Algorithmes de flots

Quentin Fortier

October 14, 2021

Définitions

On considère un graphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ avec une **capacité** $c : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Définitions

On considère un graphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ avec une **capacité** $c : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Notations

Si $A \subseteq V$, on note:

- $A^+ = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \in A, v \notin A\}$ (« arcs sortants de A »)

Définitions

On considère un graphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ avec une **capacité** $c : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Notations

Si $A \subseteq V$, on note:

- $A^+ = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \in A, v \notin A\}$ (« arcs sortants de A »)
- $A^- = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \notin A, v \in A\}$ (« arcs rentrants dans A »)

Définitions

On considère un graphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ avec une **capacité** $c : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Notations

Si $A \subseteq V$, on note:

- $A^+ = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \in A, v \notin A\}$ (« arcs sortants de A »)
- $A^- = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \notin A, v \in A\}$ (« arcs rentrants dans A »)
- Si $v \in V$, $v^+ = \{v\}^+$ et $v^- = \{v\}^-$

Définitions

On considère un graphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ avec une **capacité** $c : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Notations

Si $A \subseteq V$, on note:

- $A^+ = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \in A, v \notin A\}$ (« arcs sortants de A »)
- $A^- = \{(u, v) \in \vec{E} \mid u \notin A, v \in A\}$ (« arcs rentrants dans A »)
- Si $v \in V$, $v^+ = \{v\}^+$ et $v^- = \{v\}^-$

Définition

Si $f : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $B \subseteq \vec{E}$:

$$f(B) = \sum_{\vec{e} \in B} f(\vec{e})$$

Définitions

Flot

Soit $s, t \in V$.
Un **s-t flot** est une fonction $f : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall \vec{e} \in \vec{E}$: $\boxed{0 \leq f(\vec{e}) \leq c(\vec{e})}$

Définitions

Flot

Soit $s, t \in V$.
Un **s-t flot** est une fonction $f : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall \vec{e} \in \vec{E}$: $\boxed{0 \leq f(\vec{e}) \leq c(\vec{e})}$
- $\forall v \in V - \{s, t\}$: $\boxed{f(v^-) = f(v^+)}$

Valeur d'un flot

La **valeur** d'un flot f est définie par $|f| = f(s^+)$

Définitions

Flot

Soit $s, t \in V$.
Un **s-t flot** est une fonction $f : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall \vec{e} \in \vec{E}$: $\boxed{0 \leq f(\vec{e}) \leq c(\vec{e})}$
- $\forall v \in V - \{s, t\}$: $\boxed{f(v^-) = f(v^+)}$

Valeur d'un flot

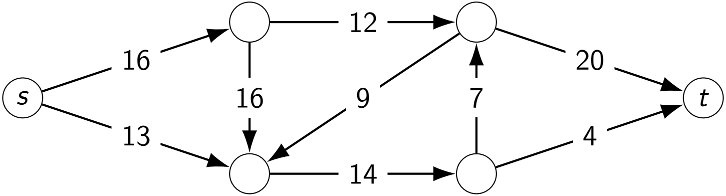
La **valeur** d'un flot f est définie par $|f| = f(s^+)$

Problème

Trouver un flot dont la valeur est maximum.

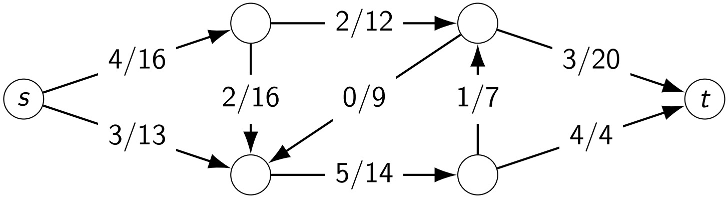
Exemple

Exemple de graphe $\overrightarrow{G}$ avec une capacité c sur les arcs :



Définitions

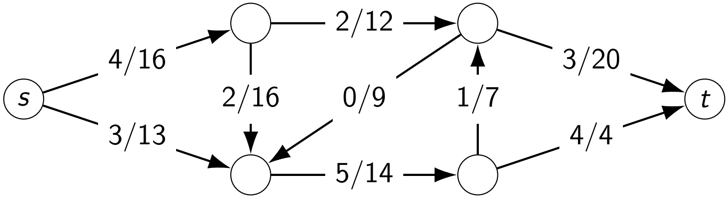
Exemple de flot :



Valeur du flot :

Définitions

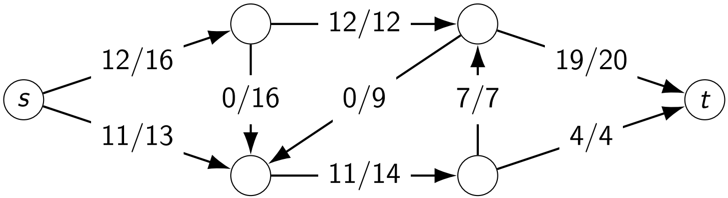
Exemple de flot :



Valeur du flot : $4 + 3 = 7$

Définitions

Exemple de flot de valeur maximum :



Valeur de ce flot : 23

Algorithme de Ford-Fulkerson

Idée : partir d'un flot f non optimal (souvent le flot nul partout) et l'améliorer petit à petit.

Algorithme de Ford-Fulkerson

Idée : partir d'un flot f non optimal (souvent le flot nul partout) et l'améliorer petit à petit.

Graphe résiduel

La **capacité résiduelle** d'un arc est le flot que l'on peut encore y ajouter (capacité initiale moins flot)

Algorithme de Ford-Fulkerson

Idée : partir d'un flot f non optimal (souvent le flot nul partout) et l'améliorer petit à petit.

Graphe résiduel

La **capacité résiduelle** d'un arc est le flot que l'on peut encore y ajouter (capacité initiale moins flot)
Le **graphe résiduel** est obtenu en conservant la capacité résiduelle de chaque arc. Si un arc a une capacité résiduelle nulle, il est supprimé.

Algorithme de Ford-Fulkerson

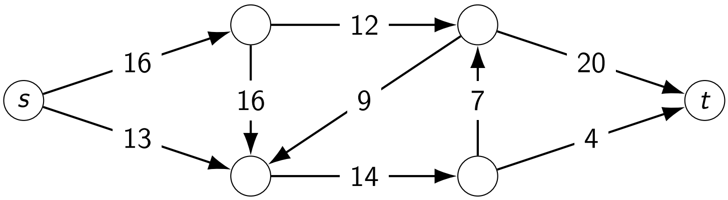
Idée : partir d'un flot f non optimal (souvent le flot nul partout) et l'améliorer petit à petit.

Graphe résiduel

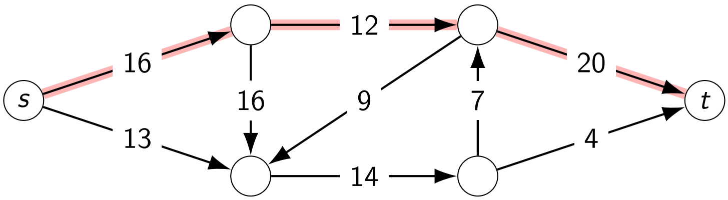
La **capacité résiduelle** d'un arc est le flot que l'on peut encore y ajouter (capacité initiale moins flot)
Le **graphe résiduel** est obtenu en conservant la capacité résiduelle de chaque arc. Si un arc a une capacité résiduelle nulle, il est supprimé.

Si on trouve un chemin $\overrightarrow{P}$ de s à t dans le graphe résiduel, on peut augmenter le flot du minimum des capacités de $\overrightarrow{P}$.

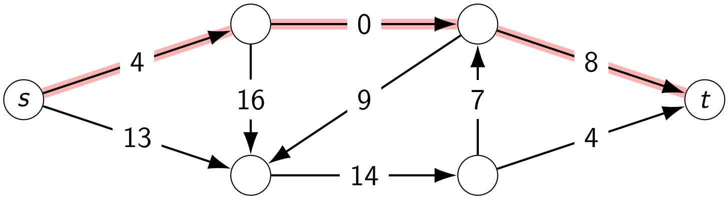
Algorithme de Ford-Fulkerson



Algorithme de Ford-Fulkerson



Algorithme de Ford-Fulkerson



Flot augmenté de 12 (et capacité résiduelle diminuée de 12 le long du chemin).
On note sur chaque arc la capacité résiduelle (restante).

Algorithme de Ford-Fulkerson

Tant que $\exists$ un chemin $\overrightarrow{P}$ de s à t dans le graphe résiduel :

  $c \longleftarrow$ minimum des capacités de $\overrightarrow{P}$

  Diminuer de c la capacité des arcs de $\overrightarrow{P}$

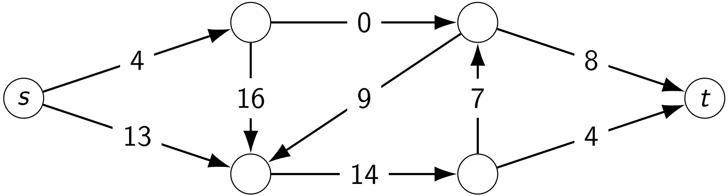
Algorithme de Ford-Fulkerson

Algorithme de Ford-Fulkerson

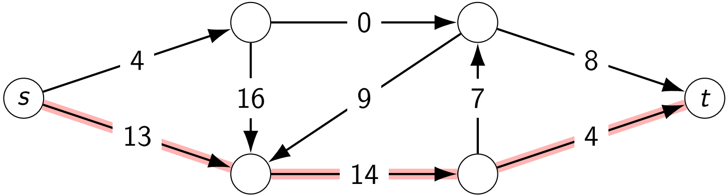
Tant que $\exists$ un chemin $\overrightarrow{P}$ de s à t dans le graphe résiduel :
$c \longleftarrow$ minimum des capacités de $\overrightarrow{P}$
Diminuer de c la capacité des arcs de $\overrightarrow{P}$

À la fin, on peut connaître le flot sur chaque arc en retranchant la capacité résiduelle à la capacités initiale.

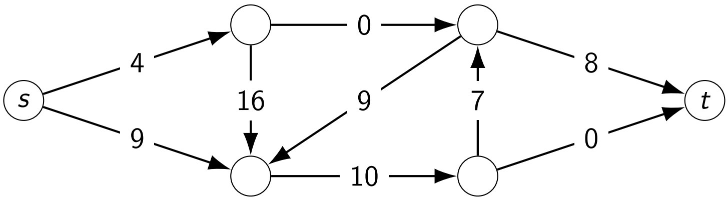
Algorithme de Ford-Fulkerson



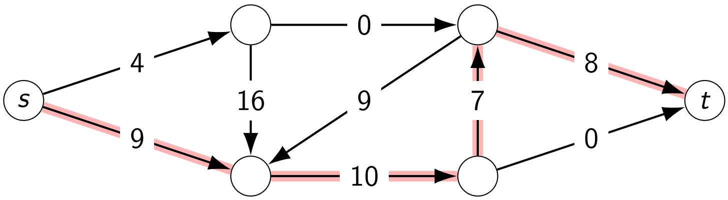
Algorithme de Ford-Fulkerson



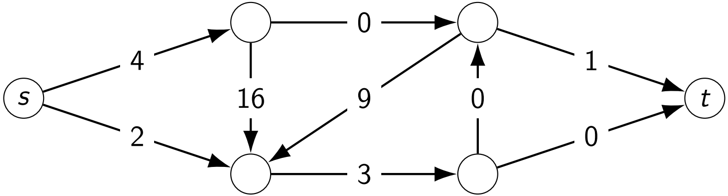
Algorithme de Ford-Fulkerson



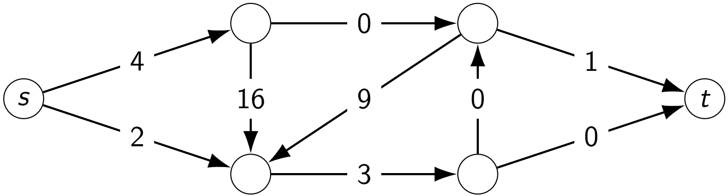
Algorithme de Ford-Fulkerson



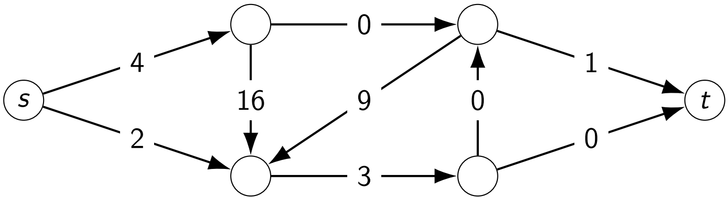
Algorithme de Ford-Fulkerson



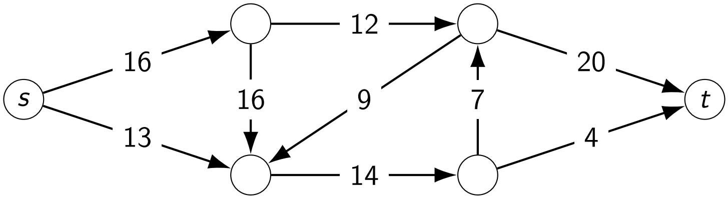
Algorithme de Ford-Fulkerson



Algorithme de Ford-Fulkerson

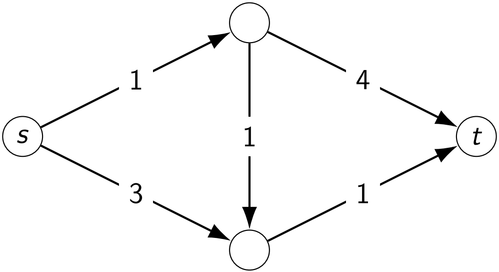


La comparaison avec le graphe initial permet de connaître le flot sur chaque arc :



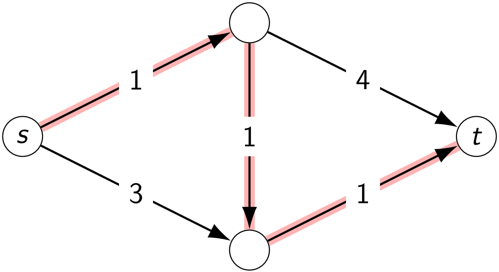
Valeur du flot obtenu : 23

Lorsqu'on ajoute du flot sur un arc, on créé dans le graphe résiduel un arc dans le sens inverse (un **arc arrière**) dans la direction opposée :



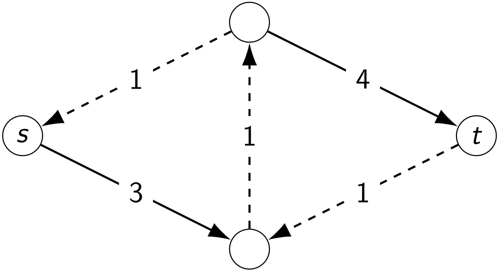
Algorithme de Ford-Fulkerson

Lorsqu'on ajoute du flot sur un arc, on créé dans le graphe résiduel un arc dans le sens inverse (un **arc arrière**) dans la direction opposée :



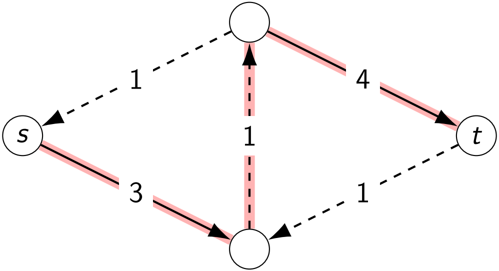
Algorithme de Ford-Fulkerson

Lorsqu'on ajoute du flot sur un arc, on créé dans le graphe résiduel un arc dans le sens inverse (un **arc arrière**) dans la direction opposée :



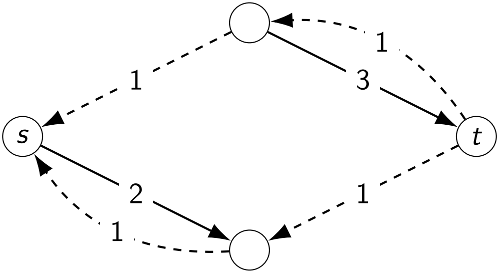
Algorithme de Ford-Fulkerson

Lorsqu'on ajoute du flot sur un arc, on créé dans le graphe résiduel un arc dans le sens inverse (un **arc arrière**) dans la direction opposée :



Algorithme de Ford-Fulkerson

Lorsqu'on ajoute du flot sur un arc, on créé dans le graphe résiduel un arc dans le sens inverse (un **arc arrière**) dans la direction opposée :



Algorithme de Ford-Fulkerson

Théorème

Si les capacités initiales sont toutes entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson termine (ne fait pas boucle infinie).

Preuve :

Algorithme de Ford-Fulkerson

Théorème

Si les capacités initiales sont toutes entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson termine (ne fait pas boucle infinie).

Preuve :

- Les capacités résiduelles restent toujours entières

Algorithme de Ford-Fulkerson

Théorème

Si les capacités initiales sont toutes entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson termine (ne fait pas boucle infinie).

Preuve :

- Les capacités résiduelles restent toujours entières
- À chaque itération, on diminue au moins de 1 la somme de toutes les capacités résiduelles. Donc il ne peut pas y avoir plus de $c(\overrightarrow{E})$ itérations.

Algorithme de Ford-Fulkerson

Théorème

Si les capacités initiales sont toutes entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson termine (ne fait pas boucle infinie).

Preuve :

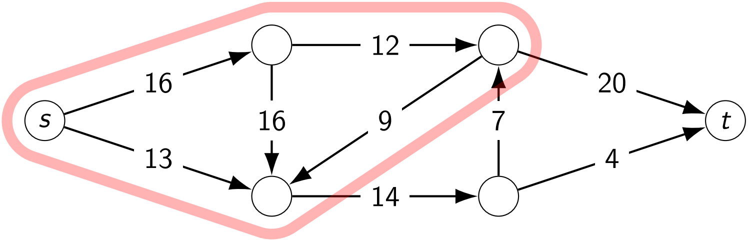
- Les capacités résiduelles restent toujours entières
- À chaque itération, on diminue au moins de 1 la somme de toutes les capacités résiduelles. Donc il ne peut pas y avoir plus de $c(\overrightarrow{E})$ itérations.

On a de plus un majorant grossier de la complexité : $O(c(\overrightarrow{E}))$ ou encore $O(|f^*|)$, où f^* est un flot de valeur maximum.
La complexité plus précise dépend de la façon dont on choisit les chemins.

Coupes

Définition

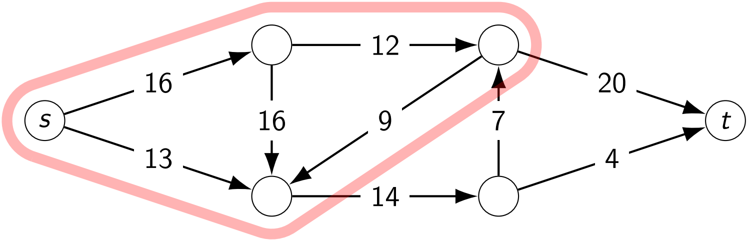
Une **coupe** de $\vec{G}$ est un ensemble $S \subseteq V$ contenant s mais pas t.



Coupes

Définition

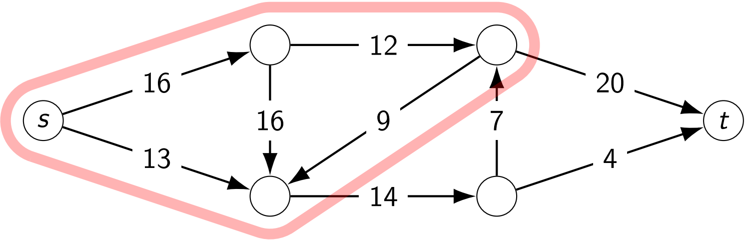
La capacité d'une coupe S est la somme $c(S^+)$ des capacités des arcs sortant de S :



Coupes

Définition

La capacité d'une coupe S est la somme $c(S^+)$ des capacités des arcs sortant de S :

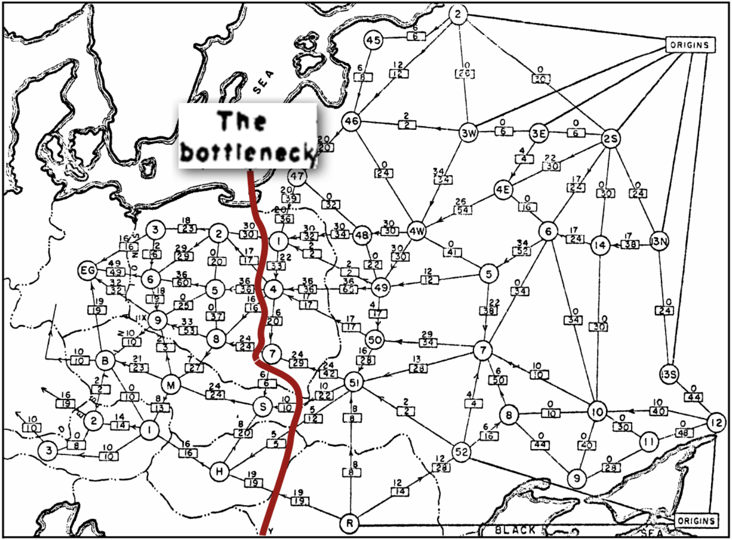


La capacité de cette coupe est $20 + 14 = 34$.

Problème

Trouver une coupe de capacité minimum dans un graphe.

Coupes



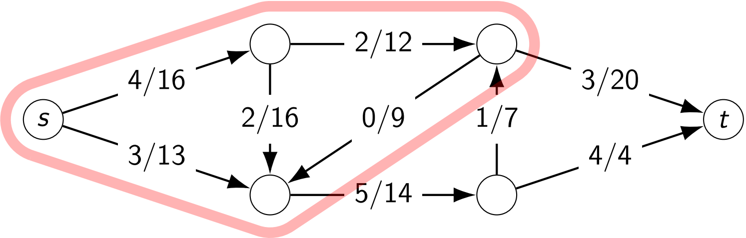
Plan américain de destruction d'un «min cut» des rails soviétiques

Coupes

Définition

Le flot sortant d'une coupe S est définie par :

$$f(S) = |f| - f(S^-)$$

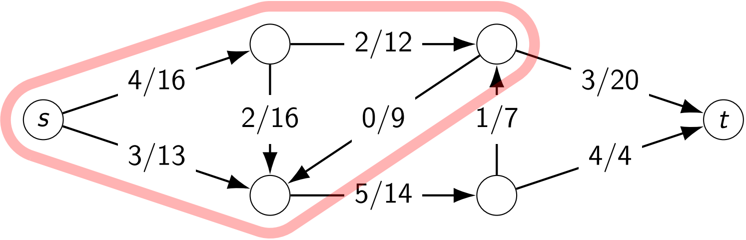


Coupes

Définition

Le flot sortant d'une coupe S est définie par :

$$f(S) = |f| - f(S^-)$$



Le flot sortant de cette coupe est 5 + 3 - 1 = 7.

Coupes

Lemme 1

Si S est une coupe, $f(S) \leq c(S^+)$.

Coupes

Lemme 1

Si S est une coupe, $f(S) \leq c(S^+)$.

Preuve :

$$f(S) = |f| - f(S^-) \leq |f| \leq c(S^+)$$

Coupes

Lemme 2

Si S est une coupe, $f(S) = |f|$.

Coupes

Lemme 2

Si S est une coupe, $f(S) = |f|$.

Preuve :
Soit H_k : « Si S est une coupe avec k sommets alors $f(S) = |f|$ ».

Coupes

Lemme 2

Si S est une coupe, $f(S) = |f|$.

Preuve :

Soit H_k : « Si S est une coupe avec k sommets alors $f(S) = |f|$ ».

- H_1 est vrai car alors $S = \{s\}$.

Coupes

Lemme 2

Si S est une coupe, $f(S) = |f|$.

Preuve :
Soit H_k : « Si S est une coupe avec k sommets alors $f(S) = |f|$ ».

- H_1 est vrai car alors $S = \{s\}$.
- Supposons H_k vraie pour un $k \geq 1$.

Coupes

Lemme 2

Si S est une coupe, $f(S) = |f|$.

Preuve :

Soit H_k : « Si S est une coupe avec k sommets alors $f(S) = |f|$ ».

- H_1 est vrai car alors $S = \{s\}$.
- Supposons H_k vraie pour un $k \geq 1$.
  Soit S une coupe avec $k + 1$ sommets.

Lemme 2

Si S est une coupe, $f(S) = |f|$.

Preuve :
Soit H_k : « Si S est une coupe avec k sommets alors $f(S) = |f|$ ».

- H_1 est vrai car alors $S = \{s\}$.
- Supposons H_k vraie pour un $k \geq 1$.
  Soit S une coupe avec $k + 1$ sommets.
  Soit $v \in S$. Alors, en utilisant la définition :
  $f(S) = f(S - \{v\}) + f(\{v\})$.

Coupes

Lemme 2

Si S est une coupe, $f(S) = |f|$.

Preuve :
Soit H_k : « Si S est une coupe avec k sommets alors $f(S) = |f|$ ».

- H_1 est vrai car alors $S = \{s\}$.
- Supposons H_k vraie pour un $k \geq 1$.
  Soit S une coupe avec $k+1$ sommets.
  Soit $v \in S$. Alors, en utilisant la définition :
  $f(S) = f(S - \{v\}) + f(\{v\})$.
  Or $f(S \backslash \{v\}) = |f|$ par hypothèse de récurrence et $f(\{v\}) = 0$.

Coupes

Lemme 2

Si S est une coupe, $f(S) = |f|$.

Preuve :
Soit H_k : « Si S est une coupe avec k sommets alors $f(S) = |f|$ ».

- H_1 est vrai car alors $S = \{s\}$.
- Supposons H_k vraie pour un $k \geq 1$.
  Soit S une coupe avec $k+1$ sommets.
  Soit $v \in S$. Alors, en utilisant la définition :
  $f(S) = f(S - \{v\}) + f(\{v\})$.
  Or $f(S \backslash \{v\}) = |f|$ par hypothèse de récurrence et $f(\{v\}) = 0$.
  Donc $f(S) = |f|$: H_{k+1} est vraie.

Coupes

Lemme 1

Si f est un flot et S une coupe, $f(S) \leq c(S^+)$.

Lemme 2

Si f est un flot et S une coupe, $f(S) = |f|$.

Théorème max flow - min cut

Si un flot f et une coupe S vérifient $f(S) = c(S^+)$ alors :

- f est un flot de valeur maximum
- S une coupe de capacité minimum

<u>Preuve</u> :

Coupes

Lemme 1

Si f est un flot et S une coupe, $f(S) \leq c(S^+)$.

Lemme 2

Si f est un flot et S une coupe, $f(S) = |f|$.

Théorème max flow - min cut

Si un flot f et une coupe S vérifient $f(S) = c(S^+)$ alors :

- f est un flot de valeur maximum
- S une coupe de capacité minimum

Preuve : Soit f^* un flot de valeur maximum.

Coupes

Lemme 1

Si f est un flot et S une coupe, $f(S) \leq c(S^+)$.

Lemme 2

Si f est un flot et S une coupe, $f(S) = |f|$.

Théorème max flow - min cut

Si un flot f et une coupe S vérifient $f(S) = c(S^+)$ alors :

- f est un flot de valeur maximum
- S une coupe de capacité minimum

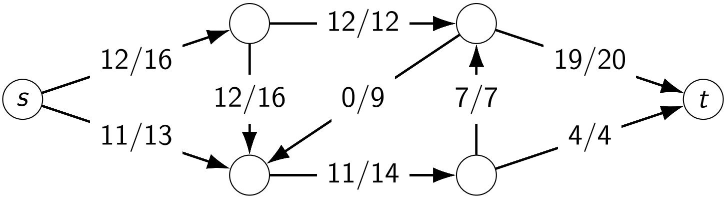
<u>Preuve</u> : Soit f^* un flot de valeur maximum.

$$f^*(s^+) \underset{2}{=} f^*(S) \underset{1}{\leq} c(S^+) = f(S) \underset{2}{=} |f|$$

Coupes

Question

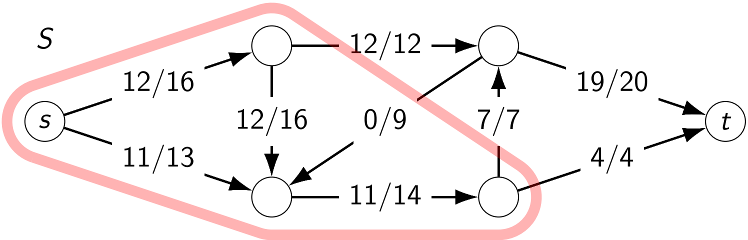
Comment prouver que ce flot est maximum ?



Coupes

Question

Comment prouver que ce flot est maximum ?



$c(S^{+}) = 23 = f(S)$
Donc f est un flot maximum et S une coupe minimum.

Coupes

Théorème

Si l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, le flot obtenu est un flot maximum

Preuve :

Coupes

Théorème

Si l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, le flot obtenu est un flot maximum

Preuve :
Soit S l'ensemble des sommets accessibles depuis s dans le graphe résiduel.

Coupes

Théorème

Si l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, le flot obtenu est un flot maximum

Preuve :
Soit S l'ensemble des sommets accessibles depuis s dans le graphe résiduel.
Tout arc $\vec{e}$ sortant de S a une capacité résiduelle nulle, donc $c(\vec{e}) = f(\vec{e})$. D'où :

$$c(S^+) = \sum_{\vec{e} \in S^+} c(\vec{e}) = \sum_{\vec{e} \in S^+} f(\vec{e}) = f(S)$$

Décomposition de flot

Le flot renvoyé par l'algorithme de Ford-Fulkerson est une somme de chemins.

Décomposition de flot

Le flot renvoyé par l'algorithme de Ford-Fulkerson est une somme de chemins. Inversement, tout flot peut s'obtenir comme somme de chemins :

Théorème de décomposition de flot

Tout $s-t$ flot peut se décomposer comme une somme de chemins de s à t et de cycles.
De plus, le nombre de chemins et cycles est au plus p.

Preuve :

Décomposition de flot

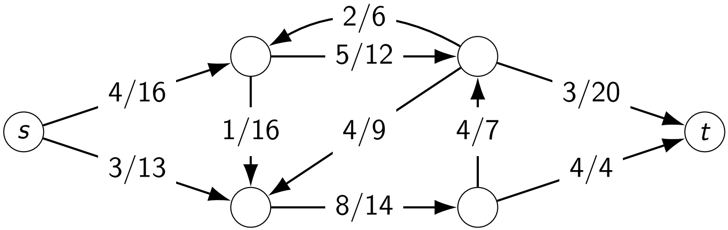
Le flot renvoyé par l'algorithme de Ford-Fulkerson est une somme de chemins. Inversement, tout flot peut s'obtenir comme somme de chemins :

Théorème de décomposition de flot

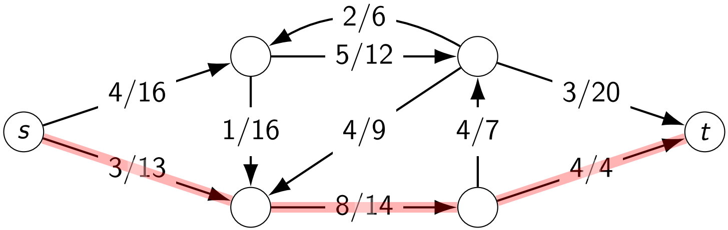
Tout $s - t$ flot peut se décomposer comme une somme de chemins de s à t et de cycles.
De plus, le nombre de chemins et cycles est au plus p.

Preuve : « Ford-Fulkerson à l'envers »
Tant que possible : on cherche un chemin de s à t en utilisant seulement les arêtes ayant un flot positif, puis on retire la capacité minimum le long de ce chemin.
Les propriétés de flot nous assurent que quand il n'y a plus de chemin, il ne reste que des cycles.

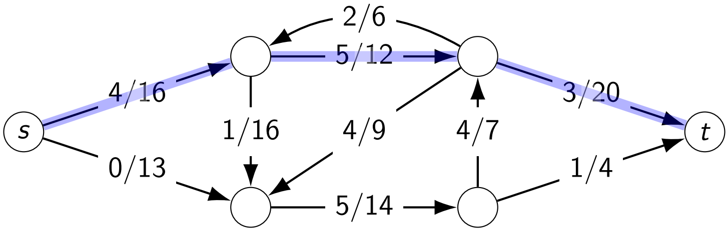
Décomposition de flot



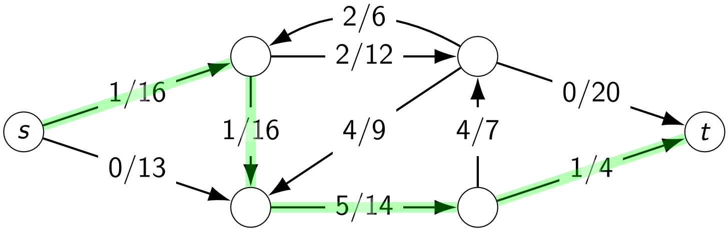
Décomposition de flot



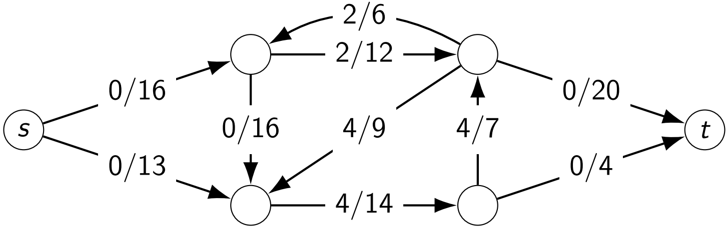
Décomposition de flot



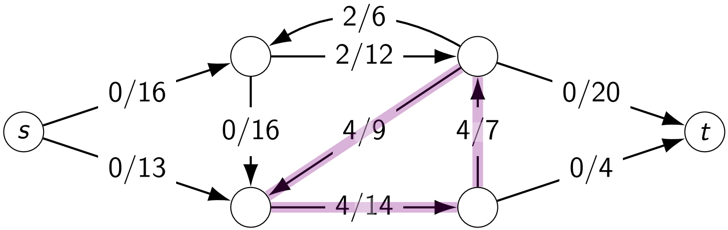
Décomposition de flot



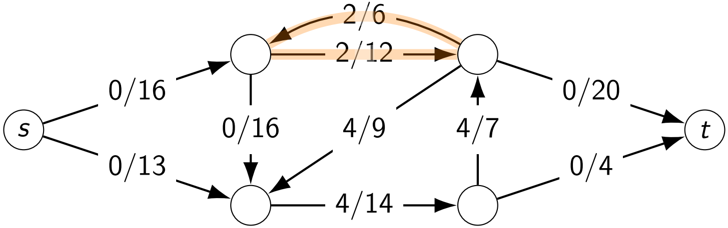
Décomposition de flot



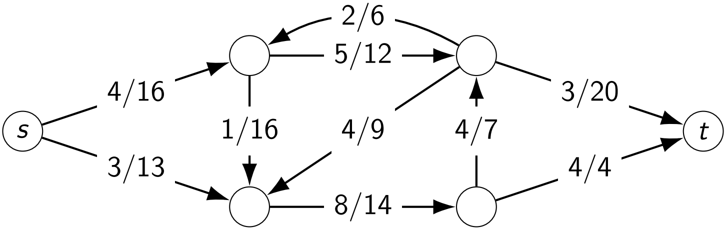
Décomposition de flot



Décomposition de flot

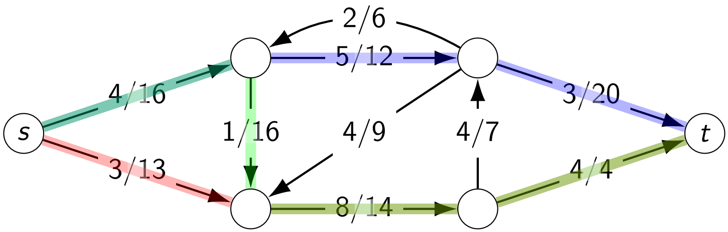


Décomposition de flot



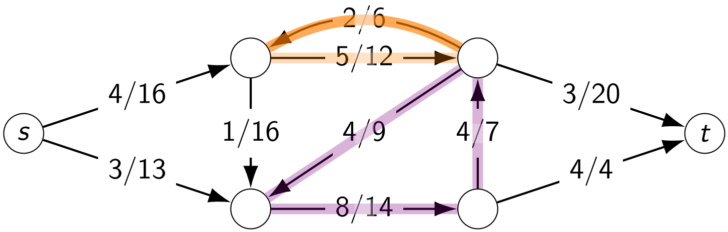
On a décomposé le flot en

Décomposition de flot



On a décomposé le flot en 3 chemins

Décomposition de flot



On a décomposé le flot en 3 chemins et 2 cycles

Choix des chemins

On va voir plusieurs façon de trouver un chemin de s à t :

Choix des chemins

On va voir plusieurs façon de trouver un chemin de s à t :

- Parcours en profondeur
- Parcours en largeur (plus court chemin)
- Plus large chemin

Choix des chemins

Exercice

Écrire une fonction Python `ford_fulkerson` telle que `ford_fulkerson(G, s, t, path)` renvoie la valeur maximum d'un flot, où :

- `G` est un graphe orienté avec une capacité sur les arcs.
- `path` est une fonction qui à un graphe résiduel associe un chemin de s à t

Choix des chemins : parcours en profondeur

Exercice

Implémenter le parcours en profondeur et l'utiliser avec `ford_fulkerson`.

Nombre d'itérations maximum de Ford-Fulkerson avec recherche des chemins par parcours en profondeur : $|f^*|$.

Choix des chemins : parcours en profondeur

Exercice

Implémenter le parcours en profondeur et l'utiliser avec `ford_fulkerson`.

Nombre d'itérations maximum de Ford-Fulkerson avec recherche des chemins par parcours en profondeur : $|f^*|$.
On note $p = |\overrightarrow{E}|$ le nombre d'arcs et $n = |V|$ le nombre de sommets.

Théorème

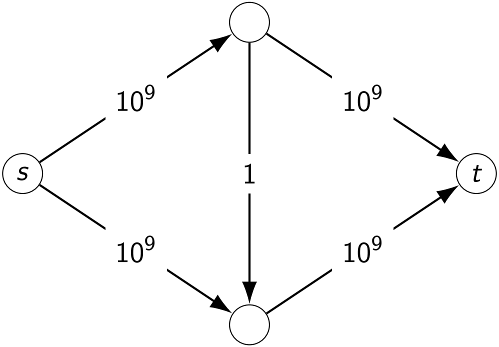
La complexité de Ford-Fulkerson avec recherche des chemins par parcours en profondeur est $\boxed{\mathrm{O}(p|f^*|)}$

Choix des chemins : parcours en profondeur

La complexité $O(p \times |f^*|)$ est atteinte pour ce genre de graphe :

Choix des chemins : parcours en profondeur

La complexité $O(p \times |f^*|)$ est atteinte pour ce genre de graphe :



Choix des chemins : plus large chemin

Il est logique de chercher à chaque itération le **chemin le plus large** (widest path), c'est à dire celui dont la capacité minimum est la plus grande (donc qui augmentera plus le flot).

Choix des chemins : plus large chemin

Il est logique de chercher à chaque itération le **chemin le plus large** (widest path), c'est à dire celui dont la capacité minimum est la plus grande (donc qui augmentera plus le flot).

On peut trouver tous les plus larges chemins depuis s de différentes façons :

- Algorithme de Prim modifié en $O(p \log(p))$
- Algorithme de Dijkstra modifié en $O(p \log(p))$

Choix des chemins : plus large chemin

Algorithme de Prim modifié

$T \leftarrow \{s\}$

Tant que T n'est pas couvrant :
    Ajouter l'arête sortante de T de capacité maximum

Théorème

T est un « arbre des plus larges chemins » : le chemin de s à un autre sommet v dans T est un plus large chemin de s à v

Preuve :

Choix des chemins : plus large chemin

Algorithme de Prim modifié

$T \leftarrow \{s\}$

Tant que T n'est pas couvrant :

    Ajouter l'arête sortante de T de capacité maximum

Théorème

T est un « arbre des plus larges chemins » : le chemin de s à un autre sommet v dans T est un plus large chemin de s à v

<u>Preuve</u> : Par récurrence sur $|T|$.
Quand on ajoute une arête vers v, d'après la façon de la choisir, il ne peut pas y avoir d'autres chemin plus large vers v.

Choix des chemins : plus large chemin

Algorithme de Prim modifié

$T \leftarrow \{s\}$

Tant que T n'est pas couvrant :

  Ajouter l'arête sortante de T de capacité maximum

Complexité : $O(p \log(p))$ en utilisant une file de priorité contenant les arêtes, avec extraction et ajout en complexité logarithmique

Choix des chemins : plus large chemin

Soit f^* un flot maximum. D'après le théorème de décomposition, f^* s'écrit comme une somme d'au plus p chemins et cycles.

Choix des chemins : plus large chemin

Soit f^* un flot maximum. D'après le théorème de décomposition, f^* s'écrit comme une somme d'au plus p chemins et cycles.

Au moins un de ces chemins transporte un flot $\geq \dfrac{|f^*|}{p}$.

Choix des chemins : plus large chemin

Soit f^* un flot maximum. D'après le théorème de décomposition, f^* s'écrit comme une somme d'au plus p chemins et cycles.

Au moins un de ces chemins transporte un flot $\geq \dfrac{|f^*|}{p}$.

Donc le chemin de largeur maximum permet d'augmenter le flot d'au moins $\dfrac{|f^*|}{p}$

Choix des chemins : plus large chemin

Soit f^* un flot maximum. D'après le théorème de décomposition, f^* s'écrit comme une somme d'au plus p chemins et cycles.

Au moins un de ces chemins transporte un flot $\geq \frac{|f^*|}{p}$.

Donc le chemin de largeur maximum permet d'augmenter le flot d'au moins $\frac{|f^*|}{p}$

La valeur du flot maximum dans le graphe résiduel passe alors de $|f^*|$ à au plus $|f^*| - \frac{|f^*|}{p} = |f^*|(1 - \frac{1}{p})$.

Choix des chemins : plus large chemin

Soit f^* un flot maximum. D'après le théorème de décomposition, f^* s'écrit comme une somme d'au plus p chemins et cycles.

Au moins un de ces chemins transporte un flot $\geq \frac{|f^*|}{p}$.

Donc le chemin de largeur maximum permet d'augmenter le flot d'au moins $\frac{|f^*|}{p}$

La valeur du flot maximum dans le graphe résiduel passe alors de $|f^*|$ à au plus $|f^*| - \frac{|f^*|}{p} = |f^*|(1 - \frac{1}{p})$.

Après $p \ln(|f^*|)$ itérations, il reste donc un flot maximum d'au plus :

$$|f^*|(1 - \frac{1}{p})^{p \ln(|f^*|)} < |f^*| e^{-\ln(|f^*|)} = 1$$

Choix des chemins : plus large chemin

Le nombre d'itération de Ford-Fulkerson avec recherche de plus large chemin est donc au plus $p \ln(|f^*|)$.

Comme chaque recherche de plus large chemin demande $O(p \log(p))$ avec Prim :

Théorème

La complexité de de Ford-Fulkerson avec recherche de plus large chemin est $\boxed{O(p^2 \log(p) \ln(|f^*|))}$.

Choix des chemins : plus large chemin

Le nombre d'itération de Ford-Fulkerson avec recherche de plus large chemin est donc au plus $p \ln(|f^*|)$.

Comme chaque recherche de plus large chemin demande $O(p \log(p))$ avec Prim :

Théorème

La complexité de de Ford-Fulkerson avec recherche de plus large chemin est $\boxed{O(p^2 \log(p) \ln(|f^*|))}$.

Mieux qu'avec le parcours en profondeur en $O(p|f^*|)$ mais il serait préférable de ne pas avoir cette dépendance en $|f^*|$.

Choix des chemins : parcours en largeur (Edmond-Karp)

On note $p = |\vec{E}|$ le nombre d'arcs et $n = |V|$ le nombre de sommets.

Théorème

Ford-Fulkerson avec recherche de plus court chemins (par parcours en largeur) termine en au plus $\dfrac{np}{2}$ itérations.

Choix des chemins : parcours en largeur (Edmond-Karp)

On note $p = |\overrightarrow{E}|$ le nombre d'arcs et $n = |V|$ le nombre de sommets.

Théorème

Ford-Fulkerson avec recherche de plus court chemins (par parcours en largeur) termine en au plus $\frac{np}{2}$ itérations.

Comme chaque parcours en largeur est en $\mathrm{O}(p)$:

Théorème

Ford-Fulkerson avec recherche de plus court chemins (par parcours en largeur) est en $\boxed{\mathrm{O}(np^2)}$.

Choix des chemins : résumé

Nombre d'itérations et complexité de Ford-Fulkerson suivant le choix des chemins :

	nombre d'itérations	complexité
parcours en profondeur	$\|f^*\|$	$O(p\|f^*\|)$
plus large chemin	$\leq p \ln(\|f^*\|)$	$O(p^2 \log(p) \ln(\|f^*\|))$
plus court chemin	$\leq \frac{np}{2}$	$O(np^2)$

$(p = |\vec{E}|$ et $n = |V|)$

Choix des chemins : résumé

Exercice pour le 20 octobre : implémenter Ford-Fulkerson avec la recherche de chemin que vous préférez.

Bonus : faire toutes les recherches de chemins et les comparer sur des gros graphes aléatoires.