Universidad Católica San Pablo
Algoritmos y Estructura de Datos
Prof. Jorge Poco
Alumno: Moreno Vera Felipe Adrian

Tarea 1
Entrega:: 27 de Mayo, 2018

Inducción Matemática

1 Sumatorias

1. Probar por inducción que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \geq 0$

   Solución:
   Para n=0, $0 = \frac{0(0+1)}{2}$
   Para n=1, $1 = \frac{1(1+1)}{2}$
   Supongamos que para n se cumple, es decir: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
   Entonces tomando para $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$
   $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)[\frac{n}{2} + 1]$
   $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1)[\frac{n+2}{2}]$
   Y esto es igual:
   $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

2. Probar por inducción que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \geq 0$

   Solución:
   Para n=0, $0^2 = \frac{0(0+1)(2*0+1)}{6}$
   Para n=1, $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$
   Supongamos que para n se cumple, es decir: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   Entonces tomando para $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$
   $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)(n+1) = (n+1)[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)]$
   $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+1)[\frac{2n^2+n+6n+6}{6}] = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$ ...(1)
   Por descomposición:
   $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$
   Reemplazando en (1):
   $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
   Y esto es igual:
   $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

3. Probar por inducción que $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, tal que $n \geq 1$ y $a \neq 1$

   Solución:
   Para n=1, $a^0 + a^1 = a + 1 = \frac{a^2-1}{a-1} = \frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)}$
   Supongamos que para n se cumple, es decir: $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Entonces tomando para $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1}$
$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$
$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+1}(a-1)}{a-1}$
$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1}$
Y esto es igual:
$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

2 Inecuaciones

1. Probar por inducción que $\forall n \geq 1$ tal que si $x > -1$, entonces $(1+x)^n \geq 1+nx$

   Solución:

   Para n=1, $(1+x)^1 \geq 1+1x$
   Supongamos que para n se cumple, es decir: $(1+x)^n \geq 1+nx$
   Entonces para $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$
   Despejando: $(1+x)^{n+1} \geq (1+x+nx+nx^2) = (1+(n+1)x+nx^2)$
   Y esta forma se puede avreviar:
   $(1+x)^{n+1} \geq (1+(n+1)x+nx^2)$ ... (1)
   Como $x > -1$, se tiene que: $x^2 > 1$, entonces sea $k \geq 1$ cumpliría:
   $kx^2 \geq x^2 > 1$, por lo cual en la ecuación 1, se puede deducir que:
   $(1+x)^{n+1} \geq (1+(n+1)x+nx^2) \geq (1+(n+1)x)$
   Por lo cual quedaría: $(1+x)^{n+1} \geq (1+(n+1)x)$

   Entonces por propiedad se tiene:
   $(1+x)^{n+1} \geq (1+(n+1)x)$

2. Probar por inducción que $\forall n \geq 7$ se cumple que $3^n < n!$

   Solución:

   Para n=7, $3^7 \geq 7!$
   Supongamos que para n se cumple $3^n < n!$ con $n \geq 7$
   Entonces para n+1 se tendría: $3^(n+1) = 3^n * 3 < n!.3$ ...(1)
   Pero $n \geq 7 > 3$, entonces $n+1 \geq 8 > 3$, reemplazando en (1):
   $3^(n+1) = 3^n * 3 < n!.3 < n!.(n+1)$
   Por el cual tenemos:
   $3^(n+1) < (n+1)!$

3. Probar por inducción que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \qquad \forall n > 0$

   Solución:

   Para n=1, $1 \leq 2-1 = 1$
   Supongamos que para n se cumple $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
   Entonces para n+1 se tendría: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$ ...(1)
   Como $n > 0$ se tendría que $n+1 > 1$ y $\frac{1}{(n+1)} < 1$ con $\frac{1}{(n+1)^2} < 1$ y $0 < \frac{1}{n} < 1$
   Pero sabemos que : $\frac{1}{(n+1)} < \frac{1}{n} < 1$ entonces $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$
   Por lo tanto en (1):
   $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 2 - (\frac{1}{n})(1 - \frac{1}{(n+1)})$

$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{(n+1)}$

3 Funciones techo y piso

1. Probar por inducción que $\forall n \geq 0$ se cumple que
$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$
2. Probar por inducción que $\forall n \geq 0$ se cumple que
$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$
3. Probar por inducción que $\forall n \geq 1$ y $\forall m \in R^+$,
$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m+1}{m} \right\rfloor$$

4 Divisibilidad

1. Probar por inducción que $\forall n \geq 0$ se cumple que $n^5 - n$ es divisible por 5
2. Probar por inducción que un número decimal es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es divisible por 3
3. Sea $S_n = 1, 2, \ldots, 2n$ el conjunto de los enteros de 1 a $2n$. Sea $T \subset S_n$ cualquier subconjunto que contiene exactamente $n+1$ elementos de S_n. Probar por inducción en n que existen $x, y \in T$, $x \neq y$, tal que x divide en partes iguales a y, sin residuo.

5 Vuelto con monedas

1. Mostrar que cualquier entero mayor que 34, puede ser formado en base a monedas de 5 y 9 céntimos.
2. Mostrar que cualquier entero mayor que 59, puede ser formado usando solamente monedas de 7 y 11 céntimos.
3. Mostrar que para todo $n > 1$, cualquier cantidad entera positiva de vuelto que es al menos $n(n-1)$ puede ser formada usando solamente n y $(n+1)$ céntimos

6 Problemas con el ajedrez

1. Probar por inducción que para todo $n \in N$ y todos los pares $m \in N$, un tablero de $n * m$ tiene exactamente el mismo número de casillas blancas y negras.
2. Probar por inducción que parar todo impar $n, m \in N$, un tablero de $n * m$ tiene cuatro esquinas cuadradas del mismo color.

7 Números de Fibonacci

1. Probar por inducción que $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$
2. Probar por inducción en $n \geq 1$ que $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

8 Coeficientes binomiales

1. Probar por inducción en n que $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$
2. Probar por inducción en $n \geq 1$ para todo $1 \leq m \leq n$, $\binom{n}{m} \leq n^m$

9 Grafos

1. Probar por inducción que un grafo con n vértices puede tener a lo más $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.
2. Un círculo Euleriano en un grafo conexo, es un ciclo en el cual cada arista aparece exactamente una vez. Probar por inducción que todo grafo en el cual cada vértice tiene grado par (ósea, cada vértice tiene un número par de aristas incidentes en él) tiene un ciclo Euleriano.

10 Árboles

1. Probar por inducción que un árbol con n vértices, tiene exactamente $n-1$ aristas.
2. Probar por inducción que un árbol binario completo con n niveles tiene $2^n - 1$ vértices.

11 Geometría

1. Probar por inducción que n círculos dividen el plano en $n^2 - n + 2$ regiones si cada par de círculos interceptan en exactamente dos puntos y no hay tres círculos interceptando en un punto en común. Esto se cumple para otras figuras cerradas?
2. Un polígono es convexo si cada par de puntos en el polígono pueden ser unidos por una línea recta que no salga del polígono. Probar por inducción en $n > 3$ que la suma de los ángulos de un polígono de n vértices es $180(n-2)$.