

UNIVERSIDAD CATÓLICA SAN PABLO

MATEMÁTICA PARA LA COMPUTACIÓN

---

## Lista de Ejercicios Nro.3

---

*Entregado por:*

- Victor Flores
- Daniel Palomino
- Solange Ramos
- Felipe Moreno
- David Choqueluque

*Profesor:*

Sergio AQUISE ESCOBEDO

8 de septiembre de 2018

## 1. Implemente los siguientes códigos

### 1.1. La solución de un sistema de ecuaciones lineales usando el método de sobre relajación (SOR)

```
function [X, Bsor] = SOR(A,x0,b,error)
    D = diag(diag(A));
    L = tril(A) - D
    U = L'

    Bj = - inv(D)*(L + U);
    [Vu Du] = eig(Bj);
    pBj = max(abs(diag(Du)))
    w = 2 / (1+(1-pBj^2)^0.5);

    Bsor = inv(D + w.*L)*((1-w).*D - w.*U)
    bsor = w.*inv(D+w.*L)*b;

    xk = x0;
    i = 1

    while (i < 100)
        xnew = Bsor*xk + bsor;
        if norm(xnew-xk)/norm(xk) < error
            break
        end
        xk = xnew;
        i = i + 1
    end
    X = xnew;
end
```

### 1.2. Resolver el ejemplo numérico usando el pseudocódigo de la página 610 capítulo 15 Ecuaciones diferenciales parciales, el método iterativo de Gauss-Seidel, del libro David Kinkaid del dropbox

**Ejemplo Numérico:** Vamos a ilustrar este procedimiento en el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned}\nabla^2 u - \frac{1}{25}u &= 0 \quad \text{dentro de } R(\text{cuadrado unitario}) \\ q &= 0 \quad \text{en la frontera de } R.\end{aligned}$$

donde  $q = \cosh 15x + \cosh 15y$ . De este problema conocemos la solución  $u = q$ . Se presenta a continuación un pseudocódigo de controlador para el procedimiento de Gauss-Seidel,

comenzando con  $u = 1$  y tomando 20 iteraciones. Considere que sólo se necesitan 81 palabras para el arreglo en la solución iterativa del sistema lineal de  $49 \times 49$ . Aquí,  $h = \frac{1}{8}$ . Para este problema modelo, la función principal es:

```
function u = Eliptico()
    #integer
    #i, j;
    n_x = 9;
    n_y = 9;
    itmax = 75;
    #real
    #h, x, y;
    a_x = 0.0;
    b_x = 1.0;
    a_y = 0.0;
    b_y = 1.0;
    h = (b_x-a_x)/n_x;
    #real array
    u = zeros(n_x, n_y);

    for j = 1:n_y
        y = a_y + j*h;
        u(1,j) = Bndy(a_x, y);
        u(n_x, j) = Bndy(b_x, y);
    end
    for i = 1:n_x
        x = a_x + i*h;
        u(i,1) = Bndy(x, a_y);
        u(i, n_y) = Bndy(x, b_y);
    end
    for j = 2:n_y-1
        y = a_y + j*h;
        for i = 2:n_x-1
            x = a_x + i*h;
            u(i,j) = ustart(x,y);
        end
    end
    #output
    u = Seidel(a_x, a_y, n_x, n_y, h, itmax, u);
    #printf("%d", u);
    #output
    for j = 1: n_y
        y = a_y + j * h;
        for i = 1:n_x
```

```

        x = a_x + i * h;
        u(i,j) = abs(TrueSolution(x, y) - u(i,j));
    end
end

```

y las funciones acompañantes se muestran a continuación : funcion Gaus Seidel

```

% procedimiento seidel
function U = Seidel(Ax, Ay, Nx, Ny, h, Itmax, U)
% a, j, k;
U = zeros(Nx,Ny);
for k = 1:Itmax
    for j = 2:Ny-1
        y = Ay + j*h;
        for i = 2:Nx-1
            x = Ax + i*h;
            v = U(i+1,j) + U(i-1,j) + U(i,j+1) + U(i,j-1);
            U(i,j) = (v - (h*h)*g(x,y))/(4-(h*h)*f(x,y));
        end
    end
end

```

otras funciones

```

function f = f(x,y)
    f = -0.04;

function g = g(x,y)
    g = 0;

function bndy=Bndy(x,y)
    bndy = TrueSolution(x,y);
end

function ustart = ustart(x,y)
    ustart = 1;

function true_solution=TrueSolution(x,y)
    true_solution = cosh(0.2*x) + cosh(0.2*y);
end

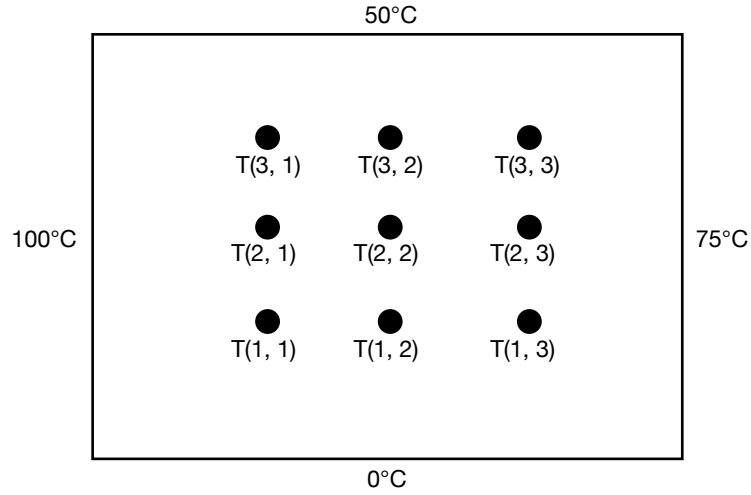
```

## 2. Biswa Datta: Sección 6.3

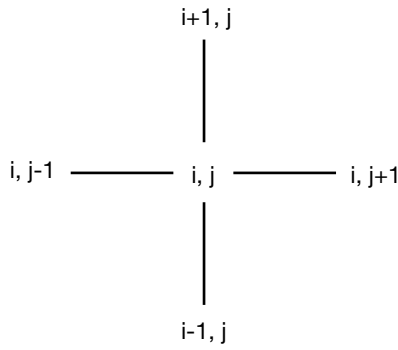
### 2.1. Ejercicio 4

Usando la ecuación de diferencia, construir un sistema lineal para las distribuciones de calor en los siguientes puntos interior de la placa calentada cuyos temperaturas al borde se

mantienen constantes.



Para la discretización de la placa usaremos un *stencil* para generar el sistema:



La ecuación en diferencias que describe éste *stencil* (discretización de la ecuación elíptica) es la siguiente:

$$\frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4 \times T_{i,j}}{h^2} = 0 \quad (1)$$

Usando éste *stencil*, tendremos que al aplicarlo sobre la grilla  $3 \times 3$  en la cual se ha discretizado la placa tendremos las siguientes 9 ecuaciones:

$$\begin{aligned}
T_{1,2} + T_{1,0} + T_{2,1} + T_{0,1} - 4 \times T_{1,1} &= 0 \\
T_{1,3} + T_{1,1} + T_{2,2} + T_{0,2} - 4 \times T_{1,2} &= 0 \\
T_{1,4} + T_{1,2} + T_{2,3} + T_{0,3} - 4 \times T_{1,3} &= 0 \\
T_{2,2} + T_{2,0} + T_{3,1} + T_{1,1} - 4 \times T_{2,1} &= 0 \\
T_{2,3} + T_{2,1} + T_{3,2} + T_{1,2} - 4 \times T_{2,2} &= 0 \\
T_{2,4} + T_{2,2} + T_{3,3} + T_{1,3} - 4 \times T_{2,3} &= 0 \\
T_{3,2} + T_{3,0} + T_{4,1} + T_{2,1} - 4 \times T_{3,1} &= 0 \\
T_{3,3} + T_{3,1} + T_{4,2} + T_{2,2} - 4 \times T_{3,2} &= 0 \\
T_{3,4} + T_{3,2} + T_{4,3} + T_{2,3} - 4 \times T_{3,3} &= 0
\end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de borde, podemos reducir el sistema al siguiente:

$$\begin{aligned}
T_{1,2} + T_{2,1} - 4 \times T_{1,1} &= -T_{1,0} - T_{0,1} = -0 - 100 = -100 \\
T_{1,3} + T_{1,1} + T_{2,2} - 4 \times T_{1,2} &= -T_{0,2} = -0 = 0 \\
T_{1,2} + T_{2,3} - 4 \times T_{1,3} &= 0 = -T_{1,4} - T_{0,3} = -75 - 0 = -75 \\
T_{2,2} + T_{3,1} + T_{1,1} - 4 \times T_{2,1} &= -T_{2,0} = -100 \\
T_{2,3} + T_{2,1} + T_{3,2} + T_{1,2} - 4 \times T_{2,2} &= 0 \\
T_{2,2} + T_{3,3} + T_{1,3} - 4 \times T_{2,3} &= -T_{2,4} = -75 \\
T_{3,2} + T_{2,1} - 4 \times T_{3,1} &= -T_{3,0} - T_{4,1} = -100 - 50 = -150 \\
T_{3,3} + T_{3,1} + T_{2,2} - 4 \times T_{3,2} &= -T_{4,2} = -50 \\
T_{3,2} + T_{2,3} - 4 \times T_{3,3} &= -T_{3,4} - T_{4,3} = -75 - 50 = -125
\end{aligned}$$

La cual genera el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}$$

## 2.2. Ejercicio 5

Derivar el sistema lineal usando la aproximación de Diferencias Finitas en la ecuación diferencial parcial elíptica:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y)$$

El paso de las diferencias son:  $\Delta x = \Delta y = 0,25$  y las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= 1 - x \\ T(1, y) &= y \\ T(0, y) &= 1 \\ T(x, 1) &= 1 \end{aligned}$$

### Solución:

De los datos, obtenemos los dominios del problema  $[0, 1]$ .

Entonces haciendo diferencias finitas tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x_i, y_i)}{\partial x^2} &= \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 T(x_i, y_i)}{\partial y^2} &= \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \end{aligned}$$

Entonces, por aproximación tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \\ f(x, y) &= \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{0,25^2} \\ f(x, y) &= 16 * T_{i+1,j} + 16 * T_{i-1,j} - 48 * T_{i,j} + 16 * T_{i,j+1} + 16 * T_{i,j-1} \end{aligned}$$

Como el intervalo es de  $[0,1]$  con paso de 0.25, tenemos 16 puntos: 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 en X y Y. Generando una malla en dichos intervalos.

De los cuales, faltaría calcular los puntos: (0.25, 0.25), (0.25, 0.5), (0.25, 0.75), (0.5, 0.25), (0.5, 0.5), (0.5, 0.75), (0.75, 0.25), (0.75, 0.5) y (0.75, 0.75).

Los cuales se calculan como:

i=1, j=1(0.25,0.25):

$$f(x_1, y_1) = 16 * T_{2,1} + 16 * T_{0,1} - 48T_{1,1} + 16 * T_{1,2} + 16 * T_{1,0}$$

i=1, j=2(0.25,0.5):

$$f(x_1, y_2) = 16 * T_{2,2} + 16 * T_{0,2} - 48T_{1,2} + 16 * T_{1,3} + 16 * T_{1,1}$$

i=1, j=3(0.25,0.75):

$$f(x_1, y_3) = 16 * T_{2,3} + 16 * T_{0,3} - 48T_{1,3} + 16 * T_{1,4} + 16 * T_{1,2}$$

i=2, j=1(0.5,0.25):

$$f(x_2, y_1) = 16 * T_{3,1} + 16 * T_{1,1} - 48T_{2,1} + 16 * T_{2,2} + 16 * T_{2,0}$$

i=2, j=2(0.5,0.5):

$$f(x_2, y_2) = 16 * T_{3,2} + 16 * T_{1,2} - 48T_{2,2} + 16 * T_{2,3} + 16 * T_{2,1}$$

i=2, j=3(0.5,0.75):

$$f(x_2, y_3) = 16 * T_{3,3} + 16 * T_{1,3} - 48T_{2,3} + 16 * T_{2,4} + 16 * T_{2,2}$$

i=3, j=1(0.5,0.25):

$$f(x_3, y_1) = 16 * T_{4,1} + 16 * T_{2,1} - 48T_{3,1} + 16 * T_{3,2} + 16 * T_{3,0}$$

i=3, j=2(0.5,0.5):

$$f(x_3, y_2) = 16 * T_{4,2} + 16 * T_{2,2} - 48T_{3,2} + 16 * T_{3,3} + 16 * T_{3,1}$$

i=3, j=3(0.5,0.75):

$$f(x_3, y_3) = 16 * T_{4,3} + 16 * T_{2,3} - 48T_{3,3} + 16 * T_{3,4} + 16 * T_{3,2}$$

Calculando los respectivos valores:

$$T_{0,1} = T(0, 0,25) = 1, T_{4,1} = T(1, 0,25) = 0,25$$

$$T_{0,2} = T(0, 0,5) = 1, T_{4,2} = T(1, 0,5) = 0,5$$

$$T_{0,3} = T(0, 0,75) = 1, T_{4,3} = T(1, 0,75) = 0,75$$

$$T_{1,0} = T(0,25, 0) = 0,75, T_{2,0} = T(0,5, 0) = 0,5, T_{3,0} = T(0,75, 0) = 0,25$$

$$T_{1,4} = T(0,25, 1) = 1, T_{2,4} = T(0,5, 1) = 1, T_{3,4} = T(0,75, 1) = 1$$

Solo quedaría calcular los puntos:

$$T_{1,1}, T_{2,1}, T_{3,1}$$

$$T_{1,2}, T_{2,2}, T_{3,2}$$

$$T_{1,3}, T_{2,3}, T_{3,3}$$

Los cuales se obtiene de la solución del sistema de ecuaciones formado arriba, el cual se expresa de la siguiente manera:

$$f(x_1, y_1) = 16 * T_{2,1} + 16 - 48T_{1,1} + 16 * T_{1,2} + 16 * 0,25$$

$$f(x_1, y_2) = 16 * T_{2,2} + 16 - 48T_{1,2} + 16 * T_{1,3} + 16 * T_{1,1}$$

$$f(x_1, y_3) = 16 * T_{2,3} + 16 - 48T_{1,3} + 16 + 16 * T_{1,2}$$

$$f(x_2, y_1) = 16 * T_{3,1} + 16 * T_{1,1} - 48T_{2,1} + 16 * T_{2,2} + 16 * 0,5$$

$$f(x_2, y_2) = 16 * T_{3,2} + 16 * T_{1,2} - 48T_{2,2} + 16 * T_{2,3} + 16 * T_{2,1}$$

$$f(x_2, y_3) = 16 * T_{3,3} + 16 * T_{1,3} - 48T_{2,3} + 16 + 16 * T_{2,2}$$

$$f(x_1, y_1) = 16 * 0,25 + 16 * T_{2,1} - 48T_{3,1} + 16 * T_{3,2} + 16 * 0,25$$

$$f(x_2, y_2) = 16 * 0,5 + 16 * T_{2,2} - 48T_{3,2} + 16 * T_{3,3} + 16 * T_{3,1}$$

$$f(x_3, y_3) = 16 * 0,75 + 16 * T_{2,3} - 48T_{3,3} + 16 + 16 * T_{3,2}$$

Dandole una forma de Matrices y vectores tenemos:

$$\begin{bmatrix} -48 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -48 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -48 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & -48 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 16 & -48 & 16 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & -48 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -48 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & -48 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & -48 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{1,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,1} \\ T_{2,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,1} \\ T_{3,2} \\ T_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0,25, 0,25) - 20 \\ f(0,25, 0,5) - 16 \\ f(0,25, 0,75) - 32 \\ f(0,5, 0,25) - 8 \\ f(0,5, 0,5) \\ f(0,5, 0,75) - 16 \\ f(0,75, 0,25) - 8 \\ f(0,75, 0,5) - 8 \\ f(0,75, 0,75) - 28 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar, se generó una matriz pentadiagonal (2 vecinos iguales de la diag-



nal), para resolver dicha ecuación depende exclusivamente de la función  $f(x,y)$ .

## 2.3. Ejercicio 6

Para el sistema del problema anterior, si

$$f(x, y) = -\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

la solución analítica a la ecuación elíptica

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y)$$

con las mismas condiciones de frontera como en el problema anterior, es dada por:

$$T(x, y) = 1 - x + xy + 0,5 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

- (a) Use el método de diferencias finitas para aproximar  $T$  en el interior de los puntos con  $\Delta x = \Delta y = 1/n$ , con  $n = 4, 8, 16$

### Solución:

Para esto definimos el siguiente script en Matlab, el cual nos permitirá discretizar y resolver el sistema dado.

```
%define the domain of the problem
LX = 1;
LY = 1;

%define the level of discretization
n = 16;
DX = LX / n;
DY = LY / n;

%define our system
nx = n + 1;
ny = n + 1;

dim = ( ny - 2 ) * ( nx - 2 );

[sysMat, sysVec] = generateGrid( nx, ny, dim, DX, DY );

sysSol = sysMat \ sysVec;

%disp( 'system matrix' );
disp( sysMat );
%disp( 'system vector' );
disp( sysVec );
disp( 'system_solution_for_n=8' );
```

```

%disp( sysSol );
displayColVector( sysSol );

approxSolMat = matFromVectorSolution( sysSol , nx , ny );
exactSolMat = exactSolutionMat( nx , ny , DX , DY );
disp( 'approx_solution' )
disp( approxSolMat )
disp( 'exact_solution' )
disp( exactSolMat )

displayHeatmap( sysSol , nx , ny , DX , DY );

%define helper functions

function plateTempMat = exactSolutionMat( nx , ny , DX , DY )
    plateTempMat = zeros( nx - 2 , ny - 2 );
    for i = 1:( nx - 2 )
        for j = 1:( ny - 2 )
            x = j * DX;
            y = i * DY;
            plateTempMat( i , j ) = 1 - x + x * y + ...
                0.5 * sin( pi * x ) * sin( pi * y );
        end
    end
    plateTempMat = flip( plateTempMat );
end

function plateTempMat = matFromVectorSolution( solVector , nx , ny )
    plateTempMat = reshape( solVector , nx - 2 , ny - 2 );
    plateTempMat = plateTempMat';
    plateTempMat = flip( plateTempMat );
end

function displayHeatmap( solution , nx , ny , DX , DY )
    appSol = matFromVectorSolution( solution , nx , ny );
    extSol = exactSolutionMat( nx , ny , DX , DY );
    figure(1);
    imagesc( appSol );
    colorbar;
    figure(2);
    imagesc( extSol );
    colorbar;
end

function displayColVector( vec )

```

```

    v_size = ( size( vec ) );
    n = v_size( 1 );
    for i = 1:n
        fprintf( '%d\t', vec( i ) );
        if mod( i, 10 ) == 0
            fprintf( '\n' );
        end
    end
    fprintf( '\n' );
end

function indxInMat = getIndxInSysMat( i, j, nx ) %%ok<*FNDEF>
    indxInMat = ( i - 1 ) * ( nx - 2 ) + j;
end

function valBoundary = getBoundaryCondition( i, j, nx, ny, DX, DY )
    if ( i == 0 )
        valBoundary = 1.0 - j * DX;
    elseif ( i == ny - 1 )
        valBoundary = 1.0;
    elseif ( j == 0 )
        valBoundary = 1.0;
    elseif ( j == nx - 1 )
        valBoundary = i * DY;
    else
        disp( 'shouldnt_get_here_( _' )
        valBoundary = 0;
    end
end

function fxy = f( i, j, DX, DY )
    x = j * DX;
    y = i * DY;
    fxy = -pi^2 * sin( pi * x ) * sin( pi * y ) * DX * DX;
end

function [sysMat, sysVec] = applyStencil( i, j, nx, ny, ...
                                           DX, DY, sysMat, sysVec )

    s_row = getIndxInSysMat( i, j, nx );
    % Generate the corresponding row
    % Apply reduced stencil to generate the row of the matrix ...
    % because the i or j if extreme are boundary conditions

    if ( i == 1 )

```

```

if ( j == 1 )
    %bottom left corner
    center_col = s_row;
    right_col = getIndxInSysMat( i, j + 1, nx );
    up_col = getIndxInSysMat( i + 1, j, nx );

    sysMat( s_row, center_col ) = -4;
    sysMat( s_row, right_col ) = 1;
    sysMat( s_row, up_col ) = 1;

    sysVec( s_row, 1 ) = f( i, j, DX, DY ) - ...
                        getBoundaryCondition( i - 1, j, ...
                                                nx, ny, ...
                                                DX, DY ) - ...
                        getBoundaryCondition( i, j - 1, ...
                                                nx, ny, ...
                                                DX, DY );

elseif ( j == nx - 2 )
    %bottom right corner
    center_col = s_row;
    left_col = getIndxInSysMat( i, j - 1, nx );
    up_col = getIndxInSysMat( i + 1, j, nx );

    sysMat( s_row, center_col ) = -4;
    sysMat( s_row, left_col ) = 1;
    sysMat( s_row, up_col ) = 1;

    sysVec( s_row, 1 ) = f( i, j, DX, DY ) - ...
                        getBoundaryCondition( i - 1, j, ...
                                                nx, ny, ...
                                                DX, DY ) - ...
                        getBoundaryCondition( i, j + 1, ...
                                                nx, ny, ...
                                                DX, DY );

else
    %bottom side
    center_col = s_row;
    left_col = getIndxInSysMat( i, j - 1, nx );
    right_col = getIndxInSysMat( i, j + 1, nx );
    up_col = getIndxInSysMat( i + 1, j, nx );

    sysMat( s_row, center_col ) = -4;
    sysMat( s_row, left_col ) = 1;
    sysMat( s_row, right_col ) = 1;

```

```

sysMat( s_row , up_col )      = 1;

sysVec( s_row , 1 ) = f( i , j , DX, DY ) - ...
                                getBoundaryCondition( i - 1, j ,...
                                                        nx, ny ,...
                                                        DX, DY );

    end
elseif ( i == ny - 2 )

    if ( j == 1 )
        % top left corner
        center_col = s_row;
        right_col  = getIndxInSysMat( i , j + 1, nx );
        down_col   = getIndxInSysMat( i - 1, j , nx );

        sysMat( s_row , center_col ) = -4;
        sysMat( s_row , right_col )  = 1;
        sysMat( s_row , down_col )   = 1;

        sysVec( s_row , 1 ) = f( i , j , DX, DY ) - ...
                                getBoundaryCondition( i + 1, j ,...
                                                        nx, ny ,...
                                                        DX, DY ) - ...
                                getBoundaryCondition( i , j - 1 ,...
                                                        nx, ny ,...
                                                        DX, DY );

    elseif ( j == nx - 2 )
        % top right corner
        center_col = s_row;
        left_col   = getIndxInSysMat( i , j - 1, nx );
        down_col   = getIndxInSysMat( i - 1, j , nx );

        sysMat( s_row , center_col ) = -4;
        sysMat( s_row , left_col )   = 1;
        sysMat( s_row , down_col )   = 1;

        sysVec( s_row , 1 ) = f( i , j , DX, DY ) - ...
                                getBoundaryCondition( i + 1, j ,...
                                                        nx, ny ,...
                                                        DX, DY ) - ...
                                getBoundaryCondition( i , j + 1 ,...
                                                        nx, ny ,...
                                                        DX, DY );

    else

```

```

        % up side
        center_col = s_row;
        left_col   = getIndxInSysMat( i, j - 1, nx );
        right_col  = getIndxInSysMat( i, j + 1, nx );
        down_col   = getIndxInSysMat( i - 1, j, nx );

        sysMat( s_row, center_col ) = -4;
        sysMat( s_row, left_col )   = 1;
        sysMat( s_row, right_col )  = 1;
        sysMat( s_row, down_col )   = 1;

        sysVec( s_row, 1 ) = f( i, j, DX, DY ) - ...
                                getBoundaryCondition( i + 1, j, ...
                                                        nx, ny, ...
                                                        DX, DY );

    end

elseif ( j == 1 )
    % left side
    center_col = s_row;
    up_col     = getIndxInSysMat( i + 1, j, nx );
    right_col  = getIndxInSysMat( i, j + 1, nx );
    down_col   = getIndxInSysMat( i - 1, j, nx );

    sysMat( s_row, center_col ) = -4;
    sysMat( s_row, up_col )     = 1;
    sysMat( s_row, right_col )  = 1;
    sysMat( s_row, down_col )   = 1;

    sysVec( s_row, 1 ) = f( i, j, DX, DY ) - ...
                        getBoundaryCondition( i, j - 1, ...
                                                nx, ny, ...
                                                DX, DY );

elseif ( j == nx - 2 )
    % right side
    center_col = s_row;
    left_col   = getIndxInSysMat( i, j - 1, nx );
    up_col     = getIndxInSysMat( i + 1, j, nx );
    down_col   = getIndxInSysMat( i - 1, j, nx );

    sysMat( s_row, center_col ) = -4;
    sysMat( s_row, left_col )   = 1;
    sysMat( s_row, up_col )     = 1;
    sysMat( s_row, down_col )   = 1;

```

```

        sysVec( s_row , 1 ) = f( i , j , DX, DY ) - ...
                                getBoundaryCondition( i , j + 1 ,...
                                                        nx, ny ,...
                                                        DX, DY );

    else
        % Apply the full stencil
        center_col = s_row;
        left_col   = getIndxInSysMat( i , j - 1 , nx );
        right_col  = getIndxInSysMat( i , j + 1 , nx );
        up_col     = getIndxInSysMat( i + 1 , j , nx );
        down_col   = getIndxInSysMat( i - 1 , j , nx );

        sysMat( s_row , center_col ) = -4;
        sysMat( s_row , left_col ) = 1;
        sysMat( s_row , right_col ) = 1;
        sysMat( s_row , up_col ) = 1;
        sysMat( s_row , down_col ) = 1;

        sysVec( s_row , 1 ) = f( i , j , DX, DY );
    end
end

function [sysMat , sysVec] = generateGrid( nx, ny, dim, DX, DY )
    disp( 'generating_system_matrix' );
    sysMat = zeros( dim, dim );
    sysVec = zeros( dim, 1 );
    for i = 1:( ny - 2 )
        for j = 1:( nx - 2 )
            [sysMat,sysVec] = applyStencil( i , j , nx, ny ,...
                                            DX, DY ,...
                                            sysMat , sysVec );
        end
    end
end
end

```

Los resultados del script para  $n = 4$  son mostrados a continuación:

```

EllipticPDEsolver
generating system matrix
system matrix
matrix([[-4,  1,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0],
        [ 1, -4,  1,  0,  1,  0,  0,  0,  0],
        [ 0,  1, -4,  0,  0,  1,  0,  0,  0],

```

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & -4, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 1, & -4, & 1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & -4, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & -4, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & -4, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & -4 \end{bmatrix}]$$

```
system vector
matrix ([[ -2.0584],
          [-0.9362],
          [-0.8084],
          [-1.4362],
          [-0.6169],
          [-0.9362],
          [-2.3084],
          [-1.4362],
          [-2.0584]]])
```

```
system solution
matrix ([[ 1.0758],
          [0.9973],
          [0.7008],
          [1.2473],
          [1.2765],
          [0.9973],
          [1.2008],
          [1.2473],
          [1.0758]]])
```

Para los casos  $n = 8, 16$  tenemos la siguientes soluciones :



```

>> EllipticPDEsolver
generating system matrix
system solution for n = 8
0.964797 0.918301 0.850941 0.756320 0.632191 0.480801 0.308547 1.043301 1.065738 1.049621
0.983132 0.862121 0.690738 0.480801 1.100941 1.174621 1.197929 1.155422 1.041679 0.862121
0.632191 1.131320 1.233132 1.280422 1.256475 1.155422 0.983132 0.756320 1.132191 1.237121
1.291679 1.280422 1.197929 1.049621 0.850941 1.105801 1.190738 1.237121 1.233132 1.174621
1.065738 0.918301 1.058547 1.105801 1.132191 1.131320 1.100941 1.043301 0.964797
>> EllipticPDEsolver
generating system matrix
system solution for n = 16
0.960498 0.920262 0.878586 0.834822 0.788398 0.738848 0.685823 0.629109 0.568635 0.504473
0.436836 0.366072 0.292649 0.217137 0.140185 0.982762 0.964084 0.942583 0.916985 0.886169
0.849221 0.805457 0.754458 0.696082 0.630471 0.558044 0.479485 0.395708 0.307834 0.217137
1.003586 1.005083 1.002482 0.993931 0.977807 0.952779 0.917856 0.872429 0.816293 0.749654
0.673120 0.587681 0.494670 0.395708 0.292649 1.022322 1.041985 1.056431 1.063305 1.060540
1.046442 1.019751 0.979691 0.926001 0.858942 0.779290 0.688305 0.587681 0.479485 0.366072
1.038398 1.073669 1.102807 1.123040 1.131940 1.127513 1.108278 1.073323 1.022340 0.955638
0.874127 0.779290 0.673120 0.558044 0.436836 1.051348 1.099221 1.140279 1.171442 1.190013
1.193775 1.181085 1.150927 1.102960 1.037525 0.955638 0.858942 0.749654 0.630471 0.504473
1.060823 1.117957 1.167856 1.207251 1.233278 1.243585 1.236424 1.210721 1.166112 1.102960
1.022340 0.926001 0.816293 0.696082 0.568635 1.066609 1.129458 1.184929 1.229691 1.260823
1.275927 1.273221 1.251609 1.210721 1.150927 1.073323 0.979691 0.872429 0.754458 0.629109
1.068635 1.133582 1.191293 1.238501 1.272340 1.290460 1.291112 1.273221 1.236424 1.181085
1.108278 1.019751 0.917856 0.805457 0.685823 1.066973 1.130471 1.187154 1.233942 1.268138
1.287525 1.290460 1.275927 1.243585 1.193775 1.127513 1.046442 0.952779 0.849221 0.738848
1.061836 1.120544 1.173120 1.216790 1.249127 1.268138 1.272340 1.260823 1.233278 1.190013
1.131940 1.060540 0.977807 0.886169 0.788398 1.053572 1.104485 1.150181 1.188305 1.216790
1.233942 1.238501 1.229691 1.207251 1.171442 1.123040 1.063305 0.993931 0.916985 0.834822
1.042649 1.083208 1.119670 1.150181 1.173120 1.187154 1.191293 1.184929 1.167856 1.140279
1.102807 1.056431 1.002482 0.942583 0.878586 1.029637 1.057834 1.083208 1.104485 1.120544
1.130471 1.133582 1.129458 1.117957 1.099221 1.073669 1.041985 1.005083 0.964084 0.920262
1.015185 1.029637 1.042649 1.053572 1.061836 1.066973 1.068635 1.066609 1.060823 1.051348
1.038398 1.022322 1.003586 0.982762 0.960498
>> |

```

Figura 1: Solución del sistema para  $n = 8$  y  $n = 16$

- (b) Comparar los valores obtenidos en el punto anterior con la solución exacta.  
 Usando el script podemos obtener las siguientes comparaciones de las soluciones aproximada y exacta.

approx solution							
1.0585	1.1058	1.1322	1.1313	1.1009	1.0433	0.9648	
1.1058	1.1907	1.2371	1.2331	1.1746	1.0657	0.9183	
1.1322	1.2371	1.2917	1.2804	1.1979	1.0496	0.8509	
1.1313	1.2331	1.2804	1.2565	1.1554	0.9831	0.7563	
1.1009	1.1746	1.1979	1.1554	1.0417	0.8621	0.6322	
1.0433	1.0657	1.0496	0.9831	0.8621	0.6907	0.4808	
0.9648	0.9183	0.8509	0.7563	0.6322	0.4808	0.3085	
exact solution							
1.0576	1.1040	1.1299	1.1288	1.0987	1.0415	0.9638	
1.1040	1.1875	1.2329	1.2286	1.1704	1.0625	0.9165	
1.1299	1.2329	1.2862	1.2744	1.1924	1.0454	0.8487	
1.1288	1.2286	1.2744	1.2500	1.1494	0.9786	0.7538	
1.0987	1.1704	1.1924	1.1494	1.0362	0.8579	0.6299	
1.0415	1.0625	1.0454	0.9786	0.8579	0.6875	0.4790	
0.9638	0.9165	0.8487	0.7538	0.6299	0.4790	0.3076	

Figura 2: Comparación de las soluciones aproximada y exacta para  $n = 8$

approx solution														
1.0152	1.0296	1.0426	1.0536	1.0618	1.0670	1.0686	1.0666	1.0608	1.0513	1.0384	1.0223	1.0036	0.9828	0.9605
1.0296	1.0578	1.0832	1.1045	1.1205	1.1305	1.1336	1.1295	1.1180	1.0992	1.0737	1.0420	1.0051	0.9641	0.9203
1.0426	1.0832	1.1197	1.1502	1.1731	1.1872	1.1913	1.1849	1.1679	1.1403	1.1028	1.0564	1.0025	0.9426	0.8786
1.0536	1.1045	1.1502	1.1883	1.2168	1.2339	1.2385	1.2297	1.2073	1.1714	1.1230	1.0633	0.9939	0.9170	0.8348
1.0618	1.1205	1.1731	1.2168	1.2491	1.2681	1.2723	1.2608	1.2333	1.1900	1.1319	1.0605	0.9778	0.8862	0.7884
1.0670	1.1305	1.1872	1.2339	1.2681	1.2875	1.2905	1.2759	1.2436	1.1938	1.1275	1.0464	0.9528	0.8492	0.7388
1.0686	1.1336	1.1913	1.2385	1.2723	1.2905	1.2911	1.2732	1.2364	1.1811	1.1083	1.0198	0.9179	0.8055	0.6858
1.0666	1.1295	1.1849	1.2297	1.2608	1.2759	1.2732	1.2516	1.2107	1.1509	1.0733	0.9797	0.8724	0.7545	0.6291
1.0608	1.1180	1.1679	1.2073	1.2333	1.2436	1.2364	1.2107	1.1661	1.1030	1.0223	0.9260	0.8163	0.6961	0.5686
1.0513	1.0992	1.1403	1.1714	1.1900	1.1938	1.1811	1.1509	1.1030	1.0375	0.9556	0.8589	0.7497	0.6305	0.5045
1.0384	1.0737	1.1028	1.1230	1.1319	1.1275	1.1083	1.0733	1.0223	0.9556	0.8741	0.7793	0.6731	0.5580	0.4368
1.0223	1.0420	1.0564	1.0633	1.0605	1.0464	1.0198	0.9797	0.9260	0.8589	0.7793	0.6883	0.5877	0.4795	0.3661
1.0036	1.0051	1.0025	0.9939	0.9778	0.9528	0.9179	0.8724	0.8163	0.7497	0.6731	0.5877	0.4947	0.3957	0.2926
0.9828	0.9641	0.9426	0.9170	0.8862	0.8492	0.8055	0.7545	0.6961	0.6305	0.5580	0.4795	0.3957	0.3078	0.2171
0.9605	0.9203	0.8786	0.8348	0.7884	0.7388	0.6858	0.6291	0.5686	0.5045	0.4368	0.3661	0.2926	0.2171	0.1402
exact solution														
1.0151	1.0295	1.0425	1.0533	1.0616	1.0667	1.0683	1.0663	1.0605	1.0511	1.0381	1.0221	1.0034	0.9826	0.9604
1.0295	1.0576	1.0829	1.1040	1.1200	1.1299	1.1330	1.1288	1.1174	1.0987	1.0732	1.0415	1.0047	0.9638	0.9201
1.0425	1.0829	1.1192	1.1495	1.1724	1.1863	1.1904	1.1840	1.1670	1.1395	1.1021	1.0558	1.0020	0.9422	0.8784
1.0533	1.1040	1.1495	1.1875	1.2158	1.2329	1.2374	1.2286	1.2061	1.1704	1.1221	1.0625	0.9933	0.9165	0.8346
1.0616	1.1200	1.1724	1.2158	1.2480	1.2669	1.2710	1.2595	1.2320	1.1888	1.1308	1.0596	0.9771	0.8857	0.7881
1.0667	1.1299	1.1863	1.2329	1.2669	1.2862	1.2890	1.2744	1.2421	1.1924	1.1263	1.0454	0.9520	0.8487	0.7386
1.0683	1.1330	1.1904	1.2374	1.2710	1.2890	1.2896	1.2716	1.2349	1.1796	1.1070	1.0186	0.9170	0.8049	0.6855
1.0663	1.1288	1.1840	1.2286	1.2595	1.2744	1.2716	1.2500	1.2091	1.1494	1.0720	0.9786	0.8715	0.7538	0.6288
1.0605	1.1174	1.1670	1.2061	1.2320	1.2421	1.2349	1.2091	1.1646	1.1015	1.0210	0.9249	0.8154	0.6955	0.5683
1.0511	1.0987	1.1395	1.1704	1.1888	1.1924	1.1796	1.1494	1.1015	1.0362	0.9544	0.8579	0.7488	0.6299	0.5042
1.0381	1.0732	1.1021	1.1221	1.1308	1.1263	1.1070	1.0720	1.0210	0.9544	0.8730	0.7783	0.6724	0.5575	0.4366
1.0221	1.0415	1.0558	1.0625	1.0596	1.0454	1.0186	0.9786	0.9249	0.8579	0.7783	0.6875	0.5870	0.4790	0.3658
1.0034	1.0047	1.0020	0.9933	0.9771	0.9520	0.9170	0.8715	0.8154	0.7488	0.6724	0.5870	0.4942	0.3954	0.2925
0.9826	0.9638	0.9422	0.9165	0.8857	0.8487	0.8049	0.7538	0.6955	0.6299	0.5575	0.4790	0.3954	0.3076	0.2170
0.9604	0.9201	0.8784	0.8346	0.7881	0.7386	0.6855	0.6288	0.5683	0.5042	0.4366	0.3658	0.2925	0.2170	0.1401

Figura 3: Comparación de las soluciones aproximada y exacta para  $n = 16$

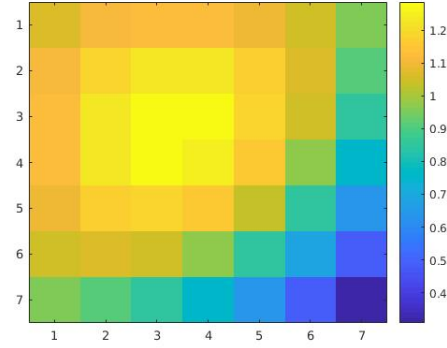


Figura 4: Heatmap de la solución exacta para  $n = 8$

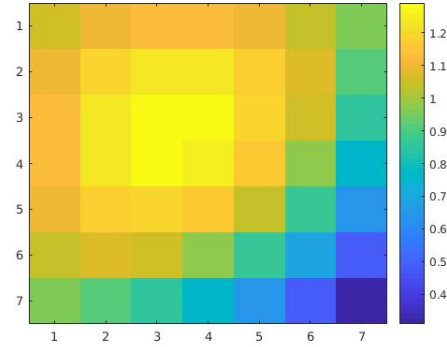


Figura 5: Heatmap de la solución aproximada para  $n = 8$

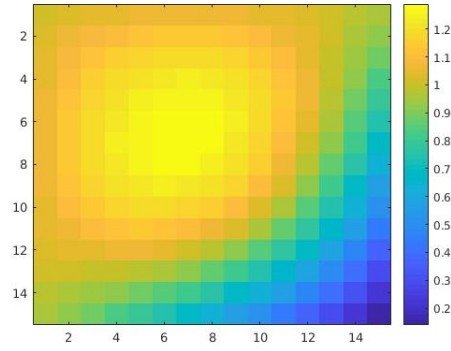


Figura 6: Heatmap de la solución exacta para  $n = 16$

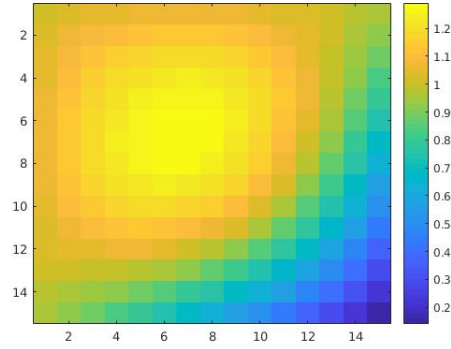


Figura 7: Heatmap de la solución aproximada para  $n = 16$

Como se puede observar de las comparaciones, el método devuelve buenas aproximaciones tanto para  $n = 8$  como para  $n = 16$ .

- (c) Defina el sistema lineal resultante al aplicar el método de elementos finitos en la solución del problema del valor de frontera de 2 puntos:  $-2u'' + 3u = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ , usando malla uniforme y funciones básicas  $\phi_j(x)$  como en el libro.

### Solución:

El problema hace referencia a una aproximación por elementos finitos en un entorno 1D tal como se observa en la imagen 8.



Figura 8: Representación del problema

En el problema se indica las condiciones de frontera en  $u_0 = 0$  y  $u_{n+1} = 0$ . Definiendo sobre el resto de puntos la ecuación usando la aproximación de la derivada  $u_i'' = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} -2.(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + 3u_i &= (i/n)^2 \\ -2.u_{i+1} + 7.u_i - 2.u_{i-1} &= (i/n)^2 \end{aligned}$$

Remplazando para  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} i = 1 &\rightarrow -2u_2 + 7u_1 - 2u_0 = (1/n)^2 \\ i = 2 &\rightarrow -2u_3 + 7u_2 - 2u_1 = (2/n)^2 \\ i = 3 &\rightarrow -2u_4 + 7u_3 - 2u_2 = (3/n)^2 \\ &\vdots \\ i = n &\rightarrow -2u_{n+1} + 7u_n - 2u_{n-1} = (n/n)^2 \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de frontera  $u_0 = 0$  y  $u_{n+1} = 0$  tenemos la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2} \cdot \begin{bmatrix} 1^2 \\ 2^2 \\ 3^2 \\ 4^2 \\ \vdots \\ (n-1)^2 \\ n^2 \end{bmatrix}$$

## 2.4. Ejercicio 14

Probar que:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

es positiva definida con y sin encontrar la factorización de *Cholesky*.

**Solución**

**Sin usar Cholesky:**

Para que una matriz sea definida positiva, tenemos que probar dos cosas: que sea simétrica y que sus autovalores sean positivos. Como se puede ver, la matriz  $A$  es simétrica y sus autovalores son:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 6$ , todos sus valores positivos. Luego podemos decir que la matriz es positiva definida.

### Cholesky

Debemos encontrar una matriz  $H$  tal que  $A = HH^T$ . Para encontrar la matriz usamos las siguientes formulas:

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}}$$

Luego la matriz  $H$  será:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1,936492 & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,129099 & 1,932184 & 0 \\ 0 & -0,516398 & -0,552052 & 1,85164 \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos  $H$  con  $H^T$  obtenemos  $A$ .

**Resolver el sistema**

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

### Solución

Usando  $H$  del punto (b), tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1,936492 & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,129099 & 1,932184 & 0 \\ 0 & -0,516398 & -0,552052 & 1,85164 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$y_1 = 1, \quad y_2 \approx 1,2909942, \quad y_3 \approx 1,380130497, \quad y_4 \approx 1,85163997$$

Multiplicando ahora  $H^T x^T = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & -0,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & 1,936492 & -0,129099 & -0,516398 \\ 0 & 0 & 1,932184 & -0,552052 \\ 0 & 0 & 0 & 1,85164 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2909942 \\ 1,380130497 \\ 1,85163997 \end{bmatrix}$$

Finalmente tenemos que:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1$$

## 2.5. Ejercicio 17

Resolver el sistema tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

- Usando la eliminación gaussiana.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = 2$$

- Usando la descomposición LU.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Luego, resolvemos  $L \times y$ .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 \\
y_2 &= \frac{3}{2} \\
y_3 &= 2 \\
y_4 &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Ahora, resolvemos  $U \times x$ .

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2 \\
y_2 &= 3 \\
y_3 &= 3 \\
y_4 &= 2
\end{aligned}$$

### 3. Biswa Datta: Sección 6.10

#### 3.1. Ejercicio 36

Considere el siguiente sistema lineal

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- ¿Por qué ambos métodos, Jacobi y Gauss-Seidel, convergen con una aproximación inicial elegida arbitrariamente para este sistema?
- Realice 5 iteraciones para ambos métodos con la misma aproximación inicial.

**Solución:**

- El sistema del enunciado converge con ambos métodos, Jacobi y Gauss-Seidel para cualquier aproximación inicial porque cumple con las siguientes condiciones.

- La matriz  $A$  es diagonal dominante, esto es, el valor de la diagonal es el mayor valor de las filas y columnas en la matriz.
- El radio espectral de  $B$  es menor a 1.  $\rho(B) < 1$ 
  - Para el método de Jacobi

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(B) = 0,5$$

- • Para el método de Jacobi después de 5 iteraciones:

$$x = \begin{pmatrix} -0,125 \\ -0,25 \\ -0,25 \\ 0,0 \end{pmatrix}$$

### 3.2. Ejercicio 37

Construye un ejemplo para mostrar que cuando el metodo de Jacobi converge, no necesariamente implica que el metodo de Gauss-Seidel también converge.

Ya que la convergencia de estos algoritmos depende de su radio espectral Para un sistema:

$$x^{(k+1)} = B * x^{(k)} + c$$

La condición necesaria y suficiente para la convergencia de la iteración es que:  $\rho(B) < 1$ . (B. Datta, 6.10.2)

El teorema de *Stein-Rosenberg*, dice lo siguiente para una matriz con diagonal positiva. y los demás términos de la matriz negativos.

- Jacobi y Gauss Seidel o bien convergen o bien divergen.
- Cuando ambos convergen el metodo de Gauss-Seidel converge más rápido que el metodo de Jacobi.

Ya que en este teorema no esta contemplado el caso que buscamos, esto es: *Si el método de Jacobi converge, el metodo de Gauss Seidel no lo hace*. Se puede buscar matrices donde los términos de la diagonal no son todos positivos, y/ó donde los otros términos no necesariamente son negativos.

Sea el sistema  $3x3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0,9 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



Por tanto:

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1,11 & 0 & 1,11 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

y:

$$T_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2,22 & 1,11 \\ 0 & 8,44 & -6,22 \end{bmatrix}$$

Calculando el radio espectral para ambas matrices:

$$\rho(T_J) = 0,666$$

$$\rho(T_{GS}) = 4,90$$

Por tanto para este caso el metodo de Jacobi converge y el método de Gauss-Seidel no.

### 3.3. Ejercicio 38

Deje que la matriz  $A$  de  $n \times n$  sea particionada dentro de la forma

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix}$$

donde cada bloque de la diagonal  $A_{ii}$  es cuadrado y no singular. Considere el sistema lineal

$$Ax = b$$

con  $A$  como el anterior y  $x$  y  $b$  particionados de manera proporcional.

- Escriba el bloque Jacobi, bloque Gauss-Seidel, y el bloque de iteraciones SOR para el sistema lineal  $Ax = b$ . (Consejo: Escribe  $A = L + D + U$ , donde  $D = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{NN})$  y  $L$  y  $U$  son estrictamente bloques superiores e inferiores matrices triangulares)

**Solución**

Bloque de Iteración de Jacobi:

$$A_{ii}X_i^{k+1} = B_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}X_j^{(k)}, i = 1, 2, \dots, N$$

Bloque de Iteración de Gauss-Seidel:

$$A_{ii}X_i^{k+1} = B_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N A_{ij}X_j^{(k)}, i = 1, 2, \dots, N$$

Bloque de iteración del SOR:

$$A_{ii}X_i^{k+1} = \omega(B_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N A_{ij}X_j^{(k)}) + (1 - \omega)X_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, N$$

- Si  $A$  es simétrica definida positiva, luego muestra que  $U = L^T$  y  $D$  es positiva definida. En este caso, usando los resultados correspondientes en los casos escalares, pruebe que, con una elección arbitraria de la aproximación inicial, el bloque Gauss-Seidel siempre converge y el bloque SOR converge si y solo si  $0 < \omega < 2$

### Solución

Sabiendo que:

$$A = L + D + U$$

$$L_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } j < i \\ 0 & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

$$D_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$U_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } j > i \\ 0 & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

Si  $A$  es definida positiva, entonces mostrar que  $U = L^T$  y  $D$  es positiva. Muestra que  $U = L^T$ :

$$\text{Si } A \text{ es simétrica} = \begin{cases} A_{ij}^T = A_{ji} & \text{si } j \neq i \\ A_{ij} \text{ es simétrica} & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1N} \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-1N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{N-11} & A_{N-12} & A_{N-13} & \dots & 0 \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 0 & A_{21}^T & A_{31}^T & \dots & A_{N1}^T \\ 0 & 0 & A_{32}^T & \dots & A_{N2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{NN-1}^T \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1N} \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-1N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} L^T = U$$

Entonces para mostrar que  $D$  es definida positiva partimos de que  $A$  es definida positiva, es decir  $a_{ii} > 0$  Entonces tendríamos a  $D$ :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}$$

$\text{diag}(A) = \text{diag}(D)$  entonces  $d_{ii} > 0$  Por lo tanto se demuestra que  $S$  es definida positiva.

Probar que, con una elección arbitraria de la aproximación inicial, el bloque Gauss-Seidel siempre converge y el bloque SOR converge si y solo si  $0 < \omega < 2$

**Probando que el bloque Gauss-Seidel converge**

$X^{(k+1)} = B_{GS}X^{(k)} + B_{GS}$ , converge si  $B_{GS} \rightarrow 0$  para  $k \rightarrow \infty \iff \rho(B_{GS}) < 1$

Probaremos que  $\rho(B_{GS}) < 1$ .

Partimos de que  $A$  es simétrica:

$$A = L + D + L^T$$

Entonces  $B_{GS} = -(D + L)^{-1}L^T$  y si  $-\lambda$  es un autovalor de  $B_{GS}$  y  $u$  su correspondiente autovector.

$$(D + L)^{-1}L^T u = \lambda u$$

$$L^T u = \lambda(D + L)u$$

$$u * L^T u = \lambda u * (D + L)u, u * = (\bar{u})^T$$

$$u * Au - u * (L + D)u = \lambda u * (L + D)u, L^T = A - (L + D)$$

$$u * Au = (\lambda + 1)u * (L + D)u$$

Tomando la conjugada transpuesta:

$$u * Au = (\bar{\lambda} + 1)u * (L^T + D^T)u$$

Al considerar I y II se tiene:

$$\left(\frac{1}{1 + \lambda} + \frac{1}{1 + \bar{\lambda}}\right)u * Au = u * (L + D)u + u * (L^T + D^T)u$$

$$= u * (L + D + L^T + D^T)u$$

$$= u * (A + D^T)u, D^T = D$$

$$= u * (A + D)u$$

Como  $A$  y  $D$  son definidos positivos,  $(u * Au > 0, u * Au > 0)$ .

$$u * (A + D)u > u * Au$$

$$\left(\frac{1}{1 + \lambda} + \frac{1}{1 + \bar{\lambda}}\right)u * Au > u * Au$$

$$\frac{1}{1 + \lambda} + \frac{1}{1 + \bar{\lambda}} > 1$$

$$\frac{2 + \lambda + \bar{\lambda}}{(1 + \lambda)(1 + \bar{\lambda})} > 1$$

Sea  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$

$$\frac{2(1 + \alpha)}{(1 + \alpha)^2 + \beta^2} > 1$$

$$1 > |\lambda|, \text{ para todo } \lambda \text{ de } A$$

$$1 > |\lambda_{MAX}|, \rho(B_{GS}) < 1$$

Por lo tanto si  $A$  es matriz definida positiva y simétrica,  $B_{GS}$  converge

**Probando que el bloque SOR converge**

EL método converge si  $B_{SOR}$  converge siendo:

$$B_{SOR} = (D + WL)^{-1}[(1 - W)D - WU]$$

$$(D + WL)^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & A_{22}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & A_{NN}^{-1} \end{pmatrix}, \text{ triangular inferior}$$

$$|(1-W)D - WU| = \begin{pmatrix} (1-\omega)A_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & (1-\omega)A_{22} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (1-\omega)A_{NN} \end{pmatrix}, \text{ triangular inferior}$$

$$\det(B_{SOR}) = \det((D + WL)^{-1})\det[(1 - W)D - WU]$$

$$\prod_{n=1}^N |A_{NN}^{-1}| \prod_{n=1}^N (1 - \omega)^P |A_{NN}|$$

$$\det(B_{SOR}) = (1 - \omega)^{Np}, (A_{ij} \text{ es de orden } p \times p)$$

Como el determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores.

$$\rho(B_{SOR}) \geq |1 - \omega|$$

$$\rho(B_{SOR}) \geq 1 - \omega \cup \rho(B_{SOR}) \geq \omega - 1, \text{ además } \rho(B_{SOR}) < 1$$

$$\omega \geq 0 \cup 2 \geq \omega$$

Por lo tanto se cumple que  $0 \leq \omega \leq 2$

### 3.4. Ejercicio 39

Considere el sistema de bloques que converge de la solución de la ecuación discreta de Poisson  $u_x x + u_y y = f$ .

$$\begin{bmatrix} T & -I & \dots & \dots & 0 \\ -I & T & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & \dots & \dots & -I & T \end{bmatrix} \text{ Donde } T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & x_{13} & \dots & 0 \\ -1 & x_{22} & x_{23} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{d2} & \dots & \dots & x_{dn} \end{bmatrix}$$

lo anterior muestra que el bloque de iteración de Jacobi, en este caso particular es

$$Tx_1^{k+1} = x_{i+1}^k + x_{i-1}^k + b_i \quad i = 1, \dots, N$$

describiendo los bloques de iteración de Gauss-Seidel y SOR. para el método. para el método en bloque de Jacobi se tiene que:

$$Tx_1^{k+1} = b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^N A_{ij}x_j^k, \quad i = 1, \dots, N$$

Como  $A_{ii} = T$  y  $A_{ij, i \neq j} = -I$ , entonces:

$$Tx_1^{k+1} = b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^N -Ix_j^k \quad i = 1, \dots, N$$

$$Tx_1^{k+1} = b_i + \sum_{j=1, i \neq j}^N x_j^k \quad i = 1, \dots, N$$

como los únicos elementos existentes alrededor de la diagonal son los términos  $(i-1)$  e  $(i+1)$ , entonces:

$$Tx_1^{k+1} = x_{i+1}^k + x_{i-1}^k + b_i \quad i = 1, \dots, N$$

De la misma forma el bloque de iteración del Gauss-Seidel, tiene la forma:

$$A_{ii}x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j=i}^{i-1} A_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^N A_{ij}x_j^k \quad i = 1, \dots, N$$

$$Tx_i^{k+1} = b_i + \sum_{j=1}^{i-1} Ix_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^N Ix_j^k \quad i = 1, \dots, N$$

$$Tx_i^{k+1} = b_i + \sum_{j=1}^{i-1} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^N x_j^k \quad i = 1, \dots, N$$

Como los únicos elementos alrededor de la diagonal son los términos  $(i-1)$  e  $(i+1)$ , entonces :

$$Tx_i^{k+1} = x_{i-1}^{k+1} + x_{i+1}^k + b_i \quad i = 1, \dots, N$$

Por otro lado para el caso del SOR se tiene :

$$x_i^{k+1} = \frac{W}{A_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^N A_{ij}x_j^k \right] + (1-w)x_i^k \quad i = 1, \dots, N$$

$$x_i^{k+1} = \frac{W}{T} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^N x_j^k \right] + (1-w)x_i^k \quad i = 1, \dots, N$$

Ahora como los únicos elementos existentes alrededor de la diagonal son los términos  $(i - 1)$  e  $(i + 1)$ , entonces:

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} &= \frac{W}{T} [b_i + x_{i-1}^{k+1} + x_{i+1}^k] x_i^k + (1 - W)x_i^k \quad i = 1, \dots, N \\ Tx_i^{k+1} &= W [b_i + x_{i-1}^{k+1} + x_{i+1}^k] x_i^k + (1 - W)Tx_i^k \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

### 3.5. Ejercicio 42

Para el sistema del problema #39 calcule  $\rho(B_J)$ ,  $\rho(B_{GS})$ , y  $w_{opt}$  con  $N = 50, 100, 1000$ . Compare el radio de convergencia de **SOR** usando el valor óptimo  $w_{opt}$  en cada caso con el de Gauss Seidel, sin actualmente realizar las iteraciones.

**Solución:**

Calculando  $B_J = -D^{-1}(L + U)$ ,  $B_{GS} = -(D + L)^{-1}U$  y  $w_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J)^2}}$

**Caso 1: N=50**

Siendo:

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & . & . & 0 \\ . & -1 & 4 & . & . & . \\ . & . & -1 & . & -1 & . \\ 0 & . & . & . & 4 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 4 \end{pmatrix}_{50 \times 50}$$

Tendremos que:

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & . & . & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 & . & . & 0 \\ . & 0,25 & 0 & . & . & . \\ . & . & 0,25 & . & 0,25 & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & . & . & 0,25 & 0 \end{pmatrix}_{50 \times 50} \quad \rho(B_J) = 0,49905$$

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -0,0625 & 0,25 & . & . & 0 \\ . & 0,01562 & -0,0625 & . & . & . \\ . & . & 0,01562 & . & 0,25 & . \\ 0 & . & . & . & -0,0625 & 0,25 \\ 0 & 0 & . & . & 0,01562 & -0,0625 \end{pmatrix}_{50 \times 50} \quad \rho(B_{GS}) = 0,24905$$

y

$$w_{opt} = 1,8413$$

**Caso 2: N=100**

Siendo:

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & . & . & 0 \\ . & -1 & 4 & . & . & . \\ . & . & -1 & . & -1 & . \\ 0 & . & . & . & 4 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 4 \end{pmatrix}_{100 \times 100}$$

Tendremos que:

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & . & . & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 & . & . & 0 \\ . & 0,25 & 0 & . & . & . \\ . & . & 0,25 & . & 0,25 & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & . & . & 0,25 & 0 \end{pmatrix}_{100 \times 100} \quad \rho(B_J) = 0,49976$$

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -0,0625 & 0,25 & . & . & 0 \\ . & 0,01562 & -0,0625 & . & . & . \\ . & . & 0,01562 & . & 0,25 & . \\ 0 & . & . & . & -0,0625 & 0,25 \\ 0 & 0 & . & . & 0,01562 & -0,0625 \end{pmatrix}_{100 \times 100} \quad \rho(B_{GS}) = 0,24976$$

y

$$w_{opt} = 1,8418$$

**Caso 3: N=1000**

Siendo:

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & . & . & 0 \\ . & -1 & 4 & . & . & . \\ . & . & -1 & . & -1 & . \\ 0 & . & . & . & 4 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 4 \end{pmatrix}_{1000 \times 1000}$$

Tendremos que:

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & . & . & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 & . & . & 0 \\ . & 0,25 & 0 & . & . & . \\ . & . & 0,25 & . & 0,25 & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & . & . & 0,25 & 0 \end{pmatrix}_{1000 \times 1000} \quad \rho(B_J) = 0,5$$

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -0,0625 & 0,25 & . & . & 0 \\ . & 0,01562 & -0,0625 & . & . & . \\ . & . & 0,01562 & . & 0,25 & . \\ 0 & . & . & . & -0,0625 & 0,25 \\ 0 & 0 & . & . & 0,01562 & -0,0625 \end{pmatrix}_{1000 \times 1000} \quad \rho(B_{GS}) = 0,2591$$

y

$$w_{opt} = 1,8420$$

Finalmente:

Calculando  $\rho(B_{SOR})$  siendo  $B_{SOR} = (D + wL)^{-1}[(1 - w)D - wU]$  usando  $w = w_{opt}$ :

**Caso 1: N=50**

$$\rho(B_{SOR}) = 0,8413$$

**Caso 2: N=100**

$$\rho(B_{SOR}) = 0,8418$$

**Caso 3: N=1000**

$$\rho(B_{SOR}) = 0,8430$$

Entonces, comparando el radio de convergencia de **SOR** usando  $w = w_{opt}$  con el de Gauss Seidel, tenemos que:

**Caso 1: N=50**

$$\rho(B_{SOR}) = \rho(B_{SOR}) - 1$$

**Caso 2: N=100**

$$\rho(B_{SOR}) = \rho(B_{SOR}) - 1$$

**Caso 3: N=1000**

$$\rho(B_{SOR}) = \rho(B_{SOR}) - 1$$

### 3.6. Ejercicio 44

Pruebe que para un

$$\alpha = \frac{p^T(Ax - b)}{p^T Ap}$$



minimiza la función cuadrática

$$\begin{aligned}\phi_\alpha &= \phi(x - \alpha p) \\ &= \frac{1}{2}(x - \alpha p)^T A(x - \alpha p) - b^T(x - \alpha p)\end{aligned}$$

**Solución:**

Re-escribiendo la función  $\phi_\alpha$  tenemos

$$\phi_\alpha = \frac{1}{2}(x^T Ax - \alpha x^T Ap - \alpha p^T Ax + \alpha^2 p^T Ap) - b^T(x - \alpha p)$$

Y derivamos con respecto a  $\alpha$ .

$$\frac{d\phi_\alpha}{d\alpha} = -\frac{1}{2}(x^T Ap + p^T Ax) + \alpha p^T Ap + b^T p$$

Puesto que  $A$  es una matriz simétrica, tenemos que  $\alpha x^T Ap = \alpha p^T Ax$  y simplificamos nuestra expresión

$$\frac{d\phi_\alpha}{d\alpha} = -x^T Ap + \alpha p^T Ap + b^T p$$

Igualamos  $\frac{d\phi_\alpha}{d\alpha}$  a cero en pos de encontrar un punto crítico

$$\frac{d\phi_\alpha}{d\alpha} = 0$$

$$-x^T Ap + \alpha p^T Ap + b^T p = 0$$

y despejamos el valor de  $\alpha$

$$\alpha = \frac{p^T(Ax - b)}{p^T Ap}$$

Que es justamente la expresión que queremos saber si minimiza la función. Para poder saber si definitivamente cumple dicho propósito, debemos aplicar el criterio de la segunda derivada a  $\phi_\alpha$

$$\frac{d\phi_\alpha}{d\alpha} = -x^T Ap + \alpha p^T Ap + b^T p$$

$$\frac{d^2\phi_\alpha}{d\alpha^2} = p^T Ap$$

y puesto que  $A$  es una matriz simétrica positiva, entonces  $p^T Ap > 0$  y por lo tanto  $\frac{d^2\phi_\alpha}{d\alpha^2} > 0$  en  $\alpha = \frac{p^T(Ax-b)}{p^T Ap}$  también, con lo que se prueba que dicho valor de  $\alpha$  sí minimiza la función.

### 3.7. Ejercicio 47

Sean  $p_0, \dots, p_{n-1}$  los vectores de dirección generados por el método básico del gradiente conjugado. Sea el residual  $r_k = b - Ax_k$ , para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Probar que:

- $r_k \in \text{span}(p_0, \dots, p_k)$  para  $k = 0, 1, \dots, n-1$

De la recurrencia

$$p_k = r_k - \beta_{k-1} \times p_{k-1}$$

Despejando  $r_k$  tenemos que:

$$\begin{aligned} r_k &= p_k - \beta_{k-1} \times p_{k-1} \\ &= l \times c(p_{k-1}, p_k) \\ &= l \times c(p_0, \dots, p_{k-1}, p_k) \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que  $r_k$  es una combinación lineal de los vectores de dirección  $p_0, \dots, p_k$ .

- $\text{span}(p_0, \dots, p_k) = \text{span}(r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0)$  para  $k = 0, \dots, n-1$

Lo que debemos probar es que cualquier vector generado por el primer conjunto, puede ser generado también por el otro conjunto generador. Para ésto, empecemos por expresar un vector generado por el primer conjunto de la siguiente forma:

$$v = c_0 \times p_0 + c_1 \times p_1 + \dots + c_k \times p_k$$

Lo que necesitamos es poder expresar éste mismo vector en la forma siguiente:

$$v = d_0 \times r_0 + d_1 \times A^1 \times r_0 + \dots + d_k \times A^k \times r_0$$

Para esto basta con probar que los vectores  $p_k$  pueden expresarse como una combinación lineal de los vectores  $r_0, A \times r_0, \dots, A^k \times r_0$ . Ésto puede obtenerse a partir de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} p_k &= r_k - \beta_{k-1} \times p_{k-1} \\ r_k &= r_{k-1} - \alpha_{k-1} \times A \times p_{k-1} \end{aligned}$$

Para probar esto, procedemos reemplazando la segunda igualdad en la primera.

$$\begin{aligned}
p_k &= r_k - \beta_{k-1} \times p_{k-1} \\
&= r_{k-1} - \alpha_{k-1} \times A \times p_{k-1} - \beta_{k-1} \times p_{k-1}
\end{aligned}$$

Si repetimos el proceso para cada  $r_i$  tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
p_k &= r_{k-1} - \alpha_{k-1} \times A \times p_{k-1} - \beta_{k-1} \times p_{k-1} \\
&= r_0 - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \times A \times p_i - \beta_{k-1} \times p_{k-1}
\end{aligned}$$

Para probar lo que deseamos, primero procedemos por analizar un par de casos base para ver como vamos a proceder. Se puede observar que la prueba será por inducción:

Para  $k = 1$ :

$$\begin{aligned}
p_1 &= r_0 - \alpha_0 A p_0 - \beta_0 p_0 \\
&= r_0 - \alpha_0 A r_0 - \beta_0 r_0 \\
&= (\dots) r_0 + (\dots) A r_0
\end{aligned}$$

Para  $k = 2$

$$\begin{aligned}
p_2 &= r_0 - \alpha_0 A r_0 - \alpha_1 A p_1 - \beta_1 p_1 \\
&= r_0 - \alpha_0 A r_0 - \alpha_1 A (r_0 - \alpha_0 A r_0 - \beta_0 r_0) - \beta_1 (r_0 - \alpha_0 A r_0 - \beta_0 r_0) \\
&= r_0 - \alpha_0 A r_0 - \alpha_1 A r_0 + \alpha_0 A^2 r_0 + \beta_0 A r_0 - \beta_1 r_0 + \alpha_0 \beta_1 A r_0 + \beta_0 \beta_1 r_0 \\
&= (\dots) r_0 + (\dots) A r_0 + (\dots) A^2 r_0
\end{aligned}$$

Observemos que hay un patrón que se puede seguir, además que para estos casos si se cumple nuestra hipótesis, por lo que podemos proceder por inducción. Se observa que cada paso anterior da al paso siguiente una combinación lineal que puede ser agrupada y formar otra combinación lineal de mayor orden. Por inducción, probemos la hipótesis:

$$p_k = l \times c(r_0, A \times r_0, \dots, A^k \times r_0)$$

- Caso base  $k = 1$ . Éste caso ya lo probamos anteriormente.

- Sea verdad  $p_k \& = l \times c(r_0, A \times r_0, \dots, A^k \times r_0)$ .
- Probemos que se cumple la suposición para  $k + 1$ . Para eso, tenemos la siguiente expresión, podemos relación  $p_{k+1}$  y  $p_k$ . Usando:

$$p_{k+1} = r_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_i \times A \times p_i - \beta_k \times p_k$$

Dado que cada  $p_i \& = l \times c(r_0, A \times r_0, \dots, A^i \times r_0)$  para  $i \leq k$  gracias a la hipótesis inductiva, tenemos que:

$$p_{k+1} = r_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_i \times A \times p_i - \beta_k \times p_k - r_0 + \sum_{i=0}^k l \times c(r_0, Ar_0, \dots, A^{i+1}r_0) - \beta_k \times l \times c(r_0, Ar_0, \dots, A^{k+1}r_0)$$

Se observa la sumatoria dará una combinación hasta el orden  $k$ , y combinando todo tendremos que:

$$p_{k+1} = l \times c(r_0, A \times r_0, \dots, A^{k+1} \times r_0)$$

Lo cual prueba la hipótesis inductiva y completa la prueba por inducción. Entonces, como resultado hemos probado lo que necesitamos, por lo que la premisa es verdad.

- $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$  son mutuamente ortogonales

Partamos de:

$$\begin{aligned} r_k &= r_{k-1} - \alpha_{k-1} \times A \times p_{k-1} \\ &= r_{k-1} - \frac{\|r_{k-1}\|^2 \times A \times p_{k-1}}{p_{k-1}^T \times A \times p_{k-1}} \end{aligned}$$

Multipliquemos ambos lados por  $r_{k-1}^T$

$$r_{k-1}^T \times r_k = r_{k-1}^T \times r_{k-1} - \frac{\|r_{k-1}\|^2 \times A \times p_{k-1}}{p_{k-1}^T \times A \times p_{k-1}}$$

Además, de:

$$r_k = p_{k-1} + \beta_{k-2} \times p_{k-2}$$

Si la última expresión la transponemos y multiplicamos por  $A \times p_{k-1}$  tendremos que:

$$r_{k-1}^T \times A \times r_k = p_{k-1}^T \times A \times p_{k-1} + \beta_{k-2} \times p_{k-2}^T \times A \times p_{k-1}$$

Pero como los vectores  $p_{k-1}, p_{k-2}$  son  $A$ -ortogonales tenemos que  $p_{k-2}^T \times A \times p_{k-1} = 0$  por lo que tendremos:

$$r_{k-1}^T \times A \times p_{k-1} = p_{k-1}^T \times A \times p_{k-1}$$

Reemplazando la ecuación anterior tenemos que

$$\begin{aligned} r_{k-1}^T \times r_k &= r_{k-1}^T \times r_{k-1} \frac{\|r_{k-1}\|^2 \times p_{k-1}^T \times A \times p_{k-1}}{p_{k-1}^T \times A \times p_{k-1}} \\ &= r_{k-1}^T \times r_{k-1} - \|r_{k-1}\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que los vectores  $r_k, r_{k-1}$  son ortogonales. Expandiendo hasta  $k = n - 1$  tenemos que  $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$  son mutuamente ortogonales.

### 3.8. Ejercicio 48

Considerando la iteración:

$$x^{k+1} = Bx^k + d$$

donde:

$$B = \sum_{i=1}^k D_i B_i^{-1} C_i$$

y

$$d = \left( \sum_{i=1}^k D_i B_i^{-1} \right) b$$

$$A = B_i + C_i, i = 1, \dots, k \text{ y } \sum_{i=1}^k D_i = I(D_i) \leq 0$$

Desarrolle la convergencia por Gauss-Seidel, Jacobi y SOR para la matriz de bloques A:  
**Solución:**

$B_i$ ,  $C_i$  y  $D_i$  son matrices bloques de  $A$ . Considerando  $A = B + L_i + U_i$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix}$$

Donde:  $A_{ii} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$  son bloques de  $A$  no singulares y  $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$ .

$D = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{pp})$   $L_i = (L_{ki}i)$ , es una matriz triangular inferior estructurada de bloques  $L_{ki}i$  con elementos de  $A$ .  $U_i = A - D - L_i$

■ Método de **Jacobi**

$$\begin{aligned} B_i &= D, C_i = -(L_i + U_i) \\ B &= -\sum_{i=1}^k D_i D^{-1} (L_i + U_i) \\ d &= (\sum_{i=1}^k D_i D^{-1}) b \end{aligned}$$

■ Método de **Gauss-Seidel**

$$\begin{aligned} B_i &= D, D + L_i, C_i = U_i \\ B &= -\sum_{i=1}^k D_i (D + L_i)^{-1} U_i \\ d &= (\sum_{i=1}^k D_i (D + L_i)^{-1}) b \end{aligned}$$

■ Método de **SOR**:  $D + L_i + U_i$

$$\begin{aligned} wA &= wD + wL_i + wU_i \\ wA &= (D + wL_i) - ((1-w)D + wU_i) \\ A &= \frac{1}{w}(D + wL_i) - \frac{1}{w}((1-w)D + wU_i) \\ \text{Dado:} \\ B_i &= \frac{1}{w}(D + wL_i) \text{ y } C_i = \frac{1}{w}((1-w)D + wU_i), \text{ por tanto:} \\ B &= \sum_{i=1}^k D_i \left( \frac{1}{w}(D + wL_i) \right)^{-1} \frac{1}{w}((1-w)D + wU_i) \\ B &= \sum_{i=1}^k D_i ((D + wL_i))^{-1} ((1-w)D + wU_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= \sum_{i=1}^k D_i \left( \frac{1}{w}(D + wL_i) \right)^{-1} b \\ d &= w \sum_{i=1}^k D_i ((D + wL_i))^{-1} b \end{aligned}$$

### 3.9. Ejercicio 49

Aplique los Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, y SOR (con factor de relajación óptima) al sistema mostrado en el ejemplo del Teorema 6.10.5 (Ejemplo 6.10.5) y verificar la afirmación sobre el número de iteraciones realizadas por los diferentes métodos.

**Solución:**

El problema propuesto es resolver el sistema  $Ax = b$ , con:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Haciendo uso del Método de Jacobi:

Iteración	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Error
0	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
1	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.829156
2	0.250000	0.250000	0.000000	0.250000	0.000000	0.000000	0.324760
3	0.375000	0.062500	0.062500	0.062500	0.125000	0.000000	0.178836
4	0.281250	0.140625	0.015625	0.125000	0.031250	0.046875	0.106190
5	0.316406	0.082031	0.046875	0.078125	0.078125	0.011719	0.063911
6	0.290039	0.110352	0.023438	0.098633	0.042969	0.031250	0.038555
7	0.302246	0.089111	0.035400	0.083252	0.060059	0.016602	0.023268
8	0.293091	0.099426	0.026428	0.090576	0.047241	0.023865	0.014043
9	0.297501	0.091690	0.030823	0.085083	0.053467	0.018417	0.008476
10	0.294193	0.095448	0.027527	0.087742	0.048798	0.021072	0.005116
11	0.295797	0.092629	0.029130	0.085748	0.051065	0.019081	0.003088
12	0.294594	0.093998	0.027928	0.086716	0.049365	0.020049	0.001864
13	0.295178	0.092972	0.028512	0.085990	0.050191	0.019323	0.001125
14	0.294740	0.093470	0.028074	0.086342	0.049571	0.019676	0.000679
15	0.294953	0.093096	0.028286	0.086078	0.049872	0.019411	0.000410
16	0.294794	0.093278	0.028127	0.086206	0.049646	0.019540	0.000247
17	0.294871	0.093142	0.028204	0.086110	0.049756	0.019443	0.000149
18	0.294813	0.093208	0.028146	0.086157	0.049674	0.019490	0.000090

Haciendo uso del Método de Gauss-Seidel:

[H] Iteración	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Error
0	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
1	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.756089
2	0.250000	0.062500	0.015625	0.062500	0.031250	0.011719	0.042713
3	0.281250	0.082031	0.023438	0.078125	0.042969	0.016602	0.013570
4	0.290039	0.089111	0.026428	0.083252	0.047241	0.018417	0.004836
5	0.293091	0.091690	0.027527	0.085083	0.048798	0.019081	0.001755
6	0.294193	0.092629	0.027928	0.085748	0.049365	0.019323	0.000639
7	0.294594	0.092972	0.028074	0.085990	0.049571	0.019411	0.000233
8	0.294740	0.093096	0.028127	0.086078	0.049646	0.019443	0.000085

Haciendo uso del Método SOR (con factor de relajación óptima):  
Tolerancia 0.0001.

Iteración	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Error
0	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
1	0.304137	0.122296	0.077391	0.100767	0.154781	0.000000	0.763377
2	0.297005	0.100259	0.043263	0.090651	0.062568	0.064588	0.352623
3	0.295022	0.093962	0.029177	0.086928	0.052218	0.022158	0.141864
4	0.294859	0.093312	0.028453	0.086190	0.050038	0.020145	0.009832
5	0.294829	0.093184	0.028193	0.086144	0.049736	0.019564	0.002199
6	0.294825	0.093170	0.028161	0.086130	0.049696	0.019473	0.000325
7	0.294824	0.093168	0.028158	0.086129	0.049690	0.019463	0.000037

## 4. Alfio Quarteroni

### 4.1. Ejercicio 1

El radio espectral de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

es  $p(B) = a$ . Verificar que si  $0 < a < 1$ , entonces  $p(B) < 1$ , mientras  $\|B^m\|_2^{\frac{1}{m}}$  puede ser mas grande que 1

**Solución:**

Matriz B multiplicada  $m$  veces:

$$B^m = B * B * B \dots B$$

Entonces, para la norma 2 de  $B^m$  se multiplica  $m$  veces B por  $m$  veces  $B^T$ :

$$\|B^m\|_2 = \sqrt{\max \lambda \text{ de } (B^m)^T * B^m}$$

Sabemos que  $p(B^m * (B^m)^T) = \|B^m\|_2$ , entonces:

$$\|B^m\|_2 = p(B * B * B \dots * B * B^T * B^T * B^T * \dots * B^T)$$

Considerando que los autovalores de la matriz  $B$  coinciden con los de  $B^T$  y por propiedad de radio espectral, tenemos radio espectral de  $B$  multiplicado  $2m$  veces:

$$\|B^m\|_2 \leq p(B) * p(B) * \dots * p(B)$$

$$\|B^m\|_2 \leq p^{2m}(B)$$

$$\|B^m\|_2^{\frac{1}{m}} \leq p^2(B)$$

Por definición  $p(B) = a$

$$\|B^m\|_2^{\frac{1}{m}} \leq a^2$$

$0 < a < 1$ , entonces  $\|B^m\|_2^{\frac{1}{m}}$  no sera mas grande que 1.

Por lo tanto,  $\|B^m\|_2^{\frac{1}{m}} \leq 1$



## 4.2. Ejercicio 2

Sea  $A \in R^{n \times n}$  una matriz estrictamente diagonal dominante por filas. Mostrar si el método de Gauss-Seidel es convergente para el sistema lineal (3,2).

Ejemplo 3.2

$$(Ax = b) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Para realizar el método de Gauss Seidel y asegurar la convergencia, es necesario que sea diagonal dominante por tanto comprobamos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Comprobamos la diagonal por filas, comparando si es mayor.

$$(1 \quad 1/2 \quad 1/3)$$

en este caso si es mayor.

$$(1/2 \quad \mathbf{1/3} \quad 1/4)$$

en este caso el mayor valor se encuentra en la primera fila y pasa de igual forma en la tercera fila.

$$(1/3 \quad 1/4 \quad \mathbf{1/5})$$

por tanto no se puede modificar para que cumpla esta propiedad.

Si aplicamos el radio espectral obtendremos un resultado  $> 1$ .

$$\frac{1/2}{1} + \frac{1/3}{1} = < 1$$

$$\frac{1/2}{1/3} + \frac{1/4}{1/3} = < 1$$

$$\frac{1/3}{1/5} + \frac{1/4}{1/5} = < 1$$

obteniendo:

$$\frac{5}{6} = < 1$$

$$\frac{9}{4} = < 1$$

$$\frac{35}{12} = < 1$$

como resultado:

$$0,83 = < 1$$

$$2,25 = < 1$$

$$2,92 = < 1$$

Solo en el primer caso se cumple el criterio de convergencia en los otros 3 no, de esta forma al no cumplirse el criterio de convergencia el método de Gauss-Seidel.

### 4.3. Ejercicio 3

Comprobar la matriz  $A = \text{tridiag}(-1, \alpha, -1)$  con  $\alpha \in R$  tiene autovalores dados por:

$$\lambda_j = \alpha - 2 \cos(j\theta), j = 1, \dots, n$$

Donde  $\theta = \pi/(n+1)$  y sus correspondientes autovectores son :

$$q_j = [\sin(j\theta), \sin(2j\theta), \dots, \sin(nj\theta)]^T, j = 1, \dots, n$$

¿Bajo que condiciones de  $\alpha$ , la matriz es definida positiva?

Para comprobar la forma de los autovalores y autovectores de la matriz A, se tiene que  $Av = v\lambda$ , por lo que:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \alpha & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(j\theta) \\ \sin(2j\theta) \\ \sin(3j\theta) \\ \vdots \\ \sin(nj\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(j\theta)\alpha - \sin(2j\theta) \\ -\sin(j\theta) + \sin(2j\theta)\alpha - \sin(3j\theta) \\ -\sin(2j\theta) + \sin(3j\theta)\alpha - \sin(4j\theta) \\ \vdots \\ -\sin((n-1)j\theta) + \sin(nj\theta)\alpha \end{pmatrix}$$

Dado que  $\sin(0j\theta) = \sin((n+1)j\theta) = 0$ , agrupando los elementos se tiene:

$$\begin{pmatrix} \sin(j\theta)\alpha - \sin(2j\theta) + \sin(0j\theta) \\ \sin(2j\theta)\alpha - \sin(3j\theta) + \sin(j\theta) \\ \sin(3j\theta)\alpha - \sin(4j\theta) + \sin(2j\theta) \\ \vdots \\ \sin(nj\theta)\alpha - (\sin((n+1)j\theta) + \sin((n-1)j\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(j\theta)\alpha - 2(\sin(j\theta)\cos(j\theta)) \\ \sin(2j\theta)\alpha - 2(\sin(2j\theta)\cos(j\theta)) \\ \sin(3j\theta)\alpha - 2(\sin(3j\theta)\cos(j\theta)) \\ \vdots \\ \sin(nj\theta)\alpha - 2(\sin(nj\theta)\cos(j\theta)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(j\theta)\alpha \\ \sin(2j\theta)\alpha \\ \sin(3j\theta)\alpha \\ \vdots \\ \sin(nj\theta)\alpha \end{pmatrix} (\alpha - 2 \cos(j\theta)) = v\lambda$$

Lo que comprueba la forma de los autovalores y autovectores. Para que una matriz sea definida positiva, todo los autovalores deben ser positivo, por lo que  $\lambda_j \geq 0$  y dado que

$1 \geq \cos(\beta) \geq -1$  entonces:

$$\alpha - 2 \cos(j\theta) \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 2 \cos(j\theta)$$

Al reemplazar el rango máximo del coseno se tiene que  $\alpha \geq 2$  para que la matriz  $A$  sea Definida Positiva.

#### 4.4. Ejercicio 4

Considere la matriz pentadiagonal  $A = \text{pentadiag}_n(-1, -1, 10, -1, -1)$ , asuma que  $n = 10$  y  $A = M + N + D$ , con  $D = \text{diag}(8, \dots, 8) \in R^{10 \times 10}$ ,  $A = \text{pentadiag}_n(-1, -1, 1, 0, 0)$  y  $N = M^t$ . Para resolver el sistema de ecuaciones  $Ax = b$ , analice la convergencia de los siguientes metodos iterativos.

- $(M + D)x^{k+1} = -Nx^k + b$
- $Dx^{k+1} = -(M + N)x^k + b$
- $(M + N)x^{k+1} = -Dx^k + b$

#### Solución:

Sabemos que un método iterativo para resolver un sistema de ecuaciones de la forma:

$$Ax = b$$

es definido como:

$$x = Bx + b$$

Para comprobar la convergencia de un método iterativo se debe cumplir la condición:

$$\rho(B) < 1$$

Ahora calculemos las matrices  $M, D$  y  $N$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■  $(M + D)x^{k+1} = -Nx^k + b$

Primero despejamos para obtener  $B$ .

$$x^{k+1} = -(M + D)^{-1}Nx^k + -(M + D)^{-1}b$$

$$B = -(M + D)^{-1}N$$

Calculando la matriz B con octave obtenemos:

-0.1111	0.1111	0.1111	0	0	0	0	0	0	0
-0.0123	-0.0988	0.1235	0.1111	0	0	0	0	0	0
-0.0137	0.0014	-0.0850	0.1235	0.1111	0	0	0	0	0
-0.0029	-0.0108	0.0043	-0.0850	0.1235	0.1111	0	0	0	0
-0.0018	-0.0010	-0.0090	0.0043	-0.0850	0.1235	0.1111	0	0	0
-0.0005	-0.0013	-0.0005	-0.0090	0.0043	-0.0850	0.1235	0.1111	0	0
-0.0003	-0.0003	-0.0011	-0.0005	-0.0090	0.0043	-0.0850	0.1235	0.1111	0
-0.0001	-0.0002	-0.0002	-0.0011	-0.0005	-0.0090	0.0043	-0.0850	0.1235	0.1111
-0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0002	-0.0011	-0.0005	-0.0090	0.0043	-0.0850	0.1235
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0002	-0.0011	-0.0005	-0.0090	0.0043	-0.0850

Figura 9: Matriz B

Ahora calculemos el radio espectral de la matriz  $B$ . Para ello calcularemos los eigenvalores de  $B$ :

$$eig(B) = \begin{bmatrix} -0,0214 + 0,0911i \\ -0,0214 - 0,0911i \\ -0,0586 + 0,0764i \\ -0,0586 - 0,0764i \\ -0,0937 + 0,0417i \\ -0,0937 - 0,0417i \\ -0,1441 + 0,0167i \\ -0,1441 - 0,0167i \\ -0,1436 + 0,0000i \\ -0,1111 + 0,0000i \end{bmatrix}$$

El radio espectral de  $B$  es el mayor eigenvalor en valor absoluto de  $B$ .

$$\rho(B) = 0,1450 < 1$$

Por lo que concluimos que el método CONVERGE.

■  $Dx^{k+1} = -(M + N)x^k + b$

- Despejamos para obtener B:

$$x^{k+1} = -D^{-1}(M + N)x^k + D^{-1}b$$

$$B = -D^{-1}(M + N)$$

- Calculamos la matriz B:

-0.2500	0.1250	0.1250	0	0	0	0	0	0	0
0.1250	-0.2500	0.1250	0.1250	0	0	0	0	0	0
0.1250	0.1250	-0.2500	0.1250	0.1250	0	0	0	0	0
0	0.1250	0.1250	-0.2500	0.1250	0.1250	0	0	0	0
0	0	0.1250	0.1250	-0.2500	0.1250	0.1250	0	0	0
0	0	0	0.1250	0.1250	-0.2500	0.1250	0.1250	0	0
0	0	0	0	0.1250	0.1250	-0.2500	0.1250	0.1250	0
0	0	0	0	0	0.1250	0.1250	-0.2500	0.1250	0.1250
0	0	0	0	0	0	0.1250	0.1250	-0.2500	0.1250
0	0	0	0	0	0	0	0.1250	0.1250	-0.2500

Figura 10: Matriz B

- Calculamos el radio espectral de  $B$ : Para ello calcularemos los eigenvalores de  $B$ :

$$eig(B) = \begin{bmatrix} -0,5000 \\ -0,5000 \\ -0,4222 \\ -0,4096 \\ -0,3327 \\ -0,2842 \\ -0,2500 \\ -0,0874 \\ 0,0814 \\ 0,2048 \end{bmatrix}$$

El radio espectral de  $B$  es el mayor eigenvalor en valor absoluto de  $B$ .

$$\rho(B) = 0,5000 < 1$$

- Entonces concluimos que el método CONVERGE.
- $(M + N)x^{k+1} = -Dx^k + b$ 
  - Despejamos para obtener B:

$$x^{k+1} = -(M + N)^{-1}Dx^k + b$$

$$B = -(M + N)^{-1}D$$

- Calculamos la matriz B:

-3.0000	0.6000	1.4000	2.8000	2.4000	1.2000	-0.6000	-2.2000	-2.6000	-2.4000
0.6000	-1.2000	2.4000	2.6000	2.8000	1.2000	-0.6000	-2.4000	-2.8000	-2.6000
1.4000	2.4000	0.4000	3.0000	2.0000	1.2000	-0.6000	-2.0000	-2.4000	-2.2000
2.8000	2.6000	3.0000	-0.6000	1.2000	-0.0000	-0.0000	-0.6000	-0.6000	-0.6000
2.4000	2.8000	2.0000	1.2000	-2.4000	0.0000	0.0000	1.2000	1.2000	1.2000
1.2000	1.2000	1.2000	-0.0000	0.0000	-2.4000	1.2000	2.0000	2.8000	2.4000
-0.6000	-0.6000	-0.6000	-0.0000	0.0000	1.2000	-0.6000	3.0000	2.6000	2.8000
-2.2000	-2.4000	-2.0000	-0.6000	1.2000	2.0000	3.0000	0.4000	2.4000	1.4000
-2.6000	-2.8000	-2.4000	-0.6000	1.2000	2.8000	2.6000	2.4000	-1.2000	0.6000
-2.4000	-2.6000	-2.2000	-0.6000	1.2000	2.4000	2.8000	1.4000	0.6000	-3.0000

Figura 11: Matriz B

- Calculamos el radio espectral de  $B$ : Para ello calcularemos los eigenvalores de  $B$ :

$$\text{eig}(B) = \begin{bmatrix} -11,4356 \\ -4,0000 \\ -3,5182 \\ -3,0054 \\ -2,4411 \\ -2,3688 \\ -2,0000 \\ -2,0000 \\ 4,8821 \\ 12,2870 \end{bmatrix}$$

El radio espectral de  $B$  es el mayor eigenvalor en valor absoluto de  $B$ .

$$\rho(B) = 12,2870 > 1$$

- Entonces concluimos que el metodo NO CONVERGE.

## 4.5. Ejercicio 5

Para la solución del sistema lineal  $Ax = b$  con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Considere el siguiente método iterativo

$$x^{(k+1)} = B(\theta)x^{(k)} + g(\theta), \quad k \geq 0, \quad \text{con } x^{(0)} \text{ dado,}$$

Donde  $\theta$  es un parámetro real y

$$B(\theta) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{bmatrix}, \quad g(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix}$$

Verifique que el método es consistente  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ . Luego, determine los valores de  $\theta$  para el cual el método es convergente y calcule el valor óptimo de  $\theta$  (ejm., el valor del parámetro para el cual la tasa de convergencia es máxima).

**Solución:**

i) Consistencia del método

Analizando para la convergencia  $X^{(k+1)} = X^k$ , según lo cual:

$$x^{(k)} = B(\theta)x^{(k)} + g(\theta)$$

$$g(\theta) = (I - B(\theta))x^{(k)}$$

$$g(\theta) = (I - B(\theta))A^{-1}.b$$

Para comprobar la consistencia del método será necesario corroborar que igualdad anterior cumple  $\forall \theta$ . Para ello solamente es necesario reemplazar en los valores dados inicialmente, obteniendo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Operando, se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{4}) + (\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}) \\ (\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}) + (-\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{4}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{2}\theta + \frac{2}{4} \\ -\frac{2}{2}\theta + \frac{2}{4} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el método iterativo es consistente  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ .

ii) Valores de  $\theta$  para el cual el método es convergente:

Para la determinación de la convergencia del método se requiere calcular el radio espectral de la matriz  $B$ ,  $\rho(B)$ . Según esto procedemos al cálculo de los autovalores



mediante  $\det(B - \lambda I) = 0$ :

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{4}(2\theta^2 + 2\theta + 1) - \lambda & \frac{1}{4}(-2\theta^2 + 2\theta + 1) \\ \frac{1}{4}(-2\theta^2 + 2\theta + 1) & \frac{1}{4}(2\theta^2 + 2\theta + 1) - \lambda \end{array} \right| = 0 \\ & \left( \frac{1}{16}(2\theta^2 + 2\theta + 1) - \lambda \right) \left( (2\theta^2 + 2\theta + 1) - \lambda \right) - \frac{1}{16}(-2\theta^2 + 2\theta + 1)(-2\theta^2 + 2\theta + 1) = 0 \\ & \frac{1}{16}(2\theta^2 + 2\theta + 1)^2 - \frac{2}{4}(2\theta^2 + 2\theta + 1)\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{16}(-2\theta^2 + 2\theta + 1)^2 = 0 \\ & \left( \frac{1}{16}((2\theta^2 + 2\theta + 1)^2 - (-2\theta^2 + 2\theta + 1)^2) - \frac{1}{2}(2\theta^2 + 2\theta + 1)\lambda + \lambda^2 \right) = 0 \\ & \frac{1}{16}, 4(2\theta + 1)(2\theta^2) - \frac{1}{2}(2\theta^2 + 2\theta + 1)\lambda + \lambda^2 = 0 \\ & \frac{1}{4}(2\theta + 1)(2\theta^2) - \frac{1}{2}(2\theta^2 + 2\theta + 1)\lambda + \lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

Factorizando:

$$\begin{aligned} & (\lambda - \theta^2)(\lambda - \frac{1}{2}(2\theta + 1)) = 0 \\ & \lambda = \theta^2 \quad \vee \quad \lambda = \frac{1}{2}(2\theta + 1) \end{aligned}$$

El resultado que se obtuvo es el valor de  $\lambda$  en función al valor de  $\theta$ :

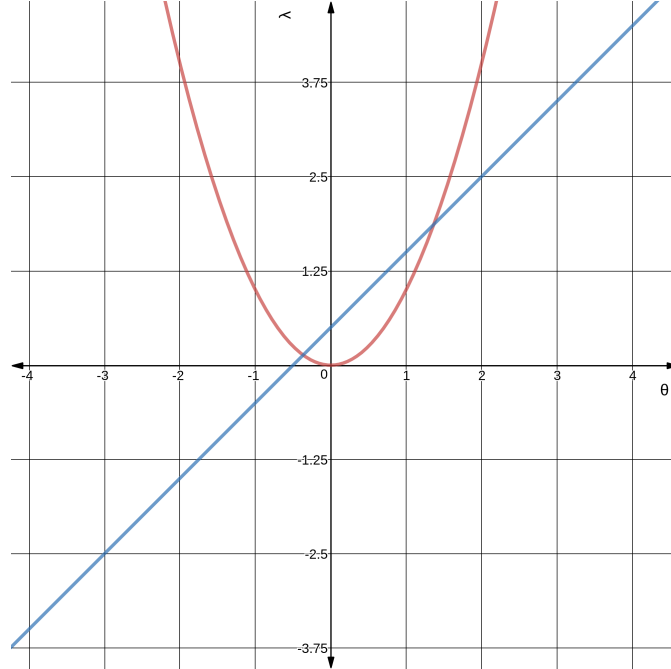


Figura 12: Gráfico de la función.

Debido a que  $\rho$  es el máximo autovalor de  $B$ , entonces toma los siguientes valores en función a  $\theta$ :

$$\rho(B) = \begin{cases} \theta^2 & \theta \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}(2\theta + 1) & \frac{1-\sqrt{3}}{2} < \theta \end{cases}$$

Para que el método sea convergente, se debe cumplir que  $\rho(B) < 1$ , por lo que el gráfico de  $\rho(B)$  en función de  $\theta$  será:

$$\begin{aligned} \theta^2 < 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}(2\theta + 1) < 1 \\ -1 < \theta < 1 \quad \wedge \quad \theta < \frac{1}{2} \\ -1 < \theta < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

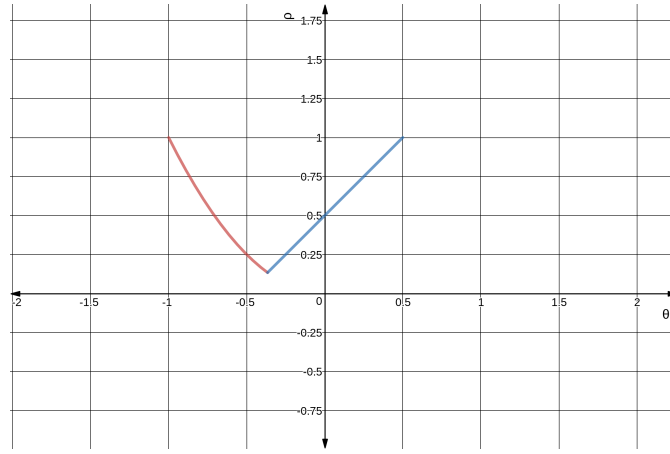


Figura 13: Gráfico de  $\rho(B)$  en función a  $\theta$ .

Como se puede apreciar, el método es convergente si  $-1 < \theta < \frac{1}{2}$

iii) Valor óptimo de  $\theta$ :

Partiendo del intervalo de los valores de  $\rho(B)$ :

$$\rho(B)(\theta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}) \leq \rho(B) < 1$$

Aplicaremos  $-\log$  a todos los miembros, ya que  $-\log(\rho(B))$  es la tasa de convergencia asintótica:

$$\begin{aligned} -\log(\rho(B)(\theta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2})) &\leq -\log(\rho(B)) < -\log(1) \\ \log(\rho(B)(\theta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2})) &\geq \log(\rho(B)) > \log(1) \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor óptimo de  $\theta$  (el valor para el cual la tasa de convergencia es máxima) es:

$$\theta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

## 4.6. Ejercicio 6

Para resolver el siguiente bloque de sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Considere los siguientes métodos:

- $A_1x^{(k+1)} + By^{(k)} = b_1$  ,  $Bx^{(k)} + A_2y^{(k+1)} = b_2$
- $A_1x^{(k+1)} + By^{(k)} = b_1$  ,  $Bx^{(k+1)} + A_2y^{(k+1)} = b_2$

Encontrar las condiciones suficientes de modo que los dos casos sean convergentes para cualquier elección de los datos iniciales de  $x^{(0)}$ ,  $y^{(0)}$

Solución: Método (1) es un sistema desacoplado en el desconocido  $x^{k+1}$  y  $y^{k+1}$ . Asumimos que  $A_1$  y  $A_2$  son invertibles, método (1) converge si  $\rho(A_1^{-1}B) < 1$  y  $\rho(A_2^{-1}B) < 1$ . en el caso del método (2) tenemos una sistema acoplado para resolver en cada los  $x^{k+1}$  y  $y^{k+1}$  desconocidos. Resolviendo formalmente la primera ecuación con respecto a  $x^{k+1}$  y sustituyendo en la segunda podemos ver que el método (2) es convergente si  $\rho(A_2^{-1}BA_1^{-1}B) < 1$ .

**Solución**

- $A_1x^{(k+1)} + By^{(k)} = b_1$  ,  $Bx^{(k)} + A_2y^{(k+1)} = b_2$

$$\begin{aligned} A_1x^{(k+1)} + By^{(k)} &= b_1 \quad , \quad Bx^{(k)} + A_2y^{(k+1)} = b_2 \\ x^{(k+1)} &= A_1^{-1}b_1 - A_1^{-1}By^{(k)} \quad , \quad y^{(k+1)} = A_2^{-1}b_2 + A_2^{-1}Bx^{(k)} \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} B_{M1} &= -A_1^{-1}B \quad , \quad b_{M1} = A_1^{-1}b \\ B_{M2} &= A_2^{-1}B \quad , \quad b_{M2} = A_2^{-1}b \end{aligned}$$

Entonces

$$x^{(k+1)} = B_{M1}y^{(k)} + b_{M1} \quad , \quad y^{(k+1)} = B_{M2}y^{(k)} + b_{M2}$$

Para que  $x^{(k+1)}$  converja a  $x$ :

$$\begin{aligned} x &= B_{M1}y + b_{M1} \quad , \quad x^{(k+1)} = B_{M1}y^{(k)} + b_{M1} \\ (x - x^{(k+1)}) &= B_{M1}(y - y^{(k)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= B_{M2}x + b_{M2} \quad , \quad y^{(k+1)} = B_{M2}x^{(k)} + b_{M2} \\ (y - y^{(k+1)}) &= B_{M2}(x - x^{(k)}) \end{aligned}$$

Asumimos que  $k = k - 1$  en  $(y - y^{(k+1)}) = B_{M2}(x - x^{(k)})$ , entonces

$$\begin{aligned}(y - y^{(k+1)}) &= B_{M2}(x - x^{(k)}) \\ (y - y^{(k)}) &= B_{M2}(x - x^{(k-1)})\end{aligned}$$

Si reemplazamos  $(y - y^{(k)})$  obtenido en  $(x - x^{(k+1)}) = B_{M1}(y - y^{(k)})$  obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(x - x^{(k+1)}) &= B_{M1}(\underbrace{y - y^{(k)}}_{B_{M2}(x - x^{(k-1)})}) \\ (x - x^{(k+1)}) &= B_{M1}(B_{M2}(x - x^{(k-1)})) \\ (x - x^{(k+1)}) &= B_{M1}(B_{M2}^2(x - x^{(k-2)})) \\ (x - x^{(k+1)}) &= B_{M1}(B_{M2}^3(x - x^{(k-3)})) \\ (x - x^{(k+1)}) &= B_{M1}(B_{M2}^4(x - x^{(k-4)})) \\ &\vdots \\ (x - x^{(k+1)}) &= B_{M1}(B_{M2}^k(x - x^{(k-k)})) \\ (x - x^{(k+1)}) &= B_{M1}(B_{M2}^k(x - x^{(0)}))\end{aligned}$$

Una condición suficiente para determinar la convergencia de  $x^{(k+1)}$  a  $x$  para cualquier valor de  $x^{(0)}$  es que  $B_{M2}^k$  converja. Para que  $B_{M2}^k$  converja se tiene que cumplir que  $\rho(B_{M2}) < 1 \rightarrow \rho(A_2^{-1}B) < 1$

Para que  $y^{(k+1)}$  converja a  $y$ . Se tiene

$$(x - x^{(k+1)}) = B_{M1}(y - y^{(k)})$$

y

$$(y - y^{(k+1)}) = B_{M2}(x - x^{(k)})$$

Asumimos que  $k = k - 1$  en la primera ecuación y luego reemplazamos en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}(x - x^{(k+1)}) &= B_{M1}(y - y^{(k)}) \\ (x - x^{(k)}) &= B_{M1}(y - y^{(k-1)})\end{aligned}$$

Reemplazamos  $(x - x^{(k)}) = B_{M1}(y - y^{(k-1)})$  en

$$\begin{aligned}(y - y^{(k+1)}) &= B_{M2}(x - x^{(k)}) \\ (y - y^{(k+1)}) &= B_{M2}(B_{M1}(y - y^{(k-1)}))\end{aligned}$$

Desarrollamos

$$\begin{aligned}
(y - y^{(k+1)}) &= B_{M2}B_{M1}(y - y^{(k-1)}) \\
(y - y^{(k+1)}) &= B_{M2}B_{M1}^2(y - y^{(k-2)}) \\
(y - y^{(k+1)}) &= B_{M2}B_{M1}^3(y - y^{(k-3)}) \\
(y - y^{(k+1)}) &= B_{M2}B_{M1}^4(y - y^{(k-4)}) \\
&\vdots \\
(y - y^{(k+1)}) &= B_{M2}B_{M1}^k(y - y^{(k-K)}) \\
(y - y^{(k+1)}) &= B_{M2}B_{M1}^k(y - y^{(0)})
\end{aligned}$$

Una condición suficiente para determinar la convergencia de  $y^{(k+1)}$  a  $y$  para cualquier valor de  $y^{(0)}$  es que  $B_{M1}^k$  converja. Para que  $B_{M1}^k$  converja se tiene que cumplir que  $\rho(B_{M1}) < 1$  y  $\rho(A_1^{-1}B) < 1$

## 4.7. Ejercicio 7

Considere el sistema lineal  $Ax = b$  con:

$$A = \begin{bmatrix} 62 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 50 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 58 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 66 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 54 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \end{bmatrix}$$

- **Verificar si los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel pueden ser aplicados para resolver el sistema.**

Como  $A$  no es diagonal dominante o simétrica definida positiva, entonces es necesario calcular el radio espectral de las matrices de iteración de Jacobi y Gauss-Seidel:

$$B_j = -D^{-1}(L + U) \Rightarrow \rho(B_j) = 0,9280 \quad (3)$$

$$B_{gs} = -(D + L)^{-1}U \Rightarrow \rho(B_{gs}) = 0,3066 \quad (4)$$

Como ambos radios espectrales son menores a 1, entonces el sistema converge con ambos métodos.

- **Verificar si el método estacionario de Richardson con parámetro óptimo puede ser aplicado con  $P = I$  y  $P = D$ , donde  $D$  es la parte diagonal de  $A$  y**

calcule los valores de  $\alpha_{opt}$  y  $\phi_{opt}$ .

$$R_p = I - P^{-1}A \Rightarrow R_{(\alpha_k)} = I - \alpha_k P^{-1}A \quad (5)$$

Para el método estacionario de Richardson:

$$(\alpha_k = \alpha) \Rightarrow R_\alpha = I - \alpha P^{-1}A \quad (6)$$

La iteración  $k + 1$  del sistema tiene la siguiente forma.

$$x^{k+1} = x^k + \alpha P^{-1}r^k \quad (7)$$

Sabiendo que  $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$  y  $P^{-1}A$  tiene autovalores reales positivos, es decir:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \quad (8)$$

Luego, el sistema converge si y solo si  $0 < \alpha < \lambda_1$  y el radio espectral de la matriz iterativa  $R_\alpha$  es el mínimo si  $\alpha = \alpha_{opt}$  con:

$$\rho_{opt} = \min(\rho_{R_\alpha}) = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \quad (9)$$

Caso 1:  $P = I$

$$P^{-1}A = I^{-1}A = A \Rightarrow \lambda(A) = \{110; 66,2; 58,1; 31,8; 23,7\} \quad (10)$$

$$\alpha_{opt} = 0,00149 \quad (11)$$

$$\rho_{opt} = 0,6452 \quad (12)$$

Los autovalores de A son reales positivos y  $\phi_{opt} < 1$ , por lo que el método puede ser aplicado.

Caso 2:  $P = D$

$$P^{-1}A = D^{-1}A \Rightarrow \lambda(D^{-1}A) = \{1,92; 1,12; 0,95; 0,577; 0,422\} \quad (13)$$

$$\alpha_{opt} = 0,8510 \quad (14)$$

$$\rho_{opt} = 0,0,6407 \quad (15)$$

Los autovalores de A son reales positivos y  $\phi_{opt} < 1$ , por lo que el método puede ser aplicado.

## 4.8. Ejercicio 8

Considere el sistema  $Ax = b$ :

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Analizar las propiedades de convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel aplicado al sistema de arriba en sus formas de punto y bloque (para un bloque de  $2 \times 2$  partición de A).

**Solución:**

Haciendo el método de Jacobi por bloques, tenemos:

$$X_i^{k+1} = A_{ii}^{-1}(B_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}X_j^k)$$

Haciendo el método de Gauss-Seidel por bloques, tenemos:

$$X_i^{k+1} = A_{ii}^{-1}(B_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}X_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}X_j^k)$$

Sabemos que la convergencia (por bloques) se sigue manteniendo, y que se analiza la convergencia de ambos métodos según la descomposición y pre condicionamiento aplicado al sistema.

**Gauss Seidel**

En el caso de Gauss Seidel, tenemos:  $x^{(k+1)} = -(L + D)^{-1}Ux^{(k)} + (L + D)^{-1}b$

Donde D es la diagonal de A, L es el triangulo inferior a la diagonal de A y U es el triangulo superior de A.

Tal que:  $L + D + U = A$

La convergencia se analiza según el radio espectral de la matriz M, definida por:

$x^{(k+1)} = Mx + c$ , donde  $M = -(L + D)^{-1}U$  y  $c = (L + D)^{-1}b$ .

Teniendo A y b como datos, calculamos M:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1,4 & -1,2 & -1 \\ 0 & 0,98 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0,056 & 0,688 & -0,3 \\ 0 & -0,0364 & -0,0472 & 0,77 \end{bmatrix}$$

Calculamos su radio espectral (máximo de los valores absolutos de la matriz M menores a 1).

$\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0,99690$ ,  $\lambda_3 = 0,83728$ ,  $\lambda_4 = 0,60382$ .

El radio espectral de Gauss Seidel para este sistema es:

$$\rho_g(M) = 0,99690 < 1$$

Vemos que si converge.

### Jacobi

En el caso de Jacobi, tenemos:  $x^{(k+1)} = -(D)^{-1}Rx^{(k)} + (D)^{-1}b$

Donde D es la diagonal de A, R es la matriz A menos la diagonal.

Tal que:  $D + R = A$

La convergencia se analiza según el radio espectral de la matriz M, definida por:

$x^{(k+1)} = Mx + c$ , donde  $M = -(D)^{-1}R$  y  $c = (D)^{-1}b$ .

Teniendo A y b como datos, calculamos M:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1,4 & -1,2 & -1 \\ -0,7 & 0 & -0,8 & -0,7 \\ -0,6 & -0,8 & 0 & -0,9 \\ -0,5 & -0,7 & -0,9 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos su radio espectral (máximo de los valores absolutos de la matriz M menores a 1).

$\lambda_1 = -2,47579$ ,  $\lambda_2 = 0,56220$ ,  $\lambda_3 = 0,99845$ ,  $\lambda_4 = 0,91514$ .

El radio espectral de Gauss Seidel para este sistema es:

$$\rho_j(M) = 0,99845 < 1$$

Vemos que si converge.

Y comparando los radios espectrales, tenemos que:

$$\rho_j^2(M) = \rho_{gs}(M) = 0,99690 < 1$$

Por lo tanto, Ambos métodos convergen y el más rápido es el Jacobi por bloques.

## 4.9. Ejercicio 11

Considerando el sistema lineal

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Escribe la función  $\Phi(x)$  y muestre una interpretación gráfica de la solución de dicho sistema lineal. Pruebe algunas iteraciones del Método del Gradiente después de probar su convergencia.

### Solución:

El Método del Gradiente converge para el caso debido a que es una matriz simétrica positiva. Esto es porque sus autovalores son positivos ( $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 7$ ).

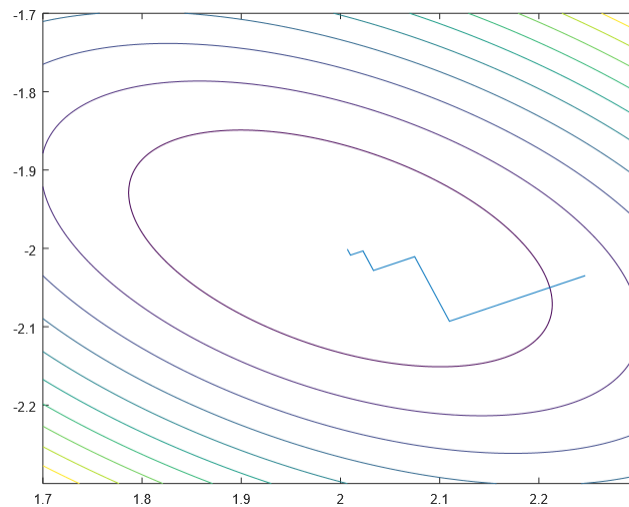


Iteración	$x$	$y$
0	15	-13
1	10.8548	-3.2465
2	5.9412	-5.3348
3	4.6845	-2.3779
4	3.1948	-3.0110
5	2.8138	-2.1146
6	2.3622	-2.3065
7	2.2467	-2.0347
8	2.1098	-2.0929
9	2.0748	-2.0105
10	2.0333	-2.0282
11	2.0227	-2.0032
12	2.0101	-2.0085
13	2.0069	-2.0010
14	2.0031	-2.0026

Considerando un valor inicial

$$x_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Podemos mostrar en la siguiente tabla los valores de los vectores en cada iteración



De acuerdo a la gráfica, el Método del Gradiente converge a la solución que está en  $(2, -2)$  y es el mínimos de la función cuadrática  $\Phi(x)$

Considerando el sistema lineal

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Escribe la función  $\Phi(x)$  y muestre una interpretación gráfica de la solución de dicho sistema lineal. Pruebe algunas iteraciones del Método del Gradiente después de probar su convergencia.

**Solución:**

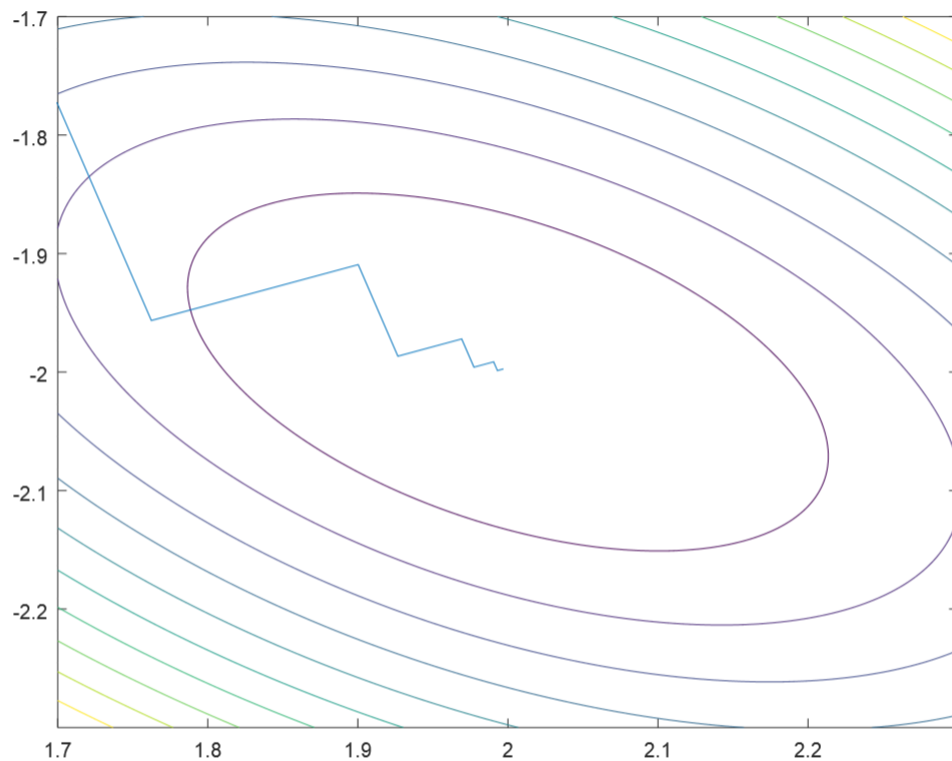
El Método del Gradiente converge para el caso debido a que es una matriz simétrica positiva. Esto es porque sus autovalores son positivos ( $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$ ).

Considerando un valor inicial

$$x_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Podemos mostrar en la siguiente tabla los valores de los vectores en cada iteración

Iteración	$x$	$y$
0	-9	8
1	-6.08562	-0.51897
2	-1.39448	1.08589
3	-0.49513	-1.54297
4	0.95250	-1.04773
5	1.23003	-1.85897
6	1.67675	-1.70614
7	1.76240	-1.95648
8	1.90025	-1.90932
9	1.92668	-1.98657
10	1.96922	-1.97202
11	1.97737	-1.99586
12	1.99050	-1.99136
13	1.99302	-1.99872
14	1.99707	-1.99734



De acuerdo a la gráfica, el Método del Gradiente converge a la solución que está en  $(2, -2)$  y es el mínimos de la función cuadrática  $\Phi(x)$

Considerando el sistema lineal

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Escribe la función  $\Phi(x)$  y muestre una interpretación gráfica de la solución de dicho sistema lineal. Pruebe algunas iteraciones del Método del Gradiente después de probar su convergencia.

### Solución:

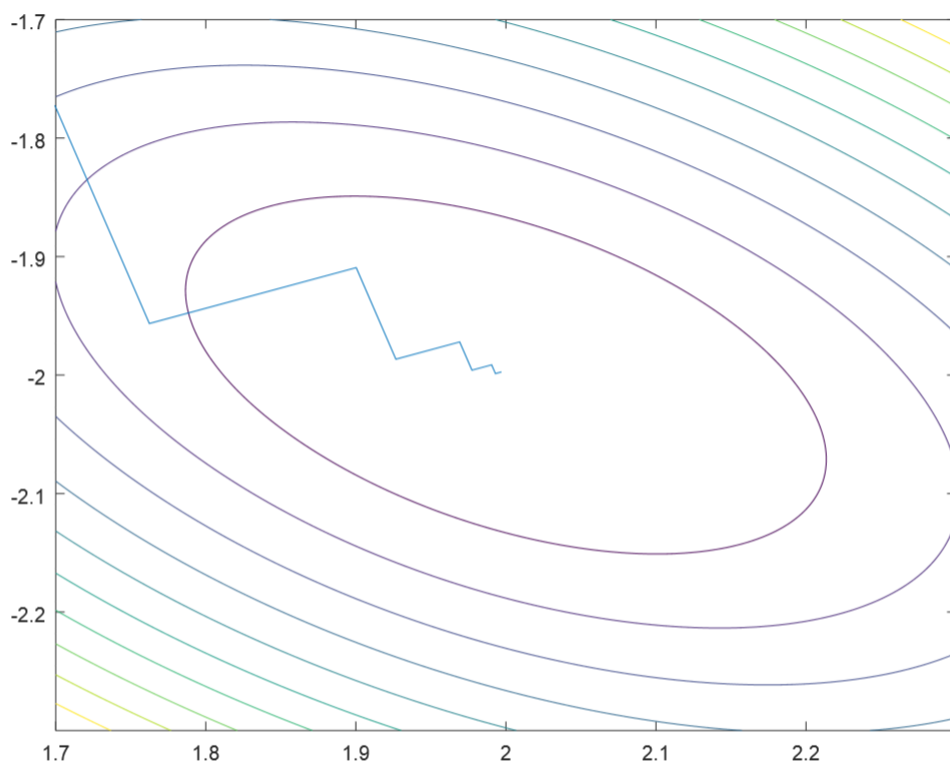
El Método del Gradiente converge para el caso debido a que es una matriz simétrica positiva. Esto es porque sus autovalores son positivos ( $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$ ).

Considerando un valor inicial

$$x_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Podemos mostrar en la siguiente tabla los valores de los vectores en cada iteración

Iteración	$x$	$y$
0	11	4
1	5.3233	-3.8601
2	2.3889	-1.7407
3	2.1436	-2.0804
4	2.0168	-1.9888
5	2.0062	-2.0035
6	2.0007	-1.9995
7	2.0003	-2.0002



De acuerdo a la gráfica, el Método del Gradiente converge a la solución que está en  $(2, -2)$  y es el mínimos de la función cuadrática  $\Phi(x)$

Considerando el sistema lineal

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Escribe la función  $\Phi(x)$  y muestre una interpretación gráfica de la solución de dicho sistema lineal. Pruebe algunas iteraciones del Método del Gradiente después de probar su

convergencia.

**Solución:**

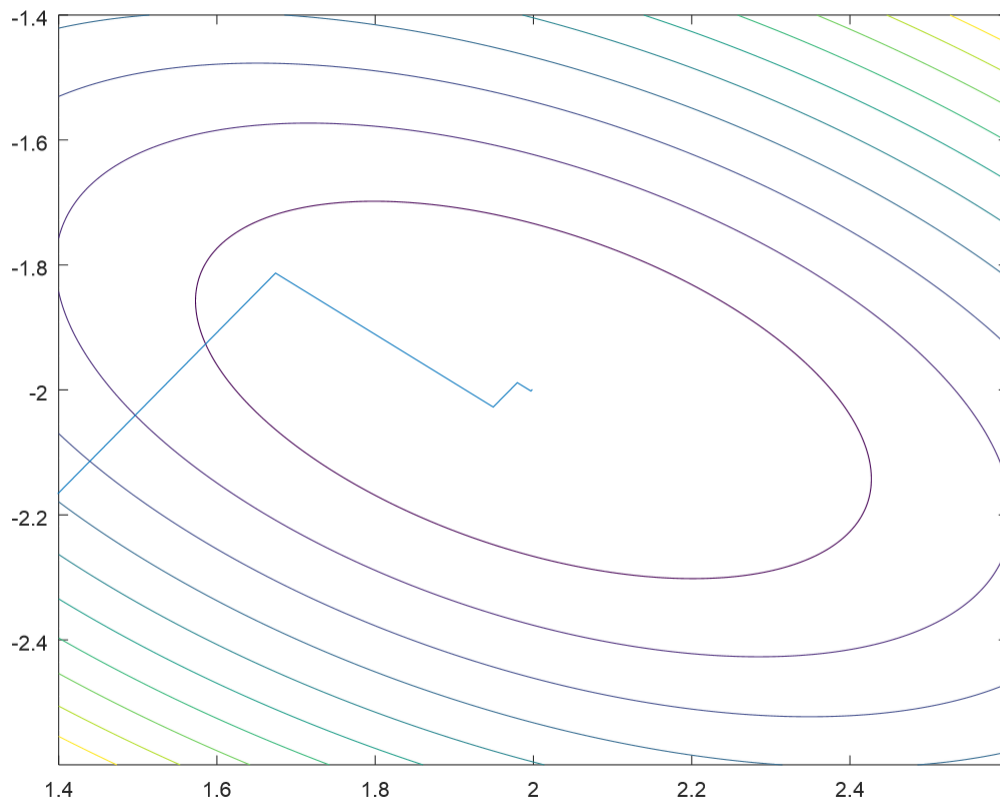
El Método del Gradiente converge para el caso debido a que es una matriz simétrica positiva. Esto es porque sus autovalores son positivos ( $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$ ).

Considerando un valor inicial

$$x_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Podemos mostrar en la siguiente tabla los valores de los vectores en cada iteración

Iteración	$x$	$y$
0	-11	-9
1	-3.2124	0.99158
2	1.1873	-2.43762
3	1.6741	-1.81298
4	1.9492	-2.02736
5	1.9796	-1.98831
6	1.9968	-2.00171
7	1.9987	-1.99927



De acuerdo a la gráfica, el Método del Gradiente converge a la solución que está en  $(2, -2)$  y es el mínimos de la función cuadrática  $\Phi(x)$

#### 4.10. Ejercicio 13

Muestre que el coeficiente  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  en el método de la gradiente conjugada puede ser escrita en la forma alternativa:

$$\alpha_k = \frac{\|r^{(K)}\|_2^2}{p^{(k)T}Ap^{(k)}}, \beta_k = \frac{\|r^{(k+1)}\|_2^2}{\|r^{(k)}\|_2^2}$$

##### Solución

Para  $\alpha_k = \frac{\|r^{(K)}\|_2^2}{p^{(k)T}Ap^{(k)}}$

Se sabe que:  $r^{k+1} = r^k - \alpha_k AP^k$ , por lo que:

$$AP^k = \frac{r^k - r^{k+1}}{\alpha_k} \dots (I)$$

$$(r^k)^T AP^k = \frac{(r^k)^T r^k - (r^k)^T r^{k+1}}{\alpha_k}$$

Como  $(r^k)^T r^{k+1}$  es el producto interno, entonces  $(r^k)^T r^{k+1} = 0$

$$(r^k)^T AP^k = \|r^k\|_2^2 \dots (II)$$

$$p^{k+1} = r^{k+1} - \beta_k P$$

$$(P^k)^T AP^k = (r^k - \beta_{k-1} P^{k-1})^T AP^k$$

$$(P^k)^T AP^k = ((r^k)^T - \beta_{k-1} (P^{k-1})^T) AP^k$$

$$(P^k)^T AP^k = (r^k)^T AP^k - \beta_{k-1} (P^{k-1})^T AP^k, (P^{k-1})^T P^T = 0$$

$$(P^k)^T AP^k = (r^k)^T AP^k \dots (III)$$

De II y III se tiene que:

$$(P^k)^T AP^k = \frac{\|r^k\|_2^2}{\alpha_k}$$

$$\alpha_k = \frac{\|r^k\|_2^2}{(P^k)^T AP^k}$$

Para  $\beta_k = \frac{\|r^{(k+1)}\|_2^2}{\|r^{(k)}\|_2^2}$

Partimos de I se tiene que:

$$(AP^k)^T = \frac{r^k - r^{k+1}}{\alpha_k} r^{k+1}$$

Despejando el producto interno:

$$(AP^k)^T r^{k+1} = \frac{\|r^{k+1}\|_2^2}{\alpha_k} \dots (IV)$$

Por definición se tiene:

$$\beta_k = \frac{(AP^k)^T r^{k+1}}{(AP^k)^T P^{k+1}}$$

Y del resultado de  $\alpha_k = \frac{\|r^{(K)}\|_2^2}{p^{(k)T}} Ap^{(k)}$  y de IV se tiene:

$$\beta_k = \frac{-\frac{\|r^{k+1}\|_2^2}{\alpha_k}}{-\frac{\|r^k\|_2^2}{\alpha_k}}$$

$$\beta_k = \frac{\|r^{k+1}\|_2^2}{\|r^k\|_2^2}$$

#### 4.11. Ejercicio 14

Probar la recurrencia siguiente, que se obtiene del método del gradiente conjugado:

$$Ar_k = -\frac{1}{\alpha_k} r_{k+1} + \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right) r_k +$$

Para poder obtener la recurrencia empecemos por la expresión recursiva de  $r_k$ :

$$r_{k+1} = r_k + \alpha_k Ap_k$$

De la expresión para la dirección conjugada de  $p_k$ :

$$p_k = r_k - \beta_k p_{k-1}$$

Reemplazando en la primera expresión tenemos que:

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A(r_k - \beta_{k-1} p_{k-1})$$

$$\alpha_k Ar_k = -r_{k+1} + r_k + \alpha_k \beta_{k-1} Ap_{k-1}$$

$$Ar_k = -\frac{1}{\alpha_k} r_{k+1} + \frac{1}{\alpha_k} r_k + \beta_{k-1} Ap_{k-1}$$

De la recurrencia para el residual podemos tener lo siguiente:

$$r_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1} Ap_{k-1}$$

$$Ap_{k-1} = \frac{r_{k-1} - r_k}{\alpha_{k-1}}$$

Reemplazando en la expresión anterior tenemos:

$$Ar_k = -\frac{1}{\alpha_k} r_{k+1} + \frac{1}{\alpha_k} r_k + \beta_{k-1} \left(\frac{r_{k-1} - r_k}{\alpha_{k-1}}\right)$$

Finalmente:

$$Ar_k = -\frac{1}{\alpha_k} r_{k+1} + \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right) r_k + \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}} r_{k-1}$$

## 5. James R. Schott

### 5.1. Ejercicio 8.79

Se ha visto en el Teorema 8.41 que  $\rho(A)$  es un valor singular de  $A$  si  $A$  es positiva. En este ejercicio, se usará la extensión de este resultado que dice que  $\rho(A)$  es un valor singular de  $A$  si  $A$  es no negativa. Para los siguientes enunciados asuma que  $A$  es una matriz no negativa de  $m \times m$ .

- Muestre que  $\rho(I_m + A) = 1 + \rho(A)$
- Muestre que si  $A^k > (0)$  para algún entero positivo  $k$ , entonces  $\rho(A)$  es un simple valor singular de  $A$
- Aplique b) en la matriz  $(I_m + A)$  para probar el Teorema 8.49; esto es, probar que para cualquier matriz no negativa irreducible  $A$ ,  $\rho(A)$  debe ser un simple valor singular.

**Solución:**

- Muestre que  $\rho(I_m + A) = 1 + \rho(A)$

Partimos de la ecuación que nos permite obtener los autovalores de una matriz. Denominaremos  $\lambda_1$  a los autovalores de esta matriz.

$$\det(A - \lambda_1 I) = 0$$

Definimos una segunda matriz  $B = A + I$ , y denominaremos a sus autovalores como  $\lambda_2$ .

$$\det(B - \lambda_2 I) = 0$$

$$\det(A + I - \lambda_2 I) = 0$$

$$\det(A - I(\lambda_2 - 1)) = 0$$

Si igualamos ambas expresiones, se tiene que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 - 1$$

Suponiendo que ambos  $\lambda$  ( $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ) representan los radios espectrales de las matrices  $A$  y  $I_m + A$  respectivamente, se concluye que:

$$\rho(A) = \rho(I_m + A) - 1$$



- Muestre que si  $A^k > (0)$  para algún entero positivo  $k$ , entonces  $\rho(A)$  es un simple valor singular de  $A$

Primero, partiendo del presente enunciado, que indica que  $A^k > (0)$ , se puede concluir que la matriz  $A$  es positiva, ya que para que una potencia de la matriz  $A$  sea positiva, cada componente de la matriz  $A$  debió ser positivo y diferente de cero. Por lo tanto, la matriz  $A$  no solo es no negativa (como lo indica el enunciado general), sino que es positiva.

Segundo, existe un Teorema llamado el Teorema de Perron, que demuestra mediante la relación que existe entre los autovalores y autovectores de una matriz positiva que, el radio espectral de una matriz positiva siempre tiene multiplicidad algebraica de 1, es decir, que existe . Por lo tanto, se puede concluir que  $\rho(A)$  es un autovalor simple.

■

## 5.2. Ejercicio 8.80

Considera cadena homogénea de *Markov* que tiene 3 estados y la matriz de transición de transición dado por:

$$P = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,25 & 0 \\ 0,50 & 0,50 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}$$

- Mostrar que  $P$  es primitiva.

Una matriz  $m \times m$  no negativa  $A$  se dice que es primitiva si existe un  $k$ , tal que  $A^k > 0$ , esto es,  $a_{ij} > 0 \forall i \& j$ . Para  $k = 2$ :

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,375 & 0,25 & 0,0625 \\ 0,50 & 0,4375 & 0,3125 \\ 0,125 & 0,3125 & 0,625 \end{bmatrix}$$

Ya que la matriz es  $P$  es no negativa, además existe un  $k = 2$  tal que  $P^2 = P^2$ :  $p_{ij}^* > 0 \forall i \& j$ , por tanto la matriz  $P$  es primitiva

- Determina la distribución de equilibrio, esto es, encuentra el vector  $\pi$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} p^{(t)} = \pi$

En general:

$$p^{(t)} = P^t p^{(0)}$$

Ya que  $p^{(t)} = P^{(t)} p^{(0)}$ , también puede ser expresado como:

$$p^{(t)} = P p^{(t-1)}$$

El sistema apunta al punto de equilibrio en donde las proporciones para los estados estan dados por las componentes de  $\pi$  y esta proporsion no cambia con el tiempo. Esto es:  $p^{(t)} = p^{(t-1)}$ , por tanto:

$$\pi = P\pi \quad \dots \quad (1)$$

Además ya que este punto representa la probabilidad de un conjunto, la suma de este es igual a 1. Esto es:

$$\pi'1_m = 1 \quad \dots \quad (2)$$

Hallando el autovalor  $\pi$  a partir de la ecuación (1):

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (2): (Las probabilidades deben sumar 1). Esto es:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

## 6. Ejercicios Adicionales

### 6.1. Ejercicio 1

Dado el sistema  $Ax = b$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

¿Es posible resolver el sistema por los métodos de Gauss-Seidel y Jacobi? en caso de ser factible halle la solución.

**Solución:**

Para saber si es posible resolver el sistema por los métodos mencionados se debe hallar el radio de convergencia de cada método:

$$B_J = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(B_J) = 1,0809 * 10^{-5}$$

y

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad \rho(B_{GS}) = 4,8284$$

De donde se observa que solo es posible resolver el sistema usando el método de Jacobi.

Entonces:

Siendo:

$$b_J = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que en la tercera iteración ya se alcanzó la solución:

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

## 6.2. Ejercicio 2

Si

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Para el sistema  $Ax = b$ :

- Use los métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR con valor de  $\omega = 1,4$ , escriba y ejecute un código para resolver el sistema lineal con cuatro decimales de precisión, compare el número de iteraciones en cada caso.
- Resuelva usando el método de SOR, con  $\omega = 1,1$ ;  $\omega = 1,3$ ;  $\omega = 1,8$ ; luego trace la gráfica del número de iteraciones para la convergencia contra los valores de  $\omega$ , ¿Qué valor da como resultado la convergencia más rápida?

**Solución:**

- Resolviendo el problema por el método de Jacobi:

Iteración	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0	0	0	0
1	-0.14286	0.00000	-0.75000	0.16667
2	-0.29762	0.23065	-0.74405	0.08929
3	-0.37351	0.24926	-0.85975	0.29563
4	-0.45697	0.39535	-0.83178	0.31405
5	-0.52085	0.43236	-0.88457	0.44393
6	-0.58136	0.52785	-0.87732	0.48110
7	-0.63187	0.56822	-0.90703	0.56613
8	-0.67771	0.63340	-0.90849	0.60493
9	-0.71693	0.67017	-0.92654	0.66342
10	-0.75198	0.71638	-0.93092	0.69800
11	-0.78229	0.74736	-0.94259	0.73976
12	-0.80917	0.78106	-0.94747	0.76857
13	-0.83254	0.80616	-0.95542	0.79919
14	-0.85318	0.83122	-0.95988	0.82238
15	-0.87119	0.85112	-0.96551	0.84523
16	-0.88705	0.87000	-0.96927	0.86356
17	-0.90091	0.88558	-0.97337	0.88080
18	-0.91310	0.89992	-0.97642	0.89513
19	-0.92378	0.91203	-0.97947	0.90824
20	-0.93315	0.92297	-0.98189	0.91937
21	-0.94136	0.93235	-0.98419	0.92938
22	-0.94857	0.94072	-0.98608	0.93799
23	-0.95489	0.94797	-0.98783	0.94566
24	-0.96044	0.95439	-0.98930	0.95231
25	-0.96530	0.95998	-0.99063	0.95819
26	-0.96956	0.96491	-0.99177	0.96331
27	-0.97330	0.96921	-0.99279	0.96783
28	-0.97659	0.97300	-0.99367	0.97178
29	-0.97946	0.97632	-0.99445	0.97525
30	-0.98199	0.97923	-0.99513	0.97829
31	-0.98420	0.98178	-0.99573	0.98096
32	-0.98614	0.98402	-0.99626	0.98330

Iteración	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
33	-0.98785	0.98599	-0.99672	0.98535
34	-0.98934	0.98771	-0.99712	0.98715
35	-0.99065	0.98922	-0.99747	0.98873
36	-0.99180	0.99054	-0.99778	0.99012
37	-0.99281	0.99171	-0.99806	0.99133
38	-0.99369	0.99273	-0.99830	0.99240
39	-0.99447	0.99362	-0.99851	0.99333
40	-0.99515	0.99440	-0.99869	0.99415
41	-0.99574	0.99509	-0.99885	0.99487
42	-0.99627	0.99570	-0.99899	0.99550
43	-0.99673	0.99622	-0.99912	0.99605
44	-0.99713	0.99669	-0.99922	0.99654
45	-0.99748	0.99710	-0.99932	0.99696
46	-0.99779	0.99745	-0.99940	0.99734
47	-0.99806	0.99777	-0.99948	0.99766
48	-0.99830	0.99804	-0.99954	0.99795
49	-0.99851	0.99828	-0.99960	0.99820
50	-0.99869	0.99849	-0.99965	0.99842
51	-0.99885	0.99868	-0.99969	0.99862
52	-0.99899	0.99884	-0.99973	0.99879
53	-0.99912	0.99898	-0.99976	0.99894
54	-0.99923	0.99911	-0.99979	0.99907
55	-0.99932	0.99922	-0.99982	0.99918
56	-0.99940	0.99931	-0.99984	0.99928
57	-0.99948	0.99940	-0.99986	0.99937
58	-0.99954	0.99947	-0.99988	0.99945
59	-0.99960	0.99954	-0.99989	0.99952
60	-0.99965	0.99959	-0.99990	0.99958
61	-0.99969	0.99964	-0.99992	0.99963
62	-0.99973	0.99969	-0.99993	0.99967
63	-0.99976	0.99973	-0.99994	0.99971
64	-0.99979	0.99976	-0.99994	0.99975
65	-0.99982	0.99979	-0.99995	0.99978
66	-0.99984	0.99982	-0.99996	0.99981

Resolviendo el problema por el método de Gauss-Seidel:

Iteración	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	-0.14286	0.05357	-0.79911	0.11682
2	-0.31335	0.27580	-0.86808	0.31030
3	-0.47373	0.44131	-0.90118	0.46859
4	-0.59461	0.56992	-0.92399	0.59082
5	-0.68791	0.66888	-0.94149	0.68497
6	-0.75972	0.74507	-0.95496	0.75746
7	-0.81501	0.80373	-0.96532	0.81327
8	-0.85758	0.84889	-0.97330	0.85624
9	-0.89035	0.88366	-0.97944	0.88932
10	-0.91558	0.91043	-0.98417	0.91479
11	-0.93501	0.93104	-0.98782	0.93439
12	-0.94996	0.94691	-0.99062	0.94949
13	-0.96148	0.95913	-0.99278	0.96111
14	-0.97034	0.96853	-0.99444	0.97006
15	-0.97717	0.97577	-0.99572	0.97695
16	-0.98242	0.98135	-0.99670	0.98225
17	-0.98646	0.98564	-0.99746	0.98634
18	-0.98958	0.98894	-0.99805	0.98948
19	-0.99198	0.99149	-0.99850	0.99190
20	-0.99382	0.99345	-0.99884	0.99377
21	-0.99524	0.99495	-0.99911	0.99520
22	-0.99634	0.99612	-0.99931	0.99630
23	-0.99718	0.99701	-0.99947	0.99715
24	-0.99783	0.99770	-0.99959	0.99781
25	-0.99833	0.99823	-0.99969	0.99831
26	-0.99871	0.99864	-0.99976	0.99870
27	-0.99901	0.99895	-0.99981	0.99900
28	-0.99924	0.99919	-0.99986	0.99923
29	-0.99941	0.99938	-0.99989	0.99941
30	-0.99955	0.99952	-0.99992	0.99954
31	-0.99965	0.99963	-0.99993	0.99965
32	-0.99973	0.99972	-0.99995	0.99973
33	-0.99979	0.99978	-0.99996	0.99979
34	-0.99984	0.99983	-0.99997	0.99984
35	-0.99988	0.99987	-0.99998	0.99988
36	-0.99991	0.99990	-0.99998	0.99990
37	-0.99993	0.99992	-0.99999	0.99993

Resolviendo el problema por el método SOR con  $\omega = 1,4$ :

Iteración	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0	0	0	0
1	-0.200000	0.105000	-1.156750	0.154758
2	-0.476253	0.518795	-0.881402	0.672230
3	-0.765948	0.819411	-1.017035	0.849359
4	-0.928418	0.932188	-0.997122	0.964231
5	-0.973062	0.987441	-0.999846	0.990051
6	-0.999229	0.997628	-1.002444	1.000836
7	-0.999708	1.001808	-0.999261	1.001389
8	-1.001610	1.000965	-1.000711	1.000930
9	-1.000449	1.000625	-0.999766	1.000476
10	-1.000339	1.000220	-1.000123	1.000145
11	-1.000079	1.000076	-0.999955	1.000061
zz 12	-1.000029	1.000019	-1.000014	1.000004
13	-1.000004	1.000000	-0.999994	1.000002

- Hacemos uso del método SOR con  $\omega = 1,1$  (convergencia con 68 iteraciones);  $\omega = 1,3$  (convergencia con 38 iteraciones);  $\omega = 1,8$  (convergencia con 110 iteraciones).

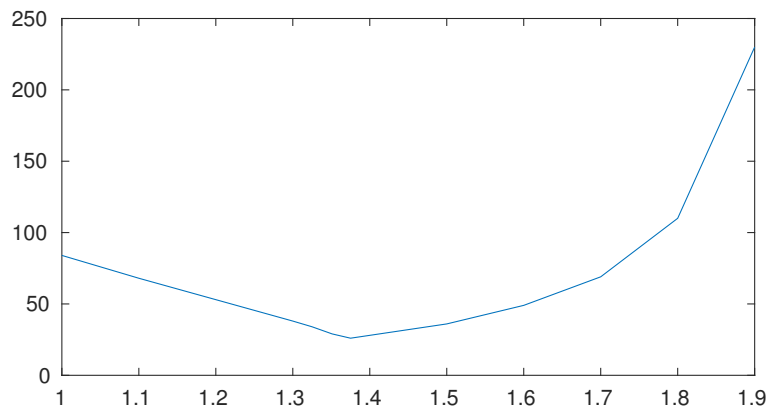


Figura 14: Número de iteración necesarios para alcanzar convergencia al usar el método SOR, con respecto al valor  $\omega$ .