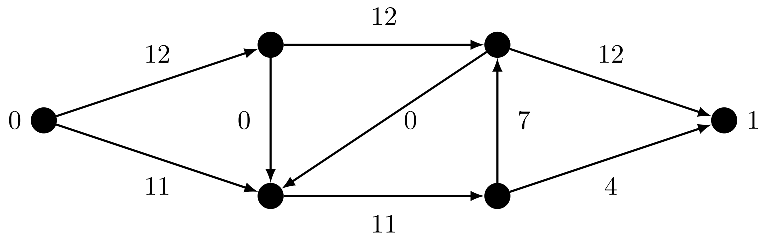
DM 2 corrigé : Flots
Option informatique

I Définitions

1. Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué les capacités sur chaque arc. Trouver un flot de valeur maximum et recopier ce graphe en écrivant le flot passant par chaque arc, à la place des capacités. On ne demande aucune justification.
   ▶ On trouve un flot maximum de valeur 12+11 = 23 (remarque: il n'y a pas unicité du flot maximum):



II Algorithme de Ford-Fulkerson

1. Comment modifier f de façon à obtenir un flot $f_{\overrightarrow{P}}$ de $\overrightarrow{G}$ de valeur $|f| + c_f(\overrightarrow{P})$?
   ▶ Pour tout arc (u, v) de $\overrightarrow{P}$:
   - Si $(u, v) \in \overrightarrow{E}$, on augmente $f(u, v)$ de $c_f(\overrightarrow{P})$.
   - Si $(v, u) \in \overrightarrow{E}$, on diminue $f(v, u)$ de $c_f(\overrightarrow{P})$.

   Si $\overrightarrow{P}$ utilise les sommets $0 = v_1 \longrightarrow v_2 ... \longrightarrow v_k = 1$ alors la modification de f sur (v_{i-1}, v_i) est compensée par la modification de f sur (v_i, v_{i+1}): la « loi de Kirchhoff » est toujours vérifiée.

On représente $\overrightarrow{G}_f = (V, \overrightarrow{E}_f)$ en Caml par une matrice g de taille $|V| \times |V|$ contenant $c_f(u, v)$ sur la ligne u, colonne v. Dans toutes les questions de programmation on supposera les capacités entières: g sera donc de type `int array array`.
La représentation de $\overrightarrow{G}$ est la même que celle de $\overrightarrow{G}_f$ pour $f = 0$.
On représente $\overrightarrow{P}$ par un tableau `pere` des prédécesseurs tel que: (u, v) est un arc de $\overrightarrow{P} \implies u =$ `pere.`(v).

2. Écrire une fonction `cmin : int array array -> int array -> int` telle que, si g est une matrice représentant $\overrightarrow{G}_f$ et `pere` un tableau des prédécesseurs de $\overrightarrow{P}$, `cmin g pere` renvoie $c_f(\overrightarrow{P})$.

```
let cmin g pere =
  let rec aux v =
    let p = pere.(v) in
    if p = 0 then g.(0).(v)
    else min g.(p).(v) (aux p) in
  aux 1;;
```

3. Écrire une fonction `augment : int array array -> int array -> int` telle que, si g est une matrice représentant $\overrightarrow{G}_f$ et `pere` un tableau des prédécesseurs de $\overrightarrow{P}$, `augment g pere` modifie g pour qu'il représente $\overrightarrow{G}_{f_{\overrightarrow{P}}}$, où $f_{\overrightarrow{P}}$ est le flot de la question II.1. De plus, `augment g pere` renverra $c_f(\overrightarrow{P})$.

```
let augment g pere =
  let cm = cmin g pere in
  let rec aux v =
    if v = 0 then cm
    else (let p = pere.(v) in
          g.(p).(v) <- g.(p).(v) - cm;
          g.(v).(p) <- g.(v).(p) + cm;
          aux p) in
  aux 1;;
```

On considère l'algorithme suivant (où $f_{\overrightarrow{P}}$ est obtenu par la question II.1):

Algorithme de Ford-Fulkerson
Initialement: $\overrightarrow{G}_f = \overrightarrow{G}$ Tant qu'il existe un chemin $\overrightarrow{P}$ de 0 à 1 dans $\overrightarrow{G}_f$:   Modifier $\overrightarrow{G}_f$ en $\overrightarrow{G}_{f_{\overrightarrow{P}}}$

4. Écrire une fonction `ford : int array array -> (int array array -> int array) -> int` telle que:

   - si `g` est une matrice représentant $\overrightarrow{G}$,
   - si `chemin` est une fonction telle que `chemin g` renvoie un tableau des prédécesseurs d'un chemin (s'il existe) du sommet 0 au sommet 1 dans `g` (si un tel chemin n'existe pas, le tableau `pere` renvoyé par `chemin g` est tel que `pere.(1) = -1`),

   `ford g chemin` applique l'algorithme de Ford-Fulkerson (en utilisant `chemin` pour trouver le chemin $\overrightarrow{P}$) et renvoie la valeur du flot f obtenu à la fin de l'algorithme. (On pourra modifier `g` sans faire de copie.)

```ocaml
let rec ford g chemin =
  let pere = chemin g in
  if pere.(1) = -1 then 0
  else let cm = augment g pere in
       cm + ford g chemin;;
```

5. On suppose que toutes les capacités de $\overrightarrow{G}$ sont entières, c'est à dire $c : \overrightarrow{E} \longrightarrow \mathbb{N}$. Soit $|f^*|$ la valeur maximum d'un flot de $\overrightarrow{G}$. Montrer que le nombre d'itérations de la boucle « Tant que » de l'algorithme de Ford-Fulkerson est au plus $|f^*|$.

   ▶ Si les capacités de $\overrightarrow{G}_f$ sont des entiers, alors $c_f(\overrightarrow{P})$ est un entier et les capacités de $\overrightarrow{G}_{f_{\overrightarrow{P}}}$ sont aussi des entiers. Donc, tout au long de l'algorithme de Ford-Fulkerson, les valeurs de $c_f(\overrightarrow{P})$ sont des entiers ≥ 1. Comme la valeur du flot est 0 initialement, $|f^*|$ au plus à la fin, et augmente de 1 au moins à chaque itération, il y a bien au plus $|f^*|$ itérations. Il peut y avoir exactement $|f^*|$ itérations, par exemple si $\overrightarrow{G}$ contient seulement deux sommets 0, 1 et un arc de capacité 1 de 0 vers 1.

Remarque: si les capacités sont irrationnelles (ce qu'on ne considérera pas dans ce DM), l'algorithme de Ford-Fulkerson peut faire « boucle infinie »...

III Correction

Soit $S \subseteq V$ une **coupe** de $\overrightarrow{G}$, c'est à dire un ensemble de sommets tel que $0 \in S$ mais $1 \notin S$. On définit:

- $f(S) = \sum\limits_{\overrightarrow{e} \in S^+} f(\overrightarrow{e}) - \sum\limits_{\overrightarrow{e} \in S^-} f(\overrightarrow{e})$ (« flot sortant de S »)
- $c(S) = \sum\limits_{\overrightarrow{e} \in S^+} c(\overrightarrow{e})$

On peut remarquer que la valeur d'un flot s'écrit aussi $|f| = f(\{0\})$.

1. Soit S une coupe de $\overrightarrow{G}$ et f un flot de $\overrightarrow{G}$. Montrer que $f(S) \leq c(S)$.
   ▶ $f(S) = \sum\limits_{\overrightarrow{e} \in S^+} f(\overrightarrow{e}) - \sum\limits_{\overrightarrow{e} \in S^-} f(\overrightarrow{e}) \leq \sum\limits_{\overrightarrow{e} \in S^+} f(\overrightarrow{e}) \leq \sum\limits_{\overrightarrow{e} \in S^+} c(\overrightarrow{e}) = c(S)$.

2. Soit S une coupe de $\overrightarrow{G}$ et f un flot de $\overrightarrow{G}$. Montrer que $f(S) = |f|$.
   On pourra raisonner par récurrence en précisant clairement l'hypothèse de récurrence.
   ▶ Soit f un flot de $\overrightarrow{G}$. Soit $H(k)$: « S est une coupe de $\overrightarrow{G}$ avec k sommets $\implies f(S) = |f|$ ».
   $H(1)$ est vrai car alors $S = \{0\}$.

   Supposons $H(k)$ vraie pour un $k \geq 1$. Soit S une coupe de $\overrightarrow{G}$ avec $k+1$ sommets et $v \in S$. Alors, en utilisant la définition: $f(S) = f(S \backslash \{v\}) + f(\{v\})$. Or $f(S \backslash \{v\}) = |f|$ par hypothèse de récurrence et $f(\{v\}) = 0$ par la « loi de Kirchoff ». Donc $f(S) = |f|$: $H(k+1)$ est vraie.

3. En déduire que si il existe une coupe S et un flot f tel que $f(S) = c(S)$ alors f est un flot de valeur maximum et S est une coupe de capacité minimum (c'est le théorème max-flow min-cut). Justifiez à présent votre réponse à la question I.1.
   ▶ Supposons qu'il existe une coupe S et un flot f tel que $f(S) = c(S)$. Soit f^* un flot de valeur maximum. Alors $|f^*| \underset{3.2}{=} f^*(S) \underset{3.1}{\leq} c(S) = f(S) = |f|$. Donc f est un flot de valeur maximum et un raisonnement similaire montre que S est une coupe de capacité minimum.

4. En déduire que si l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, le dernier flot calculé est un flot de valeur maximum de $\overset{\#}{G}$.
   ▶ Soit S l'ensemble des sommets accessibles depuis 0 dans $\overset{\#}{G}_f$ à la fin de l'algorithme de Ford-Fulkerson. Alors S contient 0 mais pas 1 donc est une coupe.
   Comme il n'y a aucun arc de capacité résiduelle strictement positive qui sort de S, $f(S) = c(S)$, ce qui permet de conclure d'après la question précédente.

IV Recherche de chemin

Dans cette partie, on étudie plusieurs façon de trouver un chemin $\overset{\#}{P}$ dans l'algorithme de Ford-Fulkerson (c'est à dire des implémentations de fonction `chemin` utilisé par la fonction `ford` de la question II.4).

Parcours en profondeur

1. Écrire une fonction `dfs : int array array -> int array` telle que, si `g` est une matrice représentant un graphe résiduel $\overset{\#}{G}_f$, `dfs` renvoie le tableau `pere` des prédécesseurs d'un parcours en profondeur depuis le sommet 0. Ainsi `pere.(u)` est le sommet qui a permis de visiter `u` (si `u` n'a pas été visité on donnera à `pere.(u)` la valeur `-1`).

```
let dfs g =
  let n = Array.length g in
  let pere = Array.make n (-1) in
  let rec aux u =
      for v = 0 to n - 1 do
        if g.(u).(v) > 0 && pere.(v) = -1
        then (pere.(v) <- u;
              aux v)
      done in
  aux 0;
  pere;;
```

2. Quelle est la complexité dans le pire des cas de `ford g dfs`, en fonction du nombre de sommets $|V|$ et de la valeur maximum $|f^*|$ d'un flot?
   ▶ `dfs` est en complexité $O(|V|^2)$ (un appel récursif au plus par sommet, effectuant $|V|$ itérations de boucle for). D'après 2.5, `ford g dfs` a complexité $O(|V|^2|f^*|)$.

On peut améliorer l'algorithme précédent en essayant de trouver des chemins qui augmentent de beaucoup le flot.

3. Écrire une fonction `cmax : int array array -> int` telle que `cmax m` renvoie la valeur maximum d'une case de la matrice `m`.

```
let cmax g =
  let res = ref g.(0).(0) in
  let n = Array.length g in
  for u = 0 to n - 1 do
    for v = 0 to n - 1 do
      res := max !res g.(u).(v)
    done;
  done; !res;;
```

4. Comment modifier `dfs` en une fonction `kdfs` telle que `kdfs g k` permette de trouver un chemin (s'il existe) de 0 à 1 n'utilisant que des arcs (u, v) tels que $c_f(u, v) \geq k$?
   ▶ Il suffit de ne s'appliquer récursivement que si l'arc est de capacité résiduelle supérieure à k:

```
let kdfs g k =
  let n = Array.length g in
  let pere = Array.make n (-1) in
  let rec aux p u =
    if pere.(u) = -1 then (pere.(u) <- p;
                          for v = 0 to n - 1 do
                            if g.(u).(v) >= k then aux u v
                          done) in
  aux 0 0;
  pere;;
```

5. Écrire alors une fonction `kford : int array array -> int` renvoyant la valeur maximum d'un flot dans un graphe, en utilisant la version modifiée suivante de l'algorithme de Ford-Fulkerson ($k/2$ renvoyant, comme en Caml, la division euclidienne de k par 2):

Algorithme de Ford-Fulkerson modifié

Initialement: $\overrightarrow{G}_f = \overrightarrow{G}$
$k \leftarrow$ capacité maximum d'un arc de $\overrightarrow{G}$
Tant que $k > 0$:
    Tant qu'il existe un chemin $\overrightarrow{P}$ de 0 à 1 dans $\overrightarrow{G}_f$ tel que $c_f(\overrightarrow{P}) \geq k$:
        Modifier $\overrightarrow{G}_f$ en $\overrightarrow{G}_{f_{\overrightarrow{P}}}$
    $k \leftarrow k/2$

```
let rec kford k g =
  if k = 0 then 0
  else let pere = kdfs g k in
       if pere.(1) = -1 then kford (k/2) g
       else let cm = augment g pere in
            cm + kford k g;;
```

Parcours en largeur

6. Indiquer par quelles instructions Caml remplacer les deux commentaires de la fonction `bfs` suivante de façon à ce que, si `g` est un graphe résiduel représenté par matrice d'adjacence, `bfs g` renvoie le tableau `pere` des prédécesseurs d'un parcours en largeur depuis le sommet 0 :

```
let bfs g =
  let n = Array.length g in
  let pere = Array.make n (-1) in
  let f = file_new () in
  (* initialiser f et pere *)
  while not f.is_empty () do
    let u = f.take () in
    (* à compléter *)
  done;
  pere;;
```

▶

```
let bfs g =
  let n = Array.length g in
  let pere = Array.make n (-1) in
  let f = file_new () in
  f.add 0;
  pere.(0) <- 0;
  while not f.is_empty () do
    let u = f.take () in
    for v = 0 to n - 1 do
      if g.(u).(v) > 0 && pere.(v) = -1 then
        (pere.(v) <- u;
         f.add v)
    done;
  done;
  pere;;
```

(Ne pas passer trop de temps sur les trois questions suivantes: elles sont difficiles.)

On note $d_f(v)$ le nombre minimum d'arcs d'un chemin du sommet 0 au sommet v dans un graphe résiduel $\overrightarrow{G}_f$. On suppose que les chemins $\overrightarrow{P}$ de l'algorithme de Ford-Fulkerson sont obtenus par parcours en largeur.

7. Soit $\overrightarrow{P}$ un chemin de 0 à 1 trouvé par parcours en largeur dans un graphe résiduel $\overrightarrow{G}_f$. Soit $\overrightarrow{G}_{f_{\overrightarrow{P}}}$ obtenu depuis $\overrightarrow{G}_f$ comme à la question II.1. Soit $v \in V$. Montrer que $d_f(v) \leq d_{f_{\overrightarrow{P}}}(v)$.

8. Supposons qu'un arc (u, v) disparaisse de $\overrightarrow{G}_f$ à un moment de l'algorithme de Ford-Fulkerson ((u, v) est dans $\overrightarrow{G}_f$ mais pas dans $\overrightarrow{G}_{f_{\overrightarrow{P}}}$) puis réapparaisse plus tard dans un certain $\overrightarrow{G}_{f'}$ ($(u, v) \notin \overrightarrow{G}_{f'}$ mais $(u, v) \in \overrightarrow{G}_{f'_{\overrightarrow{P}}}$). Montrer que $d_{f'}(u) \geq d_f(u) + 2$.

9. En déduire que l'algorithme de Ford-Fulkerson termine après au plus $|V||\overrightarrow{E}|$ itérations de la boucle « Tant que ».

Plus large chemin (widest path)

Si $\overrightarrow{P}$ est un chemin de 0 à 1 dans un graphe résiduel $\overrightarrow{G}_f$, on appelle $c_f(\overrightarrow{P})$ la **largeur** de $\overrightarrow{P}$. On cherche dans cette sous-partie un **plus large chemin** (de largeur maximum).

10. On rappelle l'algorithme de Dijkstra pour trouver les distances depuis un sommet `r` dans un graphe pondéré par `w` (à la fin de l'algorithme, `dist.(v)` contient la distance de `r` à `v`):

    Algorithme de Dijkstra

    Initialement: `next` contient tous les sommets
    `dist.(r) <- 0` et `dist.(v) <-` ∞, $\forall$ `v` $\neq$ `r`
    Tant que `next` $\neq \emptyset$:
    Extraire `u` de `next` tel que `dist.(u)` soit minimum
    Pour tout voisin `v` de `u`:
    `dist.(v) <- min dist.(v) (dist.(u) + w(u, v))`

    En s'inspirant de cet algorithme, écrire en pseudo-code un algorithme permettant de trouver la largeur d'un plus large chemin de 0 à 1 dans un graphe résiduel $\overrightarrow{G}_f$. Prouver que votre algorithme est correct. **Remarque : utiliser un arbre couvrant de poids maximum (Kruskal/Prim) serait préférable...**
    ▶

    Algorithme de plus large chemin

    Initialement: `next` contient tous les sommets
    `dist.(0) <-` ∞ et `dist.(v) <-` $-\infty$, $\forall$ `v` $\neq$ `0`
    Tant que `next` $\neq \emptyset$:
    Extraire `u` de `next` tel que `dist.(u)` soit maximum
    Pour tout voisin `v` de `u`:
    `dist.(v) <- max dist.(v) (min dist.(u) w(u, v))`

    Soit C un plus large chemin de 0 à $v \neq 0$. Soit u le prédécesseur de v dans C et C' le sous-chemin de C de 0 à u. Alors la largeur de C est égale soit à la largeur de C', soit à $w(u, v)$ (et en fait au maximum des deux).

11. Proposez une structure de donnée pertinente pour implémenter `next` dans la question précédente. Quelle serait alors la complexité de votre algorithme?
    ▶ On peut utiliser un tableau de booléen, comme dans le cours, ce qui donnerait une complexité $O(|V|^2)$ ($O(|V|)$ pour chaque extraction de minimum).

Une autre façon de trouver un plus large chemin est de réutiliser la fonction `kdfs` de la question IV.4 en cherchant par dichotomie le `k` maximum tel que `kdfs g k` trouve un chemin de 0 à 1 dans `g`:

12. Écrire une fonction `maxkdfs : int array array -> int array` telle que, si `g` représente un graphe résiduel, `maxkdfs g` renvoie le tableau des prédécesseurs d'un plus large chemin de 0 à 1 dans `g`, en utilisant une méthode par dichotomie.
    ▶ On appelle `maxkdfs g 0 (cmax g)` pour avoir la fonction souhaitée:

```
(* renvoie le k maximum avec k1 <= k < k2 *)
let rec maxkdfs g k1 k2 =
  let pere = kdfs g m in
  if k2 = k1 + 1 then pere
  else let m = (k1 + k2)/2 in (* k1 < m < k2 *)
       if pere.(1) = -1 then maxkdfs g k1 m
       else maxkdfs g m k2;;
```

13. Quelle est la complexité de `maxkdfs g`?
    ▶

    - `cmax g` est en $O(|V|^2)$
    - `maxkdfs g 0 (cmax g)` effectue $O(\log_2($`cmax g`$))$ appels (voir démo de la complexité de la recherche dichotomique, déjà faite) à `kdfs g m` qui est en $O(|V|^2)$

    D'où une complexité totale $O(|V|^2 \log($`cmax g`$))$.

V Applications

Connectivité

On dit que des chemins sont **disjoints** s'ils n'ont pas d'arc en commun. Soit $\overrightarrow{G}' = (V', \overrightarrow{E}')$ un graphe orienté (sans capacité) et u, v deux sommets de $\overrightarrow{G}'$. La **connectivité** de u à v est le nombre maximum de chemins disjoints de u à v, dans $\overrightarrow{G}'$.

1. Expliquer comment utiliser l'algorithme de Ford-Fulkerson du II pour déterminer la connectivité de u à v.
   ► On utilise u à la place de 0, v à la place de 1, et on met une capacité 1 sur chaque arête. La valeur maximum d'un flot est alors la connectivité de u à v.

La **connectivité** de $\overrightarrow{G}'$ est la connectivité minimum d'un sommet quelconque de $\overrightarrow{G}'$ à un autre.

2. Montrer que $\overrightarrow{G}'$ a un sommet s de degré sortant inférieur ou égal à $\dfrac{|\overrightarrow{E}'|}{|V'|}$.

   ► $\dfrac{|\overrightarrow{E}'|}{|V'|}$ est le degré sortant moyen des sommets de $\overrightarrow{G}'$: il existe un sommet dont le degré sortant est supérieur ou égal à la moyenne.

3. En utilisant la question III.3, en déduire que la connectivité de $\overrightarrow{G}'$ peut être déterminée en $O(\dfrac{|\overrightarrow{E}'|}{|V'|}C)$, où C est la complexité de la méthode utilisée par Ford-Fulkerson pour trouver un chemin.
   ► Soient u et v des sommets tels que la connectivité c de $\overrightarrow{G}'$ soit celle de u à v. D'après III.3, c'est aussi la capacité minimum d'une coupe S séparant u et v. Si $s \in S$ alors une utilisation de utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson avec $0 = s$ et $1 = v$ donnera c. Si $s \notin S$ alors une utilisation de utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson avec $0 = u$ et $1 = s$ donnera c. Il suffit donc d'appliquer Ford-Fulkerson avec $0 = s$ et pour tout autre sommet 1, puis appliquer Ford-Fulkerson avec $1 = s$ et pour tout autre sommet 0. Le maximum des valeurs trouvées est alors c. De plus chaque utilisation de Ford-Fulkerson effectue $O(\dfrac{|\overrightarrow{E}'|}{|V'|})$ recherches de chemin car chaque arc sortant de s ne peut être utilisé qu'une seule fois. D'où le résultat.

Couplage

Un **couplage** dans un graphe non-orienté est un ensemble M d'arêtes dont toutes les extrémités sont différentes (si $e_1 \in M$ et $e_2 \in M$ alors $e_1 \cap e_2 = \emptyset$). Un couplage avec un nombre maximum d'arêtes est un **couplage maximum**.

4. Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté **biparti**, c'est à dire que $V = A \sqcup B$ et toute arête de G a une extrémité dans A et une dans B. Expliquer comment on pourrait utiliser l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un couplage maximum dans G.
   Indice: on pourra orienter les arêtes de G, rajouter un sommet 0 et un sommet 1 à G (on suppose $0 \notin V$, $1 \notin V$) et donner une capacité à chaque arc.