# Data Science for Actuaries (ACT6100)

Arthur Charpentier

Supervisé # 4 (Arbres)

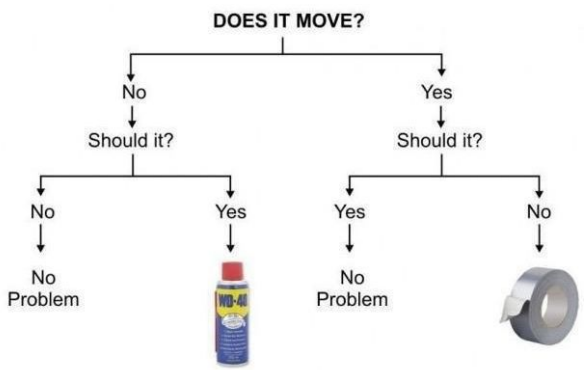
automne 2020

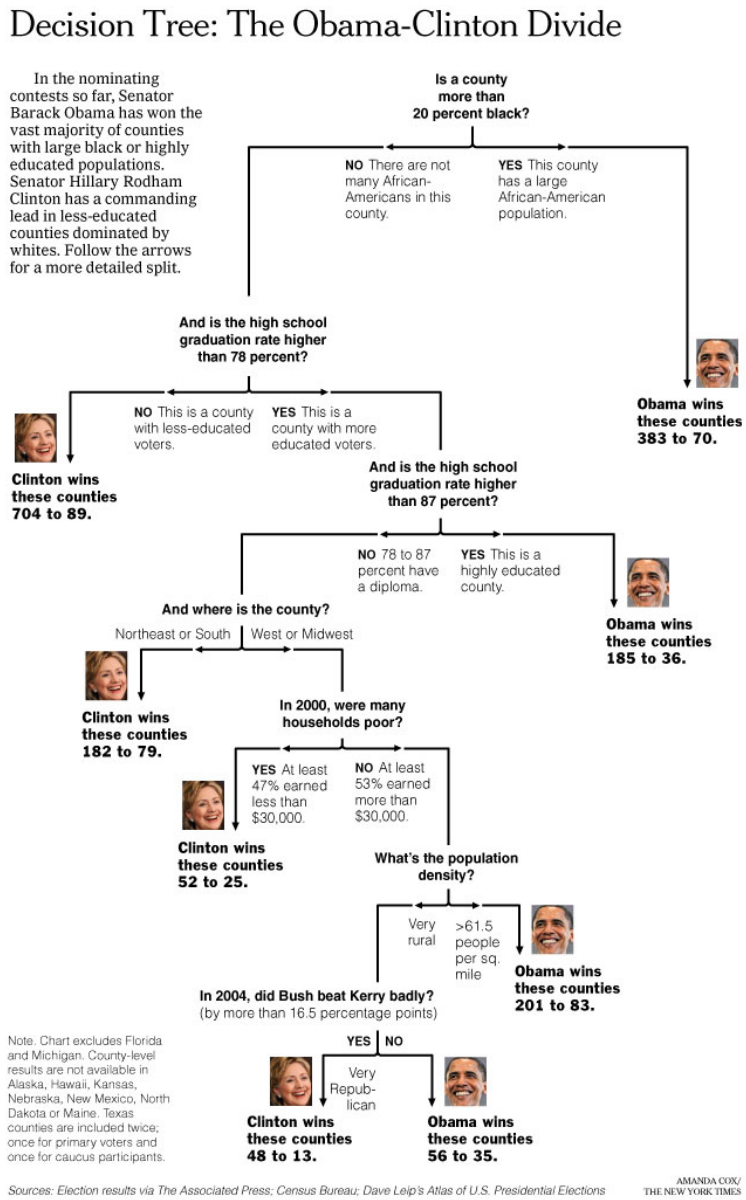
https://github.com/freakonometrics/ACT6100/

# Terminologie

- Les régions finales obtenues sont nommées noeuds terminaux ou, plus souvent, feuilles de l'arbre.
- Les autres points où se font les divisions sont des noeuds internes de l'arbre.
- Les segments de l'arbre qui connectent les noeuds sont des branches.

via New York Times (2008)



# Procédure cadre

Pour réaliser des prédictions à partir d'un arbre il faut

1. diviser l'espace des variables explicatives en $J$ régions, $R_1, \ldots, R_J$, telles que
   - $R_i \cap R_j = \emptyset$, $i \neq j$ et
   - $R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_J = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_J$.
2. Pour chaque observation qui tombe dans la région $R_j$, une prédiction identique sera faite en utilisant, par exemple, la **moyenne** des observations de cette classe:

$$\widehat{Y}_{R_j} = \frac{1}{|R_j|} \sum_{i:\mathbf{X}_i \in R_j} Y_i$$

ou la majorité pour un classifieur

# Comment diviser l'espace des variables explicatives?

- La procédure cadre ne donne aucune indication sur la forme des régions: toutes les possibilités peuvent être tentées
- On limite la forme des régions à des (hyper-)rectangles (des rectangles dans $\mathbb{R}^p$) afin de simplifier la construction de l'arbre et de permettre une interprétation des résultats (sous la forme d'un graphique).
- On procède de manière itérative (arbre de décision)
- Chacun des noeuds se construit en optimisant une fonction objectif.

# Fonction objectif

Pour une problématique de régression, on travaillera souvent avec la somme des erreurs au carré (SSE) ou l'erreur quadratique moyenne (MSE)

$$\text{MSE} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i:\mathbf{X}_i \in R_j} \left(y_i - \widehat{y}_{R_j}\right)^2,$$

où $\widehat{y}_{R_j}$ est la valeur prédite dans la région $R_j$. On cherche alors une partition $R_1, \ldots, R_J$ qui minimise le SSE.
Pour une problématique de classification, notons que

$$\text{MSE}_j = \sum_{i:\mathbf{X}_i \in R_j} \left(y_i - \widehat{y}_{R_j}\right)^2 = n_{0,j}(0 - \widehat{y}_{R_j})^2 + n_{1,j}(1 - \widehat{y}_{R_j})^2$$

# Fonction objectif

$$\max\{\text{MSE}_j\} = n_{0,j}\left(\frac{n_{0,j}}{n_{0,j}+n_{1,j}}\right)^2 + n_{1,j}\left(\frac{n_{0,j}}{n_{1,j}+n_{1,j}}\right)^2 = \frac{n_{0,j}n_{1,j}}{n_{0,j}+n_{1,j}}$$

de telle sorte que

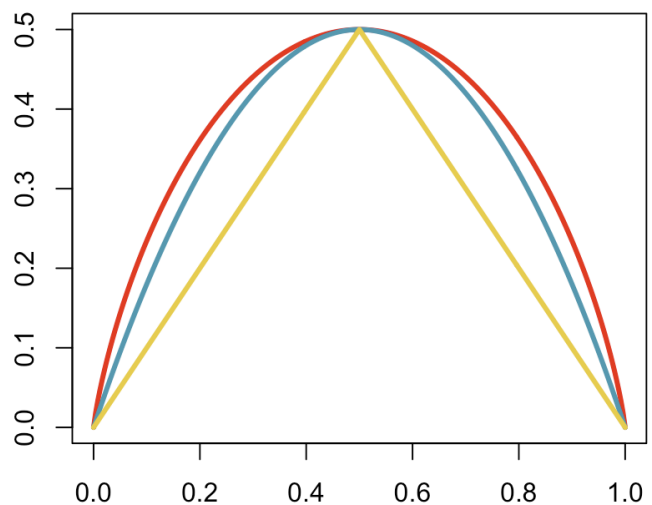
$$MSE = \sum_{j=1}^{J} \frac{n_{0,j}n_{1,j}}{n_{0,j}+n_{1,j}} = \sum_{j=1}^{J} n_j \cdot p_{1,j}(1-p_{i,j})$$

On parle d'impureté de Gini

# Fonction objectif

Formellement, l'impureté est une fonction $\psi(p_{1,j})$ avec $\psi$ positive, symétrique ($\psi(p) = \psi(1-p)$), minimale en 0 (et 1).

**Example**: Missclassification $\psi(p) = 1 - \max\{p, 1-p\}$
**Example**: Gini, $\psi(p) = p(1-p)$
**Example**: (cross) entropy, $\psi(p) = -plogp - (1-p)\log(1-p)$



# Fonction objectif

- À nouveau, si on considère toutes les partitions possibles de l'espace des variables explicatives, on devra considérer un trop grand nombre de possibilités.
- On va plutôt utiliser un algorithme glouton descendant (*top-down greedy approach*) par division binaire récursive (*recursive binary splitting*).
- Algorithme **descendant**: on commence avec toutes les observations dans une même classe (racine de l'arbre) et on divise l'espace en régions de plus en plus petites.
- Algorithme **glouton**: l'optimisation se fait à chaque étape sans regard vers le passé ou vers l'avenir.

# Division binaire récursive

**Première étape**: on sélectionne la variable explicative $X_j$ et le point $c$ tels que la division en deux régions

$$R_1(j, c) = \{X_1, \ldots, X_J | X_j < c\}$$
$$R_2(j, c) = \{X_1, \ldots, X_J | X_j \geq c\}$$

conduise à la plus grande réduction possible de la fonction objectif. Si la somme des erreurs au carré a été choisie, on cherche alors à minimiser

$$\sum_{i:\mathbf{X}_i \in R_1(j,c)} \left(Y_i - \widehat{Y}_{R_1(j,c)}\right)^2 + \sum_{i:\mathbf{X}_i \in R_2(j,c)} \left(Y_i - \widehat{Y}_{R_2(j,c)}\right)^2.$$

(ou n'importe quelle fonction d'impureté)

# Division binaire récursive

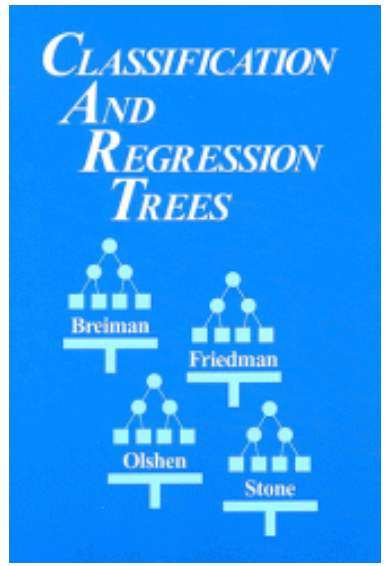
**Étapes suivantes**: à l'étape $k$, on répète la procédure décrite à la première étape pour chacune des régions créées à l'étape $k-1$, c'est-à-dire que pour chacune des régions $r$, on doit identifier la variable explicative $X_j$ et le point $c$ qui vont minimiser la fonction objectif après la division donnée par

$$\{\mathbf{X} \in r | X_j < c\} \text{ et } \{\mathbf{X} \in r | X_j \geq c\}.$$

La procédure est arrêtée lorsqu'un certain critère est atteint.
En l'absence de critère d'arrêt, l'arbre obtenu aura $n$ feuilles ($n$ n'étant pas nécessairement le nombre d'observations dans la base de données) $\rightarrow$ surapprentissage.

# Construction Hiérarchique d'Arbres de Classification

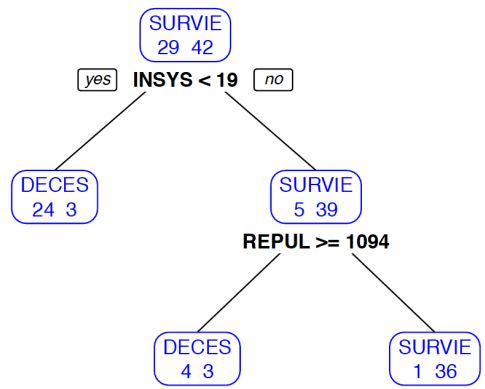
Classification = regrouper les individus en un nombre limité de classes
Ces classes sont construites au fur et à mesure
$\rightarrow$ regrouper des des individus similaires, séparer des individus ayant des caractéristiques proches.
Histoire : date des années 1960,
puis Breiman et al. (1984).




outils devenu populaire en apprentissage automatique (machine learning)

# Construction Hiérarchique d'Arbres de Classification

classification descendante :
on sélectionne par les variables explicatives la plus liée
à la variable à expliquer $Y$,
$\rightarrow$ donne une première division de léchantillon
on réitère dans chaque classe
$\rightarrow$ chaque classe doit être la plus homogène possible, en $Y$.
Différence par rapport à la régression logistique
utilisation séquentielle des variables explicatives
présentation des sorties sous forme d'arbre de décision
i.e. une séquence de noeuds



# Subdivisionner l'*espace*: une variable explicative

$Y \in \{0,1\}$ et $X \in \mathbb{R}$ : on découpe suivant un seuil $s$,

$$\begin{cases} \tilde{X} = L \text{ si } X \leq s \\ \tilde{X} = R \text{ si } X > s \end{cases}$$

| | $\tilde{X} = L$<br>$X \leq s$ | $\tilde{X} = R$<br>$X > s$ | |
|---|---|---|---|
| $Y = 0$ | $n_{L,0}$ | $n_{R,0}$ | $n_{\cdot,0}$ |
| $Y = 1$ | $n_{L,1}$ | $n_{R,1}$ | $n_{\cdot,1}$ |
| | $n_{L,\cdot}$ | $n_{R,\cdot}$ | $n$ |

Gini $\text{gini}(Y|\tilde{X}) = \sum_{x \in \{L,R\}} \frac{n_{x,\cdot}}{n} \sum_{y \in \{0,1\}} \frac{n_{x,y}}{n_{x,\cdot}} \left(1 - \frac{n_{x,y}}{n_{x,\cdot}}\right)$

# Subdivisionner l'*espace*: une variable explicative

$Y \in \{0,1\}$ et $X \in \mathbb{R}$ : on découpe suivant un seuil $s$,

$$\begin{cases} \tilde{X} = L \text{ si } X \leq s \\ \tilde{X} = R \text{ si } X > s \end{cases}$$

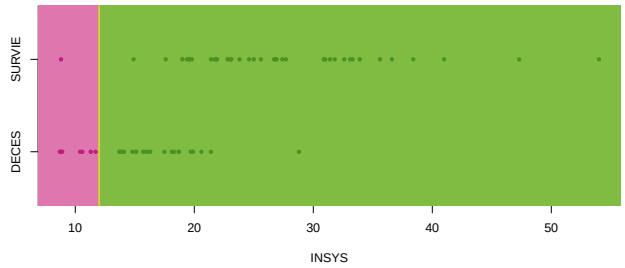
| | $\tilde{X} = L$<br>$X \leq s$ | $\tilde{X} = R$<br>$X > s$ | |
|---|---|---|---|
| $Y = 0$ | $n_{L,0}$ | $n_{R,0}$ | $n_{.,0}$ |
| $Y = 1$ | $n_{L,1}$ | $n_{R,1}$ | $n_{.,1}$ |
| | $n_{L,.}$ | $n_{R,.}$ | $n$ |

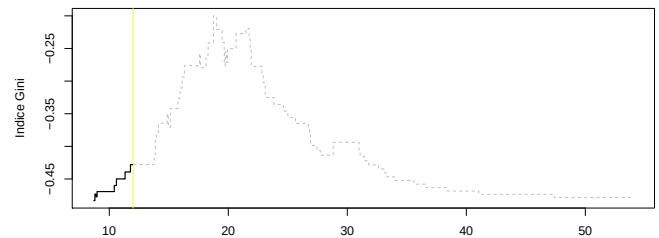
Entropie $\text{entropie}(Y|X) = -\sum_{x \in \{L,R\}} \frac{n_{x,.}}{n} \sum_{y \in \{0,1\}} \frac{n_{x,y}}{n_{x,.}} \log\left(\frac{n_{x,y}}{n_{x,.}}\right)$

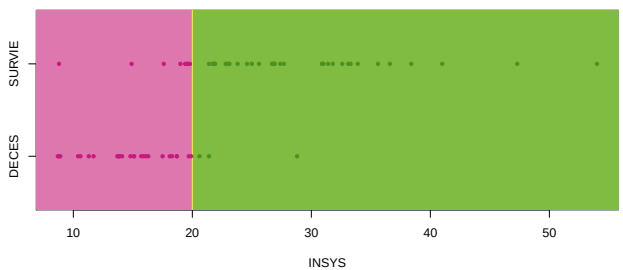
# Subdivisionner l'*espace*: une variable explicative

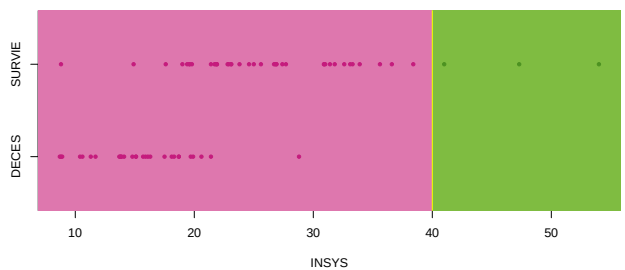
## Découpage et indice de Gini

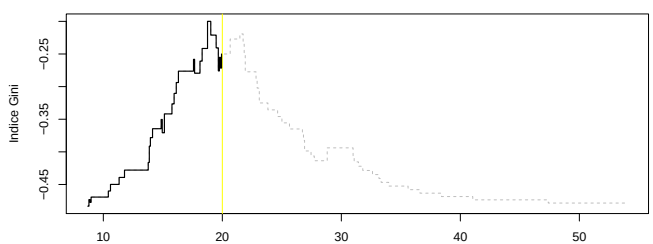
$$\sum_{x \in \{A,B\}} \frac{n_{x,\cdot}}{n} \sum_{y \in \{0,1\}} \frac{n_{x,y}}{n_{x,\cdot}} \left(1 - \frac{n_{x,y}}{n_{x,\cdot}}\right)$$

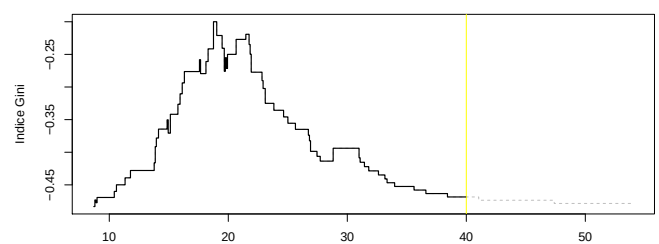


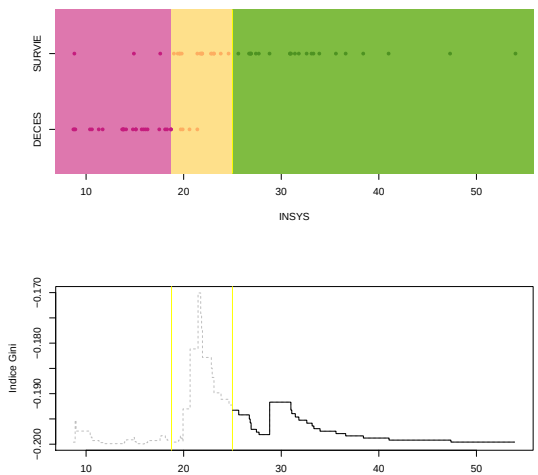



# Subdivisionner l'*espace*: une variable explicative

On fixe $s$, on cherche un second découpage,

$$A = (-\infty, s_2] \quad B = (s_2, s] \quad C = (s, \infty)$$

| | $\tilde{X} = A$<br>$X \leq s_2$ | $\tilde{X} = B$<br>$X \in (s_2, s]$ | $\tilde{X} = C$<br>$X > s$ | |
|---|---|---|---|---|
| $Y = 0$ | $n_{A,0}$ | $n_{B,0}$ | $n_{C,0}$ | $n_{\cdot,0}$ |
| $Y = 1$ | $n_{A,1}$ | $n_{B,1}$ | $n_{C,1}$ | $n_{\cdot,1}$ |
| | $n_{A,\cdot}$ | $n_{B,\cdot}$ | $n_{C,\cdot}$ | $n$ |




Découpage et indice de Gini

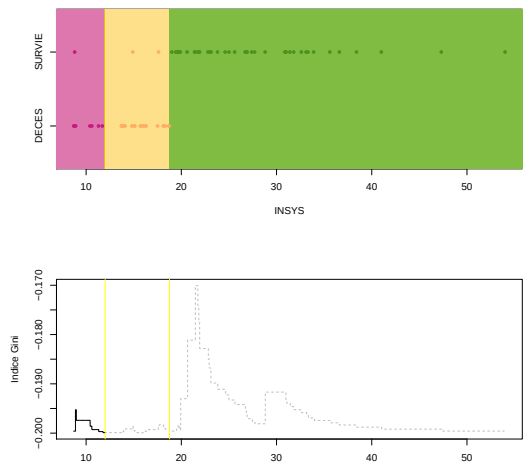
$$\sum_{x \in \{A,B,C\}} \frac{n_{x,\cdot}}{n} \sum_{y \in \{0,1\}} \frac{n_{x,y}}{n_{x,\cdot}} \left(1 - \frac{n_{x,y}}{n_{x,\cdot}}\right)$$

# Subdivisionner l'*espace*: une variable explicative

On fixe $s$, on cherche un second découpage,

$$A = (-\infty, s] \quad B = (s, s_2] \quad C = (s_2, \infty)$$

| | $\tilde{X} = A$<br>$X \leq s$ | $\tilde{X} = B$<br>$X \in (s, s_2]$ | $\tilde{X} = C$<br>$X > s_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $Y = 0$ | $n_{A,0}$ | $n_{B,0}$ | $n_{C,0}$ | $n_{.,0}$ |
| $Y = 1$ | $n_{A,1}$ | $n_{B,1}$ | $n_{C,1}$ | $n_{.,1}$ |
| | $n_{A,.}$ | $n_{B,.}$ | $n_{C,.}$ | $n$ |



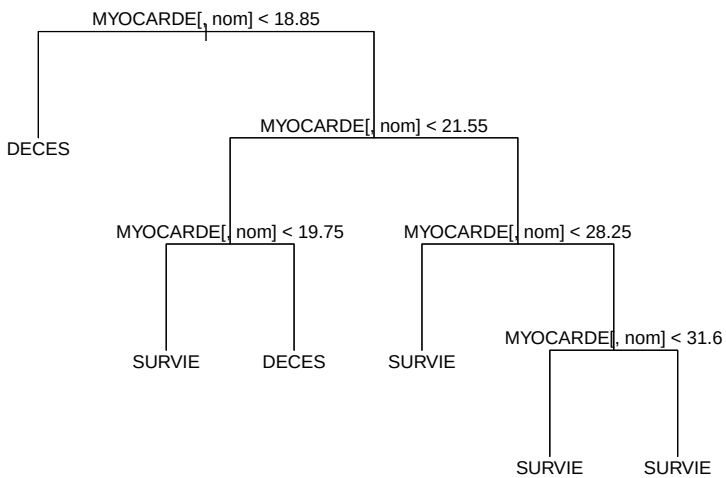

Découpage et indice de Gini

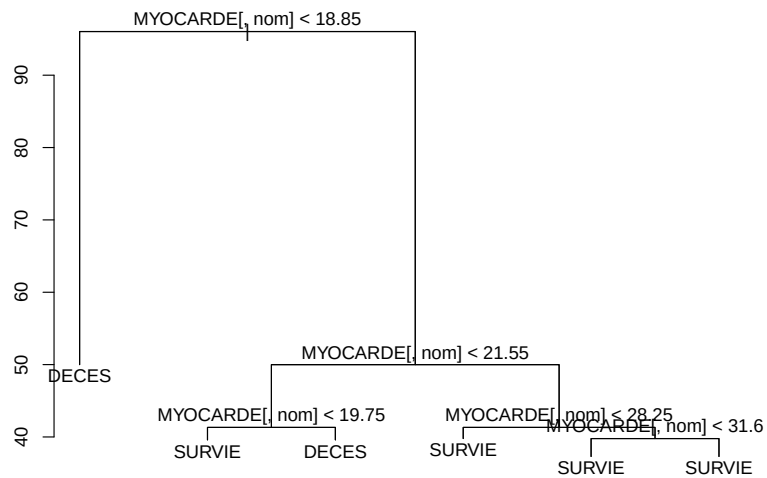
$$\sum_{x \in \{A,B,C\}} \frac{n_{x,.}}{n} \sum_{y \in \{0,1\}} \frac{n_{x,y}}{n_{x,.}} \left(1 - \frac{n_{x,y}}{n_{x,.}}\right)$$

# Élagage de l'arbre

Étape 1 Construction de l'arbre par un processus récursif de divisions binaires

Étape 2 Élagage de l'arbre (*pruning*), en supprimant les branches trop vides, ou peu représentatives $\rightarrow$ besoin d'un critère d'élagage (gain en entropie)



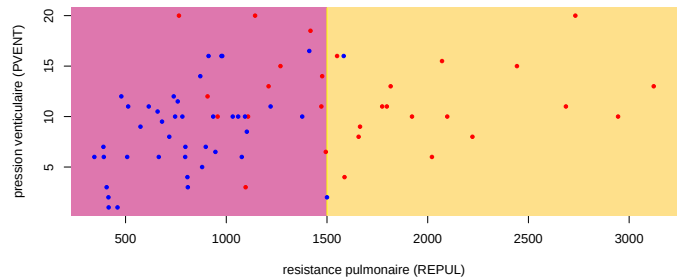
# Cas de plusieurs variables quantitatives

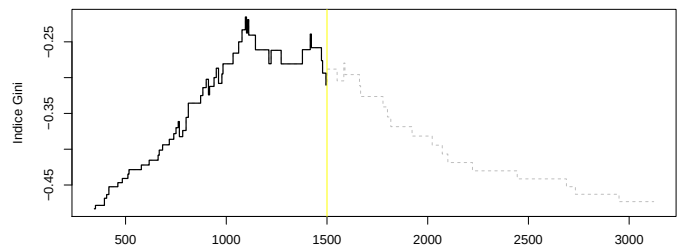
$Y \in \{0,1\}$ et $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$ : on découpe $X_1$ suivant un seuil $s$,

$$\begin{cases} \tilde{X} = A \text{ si } X_1 \leq s \\ \tilde{X} = B \text{ si } X_1 > s \end{cases}$$

| | $\tilde{X} = A$<br>$X_1 \leq s$ | $\tilde{X} = B$<br>$X_1 > s$ | |
|---|---|---|---|
| $Y = 0$ | $n_{A,0}$ | $n_{B,0}$ | $n_{.,0}$ |
| $Y = 1$ | $n_{A,1}$ | $n_{B,1}$ | $n_{.,1}$ |
| | $n_{A,.}$ | $n_{B,.}$ | $n$ |

$$\sum_{x \in \{A,B\}} \frac{n_{x,.}}{n} \sum_{y \in \{0,1\}} \frac{n_{x,y}}{n_{x,.}} \left(1 - \frac{n_{x,y}}{n_{x,.}}\right)$$



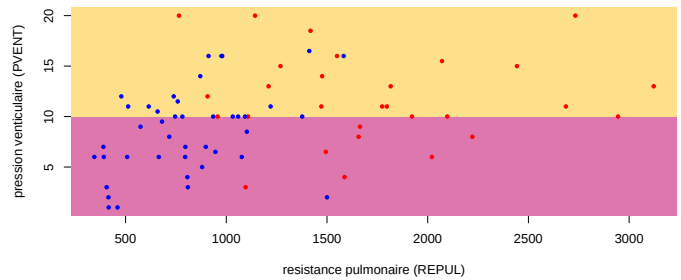
# Cas de plusieurs variables quantitatives

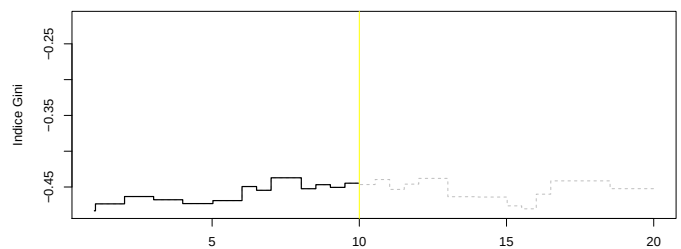
$Y \in \{0,1\}$ et $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$ : on découpe $X_2$ suivant un seuil $s$,

$$\begin{cases} \tilde{X} = A \text{ si } X_2 \leq s \\ \tilde{X} = B \text{ si } X_2 > s \end{cases}$$

| | $\tilde{X} = A$<br>$X_2 \leq s$ | $\tilde{X} = B$<br>$X_2 > s$ | |
|---|---|---|---|
| $Y = 0$ | $n_{A,0}$ | $n_{B,0}$ | $n_{\cdot,0}$ |
| $Y = 1$ | $n_{A,1}$ | $n_{B,1}$ | $n_{\cdot,1}$ |
| | $n_{A,\cdot}$ | $n_{B,\cdot}$ | $n$ |

$$\sum_{x \in \{A,B\}} \frac{n_{x,\cdot}}{n} \sum_{y \in \{0,1\}} \frac{n_{x,y}}{n_{x,\cdot}} \left(1 - \frac{n_{x,y}}{n_{x,\cdot}}\right)$$



# Cas de variables qualitatives

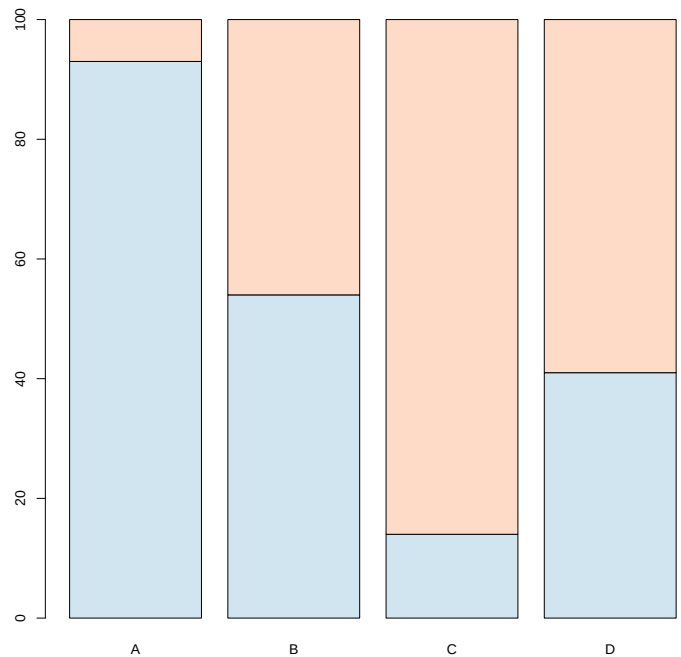
$X$ prend des valeurs $\{a, b, c, d\}$.

Au lieu de faire un arbre par *découpages* successifs, on peut faire un arbre par *regroupement* successifs.

$$\{a, b, c, d\}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \{(a, b), c, d\} & \{(a, d), b, c\} & \{(a, d), b, c\} \\ \{(b, c), a, d\} & \{(b, d), a, c\} & \{(c, d), a, b\} \end{array} \right.$$

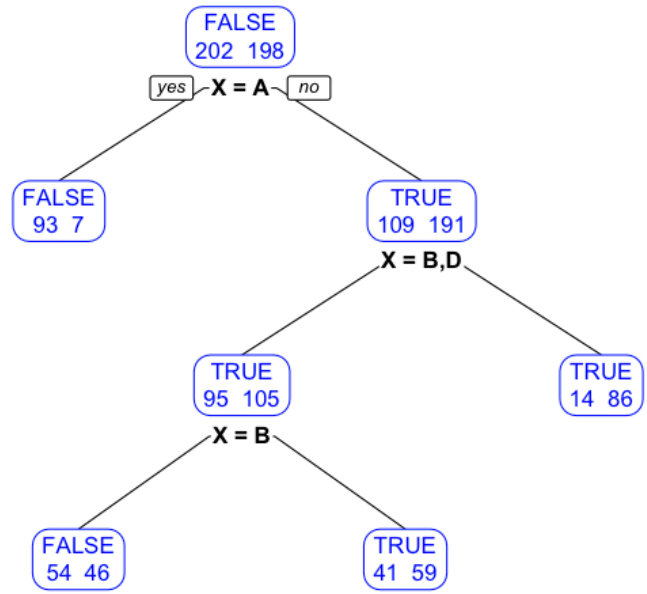
$$\{(b, c, a), d\} \{(b, c, d), a\} \{(b, c), (a, d)\}$$



# Cas de variables qualitatives

$X$ prend des valeurs $\{a, b, c, d\}$.

Au lieu de faire un arbre par *découpages* successifs, on peut faire un arbre par *regroupement* successifs.




$$\{a, b, c, d\}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \{(a, b), c, d\} & \{(a, d), b, c\} & \{(a, d), b, c\} \\ \{(b, c), a, d\} & \{(b, d), a, c\} & \{(c, d), a, b\} \end{array} \right.$$

$$\{(b, c, a), d\} \{(b, c, d), a\} \{(b, c), (a, d)\}$$

# Cas de variables qualitatives

$X$ prend des valeurs $\{a, b, c, d\}$.

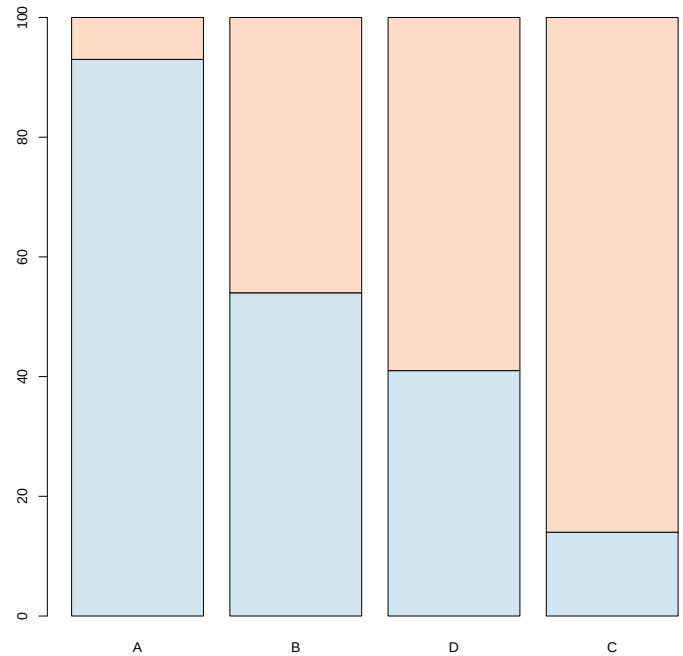
Mais classiquement, on va ordonner les modalités

$$\{a, b, d, c\}$$

puis trouver le découpage optimale

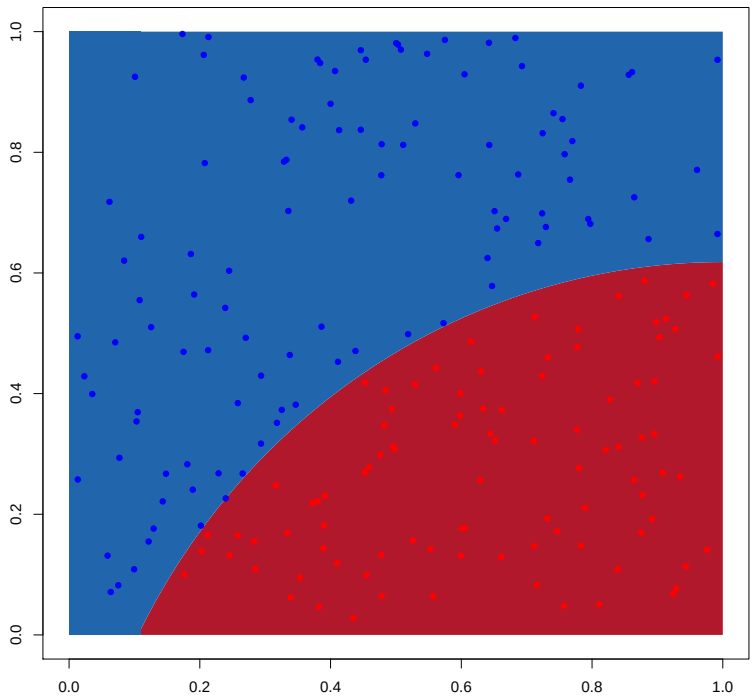
$\{(a), (b, d, c)\}$ $\{(a, b), (d, c)\}$ $\{(a, b, d), (c)\}$

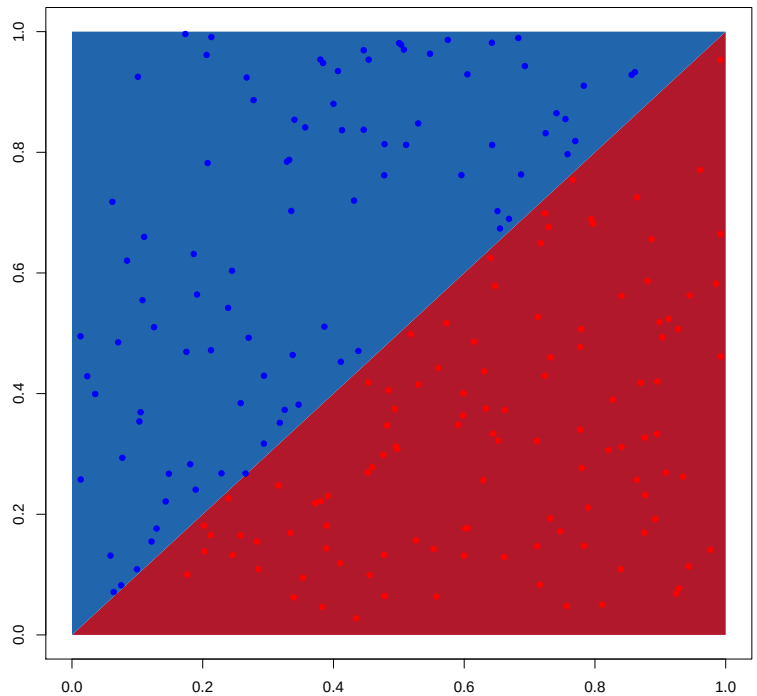
$\{(a), (b, d), (c)\}$ $\{(a), (b), (d, c)\}$



# Méthode CART et extensions

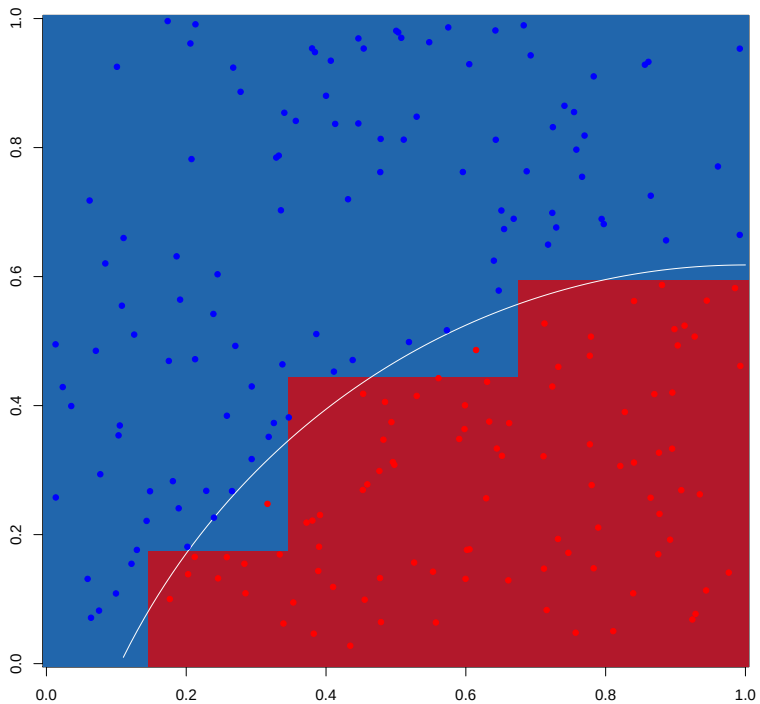
On se contente de faire des coupes suivant $X_1$ *ou* $X_2$.

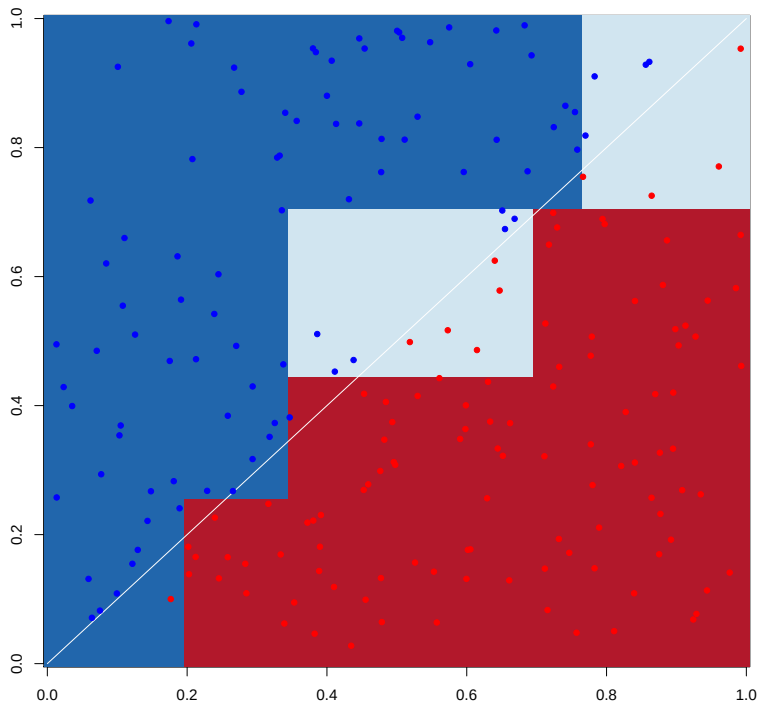


# Méthode CART et extensions

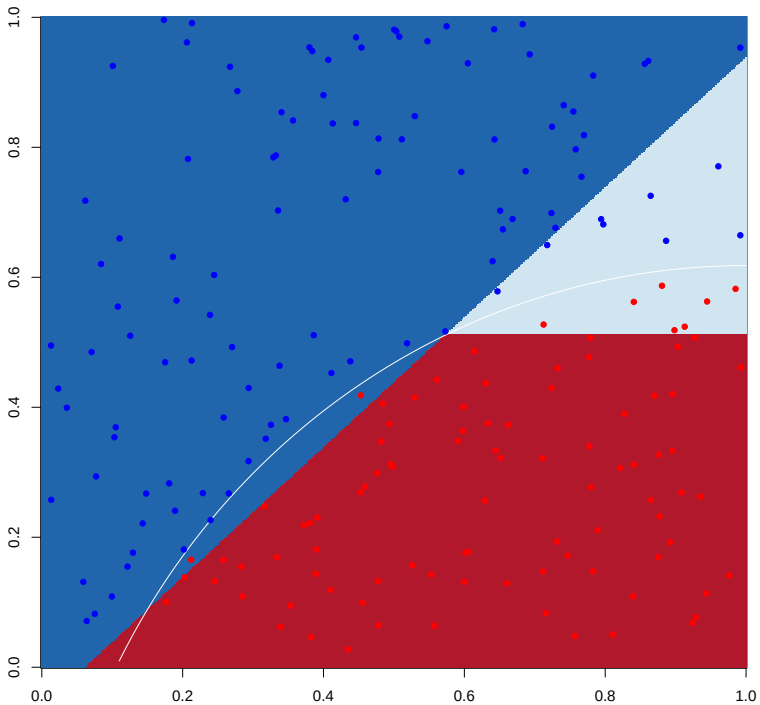
mais ne marche pas bien en présence de non linéarités, ou de rotations

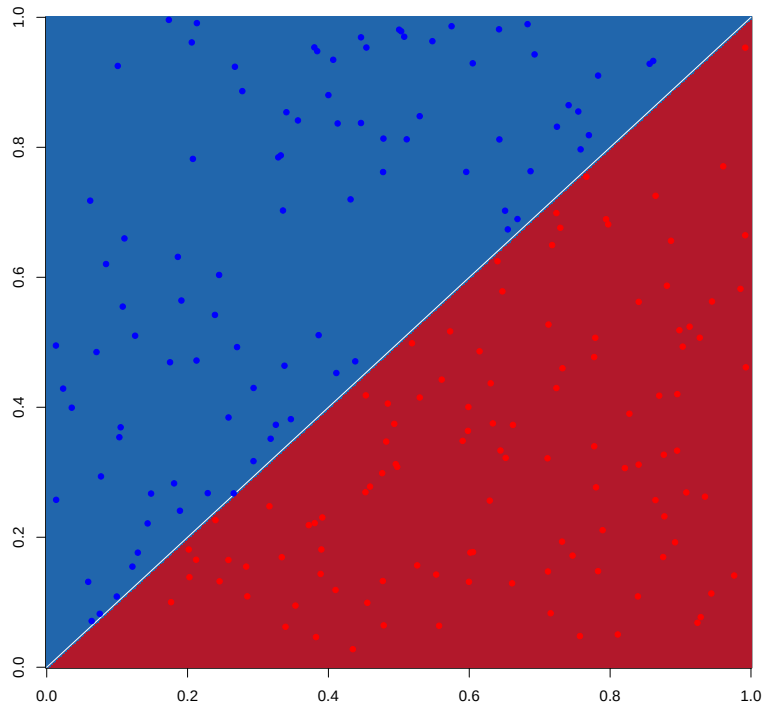


# Méthode CART et extensions

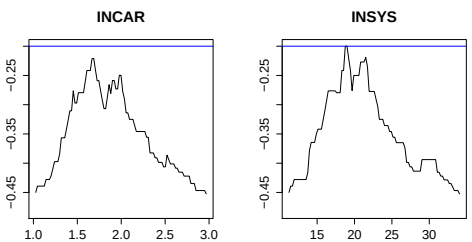
on peut aussi tenter des arbres sur $X_1 + X_2$



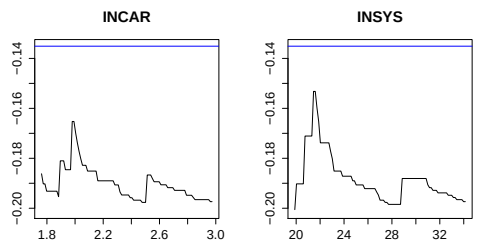



# Mise en oeuvre

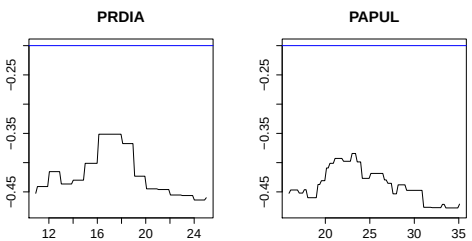
$$N_L\colon \{x_{i,j} \leq s\} \quad N_R\colon \{x_{i,j} > s\}$$



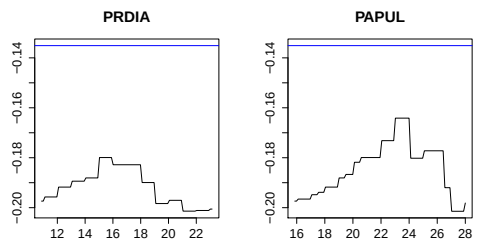

solve $\max_{j \in \{1,\cdots,k\}, s} \{\mathcal{I}(N_L, N_R)\}$

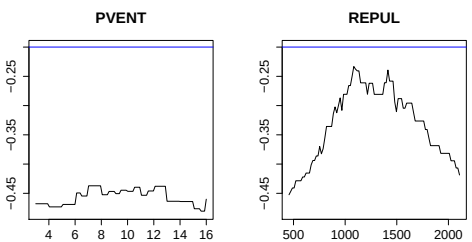


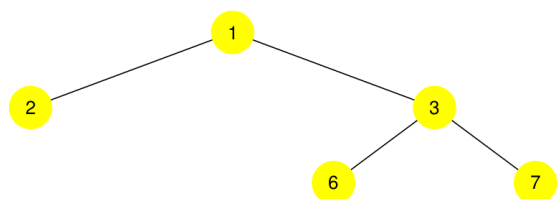

$\longleftarrow$ first split

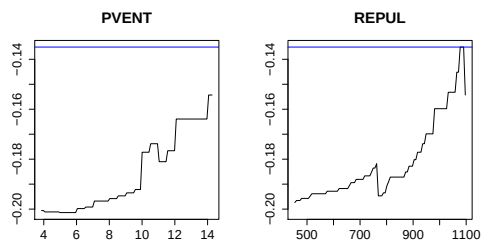



second split $\longrightarrow$



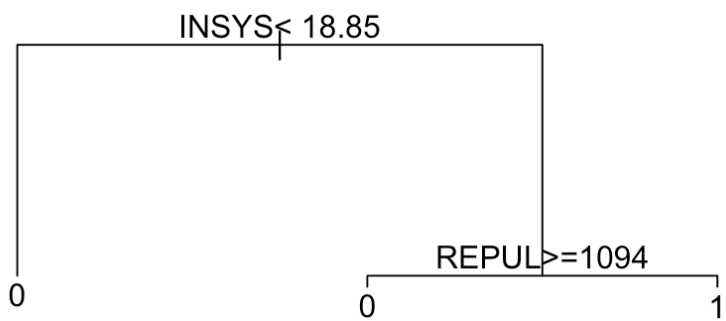



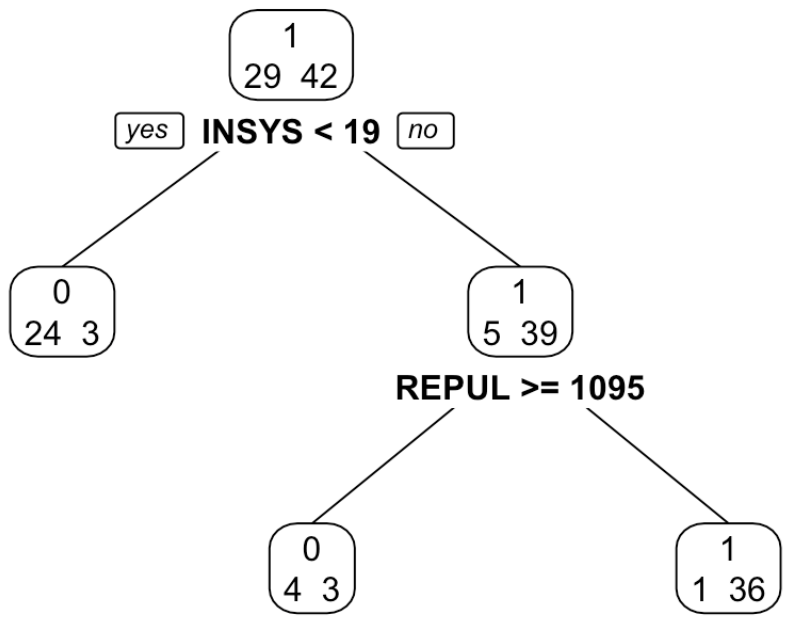
# Arbres avec R

```
> myocarde = read.table("http://freakonometrics.free.
    fr/saporta.csv", header=TRUE,sep=";")
> levels(myocarde$PRONO) = c("0","1")
```

```
> library(rpart)
> cart = rpart(PRONO~.,
 data=myocarde)
> plot(cart)
> text(cart)
```



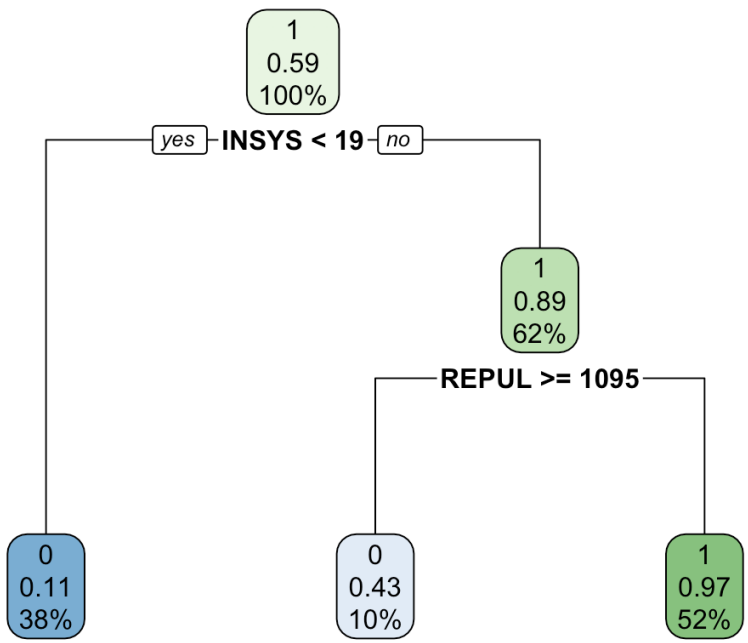

```
> library(rpart.plot)
> prp(cart,type=2,extra=1)
```



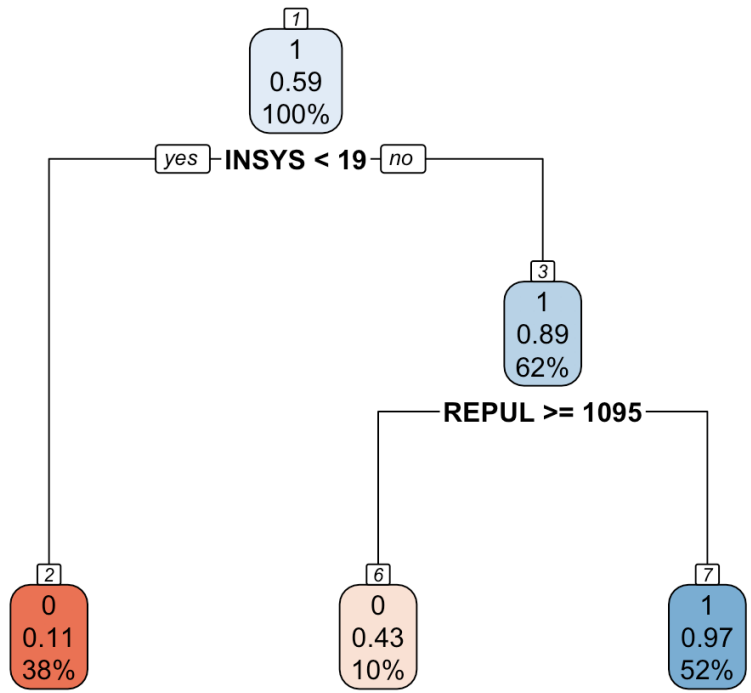
# Arbres avec R

```
> print(cart, digits = 2)
1) root 71 29 1 (0.408 0.592)
  2) INSYS< 19 27  3 0 (0.889 0.111) *
  3) INSYS>=19 44  5 1 (0.114 0.886)
    6) REPUL>=1094.5 7  3 0 (0.571 0.429) *
    7) REPUL< 1094.5 37  1 1 (0.027 0.973) *
```

```
> rpart.plot(cart)
```



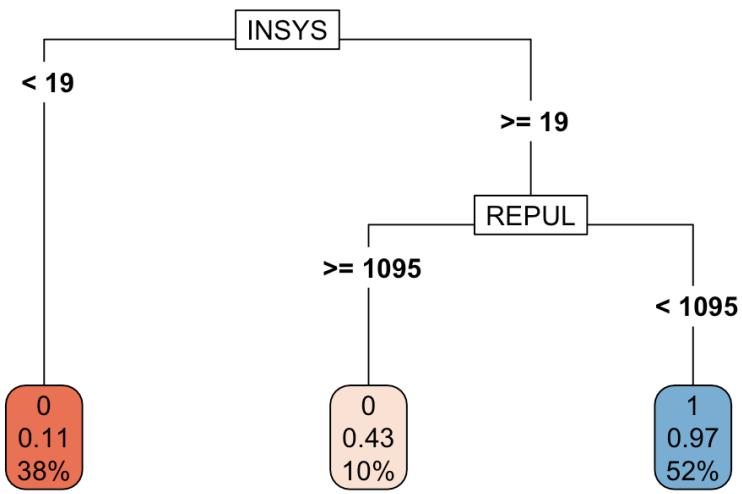

```
> rpart.plot(cart, box.
    palette="RdBu", nn=TRUE)
```



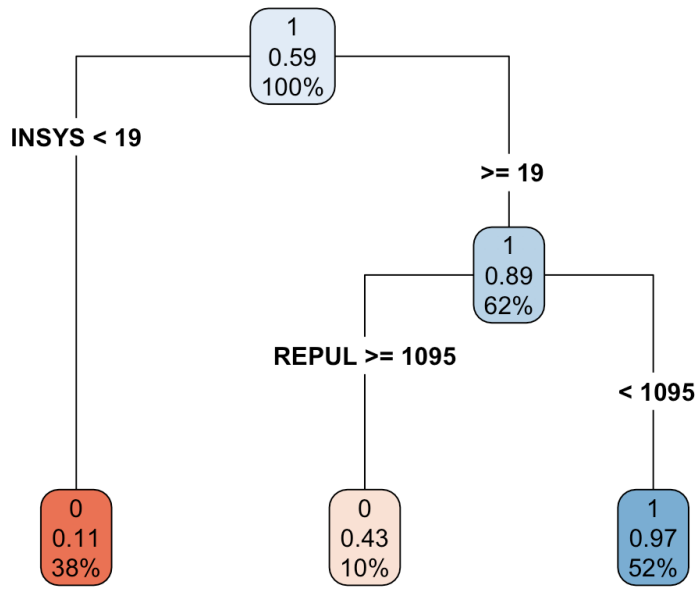
# Arbres avec R

```
> rpart.rules(cart, extra = 4, cover = TRUE)
PRONO  0   1                                                  cover
  0 [.89 .11] when INSYS <  19                                  38%
  0 [.57 .43] when INSYS >= 19 & REPUL >= 1095                  10%
  1 [.03 .97] when INSYS >= 19 & REPUL <  1095                  52%
```

```
> rpart.plot(cart, box.
    palette="RdBu", type
    =5)
```



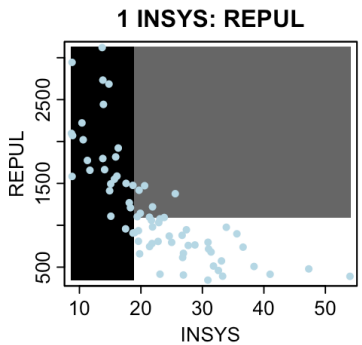

```
> rpart.plot(cart, box.
    palette="RdBu", type=4)
```

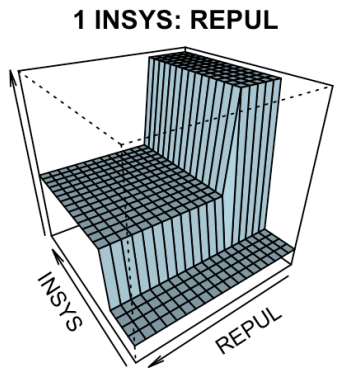


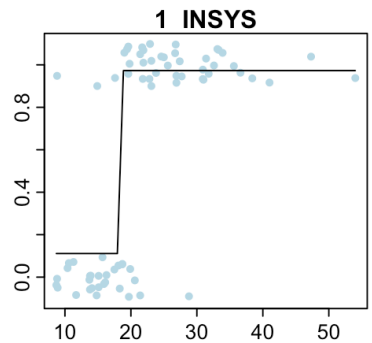
# Arbres avec R

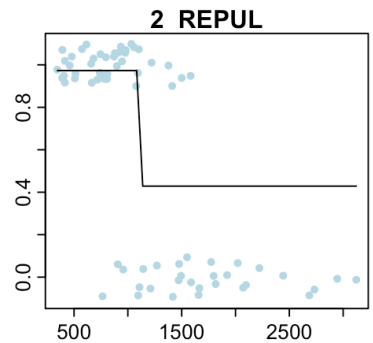
```
> library(plotmo)
> plotmo(cart, type = "
    prob", nresponse =
    "1")
```

```
> plotmo(cart, type = "prob
    ", nresponse = "1",
    type2 = "image", ngrid2
    = 200)
```



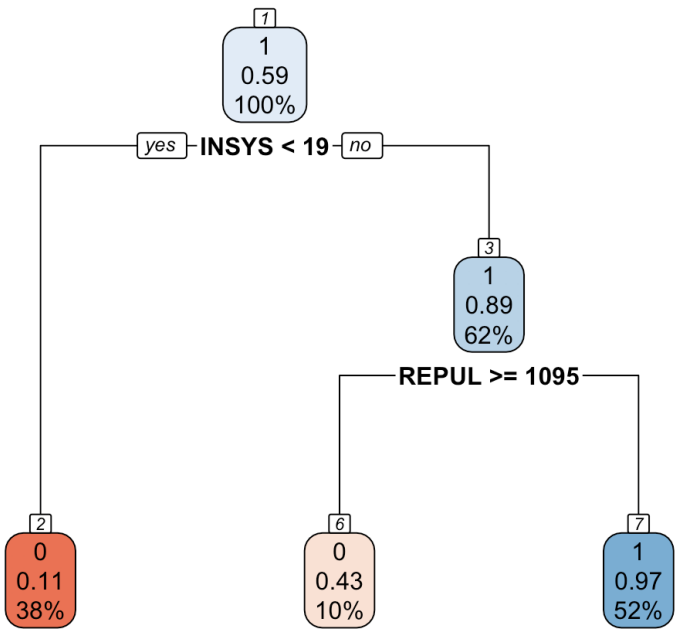



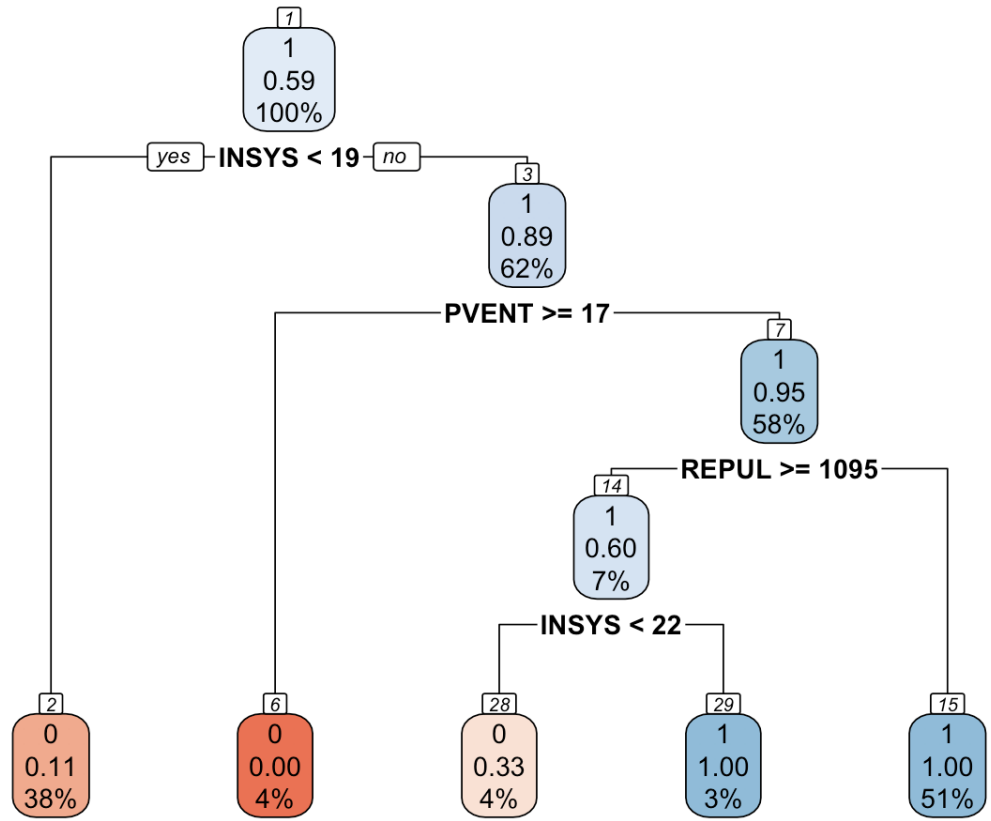

```
> path2root = function(node){
  if(node == 1) node
  else c(node, path.to.root(node %/% 2))}
```

# Arbres avec R

```
> cart = rpart(PRONO
    ~.,data=myocarde)
> rpart.plot(cart, box
    .palette="RdBu", nn
    =TRUE)
```

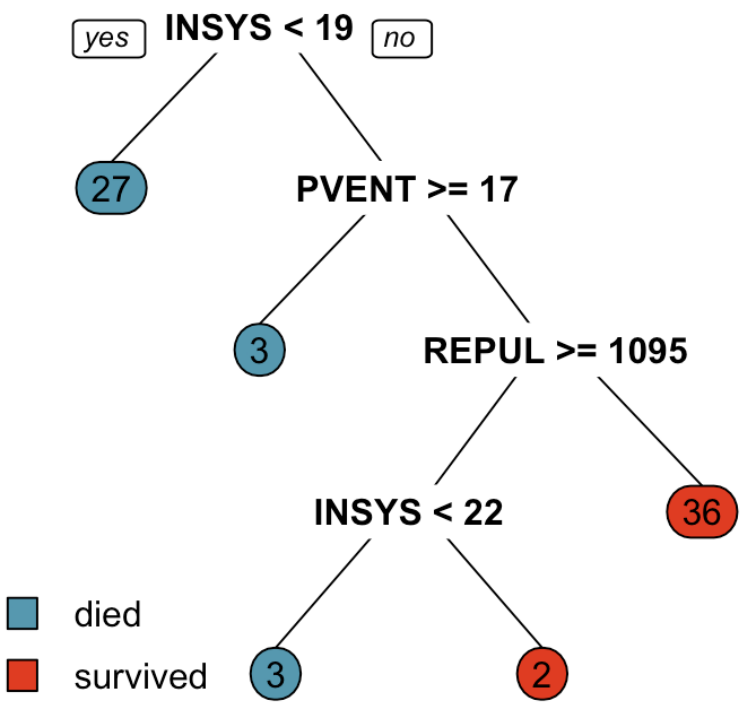



```
> cart = rpart(PRONO~.,data=
    myocarde, minsplit = 5,
  cp = 0.01)
rpart.plot(cart, box.palette="
    RdBu", nn=TRUE)
```

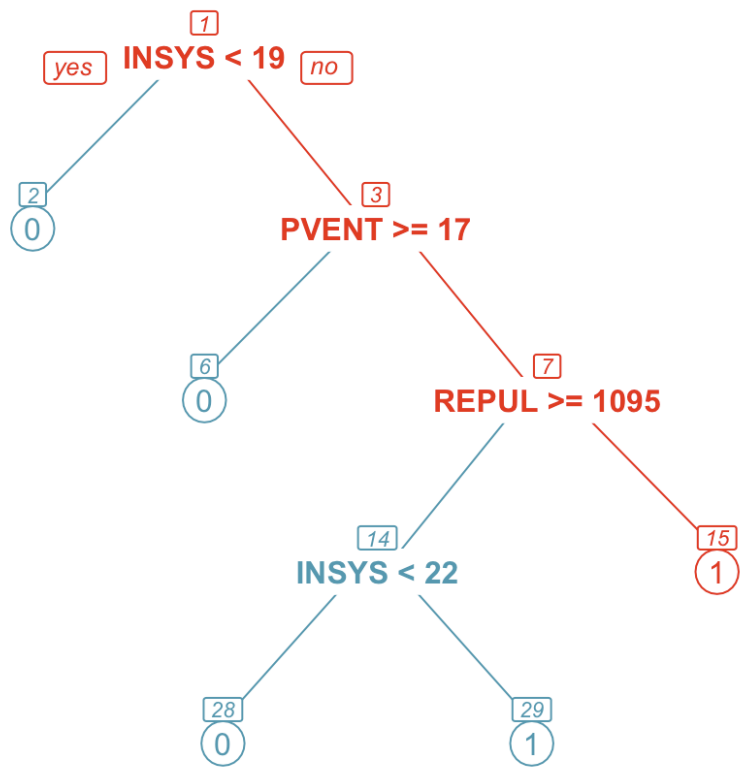


# Arbres avec R

```
> boxcols =c("red","blue
    ")[cart$frame$yval]
> prp(cart, faclen = 0,
    node.fun=only_count,
    box.col = boxcols)
```




```
> node = 15
> nodes = as.numeric(row.
    names(cart$frame))
> cols = ifelse(nodes %in%
path2root(node),"red","blue")
prp(cart, nn = TRUE, col =
    cols, branch.col = cols,
    split.col = cols)
```



# Critère d'arrêt

- On utilise souvent comme critère d'arrêt le fait d'avoir un nombre minimal d'observations dans chacune des régions.
- Utiliser comme critère d'arrêt le fait d'avoir une diminution de la fonction objectif qui dépasse un certail seuil n'est généralement pas une bonne idée.
- Même si un critère d'arrêt approprié est sélectionné, il y a fort à parier que l'arbre conduise à du surajustement, c'est-à-dire qu'il performera (trop) bien sur une base de données d'entrainement mais sera mauvais sur une base de données d'évaluation.

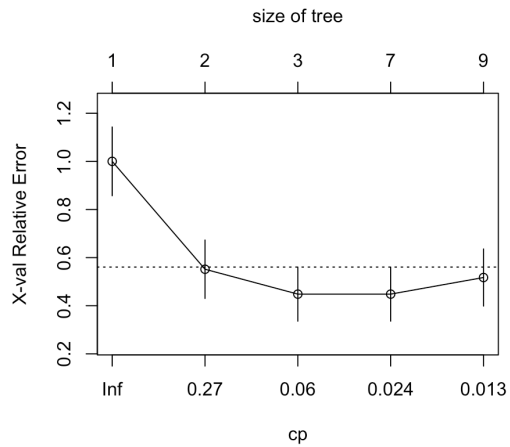
# Critère d'arrêt

Formellement, pour savoir si on coupe une feuille $\{N\}$ en deux branches $\{N_L, N_R\}$, on mesure la variation d'impureté

$$\Delta\mathcal{I}(N_L, N_R) = \mathcal{I}(N) - \mathcal{I}(N_L, N_R) = \mathcal{I}(N) - \left(\frac{n_L}{n}\mathcal{I}(N_L) + \frac{n_R}{n}\mathcal{I}(N_R)\right)$$

On coupe si $\Delta\mathcal{I}(N_L, N_R)/\mathcal{I}(N)$ dépasse cp (complexity parameter, par défaut 1%).

```
> cart = rpart(PRONO ~ ., data =
    myocarde, minsplit=3)
> plotcp(cart)
```




```
> prune(cart, cp=0.06)
node), split, n, loss, yval, (yprob) *= terminal node

1) root 71 29 SURVIE (0.40845070 0.59154930)
  2) INSYS< 18.85 27  3 DECES (0.888889 0.111111) *
  3) INSYS>=18.85 44  5 SURVIE (0.113636 0.886363)
    6) PVENT>=17.25 3  0 DECES (1.000000 0.000000) *
    7) PVENT< 17.25 41  2 SURVIE (0.048780 0.951219) *
```

# Élagage de l'arbre (pruning)

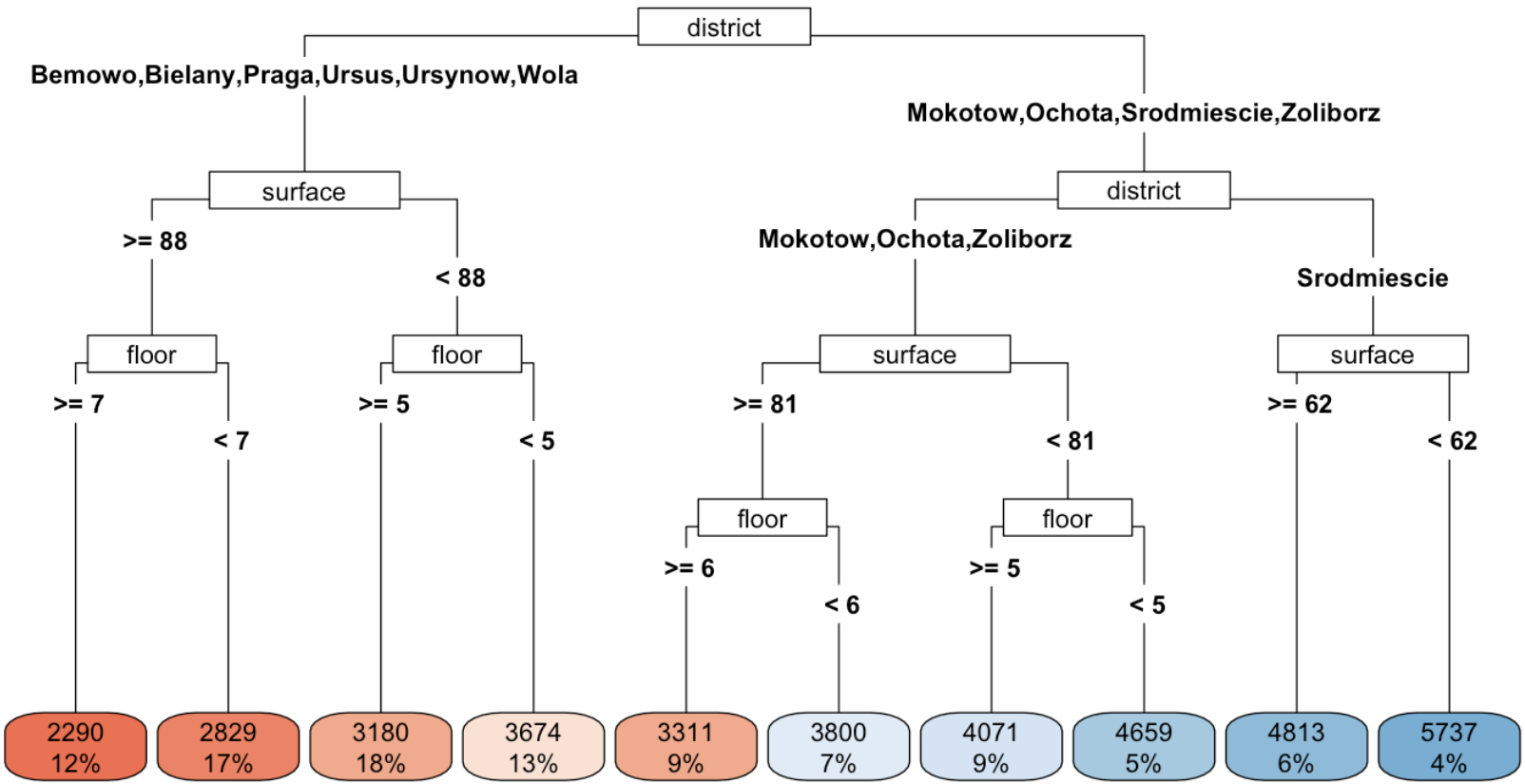
- Une meilleure stratégie consiste en (1) construire un très gros arbre de départ $\mathcal{T}_0$ et (2) couper certaines branches de l'arbre.
- On cherchera à identifier le sous-arbre $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0$ qui minimise

$$\sum_{m=1}^{|\mathcal{T}|} \sum_{i:\mathbf{X}_i \in R_m} \left( Y_i - \widehat{Y}_{R_m} \right)^2 + \alpha |\mathcal{T}|,$$

  où $\alpha$ est un (hyper-)paramètre de complexité et $|\mathcal{T}|$ représente le nombre de feuilles du sous-arbre $\mathcal{T}$.
- Similaire à la régression Ridge/Lasso: compromis entre le biais et la variance, entre la précision et la parcimonie.
- Le paramètre de complexité peut être estimé par validation croisée.

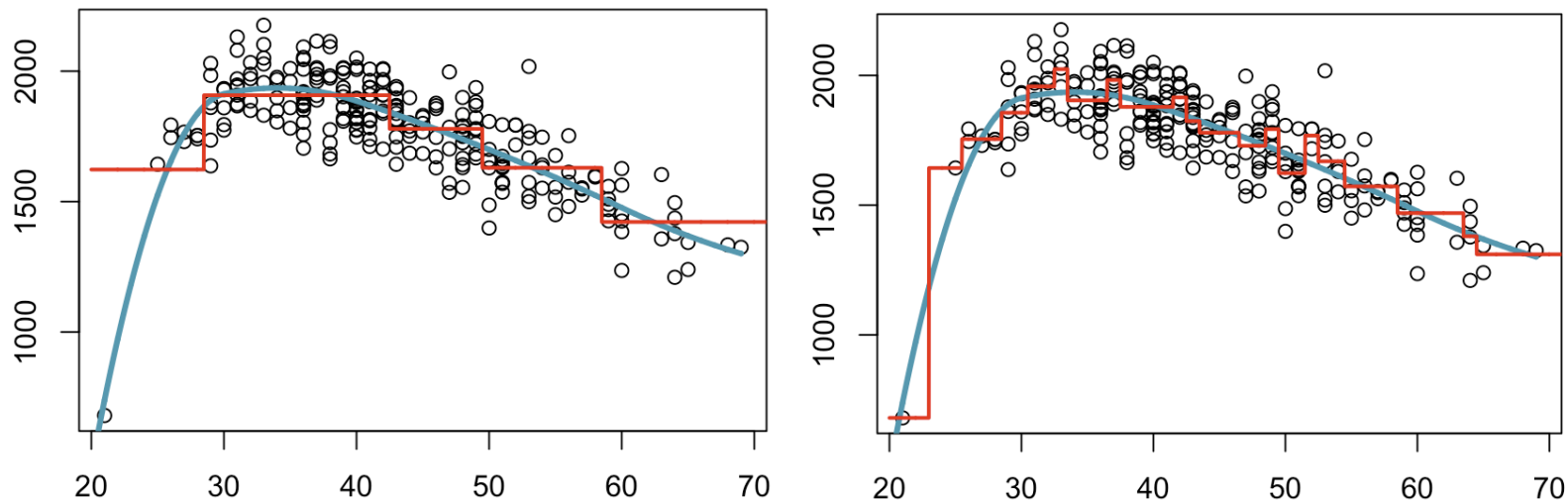
# Arbres de régression, $y \in \mathbb{R}$

```
> library(DALEX)
> arbre=rpart(m2.price~., data=apartments)
> rpart.plot(arbre, box.palette="RdBu", type=5)
```



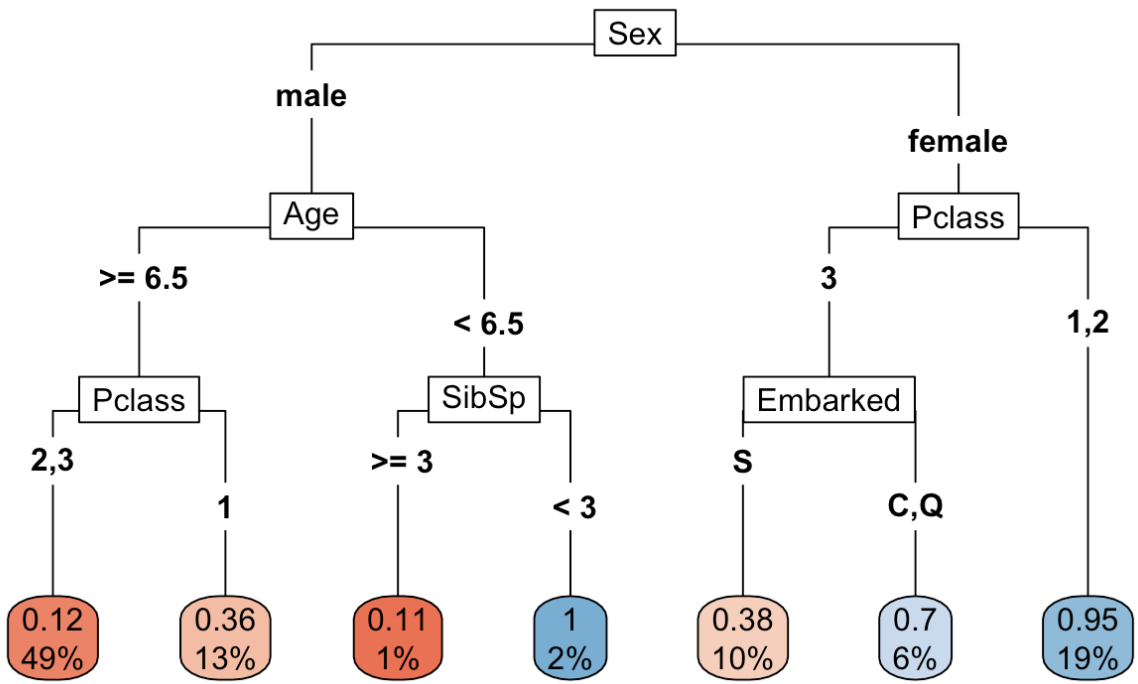
# Arbres de régression, $y \in \mathbb{R}$

```
> arbre=rpart(y~x, data=base)
> predict(arbre,newdata = data.frame(x=x))
```



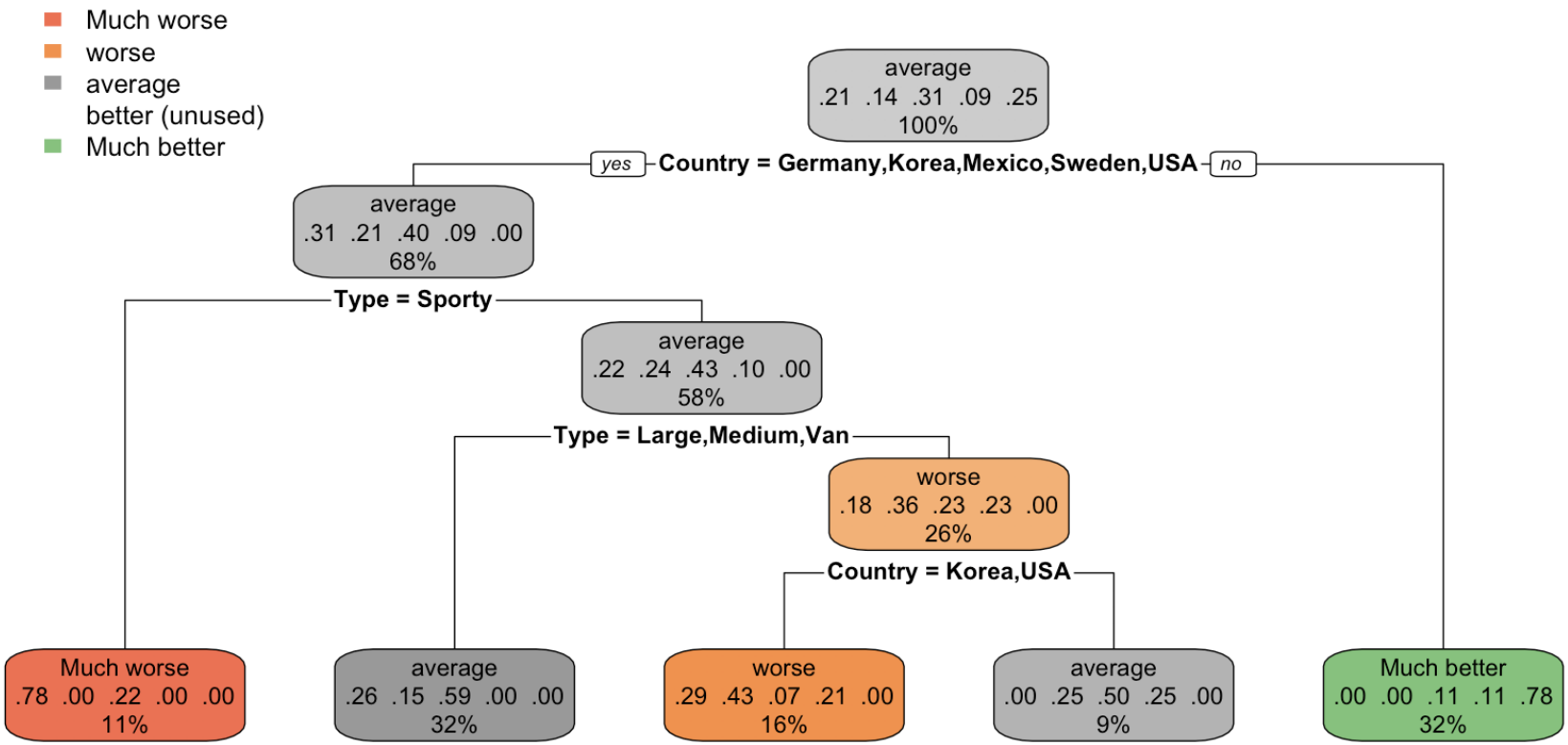
# Arbres de classification, $y \in \{0, 1\}$

```
> loc_fichier = "http://freakonometrics.free.fr/
    titanic.RData"
> download.file(loc_fichier, "titanic.RData")
> load("titanic.RData")
> cart = rpart(Survived~.,data=base[,1:7])
> rpart.plot(cart, box.palette="RdBu", type=5)
```



# Arbres de classification, $y \in \{A, B, C, D\}$

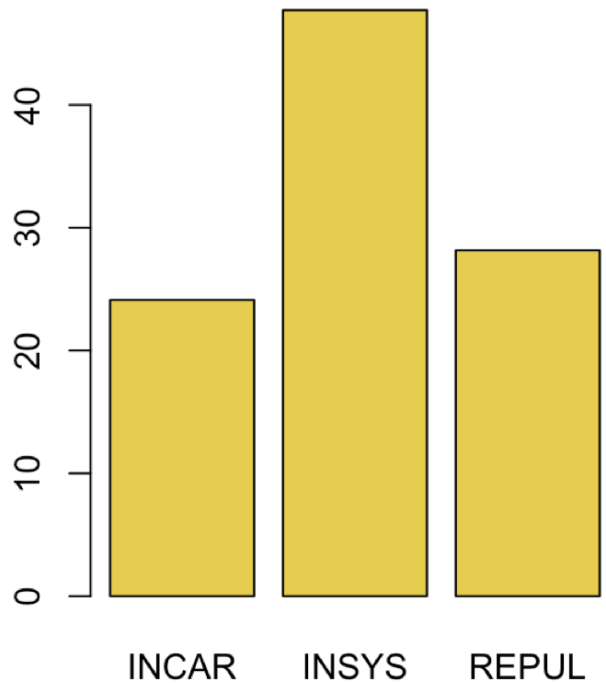
```
1 > multi.class.model <- rpart(Reliability~., data = cu.
    summary)
2 > rpart.plot(multi.class.model)
```



# Instabilité des arbres

Considérons ici plusieurs bases d'apprentissage

```
> variable=rep(NA,10000)
> for(i in 1:10000){
+ arbre = rpart(PRONO~., data=
    myocarde[sample(1:71,size=47)
    ,])
+ variable[i] = as.character(
    arbre$frame[1,"var"])
+ }
> table(variable)/100
INCAR INSYS REPUL
24.12 47.72 28.16
```




La variable utilisée au premier noeud est

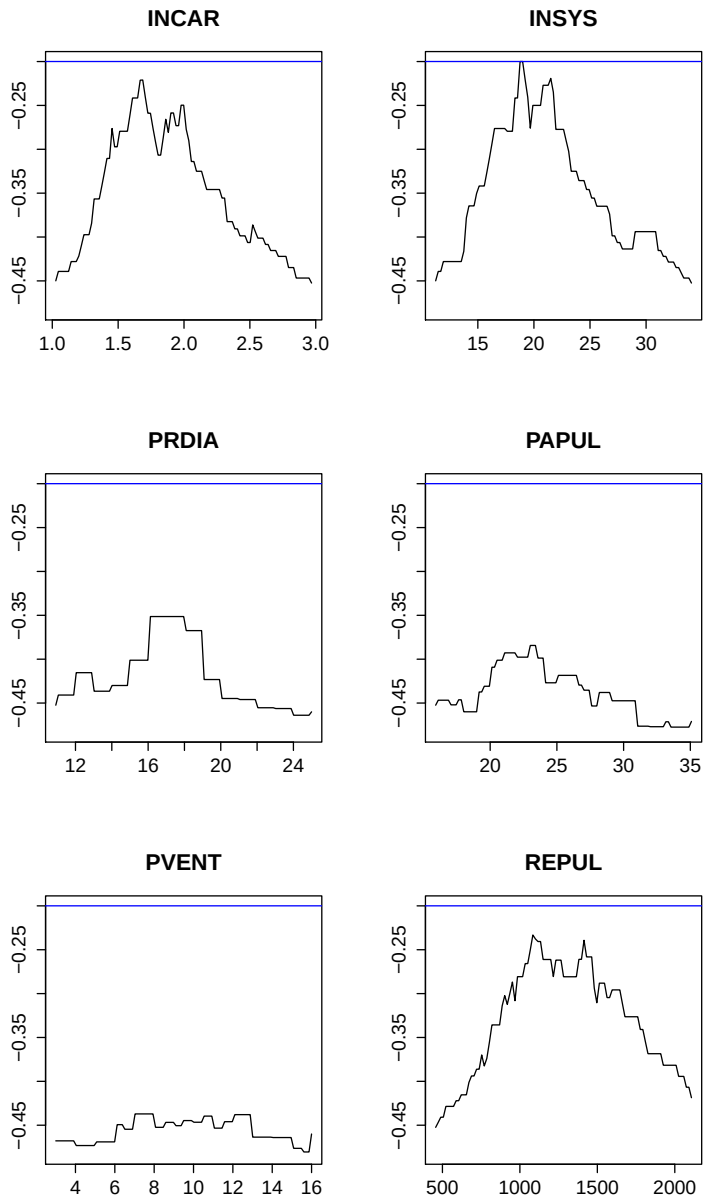
- INSYS (47.7%)
- REPUL (28.2%)
- INCAR (24.1%)

# Importance des variables

On avait déjà intuité l'importance de ces trois variables sur le graphique

```
> cart = rpart(PRONO~., myocarde)
> split = summary(cart)$splits
> split
        count ncat    improve
INSYS      71   -1 0.58621312
REPUL      71    1 0.55440034
INCAR      71   -1 0.54257020
PRDIA      71    1 0.27284114
PAPUL      71    1 0.20466714
```

et on peut calculer les mêmes quantités à chaque noeud

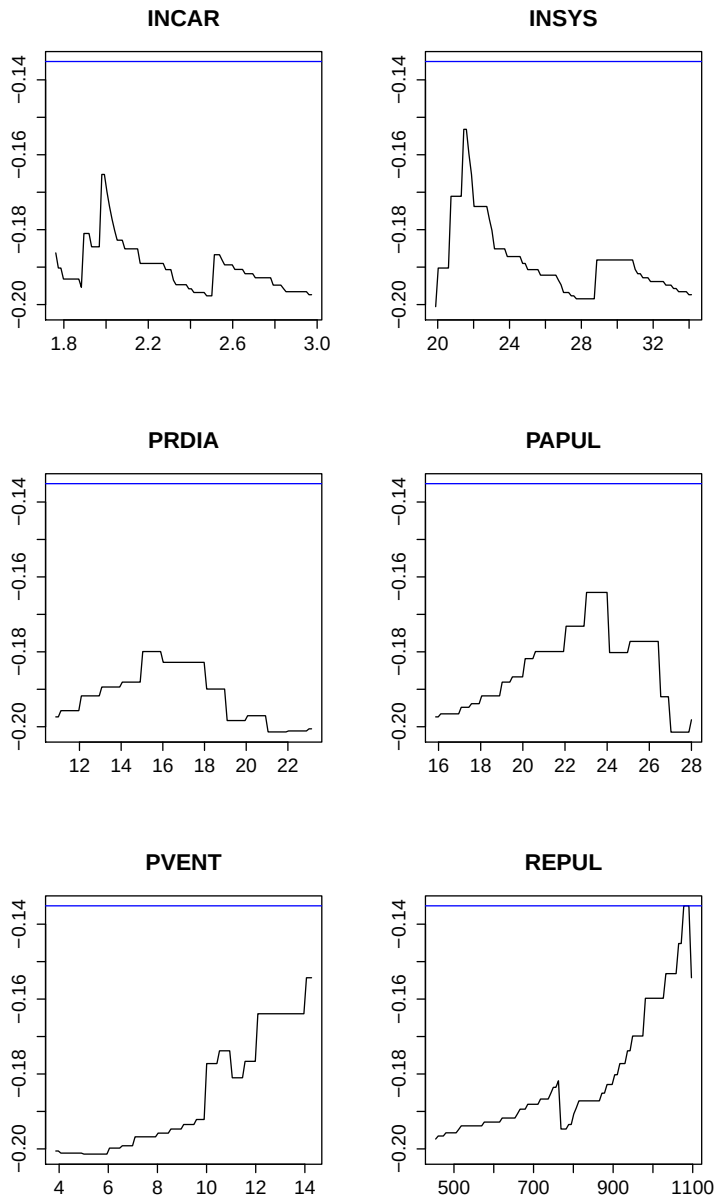


# Importance des variables

pour le second noeud

```
> split
       count ncat     improve
REPUL     27    1 0.18181818
PVENT     27   -1 0.10803571
PRDIA     27    1 0.10803571
PAPUL     27    1 0.10803571
INCAR     27    1 0.04705882
```

etc



# Importance des variables

```
> cart$variable.importance
 INSYS   REPUL   INCAR   PAPUL   PRDIA   FRCAR   PVENT
20.113 19.132 15.895   5.959   5.214   3.725   0.498
```