Universidad Católica San pablo

Matemática para la Computación

Lista de Ejercicios Nro.2

Entregado por:
Choqueluque Roman, David
Flores Benites, Victor
Moreno Vera, Felipe Adrian
Palomino Paucar, Daniel
Ramos Cooper, Solange

Profesor:
Sergio Aquise Escobedo

24 de julio de 2018

1. Biswa Datta: secciones 5.2 y 5.3

1.1. Ejercicio 1

1. Mostrar que una matriz triangular inferior elemental tiene la forma:

$$E = I + m_k e_k^T$$

donde $m_k = (0, 0, ..., 0, m_{k+1,k}, ..., m_{n,k})^T$

Solución:

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$

$$a_1 \neq 0$$

tomamos también que $e_i^T m_k = 0$ para $i = 1, 2, ..., k$ Esto podemos ver de la siguiente matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & & 0 & 1 & ... & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & m_{k+1,k} & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & m_{n,k} & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Decimos que existe una matriz elementaria E tal que E_a es múltiplo de e_1

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ -\frac{a_2}{a_1} & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -\frac{a_n}{a_1} & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene la forma de una matriz triangular inferior tal que:

$E_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

De esta forma si juntamos todos los $m_k E_k^T, para k = 1...n$, obtenemos

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ m_{1,0} & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ m_{2,0} & m_{2,1} & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 1 & ... & & ... \\ ... & ... & ... & ... & m_{k+1,k} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ m_{n,0} & m_{n,1} & m_{n,2} & ... & m_{n,k} & ... & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Tiene la forma matriz triangular inferior.

2. Mostrar que la inversa de E en (a) es dada por:

$$E^{-1} = I - m_k e_k^T$$

Si suponemos que

$$E^{-1} = I - m_k e_k^T$$

y

$$E = I + m_k e_k^T$$

, por tanto

$$E * E^{-1} = I$$

$$\begin{aligned} E * E^{-1} &= I \\ (I + m_k e_k^T) * (I - m_k e_k^T) &= I \\ I * I + I * (m_k e_k^T) - i * (m_k e_k^T) - (m_k e_k^T) * (m_k e_k^T) &= I \\ I - (m_k e_k^T) * (m_k e_k^T) &= I \\ -(m_k e_k^T) * (m_k e_k^T) &= I - I \\ -(m_k e_k^T) * (m_k e_k^T) &= 0 \end{aligned}$$

1.2. Ejercicio 4

Sean A una matriz simétrica definida positiva. Al finalizar el primer paso de la factorización LU de A tenemos:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ . & & & \\ . & & A' & \\ . & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Pruebe que $A^{'}$ es simétrica y definida positiva. Entonces muestre que la factorización LU de una matriz simétrica definida positiva usando eliminación Gaussiana sin pivoteo siempre existe y es única.

Solución:

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matriz simétrica y definida positiva y

$$m_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ ... \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

siendo $M_1 = I - m_1 e_1^t$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{-a_{n1}}{a_{11}} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A_1 = M_1 * A$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{-a_{n1}}{a_{11}} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ . & & & \\ . & & A^{'} & \\ . & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Operando:

$$A^{'} = \begin{pmatrix} \frac{-a_{21}a_{12}}{a_{11}} + a_{22} & \frac{-a_{21}a_{13}}{a_{11}} + a_{23} & ... & \frac{-a_{21}a_{1n}}{a_{11}} + a_{2n} \\ \frac{-a_{31}a_{12}}{a_{11}} + a_{32} & \frac{-a_{31}a_{13}}{a_{11}} + a_{33} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{-a_{n1}a_{12}}{a_{11}} + a_{n2} & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Pero dado que A era simétrica y definida positiva, entonces $a_{ij} = a_{ji}$, por lo tanto del cálculo anterior se demuestra que $A^{'}$ también es simétrica y definida positiva.

1.3. Ejercicio 6

Asumiendo que la factorización LU de A existe, probar que:

1. A puede ser escrito en la forma

$$A = LDU_1$$

donde D es una matriz diagonal y L, U_1 son matrices triangular inferior y superior respectivamente.

Solución

Creamos una matriz D diagonal formado por los elementos de la diagonal de la matriz U, tal que $d_{ii} = u_{ii} \forall i \in 1, \ldots, n$. Así $A = LU = L(DD^{-1})U = LD(D^{-1}U)$, donde D^{-1} es una matriz diagonal tal que $d_{ii}^{-1} = \frac{1}{d_i i^{-1}}$ además se sabe que el producto de una matriz diagonal por una triangular superior sigue siendo una matriz triangular superior. Luego tenemos una nueva matriz U_1 denotado por:

$$U_1 = D^{-1}U$$

Reemplazando U con U_1:

$$A = LDU_1$$

Visualmente:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}, D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d_{12}}{d_{11}} & \frac{d_{13}}{d_{11}} & \ldots & \frac{d_{1n}}{d_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{d_{23}}{d_{22}} & \ldots & \frac{d_{2n}}{d_{22}} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Si A es simétrico luego:

   $$A = LDL^T$$

   Solución
   Usando la factorización de a) tenemos que $A = LDU_1$ si le aplicamos la transpuesta a ambos lados y tenemos:

   $$A^T = (LDU_1)^T$$
   $$A^T = U_1^T DL^T$$

   Como A es simétrica además que $-m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = -m_{12}$ luego tenemos que:

   $$A = LDL^T$$

3. Si A es simétrico y definido positivo, luego

   $$A = HH^T$$

   donde H es una matriz triangular inferior con entradas diagonales positivas (conocido como la *descomposición de Cholevsky*)

   Solución

   Definición Si x es un autovector de A luego $x \neq 0$ y $Ax = \lambda X$. En este caso $x^T Ax = \lambda x^T x$. Si $\lambda > 0$ tenemos que $x^T Ax > 0$. Luego sabemos que una matriz es positiva definida si $x^T Ax > 0$ para todos los vectores $x \neq 0$.

   Del problema (b) tenemos la matriz $A = LDL^T$, la cual la podemos reescribir como $D = L^{-1}AL^{-1}$. La matriz D por la definición anterior será una nueva matriz definida positiva. Así los elementos de la matriz diagonal de la matriz D serán positivos y de la forma $d_{ii} > 0 \forall i = 1, \ldots, n$.

   Luego creamos una matriz D', tal que $D' = diag(\sqrt{d_1}, \ldots \sqrt{d_n})$ y denotamos $H = LD'$. Así:

   $$\begin{aligned} HH^T &= (LD')(LD')^T \\ &= (LD')(D')^T L^T \\ &= L(D'D'^T)L^T \\ &= LDL^T \end{aligned}$$

1.4. Ejercicio 7

Suponiendo que exista la factorización LU de A, desarrolle un algoritmo para calcular U por filas y L por columnas directamente de la ecuación:

$$A = LU$$

Esto se conoce como reducción de Doolittle.
Solución:
Para cada $k = 1, 2, ..., n$:

$$u_{k,m} = a_{k,m} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j} u_{j,m}$$

$$l_{i,k} = \frac{(a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j} u_{j,k})}{u_{kk}}$$

El siguiente ejemplo nos permitirá verificar el algoritmo basado en el metodo de Doolittle; sea:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Para $k = 1$, tenemos:

$$u_{1,1} = a_{1,1} - \sum_{j=1}^{0} l_{1,j} u_{j,1} = a_{1,1} \quad (m = 1)$$

$$u_{1,2} = a_{1,2} - \sum_{j=1}^{0} l_{1,j} u_{j,2} = a_{1,2} \quad (m = 2)$$

$$u_{1,3} = a_{1,3} - \sum_{j=1}^{0} l_{1,j} u_{j,3} = a_{1,3} \quad (m = 3)$$

$$l_{1,1} = 1$$

$$l_{2,1} = \frac{a_{2,1} - \sum_{j=1}^{0} l_{2,j} u_{j,1}}{u_{1,1}} = \frac{a_{2,1}}{u_{1,1}} \quad (i = 2)$$

$$l_{3,1} = \frac{a_{3,1} - \sum_{j=1}^{0} l_{3,j} u_{j,1}}{u_{1,1}} = \frac{a_{3,1}}{u_{1,1}} \quad (i = 3)$$

Para $k = 2$, tenemos:

$$u_{2,2} = a_{2,2} - \sum_{j=1}^{1} l_{2,j} u_{j,2} = a_{2,2} - l_{2,1} u_{1,2} \quad (m = 2)$$

$$u_{2,3} = a_{2,3} - \sum_{j=1}^{1} l_{2,j}u_{j,3} = a_{2,3} - l_{2,1}u_{1,3} \quad (m=3)$$

$$l_{2,2} = 1$$

$$l_{3,2} = \frac{a_{3,2} - \sum_{j=1}^{1} l_{3,j}u_{j,2}}{u_{2,2}} = \frac{a_{3,2} - l_{3,1}u_{1,2}}{u_{2,2}}$$

Para $k=3$, tenemos:

$$u_{3,3} = a_{3,3} - \sum_{j=1}^{2} l_{3,j}u_{j,3} = a_{3,3} - l_{3,1}u_{1,3} - l_{3,2}u_{2,3} \quad (m=3)$$

$$l_{3,3} = 1$$

El algoritmo termina en este punto.
Obtenemos las siguientes ecuaciones para las entradas en U:

$$u_{1,1} = a_{1,1}$$

$$u_{1,2} = a_{1,2}$$

$$u_{1,3} = a_{1,3}$$

$$u_{2,2} = a_{2,2} - l_{2,1}u_{1,2}$$

$$u_{2,3} = a_{2,3} - l_{2,1}u_{1,3}$$

$$u_{3,3} = a_{3,3} - l_{3,1}u_{1,3} - l_{3,2}u_{2,3}$$

Y obtenemos las siguientes ecuaciones para las entradas en U:

$$l_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{u_{1,1}}$$

$$l_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{u_{1,1}}$$

$$l_{3,2} = \frac{a_{3,2} - l_{3,1}u_{1,2}}{u_{2,2}}$$

Además, $l_{1,1} = l_{2,2} = l_{3,3} = 1$

1.5. Ejercicio 8

Desarrollar un algoritmo que calcule la factorización

$$A = LU$$

donde U es la unidad triangular superior y L es triangular inferior. Se conoce como Cout reduction. Consejo:Derive el algorimo de la ecuación A= LU
Solución:

Teniendo en cuenta que A se puede factorizar como el producto de una matriz triangular inferior L con una matriz triangular superior U.

$$A = LU$$

En este caso, el sistema de ecuaciones da: $Ax = B$ Entonces remplazandolo tenemos:

$$LUx = b$$

Si denominamos z a la matriz columna de n filas reultado del producto Ux, tenemos que la ecuación $LUx = b$ se puede escribir del siguiente modo:

$$Lz = b$$

A partir de las ecuaciones $LUx = b$ y $Lz = b$ es posible plantear un algoritmo para resolver el sistema de ecuaciones empleando dos etapas: - Primero obtenemos z aplicando el algoritmo de sustitución progresiva en la ecuación $Lz = b$
- Posteriormente obtenemos los valores de x aplicando el algoritmo de sustitución regresiva a la ecuación $Ux = z$
El análisis anterior nos muestra lo fácil que es resolver estos dos sistemas de ecuaciones triangulares y lo útil que resultaría disponer de un método que nos permita llevar a cabo la factorización $A = LU$. si disponemos de una matriz a de mxn, estamos interesados en encontrar aquellas matrices:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & ... & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & ... & 0 \\ : & : & : & : & : \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & ... & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & ... & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & ... & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & ... & u_{3n} \\ : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & 0 & ... & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Tales que cumplan la ecuación $A = LU$. cuando esto es posible decimos que A tien una descomposición LU. Se puede ver que la ecuación anterior no determina de forma única a L y a U. Para cada i podemos asignar un valor distinto de cero a l_{ii} o u_{ii} (aunque no ambos). Por ejemplo, una elección simple es fijar $l_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, ..., n$ haciendo de esto modo que L sea una matriz triangular inferior unitaria. Otra elección es hacer U una matriz triangular superior unitaria (tomando $U_{ii} = 1$ para cada i).
Para deducir un algoritmo que nos permita la factorización LU de A partiremos de la fórmula para la multiplicación de matrices:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} l_{is}u_{sj} = \sum_{s=1}^{min(i,j)} l_{is}u_{sj}$$

En donde nos hemos valido del hecho de que $l_{is} = 0$ para $s > i$ y $u_{sj} = 0$ para $s > j$. En este proceso, cada paso determina una nueva fila de U y una nueva columna de L. En el paso k, podemos suponer que ya se calcularon las filas $1, 2, ..., k-1$ de U, al igual que las columnas $1, 2, ..., k-1$ de L. Haciendo $i = j = k$ en la ecuación aterior obtenemos:

$$a_{kk} = l_{kk}u_{kk} \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}$$

Si especificamos una valor para l_{kk} (o para u_{kk}), a partir de la ecuación anterior es posible determinar un valor para el otro término. Conocidas u_{kk} y l_{kk} y apartir de la ecuación $a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} l_{is}u_{sj} = \sum_{s=1}^{min(i,j)} l_{is}u_{sj}$ podemos escribir las expresiones para la k-ésima fila $(i = k)$ y para la k-ésima columna $(j = k)$, respectivamente:

$$a_{kj} = l_{kk}u_{kj} + \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj}(k + 1 \leq j \leq n)$$

$$a_{ik} = l_{ik}u_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk}(k + 1 \leq i \leq n)$$

Esta última ecuación se puede emplear para encontrar los elementos U_{kj} y l_{ik} el algoritmo basado en el análisis anterior se denomina factorización de Doolittle cuando se toman los términos $l_{ii} = 1$ para $1 \leq i \leq n$ (L triangular inferior unitaria) y factorización de Crout cuando se toman los términos $u_{ii} = 1$ (U triangular superior unitaria).
A continuación la implementación del algoritmo:

input $n, (a_{ij})$
  $n, (a_{ij})$
  for k=1,2,...,n **do**
    Especificar un valor para l_{kk} o u_{kk}
    Calcular el otro término mediante:
    $l_{kk}u_{kk} = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}$
    for $j = k + 1, k + 2, ..., n$ **do**
      $u_{kj} \longleftarrow ((a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk})/l_{kk}$
    end for
  end for
  output $(l_{ij}), (u_{ij})$

1.6. Ejercicio 9

Compare las reducciones de Dolittle y Crout con la eliminacion Gausiana con respecto a flop count, requerimientos de almacenamiento y posibilidad de acumulación de productos internos in double precision

Solución

Si definimos cada punto en cuestión:

- Flops: Numero de operaciones de multiplicación y división que representan el esfuerzo numérico.
- Requerimientos de almacenamiento: Cantidad de almacenamiento necesario para realizar cálculos durante la ejecución del método.
- Acumulación de productos internos en precisión doble: Técnica para minimizar la propagación del error.

Eliminación Gaussiana. El numero de flops del algoritmo es:

- Bucle interno: Çonvertir en cero los elementos abajo del pivote"

$$\sum_{j=k+1}^{n} 1 = n - (k+1) \approx n - k$$

- Bucle intermedio: 'Calcular los multiplicadores de cada fila'

$$\sum_{j=k+1}^{n} 2 + (\text{flops del bucle interno}) = \sum_{j=k+1}^{n} 2 + (n-k) = (2+n-k)(n-k)$$

$$= (n^2 + 2n) - 2(n+1)k + k^2$$

- Bucle exterior:

$$\sum_{k=1}^{n-1} n^2 + 2n, 2(n+1)k + k^2$$

$$= (n^2 + 2n) \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2(n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{n^3}{3} + O(n^3)$$

En cuanto a los requerimientos de almacenamiento, el método sobrescribe en la misma matriz nxn los valores obtenidos. Por lo que el método solo necesita almacenar una matriz de tamaño nxn durante su ejecución.
Reduccion Dolittle: Este método es una forma alternativa para descomponer una matriz en las matrices LU sin tener que utilizar eliminación Gaussiana.
Sea la matriz A_{nxn}:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Asumimos que existen dos matrices L y U tal que:

$$A = LU$$

y las matrices L y U son de la forma:

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & l_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ l_{1,1} & l_{n,2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

El método de Dolittle calcula los valores $u_{i,j}$ y $l_{i,j}$ con el siguiente algoritmo:

```
given A
output L, U

for k = 1...n
   ℓ_kk = 1
   for j = k...n
         u_kj = a_kj − Σ_{i=1}^{k−1} ℓ_ki u_ij
   end
   for j = k+1...n
         ℓ_jk = (a_jk − Σ_{i=1}^{k−1} ℓ_ji u_ik) / u_kk
   end
end
```

Si analizamos el algoritmo anterior:

- Para el primer bucle (linea 3):

$$\sum_{j=k}^{n}\sum_{i=1}^{k-1} 1 = \sum_{j=k}^{n}(k-1) = (k-1)(n-k)$$

- Para el segundo bucle interno (linea 9):

$$\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{i=1}^{k-1} 1 = \sum_{j=k+1}^{n}(k-1)$$
$$= (n-k-1)(k-1)$$

- Para el bucle externo:

$$\sum_{k=1}^{n} = (k-1)(n-k) + (n-k-1)(k-1) = \sum_{k=1}^{n} 1 + k - 2k^2 - 2n + 2kn$$

Entonces el numero total de FLOPS seria:

$$= (7n)/6 - (3n^2)/2 + n^3/3$$

En cuanto a los requerimientos de almacenamiento de este método, es necesario que durante todo el proceso de calculo se mantengan 3 matrices de tamaño nxn que corresponden a las matrices: A, L y U.
Método de Crout:
Este metodo es muy similar al método de Dolittle con la diferencia de que Crout retorna la descomposición LU de la matriz de la forma:

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & l_{1,2} & ... & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & ... & u_{2,n} \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{2,1} & 1 & ... & 0 \\ ... & & & \\ l_{1,1} & l_{n,2} & ... & 1 \end{bmatrix}$$

mientras que Crout retorna:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & l_{1,2} & ... & u_{1,n} \\ 0 & 1 & ... & u_{2,n} \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & ... & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & ... & 0 \\ ... & & & \\ l_{1,1} & l_{n,2} & ... & l_{n,n} \end{bmatrix}$$

El conteo de flops del algoritmo de Crout es muy similar al metodo de Dolittle. Es decir $O(n^3/3)$. En cuanto a los requerimientos de almacenamiento. Es necesario mantener 3 matrices nxn que corresponden a las matrices A, L y U.
Por lo tanto al comparar los 3 métodos tendríamos que:

- Flops: Los 3 metodos realizan una cantidad total de FLOPS parecidas de orden $O(n^3/3)$.
- Requerimientos de almacenamiento: La eliminacion de Gauss utiliza la matriz original nxn. Tanto Dolittle como Crout utilizan 2 matrices nxn que corresponden a las matrices L y U, ademas de la matriz original.
- Acumulacion de productos internos en precision doble: Crout permite la acumulacion de productos internos en doble precision. Gauss no permite esto

1.7. Ejercicio 13

(a) Sea A de orden mxn y sea $r = min\{m-1, n\}$, desarrolle un algoritmo para construir las matrices elementales $E_1, \ldots, E_r$, tal que:

$$E_r, E_{r-1}, \ldots E_2, E_1 A$$

es una matriz trapezoidal superior U. El algoritmo deberia sobreescribir A con U.

Solución:
El algoritmo que se desarrollará es muy similar al de una eliminación Gausianna sin pivoteo, ya que este proceso puede ser extendido fácilmente a una matriz mxn para calcular la factorización LU, la diferencia está en el calculo de pasos. En este caso tomaremos el $k = min\{m-1, n\}$ así, el algoritmo trapezoidal sobrescribe el trapecio superior de A incluyendo la diagonal con U. Las entradas de A sobre la diagonal son sobrescritas con multiplicadores que se necesitan para calcular L.

para $k = 1, 2, ... \min\{m-1, n\}$ hacer

$$a_{ik} = m_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}(i = k+1, k+2, \ldots, n)$$

para la actualización tenemos

$$a_{ij} = a_{ij} + m_{ik}a_{kj}(i = k+1, \ldots, nj = k+1, \ldots, n)$$

para formar la matriz L solo tenemos que recorrer el mismo A y llenar con los multiplicadores y completar con ceros los demas valores. de lo anterior se puede deducir explícitamente la matriz L .

$$a_{ik} = m_{ik}$$

(b) Mostrar que el algoritmo requiere $\frac{n^3}{3}$ flops.

Solución:
El **numero de operaciones punto flotante** se obteiene de manera similar que en el análisis del algoritmo de triangulación, se muestra que requiere $\frac{r^3}{3}$, ya que en el primer paso calculamos $min = \{m-1, n\}$,si m-1 es el mínimo, se tendría $((m-1)-1)$ multiplicadores y $((n-1)-1)^2$ actualizaciones en A, cada multiplicador requiere 1 flop y cada actualización también requiere un flop, asi en el primer paso , requerimos $((m-1)-1)^2 + (m-1-1) = (m-2)^2 + (m-2)$, pero si n es el mínimo entonces se tendría $(n-1)^2 + (n-1)$ flops. De igual manera podemos analizar para el paso $2, 3, \ldots$ y de forma general para k pasos se requiere $(n-k) + n - k$ flops. De una manera más formal, se tiene:

Sea tf el número total de flops:

$$\begin{aligned} tf &= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \left[\frac{n^3}{3} + O(n^2)\right] \end{aligned}$$

(c) Aplicar el algoritmo a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad m = 3 \qquad n = 2$$

Solución:
lo anterior tenemos que el algoritmo, tiene $k = min(3,2) = 2$ numero de pasos.

paso 1 los multiplicadores son $m_{21} = -4 \qquad m_{31} = -6.$

$$\begin{aligned} a_{22} = a_{22}^{(1)} &= a_{22} + m_{21}a_{12} = -3 \\ a_{32} = a_{32}^{(1)} &= a_{32} + m_{31}a_{13} = -5 \\ A = A^{(1)} &\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

paso 2 los multiplicadores son $m_{32} = \frac{5}{3}, \qquad a_{32} = a_{32}^{(2)} = 0$

$$A = A^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos notar que **U** en este caso es la trapezoidal superior mas bien , así se obtiene la la trapezoidal superior L de la siguiente forma:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

verificamos que

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = A$$

(a) Sea A de orden mxn y sea $r = min\{m-1, n\}$, desarrolle un algoritmo para construir las matrices elementales $E_1, \ldots, E_r$, tal que:

$$E_r, E_{r-1}, \ldots E_2, E_1 A$$

es una matriz trapezoidal superior U. El algoritmo deberia sobreescribir A con U.

Solución:

El algoritmo que se desarrollará es muy similar al de una eliminación Gausianna sin pivoteo, ya que este proceso puede ser extendido fácilmente a una matriz mxn para calcular la factorización LU, la diferencia está en el calculo de pasos. En este caso tomaremos el $k = min\{m-1, n\}$ así, el algoritmo trapezoidal sobrescribe el trapecio superior de A incluyendo la diagonal con U. Las entradas de A sobre la diagonal son sobrescritas con multiplicadores que se necesitan para calcular L.

para $k = 1, 2, ... \min\{m-1, n\}$ hacer

$$a_{ik} = m_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}(i = k+1, k+2, \ldots, n)$$

para la actualización tenemos

$$a_{ij} = a_{ij} + m_{ik}a_{kj}(i = k+1, \ldots, nj = k+1, \ldots, n)$$

para formar la matriz L solo tenemos que recorrer el mismo A y llenar con los multiplicadores y completar con ceros los demas valores. de lo anterior se puede deducir explícitamente la matriz L .

$$a_{ik} = m_{ik}$$

(b) Mostrar que el algoritmo requiere $\frac{n^3}{3}$ flops.

Solución:

El **numero de operaciones punto flotante** se obteiene de manera similar que en el análisis del algoritmo de triangulación, se muestra que requiere $\frac{r^3}{3}$, ya que en el primer paso calculamos $min = \{m-1, n\}$,si m-1 es el mínimo, se tendría $((m-1)-1)$ multiplicadores y $((n-1)-1)^2$ actualizaciones en A, cada multiplicador requiere 1 flop y cada actualización también requiere un flop, asi en el primer paso , requerimos $((m-1)-1)^2 + (m-1-1) = (m-2)^2 + (m-2)$, pero si n es el mínimo entonces se tendría $(n-1)^2 + (n-1)$ flops. De igual manera podemos analizar para el paso $2, 3, \ldots$ y de forma general para k pasos se requiere $(n-k) + n - k$ flops. De una manera más formal, se tiene:

Sea tf el número total de flops:

$$\begin{aligned} tf &= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \left[\frac{n^3}{3} + O(n^2)\right] \end{aligned}$$

(c) Aplicar el algoritmo a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad m = 3 \qquad n = 2$$

Solución:
lo anterior tenemos que el algoritmo, tiene $k = min(3,2) = 2$ numero de pasos.

paso 1 los multiplicadores son $m_{21} = -4 \qquad m_{31} = -6.$

$$\begin{aligned} a_{22} = a_{22}^{(1)} &= a_{22} + m_{21}a_{12} = -3 \\ a_{32} = a_{32}^{(1)} &= a_{32} + m_{31}a_{13} = -5 \\ A = A^{(1)} &\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

paso 2 los multiplicadores son $m_{32} = \frac{5}{3}, \qquad a_{32} = a_{32}^{(2)} = 0$

$$A = A^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos notar que **U** en este caso es la trapezoidal superior mas bien , así se obtiene la la trapezoidal superior L de la siguiente forma:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

verificamos que

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = A$$

1.8. Ejercicio 16

Pruebe que la matriz L en las factorizaciones PA=LU y PAQ=LU obtenidas mediante eliminación Gaussiana con pivoteo parcial y total respectivamente es una triangular inferior unitaria.

Solución:

Para ambos casos (pivoteo parcial y total) la matriz L se define como:

$$L = P_{n-1}^{-1}.P_{n-2}^{-1}...P_3^{-1}.P_2^{-1}.L_1^{-1}.P_2.L_2^{-1}.P_3.L_3^{-1}...P_{n-2}.L_{n-2}^{-1}.P_{n-1}.L_{n-1}^{-1} \quad ...(1)$$

Se sabe además que para cada paso en la eliminación Gaussiana la matriz L_i:

$$L_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -a_{i+1,i}^i/a_{i,i}^i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_{n,i}^i/a_{i,i}^i & \dots & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{i+1,i}^i/a_{i,i}^i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,i}^i/a_{i,i}^i & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

Dado que solo se desea demostrar que la matriz L es triangular inferior unitaria se procede a realizar un análisis inductivo analizando la evolución de L para cada paso del proceso, según lo cual a partir de (1) definimos la matriz T como la evolución de L por cada iteración:

$$T^{(i)} = P_i^{-1}.T^{(i-1)}.P_i.L_i^{-1}, \quad T^{(1)} = L_1^{-1}, \quad T^{(n-1)} = L$$

Para realizar la inducción planteamos la hipótesis:

$$T^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{i,1}^{(i)} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ T_{i+1,1}^{(i)} & \dots & T_{i+1,i}^{(i)} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,1}^{(i)} & \dots & T_{n,i}^{(i)} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad ...(3)$$

Según lo cual realizamos el proceso inductivo correspondiente:

* Para el caso inicial se tiene $T^{(1)} = L_1^{-1}$, la cual según definición previamente mostrada en (2) es cumple con la forma mostrada en (3).

* Para lograr la demostración inductiva debe comprobarse el caso i+1 a partir del caso i, lo que implica que bajo la hipótesis mostrada anteriormente debe demostrarse que:

$$T^{(i+1)} = P_{i+1}^{-1}.T^{(i)}.P_{i+1}.L_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{i+1,1}^{(i+1)} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ T_{i+2,1}^{(i+1)} & \dots & T_{i+2,i+1}^{(i+1)} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,1}^{(i+1)} & \dots & T_{n,i+1}^{(i+1)} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Se sabe que las matrices de permutación P_{i+1} y P_{i+1}^{-1} son iguales y que según se multipliquen por la izquierda o derecha permiten intercambiar filas y columnas respectivamente.
Según ello definimos un intercambio entre las filas i+1 y j, tal que $i+1 < j$. Al realizar la permutación de filas se tiene:

$$P_{i+1}.L^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{j,1}^{(i)} & T_{j,2}^{(i)} & \dots & T_{j,i}^{(i)} & 0 & \dots & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{i+1,1}^{(i)} & T_{i+1,2}^{(i)} & \dots & T_{i+1,i}^{(i)} & \mathbf{1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,1}^{(i)} & T_{n,2}^{(i)} & \dots & T_{n,i}^{(i)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

En este punto la matriz deja de ser triangular inferior debido a la ubicaciones de los antiguos elementos de la diagonal, sin embargo al realizar la permutación por columnas estos regresan a sus posiciones originales obteniendo la matriz:

$$P_{i+1}.T^{(i)}.P_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{j,1}^{(i)} & T_{j,2}^{(i)} & \dots & T_{j,i}^{(i)} & \mathbf{1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{i+1,1}^{(i)} & T_{i+1,2}^{(i)} & \dots & T_{i+1,i}^{(i)} & 0 & \dots & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,1}^{(i)} & T_{n,2}^{(i)} & \dots & T_{n,i}^{(i)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora la matriz cumple con una forma similar a la planteada en la hipótesis por lo que solo resta comprobar que tras multiplicar por L_{i+1}^{-1} el resultado sigue poseyendo una estructura similar. Según esto:

$$P_{i+1}.T^{(i)}.P_{i+1}^{-1}.L_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{j,1}^{(i)} & \dots & T_{j,i}^{(i)} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{i+1,1}^{(i)} & \dots & T_{i+1,i}^{(i)} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,1}^{(i)} & \dots & T_{n,i}^{(i)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{i+2,i+1}^{i+1}/a_{i+1,i+1}^{i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,i+1}^{i+1}/a_{i+1,i+1}^{i+1} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz L_{i+1}^{-1} se asemeja a una matriz identidad excepto por la columna i+1, el único cambio se dará al multiplicar por esta columna.
Esto implica demostrar que el producto de la matriz $P_{i+1}.T^{(i)}.P_{i+1}^{-1}$ y la columna i+1 de L_{i+1}^{-1} dan como resultado:

$$P_{i+1}.T^{(i)}.P_{i+1}^{-1}.L_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{j,1}^{(i)} & \dots & T_{j,i}^{(i)} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{i+1,1}^{(i)} & \dots & T_{i+1,i}^{(i)} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,1}^{(i)} & \dots & T_{n,i}^{(i)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ a_{i+2,i+1}^{i+1}/a_{i+1,i+1}^{i+1} \\ \vdots \\ a_{j,i+1}^{i+1}/a_{i+1,i+1}^{i+1} \\ \vdots \\ a_{n,i+1}^{i+1}/a_{n,i+1}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ T_{i+2,i+1}^{(i+1)} \\ \vdots \\ T_{n,i+1}^{(i+1)} \end{bmatrix}$$

Debido a que los i primeros términos del vector columna son nulos al multiplicarse por las filas de la matriz $P_{i+1}.T^{(i)}.P_{i+1}^{-1}$ solo importarán sus términos a partir del elemento i+1, por lo cual puede omitirse las primeras i columnas para facilitar la visualización:

$$P_{i+1}.T^{(i)}.P_{i+1}^{-1}.L_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ a_{i+2,i+1}^{i+1}/a_{i+1,i+1}^{i+1} \\ \vdots \\ a_{j,i+1}^{i+1}/a_{i+1,i+1}^{i+1} \\ \vdots \\ a_{n,i+1}^{i+1}/a_{n,i+1}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ a_{i+2,i+1}^{i+1}/a_{i+1,i+1}^{i+1} \\ \vdots \\ a_{n,i+1}^{i+1}/a_{n,i+1}^{i+1} \end{bmatrix}$$

Finalmente dado que el resto de columnas de L_{i+1}^{-1} no modifica el resto de columnas de la matriz original al multiplicarse, se obtendrá como resultado:

$$T_{(i+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{(i)}_{j,1} & T^{(i)}_{j,2} & \dots & T^{(i)}_{j,i} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ T^{(i)}_{i+2,1} & T^{(i)}_{i+2,2} & \dots & T^{(i)}_{i+2,i} & a^{i+1}_{i+2,i+1}/a^{i+1}_{i+1,i+1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{(i)}_{i+1,1} & T^{(i)}_{i+1,2} & \dots & T^{(i)}_{i+1,i} & a^{i+1}_{j,i+1}/a^{i+1}_{j,i+1} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{(i)}_{n,1} & T^{(i)}_{n,2} & \dots & T^{(i)}_{n,i} & a^{i+1}_{n,i+1}/a^{i+1}_{n,i+1} & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar la matriz resultante cumple con la forma planteada en la hipótesis, por lo cual se demuestra que durante cada etapa intermedia la matriz L sigue siendo triangular inferior unitaria.

1.9. Ejercicio 18

Para cada una de las siguientes matrices, encontrar:

a Las matrices de permutación P_1 y P_2 y las matrices elementales M_1 y M_2 tal que $MA = M_2P_2M_1P_1A$ es una matriz triangular superior.

b Las matrices de permutación P_1, P_2, Q_1, Q_2 y las matrices elementales M_1 y M_2 tal que $MAQ = M_2(P_2(M_1P_1AQ_1)Q_2)$ es una matriz triangular superior.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 98 & 55 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0{,}0003 & 1{,}566 & 1{,}234 \\ 1{,}5660 & 2{,}000 & 1{,}018 \\ 1{,}2340 & 1{,}018 & -3{,}000 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c Expresa cada descomposición en la forma $PAQ = LU$ (Note que para la eliminación de Gauss sin y con pivoteo parcial, $Q = I$).

d Calcule el factor de crecimiento en cada caso.

Solución:

a $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

a) Pivoteo parcial
El máximo valor de la primera columna en la matriz A es a_{11}; por lo tanto, se tiene P_1 y M_1

$$P_1 = I;\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(1)} = M_1P_1A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{pmatrix}$$

El máximo valor de la segunda columna en la matriz $A^{(1)}$, por debajo de la primera fila es a_{22}; por lo tanto, se tiene P_2 y M_2

$$P_2 = I;\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = M_2P_2A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Se verifica que $MA = M_2P_2M_1P_1A$ es una matriz triangular superior

b) Pivoteo completo
El máximo valor de todas las columnas y filas de la matriz A es a_{11}; por lo tanto, se tiene P_1, Q_1 y M_1

$$P_1 = Q_1 = I \rightarrow P_1AQ_1 = A;\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow A^{(1)} = M_1P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{pmatrix}$$

El máximo valor de las columnas y filas de la matriz $A^{(1)}$, por debajo de la primera fila es a_{33}; por lo tanto, se tiene P_2, Q_2 y M_2

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_2A^{(1)}Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{45} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{15}{16} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{45} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{192} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Se verifica que $MAQ = M_2(P_2(M_1P_1AQ_1)Q_2$ es una matriz triangular superior

c) 1) Para el caso de pivoteo parcial

$$PA = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix}$$

2) Para pivoteo completo

$$PAQ = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{15}{16} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{45} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{192} \end{pmatrix}$$

d) Factor de crecimiento

1) Para el caso del pivoteo parcial

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{max|a_{ij}^{(2)}|}{max|a_{ij}|} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2) Para pivoteo completo

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{max|a_{ij}^{(2)}|}{max|a_{ij}|} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

b $A = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 98 & 55 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Pivoteo parcial
El máximo valor de la primera columna en la matriz A es a_{11}; por lo tanto, se tiene P_1 y M_1

$$P_1 = I;\; M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{98}{100} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(1)} = M_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 0 & -\frac{2101}{50} & -\frac{2126}{25} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El máximo valor de la segunda columna en la matriz $A^{(1)}$, por debajo de la primera fila es a_{22}; por lo tanto, se tiene P_2 y M_2

$$P_2 = I;\; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{50}{2101} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 0 & -\frac{2101}{50} & -\frac{2126}{25} \\ 0 & 0 & -\frac{2151}{2101} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Se verifica que $MA = M_2 P_2 M_1 P_1 A$ es una matriz triangular superior

b) Pivoteo completo
El máximo valor de todas las columnas y filas de la matriz A es a_{11}; por lo tanto, se tiene P_1, Q_1 y M_1

$$P_1 = Q_1 = I \rightarrow P_1 A Q_1 = A;\; M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{98}{100} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^{(1)} = M_1 P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 0 & -\frac{2101}{50} & -\frac{2126}{25} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El máximo valor de las columnas y filas de la matriz $A^{(1)}$, por debajo de la primera fila es a_{32}; por lo tanto, se tiene P_2, Q_2 y M_2

$$P_2 = I;\; Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 0 & -\frac{2126}{25} & -\frac{2101}{50} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{25}{2126} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 0 & -\frac{2126}{25} & -\frac{2101}{50} \\ 0 & 1 & \frac{2151}{4252} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Se verifica que $MAQ = M_2(P_2(M_1 P_1 A Q_1)Q_2$ es una matriz triangular superior *c*) 1) Para el caso de pivoteo parcial

$$PA = LU$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100 & 99 & 98\\98 & 55 & 11\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\\frac{98}{100} & 1 & 0\\0 & -\frac{50}{2101} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100 & 99 & 98\\0 & -\frac{2101}{50} & -\frac{2126}{25}\\0 & 0 & -\frac{2151}{2101}\end{pmatrix}$$

2) Para pivoteo completo

$$PAQ = LU$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100 & 99 & 98\\98 & 55 & 11\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\\frac{98}{100} & 1 & 0\\0 & -\frac{25}{2126} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100 & 98 & 99\\0 & -\frac{2126}{25} & -\frac{2101}{50}\\0 & 0 & \frac{2151}{4252}\end{pmatrix}$$

d) Factor de crecimiento

1) Para el caso del pivoteo parcial

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{max|a_{ij}^{(2)}|}{max|a_{ij}|}\\&= \frac{100}{100}\\&= 1\end{aligned}$$

2) Para pivoteo completo

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{max|a_{ij}^{(2)}|}{max|a_{ij}|}\\&= \frac{100}{100}\\&= 1\end{aligned}$$

c $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

a) Pivoteo parcial
El máximo valor de la primera columna en la matriz A es a_{11}; por lo tanto, se tiene P_1 y M_1

$$P_1 = I;\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(1)} = M_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El máximo valor de la segunda columna en la matriz $A^{(1)}$, por debajo de la primera fila es a_{22}; por lo tanto, se tiene P_2 y M_2

$$P_2 = I;\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Se verifica que $MA = M_2 P_2 M_1 P_1 A$ es una matriz triangular superior

b) Pivoteo completo
El máximo valor de todas las columnas y filas de la matriz A es a_{11}; por lo tanto, se tiene P_1, Q_1 y M_1

$$P_1 = Q_1 = I \rightarrow P_1 A Q_1 = A;\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^{(1)} = M_1 P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El máximo valor de las columnas y filas de la matriz $A^{(1)}$, por debajo de la primera fila es a_{22}; por lo tanto, se tiene P_2, Q_2 y M_2

$$P_2 = I;\ Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Se verifica que $MAQ = M_2(P_2(M_1 P_1 A Q_1) Q_2$ es una matriz triangular superior *c*) 1) Para el caso de pivoteo parcial

$$PA = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Para pivoteo completo

$$PAQ = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d) Factor de crecimiento

1) Para el caso del pivoteo parcial

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{max|a_{ij}^{(2)}|}{max|a_{ij}|} \\ &= \frac{4}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2) Para pivoteo completo

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{max|a_{ij}^{(2)}|}{max|a_{ij}|} \\ &= \frac{2}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

d $A = \begin{pmatrix} 0{,}0003 & 1{,}566 & 1{,}234 \\ 1{,}5660 & 2{,}000 & 1{,}018 \\ 1{,}2340 & 1{,}018 & -3{,}000 \end{pmatrix}$

a) Pivoteo parcial
El máximo valor de la primera columna en la matriz A es a_{11}; por lo tanto, se tiene P_1 y M_1

$$P_1 = I;\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(1)} = M_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El máximo valor de la segunda columna en la matriz $A^{(1)}$, por debajo de la primera fila es a_{22}; por lo tanto, se tiene P_2 y M_2

$$P_2 = I;\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Se verifica que $MA = M_2 P_2 M_1 P_1 A$ es una matriz triangular superior

b) Pivoteo completo
El máximo valor de todas las columnas y filas de la matriz A es a_{11}; por lo tanto, se tiene P_1, Q_1 y M_1

$$P_1 = Q_1 = I \rightarrow P_1 A Q_1 = A;\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^{(1)} = M_1 P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El máximo valor de las columnas y filas de la matriz $A^{(1)}$, por debajo de la primera fila es a_{22}; por lo tanto, se tiene P_2, Q_2 y M_2

$$P_2 = I;\ Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Se verifica que $MAQ = M_2(P_2(M_1 P_1 A Q_1) Q_2$ es una matriz triangular superior

c) 1) Para el caso de pivoteo parcial

$$PA = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Para pivoteo completo

$$PAQ = LU$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

d) Factor de crecimiento

1) Para el caso del pivoteo parcial

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{max|a_{ij}^{(2)}|}{max|a_{ij}|}\\ &= \frac{4}{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

2) Para pivoteo completo

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{max|a_{ij}^{(2)}|}{max|a_{ij}|}\\ &= \frac{2}{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

e $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 0\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}$

a) Pivoteo parcial
El máximo valor de la primera columna en la matriz A es a_{11}; por lo tanto, se tiene P_1 y M_1

$$P_1 = I;\ M_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to A^{(1)} = M_1P_1A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

El máximo valor de la segunda columna en la matriz $A^{(1)}$, por debajo de la primera fila es a_{22}; por lo tanto, se tiene P_2 y M_2

$$P_2 = I;\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Se verifica que $MA = M_2 P_2 M_1 P_1 A$ es una matriz triangular superior

b) Pivoteo completo
El máximo valor de todas las columnas y filas de la matriz A es a_{22}; por lo tanto, se tiene P_1, Q_1 y M_1

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^{(1)} = M_1 P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El máximo valor de las columnas y filas de la matriz $A^{(1)}$, por debajo de la primera fila es a_{22}; por lo tanto, se tiene P_2, Q_2 y M_2

$$P_2 = I;\ Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Se verifica que $MAQ = M_2(P_2(M_1 P_1 A Q_1) Q_2$ es una matriz triangular superior

c) 1) Para el caso de pivoteo parcial

$$PA = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Para pivoteo completo

$$PAQ = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d) Factor de crecimiento

1) Para el caso del pivoteo parcial

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{max|a_{ij}^{(2)}|}{max|a_{ij}|} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2) Para pivoteo completo

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{max|a_{ij}^{(2)}|}{max|a_{ij}|} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Biswa Datta: sección 6.4

2.1. Ejercicio 7

Resolver el sistema lineal $Ax = b$, donde b es un vector con cada componente igual a 1 y con A del ejercicio 18 del capitulo 5,usando:

Solución:

a Eliminación Gausianna sin pivoteo

$$(i) A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

paso 1) para resolver esto aplicamos el metodo de gaus escalonado aplicando para el elemento a_{21} con $m_{21} = -\frac{1}{2}$ tenemos el siguiente resultado:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

tambien aplicando el metodo $a_{31} = -\frac{1}{3}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

paso 2) ahora podemos tambien aplicar para $a_{32} = -1$, que tambien se convertira en U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

ahora mostramos la matriz L de lo anterior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

por la factorizacion LU anterior y el sistema lineal $Ax = b$ tenemos que $LY = b$, haciendo esto para obtener los Y tenemos que :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tenemos Y

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

ahora para calcular $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ hacemos la multiplicacion y calculamos los valores de x, de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{4}{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

de lo anterior podemos deducir facilmente la que los valores de X son $x = 1 - \frac{33}{16} - \frac{15}{24}, \qquad y = 6 - \frac{15}{8} = \frac{33}{8}, z = \frac{15}{8}$

b Eliminacion Gausiana con pivoteo parcial y pivoteo total

a pivoteo parcial

$$(i)A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

usando el pivoteo parcial vamos a expresar A = MU, para encontrar P y L de tal forma que PA = LU. **paso 1** el pivote parcial entra con $a_{11} = 1$ y $r = 1$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}50000 & 0{,}33333 \\ 0{,}50000 & 0{,}33333 & 0{,}25000 \\ 0{,}33333 & 0{,}25000 & 0{,}20000 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^{(1)} = M_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}50000 & 0{,}33333 \\ 0 & 0{,}08333 & 0{,}08333 \\ 0 & 0{,}08333 & 0{,}08889 \end{bmatrix}$$

paso 2, ahora el pivote entrante es $a_{22} = 0{,}833$

$$P_2A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}50000 & 0{,}33333 \\ 0 & 0{,}08333 & 0{,}08333 \\ 0 & 0{,}08333 & 0{,}08889 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = I_3$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = A^{(2)} = M_2P_2A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}50000 & 0{,}33333 \\ 0 & 0{,}08333 & 0{,}08333 \\ 0 & 0 & 0{,}00556 \end{bmatrix}$$

$$M = M_2P_2M_1P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}50000 & 1 & 0 \\ 0{,}16667 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para la matriz L hacemos

$$P = P_2P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = P(M_2P_2M_1P_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}50000 & 0{,}16667 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por la factorizacion LU anterior y el sistema lineal Ax = b, tenemos que LY = b, haciendo este ultimo para obtener los Y tenemos:

$$LY = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}50000 & 0{,}16667 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de lo anterior podemos obtener $y_3 = 0, \qquad y_2 = 1; y1 = 1$, entonces podemos hacer UX = Y , y calculamos los valores de x.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}50000 & 0{,}33333 \\ 0 & 0{,}08333 & 0{,}08333 \\ 0 & 0 & 0{,}00556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de donde podemos inferir $z = \frac{1}{0{,}00556}, \qquad y = \frac{1-14{,}9874}{0{,}8333}, x = 1 - 0{,}5y - 0{,}333z$

b pivoteo total

$$(i)A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

el pivoteo total elige el mayor elemento dentro de un matriz para asi poder elegir el pivote con el mayor elemento en le primer elemento y la primera columna. y asi hacemos dentro de cada sub matriz obteniendo el mayor elemento en la diagonal principal.

en este ejemplo no podemos

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 1 \end{array}\right)$$

en la anterior reduccion no existe intercambio debido aque 1 es el mayor elemento dentro de nuestra matriz, asi tambien para reducir tenemos nuestro pivote al 1.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 1 \end{array}\right)$$

ahora reduciremos el elemento a_{31} de la siguiente forma

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{5} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

ahora pasaremos a reducir el en forma escalonada el elemento a_{32}

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

ahora resolviendo tendremos que

$$x = -15$$
$$y = -28$$
$$z = 90$$

c Factorizacion QR aplicando el metodo de factorizacion QR tenemos

$$(i)A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

dado el sistema Ax = b si $A = QR \to QRx = b$, asi $Rx = Q^t b$ entonces primero tenemos que hallar Q y R. asi primero dividimos la matriz en pequeños bloques verticales de vectores.

$$s = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right\} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

acontinuacion las ecuaciones que debemos hallar son

$$\begin{aligned} U_1 &= V_1 \\ U_2 &= V_2 - \alpha_{12} U_1 \\ U_3 &= V_3 - \alpha_{13} U_1 - \alpha_{23} U_2 \end{aligned}$$

hallando U_2 tenemos $\alpha_{12} = \frac{<U_1, V_2>}{\|U_1\|} = \frac{49}{27}$

$$U_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \alpha_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} -1,314 \\ -0,5740 \\ -0,3548 \end{bmatrix}$$

ahora calculamos U_3 con $\alpha_{13} = \frac{<U_1, V_3>}{\|U_1\|} = 0,525$, asi tambien$\alpha_{23} = \frac{<U_2, V_3>}{\|U_2\|} = 0{,}3$

$$U_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} - \alpha_{13} U_1 - \alpha_{23} U_2$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 0,615 \\ 3,7153 \\ 0,2314 \end{bmatrix}$$

asi ahora tenemos el Q

$$Q = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1,314 & 0,615 \\ \frac{1}{2} & -0,5740 & 3,7153 \\ \frac{1}{3} & -0,3548 & 0,2314 \end{bmatrix}$$

ademas ahora podemos calcular R.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1,8148 & 0,525 \\ 0 & 1 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Ejercicio 8

a) Resuelva cada sistema del Ejercicio 7 usando pivoteo parcial pero sin factorización explícita.

Solución:

a.1) Para el sistema de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando: $m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -1/2$ y $m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -1/3$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0,08333 & 0,08333 \\ 0 & 0,08333 & 0,08888 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,66666 \end{pmatrix}$$

Tomando: $m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -1$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0,08333 & 0,08333 \\ 0 & 0 & 0,00555 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,16666 \end{pmatrix}$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0,5x_2 + 0,33333x_3 &= 1 \\ 0,08333x_2 + 0,08333x_3 &= 0,5 \\ 0,00555x_3 &= 0,16666 \end{aligned}$$

Y sus respuestas son: $x_3 = 30,02882$, $x_2 = -24,02859$ y $x_1 = 3,00479$

a.2) Para el sistema de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 98 & 55 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 98 & 55 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando: $m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -0,98$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 0 & -42,02 & -85,04 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,02 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando: $m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = 0{,}0238$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 0 & -42,02 & -85,04 \\ 0 & 0 & -1,02395 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,02 \\ 1,00048 \end{pmatrix}$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned} 100x_1 + 99x_2 + 98x_3 &= 1 \\ -42,02x_2 + -85,04x_3 &= 0,02 \\ -1,02395x_3 &= 1,00048 \end{aligned}$$

Y sus respuestas son: $x_3 = -0,97707$, $x_2 = 1,97691$ y $x_1 = -0,98961$

a.3) Para el sistema de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando: $m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = 1$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tomando: $m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = 1$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Y sus respuestas son: $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ y $x_1 = 0$

a.4) Para el sistema de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0,0003 & 1,566 & 1,234 \\ 1,566 & 2,0 & 1,018 \\ 1,234 & 1,018 & -3,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,0003 & 1,566 & 1,234 \\ 1,566 & 2,0 & 1,018 \\ 1,234 & 1,018 & -3,0 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por el pivoteo parcial cambiamos las filas 1ra y 2da:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1,566 & 2,0 & 1,018 \\ 0,0003 & 1,566 & 1,234 \\ 1,234 & 1,018 & -3,0 \end{pmatrix} \quad , \quad b \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando: $m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -0,000196$ y $m_{31} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -0,78799$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,566 & 2,0 & 1,018 \\ 0 & 1,56562 & 1,2338 \\ 0 & -0,55799 & -3,80218 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,0019157 \\ 0,21201 \end{pmatrix}$$

Tomando: $m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = 0,3564$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,566 & 2,0 & 1,018 \\ 0 & 1,56562 & 1,2338 \\ 0 & 0 & -3,36245 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,0019157 \\ 0,56909 \end{pmatrix}$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned} 1,566x_1 + 2,0x2 + 1,018x_3 &= 1 \\ 1,56562x_2 + 1,2338x_3 &= 1,0019157 \\ -3,36245x_3 &= 0,56909 \end{aligned}$$

Y sus respuestas son: $x_3 = -0,16925$, $x_2 = 0,77333$ y $x_1 = -0,23905$
a.5) Para el sistema de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando: $m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = 1$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando: $m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = 1$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned} x_1 - x2 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Y sus respuestas son: $x_3 = 1,5$, $x_2 = 2$ y $x_1 = 3$

b) Calcular el vector residual en cada caso
b.1) Para el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y su vector solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 3,00479 \\ -24,02859 \\ 30,02882 \end{pmatrix}$$

El vector residual R está definido de la siguiente manera:

$$R = AX - b$$

Y para la presente solución es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3,00479 \\ -24,02859 \\ 30,02882 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,000102 \\ 0,00007 \\ 0,000213 \end{pmatrix}$$

b.2) Para el sistema

$$\begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 98 & 55 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y su vector solución es:

$$X = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

El vector residual R para la presente solución es:

$$R = \begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 98 & 55 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,98961 \\ 1,97691 \\ -0,97707 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,00023 \\ 0,0005 \\ -0,00016 \end{pmatrix}$$

b.2) Para el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y su vector solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector residual R para la presente solución es:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b.4) Para el sistema

$$\begin{pmatrix} 0,0003 & 1,566 & 1,234 \\ 1,566 & 2,0 & 1,018 \\ 1,234 & 1,018 & -3,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y su vector solución es:

$$X = \begin{pmatrix} -0,23905 \\ 0,77333 \\ -0,16925 \end{pmatrix}$$

El vector residual R para la presente solución es:

$$R = \begin{pmatrix} 0,0003 & 1,566 & 1,234 \\ 1,566 & 2,0 & 1,018 \\ 1,234 & 1,018 & -3,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,23905 \\ 0,77333 \\ -0,16925 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,002108 \\ 0,000012 \\ 0,000012 \end{pmatrix}$$

b.4) Para el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y su vector solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

El vector residual R para la presente solución es:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix})(- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3. Ejercicio 9

Resolver usando eliminación Gaussiana sin pivoteo parcial y con pivoteo parcial, y comparar respuestas.

$$\begin{pmatrix} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}0001 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

a **Eliminación Gaussiana sin Pivoteo**

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0{,}0001 & 1 & 1 & | & 2{,}0001 \\ 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 3 & | & 3 \end{array}\right) \quad \to R_2 - \frac{3}{0{,}0001} R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0{,}0001 & 1 & 1 & | & 2{,}0001 \\ 0 & -29999 & -29999 & | & -60000 \\ 1 & 2 & 3 & | & 3 \end{array}\right) \quad \to R_3 - \frac{1}{0{,}0001} R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0{,}0001 & 1 & 1 & | & 2{,}0001 \\ 0 & -29999 & -29999 & | & -60000 \\ 0 & -9998 & -9997 & | & -19998 \end{array}\right) \quad \to R_3 - 0{,}33328 R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0{,}0001 & 1 & 1 & | & 2{,}0001 \\ 0 & -29999 & -29999 & | & -60000 \\ 0 & 0 & 1{,}0667 & | & -1{,}1999 \end{array}\right)$$

Encontrando las valores para x_1, x_2 y x_3:

$$\begin{aligned} 1{,}0667x_3 &= -1{,}1999 \\ x_3 &= -1{,}1249 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -29999x_2 - 29999x_3 &= -60000 \\ -29999x_2 + 33745{,}8751 &= -60000 \\ -29999x_2 &= -93745{,}8751 \\ x_2 &= 3{,}12497 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0{,}0001x_1 + x_2 + x_3 &= 2{,}0001 \\ 0{,}0001x_1 + 2{,}0001 &= 2{,}0001 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $x = (0 \quad 3{,}12497 \quad -1{,}1249)^T$

b **Eliminación Gaussiana con Pivoteo Parcial**

$$\begin{pmatrix} 0{,}0001 & 1 & 1 & | & 2{,}0001 \\ 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Considerando que el valor máximo en la columna 1 es 3, se procede a intercambiar:

$$\begin{pmatrix} 0{,}0001 & 1 & 1 & | & 2{,}0001 \\ 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \qquad R_2 \longleftrightarrow R_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0{,}0001 & 1 & 1 & | & 2{,}0001 \\ 1 & 2 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow R_2 - \frac{0{,}0001}{3}R_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0{,}9999 & 0{,}9999 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow R_3 - \frac{1}{3}R_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0{,}9999 & 0{,}9999 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow R_3 - \frac{1}{3}R_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0{,}9999 & 0{,}9999 & | & 2 \\ 0 & 1{,}6667 & 2{,}6667 & | & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow R_3 - 1{,}6669R_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0{,}9999 & 0{,}9999 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1{,}3338 \end{pmatrix} \quad \rightarrow R_3 - 1{,}6669R_2$$

Encontrando las valores para x_1, x_2 y x_3:

$$x_3 = -1{,}3338$$

$$\begin{aligned} 0{,}9999x_2 + 0{,}9999x_3 &= 2 \\ 0{,}9999x_2 - 1{,}3337 &= 2 \\ 0{,}9999x_2 &= 3{,}3337 \\ x_2 &= 3{,}3340 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2{,}0002 &= 3 \\ 3x_1 &= 0{,}9998 \\ x_1 &= 0{,}33327 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $x = (0{,}33327 \; 3{,}3340 \; -1{,}3338)^T$

Finalmente, al comparar ambos resultados se ve una diferencia en los decimales; la cual se fundamenta en el número de operaciones realizadas; ya que a medida que se resuelve cada operación se va perdiendo precisión.

2.4. Ejercicio 12

a Calcule la factorización de Cholesky de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1{,}001 & 1{,}001 \\ 1 & 1{,}001 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

usando:

a) Eliminación Gaussiana sin pivote.

b) Algoritmo de Cholesky.

b En la parte a) verificar que $\max|a_{ij}^{(k)}| \leq \max|a_{ij}^{(k-1)}|, \quad k = 1, 2.$

c ¿Cuál es el factor de crecimiento?

Solución:

a Calcule la factorización de Cholesky de:

a) Realizamos la eliminación Gaussiana sin pivote:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1{,}001 & 1{,}001 \\ 1 & 1{,}001 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}001 & 0{,}001 \\ 0 & 0{,}001 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}001 & 0{,}001 \\ 0 & 0 & 0{,}999 \end{pmatrix} \tag{2}$$

b) Siguiendo el algoritmo de Cholesky.
Fila 1:

$$h_{11} = \sqrt{1} = 1 \tag{3}$$

Fila 2:

$$h_{21} = \frac{a_{21}}{h_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \tag{4}$$

$$h_{22} = \sqrt{a_{22} - h_{21}^2} = \sqrt{1{,}001 - 1} = 0{,}0316 \tag{5}$$

Fila 3:

$$h_{31} = \frac{a_{31}}{h_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \tag{6}$$

$$h_{32} = \frac{1}{h_{22}}(a_{32} - h_{21}h_{31}) = \frac{1}{0{,}0316}(1{,}001 - 1 \cdot 1) = 0{,}0316 \tag{7}$$

$$h_{33} = \sqrt{a_{33} - (h_{31}^2 + h_{31}^2)} = \sqrt{2 - (1^2 + 0{,}0316^2)} = \sqrt{0{,}999} = 0{,}9995 \tag{8}$$

Entonces, la factorización de Cholesky es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}0316 & 0 \\ 1 & 0{,}0316 & 0{,}9995 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}0316 & 0{,}0316 \\ 0 & 0 & 0{,}9995 \end{pmatrix} \tag{9}$$

b En la parte a) verificar que $\max|a_{ij}^{(k)}| \leq \max|a_{ij}^{(k-1)}|, \quad k = 1, 2.$

En el procedimiento realizado para la factorización de Cholesky se obtiene: $\max|a_{ij}^{(0)}| = 2$, $\max|a_{ij}^{(1)}| = 1$, $\max|a_{ij}^{(2)}| = 1$, $\max|a_{ij}^{(3)}| = 1$. Es decir:

$$\max|a_{ij}^{(2)}| \leq \max|a_{ij}^{(1)}| \leq \max|a_{ij}^{(0)}| \tag{10}$$

c ¿Cuál es el factor de crecimiento?

El factor de crecimiento es definido como:

$$\rho = \frac{\max(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})}{max(a_{ij})} \tag{11}$$

donde $\alpha = \max\limits_{i,j}|a_{ij}|$ y $\alpha_k = \max\limits_{i,j}|a_{ij}^{(k)}|$. Entonces en el problema: $\alpha = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$. Reemplazando:

$$\rho = \frac{\max(2,1,1,1)}{2} = 1 \tag{12}$$

2.5. Ejercicio 14

a Probar que:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

es positiva definida con y sin encontrar la factorización de *Cholesky*.

Solución

Sin usar *Cholesky* Para que una matriz sea definida positiva, tenemos que probar dos cosas: que sea simétrica y que sus autovalores sean positivos. Como se puede ver, la matriz A es simétrica y sus autovalores son: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 6$, todos sus valores positivos. Luego podemos decir que la matriz es positiva definida.

Usando *Cholesky* Debemos encontrar una matriz H tal que $A = HH^T$.

Para encontrar la matriz usamos las siguientes formulas:

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}l_{kj}}{l_{ii}}$$

Luego la matriz H será:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1{,}936492 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}129099 & 1{,}932184 & 0 \\ 0 & -0{,}516398 & -0{,}552052 & 1{,}85164 \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos H con H^T obtenemos A.

b Resolver el sistema

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Usando H del punto (b), tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1{,}936492 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}129099 & 1{,}932184 & 0 \\ 0 & -0{,}516398 & -0{,}552052 & 1{,}85164 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$y_1 = 1, \quad y_2 \approx 1{,}2909942, \quad y_3 \approx 1{,}380130497, \quad y_4 \approx 1{,}85163997$$

Multiplicando ahora $H^T x^T = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}936492 & -0{,}129099 & -0{,}516398 \\ 0 & 0 & 1{,}932184 & -0{,}552052 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}85164 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}2909942 \\ 1{,}380130497 \\ 1{,}85163997 \end{bmatrix}$$

Finalmente tenemos que:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1$$

2.6. Ejercicio 17

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

- Usando Eliminación gaussiana La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Dividimos entre 2 la 1^{ra} fila

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Sumamos F_1 a F_2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicamos por (2/3) la 2^{ra} fila

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Sumamos la 2^{da} fila a la 3^{ra}

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicamos por (3/4) la 3^{ra} fila

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Sumamos la 3^{ra} fila a la 4^{ta} fila

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & | & 5/2 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la ultima fila por (4/5)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 \\ x_3 - 3/4(x_4) &= 3/2 \\ x_3 &= 3 \\ x_2 - 2/3(x_3) &= 1 \\ x_2 &= 3 \\ x_1 - 1/2(x_2) &= 1/2 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Calculando la factorización LU

$$\begin{aligned} m_1(2) &= -A(2,1)/A(1,1) = 1/2 \\ m_1(3) &= -A(3,1)/A(1,1) = 0 \\ m_1(4) &= -A(4,1)/A(1,1) = 0 \end{aligned}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$MM_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_2(3) = -A_1(3,2)/A_1(2,2) = 2/3$$
$$m_2(4) = -A_1(4,2)/A_1(2,2) = 0$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$MM_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_3(4) = -A_2(4,3)/A_2(3,3) = 3/4$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}$$

$$MM_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$L = Inv(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{bmatrix})$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $Ux = y$, donde $y = L^{-1}b$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

Entonces $x = U^{-1}y$:

$$x = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 0 & 2/3 & 1/2 & 2/5 \\ 0 & 0 & 3/4 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por ambos métodos demostramos que el sistema tiene la misma solución.

2.7. Ejercicio 20

a Busca la factorización QR de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{pmatrix}$$

solución

$$U_1' = V_1$$

$$U_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+10^{-10}}} \\ \frac{10^{-5}}{\sqrt{1+10^{-10}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2' = V_2 - \infty_{12} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+10^{-10}}} \\ \frac{10^{-5}}{\sqrt{1+10^{-10}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-5} \end{pmatrix} - \infty_{12} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+10^{-10}}} \\ \frac{10^{-5}}{\sqrt{1+10^{-10}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-5} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{1+10^{-10}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+10^{-10}}} \\ \frac{10^{-5}}{\sqrt{1+10^{-10}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{1+10^{-10}} \\ \frac{10^{-5}}{1+10^{-10}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2' = \begin{pmatrix} \frac{10^{-10}}{1+10^{-10}} \\ \frac{-10^{-5}}{1+10^{-10}} \\ 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \frac{\begin{pmatrix} \frac{10^{-10}}{1+10^{-10}} \\ \frac{-10^{-5}}{1+10^{-10}} \\ 10^{-5} \end{pmatrix}}{Nor(U_2')}$$

$$U_2 = \frac{\begin{pmatrix} \frac{10^{-10}}{1+10^{-10}} \\ \frac{-10^{-5}}{1+10^{-10}} \\ 10^{-5} \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{10^{-30}+30^{-20}+20^{-10}}}{1+10^{-10}}}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{10^{-10}(1+10^{-10})}{(1+10^{-10})\sqrt{10^{-30}+30^{-20}+20^{-10}}} \\ \frac{-10^{-5}(1+10^{-10})}{(1+10^{-10})\sqrt{10^{-30}+30^{-20}+20^{-10}}} \\ \frac{10^{-5}(1+10^{-10})}{\sqrt{10^{-30}+30^{-20}+20^{-10}}} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+10^{-10}}} & \frac{10^{-10}(1+10^{-10})}{(1+10^{-10})\sqrt{10^{-30}+30^{-20}+20^{-10}}} \\ \frac{10^{-5}}{\sqrt{1+10^{-10}}} & \frac{-10^{-5}(1+10^{-10})}{(1+10^{-10})\sqrt{10^{-30}+30^{-20}+20^{-10}}} \\ 0 & \frac{10^{-5}(1+10^{-10})}{\sqrt{10^{-30}+30^{-20}+20^{-10}}} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{1+10^{-10}} & \frac{1}{\sqrt{1+10^{-10}}} \\ 0 & \frac{\sqrt{10^{-30}+30^{-20}+20^{-10}}}{1+10^{-10}} \end{pmatrix}$$

3. Biswa Datta: sección 6.6

3.1. Ejercicio 26

Considere el sistema simetrico $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}4445 & 0{,}4444 & -0{,}2222 \\ 0{,}4444 & 0{,}4445 & -0{,}2222 \\ -0{,}2222 & -0{,}2222 & 0{,}1112 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0{,}6667 \\ 0{,}6667 \\ -0{,}3332 \end{bmatrix}$$

La solución exacta de el sistema es:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Realice una pequeña perturbacion δb en b, manteniendo A sin cambiar. Resuelva el sistema $Ax' = b + \delta b$. Compare x' con x. Calcule $Cond(A)$ y verifique la desigualdad en el texto.
(b)Realice una pequeña perturbacion $\triangle A$ en A tal que $|| \triangle A|| \leq 1/||A^{-1}||$. Resuelva el sistema $(A + \triangle A)x' = b$. Compare x' con x y verifique la desigualdad en el libro. (Hint: $||A^{-1}||_2 = O(10^4)$)

Solución
(a) Sea $b' = b + \delta b$, con $\delta b = [0{,}0001 \quad 0{,}0001 \quad 0{,}0001]^t$, entonces:

$$b' = \begin{bmatrix} 0{,}6668 \\ 0{,}6668 \\ -0{,}3333 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el nuevo sistema:

$$Ax = b'$$

$$x' = \begin{bmatrix} 1{,}3334 \\ 1{,}3334 \\ 2{,}3333 \end{bmatrix}$$

Al comparar x y x' podemos observar un cambio considerable en sus valores:

$$x' = \begin{bmatrix} 1{,}3334 \\ 1{,}3334 \\ 2{,}3333 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculando la diferencia:

$$x' = x + \delta x$$

$$\delta x = x' - x$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} 0{,}3334 \\ 0{,}3334 \\ 1{,}3333 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos el numero condicionante:

$$Cond(A) = ||A||||A^{-1}|| = (1)(10000) = 10000$$

Verificamos la desigualdad:

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq Cond(A)\frac{||\delta b||}{||b||}$$

$$\frac{1{,}4142}{1{,}7321} \leq (10000)\frac{1{,}7221x10^{-4}}{1}$$

(b) Sea $A' = A + \triangle A$, donde:

$$\triangle A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0001 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0{,}4445 & 0{,}4444 & -0{,}2222 \\ 0{,}4444 & 0{,}4445 & -0{,}2221 \\ -0{,}2222 & -0{,}2222 & 0{,}1112 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el nuevo sistema:

$$A'x = b$$

$$x' = \begin{bmatrix} 1{,}3636 \\ 1{,}5454 \\ 1{,}8182 \end{bmatrix}$$

Al comparar x y x' calculamos la diferencia:

$$x' = x + \delta x$$

$$\delta x = x' - x$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} 0{,}3636 \\ -0{,}4546 \\ -0{,}1818 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos el numero condicionante:

$$Cond(A) = ||A||||A^{-1}|| = (1)(10000) = 10000$$

Verificamos la desigualdad:

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq Cond(A)\frac{|| \triangle A||}{||A||}/(1 - Cond(A)\frac{|| \triangle A||}{||A||})$$

$$0{,}3521 \leq (10000)1{,}0000x10^{-4}/(1 - 1{,}0000x10^{-4})$$

$$0{,}3521 \leq (10000)1{,}0000x10^{-4}/(0{,}9999)$$

$$0{,}3521 \leq 1{,}0001$$

3.2. Ejercicio 27

Pruebe la desigualdad:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq Cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \tag{13}$$

Donde:

$$Ax = b$$
$$(A+\Delta A)(x+\delta x) = b$$

Verifique la desigualdad para el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}00003 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Desarrollando el producto:

$$\begin{aligned} b\& = (A+\Delta A)(x+\delta x) \\ b\& = Ax + A\delta x + \Delta Ax + \Delta A\delta x \\ 0 = A\delta x + \Delta Ax + \Delta A\delta x \\ -A\delta x\& = \Delta Ax + \Delta A\delta x \\ -A\delta x\& = \Delta A(x+\delta x) \end{aligned} \tag{14}$$

Despejando δx:

$$\begin{aligned} \delta x &= -A^{-1}\Delta A(x+\delta x) \\ \|\delta x\| &= \|A^{-1}\Delta A(x+\delta x)\| \\ \|\delta x\| &\leq \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|(x+\delta x)\| \\ \|\delta x\| &\leq \|A^{-1}\|\frac{\|A\|}{\|A\|}\|\Delta A\|\|(x+\delta x)\| \\ \|\delta x\| &\leq (\|A^{-1}\|\|A\|)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\|(x+\delta x)\| \\ \frac{\|\delta x\|}{\|(x+\delta x)\|} &\leq Cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \end{aligned} \tag{15}$$

A continuación verificaremos la desigualdad para el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3+0{,}00003 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -24 \\ 30 \end{bmatrix} \wedge \delta x = \begin{bmatrix} -0{,}0080927 \\ 0{,}0323709 \\ -0{,}0269757 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|x\| = 38 \wedge \|\delta x\| = 0{,}042908 \tag{16}$$

Además:

$$\Rightarrow \|A\| = 1{,}4083 \wedge \|A^{-1}\| = 372{,}12 \wedge \|\Delta A\| = 0{,}00003 \tag{17}$$

Calculando:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|(x+\delta x)\|} = \frac{0{,}042908}{38 + 0{,}04908}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|(x+\delta x)\|} = 0{,}0011122 \tag{18}$$

$$Cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = (\|A^{-1}\|\|A\|)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$$Cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = (372{,}12 * 1{,}4083)\frac{0{,}00003}{1{,}4083}$$

$$Cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 0{,}011163$$

$$0{,}0011122 \leq 0{,}011163 \tag{19}$$

Por lo tanto queda comprobada la desigualdad.

3.3. Ejercicio 28

s

(a) ¿Cómo está relacionado $Cond(A)$ y $Cond(A^{-1})$?

(b) Pruebe que:
(i) $1 \leq Cond(A)$
(ii) $Cond(A^T A) = Cond^2(A)$

Solución:

(a) ¿Cómo está relacionado $Cond(A)$ y $Cond(A^{-1})$?
Ambos numeros condicionantes son los mismos. Por definicion sabemos:

$$Cond(A) = \left\|A\right\| \left\|A^{-1}\right\|$$

Si calculamos $Cond(A^{-1})$:

$$Cond(A^{-1}) = \left\|A^{-1}\right\| \left\|(A^{-1})^{-1}\right\|$$

$$Cond(A^{-1}) = \left\|A^{-1}\right\| \left\|A\right\|$$

Al tratarse de normas se puede escribir:

$$\left\|A^{-1}\right\| \left\|A\right\| = \left\|A\right\| \left\|A^{-1}\right\|$$

$$Cond(A^{-1}) = Cond(A)$$

(b) Pruebe que:

(i) $1 \leq Cond(A)$

Sabiendo que $Cond(AB) \leq Cond(A)Cond(B)$

$$Cond(A) = Cond(AA^{-1}A)$$
$$Cond(AA^{-1}A) \leq Cond(A)Cond(A^{-1})Cond(A)$$

Como $Cond(A) = Cond(A^{-1})$

$$Cond(AA^{-1}A) \leq Cond(A)Cond(A)Cond(A)$$
$$Cond(A) \leq Cond(A)Cond(A)Cond(A)$$
$$1 \leq Cond^2(A)$$
$$1 \leq Cond(A)$$

(ii) $Cond(A^TA) = Cond^2(A)$

Puesto que $Cond(A) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$ tenemos que

$$Cond(A^TA) = \frac{\sigma^1_{max}}{\sigma^1_{min}}$$
$$\left\|(A^TA)^T(A^TA) - \sigma^1 I\right\| = 0$$
$$\left\|(A^TA)^2 - \sigma^1 I\right\| = 0$$
$$\left\|A^TA - \sqrt{\sigma^1} I\right\| \left\|A^TA + \sqrt{\sigma^1} I\right\| = 0$$
$$\left\|A^TA - \sqrt{\sigma^1} I\right\| = 0$$
$$\sqrt{\sigma^1} = sqrt\sigma$$
$$\frac{\sigma^1_{max}}{\sigma^1_{min}} = \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}\right)^2$$
$$Cond(A^TA) = Cond^2(A)$$

3.4. Ejercicio 29

(a) Sea O una matriz ortogonal. Muestre que el $Cond(O)$ con respecto a la norma 2 es 1

(b) Muestra que el Cond(A) con respecto a la norma 2 es 1 si y solo si A es un múltiplo escalar de una matriz ortogonal.

Solución:

(a) Sea O una matriz ortogonal. Muestre que el $Cond(O)$ con respecto a la norma 2 es 1.

Sabiendo que O es una matriz ortogonal entonces $O^T O = I$ .Debemos mostrar que :

$$Cond_2(O) = 1$$

Si aplicamos la propiedad: $Cond(A^T A) = (Cond(A))^2$

$$Cond_2(O^T O) = (Cond_2(O))^2$$
$$Cond_2(I) = (Cond_2(O))^2$$
$$(Cond_2(O))^2 = 1$$

Por lo tanto:

$$Cond_2(O) = 1$$

(b) Muestra que el Cond(A) con respecto a la norma 2 es 1 si y solo si A es un múltiplo escalar de una matriz ortogonal.

Si para cada $A = aO$ (donde a es una escalar y O es una matriz ortogonal), entonces:

$$Cond_2(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2$$
$$= a||O||_2\frac{1}{a}||O^{-1}||_2$$
$$= ||O||_2||O^{-1}||_2 = 1$$

3.5. Ejercicio 34

(a) Encontrar para qué valores de a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

está mal condicionada.

(b) Sea $a = 0{,}999$. Resuelva el sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Cuál es el número condicionante de A.

Solución:

(a) Encontrar para qué valores de a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

está mal condicionada.

Solución:

Calculando la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}}{1 - a^2}$$

Usando Norma ∞:

$$\|A\|_\infty = 1 + |a|$$

y si $a \neq 1$:

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1 + |a|}{|1 - a^2|} = \frac{1 + |a|}{|1 - a||1 + a|}$$

Entonces el número condicionante será:

$$cond(A) = \|A\| * \|A^{-1}\| = (1 + |a|) * \frac{1 + |a|}{|1 - a||1 + a|}$$

Para que un sistema esté mal condicionado el número condicionante debe ser un número grande:

$$cond(A) > 100$$

Si $1 > a \geq 0$:

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{1 - a}$$

$$cond(A) = \frac{1+a}{1-a}$$

$$\frac{1+a}{1-a} > 100$$

Entonces:

$$1 > a > 0{,}98$$

Si $a > 1$:

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{a-1}$$

$$cond(A) = \frac{1+a}{a-1}$$

$$\frac{1+a}{a-1} > 100$$

Entonces:

$$1{,}02 > a > 1$$

(b) Sea $a = 0{,}999$. Resuelva el sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Reemplazando:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}999 \\ 0{,}999 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}999 \\ 0 & 0{,}002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}001 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5005 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

(c) Cuál es el número condicionante de A.

Solución:

Usando la sección (a) para el valor dado tendremos:

$$cond(A) = \frac{1+a}{1-a} = \frac{1+0{,}999}{1-0{,}999} = 1999$$

4. Alfio Quarteroni

4.1. Ejercicio 1

Para una matriz cuadrada $A \in R^{nxn}$ probar las siguientes relaciones

$$\frac{1}{n}K_2(A) \leq K_1(A) \leq nK_2(A), \frac{1}{n}K_\infty(A) \leq K_2 \leq nK_\infty(A), \frac{1}{n^2}K_1(A) \leq K_\infty \leq nK_1(A),$$

Nos permiten concluir que si una matriz esta mal condicionada en una cierta norma sigue siendo así incluso en otra norma hasta un factor dependa de n.

Solución:
Si Existe $n \in R^+$ para la matriz cuadrada $A \in R^{nxn}$,

(a) Para $\|A\|_1 \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ también cumple que $\|A^{-1}\|_1 \leq \sqrt{n}\|A^{-1}\|_2$, si hay una multiplicación entre ambas desigualdades tenemos:

$$\begin{aligned}
\|A\|_1\|A^{-1}\|_1 &\leq \sqrt{n}\sqrt{n}\|A\|_2\|A^{-1}\|_2 \\
\|A\|_1\|A^{-1}\|_1 &\leq n\|A\|_2\|A^{-1}\|_2 \\
K_1(A) &\leq nK_2(A) \\
\frac{1}{n}K_2(A) &\leq K_1(A)
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{n}K_2(A) \leq K_1 \leq nK_2(A)$$

(b) Para $\|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$ también cumple que $\|A^{-1}\|_2 \leq \sqrt{n}\|A^{-1}\|_\infty$, si hay una multiplicación entre ambas desigualdades tenemos:

$$\begin{aligned}
\|A\|_2\|A^{-1}\|_2 &\leq \sqrt{n}\sqrt{n}\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty \\
\|A\|_2\|A^{-1}\|_2 &\leq n\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty \\
K_2(A) &\leq nK_\infty(A) \\
\frac{1}{n}K_\infty(A) &\leq K_2(A)
\end{aligned}$$

(c) Para $\|A\|_\infty \leq n\|A\|_1$ también cumple que $\|A^{-1}\|_\infty \leq n\|A^{-1}\|_1$, si hay una multiplicación entre ambas desigualdades tenemos:

$$
\begin{aligned}
\|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty 2 &\leq nn\|A\|_1\|A^{-1}\|_1 \\
\|A\|_\infty 2\|A^{-1}\|_\infty &\leq n^2\|A\|_1\|A^{-1}\|_1 \\
K_\infty(A) &\leq n^2 K_1(A) \\
\frac{1}{n^2}K_\infty(A) &\leq K_1(A)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \frac{1}{n^2}K_1(A) \leq K_\infty \leq nK_1(A) \\
\therefore \frac{1}{n}K_\infty(A) \leq K_2 \leq nK_\infty(A)
\end{aligned}
$$

4.2. Ejercicio 3

Probar que $K(A) \leq K(A)K(B)$, para cualquier matriz cuadrada no singular A, $B \in \Re^{nxn}$

Solución:
Sean las matrices X e Y, la norma matricial tiene las siguientes propiedades:

a $\|X\| > 0$

b $\|\alpha X\| > |\alpha|\|X\|$

c $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

d $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$

Se define la matriz condicionante $K(A)$ como $K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$
Como las matrices A y B son no singulares, entonces calcularemos el numero condicionante de su producto:

$$K(AB) = \|AB\|\|(AB)^{-1}\|$$

Utilizando la $4ta$ propiedad de la norma:

$$K(AB) = \|AB\|\|(AB)^{-1}\| \leq \|A\|\|B\|\|B^{-1}\|\|A^{-1}\|$$

Esto es:

$$K(AB) = \|AB\|\|(AB)^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|\|B\|\|B^{-1}\|$$

$$K(AB) = \|AB\|\|(AB)^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|\|B\|\|B^{-1}\| = K(A)K(B)$$

Por tanto:

$$K(AB) \leq K(A)K(B)$$

4.3. Ejercicio 9

Probar que, si A es una matriz simétrica y definida positiva, solucionar el sistema lineal $Ax = b$ que equivale a calcular $x = \sum_{i=1}^{n}(c_i/\lambda_i v_i)$, donde λ_i son los autovalores de A y v_i son los autovectores correspondientes.

Solución:

Sea A una matriz definida positiva simétrica $n \times n$, es decir tiene autovalores autovalores son positivos $n \times 1$. Por definición:

$$Av = \lambda v \tag{20}$$

Donde v es el autovector de A asociado al autovalor λ de A. Podemos hacer, para el k-ésimo autovalor y autovector:

$$v_k \frac{1}{\lambda_k} = A^{-1} v_k \tag{21}$$

Si sumamos las n ecuaciones de los n autovalor y autovector:

$$A^{-1}(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = \frac{1}{\lambda_1} v_1 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} v_i \tag{22}$$

Como A es una matriz simétrica, entonces podemos hacer la descomposición:

$$A = V^T D V \tag{23}$$

Donde V es la matriz de autovectores de A y D es $diag(\lambda_1, ...\lambda_n)$. Los autovectores de V son linealmente independiente(ortogonales).

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

$$Av_i^T v_i = \lambda_i v_i v_i^T$$

$$Av_i^T v_i x = \lambda_i v_i v_i^T x$$

Como el autovector v_i^T es de dimensión $1xn$ y x es un vector $nx1$ el producto de estos vectores dan como producto un escalar que al multiplicarlo por λ_i dará como resultado otro escalar al cual denominaremos c_i.

$$Ax = c_i v_i$$

Entonces, el sistema lineal $Ax = b$ se puede expresar como:

$$Ax = b = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \tag{24}$$

Despejando x:

$$x = A^{-1} b = A^{-1}(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = c_1(A^{-1} v_1) + \cdots + c_n(A^{-1} v_n) \tag{25}$$

Remplazando $A^{-1} v_n$:

$$x = c_1(\frac{1}{\lambda_1} v_1) + \cdots + c_n(\frac{1}{\lambda_n} v_n \tag{26}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\lambda_i} v_i \tag{27}$$

4.4. Ejercicio 10

Considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Usando el Ejercicio 9, explique porque, cuando $b = [2001, 2001]^\intercal$, un pequeño cambio $\delta b = [1, 0]^\intercal$ produce una gran variación en la solución, por el contrario, cuando $b = [1, -1]^\intercal$, una pequeña variación $\delta x = [0{,}001, 0]^\intercal$ en la solución induce un gran cambio en b.

Solución:

En el Ejercicio 9 se demostró que para una matriz A simétrica y definida positiva, resolver el sistema $Ax = b$ equivale a calcular $x = \sum_{i=1}^{n} (c_i/\lambda_i)\,\mathbf{v}_i$, donde λ_i son los valores propios de A y $\mathbf{v}_i$ son los vectores propios correspondientes.

$$x = \sum_{i=1}^{n} (c_i/\lambda_i)\,\mathbf{v}_i \tag{29}$$

$$Ax = A\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{\lambda_i}\right) \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{\lambda_i}\right) A\mathbf{v}_i \tag{30}$$

Por definición $Av_i = \lambda_i v_i$, entonces:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{\lambda_i}\right) \lambda_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i \tag{31}$$

Entonces:

$$b = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i \tag{32}$$

En el problema, los valores propios de A son 1, 2001; mientras que sus vectores propios asociados son $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^\intercal$, $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^\intercal$ respectivamente. Entonces:

$$b = c_1 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\intercal + c_2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\intercal \tag{33}$$

$$x = c_1 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\intercal + \frac{c_2}{2001} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\intercal \tag{34}$$

Resolviendo (33): $c_1 = c_2 = 2001\sqrt{2}/2$. Luego, reemplazando en (34) se obtiene $x = [-1000, 1001]^\intercal$. Mientras que, al realizar un pequeño $b + \delta b$ en la ecuación (33) se obtiene: $c_1 = -\sqrt{2}/2$, $c_2 = 4003\sqrt{2}/2$, por tanto en la ecuación (34) $x = [1{,}5002, 0{,}5002]^\intercal$.

4.5. Ejercicio 11

Caracterizar el llenado para una matriz $A \in R^{n\times n}$ teniendo entradas diferentes de cero solo en la diagonal principal y en la primera columna y la última fila. Proponer una permutación que minimize el llenado.

Solución:
Se trata de caracterizar la matriz definida de la siguiente forma:

$$\begin{matrix} a & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a & a & 0 & ... & 0 & 0 \\ a & 0 & a & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a & 0 & 0 & ... & a & 0 \\ a & a & 0 & ... & 0 & a \end{matrix} \tag{35}$$

Por lo tanto se puede definir A una matriz donde$A_{i,j} \neq 0$ para todo i igual a j desde $2 < i < n-1$ ó donde $(i-1) \cdot (j-1) = 0$. Aplicando la definición la matriz obtenemos:

$$\begin{matrix} a & a & a & ... & a & a \\ a & a & 0 & ... & 0 & 0 \\ a & 0 & a & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a & 0 & 0 & ... & a & 0 \\ a & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{matrix} \tag{36}$$

Ahora se aplica un cambio de filas entre la primera fila y la última fila y obtenemos la matriz deseada.

$$\begin{matrix} a & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a & a & 0 & ... & 0 & 0 \\ a & 0 & a & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a & 0 & 0 & ... & a & 0 \\ a & a & 0 & ... & 0 & a \end{matrix} \tag{37}$$

De esta forma aplicando dos condiciones y una permutación se puede hacer el llenado de la matriz.

4.6. Ejercicio 13

Dado los vectores:

$$v_1 = [1, 1, 1, -1]^T \quad v_2 = [2, -1, -1, 1]^T$$
$$v_3 = [0, 3, 3, -3]^T \quad v_4 = [-1, 2, 2, 1]^T$$

Generar un sistema ortonormal usando el algoritmo de Gram-Schmidt, para sus versiones Estandard y Modificada, y comparar los resultados obtenidos. ¿Cual es la dimensión del espacio generado por el vector dado?.

Solución:

(a) Método Gram-Schmidt Standard:

$$U_1 = v_1 = [1, 1, 1, -1]^\intercal \tag{38}$$

$$U_2 = v_2 - \frac{< v_2, U_1 >}{\|U_1\|^2} U_1 = [2{,}25, -0{,}75, -0{,}75, 0{,}75]^\intercal \tag{39}$$

$$U_3 = v_3 - \frac{< v_3, U_1 >}{\|U_1\|^2} U_1 - \frac{< v_3, U_2 >}{\|U_2\|^2} U_2 = U_3 = \tag{40}$$

$$U_4 = v_4 - \frac{< v_4, U_1 >}{\|U_1\|^2} U_1 - \frac{< v_4, U_2 >}{\|U_2\|^2} U_2 - \frac{< v_4, U_3 >}{\|U_3\|^2} U_3 = [0, 1, 1, 2]^\intercal \tag{41}$$

La dimensión del espacio generado es 3.

Podemos hacer a los vectores ortonormales:

$$U_1' = \frac{U_1}{\|U_1\|} = \frac{[1, 1, 1, -1]^\intercal}{2} = [0{,}5, 0{,}5, 0{,}5, -0{,}5]^\intercal \tag{42}$$

$$U_2' = \frac{U_2}{\|U_2\|} = \frac{[2{,}25, -0{,}75, -0{,}75, 0{,}75]^\intercal}{2{,}5981} = [-0{,}86603, -0{,}28868, -0{,}28868, 0{,}28868]^\intercal \tag{43}$$

$$U_3' = [0, 0, 0, 0]^\intercal \tag{44}$$

$$U_4' = \frac{U_4}{\|U_4\|} = \frac{[0, 1, 1, 2]^\intercal}{\sqrt{6}} = [0, 0{,}40825, 0{,}40285, 0{,}81650]^\intercal \tag{45}$$

(b) Método de Gram Schmith modificado:

$$u_1 = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^\intercal v_1}} = [0{,}5, 0{,}5, 0{,}5, -0{,}5]^\intercal \tag{46}$$

Hacemos $u_j^{(1)} = v_j - (v_j^T u_1) u_1$ para $j = 2; 3$ y 4

$$u_2^{(1)} = v_2 - (v_2^\intercal u_1) u_1 = [2{,}5, -0{,}5, -0{,}5, 1{,}5]^\intercal \tag{47}$$

$$u_3^{(1)} = v_3 - (v_3^\intercal u_1) u_1 = [-4{,}5, -1{,}5, -1{,}5, -7{,}5]^\intercal \tag{48}$$

$$u_4^{(1)} = v_4 - (v_4^\intercal u_1) u_1 = [-2, 1, 1, 0]^\intercal \tag{49}$$

$$u_2 = \frac{u_2^{(1)}}{\sqrt{(u_2^{(1)})^T u_2^{(1)}}} = [0{,}8333, -0{,}1666, -0{,}1666, 0{,}5]^\intercal \tag{50}$$

Haciendo $u_j^{(2)} = u_j^{(1)} - ((u_j^{(1)})^T u_2) u_2$ para $j = 3$ y 4.

$$u_3^{(2)} = u_3^{(1)} - ((u_3^{(1)})^T u_2) u_2 = [2{,}5, 5{,}5, 5{,}5, -0{,}5]^\intercal \tag{51}$$

$$u_4^{(2)} = u_4^{(1)} - ((u_4^{(1)})^T u_2) u_2 = [0, 3, 3, 2]^\intercal \tag{52}$$

$$u_3 = \frac{u_3^{(2)}}{\sqrt{(u_3^{(2)})^T u_3^{(2)}}} = [0{,}305424, 0{,}671932, 0{,}671932, -0{,}061085]^\intercal \tag{53}$$

Finalmente:

$$u_4^{=} u_4^{(3)} - ((u_4^{(3)})^T u_3) u_3 = [-0{,}189929, -0{,}044182, -0{,}044182, -0{,}092764]^\intercal \tag{54}$$

Entonces, los vectores u_j ortogonales generados son:

$$u_1 = [0{,}5, 0{,}5, 0{,}5, -0{,}5]^\intercal \tag{55}$$

$$u_2 = [0{,}8333, -0{,}1666, -0{,}1666, 0{,}5]^\intercal \tag{56}$$

$$u_3 = [0{,}305424, 0{,}671932, 0{,}671932, -0{,}061085]^\intercal \tag{57}$$

$$u_4 = [-0{,}189929, -0{,}044182, -0{,}044182, -0{,}092764]^\intercal \tag{58}$$

En donde sólo u_4 no es unitario probándose que el sistema de vectores ortogonales es 3.

4.7. Ejercicio 14

Demostrar que si $A = QR$, entonces:

$$\frac{1}{n} K_1(A) \leq K_1(R) \leq n K_1(A)$$

Mientras $K_2(A) = K_2(R)$.

Solución:

Primero demostramos $\frac{1}{n} K_1(A) \leq K_1(R)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} K_1(A) = \frac{1}{n} K_1(QR) &= \frac{1}{n} \|QR\|_1 \|(QR)^{-1}\|_1 \\
&\leq \frac{1}{n} \|Q\|_1 \|R\| \|R^{-1}\|_1 \|Q^T\|_1 \\
&\leq K_1(R)
\end{aligned}$$

Ahora, demostramos la segunda inecuación $\leq K_1(R) \leq n K_1(A)$:

$$\begin{aligned}
K_1(R) &= \|R\|_1 \|R^{-1}\| \\
&\leq \sqrt{n} \|R\|_2 \sqrt{n} \|R^{-1}\|_2 = n \|R\|_2 \|R^{-1}\|_2 = n K_2(A) = n \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \\
&\leq n \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 \\
&\leq n K_1(A)
\end{aligned}$$

Como se demostramos las dos inecuaciones para $A = QR$, entonces:

$$\frac{1}{n} K_1(A) \leq K_1(R) \leq n K_1(A) \tag{59}$$

4.8. Ejercicio 15

Sea una matriz no singular $A \in R^{n,n}$. Determine las condiciones en las que la relación $\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2}$, con x e y (tal como se muestra en la ecuación 3.70), aproximen $\|A^{-1}\|_2$.

Solución:
La ecuación (3.70) denota lo siguiente:

Sea una matriz A definida como $Ay = d$, tal que $A = R^T R$ se tiene:

$$R^T x = d, Ry = d ...(1)$$

Tomando esa ecuación como punto de partida:
Sea $A = U\Sigma V^T$, donde $U\Sigma V^T$ es Singular Value Descomposition de A.
Sea u_i y v_i las i-esimas columnas de U y V respectivamente.
Expandiendo el vector d en (3.70) en base a v_i tenemos:

$d = \sum_{i=1}^n d_i v_i$ y también $x = \sum_{i=1}^n (d_i/\sigma_i) u_i$, $y = \sum_{i=1}^n (d_i/\sigma_i^2) v_i$.

Donde σ_1, σ_2, ... ,σ_n son los valores singulares de A.

Entonces la relación es:

$$\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i/\sigma_i) u_i}{\sum_{i=1}^n (d_i/\sigma_i^2) v_i}} ...(2)$$

De la ecuación (1), tenemos que:
El valor de y:

$$\|y\|_2 = \sqrt{\|R^{-1}\| \|d\|}$$

El valor de x:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\|(R^T)^{-1}\| \|d\|}$$

Entonces de la ecuación (2) tenemos:

$$\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\frac{\|R^{-1}\|}{\|(R^T)^{-1}\|}}$$

Multiplicando por $\|R^{-1}\|$:

$$\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\frac{\|R^{-1}\| \|R^T\|}{\|(R^T)^{-1}\| \|R^T\|}} = \sqrt{\frac{\|R^{-1}\| \|R^T\|}{K(R^T)}}$$

Pero como $K(R) = K(A)$:

$$\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\frac{(\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2})}{K(A^T)}}$$

Entonces:

$$(\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2})^2 = \frac{(\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2})}{K(A^T)}$$

Como A es simétrica, resulta:

$$\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = \frac{1}{K(A)} \leq \|A^{-1}\|$$

Y este resultado es igual a σ_n^{-1} el cual aproxima a $\|A^{-1}\|_2$.

5. Ejercicios Adicionales

Un algoritmo alternativo al método de Gram Schmidt es el método de Gram Schmidt modificado que es obtenido de la siguiente forma: dada la base $a_1, a_2, ...a_n$ calculamos:

$$\widetilde{q_1} = \frac{a_1}{\|a_1\|_2}$$

En el paso k del algoritmo modificamos el cálculo de q_{k+1} de la siguiente manera:

$$a_{k+1}^{(1)} = a_{k+1} - < \widetilde{q_1}, a_{k+1} > \widetilde{q_1}$$
$$a_{k+1}^{(2)} = a_{k+1}^{(1)} - < \widetilde{q_2}, a_{k+1}^{(1)} > \widetilde{q_2}$$

Haciendo hasta el paso k:

$$a_{k+1}^{(k)} = a_{k+1}^{(k-1)} - < \widetilde{q_k}, a_{k+1}^{(k)} > \widetilde{q_k} ...(1)$$

Probar que:

$$a_{k+1}^{(k)} = q_{k+1}$$
$$\widetilde{q_{k+1}} = \frac{a_{k+1}^{(k)}}{\|a_{k+1}^{(k)}\|_2}$$

Solución:

El paso de Gram Schmidt se tiene:

$$q_1 = a_1$$
$$q_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{< a_k, u_j >}{\|u_j\|_2^2} u_j$$

Esto se puede escribir como:

$$q_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} < a_k, \frac{u_j}{\|u_j\|_2} > \frac{u_j}{\|u_j\|_2}$$

Utilizando la expresión dada, podemos reemplazar como:

$$q_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{j=1}^{n-1} < a_{k+1}, \widetilde{q_j} > \widetilde{q_j} ...(2)$$

vemos que la expresion (1) y (2) son equivalentes si expandimos la expresion (2):

$$a_{k+1}^{(k)} = a_{k+1} - \sum_{j=1}^{n-1} < a_{k+1}, \widetilde{q_j} > \widetilde{q_j} ...(3)$$

Por lo que de (2) y (3), vemos que:

$$a_{k+1}^{(k)} = q_{k+1}$$

Y para normalizar todo, hacemos:

$$\widetilde{q_{k+1}} = \frac{a_{k+1}^{(k)}}{\|a_{k+1}^{(k)}\|_2}$$