Programmation linéaire en nombre entiers

Quentin Fortier

February 2, 2023

Programmation linéaire en nombre entiers

Un Programme Linéaire en Nombre Entier (PLNE) a la particularité d'avoir des variables entières plutôt que réelles :

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{N}^n} \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$$

De très nombreux problèmes de combinatoire peuvent se mettre sous la forme de PLNE.
Malheureusement, il n'existe pas d'algorithme polynomial pour résoudre un PLNE quelconque.

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Il n'existe pas d'algorithme polynomial pour résoudre un PLNE quelconque.
On peut essayer de se ramener à un PL, en faisant une **relaxation**, c'est à dire en considérant le même problème mais avec des variables réelles.

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Considérons ce PLNE :

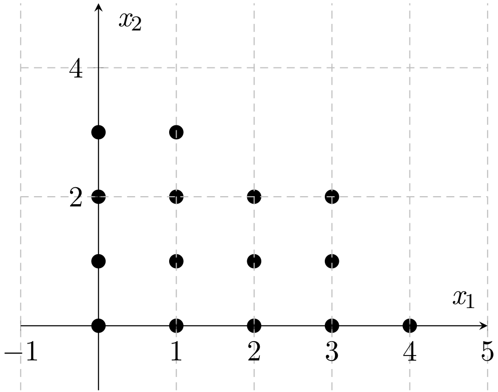
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$



Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Relaxation :

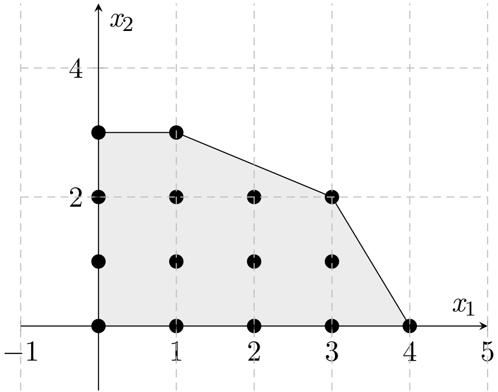
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

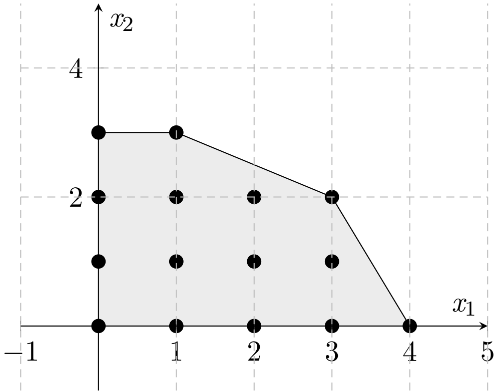


Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Relaxation :

$$\max_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Comme **les sommets sont à coordonnées entières**, on peut résoudre la relaxation pour obtenir la solution optimale du PLNE.

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Exercice

Donner un exemple de PLNE dont l'optimum est différent de l'optimum de la relaxation

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Exercice

Donner un exemple de PLNE dont l'optimum est différent de l'optimum de la relaxation

$$\max x$$

$$x \leq 0.5$$

$$x \in \mathbb{N}$$

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Définition

Une matrice A est **totalement unimodulaire** (TU) si toutes les sous-matrices carrés de M ont un déterminant égal à 0, 1 ou -1

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Définition

Une matrice A est **totalement unimodulaire** (TU) si toutes les sous-matrices carrés de M ont un déterminant égal à 0, 1 ou -1

Soit P le polyhèdre définit par le PL :

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n} \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Théorème

Si A est TU alors les sommets de P sont entiers (i.e. à coordonnées entières).

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Théorème

Si A est TU alors les sommets de P sont entiers (i.e. à coordonnées entières).

Preuve : Un sommet de P est obtenu lorsque n inégalités deviennent des égalités, i.e.
quand une sous matrice $\widetilde{A}$ de taille $n \times n$ vérifie $\widetilde{A}X = \widetilde{b}$.
D'après les règles de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(\widetilde{A}_i)}{\det(\widetilde{A})}$$

Comme $\det(\widetilde{A}) = \pm 1$, $\boxed{x_i \in \mathbb{N}}$.

Exemple : matching et vertex cover

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Définition

Un **couplage** (*matching*) de G est un ensemble d'arêtes 2 à 2 disjointes (sans extrémité en commun)

Exemple : matching et vertex cover

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Définition

Un **couplage** (*matching*) de G est un ensemble d'arêtes 2 à 2 disjointes (sans extrémité en commun)

Définition

Une **couverture par sommets** (*vertex cover*) de G est un ensemble de sommets telle que toute arête soit adjacente à un de ces sommets

Exemple : matching et vertex cover

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Définition

Un **couplage** (*matching*) de G est un ensemble d'arêtes 2 à 2 disjointes (sans extrémité en commun)

Définition

Une **couverture par sommets** (*vertex cover*) de G est un ensemble de sommets telle que toute arête soit adjacente à un de ces sommets

Théorème

Si $M \subseteq E$ est un couplage et $C \subseteq V$ une couverture par sommets :

$$|M| \leq |C|$$

Exemple : matching et vertex cover

On définit des variables $x_e \in \{0, 1\}$ indiquant si une arête e est sélectionnée dans un matching.

Exemple : matching et vertex cover

On définit des variables $x_e \in \{0,1\}$ indiquant si une arête e est sélectionnée dans un matching.

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$

$$\forall v \in V, \quad \sum_{\{u,v\} \in E} x_e \leq 1$$

$$\forall e \in E, \; x_e \in \{0,1\} \; (*)$$

Exemple : matching et vertex cover

On définit des variables $x_e \in \{0,1\}$ indiquant si une arête e est sélectionnée dans un matching.

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$

$$\forall v \in V, \quad \sum_{\{u,v\} \in E} x_e \leq 1$$

$$\forall e \in E, \; x_e \in \{0,1\} \; (*)$$

On relaxe $(*)$ en $x_e \geq 0$ (i.e. $x_e \in \mathbb{R}^+$).

Exemple : matching et vertex cover

Définition

Soit G un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n et les arêtes de 1 à p. La **matrice d'incidence** de G est une matrice M de taille $n \times p$ telle que $M_{i,j}$ est égale à 1 si le sommet i est une extremité de l'arête j, 0 sinon.

On peut donc réécrire le PL relaxé des couplages :

$\max \sum_{e \in E} x_e$	$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$
$\forall v \in V, \quad \sum_{\{u,v\} \in E} x_e \leq 1$	$M\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$
$\forall e \in E, \; x_e \geq 0$	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$

Exemple : matching et vertex cover

Lemme

La matrice d'incidence M d'un graphe **biparti** est TU.

Exemple : matching et vertex cover

Lemme

La matrice d'incidence M d'un graphe **biparti** est TU.

$\rightarrow$ Algorithme pour trouver un couplage maximum dans un graphe biparti : résoudre le PL (avec l'algo. du simplexe ou de l'ellipsoïde) et obtenir un sommet du polytope qui est à coordonnées entières.

Exemple avec Binder

Exemple : matching et vertex cover

Dual du PL des couplages :

Exemple : matching et vertex cover

Dual du PL des couplages :

$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$	$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$
$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$	$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$

Exemple : matching et vertex cover

Dual du PL des couplages :

$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$	$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$
$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$	$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$

$\mathbf{M}^T$ est TU pour un graphe biparti donc l'optimum du dual est atteint en des variables entières.
Ces variables correspondent à une couverture par sommets.

Exemple : matching et vertex cover

Dual du PL des couplages :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x} \qquad\qquad \min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n \qquad\qquad \mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p \qquad\qquad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

$\mathbf{M}^T$ est TU pour un graphe biparti donc l'optimum du dual est atteint en des variables entières.
Ces variables correspondent à une couverture par sommets. D'après le théorème de dualité forte :

Théorème de König

Dans un graphe biparti, la taille maximum d'un couplage est égal à la taille minimum d'une couverture par sommets.

Approximation

Lorsque l'optimum du PL relaxé est atteint en un sommet qui n'est pas entier, on peut arrondir ses coordonnées pour espérer obtenir une **approximation** de l'optimum du PLNE.

Approximation : vertex-cover

On considère à nouveau le PL relaxé de la couverture de sommets, mais dans un graphe pas forcément biparti :

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \ \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \ \forall u \in V$$

Exercice

Montrer que l'optimum n'est pas forcément atteint en des valeurs entières.

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V,\ y^*_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V,\ y^*_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u, v\} \in E$$
$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V,\ y_v^* \geq \frac{1}{2}\}$.
Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*
- $\sum_{i=1}^{n} y_i^* \leq c^*$

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V,\ y_v^* \geq \frac{1}{2}\}$.
Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*
- $\sum_{i=1}^{n} y_i^* \leq c^*$
- $\sum_{i=1}^{n} y_i^* \geq \frac{1}{2}|C|$

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \ \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V, \ y^*_v \geq \frac{1}{2}\}$.
Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y^*_i \leq c^*$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y^*_i \geq \frac{1}{2}|C|$

Donc $\boxed{|C| \leq 2c^*}$: ceci donne une **2-approximation**.

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V,\ y_v^* \geq \frac{1}{2}\}$.
Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.
$\boxed{|C| \leq 2c^*}$: ceci donne une **2-approximation**.

Exemple avec Binder