn + loglogn \leq c(logn)$
Basta tomar c=4 para que satisfaga la ecuación.

h. Demostrar que $3\log n + \log\log n$ es $\Omega(\log n)$

Solución:

Sea:
$f(n) = 3logn + loglogn, g(n) = logn$
Entonces, f(n) = $\Omega(g(n))$ si:
Existe $n_0, c > 0$, Tal que:
$\forall n \geq n_0 > 0 : cg(n) \leq f(n)$

Por definición, se tiene que $n > 0$, entonces:
$3logn + loglogn = f(n) \geq 0$ y $logn = g(n) \geq 0$
De donde:
$n_0 \geq 2$
Entonces, en la ecuación:
$0 \leq c(logn) \leq 3logn + loglogn$
Basta tomar c=3 para que satisfaga la ecuación.

i. Demostrar que $3\log n + \log\log n$ es $\Theta(\log n)$

Solución:

Sea:
$f(n) = 3logn + loglogn, g(n) = logn$

Entonces, f(n) = $\Theta(g(n))$ si:
Existe $n_0, c > 0$, Tal que:
$\forall n \geq n_0 > 0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

Por definición, se tiene que $n > 0$, entonces:
$3logn + loglogn = f(n) \geq 0$ y $logn = g(n) \geq 0$
De donde:
$n_0 \geq 2$
Entonces, en la ecuación:
$0 \leq c_1(logn) \leq 3logn + loglogn \leq c_2(logn)$
De los ejercicios **g** y **h**. Basta tomar $c_1 = 3$ y $c_2 = 4$ para que satisfaga la ecuación.

2 Recurrencias

Resuelva las siguientes recurrencias usando funciones generatrices y cualquier otro método, es decir, cada recurrencia debe ser resuelto por dos métodos. La solución debe ser exacta para infinitos n.

a. $T(n) = T(n-1) + n - 1, T(1) = 2$

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Transformamos T(n) en A(z) y aumentamos el caso base a 0:
$T(n+1) = T(n) + n$
$T(1) = T(0) + 0$, Entonces, $T(0) = 2$
Reemplazando por las funciones generatrices:
$\frac{A(z)-A(0)}{z} = A(z) + \frac{z}{(1-z)^2}$
$(1-z)A(z) - \frac{z^2}{(1-z)^2} - 2 = 0$
$A(z) = \frac{z^2}{(1-z)^3} + \frac{2}{(1-z)}$
Haciendo transformada inversa:
$T(n) = \binom{n}{2} + 2$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$T(n) = \frac{(n-1)n}{2} + 2$$

Solución Por Ecuación Característica

Se debe generar un polinomio característico basado en la recursión.
$T(n+1) = T(n) + n$

Cáculo de la solución homogénea:
Sea $T(n)_H = r^n$, cambiamos la recursión por:
$T(n+1)_H - T(n)_H = 0$
$r^{n+1} - r^n = 0$
Dividimos entre r^n y obtenemos la raíz $(r-1)$
Por lo cual la solución homogénea es:
$T(n)_H = \alpha(1)^n$

Cáculo de la solución particular:
Sabemos que $T(n)_P = A_2 n^2 + A_1 n + A_0$, por lo que el caso particular será:
Entonces hacemos:
$T(n+1)_P = T(n)_P + n$

$A_2(n+1)^2 + A_1(n+1) + A_0 = A_2n^2 + A_1n + A_0 + n$
Por lo tanto $A_2 = \frac{1}{2}, A_1 = -\frac{1}{2}, A_0 = 0$, se tiene la solución particular:
$T(n)_P = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{(n-1)n}{2}$
Cáculo de la solución general:
Tenemos:
$S_G = S_H + S_P$
$T(n)_G = \alpha(1)^n + \frac{(n-1)n}{2}$
Usando el caso base T(1) = 2:
$T(1) = \alpha(1)^1 + \frac{(1-1)1}{2}$
$2 = \alpha$
Por lo tanto, la función recursiva es:
$T(n) = 2 + \frac{(n-1)n}{2}$

Solución encontrada por el método de ecuación característica:

$$T(n) = \frac{(n-1)n}{2} + 2$$

b. $T(n) = 3T(n-1) + 2, T(1) = 1$

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Transformamos T(n) en A(z) y aumentamos el caso base a 0:
$T(n+1) = 3T(n) + 2$
$T(1) = 3T(0) + 2$, Entonces, $T(0) = -\frac{1}{3}$
Reemplazando por las funciones generatrices:
$\frac{A(z)-A(0)}{z} = 3A(z) + \frac{2}{(1-z)}$
$(1-3z)A(z) - \frac{2z}{(1-z)} + \frac{1}{3} = 0$
$A(z) = \frac{2z}{(1-z)(1-3z)} - (\frac{1}{3})\frac{1}{1-3z}$
$A(z) = (\frac{2}{3})\frac{1}{1-3z} - \frac{1}{(1-z)}$
Haciendo transformada inversa:
$T(n) = (\frac{2}{3})3^n - 1$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$T(n) = 2 * 3^{n-1} - 1$$

Solución Por Ecuación Característica

Se debe generar un polinomio característico basado en la recursión.
$T(n+1) = 3T(n) + 2, T(1) = 1$
Separamosla solución general como:
$S_G = S_p + S_h$
Donde:
S_G: Es la solución general.
S_H: Es la solución homogénea.
S_P: Es la solución particular.

Cáculo de la solución homogénea:
Sea $T(n)_H = r^n$, cambiamos la recursión por:
$T(n+1)_H - T(n)_H = 0$
$r^{n+1} - 3r^n = 0$

Dividimos entre r^n y obtenemos la raíz $(r-3)$
Por lo cual la solución homogénea es:
$T(n)_H = \alpha(3)^n$

Cáculo de la solución particular:
Sabemos que $T(n)_P = A_1 n + A_0$, por lo que el caso particular será:
Entonces hacemos:
$T(n+1)_P = 3 * T(n)_P + 2$
$A_1(n+1) + A_0 = 3 * (A_1 n + A_0) + 2$
Por lo tanto $A_1 = 0, A_0 = -1$, se tiene la solución particular:
$T(n)_P = -1$

Cáculo de la solución general:
Tenemos:
$S_G = S_H + S_P$
$T(n)_G = \alpha(3)^n - 1$
Usando el caso base T(1) = 1:
$T(1) = \alpha(3)^1 - 1$
$1 = \alpha(3) - 1$
$\alpha = \frac{2}{3}$
Por lo tanto, la función recursiva es:
$T(n) = \frac{2}{3}3^n - 1$

Solución encontrada por el método de ecuación característica:

$$T(n) = 2 * 3^{n-1} - 1$$

c. $T(n) = 6T(n/6) + 2n + 3, T(1) = 1$

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Haciendo cambio de variable $n = 6^m$
Tendríamos:
$T(6^m) = 6T(6^{m-1}) + 2 * 6^m + 3, T(1) = 1$
Sea $T(6^m) = G(m)$, tendríamos que T(1) = G(0)=1.
Reemplazando:
$G(m) = 6G(m-1) + 2 * 6^m + 3$
Transformamos G(m) en A(z) y aumentamos el caso base a 0:
$G(m+1) = 6G(m) + 2 * 6 * 6^m + 3, G(0) = 1$
Reemplazando por las funciones generatrices:
$\frac{A(z)-A(0)}{z} = 6A(z) + 2 * 6 * \frac{1}{(1-6z)} + \frac{3}{(1-z)}$
$(1-6z)A(z) - 2 * 6 * \frac{z}{(1-6z)} - \frac{3z}{(1-z)} - 1 = 0$
$A(z) = 2 * 6 * \frac{z}{(1-6z)^2} + \frac{3z}{(1-z)(1-6z)} + \frac{1}{(1-6z)}$
$A(z) = 2 * 6 * \frac{z}{(1-6z)^2} - (\frac{3}{5})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{3}{5})\frac{1}{(1-6z)} + \frac{1}{(1-6z)}$
$A(z) = 2 * \frac{6z}{(1-6z)^2} - (\frac{3}{5})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{8}{5})\frac{1}{(1-6z)}$
Haciendo transformada inversa:
$G(m) = 2 * 6^m * m - \frac{3}{5} + \frac{8}{5}6^m$
Reemplazando por T(n):
$T(n) = 2nlog_6(n) + \frac{8}{5}n - \frac{3}{5}$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$T(n) = (2log_6(2))(nlog(n)) + \frac{8}{5}n - \frac{3}{5}$$

Solución Por Iteración

$T(n) = 6T(n/6) + 2n + 3, T(1) = 1$
Hacemos cambio de variable $n = 6^m$
Entonces para cada n multiplo de 6 se tendría en T(n) = G(m) y $n = 6^m$:
$G(m) = 6 * G(m-1) + 2 * 6^m + 3$
Expandiendo G(m-1):
$G(m) = 6(6 * G(m-2) + 2 * 6^{m-1} + 3) + 2 * 6^m + 3$
$G(m) = 6^2 * G(m-2) + 2 * (2 * 6^m) + 3 * 6 + 3$
Expandiendo G(m-2):
$G(m) = 6^2(6 * G(m-3) + 2 * 6^{m-2} + 3) + 2 * 6^m + 3 * 6 + 2 * 6^m + 3$
$G(m) = 6^3 * G(m-3) + 3 * (2 * 6^m) + 3 * 6^2 + 3 * 6 + 3$
Expandiendo G(m-3):
$G(m) = 6^3(6 * G(m-4) + 2 * 6^{m-3} + 3) + 3 * (2 * 6^m) + 3 * 6^2 + 3 * 6 + 3$
$G(m) = 6^4 * G(m-4) + 4 * (2 * 6^m) + 3 * 6^3 + 3 * 6^2 + 3 * 6 + 3$
Entonces, expandiendo hasta (m):
$G(m) = 6^m * G(m-(m)) + (m) * (2 * 6^m) + 3 * (\sum_{i=0}^{m-1} 6^i)$
Tenemos:
$G(m) = 6^m * G(0) + (m) * (2 * 6^m) + 3 * (\sum_{i=0}^{m-1} 6^i)$
$G(m) = 6^m * G(0) + (m) * (2 * 6^m) + 3 * (\frac{6^m-1}{5})$
reemplazando por n:
$T(n) = n * T(1) + log_6(n) * (2 * n) + \frac{3}{5} * (n-1)$

Solución encontrada por el método de iteración y cambio de variable:

$$T(n) = 2nlog_6(n) + \frac{8}{5}n - \frac{3}{5}$$

O también:

$$T(n) = (2log_6(2))(nlog(n)) + \frac{8}{5}n - \frac{3}{5}$$

d. $T(n) = 4T(n/3) + 3n - 5, T(1) = 2$

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Haciendo cambio de variable $n = 3^m$
Tendríamos:
$T(3^m) = 4T(3^{m-1}) + 3 * 3^m - 5$
Sea $T(3^m) = G(m)$, tendríamos que T(1) = G(0)=2.
Reemplazando:
$G(m) = 4G(m-1) + 3 * 3^m - 5$
Transformamos G(m) en A(z) y aumentamos el caso base a 0:
$G(m+1) = 4G(m) + 3 * 3 * 3^m - 5, G(0) = 2$
Reemplazando por las funciones generatrices:
$\frac{A(z)-A(0)}{z} = 4A(z) + 3 * 3 * \frac{1}{(1-3z)} - \frac{5}{(1-z)}$
$(1-4z)A(z) - 3 * 3 * \frac{z}{(1-3z)} + \frac{5z}{(1-z)} - 2 = 0$
$A(z) = 3 * 3 * \frac{z}{(1-3z)(1-4z)} - \frac{5z}{(1-z)(1-4z)} + \frac{2}{(1-4z)}$
$A(z) = 3 * 3 * \frac{z}{(1-3z)(1-4z)} + (\frac{5}{3})\frac{1}{(1-z)} - (\frac{5}{3})\frac{1}{(1-4z)} + \frac{2}{(1-4z)}$
$A(z) = 3 * 3 * \frac{1}{(1-4z)} - 3 * 3 * \frac{1}{(1-3z)} + (\frac{5}{3})\frac{1}{(1-z)} - (\frac{5}{3})\frac{1}{(1-4z)} + \frac{2}{(1-4z)}$
$A(z) = (\frac{28}{3})\frac{1}{(1-4z)} - 3 * 3 * \frac{1}{(1-3z)} + (\frac{5}{3})\frac{1}{(1-z)}$
Haciendo transformada inversa:
$G(m) = (\frac{28}{3})4^m - 9 * 3^m + (\frac{5}{3})$

Reemplazando por T(n):
$T(n) = (\frac{28}{3})4^{log_3(n)} - 9 * 3^{log_3(n)} + (\frac{5}{3})$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$T(n) = \frac{28}{3}n^{log_3(4)} - 9n + \frac{5}{3}$$

Solución Por Iteración

Similar al caso anterior, expandimos:
$T(n) = 4T(n/3) + 3n - 5$, T(1)=2
$T(n) = 4^2T(n/3^2) + \frac{4}{3}3n - 4.5 + 3n - 5$
$T(n) = 4^3T(n/3^3) + (\frac{4}{3})^2 3n + \frac{4}{3}3n + 3n - 4^2.5 - 4.5 - 5$
Expandiendo hasta $k = log_3(n)$ Tenemos:
$T(n) = 4^kT(1) + 3n\sum_{i=0}^{k-1}(\frac{4}{3})^i - 5\sum_{i=0}^{k-1}(4)^i$
$T(n) = 4^kT(1) + 9n((\frac{4}{3})^k - 1) - \frac{5}{3}(4^k - 1)$
$T(n) = 2n^{log_3(4)} + 9n^{log_3(4)-log_3(3)+1} - 9n - \frac{5}{3}(n^{log_3(4)} - 1)$

Solución encontrada por el método de iteración:

$$T(n) = \frac{28}{3}n^{log_3(4)} - 9n + \frac{5}{3}$$

e. $T(n) = T(n/4) + n - 1, T(1) = 2$

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Haciendo cambio de variable $n = 4^m$
Tendríamos:
$T(4^m) = T(4^{m-1}) + 4^m - 1$
Sea $T(4^m) = G(m)$, tendríamos que T(1) = G(0)=2.
Reemplazando:
$G(m) = G(m-1) + 4^m - 1$
Transformamos G(m) en A(z) y aumentamos el caso base a 0:
$G(m+1) = G(m) + 4 * 4^m - 1, G(0) = 2$

Reemplazando por las funciones generatrices:
$\frac{A(z)-A(0)}{z} = A(z) + 4 * \frac{1}{(1-4z)} - \frac{1}{(1-z)}$
$(1-z)A(z) - 4 * \frac{z}{(1-4z)} + \frac{z}{(1-z)} - 2 = 0$
$A(z) = 4 * \frac{z}{(1-z)(1-4z)} - \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{2}{(1-z)}$
$A(z) = (\frac{4}{3})\frac{1}{(1-4z)} - (\frac{4}{3})\frac{1}{(1-z)} - \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{2}{(1-z)}$
$A(z) = (\frac{4}{3})\frac{1}{(1-4z)} - \frac{z}{(1-z)^2} + (\frac{2}{3})\frac{1}{(1-z)}$
Haciendo transformada inversa:
$G(m) = (\frac{4}{3})4^m - m + \frac{2}{3}$
Reemplazando por T(n):
$T(n) = \frac{4}{3}n - log_4(n) + \frac{2}{3}$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$T(n) = \frac{4}{3}n - \frac{1}{2}log(n) + \frac{2}{3}$$

Solución Por Iteración

Similar al caso anterior, expandimos:
$T(n) = T(n/4) + n - 1$, T(1)=2
$T(n) = T(n/4^2) + \frac{1}{4}n + n - 2$
$T(n) = T(n/4^3) + \frac{1}{4^2}n + \frac{1}{4}n + n - 3$
$T(n) = T(n/4^4) + \frac{1}{4^3}n + \frac{1}{4^2}n + \frac{1}{4}n + n - 4$
Expandiendo hasta un termino $k = log_4(n)$:
$T(n) = T(n/4^k) + \sum_{i=0}^{k-1}(\frac{1}{4})^i n - k$
$T(n) = T(1) + \frac{4}{3}n - \frac{4}{3} - log_4(n)$

Solución encontrada por el método de iteración:

$$T(n) = \frac{4}{3}n - \frac{1}{2}log(n) + \frac{2}{3}$$

f. $T(n) = T(n-2) + n, T(0) = c, T(1) = d$, Resuelva para todo n

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Hacemos cambio de variable:
$T(n+2) = T(n) + n + 2$
Transformamos T(n) en A(z):
Reemplazando por las funciones generatrices:
$\frac{\frac{A(z)-A(0)}{z} - A(1)}{z} = A(z) + \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{2}{(1-z)}$
$A(z) = \frac{z^3}{(1-z)^3(1+z)} + \frac{2z^2}{(1-z)^2(1+z)} + \frac{dz}{(1-z)(1+z)} + \frac{c}{(1-z)(1+z)}$
$A(z) = (\frac{1}{8})\frac{7z^2-4z+1}{(1-z)^3} - (\frac{1}{8})\frac{1}{(1+z)} + (\frac{1}{2})\frac{3z-1}{(1-z)^2} + (\frac{1}{2})\frac{1}{(1+z)} + (\frac{d}{2})\frac{1}{(1-z)} - (\frac{d}{2})\frac{1}{(1+z)} + (\frac{c}{2})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{c}{2})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{1}{8})\frac{7z^2-4z+1}{(1-z)^3} + (\frac{1}{2})\frac{3z-1}{(1-z)^2} + (\frac{3}{8})\frac{1}{(1+z)} + (\frac{d}{2})\frac{1}{(1-z)} - (\frac{d}{2})\frac{1}{(1+z)} + (\frac{c}{2})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{c}{2})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{1}{8})\frac{7z^2-4z+1}{(1-z)^3} + (\frac{1}{2})\frac{3z-1}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d}{4})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{1}{8})\frac{7z^2-4z+1}{(1-z)^3} + \frac{1}{(1-z)^2} - (\frac{3}{2})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c+4d}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{1}{8})\frac{7z^2-4z+1}{(1-z)^3} + \frac{1}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{7}{8})\frac{z^2}{(1-z)^3} + (\frac{1}{8})\frac{1-4z}{(1-z)^3} + \frac{1}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{7}{8})\frac{z^2}{(1-z)^3} + (\frac{1}{8})\frac{-3}{(1-z)^3} + (\frac{1}{8})\frac{4-4z}{(1-z)^3} + \frac{1}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{7}{8})\frac{z^2}{(1-z)^3} + (\frac{1}{8})\frac{-3}{(1-z)^3} + (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{1}{8})\frac{7z^2}{(1-z)^3} + (\frac{1}{8})\frac{-3}{(1-z)^3} + (\frac{12}{8})\frac{1}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{1}{8})(\frac{7(z^2-1)}{(1-z)^3} + \frac{4}{(1-z)^3}) + (\frac{12}{8})\frac{1}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{1}{8})(\frac{4}{(1-z)^3} - \frac{7(z+1)}{(1-z)^2}) + (\frac{12}{8})\frac{1}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^3} + (\frac{7}{8})\frac{-z-1}{(1-z)^2} + (\frac{12}{8})\frac{1}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^3} + (\frac{1}{8})\frac{-7z-7}{(1-z)^2} + (\frac{1}{8})\frac{12}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^3} + (\frac{1}{8})\frac{5-7z}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^3} + (\frac{1}{8})\frac{7-7z}{(1-z)^2} - (\frac{1}{8})\frac{2}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^3} + (\frac{1}{8})\frac{7}{(1-z)} - (\frac{1}{8})\frac{2}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-12}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^3} - (\frac{1}{8})\frac{2}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-5}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^3} - (\frac{2}{8})\frac{1}{(1-z)^2} - (\frac{2}{8})\frac{1-z}{(1-z)^2} + (\frac{2}{8})\frac{1-z}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-5}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^3} - (\frac{2}{8})\frac{2-z}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-3}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$
$A(z) = (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^3} - (\frac{4}{8})\frac{1}{(1-z)^2} + (\frac{2}{8})\frac{z}{(1-z)^2} + (\frac{4c+4d-3}{8})\frac{1}{(1-z)} + (\frac{4c-4d+3}{8})\frac{1}{(1+z)}$

Haciendo transformada inversa:
$T(n) = (\frac{4}{8})\binom{n+2}{n} - (\frac{4}{8})\binom{n+1}{n} + (\frac{2}{8})\binom{n}{1} + (\frac{4c+4d-3}{8})(1)^n + (\frac{4c-4d+3}{8})(-1)^n$

$T(n) = (\frac{4}{8})\frac{(n+2)(n+1)}{2} - (\frac{4}{8})(n+1) + (\frac{2}{8})n + (\frac{4c+4d-3}{8})(1)^n + (\frac{4c-4d+3}{8})(-1)^n$
$T(n) = (\frac{4}{8})\frac{(n+2)(n+1)}{2} - (\frac{2}{8})n - \frac{4}{8} + (\frac{4c+4d-3}{8})(1)^n + (\frac{4c-4d+3}{8})(-1)^n$
$T(n) = \frac{(n+2)(n+1)}{4} - \frac{n}{4} - \frac{2}{4} + (\frac{4c+4d-3}{8})(1)^n + (\frac{4c-4d+3}{8})(-1)^n$
$T(n) = \frac{n^2+3n+2}{4} - \frac{n}{4} - \frac{2}{4} + (\frac{4c+4d-3}{8})(1)^n + (\frac{4c-4d+3}{8})(-1)^n$
$T(n) = \frac{n^2+2n}{4} + (\frac{4c+4d-3}{8})(1)^n + (\frac{4c-4d+3}{8})(-1)^n$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$T(n) = (\frac{4c+4d-3}{8})(1)^n + (\frac{4c-4d+3}{8})(-1)^n + \frac{n(n+2)}{4}$$

Solución Por Ecuación Característica

Cambiamos por:
$T(n+2) = T(n) + (n+2), T(0) = c, T(1) = d$

Caso homogéneo:
Sea $T(n)_H = r^n$:
Entonces:
$T(n+2)_H - T(n)_H = 0$
$r^{n+2} - r^n = 0$
Diviendo entre r^n, se tiene:
$r^2 - 1 = 0$, por lo cual
Encontramos las raíces $(r-1)(r+1)$
Por lo cual nuestra solución homogénea sería:
$T(n)_H = \alpha(1)^n + \beta(-1)^n$

Caso particular:
Sea $T(n)_P = A_2n^2 + A_1n + A_0$
Entonces:
$T(n+2)_P - T(n)_P = (n+2)$
$A_2(n+2)^2 + A_1(n+2) + A_0 = A_2n^2 + A_1n + A_0 + (n+2)$
Se tiene:
$A_2 = \frac{1}{4}, A_1 = \frac{1}{2}$
Por lo cual nuestra solución particular sería:
$T(n)_P = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+2)}{4}$

Caso de solución general:
$T(n)_G = T(n)_H + T(n)_P$
$T(n) = \alpha(1)^n + \beta(-1)^n + \frac{n(n+2)}{4}$
Probando los casos iniciales:
$T(0) = \alpha + \beta = c$
$T(1) = \alpha - \beta + \frac{3}{4} = d$
$\alpha = \frac{4c+4d-3}{8}, \beta = \frac{4c-4d+3}{8}$

Solución encontrada por el método de ecuación característica:

$$T(n) = (\frac{4c+4d-3}{8})(1)^n + (\frac{4c-4d+3}{8})(-1)^n + \frac{n(n+2)}{4}$$

3 Recurrencias mas Complejas

Resuelva las siguientes recurrencias usando funciones generatrices y cualquier otro método, es decir, cada recurrencia debe ser resuelto por dos métodos. La solución debe ser exacta para infinitos n.

a. Resuelva $T(0) = 0, T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Hacemos cambio de base:
T(n+1)=1+$\sum_{i=0}^{n} T(i)$, $T(0) = A_0 = 0$
Transformamos T(n) en A(z):
$\frac{A(z)-A_0}{z} = \frac{1}{1-z} + \frac{A(z)}{1-z}$
$A(z)(\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}) = \frac{1}{1-z}$
$A(z) = \frac{z}{1-2z}$
Haciendo transformada inversa:
$T(n) = 2^{n-1}$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$T(n) = 2^{n-1}$$

Solución Por Iteración

Expandiendo por iteración, tenemos:
$T(n) = 1 + T(0) + T(1) + ... + T(n-1)$
Debido a que cada T(n) crece linealmente (se puede ver en la recursión, tenemos:
$T(n) = 1 + 2^0 + 2^1 + ... + 2^{n-2}$
$T(n) = 1 + 2^{n-1} - 1$
$T(n) = 2^{n-1}$

Solución encontrada por iteración:

$$T(n) = 2^{n-1}$$

b. Intente resolver lo anterior si la suma llega hasta n, ¿Que ocurre? ¿Cual es la explicación?

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Se tiene:
T(n)=1+$\sum_{i=0}^{n} T(i)$, $T(0) = A_0 = 0$
Transformamos T(n) en A(z):
$A(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{A(z)}{1-z}$
$A(z)(1 - \frac{1}{1-z}) = \frac{1}{1-z}$
$A(z) = -\frac{1}{z} = -(z)^{-1}$
Haciendo transformada inversa:
$n = -1$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

No existe, seria una recurrencia infinita debido a que el termino T(n) se elimina.

c. Resuelva $T(0) = 0, T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1}(T(i) + T(n-i))$

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Hacemos cambio de base:
T(n+1)=1+$\sum_{i=0}^{n}(T(i) + T(n+1-i))$, $T(0) = A_0 = 0$

T(n+1)=1+$\sum_{i=0}^{n} T(i) + \sum_{i=0}^{n} T(n-i) + T(n+1)$
0=1+$\sum_{i=0}^{n} T(i) + \sum_{i=0}^{n} T(n-i)$
Transformamos T(n) en A(z):
$0 = \frac{1}{1-z} + \frac{A(z)}{1-z} + \frac{A(z)}{1-z}$
$A(z)(\frac{2}{1-z}) = -\frac{1}{1-z}$
$A(z) = -\frac{1}{2}$
Haciendo transformada inversa:
No esta definido.

Solución encontrada por el método de función generatriz:

No esta definida la recurrencia, la cual se convierte en infinita debido a la eliminación de términos.

d. Resuelva el sistema de recurrencias $a_{n+1} = an + 2b_n$, $b_{n+1} = 3a_n + 2b_n$ con $a_0 = 1$ y $b_0 = -1$

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Transformamos a_n en A(z):
$\frac{A(z)-1}{z}$ = A(z) + 2B(z)
Entonces:
A(z)(1-z) = 2zB(z) + 1 ...(1)

Transformamos b_n en B(z):
$\frac{B(z)+1}{z}$ = 3A(z) + 2B(z)
B(z)(1-2z) = 3zA(z)-1 ...(2)

Reemplazamos (2) en (1):
B(z)(1-2z) = 3z($\frac{2zB(z)+1}{1-z}$)-1
$B(z)[1-2z-\frac{6z^2}{1-z}] = \frac{3z}{1-z} - 1$
$B(z)[\frac{1+2z^2-3z-6z^2}{1-z}] = \frac{3z-1+z}{1-z}$
$B(z) = \frac{4z-1}{1-3z-4z^2} = \frac{4z-1}{(1-4z)(1+z)}$
$B(z) = -\frac{1}{1+z} = \frac{-1}{1-(-1)z}$

Reemplazando en A(z):
$A(z) = \frac{1}{1-z}[\frac{-2z}{1+z} + 1]$
$A(z) = \frac{1}{1-z}[\frac{1-z}{1+z}]$
$A(z) = \frac{1}{1+z}$
Haciendo transformada inversa: $a_n = (-1)^n$
$b_n = (-1)^{n+1}$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$a_n = (-1)^n$$
$$b_n = (-1)^{n+1}$$

e. Prueba una versión mas general del Teorema Maestro, donde el paso recursivo dice $T(n) = aT(n/c) + bn^k$

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Haciendo cambio de variable $n = c^m$ o $m = log_c(n)$
Tendríamos:
$T(c^m) = aT(c^{m-1}) + b(c^{km})$

Sea $T(c^m) = G(m)$Reemplazando:
$G(m) = aG(m-1) + +b(c^{km})$
Transformamos G(m) en A(z) y aumentamos el caso base a 0:
$G(m+1) = aG(m) + +b((c^k)^{m+1})$

Reemplazando por las funciones generatrices:
$\frac{A(z)-A(0)}{z} = aA(z) + b(\frac{1}{(1-c^k z)})$
$A(z) = azA(z) + b(\frac{z}{(1-c^k z)}) + \frac{A(0)}{1-z}$
$(1-az)A(z) = b(\frac{z}{(1-c^k z)}) + \frac{A(0)}{1-z}$
$A(z) = (\frac{bz}{(1-c^k z)(1-az)}) + \frac{A(0)}{(1-z)(1-az)}$
$A(z) = (\frac{b}{c^k-a})\frac{1}{(1-c^k z)} - (\frac{b}{c^k-a})\frac{1}{(1-az)} + (\frac{A(0)}{1-a})\frac{1}{(1-z)} - (\frac{aA(0)}{1-a})\frac{1}{(1-az)}$
Haciendo transformada inversa:
$G(m) = (\frac{b}{c^k-a})(c^k)^m - (\frac{b}{c^k-a})(a^m) + (\frac{A(0)}{1-a}) - (\frac{aA(0)}{1-a})(a^m)$
$T(n) = (\frac{b}{c^k-a})(c^k)^{log_c(n)} - (\frac{b}{c^k-a})(a^{log_c(n)}) + (\frac{A(0)}{1-a}) - (\frac{aA(0)}{1-a})(a^{log_c(n)})$
$T(n) = (\frac{b}{c^k-a})(n^k) - (\frac{b}{c^k-a})(n^{log_c(a)}) + (\frac{A(0)}{1-a}) - (\frac{aA(0)}{1-a})(n^{log_c(a)})$

Tenemos 3 casos:

$a = c^k$:
$T(n) = n^k T(1)$
Pero en el ultimo nivel del caso base n=1, se tiene $log_c(n) operaciones$
$T(n) = O(n^k log_c(n))$

$a < c^k$:
$log_c(a) < log_c(c^k) = k$
$T(n) = O(n^k)$

$a > c^k$:
$log_c(a) > log_c(c^k) = k$
$T(n) = O(n^{log_c(a)})$

Reemplazando por T(n):
$T(n) = \frac{4}{3}n - log_4(n) + \frac{2}{3}$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$T(n) = \frac{4}{3}n - \frac{1}{2}log(n) + \frac{2}{3}$$

Solución Por Iteración

Expandiendo por iteración, tenemos:
$T(n) = aT(n/c) + bn^k$
$T(n) = a^2 T(n/c^2) + (\frac{a}{c^k})bn^k + bn^k$
$T(n) = a^3 T(n/c^3) + (\frac{a}{c^k})^2 bn^k + (\frac{a}{c^k})bn^k + bn^k$
Expandiendo hasta un termino $m = log_c(n)$:
$T(n) = a^m T(n/c^m) + \sum_{i=0}^{m-1}(\frac{a}{c^k})^i bn^k$
$T(n) = a^m T(n/c^m) + \frac{(\frac{a}{c^k})^m - 1}{(\frac{a}{c^k}) - 1} bn^k$
Reemplazando:

$T(n) = n^{log_c(a)}T(1) + \frac{n^{log_c(a)-log_c(c^k)}-1}{(\frac{a-c^k}{c^k})}bn^k$
$T(n) = n^{log_c(a)}T(1) + \frac{bc^k}{a-c^k}(n^{k+log_c(a)-k} - 1)n^k$
$T(n) = n^{log_c(a)}T(1) + (\frac{bc^k}{a-c^k})n^{log_c(a)} - (\frac{bc^k}{a-c^k})n^k$

Tenemos 3 casos:
$a = c^k$:
$T(n) = n^kT(1)$
Pero en el ultimo nivel del caso base n=1, se tiene $log_c(n) operaciones$
$T(n) = O(n^k log_c(n))$

$a < c^k$:
$log_c(a) < log_c(c^k) = k$
$T(n) = O(n^k)$

$a > c^k$:
$log_c(a) > log_c(c^k) = k$
$T(n) = O(n^{log_c(a)})$

f. Resuelva

$$T(n) = \sum_{i=1}^{\ln n} T(n/e^i) + \ln(n)^2$$

para $n \geq 1$, e indica para que valores de n es exacta su solución

g. Resuelva

$$a_n = \frac{a_{n/2}^{3/2}a_{n/4}^{3/2}}{\sqrt{2}a_{n/8}}$$

Con $a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 4$ en forma exacta para potencias de 2. Encuentre el orden del resultado y exprese el error de la aproximación con notación $O()$.

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Haciendo cambio de variable $n = 2^k$ o $k = log_2(n)$
Tendríamos:
$a_n = \frac{a_{n/2}^{3/2}a_{n/4}^{3/2}}{\sqrt{2}a_{n/8}}$
$a_{2^k} = \frac{a_{2^{k-1}}^{3/2}a_{2^{k-2}}^{3/2}}{2^{1/2}a_{2^{k-3}}}$
$2^{1/2}a_{2^{k-3}}a_{2^k} = a_{2^{k-1}}^{3/2}a_{2^{k-2}}^{3/2}$
Haciendo otro cambio de variable a función:
$a_{2^k} = 2^{b(k)}$
De tal manera que:
b(0)= 0, b(1)=1, b(2) = 2.
$(2^{1/2})(2^{b(k-3)})(2^{b(k)}) = (2^{(3/2)b(k-1)})(2^{(3/2)b(k-2)})$
Entonces, de los exponentes tenemos:
(1/2) + b(k-3) + b(k) = (3/2)b(k-1) + (3/2)b(k-2)
Transformamos b(k) en B(z):
$(\frac{1}{2})(\frac{1}{1-z}) + ((\frac{B(z)}{z} - 1)\frac{1}{z} - 2)\frac{1}{z} + B(z) = (3/2)\frac{B(z)}{z} + (3/2)(\frac{B(z)}{z} - 1)(\frac{1}{z})$
$B(z)(\frac{1}{z^3} - \frac{3}{z^2} - \frac{3}{z} + 1) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} - \frac{3}{2z} - (\frac{1}{2})(\frac{1}{1-z})$

$B(z)(2z^3-3z^2-3z+2) = -3z^2 - \frac{z^3}{1-z} + 2z + 4z^2$
$B(z)(2z^3-3z^2-3z+2) = z^2 - \frac{z^3}{1-z} + 2z$
$B(z)(2z^3-3z^2-3z+2) = -z(-z + \frac{z^2}{1-z} - 2)$
$B(z)(2z^3-3z^2-3z+2) = -z(\frac{z^2-(2-z-z^2)}{1-z})$
$B(z)(2z^3-3z^2-3z+2) = -z(\frac{2z^2+z-2}{1-z})$
$B(z) = -z(\frac{2z^2+z-2}{(1-z)(2z^3-3z^2-3z+2)})$
$B(z) = (-\frac{8}{9})(\frac{1}{1-(1/2)z}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{1-z}) + (\frac{4}{9})(\frac{1}{1-2z}) + (-\frac{1}{18})(\frac{1}{1+z})$
Haciendo transformada inversa:
$b(k) = (-\frac{8}{9})(1/2)^k + (\frac{1}{2}) + (\frac{4}{9})(2)^k + (-\frac{1}{18})(-1)^k$
Regresando hacia $a(2^k)$:
$a(2^k) = 2^{((-\frac{8}{9})(1/2)^k + (\frac{1}{2}) + (\frac{4}{9})(2)^k + (-\frac{1}{18})(-1)^k)}$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$a(n) = 2^{((-\frac{8}{9})(1/n) + (\frac{1}{2}) + (\frac{4}{9})n + (-\frac{1}{18})(-1)^{log(n)})}$$

h. Resolver $S(n) = nS(n/2), S(1) = 1$

Solución Por Función generatriz de probabilidad (basada en la tranformada Z)

Haciendo cambio de variable $n = 2^k$ o $k = log_2(n)$
Tendríamos:
$S(2^k) = 2^{b(k)}$
De donde:
$S(2^0) = S(1) = 2$, $S(2^0) = 2^{b(0)}$, b(0)=0.
$2^{b(k)} = 2^k(2^{b(k-1)})$
$2^{b(k)} = 2^{k+b(k-1)}$
$b(k) = k + b(k-1)$
Cambio de base:
$b(k+1) = b(k) + k + 1$
Transformamos b(k) en B(z):
$\frac{B(z)-b_0}{z} = B(z) + \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z}$
$B(z)(\frac{1}{z} - 1) = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1-z}{(1-z)^2}$
$B(z)(\frac{1-z}{z}) = \frac{1}{(1-z)^2}$
$B(z) = \frac{z}{(1-z)^3}$
Haciendo transformada inversa:
$b(k) = \binom{(k-1)+2}{2}$
$b(k) = \frac{k(k+1)}{2}$
Regresando hacia $S(2^k)$:
$S(2^k) = 2^{\frac{k(k+1)}{2}}$

Solución encontrada por el método de función generatriz:

$$S(n) = n^{log(n)/2} + n^{1/2}$$

i. Obtenga el orden $\Theta()$ de la siguiente recurrencia: $f(n) = f(\alpha n) + f(\beta n) + cn$, donde $\alpha + \beta = 1$ y son positivos. Ayuda: Ud. conoce el resultado para $\alpha = \beta = 1/2$

Divide y Vencerá

1 Monge arrays

An $m \times n$ array A of real numbers is a **Monge array** if for all i, j, k, and l such that $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq j < l \leq n$ we have

$$A[i,j] + A[k,l] \leq A[i,l] + A[k,j]$$

In other words, whenever we pick two rows and two columns of a Monge array and consider the four elements at the intersections of the rows and the columns, the sum of the upper-left and lower-right elements is less than or equal to the sum of the lower-left and upper-right elements. For example, the following array is Monge:

10	17	13	28	23
17	22	16	29	23
24	28	22	34	24
11	13	6	17	7
45	44	32	37	23
36	33	19	21	6
75	66	51	53	34

a. Prove that an array is Monge if and only if for all $I = 1, 2, ..., M-1$ and $J = 1, 2, ..., N-1$, we have

$$A[i,j] + A[i+1,j+1] \leq A[i,j+1] + A[i+1,j]$$

(*Hint*: For the "if" part, use induction separately on rows and columns.)

Solución:

Para una matriz nxm, Tenemos que demostrar que:
Para $i \leq k \leq n$ y $j < l \leq m$
$A[i,j] + A[k,l] \leq A[i,l] + A[k,j] \Leftrightarrow A[i,j] + A[i+1,j+1] \leq A[i,j+1] + A[i+1,j]$

Para demostrar el lado derecho:
$A[i,j] + A[k,l] \leq A[i,l] + A[k,j] \Rightarrow A[i,j] + A[i+1,j+1] \leq A[i,j+1] + A[i+1,j]$
Tenemos que por definición, debe cumplir.

Para demostrar el lado izquierdo:
$A[i,j] + A[k,l] \leq A[i,l] + A[k,j] \Leftarrow A[i,j] + A[i+1,j+1] \leq A[i,j+1] + A[i+1,j]$
Lo hacemos inducción:
Hacemos la prueba para k:

$$\begin{array}{ccc} a_{i,j} & \cdots & a_{i,l} \\ . & . & . \\ a_{k,j} & \cdots & a_{k,l} \\ a_{k+1,j} & \cdots & a_{k+1,l} \end{array}$$

De aqui vemos que por definición del Monge Array:
$A[k, j] + A[k + 1, l] \leq A[k, l] + A[k + 1, j]$.

Usando nuestra hipótesis de inducción:
$A[k, j] + A[k + 1, l] + A[i, j] + A[k, l] \leq A[k, l] + A[k + 1, j] + A[i, l] + A[k, j]$
Y de esto obtenemos:
$A[k + 1, l] + A[i, j] \leq A[k + 1, j] + A[i, l]$
Tomando desde l = j+1 y k=i+1
$A[i, j] + A[i + 1, j + 1] \leq A[i, j + 1] + A[i + 1, j]$

b. The following array is not Monge. Change one element in order to make it Monge. (*Hint*: Use part (a))

37	23	22	32
21	6	7	10
53	34	30	31
32	13	9	6
43	21	15	8

Solución:

Tomando la formula general:

23	22
6	7

Vemos que no cumple para la submatriz con i = 1, j = 1 ya que:
$23 + 7 > 22 + 6$, si cambiamos 22 por 24, tendríamos:
$23 + 7 \leq 24 + 6$ que si cumple la relación.

Por lo tanto la nueva matriz es:

37	23	**24**	32
21	6	7	10
53	34	30	31
32	13	9	6
43	21	15	8

c. Let $f(i)$ be the index of the column containing the leftmost minimum element of row i. Prove that $f(1) \leq f(2) \leq ... \leq f(m)$ for any $m \times n$ Monge array.

Solución:

Por contradicción:
Asumimos que existe i tal que : $f(i) > f(i + 1)$
Construyendo la matriz:

$$\begin{array}{ccc} a_{i,f(i+1)} & \cdots & a_{i,f(i)} \\ . & . & . \\ a_{i+1,f(i+1)} & \cdots & a_{i+1,f(i)} \end{array}$$

De la formula general, sabemos que:
$A[i, f(i + 1)] + A[i + 1, f(i)] \leq A[i, f(i)] + A[i + 1, f(i + 1)]$ y :

Siendo A [i, f (i)] y A [i + 1, f (i + 1)] los mínimos a la izquierda y vemos que $A[i, f(i+1) < A[i, f(i)]]$ rompe la contradiccón.

Por lo tanto, siempre cumple que:
$f(1) \leq f(2) \leq ... \leq f(m)$

d. Here is a description of a divide-and-conquer algorithm that computes the left-most minimum element in each row of an $m \times n$ Monge array A:

> Construct a submatrix A' of A consisting of the even-numbered rows of A. Recursively determine the leftmost minimum for each row of A'. Then compute the leftmost minimum in the odd-numbered rows of A.

Explain how to compute the leftmost minimum in the odd-numbered rows of A (given that the leftmost minimum of the even-numbered rows is known) in $O(m + n)$ time.

Solución:

Sabemos, por la propiedad anterior, que para todo indice se cumple:
$f(2i) < f(2i + 1) < f(2(i + 1))$
Necesitamos encontrar los más pequeños entre ese rango.
El tiempo de ejecución para encontrarlos (como son O(1) por definición) es:
$T(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(f(2(i + 1)) - f(2i) + 1)$
$T(n) = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} f(2(i + 1)) - \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} f(2i) + \lfloor n/2 \rfloor$
$T(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor + 1) - f(0) + \lfloor n/2 \rfloor$
$T(n) \leq m - 1 + \lfloor n/2 \rfloor = O(n + m)$

e. Write the recurrence describing the running time of the algorithm described in part (d). Show that its solution is $O(m + n \log m)$.

Solución:

Dado que cada vez que el tamaño se divide en solo las filas pares y el paso de fusión toma O (n + m), el tiempo de ejecución del algoritmo viene dado por la recurrencia:

$f(n) = f(\lceil n/2 \rceil) + O(n + m)$
Haciendo recursión hasta un k = logn.
El caso base es O(1) ya que m es constante, y como n es una potencia de 2 hay niveles de log(n) y cada uno toma m tiempo constante de modo que:
$f(n) = km + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n}{2^i}$
$f(n) = mlog(n) + n \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i}$
$f(n) = mlog(n) + n(2 - 2/n)$
$f(n) = mlog(n) + 2n - 2$
$f(n) = O(mlog(n) + n)$

2 Small order statistics

We showed that the worst-case number $T(n)$ of comparisons used by SELECT to select the ith order statistic from n numbers satisfies $T(n) = \Theta(n)$, but the constant hidden by the Θ-notation is rather large. When i is small relative to n, we can implement a different procedure that uses SELECT as a subroutine but makes fewer comparisons in the worst case.

a. Describe an algorithm that uses $U_i(n)$ comparisons to find the ith smallest of n elements, where

$$U_i(n) = \begin{cases} T(n) & \text{if } i \geq n/2 \\ \lfloor n/2 \rfloor + U_i(\lceil n/2 \rceil) + T(2i) & \text{otherwise} \end{cases}$$

(Hint: Begin with $\lfloor n/2 \rfloor$ disjoint pairwise comparisons, and recurse on the set containing the smaller element from each pair.)

Solución:

Del enunciado, sabemos que si i es pequeño, hacemos la función SELECT que demora T(n). Este algoritmo sirve para obtener el i-esimo elemento más pequeño.

- Si $i \geq n/2$, usamos SELECT.
- Sino, dividimos el array en pares y los comparamos.
- Tomamos el menor elemento de cada par, y continuamos con el siguiete.
- Luego, recursivamente encontramos el i-esimo elemento entre los más pequeños.
- El *small order statistics* i-esimo está entre los pares que contienen los elementos más pequeños que obtenemos en el paso anterior. Llamamos a SELECT en esos 2i elementos.
- Y dicho i-esimo es el elemento buscado.

b. Show that, if $i < n/2$, then $U_i(n) = n + O(T(2i)\log(n/i))$.

Solución:

para un $i < \frac{n}{2}$ tenemos:
$U_i(n) = \lfloor n/2 \rfloor + U_i(\lceil n/2 \rceil) + T(2i)$
Haciendo por iteración:
$U_i(n) = \lfloor n/2 \rfloor + (\lfloor n/2 \rfloor + U_i(\lceil n/2^2 \rceil) + T(2i)) + T(2i)$
$U_i(n) = 2\lfloor n/2 \rfloor + U_i(\lceil n/2^2 \rceil) + 2T(2i)$
Hasta un kesimo termino:
$U_i(n) = k\lfloor n/2 \rfloor + U_i(\lceil n/2^k \rceil) + kT(2i)$
Tomando hasta $k = log(n)$
$U_i(n) = log(n)\lfloor n/2 \rfloor + U_i(\lceil 1 \rceil) + log(n)T(2i)$
$U_i(n) = log_2(n)\lfloor n/2 \rfloor + log_2(n)\lfloor n/2/i \rfloor T(2i) + log(n)T(2i)$
$U_i(n) = log_2(n)\lfloor n/2 \rfloor + log_2(n)\lfloor n/2 \rfloor T(2i) - log(i)T(2i) + log(n)T(2i)$
$U_i(n) = log_2(n)\lfloor n/2 \rfloor + (logn - log(i))T(2i)$
Por lo cual queda:
$U_i(n) = n + O(T(2i)\log(n/i))$

c. Show that if i is a constant less than $n/2$, then $U_i(n) = n + O(\log n)$.

Solución:

De la expresión anterior:
$U_i(n) = n + O(T(2i)\log(n/i))$
Si $i \leq n/2$ constante, se tiene que $T(2i) <= T(n) = \Theta(n)$.
Y como i es pequeño, $\Theta(n) = O(1)$.
Por lo tanto:
$U_i(n) = n + O(T(2i)\log(n/i))$
$U_i(n) = n + O(O(1)\log(n/i))$
$U_i(n) = n + O(\log(n) - \log(i))$
Como i es constante, log(i) es constante.
$U_i(n) = n + O(\log(n) - O(1))$
$U_i(n) = n + O(\log(n))$

d. Show that if $i = n/k$ for $k \geq 2$, then $U_i(n) = n + O(T(2n/k)\log k)$.

Solución:

De la expresión anterior:
$U_i(n) = n + O(T(2i)\log(n/i))$
Como $i = n/k$ para $k \geq 2$
$U_i(n) = n + O(T(2n/k)\log(n/(n/k)))$
$U_i(n) = n + O(T(2n/k)\log(k))$

3 Comparison-based sorting

Show that

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log i = \Theta(n \log n)$$

Use this to prove that any comparison-based sorting algorithm has worst-case time complexity $\Omega(n \log n)$

Solución:
Sabemos que:
$log(n!) = \sum_{i=1}^{n} log(i) = log(n) + log(n-1) + ... + log(2) + log(1)...(1)$
Supongamos que tenemos un arbol de desición de comparaciones.
del tipo:
$a_1 < a_2 == True$, entonces evalua $a_2 < a_3$ sino $a_1 < a_3$.
Y así sucesivamente ...
El número total de hojas l en el árbol es al menos n!, que es el número de permutaciones.
Un árbol que tiene k hojas, tendrá una altura de log(k).
Por lo cual el árbol de comparaciones generado tiene una hoja w con altura de al menos log(n!), por lo que hace al menos log(n!) comparaciones.
Volvemos a (1):
$log(n!) = log(n) + log(n-1) + ... + log(2) + log(1) \leq log(n) + log(n) + ... + log(n) + log(n) = nlog(n)$
Por lo tanto:
log(n!) = O(nlog(n))...(a)

Y también:
$log(n!) = log(n) + log(n-1) + ... + log(2) + log(1) \geq log(n/2) + log(n/2+1) + ... + log((n-1)/2) + log(n)$
$log(n!) \geq log(n/2) + log(n/2+1) + ... + log(n-1) + log(n) \geq log(n/2) + log(n/2) + ... + log(n/2)$
$log(n!) \geq n/2 * log(n/2)$
$log(n!) \geq n/2 * log(n) - nlog(n)$
$log(n!) \geq n/2 * log(n)$
Por lo tanto:
log(n!) $= \Omega(nlog(n))$...(b)

De (a) y (b) tenemos que:
log(n!) $= \Theta(nlog(n))$