

Méthodes numériques en finance

Arthur Charpentier
ENSAE-ENSAI-CREST & Katholieke Universiteit Leuven

<http://www.crest.fr/pageperso/charpent/charpentFR.htm>

2006/2007

Ces notes de cours ne sont qu'un complément au cours de *Méthodes Numériques en Finance*. Merci de ne pas citer, merci de ne pas diffuser.

“*I prefer the judgement of a 55-year old trader to that of a 25-year old mathematician*”
(GREENSPAN (1997))

Contents

1	Préambule	6
2	Introduction aux “options”	7
2.1	Les options comme produit dérivé financier	8
2.2	Les options en assurance	8
2.3	Les options dite “réelles”	8
2.4	Les différentes options	8
2.5	Plan du cours	12
3	Un peu de modélisation et de mathématiques financières	13
3.1	Un peu de terminologie sur les options	15
3.2	Bornes sur les prix et relations de parité	19
3.3	Comment fait-on pour valoriser des options ?	20
3.4	L’équation de BLACK & SCHOLES (1973) (sans démonstration)	20
3.5	La notion de volatilité implicite	21
3.6	D'où vient cette volatilité implicite	23
3.7	Petit complément, le versement de dividendes	23
3.8	Formule de BLACK & SCHOLES (1973) en présence de dividendes	23
3.9	Formule de BLACK & SCHOLES (1973) en présence de coûts de transactions	24
3.10	Le calcul des grecques dans le modèle de BLACK & SCHOLES (1973)	24
3.11	Le Delta	24
3.12	Le Gamma	25
3.13	La sensibilité au strike	26
3.14	Le Vega	27
3.15	Le Theta	27
3.16	Le rho	28
4	Quelques mots sur l'estimation des paramètres	28
4.1	Estimation de paramètres univariés	29
4.2	Calcul de variances empiriques	29
4.3	Variance empirique ou variance implicite ?	30
4.4	Approche implicite et modèle de DUPIRE (1998)	30
4.5	Quelques expressions de volatilité pour des options européennes	32
5	Les notions de taux d'intérêt	33
5.1	Valorisation et processus en temps continu	37
5.2	Les méthodes d'analyse en composantes principales	37
5.3	Le modèle de HEATH, JARROW & MORTON	39
5.4	Le modèle de HO & LEE	39
5.5	Le modèle de VASICEK	40
5.6	Le modèle de HULL & WHITE	40
6	Options et arbres binomiaux	41
6.1	Valorisation et arbre à une période	41
6.2	Valorisation et arbre à n périodes	42
6.3	Petite digression: de la marche aléatoire au brownien	43

6.4	Petit complément sur la convergence	44
6.5	Interprétation des paramètres	44
6.6	Pourquoi le prix dépend de \mathbb{Q} , et pas de \mathbb{P} ?	45
6.7	Que se passe-t-il sous cette probabilité risque neutre ?	49
6.8	Que se passe-t-il si la probabilité risque neutre n'est pas unique ?	50
6.9	De l'arbre binomial au modèle continu	50
6.10	La formule de BLACK & SCHOLES (1973)	51
6.11	Utiliser un autre arbre ?	51
6.12	Arbre trinomial, ou méthode de BOYLE (1986)	53
6.13	Extention aux options multisupport (ou arc-en-ciel)	53
6.14	Utilisation des arbres pour modéliser les processus de taux	58
6.15	Une extension possible: cas d'un taux ou d'une volatilité stochastique	58
6.16	Arbre binomial et calcul des grecques: Delta	59
6.17	Arbre binomial et calcul des grecques: Gamma	59
6.18	Arbre binomial et calcul des grecques: Theta	59
6.19	Arbre binomial et calcul des grecques: Vega	62
6.20	Arbres pour options “ <i>path-dependent</i> ”	62
6.21	Utilisation (directe) pour les options à barrière	62
6.22	Les arbres adaptatifs	62
6.23	Une application simple des arbres adaptatifs	64
6.24	Les options lookback	66
6.25	Les options asiatiques	66
7	Valorisation en temps continu	68
7.1	Le modèle d'HARRISON & PLISKA (1981)	68
7.2	Les évolutions des cours	68
7.3	Résolution et formule d'Ito	68
7.4	Quelques rappels sur les changements de probabilité	70
7.5	Application au pricing d'options	72
8	Approche par les équations aux dérivées partielles	74
8.1	Petit rappel sur la formule d'Ito	74
8.2	Une première approche, à partir des arbres binomiaux	74
8.3	Une seconde approche, “ <i>avec mes mains</i> ”	75
8.4	De l'équation de BLACK & SCHOLES à l'équation de la chaleur	75
8.5	Générateur de la diffusion et formule de Feynman-Kac	77
8.6	Généralisation en dimension d	78
8.7	Equation et conditions de bord	79
8.8	Options asiatiques, avec moyenne arithmétique	79
8.9	Options lookback, sur maximum	81
8.10	Options avec coût de transaction	82
8.11	Option pour un modèle à volatilité stochastique	82
8.12	Le modèle de Bates	84
8.13	Les formes d'équations vues jusqu'à présent	84

9 Petits rappels d'analyse numérique	84
9.1 Inversion de matrices et résolution de systèmes linéaires	85
9.2 Recherche de zéros	88
9.3 Recherche d'optimums	90
9.4 Interpolation de fonctions (par des polynômes)	90
9.5 Solutions d'équations différentielles	93
10 Résolution des edp et différences finies	96
10.1 Méthodes de discrétisation	96
10.2 Les différentes méthodes de discrétisation	97
10.3 Notions de stabilité et de convergence	98
10.4 Stabilité numérique de la discrétisation	99
10.5 Examples de discrétisation: l'équation de la chaleur	100
10.6 La notion de consistance	103
10.7 La notion de stabilité	104
10.8 Approximation d'une solution et consistance	105
10.9 Approximation d'une solution et convergence	106
10.10 Quelques aspects numériques et résolution de systèmes linéaires	106
10.11 schéma de Crank-Nicolson	109
10.12 schéma de De Fort-Frankel	110
10.13 Prix d'un call européen par résolution d'e.d.p.	110
10.14 Différence entre les schémas forward, backward et centrés	115
10.15 Discrétisation d'une edp sur un maillage non uniforme	117
10.16 Autres formes de payoff, et conditions de bord	118
10.17 Les conditions de bord	120
10.18 Résolution implicite de l'équation	121
10.19 Calcul des grecques par équations aux dérivées partielles	122
10.20 Equations aux dérivées partielles pour les options "path-dependent"	122
10.21 Cas particulier, les options sur moyenne	123
10.22 Cas particulier, les options sur maximum	124
10.23 Pour aller plus loin sur l'utilisation des e.d.p.	125
10.24 Cas des processus à sauts, et valorisation par e.d.p.	125
11 Méthodes de simulations dans le modèle de BLACK & SCHOLES (1973)	127
11.1 Introduction aux méthode de <i>Monte Carlo</i>	127
11.2 Méthodes de simulation en finance ?	137
11.3 Méthodes de simulation	140
11.4 Simulation d'un processus	142
11.5 Simulation d'une diffusion continue	142
11.6 Simulation du mouvement brownien...	147
11.7 Simulation d'un processus à saut, le processus de Poisson	150
11.8 Simulation pour options <i>path-dependent</i> , première approche	150
11.9 Options lookback	152
11.10 Simulation d'un vecteur aléatoire	152
11.11 Simulation de processus corrélés	158
11.12 Impact de la corrélation sur les prix d'options	160
11.13 Processus à volatilité stochastique	160

12 Améliorer la précision des estimations	164
12.1 Méthodes de réduction de variance	164
12.2 Les méthodes de stratification	165
12.3 Les variables antithétiques	166
12.4 Echantillonage par importance, ou <i>importance sampling</i>	167
12.5 Utilisation de variables de contrôle	172
12.6 Comparaison des différents méthodes de réduction de variance	173
12.7 Méthodes de quasi-Monte Carlo	173
12.8 Complément sur la simulation de trajectoires	178
12.9 Options asiatiques	179
12.10 Options sur maximum	182
12.11 Les options à barrière(s)	183
12.12 Calcul de grecques par Monte Carlo	185
12.13 Calcul des grecques dans le cas d'un call digital	186
12.14 Le problème de la dimension	188
12.15 Décomposition de trajectoires continues	189
13 Quelques mots sur d'autres méthodes	191
13.1 La <i>Fast Fourier Transform</i>	191
14 Options américaines	191
14.1 Introduction pour des options bermudviennes	192
14.2 L'enveloppe de Snell du payoff	192
14.3 La notion de temps d'arrêt optimal	193
14.4 Valorisation d'options bermudviennes et arbres binomiaux	194
14.5 Valeur d'un call américain	194
14.6 Méthode d'approximation de Bjerskund et Stensland	195
14.7 Méthode d'approximation de Barone-Adesi et Whaley (call)	196
14.8 Méthode d'approximation de BARONE, ADESI & WHALEY (put)	197
14.9 Utilisation des arbres	198
14.10 Représentation de la région d'exercice	198
14.11 Arbre de LEISEN (1998)	198
14.12 Approche par équations aux dérivées partielles	199
14.13 Approche par équations aux dérivées partielles: frontière libre	200
14.14 Approche par équations aux dérivées partielles: inégalité variationnelle	201
14.15 Une solution analytique dans le cas du put américain	204
14.16 Approximation de la forme de la frontière d'exercice	205
14.17 Utilisation des méthodes de simulations	207
14.18 Algorithme de TILLEY (1993)	207
14.19 Algorithme de GRANT, VORA & WEEKS (1996)	211
14.20 Algorithme de WELCH & CHEN (1991)	211
14.21 Algorithme de BARRAQUAND & MARTINEAU (1995)	211
14.22 Complément: simulation de <i>chaînes</i> de Markov	212
14.23 Simulations et moindres carrés pour les options américaines	213
14.24 Les options perpétuelles	216
15 Elements bibliographiques	217

1 Préambule

“Qu’ils soient vus comme des méthodes numériques ou de simulations, les algorithmes décrits ici partagent des caractéristiques communes [..] L’objectif à atteindre étant la solution approchée d’un certain problème avec une précision ε fixée, un critère de choix important dans le choix d’une méthode numérique est le temps d’exécution, mesuré en nombre d’opérations élémentaires (la complexité de l’algorithme). Intervient alors la notion de taille du problème, qui est un entier n dont la signification est habituellement claire en fonction du contexte - taille d’espace, taille de matrices - Les complexités des méthodes numériques déterministes dépendent généralement de la taille de façon polynomiale, en $O(n^2)$ ou $O(n^3)$. Tout aussi typiquement, un méthode de Monte Carlo résoudra le même problème en $O(n)$. Cela semble miraculeux. Où est donc le piège ? Il est dans la constante cachée par l’expression $O(n)$. Cette constante dépend de la précision ε à atteindre. Pour une dimension donnée, il est fréquent qu’une méthode numérique atteigne la précision ε en un temps $O(\log(\varepsilon^{-1}))$. Pour une raison liée au théorème central limite, les méthodes de Monte Carlo atteignent la précision ε en $O(\varepsilon^{-2})$, ce qui est très lent.”

- méthode déterministe $K \cdot \log(\varepsilon^{-1}) \cdot n^2$,
- méthode de Monte Carlo $K \cdot \varepsilon^{-2} \cdot n$.

“C’est donc dans le cas où la taille n du problème est très grande et l’exigence sur la précision ε faible qu’il faut envisager les méthodes de Monte Carlo”. (Y CART (2001), p.1-2).

En pratique, le critère de choix important dans le choix dans le choix de la méthode n'est pas nécessairement le “*temps d'exécution*”, mais le temps qui s'écoule entre le moment où l'on commence à écrire l'algorithme, et celui où l'on obtient le résultat numérique.

Les méthodes numériques sont - en dimension 1 - a priori plus rapides (ou moins coûteuses en temps de calcul) que les méthodes de Monte Carlo, mais il est nécessaire de formaliser correctement le problème (conditions de bords de l'équation aux dérivées partielles), ainsi que les changements de variables parfois nécessaires pour simplifier l'algorithme.

Ce cours n'est ni un cours théorique d'analyse numérique d'équations aux dérivées partielles, ni un cours de méthodes de monte carlo, mais un cours présentant différentes méthodes numériques, dans une optique d'ingénierie financière.

Le but est de présenter les grandes idées sous-jacentes aux différentes méthodes numériques, et de les illustrer sur des exemples concrets, en montrant qu'effectivement elles convergent dans le cas du modèle de BLACK & SCHOLES (1973), sous certaines conditions. L'étude dans le détail de la vitesse de convergence sera le plus souvent laissé à les curiosités de ceux qui souhaitent aller plus loin. De plus, la plupart des résultats techniques seront expliqués, mais admis. Je renvoie les plus curieux (ou pointilleux) soit aux cours antérieurs (en particulier de calcul stochastique, voire d'algèbre linéaire ou d'analyse fonctionnelle), soit à maintes références qui sont rappelées en toute fin de document.

Pour toute remarque ou question, arthur.charpentier@ensae.fr.

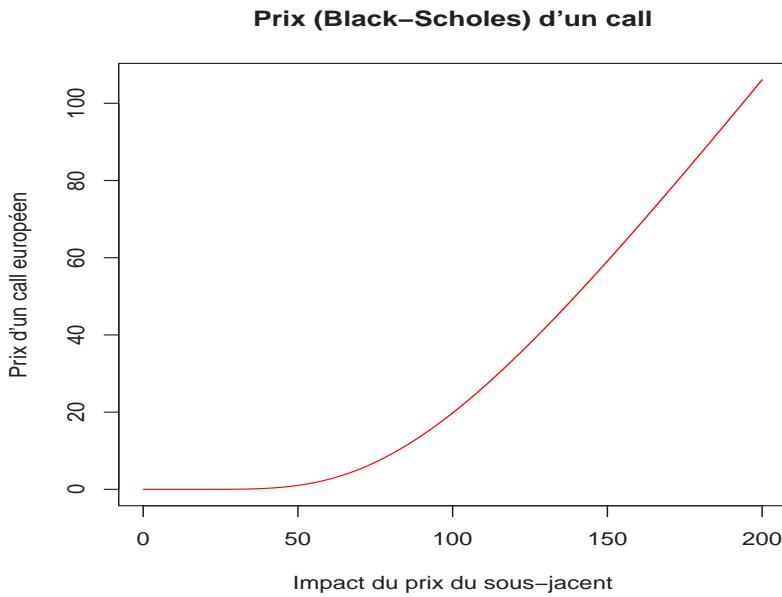


Figure 1: Prix d'une option d'achat (européenne).

2 Introduction aux “options”

Définition 1. *Une option financière est un produit dérivé qui donne le droit (et non l’obligation) d’acheter (option d’achat, ou *call*) ou de vendre (option de vente, ou *put*) une quantité donnée d’un actif financier (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, etc.), appelé actif sous-jacent à un prix précisé à l’avance (prix d’exercice), à une date d’échéance donnée (option européenne) ou avant une date donnée (option américaine).*

Les options peuvent être utilisées soit en couverture de risque de baisse ou hausse, soit pour spéculer à la baisse ou à la hausse.

A l’instar du prix d’une action, qui n’est pas déterminé seulement par l’offre et la demande sur le marché, le prix d’une option (appelé aussi prime) dépend aussi des anticipations de résultats de la valeur à l’échéance. La valeur d’une option est par conséquent composée de deux parties : la valeur intrinsèque et la valeur temps.

La valeur intrinsèque est égale à la valeur réelle de l’option c’est à dire qu’elle représente le profit qui serait obtenu immédiatement si l’on décidait d’exercer l’option

La prime d’une option vaut toujours plus que sa valeur intrinsèque tout simplement parce qu’il y a toujours une possibilité (ou probabilité) pour que, d’ici l’échéance de l’option, l’évolution des cours du sous-jacent accroisse la valeur intrinsèque de l’option. La valeur temps mesure cette probabilité. Ainsi, même lorsque l’option a une valeur intrinsèque nulle, la prime n’est pas nulle mais égale à sa valeur temps. Cette valeur représente en quelque sorte la probabilité de réaliser l’anticipation.

2.1 Les options comme produit dérivé financier

En 1973, ouverture du CBOE (Chicago Board Options Exchange) et la même année, publication des articles de Black & Scholes (*The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy) et de Merton (*Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science).

2.2 Les options en assurance

Certains contrats d'assurance (vie) comportent des options: de nombreuses clauses contractuelles peuvent être interprétées comme des options (par exemple les clauses de rachat anticipé).

2.3 Les options dite "réelles"

Par analogie aux options financières, on appelle **option réelle** sur une activité nouvelle, le fait qu'une entreprise fasse un premier investissement d'essai dans cette activité dont on elle ne sait pas si elle vaudra la peine d'investir plus avant.

Une méthode de valorisation d'actifs de production est de les considérer comme des options réelles ayant pour sous-jacent le bien qu'ils produisent.

Les projets d'investissement contiennent souvent des options,

- **option d'abandon du projet**, peut être vue comme un put américain sur la valeur du projet
- **option d'extention du projet**, peut être vue comme un call américain sur la valeur du projet

Exemple 2. *Les options réelles sont utilisées pour les forages pétroliers.*

Option financière	Options réelle
Valeur actuelle du titre	Valeur actuelle des flux financiers espérés
Prix d'exercice (strike)	Coût d'investissement
Délai jusqu'à maturité	Délai jusqu'à expiration de l'opportunité d'investissement
Taux d'intérêt sans risque	Taux d'intérêt sans risque (ou RAROC)
Incertitude sur la valeur du sous jacent	Incertitude sur la valeur du projet

Exemple 3. *Les options réelles sont utilisées pour les gestion environnementale des ressources.*

2.4 Les différentes options

Les options décrites jusqu'ici sont dites **vanille** (ou **plain vanilla options**), car ce sont les premières apparues, les plus répandues et les plus simples. Ils sont échangés sur des marchés organisés, mais il existe à côté un certain nombre de produits échangés de gré à gré, parmi lesquels

- les **options binaires**, ou **options digitales**, donnent droit, en cas d'exercice, à un montant fixe (et préétabli) si le sous-jacent dépasse à maturité le prix d'exercice K . Il s'agit essentiellement d'un produit spéculatif, car il est du type tout ou rien (on parle également d'options **all-or-nothing** ou **cash-or-nothing**). Le payoff est alors de la forme $\mathbf{1}(S_T > K)$, POOLEY, VETZAL & FORSYTH (2001), WYSTUP, SCHMOCK & SHREVE (2001).

- les **options asiatiques**, ou **options sur moyenne**, donnent droit, en cas d'exercice, à la différence entre le prix moyen sous-jacent sur la période $[0, T]$ et le prix d'exercice K (si cette différence est positive). Son avantage être d'être moins sensible à la manipulation de cours qui peuvent s'observer au voisinage de l'échéance sur les options européennes classiques. Le payoff est alors de la forme $\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K\right)$ pour un strike fixe, ou $\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - S_T\right)$ pour un strike flottant, KLASSEN (2001), VECER (2001)
- les **options lookback** donnent droit à échéance à la différence entre la valeur du cours en T et la valeur du minimum, ou du maximum sur la période $[0, T]$. Ces options sont relativement cher, car le payoff est toujours positif (souvent strictement, sauf le maximum ou le minimum est précisément atteint à échéance). D'autres **options sur minimum ou maximum** offrent comme payoff la différence entre le prix d'exercice K et la valeur du minimum, ou du maximum sur la période $[0, T]$. Le payoff est alors de la forme $(\max\{S_t, t \in [0, T]\} - S_T)_+$, BAABS (2000), CHEUK & VORST (1997), KAT (1995), VORST & CHEUK (1994)
- les **options sur quantile** sont un raffinement des options lookback, où on considère non pas le maximum ou le minimum, mais un quantile prédéterminé. Le payoff est alors de la forme $(q_\alpha\{S_t, t \in [0, T]\} - S_T)_+$, AKAHORI (1995), ANDRIANJAKA-HERIVOLA & RUSSO (2001), BALLOTTA & KYPRIANOU (2001), DASSIOS (1995), FUJITA (2000), MIURA (1992).
- les **options à barrière** (knock out, knock in...) sont des call ou des put standards, mais dont l'exercice n'est autorisé que si le cours du sous-jacent franchit (ou au contraire ne franchit pas) un seuil (appelé barrière). Le payoff est alors de la forme $\mathbf{1}(\max\{S_t, t \in [0, T]\} < \bar{B}) \times \mathbf{1}(\min\{S_t, t \in [0, T]\} > \underline{B}) \times (S_T - K)_+$ pour une double barrière désactivante. BOYLE & LAU (1994), DERMAR, KANI, ER-GENER & BARDHAN (1995), FUJITA & MIURA (2003), LEVITAN (2001), REINER & RUBINSTEIN (1991).
- les **options parisiennes** sont des options qui sont annulées (ou activées) si le prix du sous-jacent dépasse une des barrières, et se maintient au delà pendant un temps prédéfini. On distingera les options **knock-in** - ou à barrière activante - **knock-out** - ou à barrière désactivante. Une terminologie plus explicite parle aussi des options **down & in, up & in, down & out** ou encore **down & out**, VORST (1997), AVELLANEDA & WU (1999), HABER, SCHÖNBUCHER & WILMOTT (1999), SCHRODER (2000).
- les **options quanto** sont des call ou des put standards, sur des titres étrangers, mais payés dans la devise locale. Ces options doivent alors prendre en compte le taux de change. Le payoff est alors de la forme $e_T(S_T - K)_+$, DRAVID, RICHARDSON & SUN (1993) ou REINER (1992).
- les **options cliquet** qui permettent à l'acheteur de bloquer ses gains réalisés sur le sous-jacent au cours d'intervalles déterminés pendant la durée de l'option, de sorte que ces gains lui restent acquis même en cas de mouvement inverse ultérieur. On

parle aussi d'[options lock-in](#), ou encore , BUETOW (1999), RUBINSTEIN (1991) ou KWOK (2003).

- les [options doubles](#) qui permettent à l'acheteur de choisir, à une certaine date avant l'échéance, si l'option sera une option d'achat ou une option de vente. On parle aussi de d'[options as-you-like-it](#), ou [choose options](#), RUBINSTEIN (1991)
- les [options verrou](#) qui permet à l'acheteur de bloquer un rendement minimum en choisissant, au moment qu'il juge favorable, de fixer au niveau du cours du sous-jacent alors atteint le cours minimum ou maximum qui servira au dénouement de l'option ([shout options](#)), KWOK (2003).
- les [options passport](#) sont plus complexes: à partir d'un actif risqué de prix (S_t), on considère une stratégie d'investissement dans l'action, défini par un processus $X_t = x + \int_0^t \theta_s dS_s$. L'option passeport permet de se couvrir contre une mauvaise stratégie d'investissement (entre actif risqué et actif sans risque). Pour la version discrète, où les stratégies peuvent être modifiées aux dates $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$, le payoff est de la forme $\left(\sum_{k=0}^n \theta_k (S_{t_{k+1}} - S_{t_k}) \right)_+$, et dans le cas continu, $\left(x + \int_0^t \theta_s dS_s \right)_+$, AHN, PENAUD & WILMOTT (1998, 1999), DELBAEN & YOR (1998), NAGAYAMA (1999), TOPPER (2003). Parmi toutes les variantes des options passport, on retiendra les [account options](#), [perfect trader options](#), [magic potion options](#) ou autre [vacation options](#).
- les [options sur panier](#) - ou [options papillon](#), ou [butterfly](#) dont l'actif sous-jacent est un une combinaison linéaire d'actifs (panier de devises ou un panier d'actions). Plus généralement, la Société Générale avait lancé en 1998 des options [montain range](#) (parfois appelées portefeuille à capital garanti). Parmi toutes les montagnes possibles, on retiendra les options [altiplano](#) dont le payoff est de la forme $\left(\sum_{k=1}^n \frac{S_{i,T}}{S_{i,0}} - K \right)_+$, les options [Annapurna](#) dont le payoff est de la forme $\mathbf{1} \left(\min \left\{ \frac{S_{i,T}}{S_{i,0}} \right\} \right) > \varepsilon$, les options [Atlas](#) dont le payoff est de la forme $\left(\sum_{k=k^-}^{k^+} \frac{S_{i,T}}{S_{i,0}} - K \right)_+$, où l'on enlève les k^- plus mauvais titres et les $n - k^+$ meilleurs, les options [Everest](#) dont le payoff est de la forme $\left(\min \left\{ \frac{S_{i,T}}{S_{i,0}} \right\} \right)$ ou l'option [Hi-malaya](#) dont le payoff est de la forme $\left(\sum_{k=k^+}^n \frac{S_{i,T}}{S_{i,0}} - K \right)_+$, où seuls les meilleurs titres sont considérés, OVERHAUS (2002).
- les [options arc-en-ciel](#), ou [rainbow](#) est également basé sur plusieurs actifs, mais il peut s'agir (pour un arc-en-ciel à deux couleurs par exemple), du minimum ou du

maximum de deux actifs, et le payoff est alors de la forme $(\max\{S_1, S_2\} - K)_+$ ou $(\min\{S_1, S_2\} - K)_+$, LINDSET (2003) ou STULZ (1982).

- les **options d'échange** est un cas particulier d'options sur panier, où le sous-jacent est la différence (le spread) entre les cours de deux d'actifs. On parlera aussi de **spread options**, dont le payoff est de la forme $(S_{1,T} - S_{2,T} - K)_+$. Parmi les variantes, on retrouve les **extreme spread options**, les **dual spread options**, **correlation options**, **outperformance options** ou autre **ratio spread options**, RUBINSTEIN (1994), MORO (1995), PEARSON (1995) ou DUAN & PLISKA (2003).

La plupart de ces options sont dites car seule l'option ne peut s'exercer qu'à échéance T . Pour les options dites, l'option peut être exercée à n'importe quelle date entre $[0, T]$. Des raffinements là aussi existent, avec les options dites, où l'option peut être exercée à un ensemble prédéterminé de dates $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$, ou encore elles peuvent être dites si la date d'exercice est une variable aléatoire τ . On peut alors adapter les options vues précédemment dans un cadre américain. On notera τ^* la date d'exercice de l'option.

- les **options russes**, qui sont des options américaines perpétuelles (T est infini), qui garantissent de toucher le maximum observé entre 0 et la date d'exercice. Le payoff est alors $\max\{S_t, t \in [0, \tau^*]\}$, SHEPP & SHIRYAEV (1995, 1996, 1998).
- les **options israéliennes** sont des options américaines donne la possibilité au vendeur de l'option d'empêcher un exercice prématûr. KYPRIANOU (2002), KYPRIANOU & BAURDOUX (2004).
- les **options hawaïennes** sont des options américaines de type asiatique, basées sur la moyenne du processus entre 0 et τ . Le payoff est alors de la forme $\left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau S_t dt - K\right)$, AMEUR, BRETON & L'ECUYER (1999), HANSEN & JORGENSEN (2000), JORGENSEN, JORGENSEN & MILTERSEN (1999).

Enfin, parmi les sous-jacents possibles, on retiendra les **options sur actions** (étudiées ici), mais aussi des options sur **indices** (CAC40), sur **taux de change**, sur **taux d'intérêts**, sur **matières premières** (cacao, café...), voire sur des **options** (on parlera alors de **compound option**).

Enfin, pour compliquer les choses, notons qu'on peut constituer des portefeuilles d'options,

- le **bull spread** ou **bear spread**, qui consistent à acheter et vendre deux options de même sous-jacent et de même date d'exercice, mais de strikes différents (K_1 et K_2). Le Bull spread correspond à un achat et une vente d'une option d'achat et le Bear spread est l'émission d'une option de vente et un achat d'une option de vente. Dans le cas du bull spread, l'investisseur s'attend à une hausse du cours du titre sous-jacent,
- le **butterfly** correspond à l'achat de 2 call (de strikes K_1 et K_2) et la vente d'un call (de strike $K = (K_1 + K_2)/2$). Très logiquement, le payoff a une forme se rapprochant d'autant plus d'un Dirac que les strikes sont proches. Cette stratégie sera choisie par un investisseur qui anticipe que le cours du sous-jacent restera proche du strike et ne bougera pas ni dans un sens ni dans un autre,

- le **straddle** est un portefeuille composé d'une call et d'un put de même strike K . Cette stratégie sera choisie par un investisseur qui pense que le cours du sous-jacent va varier significativement sans savoir exactement dans quel sens. A l'inverse, un investisseur qui anticipe que le cours restera stable autour de la valeur du strike s'engagera dans la stratégie opposée,
- les **calendar spreads** sont des stratégies impliquant des options de différentes dates de maturités (T_1, T_2, \dots) mais de strikes identiques K .

En panachant tout, on peut s'intéresser à des straddle sur options russes (GERBER & SHIU (1994)), etc.

2.5 Plan du cours

1. Modèles de mathématiques financières, liens entre probabilités, processus et prix de produits financiers, présentation des **options** et formule de **Black & Scholes**,
2. Valorisation par **arbre (binomial)**, par discrétisation des processus,
3. Valorisation par **équation aux dérivées partielles**, et utilisation des méthodes de **différences finies** (ou éléments finis),
4. Valorisation par méthodes de **Monte Carlo**, et par simulations, sensibilisation à la problématique de réduction de variance,
5. Cas des **options américaines** et des temps d'exercices optimaux.

2. L'utilisation des arbres (binomiaux) - ou méthode par lattice,

Il s'agit d'une méthode simple et explicite, mais parfois peu efficiente, en particulier pour les options **path-dependent**. L'idée est de discrétiser en temps l'évolution du sous-jacent, mais aussi en espace: entre la date t_i et t_{i+1} , le cours passe de S_{t_i} à deux valeurs, une en cas de hausse du cours, et l'autre correspondant à la baisse.

3. L'utilisation des **équation aux dérivées partielles**, et les méthodes de **différences finies**

Ces méthodes sont plus efficaces, mais parfois plus complexes à mettre en oeuvre: il faut trouver l'équation aux dérivées partielles et les conditions de bords. Ceci nécessite de faire correctement du calcul d'Ito. Une fois l'équation aux dérivées partielles obtenue, l'idée est alors relativement simple: remplacer les dérivées par des différences, i.e.

$$f'(x) \sim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ où } h \text{ est petit,}$$

L'analyse de l'erreure commise se fait à l'aide de développements de Taylor,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \sim \frac{h}{2} f''(x) + o(h),$$

sous des conditions de régularité suffisantes. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, on parlera de méthodes d'**éléments finis**.

4. Les méthodes de **Monte Carlo**,

Le prix d'une option est l'espérance actualisée, sous une certaine probabilité, du payoff: $e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(g(S_T))$. L'idée de la méthode de Monte Carlo est d'utiliser la loi des grands nombres pour approcher cette espérance, puis le théorème central limite pour avoir un ordre de grandeur de l'erreur commise. Si on sait simuler S_T (éventuellement tout le processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ pour une option path-dependent), alors

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(g(S_T)) \sim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(S_{i,T})$$

avec une erreur de la forme $O(1/\sqrt{n})$. Ces méthodes sont intéressantes en grande dimension (trois *facteurs de risques*), et sont faciles à mettre en oeuvre.

Mais la légitimation de telle ou telle approche dépend des auteurs,

2. L'utilisation des **arbres (binomiaux)** est naturelle, car il s'agit de la discréétisation la plus simple du modèle de BLACK & SCHOLES (1973). Mais “*it is binomial is not that it is a numerical scheme so simple as to be understood by traders all round or by financial quantitative analysts freshly introduced to the field of numerical analysis. The binomial tree is binomial - and so persistent in the financial textbooks - because two states of the world are the only way we can regain market completeness in a discrete setting*”. (AYCHE (2001))
3. L'utilisation des **différences finies** pour les e.d.p. sont la “*method of choice for less than 3 stochastic factors since complex features are easily handled, i.e. complex american contract type*”. De plus, “*one can build up general library so that many different contracts can be quickly priced and those techniques can handle nonlinear problems (optimal stochastic control, HJB equation)*” (FORSYTH & VETZAL (2006)).
4. Les méthodes de **Monte Carlo** sont de plus en plus intéressantes compte tenu de la vitesse de calcul des ordinateurs. Historiquement, “*the most common applications of Monte Carlo methods in numerical computations are for evaluating integrals*”. (GENTLE (2006)).

3 Un peu de modélisation et de mathématiques financières

Formellement on se place sur un espace probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ω représente tous les **états du monde** possibles. L'état $\omega \in \Omega$ étant possible, cela signifie que $\mathbb{P}(\omega) > 0$. En se plaçant du point de vue d'un investisseur, la mesure de probabilité \mathbb{P} représente sa perception des probabilités associées à chaque état de la nature. On notera en particulier que s'il y a deux investisseurs, les probabilités associées aux différents états de la nature ne sont pas nécessairement identiques.

A un instant T , pouvant correspondre à une échéance quelqueconque, l'**information disponible** est représentée par la filtration

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_s, 0 \leq s \leq t\},$$

avec $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$ (qui correspond à la tribue ne contenant aucune information). Si l'on considère n titres sur le marché, on note pour tout $i = 1, \dots, n$ et $t \in [0, T]$, $S_{t,i}$ le prix

du titre i à la date t . On notera que le processus $(S_{t,i})_{t \in [0,T]}$ est un processus adapté à la filtration \mathcal{F} .

Notons qu'en plus de ces n titres risqués, on suppose qu'il existe un titre, indicé par 0, correspondant à un **actif sans risque**. Le processus $\beta_t = 1/S_{t,0}$ sera utilisé comme processus d'actualisation.

On appellera stratégie d'investissement un processus prévisible $(\boldsymbol{\alpha}_t)_{t \in [0,T]}$, où $\boldsymbol{\alpha}_t = (\alpha_{t,0}, \alpha_{t,1}, \dots, \alpha_{t,n})$ désigne les parts d'actifs détenus à la date t . La stratégie est dite autofinancée si aucune somme d'argent n'est investie, ou retirée, après la date 0, c'est dire, en temps discret, que pour tout $t \in [0, T]$

$$\boldsymbol{\alpha}_t \cdot \mathbf{S}_t = \boldsymbol{\alpha}_{t+1} \cdot \mathbf{S}_t.$$

On notera de plus qu'il n'y a pas de coût de transaction.

La valeur d'une stratégie est le processus $(V_t(\boldsymbol{\alpha}))_{t \in [0,T]}$, où $V_t(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \mathbf{S}_t$. Une stratégie est alors dite **admissible** si elle est autofinancée, et que sa valeur n'est jamais négative. On dira qu'une stratégie admissible est une **opportunité d'arbitrage** si

$$V_0(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(V_T(\boldsymbol{\alpha})) > 0.$$

Autrement, avec une telle stratégie, en n'investissant rien ($V_0(\boldsymbol{\alpha}) = 0$), nous sommes certain de ne pas perdre d'argent ($V_T(\boldsymbol{\alpha})(\omega) \geq 0$), et nous avons la possibilité de réaliser un grain (il existe au moins un état de la nature ω_* pour lequel $V_T(\boldsymbol{\alpha})(\omega_*) > 0$).

Une hypothèse fondamentale sera que sur le marché, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

On parlera de **portefeuille de réPLICATION**, permettant de répliquer un actif S_t^* , un portefeuille $\boldsymbol{\alpha}_t$ tel que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\boldsymbol{\alpha}_t \cdot \mathbf{S}_t(\omega) = S_t^*(\omega)$: à chaque état de la nature, le portefeuille vaut autant que l'actif S_t^* .

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, si un portefeuille $\boldsymbol{\alpha}_t$ permet de répliquer un actif S_t^* , alors nécessairement, à toute date antérieure $s \in [0, t]$ leurs prix coïncident.

Exemple 4. si un actif sans risque vaut $1 + r$ en t_1 et 1 à la date $t_0 < t_1$, et si un actif risqué vaut 1 en t_0 , et soit $1 + d$, soit $1 + u$ en t_1 , avec $d < u$, alors nécessairement $d < r < u$.

Un marché sera dit **complet** si quel que soit le payoff que l'on cherche à répliquer (correspondant à une variable aléatoire Z), il existe un portefeuille de réPLICATION, permettant de répliquer Z , i.e. pour tout Z , il existe $\boldsymbol{\alpha}$ tel que $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}(\omega) = Z(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Parmi les hypothèses qui seront également toujours faites, bien que peu réaliste, on notera que les actifs sont **infiniment divisibles**: on peut acheter une quantité $2/3$, ou $\sqrt{\pi}$ d'actions. De plus, il n'y a **pas de limitation de découvert**.

On supposera qu'il n'existe pas de **coûts de transactions**. Une conséquence de toutes ces hypothèses est que les prix à l'achat et les prix à la vente sont identiques.

Parmi les autres termes, on dira qu'un portefeuille $\boldsymbol{\alpha}$ est un **portefeuille de couverture** pour un payoff Z , si pour tout $\omega \in \Omega$, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}(\omega) \geq Z(\omega)$.

Enfin, l'hypothèse que nous ferons dans toute la suite est qu'il existe un unique **actif sans risque**. Cette hypothèse est très forte, et contredite par la réalité (courbe des taux plate, constante).

Si le marché est complet, et satisfait l'absence d'opportunité d'arbitrage, considérons un portefeuille sur plusieurs actifs S_0, S_1, \dots, S_p . Considérons un produit dérivé européen, de payoff positif, de maturité T . Par hypothèse, il existe un portefeuille de répliquation, permettant d'obtenir le prix en $t = 0$. Aussi, le prix du produit dérivé est une combinaison linéaire des actifs. Soit Π_T ce prix. On suppose le premier actif S_0 sans risque. Alors

$$\Pi_T \left(\frac{S_{0,T}}{S_{0,0}} \right) \text{ est une forme linéaire positive.}$$

De plus, cette fonction vaut 1 en 1 (principe d'actualisation sur le taux sans risque). Par le théorème de Riesz, il existe une unique probabilité \mathbb{Q} (unicité induite par l'hypothèse de marché complet), équivalente à la probabilité historique \mathbb{P} (ayant les mêmes ensembles de mesure nulle) telle que

$$\Pi_T \left(\frac{S_{0,T}}{S_{0,0}} Y_T \right) = \int Y_T d\mathbb{Q} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y_T),$$

pour tout Y_T . Donc, pour tout produit européen de maturité T , et de flux terminal X_T ,

$$\Pi_T(X_T) = S_{0,0} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{X_T}{S_{0,T}} \right).$$

Le prix d'un produit dérivé européen est alors l'espérance sous une probabilité \mathbb{Q} - appelée **probabilité risque neutre** - du prix du payoff actualisé (facteur $S_{0,T}^{-1}$ correspondant au prix de l'actif sans risque en T).

Il est alors possible de noter que sous la probabilité \mathbb{Q} ,

$$\frac{X_t}{S_{0,t}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{X_T}{S_{0,T}} \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

où l'espérance est calculée conditionnellement à l'information connue à la date t , notée \mathcal{F}_t . Aussi, le prix actualisé de l'actif $(X_t)_{t \in [0,T]}$ est une martingale.

3.1 Un peu de terminologie sur les options

Un **call** est une option d'achat, et un **put** une option de vente. Le **payoff** d'une option (ou **valeur intrinséque**) est le maximum entre 0 et le flux engendré par un exercice immédiat de l'option. Pour un call, le payoff est $\max\{0, S - K\} = (S - K)_+$.

La **valeur temps** d'une option vient du fait qu'il est possible que le prix du sous-jacent varie encore avant échéance.

Une option est **dans la monnaie** engendrerait un flux positif si elle était exercée immédiatement. Un call est dans la monnaie si et seulement si $S > K$.

Une option est **à la monnaie** engendrerait un flux nul si elle était exercée immédiatement. Un call est dans la monnaie si et seulement si $S = K$.

Une option est **en dehors de la monnaie** engendrerait un flux négatif si elle était exercée immédiatement. Un call est dans la monnaie si et seulement si $S < K$.

Exemple 5. Considérons à une date t l'indice CAC 40 cotant 3195.02 points, et considérons les options suivantes,

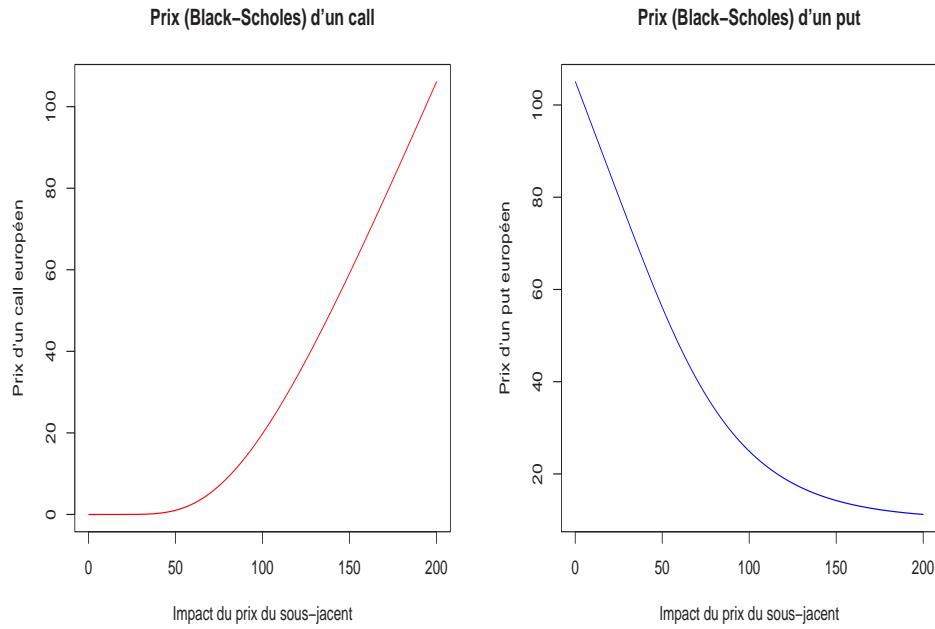


Figure 2: Influence du prix du **sous-jacent** sur le prix d'un call et d'un put.

- un *call de prix d'exercice $K = 3150$* est à la monnaie,
- un *call de prix d'exercice $K = 3200$* est dans la monnaie,
- un *call de prix d'exercice $K = 3250$* est en dehors de la monnaie.

Plusieurs facteurs peuvent influencer le prix d'un option sur action,

- le **cours du sous-jacent** (de l'action) à la date d'évaluation (ici S_0),
- le prix d'exercice, ou **strike**, K
- le **temps** à parcourir avant l'échéance, T , en années,
- la **volatilité** du prix de l'action σ ,
- le **taux d'intérêt sans risque** r .

Les figures 2 à 6 montrent les évolutions des prix d'un call (à gauche) et d'un put (à droite), en fonction de différents paramètres.

La **prime** est le prix du contrat payé par l'acheteur au vendeur de l'option (qu'elle soit d'achat ou de vente).

Exemple 6. Le CAC 40 cotant 3195.02 points

- un *call de prix d'exercice $K = 3100$* valait 199.91 points, et le *put* 100.13,
- un *call de prix d'exercice $K = 3150$* valait 168.86 points, et le *put* 118.98,
- un *call de prix d'exercice $K = 3200$* valait 140.41 points, et le *put* 140.41,
- un *call de prix d'exercice $K = 3250$* valait 115.17 points, et le *put* 1465.06,
- un *call de prix d'exercice $K = 3300$* valait 93.26 points, et le *put* 193.03,

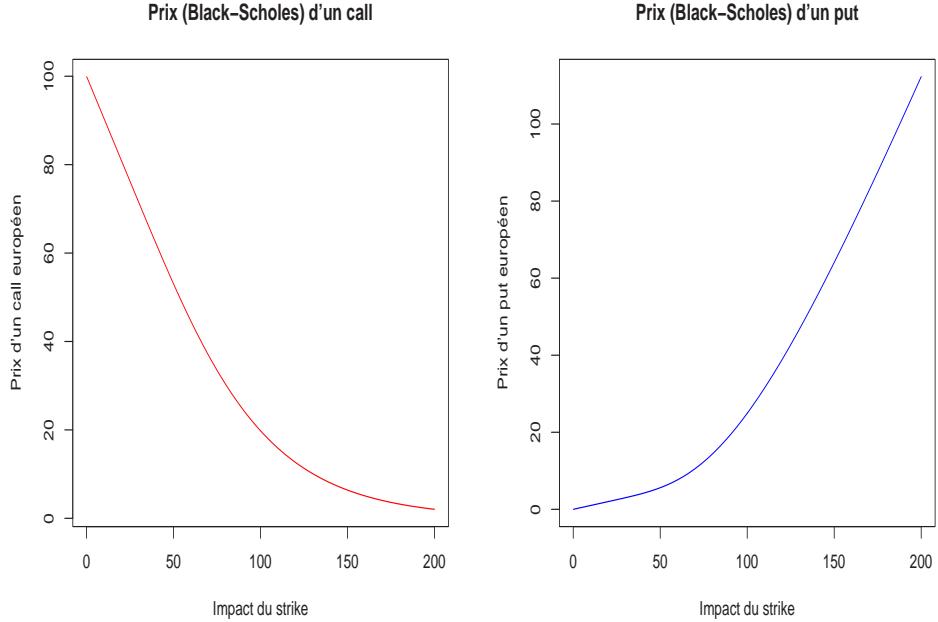


Figure 3: Influence du prix du **strike** sur le prix d'un call et d'un put.

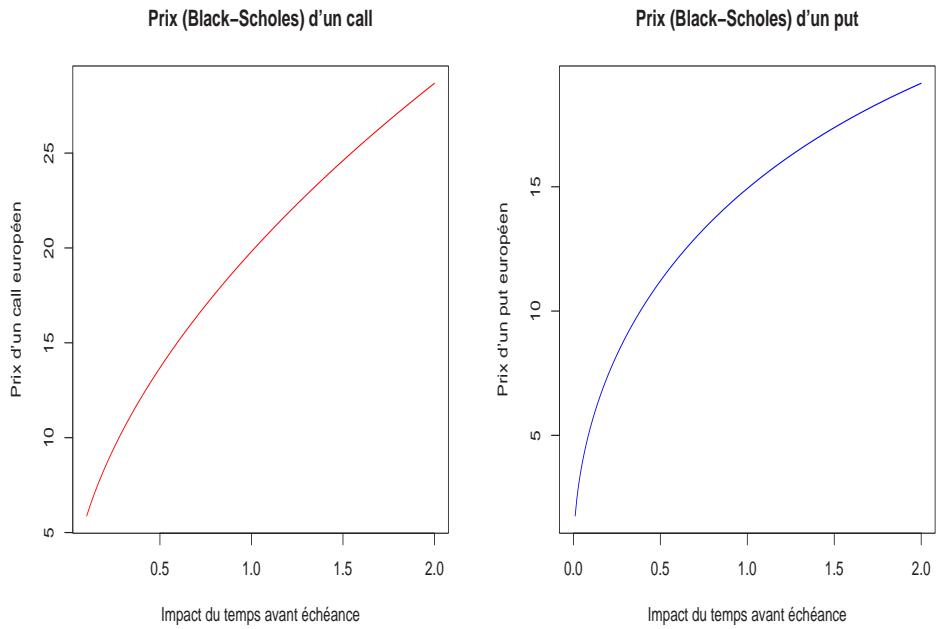


Figure 4: Influence du prix du **temps avant échéance** sur le prix d'options.

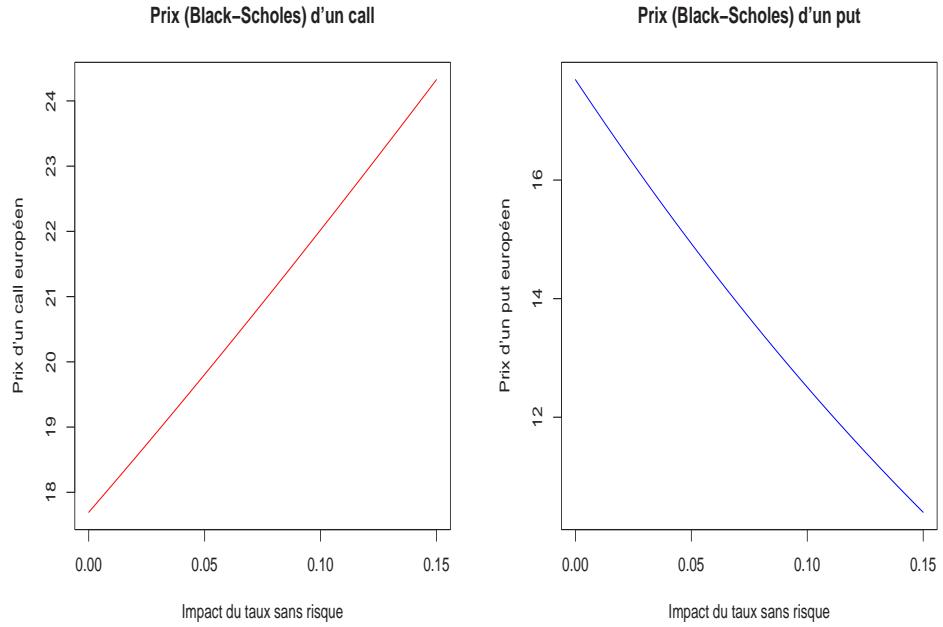


Figure 5: Influence du prix du **taux sans risque** sur le prix d'un call et d'un put.

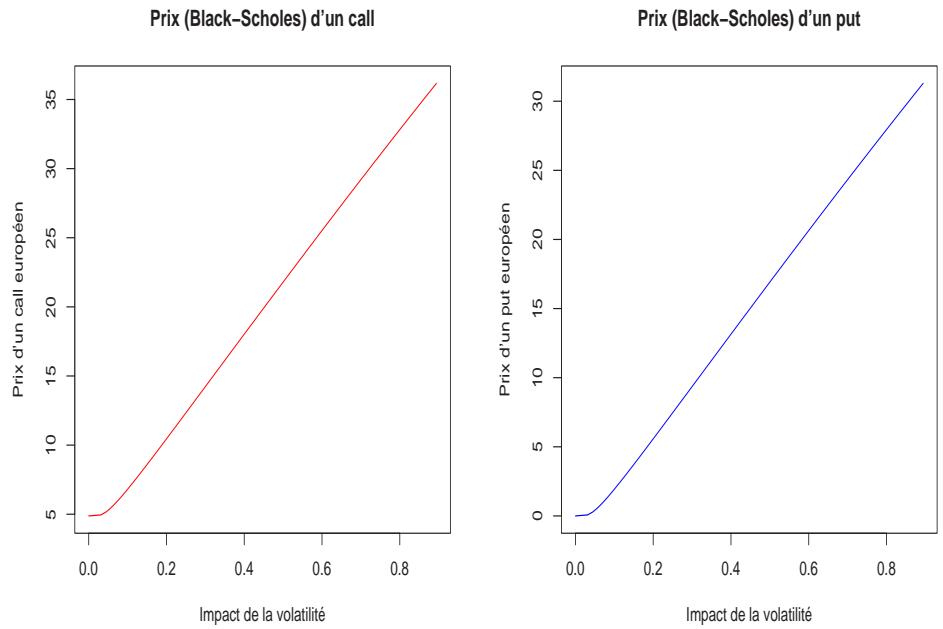


Figure 6: Influence du prix de la **volatilité du sous-jacent** sur le prix d'options.

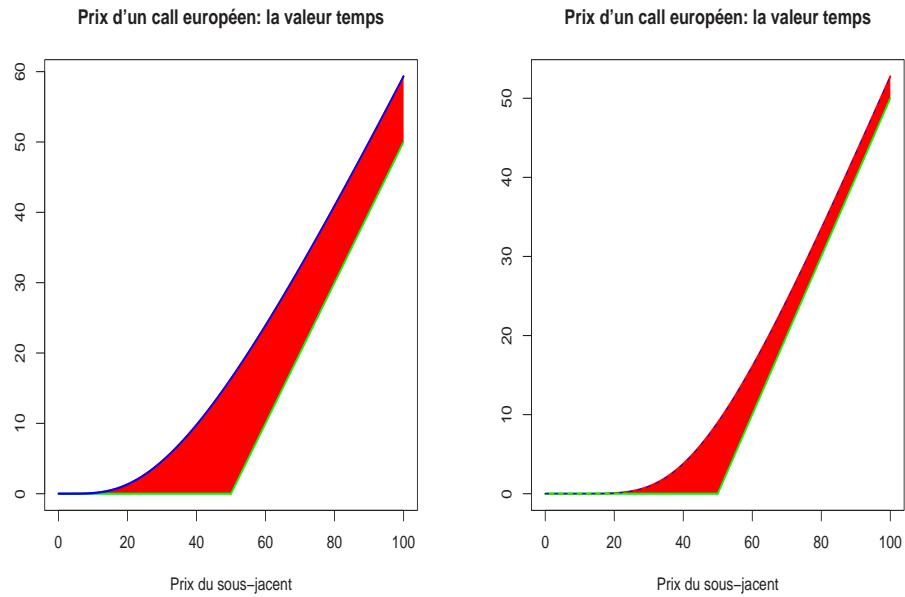


Figure 7: La valeur temps d'une option.

Le [valeur intrinsèque de l'option](#) est la différence (positive ou nulle) entre le cours du support, et le prix d'exercice. La différence entre le cours de l'option et sa valeur intrinsèque sera appelée [valeur temps](#).

3.2 Bornes sur les prix et relations de parité

Les bornes sont des outils précieux pour vérifier qu'un algorithme de valorisation est bien implémenté.

- une option d'achat ne peut jamais valoir plus que l'action sous-jacente (S_0),
que l'option soit européenne ou américaine. Aussi, $C \leq S_0$ (sinon une opportunité d'arbitrage serait possible en achetant l'action, et en vendant le call). De même,
 - une option de vente ne peut jamais valoir plus que que le strike (K),
en particulier, à maturité. On peut en déduire que sa valeur aujourd'hui ne peut pas dépasser la valeur actualisée du strike, i.e. $P \leq Ke^{-rT}$.
 - une option d'achat ne peut jamais valoir moins que $S_0 - Ke^{-rT}$,
Aussi, on en déduit que $C \geq \max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\}$.
 - une option de vente ne peut jamais valoir moins que $Ke^{-rT} - S_0$,
Aussi, on en déduit que $P \geq \max\{Ke^{-rT} - S_0, 0\}$.
 - pour des options européennes $C - P = S_0 - Ke^{-rT}$, formule de partié call-put,
 - pour des options américaine $C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$
- Toutes ces propriétés peuvent se résumer dans les propriétés suivantes,

Proposition 7. *Dans le cas d'options européennes, si C et P désignent les prix du call et du put à la date 0,*

$$\begin{aligned}\max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\} &\leq C \leq S_0, \\ \max\{Ke^{-rT} - S_0, 0\} &\leq P \leq Ke^{-rT}.\end{aligned}$$

On a de plus la formule de parité

$$C - P = S_0 - Ke^{-rT}.$$

Proposition 8. *Dans le cas d'options américaines, si C et P désignent les prix du call et du put à la date 0,*

$$\begin{aligned}\max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\} &\leq C \leq S_0, \\ \max\{Ke^{-rT} - S_0, 0\} &\leq P \leq K.\end{aligned}$$

On a de plus la formule de parité

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}.$$

“The Black-Scholes formula is still around, even though it depends on at least 10 unrealistic assumptions. Making the assumptions more realistic hasn't produced a formula that works better across a wide range of circumstances” (BLACK (1989)).

3.3 Comment fait-on pour valoriser des options ?

L'idée centrale pour valoriser des options est de pouvoir constituer des portefeuilles permettant de répliquer le payoff de l'option.

3.4 L'équation de BLACK & SCHOLES (1973) (sans démonstration)

La formule dite de BLACK & SCHOLES a été publiée en 1973, par Fischer Black et Myron Scholes, et constituait le prolongement de travaux réalisés par Paul Samuelson et Robert Merton.

La formule de BLACK & SCHOLES permet de calculer la valeur théorique d'une option européenne à partir des cinq données suivantes,

- S_0 ou S la valeur actuelle de l'action sous-jacente
- T le temps qui reste à l'option avant son échéance
- K le prix d'exercice fixé par l'option, ou le strike
- r le taux d'intérêt sans risque
- σ^2 la volatilité du prix de l'action

Le prix théorique d'une option d'achat (call) à la date $t = 0$, qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif S à la valeur K à la date T , est caractérisé par son payoff $\max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)_+$. Le prix d'un call européen est donné par la formule de BLACK & SCHOLES,

$$C = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, i.e.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt,$$

et

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right),$$

avec $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Pour le prix théorique d'un put, la relation de parité donne aisément

$$P = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1).$$

```
Formule de Black & Scholes
call = s*pnorm(d1)-K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
put = K*exp(-r*T)*(1-pnorm(d2))-s*(1-pnorm(d1))
data.frame(call,put)
```

3.5 La notion de volatilité implicite

Le prix d'une option dépend de paramètres connus

- S_0 ou S la valeur actuelle de l'action sous-jacente
- T le temps qui reste à l'option avant son échéance
- K le prix d'exercice fixé par l'option, ou le strike

et de deux autres paramètres.

- r le taux d'intérêt sans risque

est supposé connu, ou obtenable sur les marchés de taux.

- σ^2 la volatilité du prix de l'action

La volatilité du sous-jacent est supposé estimable (cf plus loin).

En fait la volatilité va être, en pratique, un paramètre problématique. En particulier, supposer des taux constants dans le temps, ou une volatilité constante semble peu réaliste.

Dans le modèle de BLACK & SCHOLES (1973), notons que le prix s'écrit

$$C = BS(S_0, T, K, r, \sigma).$$

En pratique, pour différentes maturités T , ou différents strike K , il est possible de trouver des prix, sur le marché, de telles options.

Le principe de la volatilité historique revient à inverser cette équation, en notant que

$$\hat{\sigma} = BS^{-1}(S_0, T, K, r, \hat{C}(T, K)).$$

On parle alors de surface de volatilité implicite.

En dimension 1, à maturité donnée, la volatilité implicite peut s'exprimer en fonction du strike K , et la courbe obtenue est en forme de smile. A la monnaie, la volatilité implicite est la plus basse et plus on s'éloigne de la monnaie, plus elle est élevée.

La pente de la volatilité implicite en fonction du strike est appelée la skew.

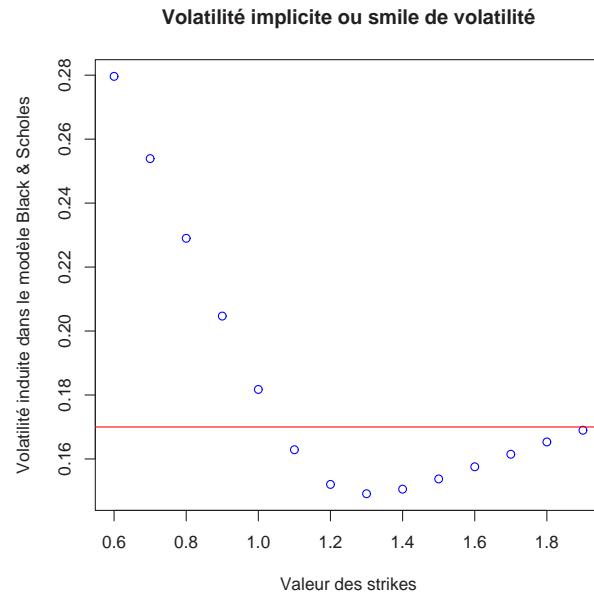


Figure 8: Notion de volatilité implicite, et de smile de volatilité.

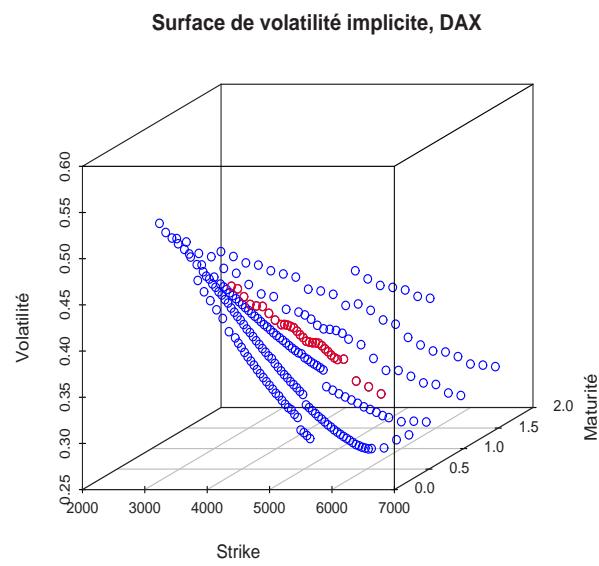


Figure 9: “Surface” de volatilité implicite.

3.6 D'où vient cette volatilité implicite

L'existence de ce smile de volatilité est en contradiction avec le modèle de BLACK & SCHOLES (1973).

Parmi les interprétations, une première (économique) est basée sur le fait qu'il existe une asymétrie entre l'offre et la demande sur les marchés d'options.

La seconde interprétation est que supposer un processus de type Brownien géométrique pour le prix des actions est irréaliste.

3.7 Petit complément, le versement de dividendes

Les anticipations sur le versement de dividendes peuvent être modélisées. Il convient de distinguer

- le cas où les dividendes sont un pourcentage du cours du titre aux dates de tombée des dividendes,
- le cas où les dividendes sont un certain capital, vu alors que des flux futurs (éventuellement certains).

Dans le premier cas, on modélise le taux (instantané) de dividende.

Considérons le cas d'un titre, versant des dividendes $-D_1, \dots, -D_{N-1}$ aux dates T_1, \dots, T_{N-1} , entre 0 et t . Le prix en $t = 0$ est la somme actualisée des flux futurs, i.e.

$$S_0 = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N D_i \exp \left(- \int_0^{T_i} r_s ds \right) + S_t \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) \right).$$

3.8 Formule de BLACK & SCHOLES (1973) en présence de dividendes

Dans le cas d'[versement continu de dividendes](#), soit q le taux de dividende, tel que le détenteur du titre touche $qS_t dt$ pendant l'intervalle dt . La dynamique du prix s'écrit alors

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - q)dt + \sigma dW_t,$$

ce qui donne simplement les formules (fermées) des prix des call et des put européens: pour un call

$$C = S e^{-qT} \Phi(\tilde{d}_1) - K e^{-rT} \Phi(\tilde{d}_2),$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et

$$\tilde{d}_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right),$$

avec $\tilde{d}_2 = \tilde{d}_1 - \sigma\sqrt{T}$. Dans le cas d'un put

$$P = K e^{-rT} \Phi(-\tilde{d}_2) - S e^{-qT} \Phi(-\tilde{d}_1).$$

Dans le cas où les paramètres r , q ou σ^2 ne sont plus constantes, mais dépendantes du temps (mais pas pour autant stochastique), notons qu'il suffit de remplacer les valeurs constantes pour leur moyenne sur l'intervalle $[0, T]$,

$$r \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T r(u) du, q \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T q(u) du \text{ et } \sigma^2 \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(u) du.$$

3.9 Formule de BLACK & SCHOLES (1973) en présence de coûts de transactions

Une démonstration pour obtenir l'équation de BLACK & SCHOLES est de constituer un portefeuille de réplication, et par absence d'opportunité d'arbitrage, on en déduit le prix de tout produit contingent.

Or créer un portefeuille contenant Δ unité d'actif risqué peut avoir un coût. LELAND (1985) a proposé d'étendre le modèle de BLACK & SCHOLES s'il y a des coûts de transaction.

3.10 Le calcul des grecques dans le modèle de BLACK & SCHOLES (1973)

Si C désigne le prix d'un call européen, rappelons que

$$C = S\Phi(d_1) - K \exp(-rT)\Phi(d_2)$$

dans le modèle de BLACK & SCHOLES (option sur action), avec

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ et } d_2 = \frac{\log(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Pour les calculs rappelons que

$$d_2^2 = d_1^2 - 2\log(S \exp(rT)/K) \text{ et } \phi(d_2) = \phi(d_1) \frac{S \exp(rT)}{K}.$$

3.11 Le Delta

Le **Delta** étant la sensibilité du prix d'un call à une petite variation du prix du sous-jacent, on en déduit

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} - K \exp(-rT) \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial S} \\ &= \Phi(d_1) + S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial S} - K \exp(-rT) \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= \Phi(d_1) + S\phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - K\phi(d_1) \frac{S \exp(rT)}{K} \frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= \Phi(d_1) + 0 > 0, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{\partial d_1}{\partial S}$$

Aussi, pour un call et un put respectivement,

$$\Delta(C) = \Phi(d_1) > 0 \text{ et } \Delta(P) = \Phi(d_1) - 1 < 0.$$

Le rôle du delta a été évoqué précédemment, le portefeuille sans risque de BLACK & SCHOLES (1973) est constitué d'une vente d'une option, et de l'achat de Δ actions: “*Black & Scholes évoluent les options en position delta-neutre, et une telle position doit être rémunérée au taux sans risque*”.

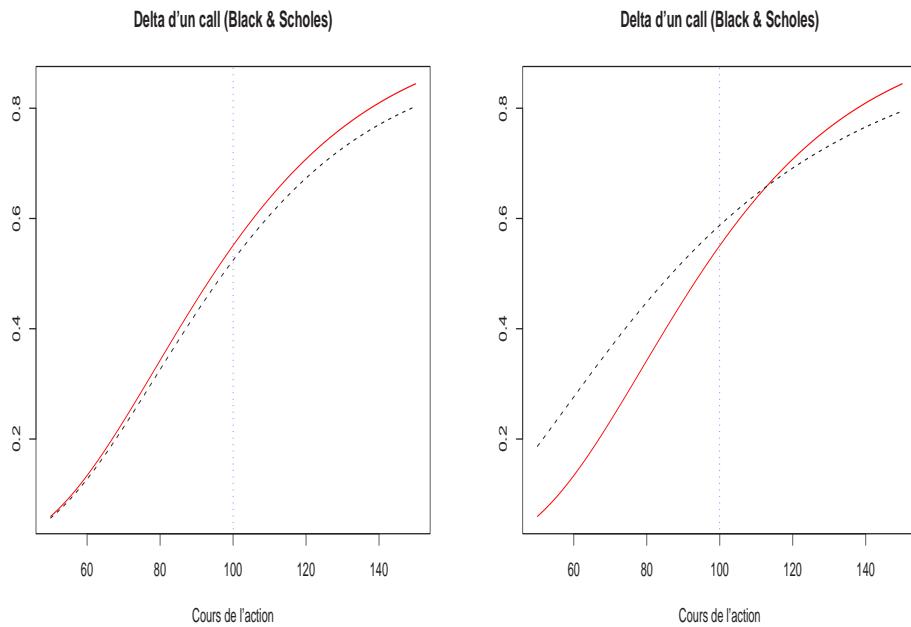


Figure 10: Delta dans le modèle de BLACK & SCHOLES (influence de r et σ).

3.12 Le Gamma

Le **Gamma** étant la sensibilité du Delta d'un call à une petite variation du prix du sous-jacent, on en déduit

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial S} \\ &= \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} > 0.\end{aligned}$$

Aussi, pour un call et un put, le Gamma est identique,

$$\Gamma(C) = \Gamma(P) = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} > 0.$$

Le gamma représente la convexité du prix d'une option en fonction du cours du sous-jacent.

En pratique, le Gamma est très important, car la stratégie est traditionnellement de se positionner en delta-neutre sur un portefeuille, et c'est alors le gamma, et donc les fluctuations de grande amplitude du cours, qui vont être responsables de l'évolution d'un portefeuille.

Un trader qui adopte une couverture dynamique delta-neutre sera donc amené à modifier sa position sur le sous-jacent de façon très fréquente si le Gamma est élevé.

A l'inverse, si le gamma de l'option est nul, le trader peut conserver une position fixe tout au long de la durée de vie de l'option.

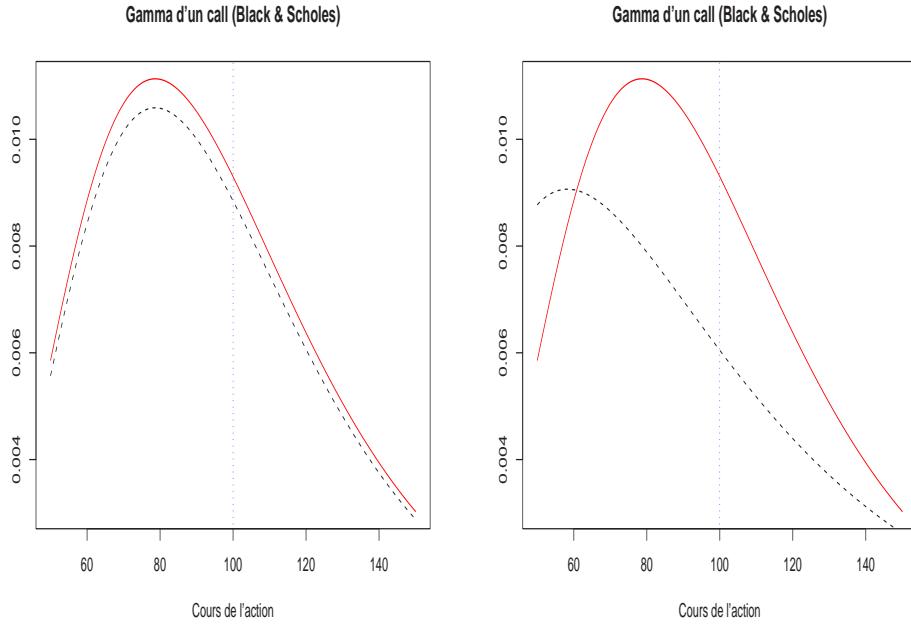


Figure 11: Gamma dans le modèle de BLACK & SCHOLES (influence de r et de σ).

3.13 La sensibilité au strike

La sensibilité du prix d'un call à une petite variation de la strike s'écrit en revanche

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial K} &= S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial K} - \exp(-rT) \Phi(d_2) - K \exp(-rT) \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial K} \\
 &= S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial K} - \exp(-rT) \Phi(d_2) - K \exp(-rT) \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial K} \\
 &= S \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial K} - \exp(-rT) \Phi(d_2) - K \exp(-rT) \phi(d_1) \frac{S \exp(rT)}{K} \frac{\partial d_2}{\partial K} \\
 &= -\exp(-rT) \Phi(d_2) < 0,
 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\frac{\partial d_2}{\partial K} = \frac{\partial d_1}{\partial K}$$

Exprimé en valeurs relatives, on peut obtenir aisément que

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = -\exp(-rT) \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial K} = \frac{\phi(d_2) \exp(-rT)}{K \sigma \sqrt{T}} > 0.$$

3.14 Le Vega

Le **Vega** étant la sensibilité du prix d'un call à une petite variation de la volatilité du sous-jacent, on en déduit

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial \sigma} - K \exp(-rT) \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial \sigma} \\ &= S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K \exp(-rT) \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ &= S \phi(d_1) \sqrt{T} > 0.\end{aligned}$$

Aussi, pour un call et un put, le Vega est identique,

$$\mathcal{V}(C) = \mathcal{V}(P) = S \phi(d_1) \sqrt{T} > 0.$$

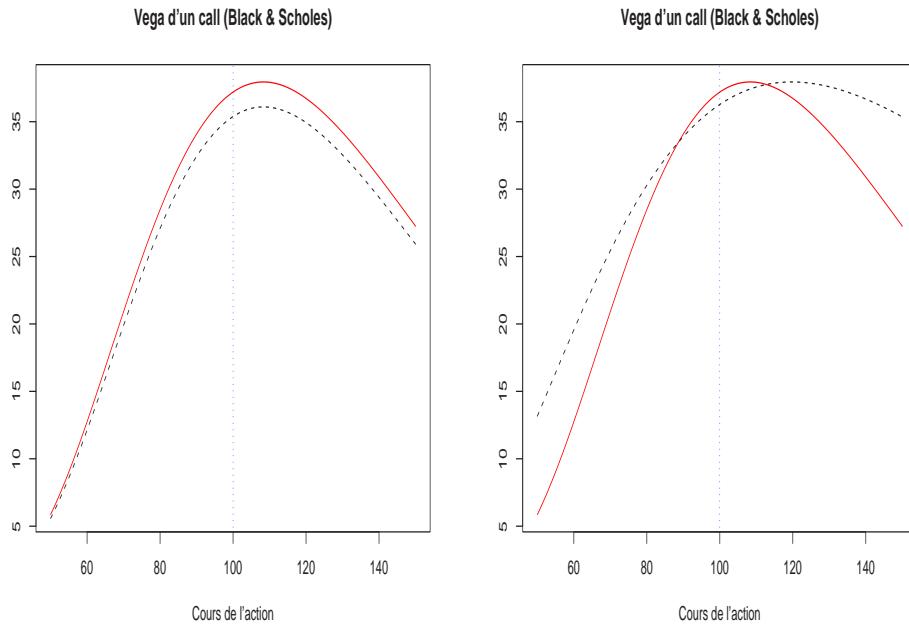


Figure 12: Vega dans le modèle de BLACK & SCHOLES (influence de r et de σ).

3.15 Le Theta

Le **Theta** étant la sensibilité du prix d'un call à une petite variation de la maturité de l'option , on en déduit

$$\Theta = -\frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rK \exp(-rT) \Phi(d_2).$$

Aussi, pour un call et un put, le Theta vaut respectivement

$$\Theta(C) = -\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rK \exp(-rT) \Phi(d_2) < 0,$$

et

$$\Theta(P) = -\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rK \exp(-rT) \Phi(-d_2).$$

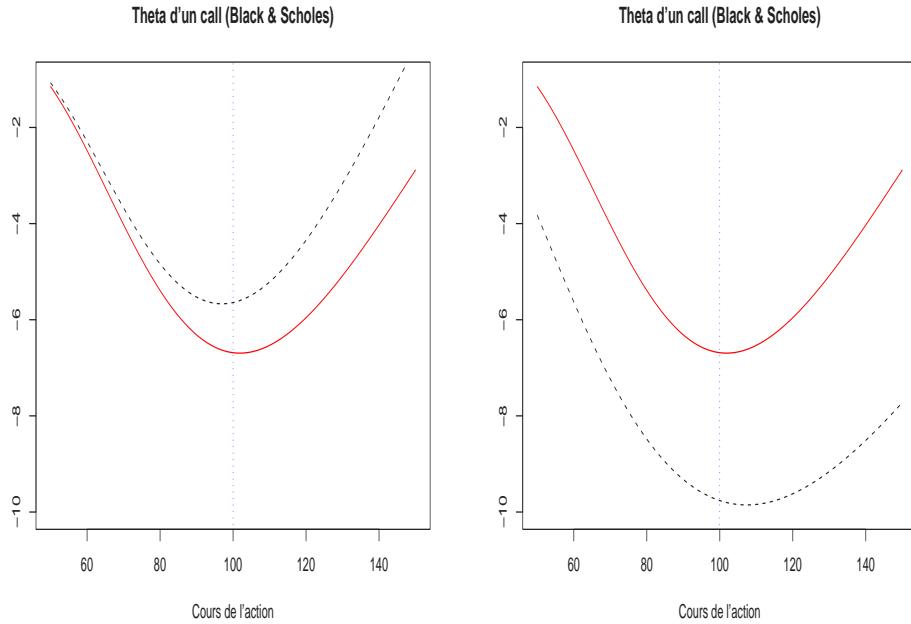


Figure 13: Theta dans le modèle de BLACK & SCHOLES (influence de r et σ).

3.16 Le rho

Le **Rho** étant la sensibilité du prix d'un call à une petite variation du taux sans risque, on en déduit,

$$\mathcal{R} = \frac{\partial C}{\partial r} = TK \exp(-rT) \Phi(d_2) > 0$$

Aussi, pour un call et un put, le Rho vaut respectivement

$$\mathcal{R}(C) = TK \exp(-rT) \Phi(d_2) > 0,$$

et

$$\mathcal{R}(P) = -TK \exp(-rT) \Phi(-d_2) < 0.$$

4 Quelques mots sur l'estimation des paramètres

Plusieurs méthodes peuvent être retenus pour obtenir les différents paramètres. On distingera,

- l'**estimation historique**, où on cherche à estimer les paramètres d'évolution de S_t à partir de données historiques. On cherche alors des estimateurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\Sigma}$ du drift et de la volatilité. On en déduit alors la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , puis on en déduit les prix d'options.

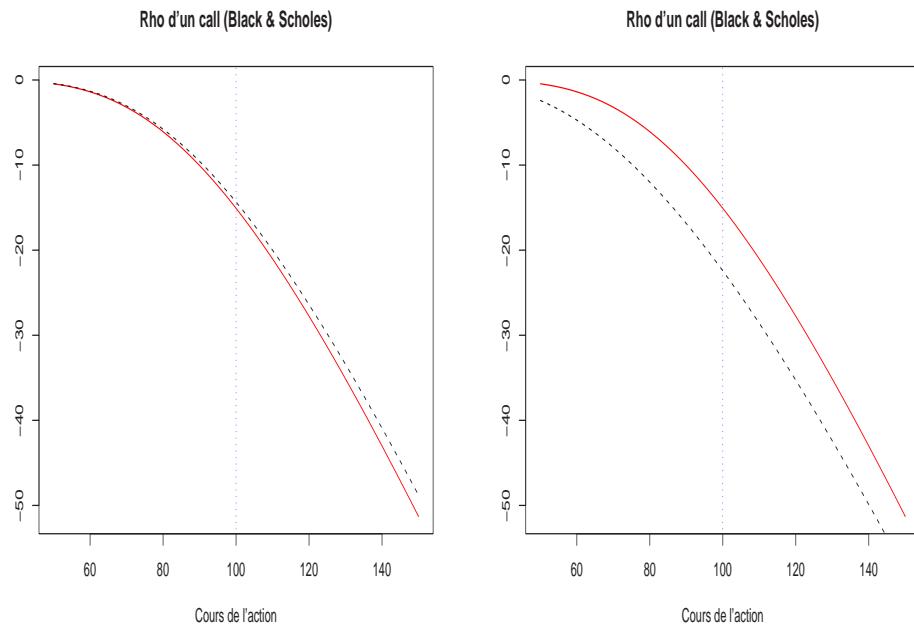


Figure 14: Rho dans le modèle de BLACK & SCHOLES (influence de r et σ).

- la **calibration**, où on cherche à obtenir directement, à partir de données de marchés (de prix d'options) la probabilité risque neutre \mathbb{Q} .

4.1 Estimation de paramètres univariés

Dans l'approche “*classique*”, les variables d'intérêt sont généralement la moyenne et l'écart-type.

4.2 Calcul de variances empiriques

Rappelons que la variance empirique d'un échantillon $\{X_1, \dots, X_n\}$ est

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right)$$

L'algorithme qui consiste à calculer dans une boucle $U = U + X_i$ et $V = V + X_i^2$ peut s'avérer instable si les X_i prennent de grandes valeurs. La variance empirique est alors $S_X^2 = (V - U^2/n)/(n-1)$.

Une alternative peut être de calculer dans un premier temps la moyenne \bar{X} , puis de calculer dans une boucle $V = V + (X_i - \bar{X})^2$. La variance empirique est alors $S_X^2 = V/(n-1)$.

Une autre méthode est basée sur une mise à jour, observation par observation. On pose alors $U_1 = X_1$ et $V_1 = 0$ afin d'initialiser l'algorithme. Puis, dans une boucle, on pose

$$V_i = V_{i-1} + \frac{i-1}{i} (X_i - U_{i-1})^2 \text{ et } U_i = U_{i-1} + \frac{1}{i} (X_i - U_{i-1}),$$

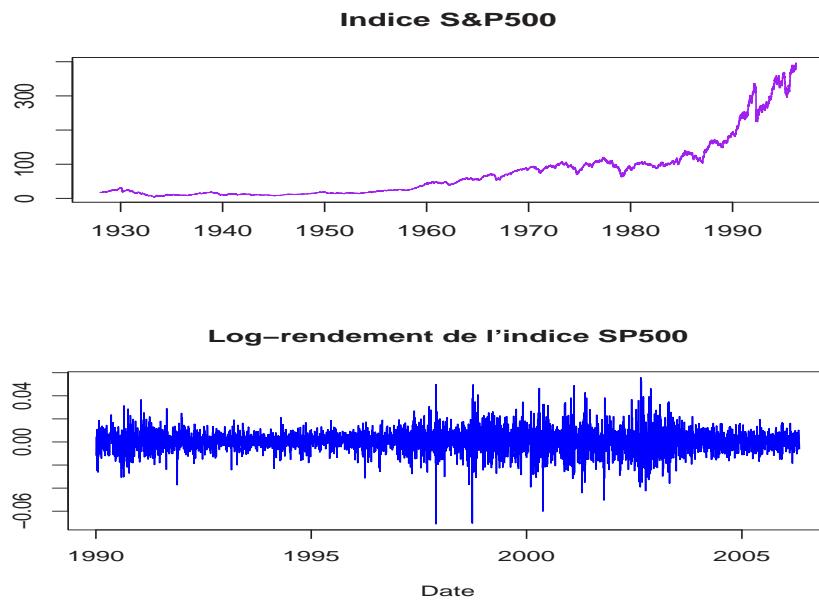


Figure 15: Evolution de l'indice SP500, 1990-2006.

et enfin, la variance empirique est alors $S_X^2 = V_n/(n - 1)$.

Numériquement, c'est cette dernière méthode qui permet généralement d'avoir la meilleure précision (CHAN, GOLUB & LEVEQUE (1983)).

4.3 Variance empirique ou variance implicite ?

Nous avons vu que deux types de variances pouvaient être obtenues,

- une volatilité **empirique**, estimée à partir de l'évolution du sous-jacent,
- une volatilité **implicite**, dérivée des prix de marchés d'option, permettant d'obtenir la formule de BLACK & SCHOLES (1973).

Les Figures 15 à 16 montrent ainsi la comparaison entre la volatilité empirique obtenue sur l'indice SP500, et l'indice VIX, correspondant à la volatilité implicite sur cet indice.

4.4 Approche implicite et modèle de DUPIRE (1998)

Si la volatilité était la même pour toutes les maturités T et tous les prix d'exercice K , les prix de call et put seraient donnés par la formule de BLACK & SCHOLES (1973), avec une même volatilité σ .

En réalité, il convient de prendre en compte une volatilité implicite $\sigma(T, K)$.

La formule de Dupire permet d'obtenir une volatilité qui ne soit ni constante, ni déterministe. On suppose que le prix du titre est donné par l'équation

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(S_t, t) dW_t.$$

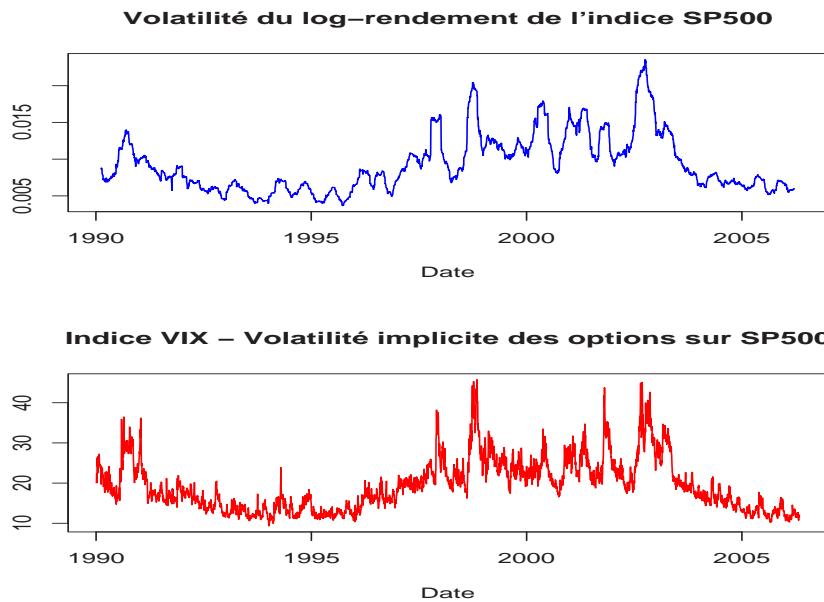


Figure 16: Volatilité empirique versus volatilité implicite.

Le prix $X_t = X(S_t, t)$ d'un actif contingent - vu comme une fonction de S_t - satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\sigma^2(S, t)}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} + rS \frac{\partial X}{\partial S} - rX = 0.$$

Notons que ce prix - vu comme processus - peut aussi s'écrire comme solution de l'équation

$$\frac{dX_t}{X_t} = rdt + \sigma_X(S, t)d\tilde{W}_t,$$

sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , où (\tilde{W}_t) est un mouvement brownien standard.

On cherche ici à calculer le prix d'un call, ou plutôt le prix de tous les calls de maturités T et de prix d'exercice K différents, $C(T, K)$. On cherche alors la **fonction de volatilité** $\sigma(S, t)$ telle que pour tout T et tout K ,

$$C(T, K) = \exp(-rT)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((S_T - K)_+).$$

On note ici $\phi(T, x) = \frac{\mathbb{Q}(S_T \in [x, x + dx])}{dx}$, la fonction de répartition de la variable aléatoire S_T (sous \mathbb{Q}). Le prix du call s'écrit alors

$$C(T, K) = \exp(-rT) \int_K^{+\infty} (x - K)\phi(T, x)dx. \quad (1)$$

En dérivant deux fois par rapport à K , on obtient

$$\phi(T, x) = \exp(-rT) \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, x).$$

Aussi, la fonction de répartition ϕ vérifie l'[équation de Fokker-Plack](#),

$$\frac{\partial \phi(T, x)}{\partial T} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, T) \cdot x^2 \cdot \phi(T, x)] - \frac{\partial}{\partial x} [rx\phi(T, x)].$$

En remplaçant $\phi(T, x)$ par son expression en fonction de $C(T, K)$ (donné par l'[équation 1](#)) on en déduit l'équation satisfaite par $C(T, K)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial C_0(T, x)}{\partial T} + \frac{\sigma^2(x, T) \cdot x^2}{2} \frac{\partial^2 C_0(T, x)}{\partial x^2} - rx \frac{\partial C_0(T, x)}{\partial x} \right) = 0.$$

Pour que les prix restent bornés en fonction du strike, il faut nécessairement que

$$\left(\frac{\partial C_0(T, x)}{\partial T} + \frac{\sigma^2(x, T) \cdot x^2}{2} \frac{\partial^2 C_0(T, x)}{\partial x^2} - rx \frac{\partial C_0(T, x)}{\partial x} \right) = 0.$$

D'où finallement l'expression de la volatilité $\sigma(x, T)$ en fonction des prix des calls, appelée [formule de Dupire](#),

$$\sigma^2(x, t) = \frac{rx \frac{\partial C(T, x)}{\partial x} - \frac{\partial C(T, x)}{\partial T}}{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(T, x)}{\partial x^2}}$$

4.5 Quelques expressions de volatilité pour des options européennes

- [Prix de call digitaux avec smile de volatilité: fonction indicatrice](#)

Considérons le cas de calls digitaux, payant 1 si $S_T > K$ et 0 sinon, i.e. $\mathbf{1}(S_T > K)$

De manière simple, notons que l'introduction de cette masse de Diract en K permet de modéliser le call digital par un montage, de telle sorte que le prix d'un call digital de strike K s'écrit

$$\frac{1}{2K\varepsilon} [C_{B\&S}(K(1 - \varepsilon)) - C_{B\&S}(K(1 + \varepsilon))]$$

où $C_{B\&S}(\cdot)$ est le prix BLACK & SCHOLES d'un call de strike \cdot . Le prix de ce montage tend vers le prix d'un call digital quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Le prix (théorique) est

$$\Pi^* = \frac{1}{2K\varepsilon} [C_{B\&S}(K(1 - \varepsilon), \sigma(T, K(1 - \varepsilon))) - C_{B\&S}(K(1 + \varepsilon), \sigma(T, K(1 - \varepsilon)))]$$

soit, en effectuant un développement limité

$$\Pi^* = -\frac{\partial C_{B\&S}(T, K)}{\partial K} - \text{Véga}_{B\&S}(T, K) \frac{\partial \sigma(T, K)}{\partial K} + o(1).$$

Aussi, le prix du call digital en présence de smile de volatilité s'écrit

$$\underbrace{\Pi^*}_{\substack{\text{prix du call digital}}} = \underbrace{-\frac{\partial C_{B\&S}(T, K)}{\partial K}}_{\substack{\text{prix du call digital sans smile}}} - \underbrace{\text{Véga}_{B\&S}(T, K) \frac{\partial \sigma(T, K)}{\partial K}}_{\substack{\text{impact du smile de volatilité}}} + o(1),$$

soit

$$\Pi^* = \Pi^{\text{sans smile}}(K, \sigma(T, K)) - \text{Véga}_{B\&S}(T, K) \frac{\partial \sigma(T, K)}{\partial K}.$$

- Prix de différence de call digitaux avec smile de volatilité: fonction en escalier

On considère une option payant 1 si $S_T \in [K_1, K_2]$ et 0 sinon, i.e. $\mathbf{1}(S_T \in [K_1, K_2])$. Le portefeuille qui permet de répliquer cette option est obtenu avec une position longue sur le call de stike K_1 , et courte sur le call de strike K_2 . Aussi, en utilisant la relation précédante

$$\begin{aligned}\Pi^* &= \Pi^{\text{sans smile}}(K_1, \sigma(T, K_1)) - \Pi^{\text{sans smile}}(K_2, \sigma(T, K_2)) \\ &+ \text{Véga}_{B\&S}(T, K_2) \frac{\partial \sigma(T, K_2)}{\partial K_2} - \text{Véga}_{B\&S}(T, K_1) \frac{\partial \sigma(T, K_1)}{\partial K_1},\end{aligned}$$

soit, en posant $K_2 = K_1 + \Delta K$, la variation du prix du à cette différence ΔK , notée $\Delta \Pi^*$ s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta \Pi^*(K_1) &= \left[\frac{\partial}{\partial K} \left(\text{Véga}_{B\&S}(T, K_1) \frac{\partial \sigma(T, K_1)}{\partial K_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \Pi^{\text{sans smile}}(K_1, \sigma(T, K_1))}{\partial K_1} - \frac{\partial \Pi^{\text{sans smile}}(K_1, \sigma(T, K_1))}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma(T, K_1)}{\partial K_1} \right] \Delta K.\end{aligned}$$

- Cas général d'une option européenne: combinaison linéaire de fonctions en escalier

De manière plus générale, en utilisant l'expression précédante, pour une option de payoff $g(S_T)$, on peut écrire le prix comme $\int_0^\infty g(x) \Delta \Pi^*(x)$, soit finalement

$$\int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\text{Véga}_{B\&S}(T, x) \frac{\partial \sigma(T, x)}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial \Pi^{\text{sans smile}}(x, \sigma(T, x))}{\partial x} - \frac{\partial \Pi^{\text{sans smile}}(x, \sigma(T, x))}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma(T, x)}{\partial x} \right] g(x) dx.$$

5 Les notions de taux d'intérêt

Rappelons que la [structure par terme des taux d'intérêt](#) (ou courbe des taux) est la fonction qui à une date donnée et pour chaque maturité, indique le niveau du taux d'intérêt associé.

Notamment, on distingue les [courbes de marché](#) et les [courbes implicites](#),

- Les courbes de marché sont construites directement à partir des cotations de marché d'instruments (obligations ou swaps).
- Les courbes implicites sont elles construites indirectement. On retrouve la courbe des taux zéro-coupon, les courbes de taux forwards, la courbe des taux forwards instantanés ou encore la courbe des taux de rendement au pair.

On pourra considérer les différents taux suivants: le [taux de rendement à maturité](#), le [taux de swap](#), le [taux zéro-coupon](#), le [taux forward](#), le [taux forward instantané](#) ou encore le [taux de rendement au pair](#).

Le [taux de rendement à maturité](#) (*Yield to Maturity*) est associé à un produit de taux d'intérêt: l'obligation à taux fixe. L'obligation à taux fixe est classiquement cotée en prix ou en taux. Ce taux est le taux de rendement à maturité de l'obligation.

Exemple 9. A la date t , le taux de rendement (actuarial) à maturité de l'obligation de prix $V(t)$ délivrant les flux F_i aux dates futures $i = t + 1, \dots, T$ est le taux $R(t)$ qui vérifie l'équation

$$V(t) = \sum_{i=t+1}^T \frac{F_i}{(1 + R(t))^{i-t}}.$$

La courbe des taux de rendement à maturité associe à chaque maturité d'une obligation son taux de rendement.

En pratique, cette courbe souffre de l'effet coupon pour des raisons essentiellement fiscales, certains pays taxant différemment le capital et les coupons. Ainsi, deux obligations de même échéance mais de taux de coupon différent n'auront pas forcément le même taux de rendement, les investisseurs préférant l'obligation qui a le coupon le plus élevé, ce qui a pour effet d'accroître son prix et de diminuer son taux de rendement.

Le fait d'utiliser le taux de rendement pour évaluer une obligation consiste à faire l'hypothèse que la courbe des taux est plate.

En effet on utilise le même taux R dans chaque facteur d'actualisation. Or la courbe des taux est très rarement plate.

Une obligation est plus justement évaluée à l'aide des taux zéro-coupon.

Le **taux de swap** s'obtient de la manière suivante: la valeur d'un swap standard de montant nominal N est égale à celle:

- d'une obligation à taux fixe de maturité identique à celle du swap et de même montant nominal que le swap;

- moins le montant nominal du swap.

A une date t donnée, le taux fixe est déterminé de telle façon que la valeur du swap soit égale à 0.

Ce taux fixe est appelé taux de swap. C'est ainsi que sont cotés les swaps.

Les taux de swap cotés sur le marché sont issus de swaps standards entre banques, c'est pour cela que cette courbe est couramment appelée courbe interbancaire.

Les taux **zéro coupons** sont implicitement définis dans la relation suivante:

$$B(0, t) = \frac{1}{(1 + R(t))^t}.$$

où $B(0, t)$ est le prix de marché à la date 0 d'une obligation zéro-coupon (on parle de strip) délivrant 1 euro à la date t . $B(0, t)$ est alors le facteur d'actualisation en 0 pour la maturité t .

De manière plus générale, un zéro-coupon d'échéance T vaut, en t , $B(t, T)$, et on note $\mathcal{R}(t, \tau)$ le taux actuarial en t de maturité τ le **taux annualisé** auquel est prêté l'argent entre t et $t + \tau$, i.e.

$$B(t, t + \tau) = \frac{1}{(1 + \mathcal{R}(t, \tau))^{\tau}}.$$

Le **taux "continu"** est $R(t, \tau)$ défini par

$$R(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \log B(t, t + \tau) = \log(1 + \mathcal{R}(t, \tau)).$$

Enfin, le **taux court** r_t est la limite des taux continus $R(t, \tau)$, quand la maturité τ tend vers 0,

$$r_t = \lim_{\tau \rightarrow 0} R(t, \tau) = - \left. \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \right|_{T=t}.$$

La **courbe des taux** est alors la fonction $\tau \mapsto R(t, \tau)$. On parlera de courbe plate si cette fonction est constante.

On note V_i le prix du **strip**

$$V_i(t) = \frac{F_i}{(1 + R(t, i - t))^{i-t}} = F_i \cdot B(t, i),$$

où $R(t, \tau)$ est le taux de rendement de l'obligation zéro-coupon d'échéance $t + \tau$, et $B(t, T)$ est le prix à la date t de l'obligation zéro-coupon rapportant 1 euro en T .

On alors écrire le prix d'une obligation à la date t sous la forme

$$V_i(t) = \sum_{i=t+1}^T \frac{F_i}{(1 + R(t, i - t))^{i-t}} = \sum_{i=t+1}^T F_i \cdot B(t, i).$$

Aussi, pour évaluer une obligation, il suffit de connaître les taux zéro-coupon associés aux maturités de chacun des flux. La principale difficulté est qu'il n'existe que peu d'obligations zéro-coupon. On doit alors extrapoler les différents taux.

Ces taux zéro-coupon permettent d'en déduire des taux forwards, ainsi que des taux de rendement au pair.

Le **taux forward** $F(t, x, y - x)$ le taux déterminé en t , démarrant en x et d'échéance y , défini par

$$F(t, x, y - x) = \left(\frac{(1 + R(t, y))^{y-x}}{(1 + R(t, x))^{x-t}} \right)^{\frac{1}{y-x}} - 1.$$

On appelle **taux forward instantané** le taux

$$f(t, x) = \lim_{(y-x) \rightarrow 0} F(t, x, y - x).$$

Ce modèle est en particulier utilisé dans le modèles HEATH, JARROW & MORTON (????).

Enfin, pour gommer l'effet coupon rencontré sur les taux de rendement à maturité, on considère la **courbe des taux de rendement au pair**. Une obligation au pair est une obligation dont le taux du coupon est identique au taux de rendement actuariel. Le taux $r(n)$ est alors donné par la relation

$$\frac{r(n)}{1 + R(0, 1)} + \frac{r(n)}{(1 + R(0, 2))^2} + \dots + \frac{r(n) + 100}{(1 + R(0, n))^n} = 100,$$

qui s'inverse simplement sous la forme

$$r(n) = \frac{100}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+R(0,i))^i}} \left(1 - \frac{1}{(1 + R(0, n))^n} \right).$$

Si R_n est un taux avec n composition dans l'année, au bout de T années, en investissant 1, au bout de T années on aura

$$\left(1 + \frac{R_n}{n} \right)^{nT},$$

et quand $n \rightarrow \infty$, on obtient un taux exprimé en “*composition continue*”, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{R_n}{n} \right)^{nT} = \exp(\rho T).$$

	1M	3M	6M	1A	2A	3A	4A	5A	7A	10A
1M	1.000									
3M	0.999	1.000								
6M	0.908	0.914	1.000							
1A	0.546	0.539	0.672	1.000						
2A	0.235	0.224	0.310	0.880	1.000					
3A	0.246	0.239	0.384	0.808	0.929	1.000				
4A	0.209	0.202	0.337	0.742	0.881	0.981	1.000			
5A	0.163	0.154	0.225	0.700	0.859	0.936	0.981	1.000		
7A	0.107	0.097	0.182	0.617	0.792	0.867	0.927	0.970	1.000	
10A	0.073	0.063	0.134	0.549	0.735	0.811	0.871	0.917	0.966	1.000

Table 1: Probability of exceedances, for given parametric copulas, $\tau = 0.5$.

Aussi, le taux continu ρ et le taux exprimé en composition annuelle R , alors $\rho = \log(1 + R)$.

Aussi, le facteur d'actualisation et le taux zéro-coupon sont liés par la relation

$$B(t, T) = \exp(-\rho \cdot [T - t]),$$

le taux forward et le taux cooupon sont liés par la relation

$$\mathcal{F}(t, x, y - x) = \frac{(y - t)\rho(t, y - t) - (x - t)\rho(t, x - t)}{y - x},$$

et le taux zéro-coupon et le taux forward instantané par la relation

$$\rho(t, y - t) = \frac{1}{y - t} \int_t^y \{(t, s)ds.$$

Exemple 10. Un très grand nombre de forme de taux de rendement au pair peuvent être observés. La figure représente ainsi la courbe trésor des taux de rendement au pair US, 3 novembre 1999, puis Japon, 27 avril 2001, UK, 19 octobre 2000, France, 4 avril 2001, et enfin US, 29 février 2000.

Parmi les observations empiriques et les divers faits stylisés, on peut noter que

- les taux d'intérêt ne sont pas négatifs (ce qui tendra à rejeter les modèles Gaussiens),
- les taux d'intérêt sont affectés par des effets de retour à la moyenne (des valeurs élevées de taux sont souvent suivies par des basses, plus que par des hausses, et inversement)
- les taux ne sont pas parfaitement corrélés (même si elles sont généralement positives, comme le montre l'exemple 11, de plus sur les taux courts la corrélation est élevée, ainsi que sur les taux longs),
- les taux à court terme sont plus volatiles que les taux à long terme,
- 3 facteurs de **niveau**, **pente** et **courbure** expliquent plus de 95% des mouvements de la courbe des taux.

Exemple 11. Sur les taux interbancaire en France entre 1995 et 1998, les valeurs suivantes ont été observées (PRIAULET & MARTEL (2000)),

Enfin, notons que l'on distingue souvent trois classes de modèles de courbes de taux,

- le modèle d'**analyse en composantes principales** de la courbe des taux (généralement sur la courbe des taux zéro-coupon ou des taux forwards),

- les modèles de **reconstitution** de la courbe des taux au comptant (également sur la courbe des taux zéro-coupon),
- les modèles **stochastiques** de la courbe des taux (sur la courbe des taux zéro-coupon ou des taux forwards instantanés).

5.1 Valorisation et processus en temps continu

Si les taux sont déterministes, par absence d'opportunité d'arbitrage, on obtient que

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt, \quad (2)$$

soit, puisque $B(T, T) = 1$,

$$B(t, T) = \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) = B(0, T) = \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right).$$

En particulier, on en déduit que

$$R(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} r_s ds.$$

Des arguments d'absence d'opportunité d'arbitrage permettent de valoriser le prix des zéro-coupon $B(t, T)$.

On suppose que pour toutes les maturités T , le prix des zéro-coupon suivent des processus d'Ito

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \langle \Gamma(t, T), dW_t + \lambda_t dt \rangle, \quad (3)$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien, et $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ une prime de risque.

Proposition 12. *Si les primes de risque et les volatilités sont bornées, il existe une probabilité risque neutre \mathbb{Q} , équivalente à \mathbb{P} , telle que le prix des zéro-coupons vérifient*

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

5.2 Les méthodes d'analyse en composantes principales

Cette méthode permet de mettre en évidence les principaux facteurs qui expliquent les déformations de la courbe des taux. Il peut s'agir d'une étape préalable, avant la recherche d'un modèle stochastique réaliste. Cette méthode peut aussi être utile pour se couvrir contre le risque de taux (en cherchant des produits permettant de se couvrir contre les principaux facteurs de déformation de la courbe des taux).

Les trois facteurs de déformation expliquant 95% des déformations de la courbe des taux. L'idée de NELSON & SIEGEL (1987) est d'écrire les taux zéro-coupon comme une fonction dépendant de 3 paramètres. En particulier, NELSON & SIEGEL (1987) proposent

$$\rho(0, t) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - \exp(-t/\tau)}{t/\tau} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp(-t/\tau)}{t/\tau} - \exp(-t/\tau) \right),$$

où

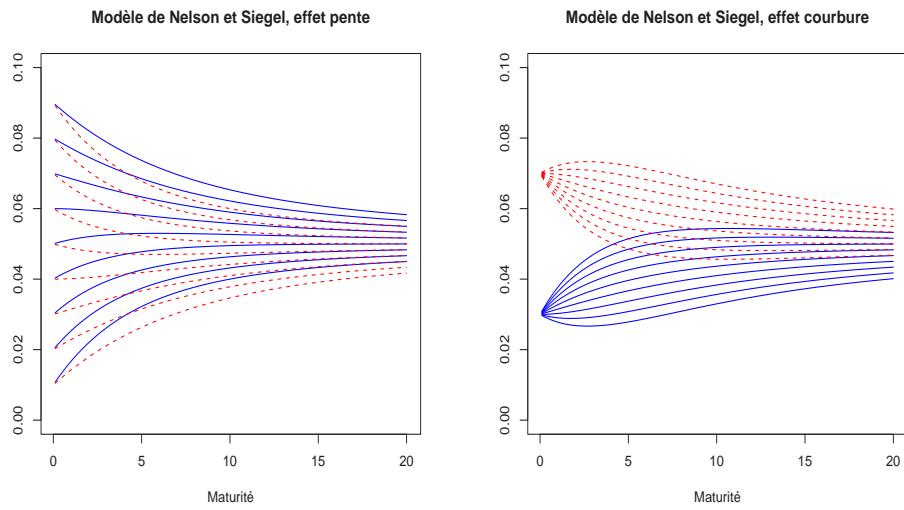


Figure 17: Modèle de Nelson & Siegel, effet pente (β_1) à gauche et effet courbure (β_2) à droite.

- β_0 est un facteur de niveau,
- β_1 est un facteur de rotation,
- β_2 est un facteur de courbure,
- et τ un paramètre d'échelle fixe au cours du temps,

Une analyse des données est également possible, à partir de T observations sur K taux zéro-coupons, $X_{t,k}$. On note \mathbf{X} la matrice $(X_{t,k})$. On écrit alors

$$X_{t,k} = \sum_{i=1}^I s_{i,k} \cdot F_{t,i} + \varepsilon_{t,k},$$

où $s_{i,k}$ est la sensibilité de la k ème variable au i ème facteur, et $F_{t,i}$ la valeur du i ème facteur à la date t .

L'analyse en composante principale vise à décomposer $X_{t,k}$ sous la forme

$$\begin{aligned} X_{t,k} &= \sum_{i=1}^K \sqrt{\lambda_i} U_{i,k} V_{t,i} \\ &= \sum_{i=1}^I \sqrt{\lambda_i} U_{i,k} V_{t,i} + \sum_{i=I+1}^K \sqrt{\lambda_i} U_{i,k} V_{t,i} \\ &= \sum_{i=1}^K \sqrt{\lambda_i} s_{i,k} F_{t,i} + \varepsilon_{t,k}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{U} = (U_{k,i})$ est la matrice des K vecteurs propres de $X'X$, $\mathbf{V} = (V_{t,i})$ est la matrice des K vecteurs propres de XX' , où les vecteurs propres sont orthonormés. λ_i est la valeur propre associée au vecteur propre \mathbf{U}_i . On note $s_{i,k} = \sqrt{\lambda_i} U_{i,k}$ la **sensibilité absolue** de la variable k au facteur i .

5.3 Le modèle de HEATH, JARROW & MORTON

On modélise ici le prix des zéro-coupons, $B_T(t)$ comme un processus stochastique, $(B_T(t))_{t \in [0, T]}$. On retiendra une diffusion de la forme suivante

$$\frac{dB_T(t)}{B_T(t)} = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t,$$

avec comme condition terminale $B_T(T) = 1$. On va alors supposer qu'il existe une probabilité risque neutre \mathbb{Q} sous laquelle

$$\frac{dB_T(t)}{B_T(t)} = r_t dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}_t,$$

où r_t est le processus de taux court $r_t = -\frac{1}{T} \log(B_T(t))$. Cette classe de modèle est toutefois trop générale pour être utilisée telle quelle.

5.4 Le modèle de HO & LEE

On suppose ici que sous \mathbb{Q} , le taux court r_t suit la diffusion

$$dr_t = adt + \sigma d\tilde{W}_t.$$

En intégrant, on obtient que

$$\int_0^t r_s ds = r_0 t + a \frac{t^2}{2} + \sigma t \int_0^t (t-s) d\tilde{W}_s.$$

De cette relation, on en déduit que $\int_0^T r_s ds$ suit une loi normale,

$$\int_0^T r_s ds \sim \mathcal{N}\left(r_0 T + a \frac{T^2}{2}, \frac{\sigma^2 T^3}{6}\right).$$

On peut alors en déduire, en particulier, la valeur de $B_T(0)$, obtenue à partir de r_0 , et donc

$$B_T(0) = \exp\left(r_0 T - \frac{aT^2}{2} - \frac{\sigma^2 T^3}{6}\right).$$

Et en intégrant entre t et T , on obtient le prix en t du zéro-coupon d'échéance T ,

$$B_T(t) = \exp\left(r_0(T-t) - \frac{a(T^2-t^2)}{2} - \frac{\sigma^2(T^3-t^3)}{6}\right).$$

On en déduit enfin la courbe des taux, pour n'importe quelle date t et n'importe quelle maturité T , en fonction du taux court r_t ,

$$R(t, T) = r_t + a \frac{T+t}{2} + \frac{\sigma^2(T^2-Tt+t^2)}{6}.$$

Cette courbe n'est toutefois pas réaliste à long terme, puisque $R(t, T) \rightarrow \infty$ quand $T \rightarrow \infty$. De plus, il peut générer des taux négatifs avec une probabilité non nulle:

$$\mathbb{Q}(r_t \leq 0) = \Phi(a\sqrt{(t)}/\sigma).$$

Remarque 13. Nous retrouverons ce modèle dans le cas de la modélisation par arbre binomiaux.

5.5 Le modèle de VASICEK

Ce modèle permet de stabiliser la dynamique du taux court, en introduisant un effet de **retour à la moyenne** dans l'équation de diffusion. Sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} ,

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t.$$

Le coefficient de retour b est supposé positif. Aussi, le taux court a tendance lors qu'il s'écarte de la valeur moyenne a/b à y revenir avec une élasticité de b/a : plus l'écart est grand, plus forte sera la force de rappel.

En intégrant l'équation, on peut obtenir l'équation itégrale

$$\int_0^t r_s ds = \left(r_0 - \frac{a}{b} \right) \left(\frac{1 - \exp(-bt)}{b} \right) + \frac{at}{b} + \frac{\sigma}{b} \int_0^t [1 - \exp(-b(t-s))] d\tilde{W}_s.$$

Là aussi, $\int_0^T r_s ds$ suit aussi une loi normale,

$$\begin{aligned} &\text{de moyenne } \left(r_0 - \frac{a}{b} \right) \left(\frac{1 - \exp(-bt)}{b} \right) + \frac{aT}{b} \\ &\text{et de variance } \frac{\sigma^2}{b^2} \left(T + \frac{1 - \exp(-bT)}{b} + \frac{1 - \exp(-2bT)}{2b} \right). \end{aligned}$$

Là aussi, on peut en déduire la courbe initiale des taux,

$$\begin{aligned} R(0, T) &= \left(r_0 - \frac{a}{b} \right) \left(\frac{1 - \exp(-bt)}{bT} \right) + \frac{a}{b} \\ &+ \frac{\sigma^2}{2b^2} \left(1 - 2 \frac{1 - \exp(-bT)}{bT} + \frac{1 - \exp(-2bT)}{2bT} \right), \end{aligned}$$

et plus généralement, on peut en déduire la courbe à toute date $t \in [0, T]$.

On peut noter que si $T \rightarrow \infty$, $R(t, T) \rightarrow \frac{a}{b} + \frac{\sigma^2}{b^2}$. Mais là aussi, il est possible d'avoir des taux court négatifs.

5.6 Le modèle de HULL & WHITE

Ce modèle est également un modèle Gaussien, et peut être vu comme une extention du précédent. Le taux court suit la diffusion suivante, sous \mathbb{Q} ,

$$dr_t = (a(\textcolor{blue}{t}) - b(\textcolor{blue}{t})r_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t.$$

En posant

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \int_t^T a(s)B(s, T)ds \text{ où } B(t, T) = \exp \left(\int_t^T b(s)ds \right), \\ C(t, T) &= \int_t^T \frac{ds}{B(s, T)} \text{ et } D(t, T) = \int_t^T \frac{A(s, T)ds}{B(s, T)} \end{aligned}$$

et enfin $E(t, T) = \int_t^T [B(s, T)(C(s, T) - C(t, T))]^2 ds$, on peut montrer que la courbe des taux court est donnée par

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(r_t C(t, T) + D(t, T) + \frac{\sigma^2}{2} E(t, T) \right).$$

6 Options et arbres binomiaux

6.1 Valorisation et arbre à une période

On considère un call, sur un action de prix S_0 en $t = 0$, dont la valeur est C . L'option arrive à maturité en $t = T$, et le sous-jacent que peut évoluer que de deux façons,

- augmenter pour atteindre $S_0 \cdot u$,
- baisser pour atteindre $S_0 \cdot d$,

où $d < 1 < u$. Soit C_u le payoff de l'option si le cours de l'action atteint $S_0 \cdot u$, et C_d le payoff de l'option s'il atteint $S_0 \cdot d$.

Considérons le portefeuille constitué de α actions, et β obligations (ou actifs sans risques), qui réplique la valeur de l'option. Si le cours de l'action monte,

$$\alpha S_0 u + \beta(1+r) = C_u,$$

et si le cours du sous-jacent baisse,

$$\alpha S_0 d + \beta(1+r) = C_d.$$

La théorie financière nous garantie l'existence et l'unicité (sous certaines hypothèses) d'un tel portefeuille dit de **réplique**, et effectivement, ce système admet une et une seule solution

$$\alpha = \frac{C_u - C_d}{S_0 u - S_0 d} \text{ et } \beta = \frac{1}{1+r} \left(C_u - S_0 u \frac{C_u - C_d}{S_0 u - S_0 d} \right).$$

On a alors effectivement réussi à répliquer le prix de l'option, et on note qu'en $t = 0$, la valeur de l'option est

$$\alpha S_0 + \beta = \frac{1}{1+r} \left(\frac{1+r-d}{u-d} C_u + \frac{u-(1+r)}{u-d} C_d \right),$$

qui peut s'écrire

$$C_0 = \frac{1}{1+r} (p^* C_u + (1-p^*) C_d), \text{ où } p^* = \frac{1+r-d}{u-d}.$$

Si $1+r < d$, alors il y aurait une opportunité d'arbitrage, l'actif sans risque présentant un rendement plus faible que l'action, quel que soit l'état de la nature. De même, si $u < 1+r$, il n'y aurait aucun intérêt à acheter l'action. Aussi, par des arguments d'absence d'opportunité d'arbitrage,

$$d < 1+r < u.$$

Cette dernière condition implique en particulier que

$$p^* = \frac{1+r-d}{u-d} \in]0, 1[,$$

aussi, p^* peut être vu comme une probabilité. La valeur de l'option est alors l'espérance de la valeur future, actualisée au taux sans risque. p^* est alors la **probabilité risque-neutre de hausse du sous-jacent**.

6.2 Valorisation et arbre à n périodes

De façon générale, considérons un arbre. A la date i , les valeurs possibles sont les

$$S_0 \cdot u^j \cdot (1 - d)^{i-j} \text{ où } j = 0, 1, \dots, i.$$

La Figure 18 montre l'arbre binomial associé.

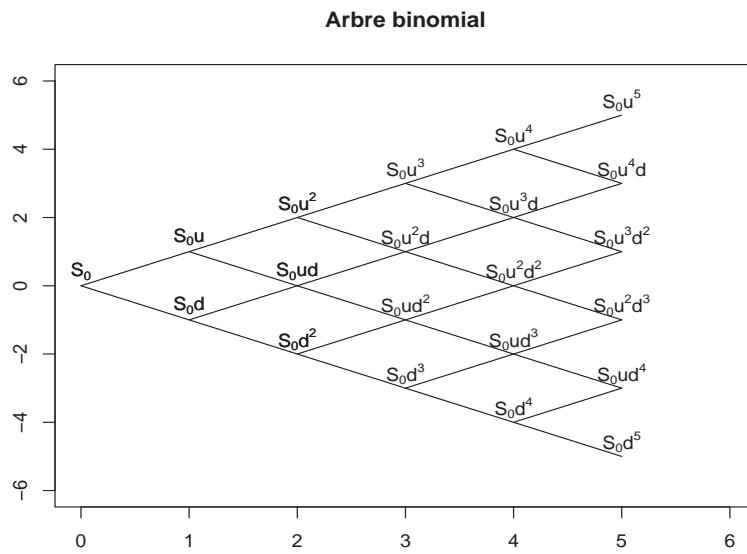


Figure 18: Valeurs possibles dans un arbres, avec un prix initial S_0 .

En itérant, on obtient pour n périodes

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \pi^i (1-\pi)^{n-i} \max \{ u^i d^{n-i} S - K, 0 \}$$

où r est le taux sur une période. Aussi, si l'on subdivisionne $[0, T]$ en n périodes, le taux doit plutôt être écrit sous la forme

$$\frac{1}{(1+Tr/n)^n} \sim \exp(-rT) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Remarque 14. Un tel arbre est dit *recombinant*: à chaque date, les chemins correspondant à un même nombre d'événements élémentaires passés (croissance de u ou décroissance de d) recombinent. Aussi, un arbre recombinant ne possède que $n(n+1)/2$ noeuds distincts pour n périodes, au lieu des $2^{n+1} - 1$ pour un arbre naïf. Le gain (algorithmique) est considérable.

Remarque 15. Il est possible de montrer que

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{i=a}^n \binom{n}{i} \pi^i (1-\pi)^{n-i} [u^i d^{n-i} S - K]$$

n	5	10	20	25
arbre recombinant	15	55	210	325
arbre naïf	63	2 047	2 097 151	67 108 863

Table 2: Nombre de noeuds pour les arbres, en fonction du nombre de périodes n .

où a est le nombre minimal de hausse du sous-jacent pour être en dedans à l'échéance, i.e.

$$u^a d^{n-a} S = K \text{ soit } a = \frac{\log(K/Sd^n)}{\log(u/d)}.$$

On peut alors réécire, en posant $\tilde{\pi} = u\pi/d$,

$$C = S \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \tilde{\pi}^i (1 - \tilde{\pi})^{n-i} - K \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \pi^i (1 - \pi)^{n-i}.$$

Notons que π et $\tilde{\pi}$ sont des probabilités, aussi, en notant B la fonction de répartition de la loi binomiale,

$$C = SB(a, n, \tilde{\pi}) - \frac{K}{(1+r)^n} B(a, n, \pi).$$

On retrouve ici une version discrète de la formule de BLACK & SCHOLES (1973).

Remarque 16. Pour calculer le prix d'un call, la méthode retenue ici est basée sur un algorithme dit de [rétropropagation](#)

6.3 Petite digression: de la marche aléatoire au brownien

Pour obtenir plus formellement le prix BLACK & SCHOLES à partir de ce modèle, rappelons que le mouvement brownien apparaît comme limite de la marche aléatoire.

Définition 17. Le processus $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un mouvement brownien si $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une “suite” de variables aléatoires

- à accroissements indépendants, i.e. $W_{t+h} - W_t$ et $W_t - W_{t-k}$ sont des variables indépendantes, pour tout $t, h > 0$ et $k \in]0, t[$,
- $t \mapsto W_t$ est une fonction continue
- pour tout $t, h > 0$, $W_{t+h} - W_t$ suit une loi normale centrée, de variance h .

On note $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de variable aléatoire telle que

$$Z_{n+1} - Z_n = \begin{cases} u & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ d & \text{avec probabilité } \frac{1}{2}, \end{cases},$$

et $Z_0 = 0$. On considère alors $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ où $\mathcal{T} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots\} = \{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots\}$ définie par $X_{t_n} = Z_n$. On note $p(n, k)$ la probabilité

$$p(n, k) = \mathbb{P}(Z_n = k\Delta x | Z_0 = 0).$$

Soit $m = (n + k)/2$, alors

$$p(n, k) = \binom{m}{n} \frac{1}{2^n} \text{ si } n + k \text{ est pair , 0 sinon.}$$

On se place dans le cas où $n, k \rightarrow \infty$, de telle sorte $n\Delta t \rightarrow t$ et $k\Delta x \rightarrow x$. On note $\sigma = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$. Rappelons que d'après la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n^{n+\frac{1}{2}}} \exp(-n).$$

Aussi, on en déduit que

$$\binom{(n+k)/2}{n} \frac{1}{2^n} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-\frac{n}{2}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right).$$

On peut alors conclure, à l'aide des notations précédentes que

$$\frac{\mathbb{P}(Z_n = k\Delta x | Z_0 = 0)}{2\Delta x} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{1}{2\Delta x} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right).$$

On obtient ainsi la convergence marginale vers la loi Gaussienne, centrée de variance $\sigma^2 t$. La propriété d'accroissements indépendants découle de la construction de la marche aléatoire. La propriété de continuité est elle un peu plus délicate à montrer, mais elle peut être obtenue (KARATZAS & SHREVE (1988)).

Afin de passer légitimement du modèle discret à la formule de BLACK & SCHOLES (1973), il convient d'interpréter les paramètres.

6.4 Petit complément sur la convergence

Nous avons vu, en montrant que l'arbre était une discrétisation de la trajectoire (continue) du modèle de BLACK & SCHOLES (1973), et donc, quand $n \rightarrow \infty$ (où n est le nombre de périodes considérées), le prix converge vers le prix du modèle de BLACK & SCHOLES (1973). Toutefois, cette convergence n'est pas du tout monotone. Si $\Delta t = T/n$, et si ϵ_n est la différence entre le prix obtenu par un arbre à n périodes et le prix théorique,

$$|\epsilon_n| \leq O\left(\frac{1}{n}\right).$$

LEISEN & REIMER (1996) puis Walsh (2003) ont proposé une étude poussée de la convergence des modèles par arbre.

6.5 Interprétation des paramètres

En pratique, les valeurs u et d sont définis à l'aide de la **volatilité** σ de la rentabilité de l'action et de μ son espérance (sous la probabilité \mathbb{P}). On note p la probabilité de hausse du sous-jacent.

Si l'on se place sur une période $[0, t]$, alors

$$p \cdot S_0 u + (1 - p) \cdot S_0 d = S_0 \exp(\mu t),$$

soit

$$p = \frac{\exp(\mu t) - d}{u - d}.$$

De plus, la variance de la rentabilité est $\sigma^2 t$, qui vérifie

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = \sigma^2 t,$$

de telle sorte que

$$u = \exp(\sigma\sqrt{t}) \text{ et } d = \exp(-\sigma\sqrt{t}),$$

comme l'avait noté COX, ROSS & RUBINSTEIN (1979).

En fait, rappelons que la valorisation doit se faire sous la probabilité risque neutre p^* ,

$$p^* = (\exp(rt) - d)/(u - d).$$

Exemple 18. Prenons un call d'échéance $T = 1$ an, de prix d'exercice $K = 50$, ne versant pas de dividendes. L'action cote également $S_0 = 50$, avec une volatilité estimée de $\sigma = 40\%$ par an, un taux sans risque de $r = 5\%$ par an. On en déduit les valeurs suivantes

$$u = \exp(\sigma\sqrt{1/5}) = 1.195884 \text{ et } d = \exp(-\sigma\sqrt{1/5}) = 0.8362017,$$

et donc

$$p^* = \frac{\exp(r/5) - d}{u - d} = 48.33\%.$$

La Figure 19 montre toutes les valeurs possibles du sous-jacent, en bleu. Notons que la valeur du call est également reportée, à chacun des noeuds.

Notons que si RUBINSTEIN (1979) a imposé la contrainte $ud = 1$ pour des raisons de simplification de calculs, il reste un degré de liberté. Une alternative possible est d'imposer $p = 1/2$ et des considérer alors

$$u = \exp\left(\left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]t + \sigma\sqrt{t}\right) \text{ et } d = \exp\left(\left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]t - \sigma\sqrt{t}\right).$$

6.6 Pourquoi le prix dépend de \mathbb{Q} , et pas de \mathbb{P} ?

Valoriser en cherchant $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{payoff})$ revient à dire que l'on cherche à se protéger [en moyenne](#). C'est le principe de calcul de la prime pure en assurance.

Ici, on cherche à être couvert [dans tous les cas](#), peu importe les probabilités de hausse ou de baisse du sous-jacent. On ne peut donc pas utiliser une approche assurantielle, actuarielle, ou probabiliste.

Toutefois, le prix obtenu peut être interprété comme une espérance mathématique, non pas sous \mathbb{P} , mais sous une probabilité ad-hoc, \mathbb{Q} , appelée [probabilité risque neutre](#).

Proposition 19. *Le fait qu'il y ait absence d'opportunité d'arbitrage est équivalent à l'existence d'au moins une probabilité risque neutre.*

Proposition 20. *S'il y a absence d'opportunité d'arbitrage, le fait que le marché soit complet est équivalent à l'existence d'une probabilité risque neutre.*

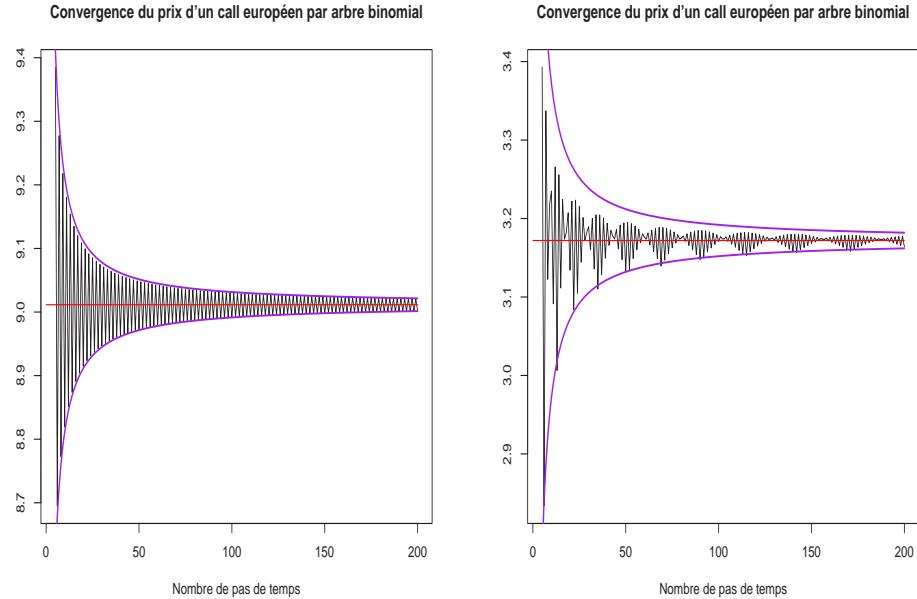


Figure 19: Convergence du prix par arbre binomial, et borne en $1/n$, cas à la monnaie, et en dehors de la monnaie.

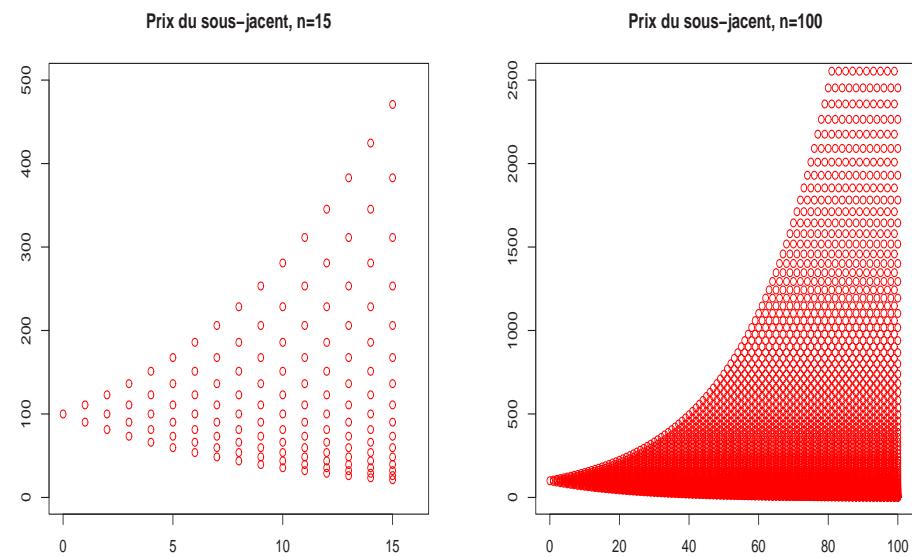


Figure 20: Prix du sous-jacent, avec les montants en ordonnées.

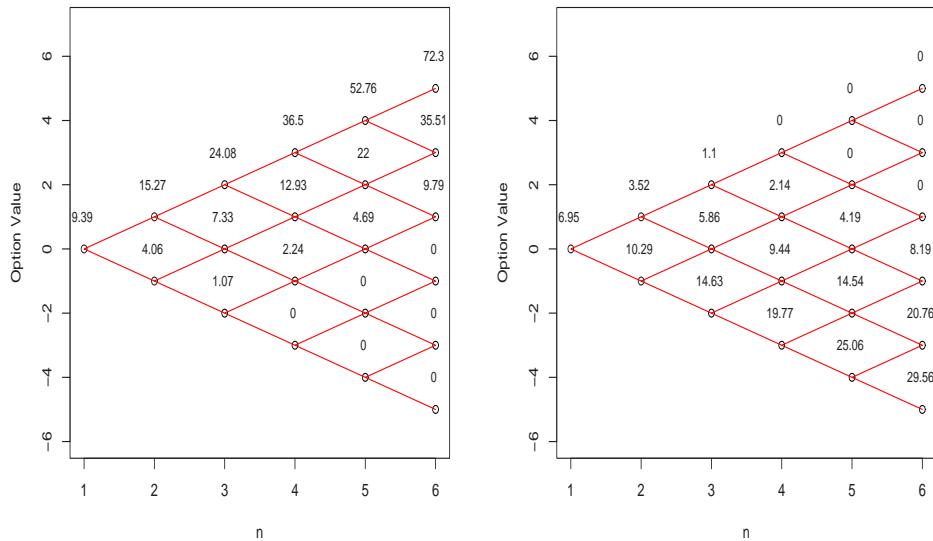


Figure 21: Valeur d'un call dans un modèle binomial, $n = 5$, à gauche, et d'un put à droite.

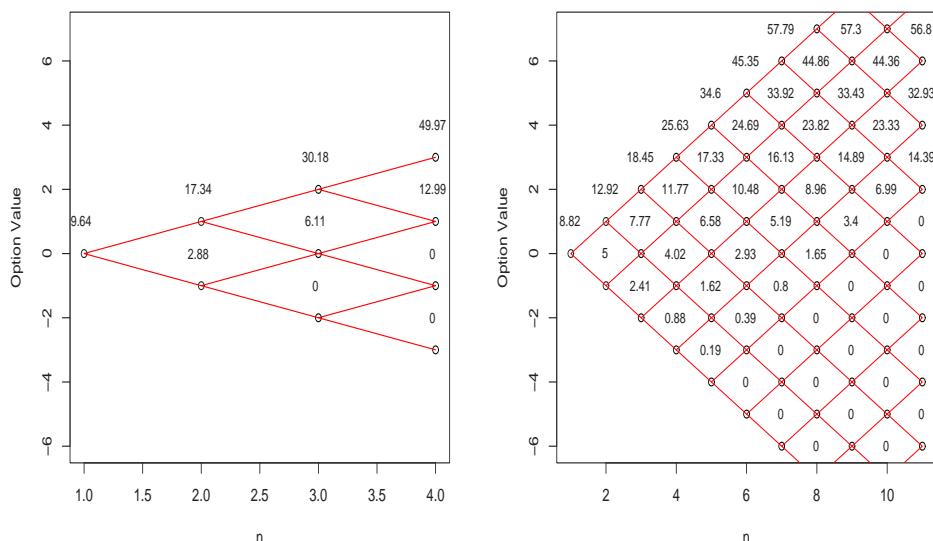


Figure 22: Valeur d'un call dans un modèle binomial, influence de n , $n = 3$ à gauche, et $n = 10$ à droite.

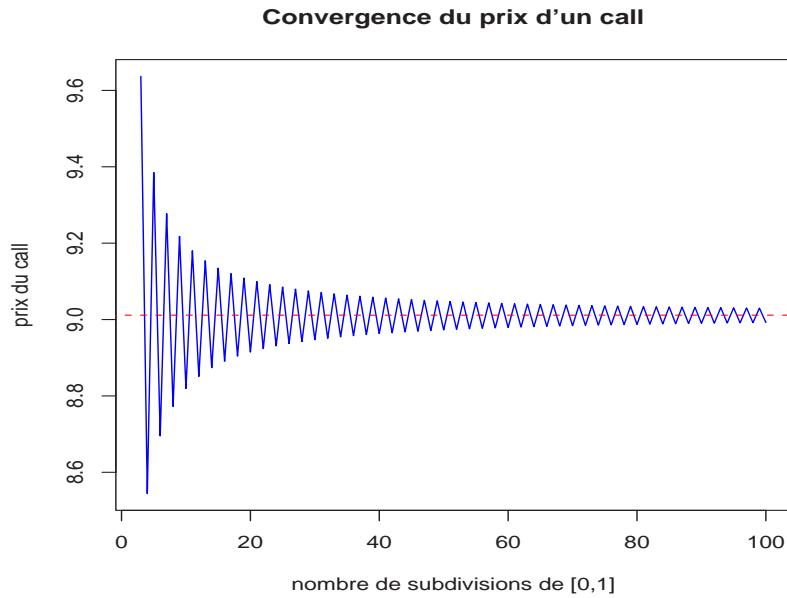


Figure 23: Convergence du calcul du prix d'un call par arbre binomial.

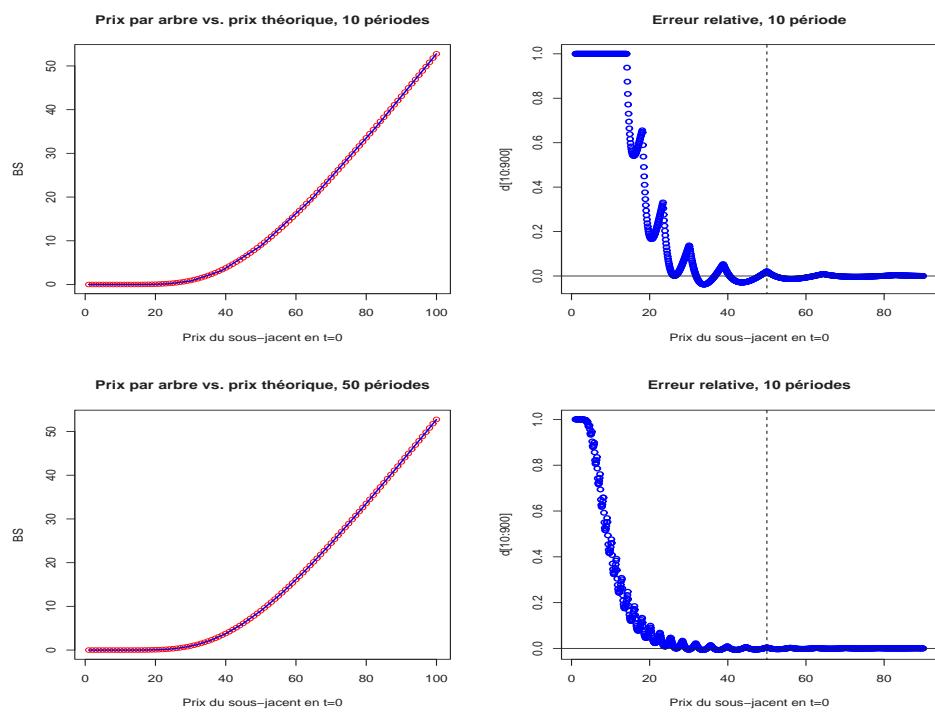


Figure 24: Erreur lors du calcul du prix, arbre à 10 et 50 périodes.

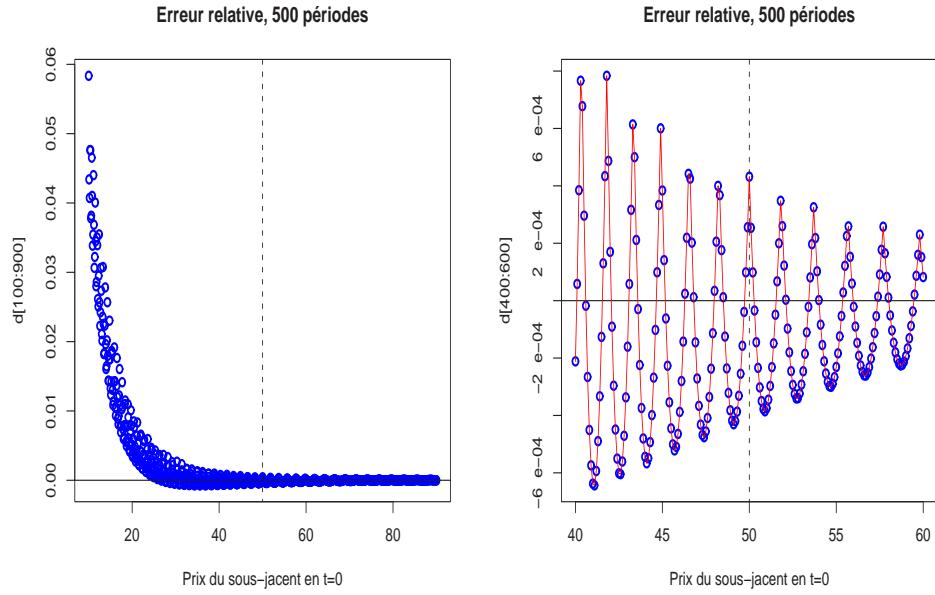


Figure 25: Erreur lors du calcul du prix, arbre à 500 périodes.

6.7 Que se passe-t-il sous cette probabilité risque neutre ?

Pour un arbre dans un modèle à une période, sous la probabilité risque neutre, \mathbb{Q} , notons que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{1+r} S_1 | \mathcal{F}_0 \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{1+r} S_1 | S_0 \right) = \frac{1}{1+r} \left(\frac{1+r-d}{u-d} S_0 u + \frac{u-1-r}{u-d} S_0 d \right) = S_0.$$

Aussi,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{1+r} S_1 | \mathcal{F}_0 \right) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (S_1 | S_0) = S_0.$$

Plus généralement, notons que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{(1+r)^n} S_n | \mathcal{F}_0 \right) = S_0,$$

c'est à dire que les prix actualisés sont des [martingales](#).

Remarque 21. *Une autre façon d'écrire ce résultat est de noter que*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{S_{n+1}}{S_n} | \mathcal{F}_n \right) = 1 + r.$$

La valeur moyenne des rendements sous la probabilité risque neutre correspond au taux sans risque.

Sous la probabilité risque neutre, \mathbb{Q} , notons que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rt} S_t | \mathcal{F}_u) = e^{-ru} S_u$$

pour $t > u$, c'est à dire que les prix actualisés sont des **martingales**.

En temps discret, (noté $n \in \mathbb{N}$), un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale si $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$.

On peut montrer que de manière équivalente, $\mathbb{E}(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) = X_n$ pour $k > 0$. On notera également que la moyenne d'une martingale est constante dans le temps, $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Plus généralement, en temps continu, (noté $t \in [0, T]$), un processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale si $\mathbb{E}(X_{t+h} | \mathcal{F}_t) = X_t$ pour tout $h > 0$.

6.8 Que se passe-t-il si la probabilité risque neutre n'est pas unique ?

En marché incomplet, il n'y a plus forcément unicité de prix, mais un **fourchette de prix acceptables**. La borne supérieure sera la prix demandé (**ask**) défini par

$$C_+ = \inf \{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}(\omega) \geq C(\omega)\}$$

et la borne inférieure sera la prix offert (**bid**) défini par

$$C_- = \sup \{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}(\omega) \leq C(\omega)\}$$

où C désigne le payoff de l'option.

Dans ce cas, notons que si \mathbb{Q} est une probabilité risque neutre, alors

$$C^- \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) \leq C^+$$

L'idée sous-jacent est que s'il existe un contrat se vendant plus que C^+ , il existe une opportunité d'arbitrage (et de gagner de l'argent **sans risque**).

6.9 De l'arbre binomial au modèle continu

Dans le cas de l'arbre binomial, le processus dus sous-jacent vérifiait

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \begin{cases} u & \text{avec probabilité } 1/2 \\ d & \text{avec probabilité } 1/2 \end{cases}$$

(on suppose que les probabilités de hausse et de baisse sont ici égale par soucis de simplicité). Aussi,

$$\mathbb{P}(S_n = s | S_0) = \binom{m}{n} \frac{1}{2^n} \text{ si } s = S_0 u^m d^{n-m}, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Comme pour le passe en temps continu de la marche aléatoire, on pose $Y_{n\Delta t} = S_n$. Alors, si $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$,

$$\frac{\mathbb{P}(S_n = S_0 u^k d^{n-k} | S_0)}{2\Delta x} \rightarrow f(Y_t = s | Y_0 = S_0),$$

quand $n, k \rightarrow \infty$, avec $n\Delta t \rightarrow t$, et $S_0 u^k d^{n-k} \rightarrow s$, en notant

$$f(Y_t = y | Y_0 = y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(y - y_0 - [\mu - \sigma^2/2] \cdot t)^2}{2\sigma^2 t}\right),$$

comme le montre KARATZAS & SHREVE (1988). Une étape clé de la preuve est de noter que

$$ud = \exp(2\mu\Delta t) \cdot (2 - \exp(\sigma^2\Delta t)) \sim e^{2\mu\Delta t} \cdot e^{-\sigma^2\Delta t},$$

et que

$$\frac{u}{d} = 1 + 2\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t \sim e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

En notant encore une fois $m = [n+k]/2$, on en déduit que

$$m \log u + (n-k) \log d \sim n\Delta t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + m\Delta x,$$

et donc, en utilisant un raisonnement analogue au cas de la marche aléatoire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta x} \binom{k}{n} \frac{1}{2^n} &\sim \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(\log S - \log S_0 - [\mu - \sigma^2/2] \cdot t)^2}{2\sigma^2 t}\right). \end{aligned}$$

6.10 La formule de BLACK & SCHOLES (1973)

Comme nous l'avons rappelé dans le Chapitre précédent, dans le cas du modèle de BLACK & SCHOLES (1973), une formule analytique peut être obtenue pour valoriser les call.

Proposition 22. *Le prix d'un call européen en $t = 0$, de maturité T , de strike K , dont le prix de l'actif sous-jacent est de moyenne μ , de volatilité σ , avec un taux sans risque de r ,*

$$\text{Call}(r, \sigma, T, K) = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2),$$

et dans le cas du put de mêmes paramètres

$$\text{Put}(r, \sigma, T, K) = K e^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1),$$

où

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right),$$

et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

6.11 Utiliser un autre arbre ?

Nous avons ainsi deux méthodes pour discréteriser l'arbre

- le cas $u = 1/d$, soit $\begin{cases} u = \exp(\sigma\sqrt{t}) \\ d = \exp(-\sigma\sqrt{t}) \end{cases}$ et $p = \frac{e^{rT/h} - d}{u - d}$
- le cas $p = 1/2$, soit $\begin{cases} u = e^{rT/h} \left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2 T/h} - 1}\right) \\ d = e^{rT/h} \left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2 T/h} - 1}\right) \end{cases}$ et $p = \frac{1}{2}$

La figure 27 montre les distributions en T pour différentes valeurs h . Ces deux choix semblent très proches. En effet, notons que

$$u = 1 + \sigma\sqrt{t} + rt + O(t^{3/2}) \text{ pour les deux modèles.}$$

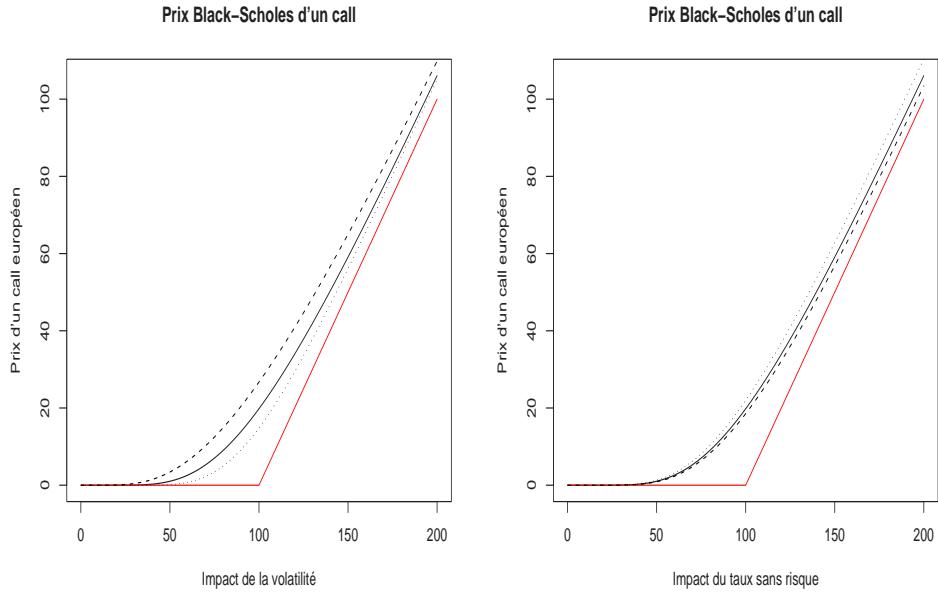


Figure 26: Valeur BLACK & SCHOLES d'un call, impact de la volatilité σ et du taux sans risque r .

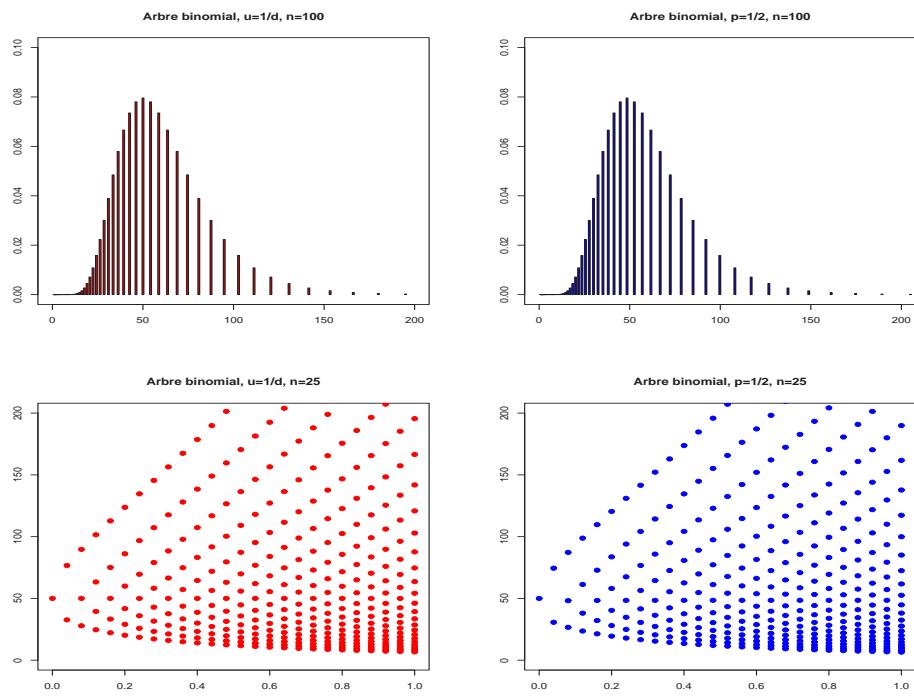


Figure 27: Comparaison des différents arbres, $u = 1/d$ et $p = 1/2$.

6.12 Arbre trinomial, ou méthode de BOYLE (1986)

L'idée de BOYLE (1986) était de proposer un algorithme convergent plus rapidement que l'algorithme binomial. Pour cela, à chaque noeud, trois direction sont envisagées, où à la date 1 trois valeurs sont envisagée

$$\begin{cases} S_1 = S_0 u & \text{avec probabilité } p_u \\ S_1 = S_0 & \text{avec probabilité } p_s \\ S_1 = S_0 d & \text{avec probabilité } p_d \end{cases}$$

où

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{T/2}} - e^{rT/2}}{e^{\sigma\sqrt{T/2}} - e^{-\sigma\sqrt{T/2}}} \right)^2,$$

$$p_u = \left(\frac{e^{rT/2} - e^{-\sigma\sqrt{T/2}}}{e^{\sigma\sqrt{T/2}} - e^{-\sigma\sqrt{T/2}}} \right)^2,$$

et $p_s = 1 - p_u - p_d$.

Cette méthode revient à peu de choses prêt, à sauter un pas de temps dans le modèle binomial, en supposant que l'on passe de $t = 0$ à $t = 2$ puis à $t = 4, \dots$ etc.

Là encore, une alternative possible est de poser $u = \exp(\sigma\sqrt{3t})$ et $d = \exp(-\sigma\sqrt{3t})$. Les probabilités de transition

$$p_u = \sqrt{\frac{t}{12\sigma^2}} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6},$$

pour la probabilité de passer de S_0 à $S_0 u$

$$p_s = -\sqrt{\frac{t}{12\sigma^2}} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6},$$

pour la probabilité de passer de S_0 à $S_0 d$, et $p_s = 2/3$ pour la probabilité de rester à S_0 .

Une autre manière de présenter cette méthode est d'utiliser la moyenne des valeurs obtenues sur n dates, et sur $n - 1$ (les valeurs du call changeant de signe en fonction de la parité de n)

6.13 Extention aux options multisupport (ou arc-en-ciel)

On s'intéresse ici à des options basées sur deux sous-jacents dont les cours sont $(S_{1,t})_{t \geq 0}$ et $(S_{2,t})_{t \geq 0}$ respectivement. On note p_1 et p_2 les probabilités de hausse des deux titres, respectivement. Alors, si l'on suppose les variations comme étant indépendantes d'une date à l'autre,

- S_1 et S_2 augmentent avec probabilité $p_1 \cdot p_2$,
- S_1 augmente et S_2 baisse avec probabilité $p_1 \cdot (1 - p_2)$,
- S_1 baisse et S_2 augmente avec probabilité $(1 - p_1) \cdot p_2$,
- S_1 et S_2 diminuent avec probabilité $(1 - p_1) \cdot (1 - p_2)$.

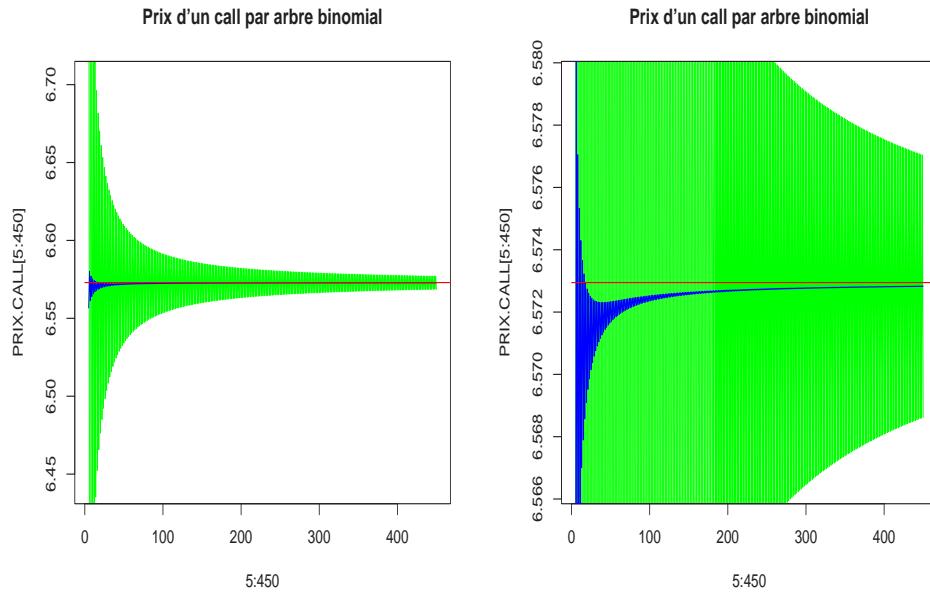


Figure 28: Convergence du prix du call par arbre, en utilisant la moyenne pour n et $n - 1$ périodes.

Dans le cas où les sous-jacent sont corrélés RUBINSTEIN (1994) a proposé un arbre non-rectangulaire. A partir d'un noeud où les prix sont (S_1, S_2) , on suppose que 4 noeuds peuvent être atteints, avec un arbre binomial pour le premier actif (qui peut atteindre les valeurs u ou d), et 4 valeurs possibles pour le second actif A, B, C ou D ,

$$\begin{array}{ll} (u, A) & (u, B) \\ (d, C) & (d, D) \end{array}$$

Remarque 23. Notons que l'on parle aussi parfois d'*arbre binomial à deux facteurs*.

On suppose que les probabilités sont égales ($1/4$), et que $A \cdot D = B \cdot C$. A la date 1, il y a 4 noeuds, qui passent à 9 à la date 2 (compte tenue de l'égalité $A \cdot D = B \cdot C$, on a $(t + 1)^2$ noeuds à la date t , et non pas 2^{t+1}). Cette méthode est proche de la convention où $p = 1/2$ dans les arbres binomiaux unidimensionnels.

On suppose que le logarithme des prix ($\log S_1$ et $\log S_2$) suit une marche aléatoire. Dans le cas où $\rho = 0$, les valeurs possibles pour le logarithme des prix sont

$$\begin{array}{ll} (+1, +1) & (+1, -1) \\ (-1, +1) & (-1, -1) \end{array}$$

ce qui donne une marche aléatoire centrée réduite, au sens où

$$\mathbb{E}(\log S_i) = 0, \text{Var}(\log S_i) = 1 \text{ pour } i = 1, 2,$$

et $\text{cov}(\log S_1, \log S_2) = 0$. Si l'on souhaite que les prix des actifs soient corrélés, les valeurs possibles sont alors

$$\begin{array}{ll} \left(+1, \rho + \sqrt{1 - \rho^2} \right) & \left(+1, \rho - \sqrt{1 - \rho^2} \right) \\ \left(-1, -\rho + \sqrt{1 - \rho^2} \right) & \left(-1, -\rho - \sqrt{1 - \rho^2} \right) \end{array}$$

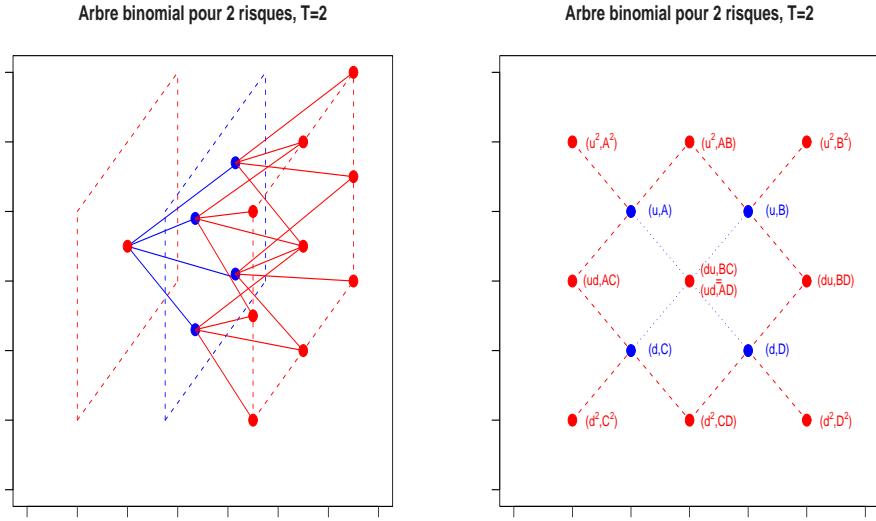


Figure 29: “Visualisation” d’un arbre binomial sur deux risques, ou arbre pyramidal.

On notera que

$$\mathbb{E}(\log S_i) = 0, \text{Var}(\log S_i) = 1 \text{ pour } i = 1, 2,$$

et $\text{cov}(\log S_1, \log S_2) = \rho$. Enfin, plus généralement, si les deux titres n’ont pas les mêmes premiers moments,

$$\begin{array}{ll} +\mu_1 h + \sigma_1 \sqrt{h}, +\mu_2 h + \sigma_2 \sqrt{h}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2}) & +\mu_1 h + \sigma_1 \sqrt{h}, +\mu_2 h + \sigma_2 \sqrt{h}(\rho - \sqrt{1 - \rho^2}) \\ \mu_1 h - \sigma_1 \sqrt{h}, +\mu_2 h - \sigma_2 \sqrt{h}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2}) & \mu_1 h - \sigma_1 \sqrt{h}, \mu_2 h - \sigma_2 \sqrt{h}(\rho - \sqrt{1 - \rho^2}) \end{array}$$

de telle sorte que

$$\mathbb{E}(\log S_i) = \mu_i h, \text{Var}(\log S_i) = \sigma_i^2 h \text{ pour } i = 1, 2,$$

et $\text{cov}(\log S_1, \log S_2) = \rho \sigma_1 \sigma_2 h$.

Plus généralement, avec k actifs, de chaque noeud part 2^k . Dans le cas où $k = 2$, à partir de (S_1, S_2) , on accède à $(S_1 u_1, S_2 u_2)$ avec probabilité $p_{u_1 u_2}$, à $(S_1 u_1, S_2 d_2)$ avec probabilité $p_{u_1 d_2}$, à $(S_1 d_1, S_2 u_2)$ avec probabilité $p_{d_1 u_2}$, et à $(S_1 d_1, S_2 d_2)$ avec probabilité $p_{d_1 d_2}$, où, en notant $t = T/n$,

$$u_i = \exp(\sigma_i \sqrt{t}) \text{ et } d_i = \exp(-\sigma_i \sqrt{t}),$$

et où les probabilités sont

$$\begin{aligned} p_{u_1 u_2} &= \frac{1}{4} \left(1 + \rho + \sqrt{t} \left[\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right] \right), \\ p_{u_1 d_2} &= \frac{1}{4} \left(1 - \rho + \sqrt{t} \left[\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right] \right), \\ p_{d_1 u_2} &= \frac{1}{4} \left(1 - \rho + \sqrt{t} \left[-\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right] \right), \end{aligned}$$

$$p_{d_1 d_2} = \frac{1}{4} \left(1 + \rho - \sqrt{t} \left[\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right] \right),$$

où $\mu_i = r - \sigma_i^2/2$. Cette méthode est justifiée dans BOYLE, EVNINE & GIBBS (1989). L'idée est d'utiliser une approximation à l'ordre 1, par la formule de Taylor, de la fonction caractéristique du vecteur Gaussien. On suppose en effet que

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i, \text{ pour } i = 1, 2,$$

où $(\mathbf{W}_t)_{t \geq 0} = (W_t^1, W_t^2)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien (standard) bivarié, de corrélation ρ (on parlera aussi de corrélation instantanée entre dW_t^1 et dW_t^2). Dans le cas continue (et de rendements Gaussiens), la fonction caractéristique des rendements entre t et t est alors

$$\Phi_{\mathbf{R}}(x, y) = 1 + i\sqrt{t}(x\mu_1 + y\mu_2) - \frac{t}{2}(x^2\sigma_1^2 + 2xy\sigma_1\sigma_2\rho + y^2\sigma_2^2) + o(t).$$

où R_1 et R_2 désigne le rendement entre les dates 0 et $t = T/n$, pour le processus discrétisé, i.e. $R_i = \log(S_1^i/S_0^i)$. La fonction caractéristique de $\mathbf{R} = (R_1, R_2)$ est

$$\Psi_{\mathbf{R}}(t, u) = \mathbb{E}(\exp(itR_1 + iuR_2)).$$

Dans le cas de notre processus à 4 états, on obtient que

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{R}}(x, y) = & p_{u_1 u_2} \exp(i\sqrt{t}[x\sigma_1 + y\sigma_2]) + p_{u_1 d_2} \exp(i\sqrt{t}[x\sigma_1 - y\sigma_2]) \\ & + p_{d_1 u_2} \exp(i\sqrt{t}[-x\sigma_1 + y\sigma_2]) + p_{d_1 d_2} \exp(i\sqrt{t}[-x\sigma_1 - y\sigma_2]), \end{aligned}$$

d'où, en faisant un développement de Taylor à l'ordre 1,

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{R}}(x, y) = & p_{u_1 u_2} \left(1 + i\sqrt{t}[x\sigma_1 + y\sigma_2] - \frac{t}{2}[x\sigma_1 + y\sigma_2]^2 \right) \\ & + p_{u_1 d_2} \left(1 + i\sqrt{t}[x\sigma_1 - y\sigma_2] - \frac{t}{2}[x\sigma_1 - y\sigma_2]^2 \right) \\ & + p_{d_1 u_2} \left(1 + i\sqrt{t}[-x\sigma_1 + y\sigma_2] - \frac{t}{2}[-x\sigma_1 + y\sigma_2]^2 \right) \\ & + p_{d_1 d_2} \left(1 + i\sqrt{t}[-x\sigma_1 - y\sigma_2] - \frac{t}{2}[-x\sigma_1 - y\sigma_2]^2 \right) + o(t). \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut se simplifier sous la forme

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{R}}(x, y) = & 1 + i\sqrt{t}([x\sigma_1(p_{u_1 u_2} + p_{u_1 d_2} - p_{d_1 u_2} - p_{d_1 d_2})] + [y\sigma_2(p_{u_1 u_2} - p_{u_1 d_2} + p_{d_1 u_2} - p_{d_1 d_2})]) \\ & - \frac{t}{2}(x^2\sigma_1^2 + 2xy\sigma_1\sigma_2[(p_{u_1 u_2} - p_{u_1 d_2} - p_{d_1 u_2} + p_{d_1 d_2})] + y^2\sigma_2^2) + o(t). \end{aligned}$$

Par identification entre les deux premiers termes du développement de Taylor, on obtient le système

$$\begin{cases} p_{u_1 u_2} + p_{u_1 d_2} + p_{d_1 u_2} + p_{d_1 d_2} = 1 \\ p_{u_1 u_2} - p_{u_1 d_2} - p_{d_1 u_2} + p_{d_1 d_2} = \rho \\ p_{u_1 u_2} + p_{u_1 d_2} - p_{d_1 u_2} - p_{d_1 d_2} = \sqrt{t}\mu_1/\sigma_1 \\ p_{u_1 u_2} - p_{u_1 d_2} + p_{d_1 u_2} - p_{d_1 d_2} = \sqrt{t}\mu_2/\sigma_2 \end{cases}$$

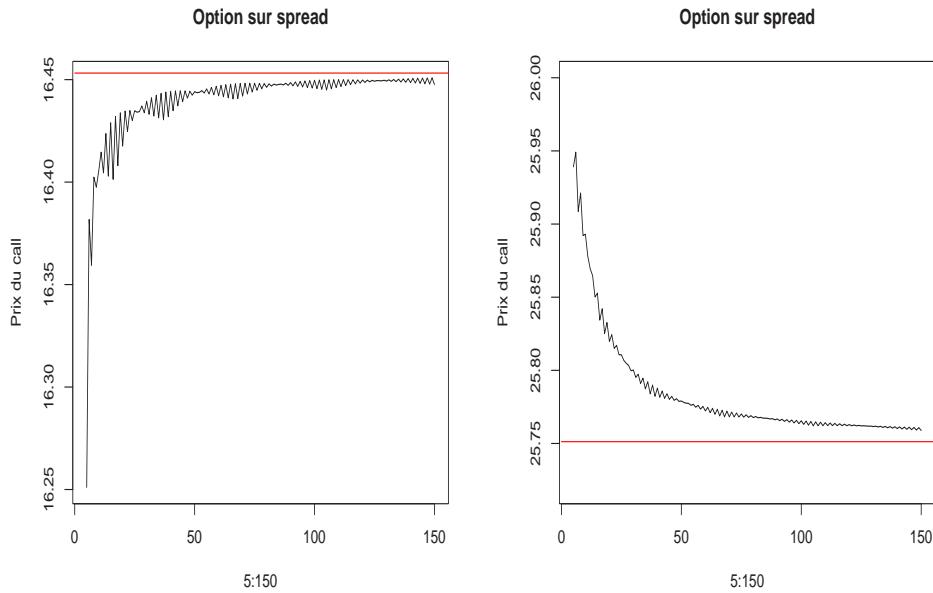


Figure 30: Prix d'une option sur spread.

Remarque 24. Pour d'autres méthodes de valorisations d'options multisupports par lattices, un certain nombre d'algorithmes ont été obtenus par MADAN, MILNE & SHEFRIN (1989), HE (1990) ou encore KAMRAD & RITHKEN (1991). Ces derniers ont en particulier proposé d'étendre en dimension 2 les arbres trinomiaux, en rajoutant une cinquième branche aux 4 de la méthode de BOYLE, EVNINE & GIBBS (1989) (cas d'invariance).

La Figure 30 montre le prix d'un call sur spread, avec une corrélation de 0.5 à gauche, et -0.5 à droite.

Remarque 25. La valeur “théorique” présentée est basé sur l’approximation de KIRK (1995). L’idée est de noter que

$$C = \max\{S^1 - S^2 - K, 0\} = \max\left\{\frac{S^1}{S^2 + K} - 1, 0\right\} \times (S^2 + K),$$

de telle sorte que

$$C = (S_0^2 - K) \left(e^{-rT} \left[\frac{S_0^1}{S_0^2 + K} \Phi(d_1) - \Phi(d_2) \right] \right),$$

où

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log \frac{S_0^1}{S_0^2 + K} + \frac{\sigma^2 T}{2} \right),$$

et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$, où σ est la volatilité de $S^1/(S^2 + K)$, qui peut être approchée par

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \left(\sigma_2 \frac{S_0^2}{S_0^2 + K} \right)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{S_0^2}{S_0^2 + K}}.$$

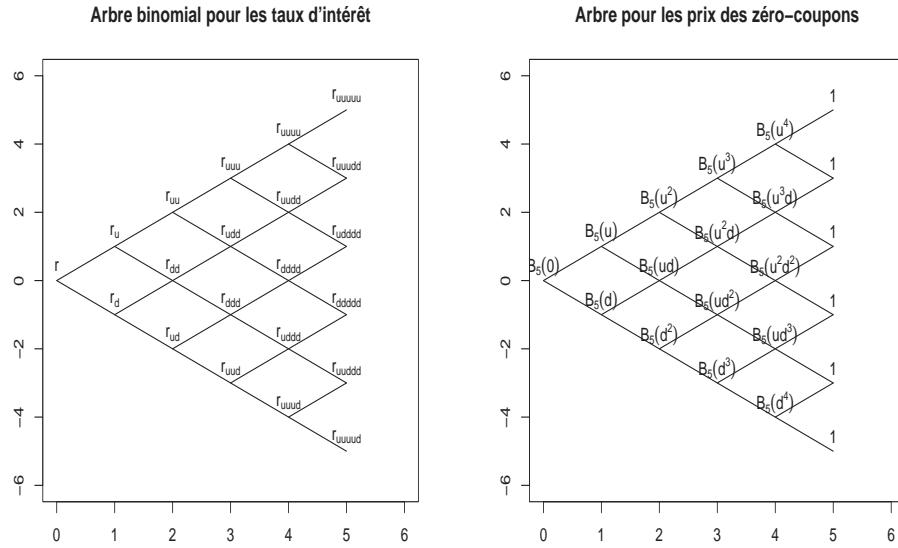


Figure 31: Arbres pour les taux, et pour les prix des zéro-coupons.

6.14 Utilisation des arbres pour modéliser les processus de taux

Le modèle de HO & LEE (1986), présenté auparavant en temps continu, est en fait un processus de diffusion sur un arbre.

On note $B_i(n, T)$ la valeur à la n ième période d'un zéro-coupon de maturité résiduelle T , se trouvant dans l'état du monde i . S'il y a une hausse, on passe à $B_{i+1}(n+1, T-1)$ à la date suivante, et sinon $B_i(n+1, T-1)$ en cas de baisse. L'hypothèse d'arbre recombinant est là aussi faite.

Pour valoriser ces zéro-coupons, on note qu'il existe deux manière, à la date n , d'obtenir 1 euro en $T+1$:

- acheter un zéro-coupon de maturité $T+1$, ce qui vaut $B_i(n, T+1)$,
- acheter un zéro-coupon de maturité 1, puis, dans une période, acheter un nouveau zéro-coupon de maturité T . Ce double achat vaut

$$B_i(n, 1)B_i(n+1, T) = B_i(n, 1)B_{i+1}(n+1, T).????$$

Suivant que les taux montent ou baissent, HO & LEE (1986) propose d'introduire deux fonctions perturbatrices.

6.15 Une extension possible: cas d'un taux ou d'une volatilité stochastique

Au lieu de supposer deux évolutions de cours (corrélés), il est aussi possible de considérer un modèle avec un taux d'intérêt stochastique.

Formellement, si l'on suppose un processus de diffusion de la forme suivante pour le taux sans risque

$$dr_t = a(r, t)dt + \sigma_r dW_t^r,$$

et pour le prix de l'action

$$d(\log S_t) = \left(r - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) dt + \rho \sigma_S dW_t^r + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_S dW_t^s,$$

en supposant les deux browniens non-correlés.

6.16 Arbre binomial et calcul des grecques: Delta

Le Delta se calcule sous la forme

$$\Delta_n = \frac{15.27 - 4.05}{59.79 - 41.81} = \frac{11.22}{17.98} \sim 0.624$$

Notons que le Delta théorique vaut ici

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1)$$

Remarque 26. Notons qu'en prenant d'autres noeuds de l'arbre, on aurait trouvé

$$\frac{24.08 - 7.33}{71.5 - 50} = \frac{16.75}{21.5} \sim 0.779 \text{ ou } \frac{7.33 - 1.07}{50 - 34.96} = \frac{6.26}{15.04} \sim 0.416.$$

La Figure 32 montre le calcul du Δ , avec à gauche l'évolution de Δ_n en fonction de n en utilisant la première méthode proposée. La figure de droite est basée sur la seconde méthode, présentée dans la Remarque précédante. Le trait en haut est basé sur l'arbre après une montée (u), et le trait en bas l'arbre obtenu après une première descente (d). La moyenne de ces deux valeurs est aussi présentée. Ces deux calculs seront d'ailleurs utilisés à l'étape suivante, pour le calcul du Γ .

6.17 Arbre binomial et calcul des grecques: Gamma

Le Gamma se calcule sous la forme

$$\Gamma = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{71.50 - 34.96} = \frac{0.779 - 0.416}{36.54} = 0.00993 \sim 0.01.$$

où

$$\Delta_1 = \frac{24.08 - 7.33}{71.5 - 50} \text{ et } \Delta_2 = \frac{7.33 - 1.07}{50 - 34.96}.$$

La aussi, dans le cas du modèle de BLACK & SCHOLES (1973), la formule fermée permet d'obtenir la vraie valeur du Gamma.

6.18 Arbre binomial et calcul des grecques: Theta

$$\Theta = \frac{7.33 - 9.38}{1/5} \sim 10.25 \text{(par année)},$$

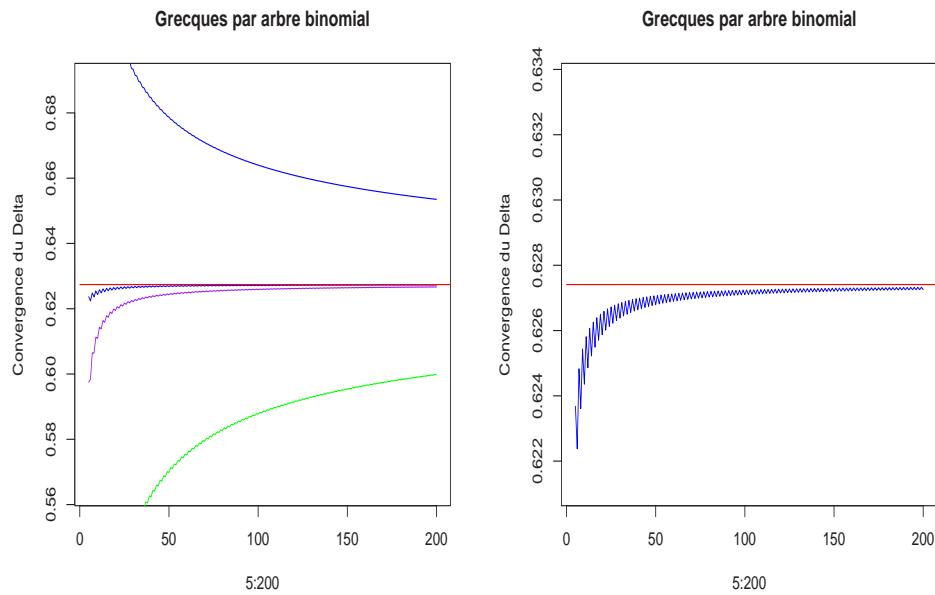


Figure 32: Calcul du Δ par la méthode des arbres, convergence de Δ_n vers Δ .

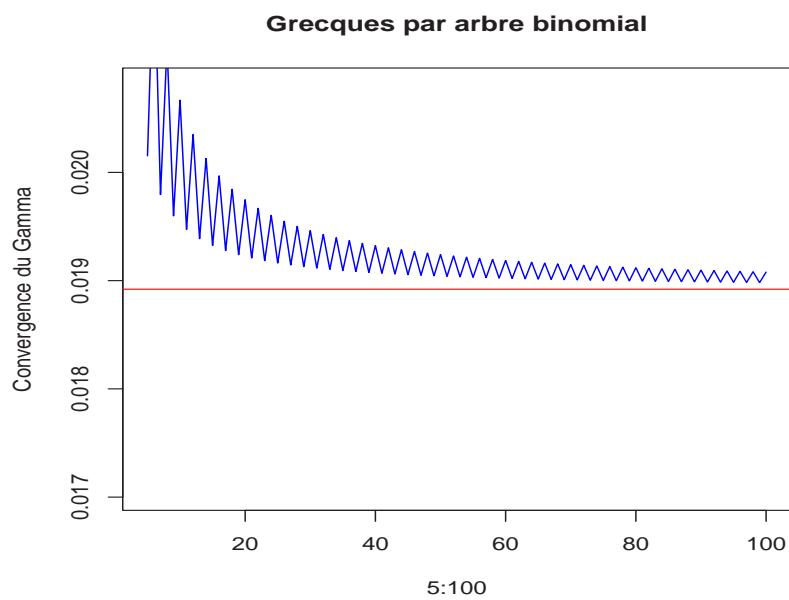


Figure 33: Calcul du Γ par la méthode des arbres, convergence de Γ_n vers Γ .

n	Vega
5	0.1982842
10	0.1844915
20	0.1868036
50	0.1882080
100	0.1886787
250	0.1889617
1000	0.1891033

Table 3: Calcul du Vega, par arbre binomial et convergence.

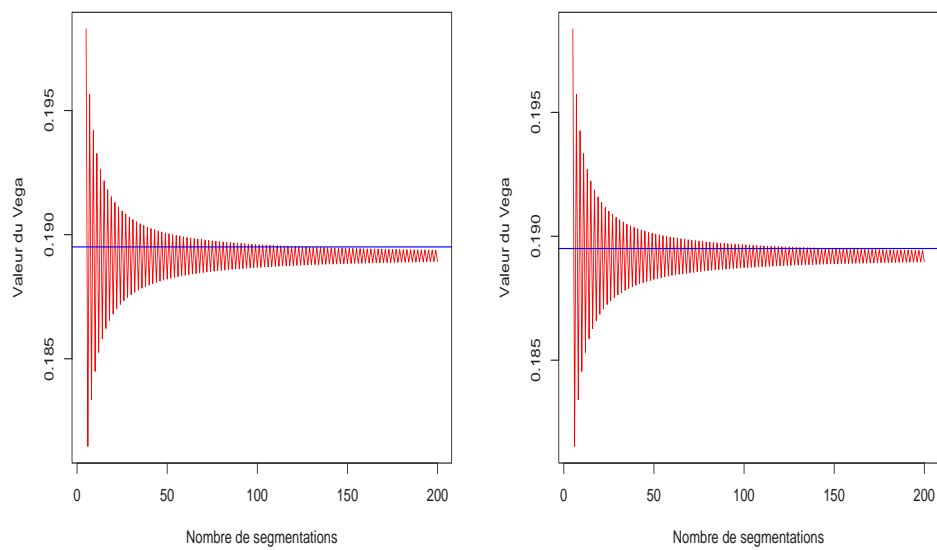


Figure 34: Convergence du calcul du Vega par arbre (avec 0.41 à gauche, 0.401 à droite).

6.19 Arbre binomial et calcul des grecques: Vega

Le calcul du Vega se fait en augmentant la volatilité de 1%, et en construisant un autre arbre. Aussi, 9.38513 pour $n = 5$, avec $\sigma = 40\%$, et 9.583413 pour $\sigma = 41\%$. Aussi, le vega est la différence entre ces deux prix, i.e. $V \sim 0.1982842$.

On notera que théoriquement, la valeur du véga est 0.1895058.

6.20 Arbres pour options “*path-dependent*”

Les options considérées étaient des options européennes, ne faisant intervenir, dans la formule du payoff que la valeur à échéance du sous-jacent. Mais dans certains cas, il convient de connaître la valeur du sous-jacent à toute date entre 0 et T , en particulier quand on s'intéresse à

- la moyenne $\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$,
- un extrema $\max\{S_t, t \in [0, T]\}$ ou $\min\{S_t, t \in [0, T]\}$,
- au franchissement d'une barrière au cours de la période $[0, T]$.

6.21 Utilisation (directe) pour les options à barrière

Plaçons nous sur l'arbre considéré dans la section précédante, et supposons qu'il existe une barrière à 80, dans le cas d'un call “*up and out*”, c'est à dire qui verse $(S_T - K)_+$ à échéance, à condition que $S_t \leq B$ pour tout $t \in [0, T]$.

En fait, deux “*barrière*” seront alors considérés, une première appelée **frontière modifiée**, située juste en dessous, et une **frontière effective**, située juste au dessus (Figure 35). La frontière modifiée passe par les noeuds strictement au dessus de la barrière, et la barrière modifiée par les noeuds strictement en dessous.

On fait alors la valorisation de l'option, comme dans le cas sans barrière, en notant que le prix de l'option est nul dès lors que le cours du sous-jacent a franchi la barrière.

On notera sur la Figure 36 que le prix converge relativement lentement. En particulier, un certain nombre de sauts ralentissent la convergence. Une solution est alors d'utiliser des **arbres adaptatifs**, dont le branchage est de plus en plus dense, au fur et à mesure qu'on se rapproche de la barrière.

6.22 Les arbres adaptatifs

FIGKEWSKI & GAO (1999) ont proposé d'utiliser des arbres adaptatifs afin d'améliorer la convergence des arbres binomiaux. On notera que ces méthodes sont aussi beaucoup utilisée pour la valorisation d'options américaines.

L'idée est de rajouter à un maillage un peu grossier un second maillage beaucoup plus fin, là où c'est nécessaire (par exemple près des barrières dans le cas d'options à barrières, proche du strike pour des options *all-or-nothing* ou proche de la date d'exercice dans le cas d'un call américain).

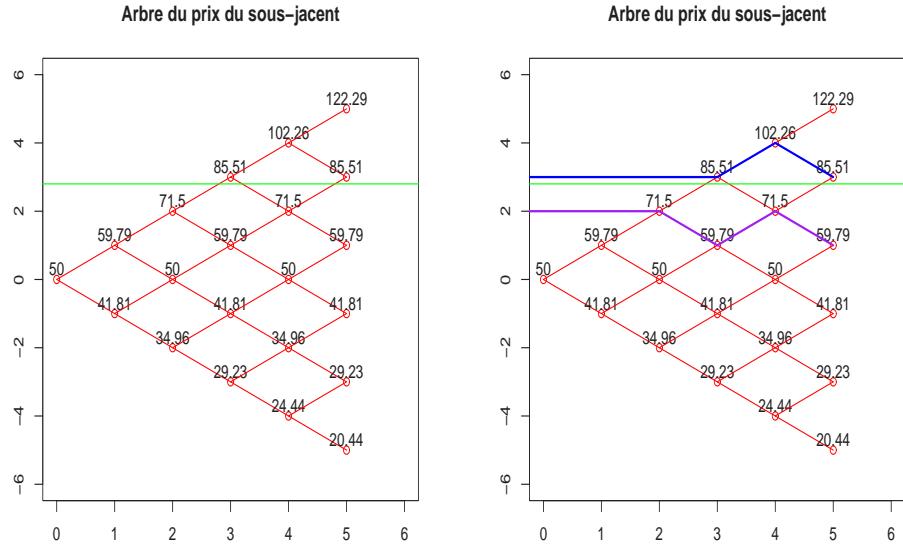


Figure 35: Arbre, barrière et frontières (modifiée et effective).

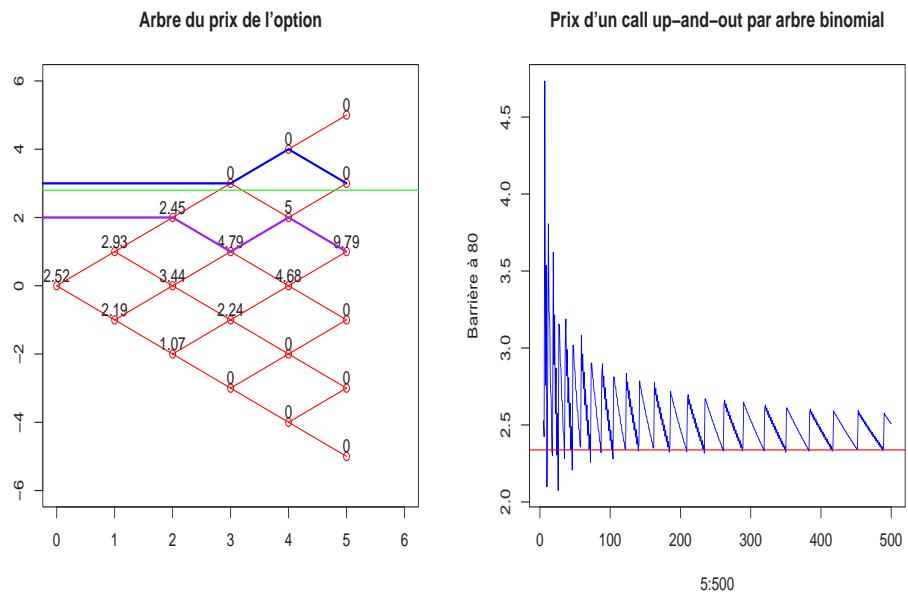


Figure 36: Construction de l'arbre optionnel, et valeur du call douwn-and-out en fonction du nombre de périodes.

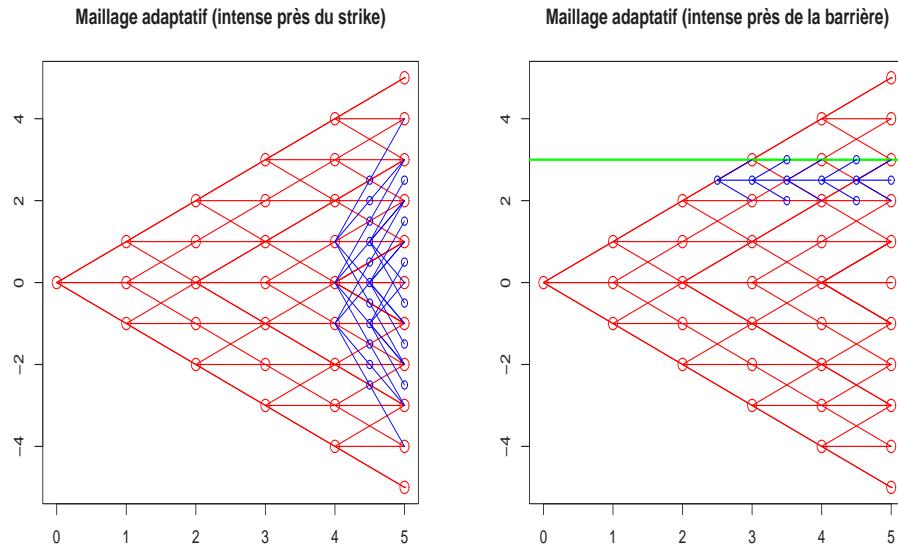


Figure 37: Deux arbres adaptatifs, pour une option de type *all-or-nothing* à gauche, ou à barrière à droite.

6.23 Une application simple des arbres adaptatifs

Considérons le cas d'un call européen (classique) très en dehors de la monnaie, $S_0 = 100$ et $K = 150$, voire $K = 200$. La Figure suivante montre l'évolution du prix du call pour des options en dehors de la monnaie (les ordonnées sont cohérentes, au sens où elles représentent le vrai prix du call $\pm 1\%$).

Plus le strike est éloigné de la valeur du sous-jacent, plus l'algorithme est lent à converger. Aussi, les arbres adaptatifs sont éventuellement une solution, en intensifiant le maillage pour des prix proches du strike.

Pour mettre en oeuvre simplement l'arbre adaptatif, on génère un premier arbre grossier à n branches. On cherche alors la date iT/n à laquelle le prix maximum du sous-jacent ($S_0 u^i$) dépasse le strike. A partir de ce point, on génère un arbre pour valoriser l'option valant $S_0 u^i$ à la date initiale, de strike K et de maturité $T - iT/n$. On génère alors un arbre plus fin, à m branches.

De manière générale, on peut générer plusieurs arbres plus fins afin de mieux valoriser le prix des options à une date intermédiaire (Figure 39). En particulier, pour la valorisation du call très en dehors de la monnaie, on a intérêt à intensifier le maillage pour les valeurs élevées. En effet, pour les valeurs faibles du sous-jacent, le prix de l'option est nul.

Algorithmiquement, on génère les arbres à n périodes, pour le sous-jacent et le prix de l'option. On calcule alors de prix de l'option de manière récursive, et arrivé à la date i (obtenu en résolvant $S_0 u^i = K$, soit $i = \log(K/S_0)/\log(u)$), on substitue à la valeur de l'option à un noeud de l'arbre, le prix d'une option dont la valeur initiale est $S_0 u^i$, de strike K et de maturité $T - iT/n$, par arbre binomial (Figure 40).

Parmi les arbres adaptatifs on compte aussi les **arbres épais**. Formellement, le processus de prix du sous-jacent est une chaîne de Markov $((X_t)_{t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}})$ qui évolue sur un arbre "classique" \mathcal{T} .

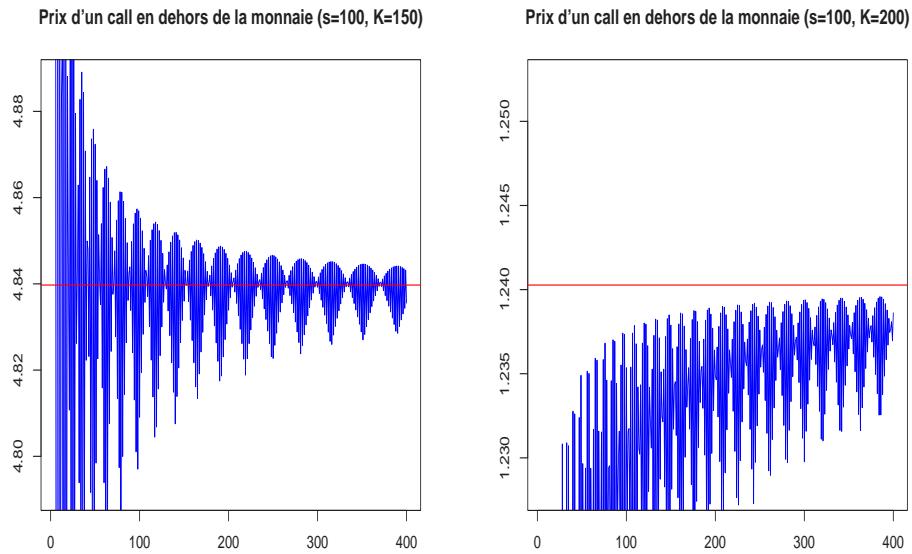


Figure 38: Valorisation d'un call, à la monnaie, et très en dehors de la monnaie.

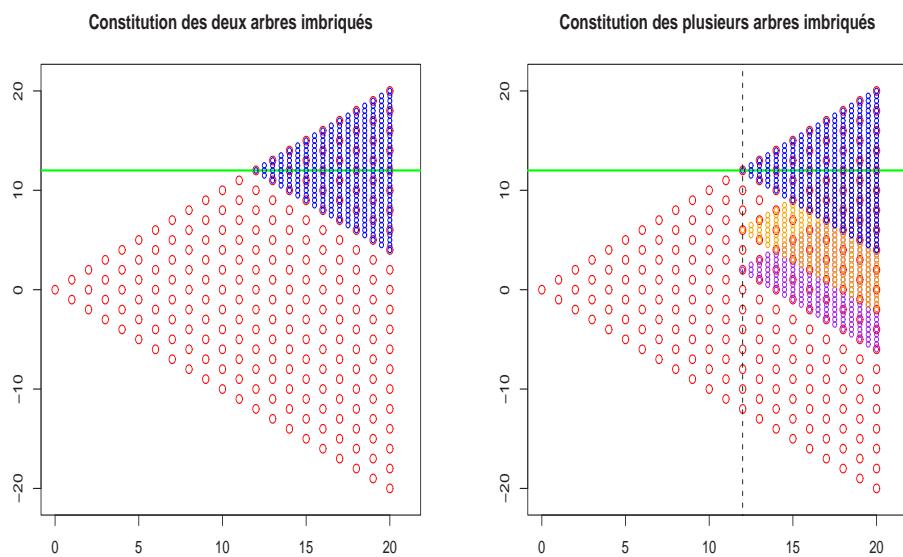


Figure 39: Valorisation d'un call, à la monnaie, et très en dehors de la monnaie.

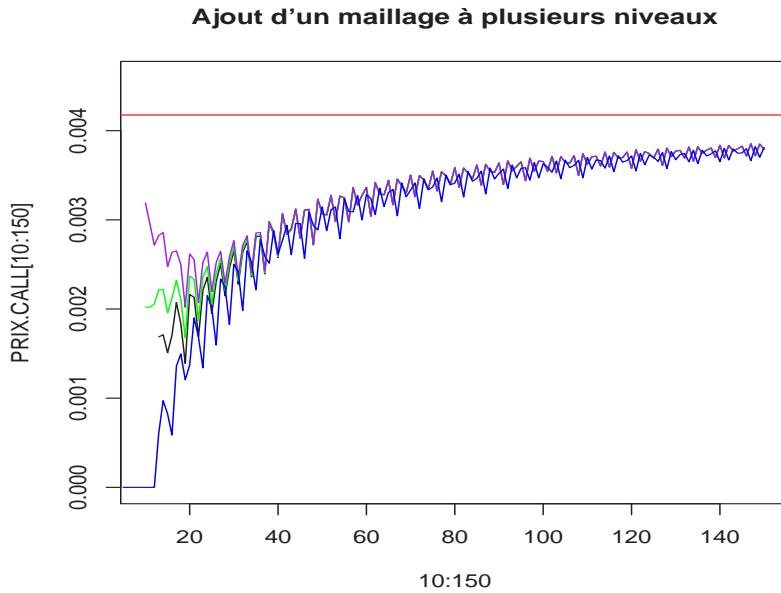


Figure 40: Options très en dehors de la monnaie.

A un point τ de l'arbre (correspondant à une date t et un état x donnés), considère un second “*processus*” pouvant prendre K valeurs,

$$Y(x, t, 1), Y(x, t, 2), \dots, Y(x, t, K).$$

Un arbre épais est alors le produit cartésien de l'arbre classique \mathcal{T} et de l'ensemble des valeurs possible du second processus, i.e. $\mathcal{D} = \{1, 2, \dots, K\}$. Aussi, chaque $\mathcal{T} \times \{k\}$ est un arbre classique. On notera \mathcal{T}^* l'arbre épais ainsi construit.

A chaque noeud $(\tau = (x, t), k)$ de cet arbre $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \times \mathcal{D}$, le processus (X, Y) prend la valeur $(x, Y(x, t, k))$.

6.24 Les options lookback

Une première idée peut être non plus de construire l'arbre du sous-jacent, mais de le normaliser. A chaque date t , on ne représente plus les différentes valeurs de S_t , mais

$$S'_t = \frac{\max\{S_u, u \in [0, T]\}}{S_t},$$

et on construit l'arbre associé, comme sur la Figure 41.

6.25 Les options asiatiques

L'utilisation d'un arbre binomial n'est a priori pas naturelle pour valoriser une option asiatique, par exemple de payoff $\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+$ (call asiatique à strike fixe). Pour deux méthodes sont possibles (FORSYTH, VETZAL & ZVAN (1998)).

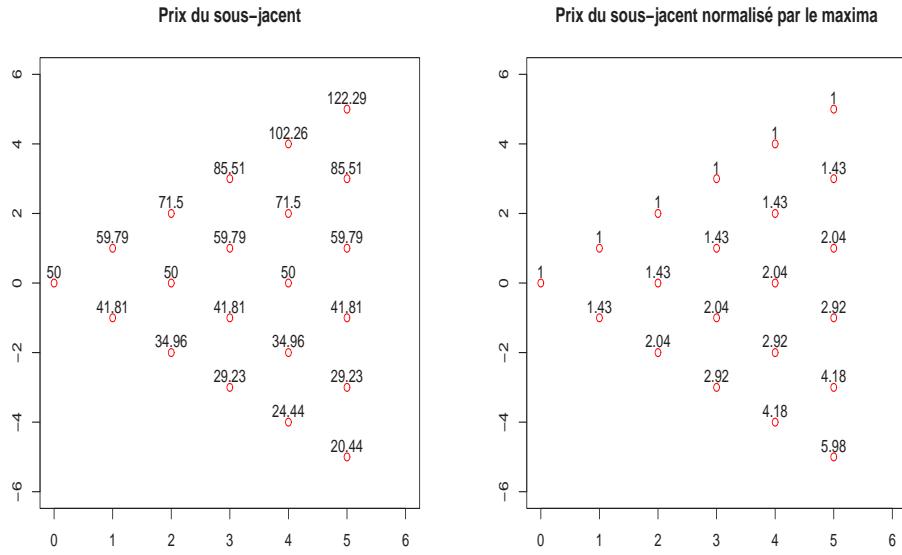


Figure 41: Réécriture de l’arbre du sous-jacent, en normalisant par le maximum observé entre 0 et t .

- la méthode **forward shooting grid** de BARRAQUAND & PUDET (1996)

On discrétise pour cela deux variables: le cours du sous jacent S et la moyenne du sous jacent A . On pose $\Delta S = \sigma\sqrt{\Delta t}$ et $\Delta A = \rho\Delta S$, où σ est la volatilité du sous-jacent, et ρ un paramètre liant la discrétisation du sous-jacent à celle de la moyenne (**quantization parameter**). On va supposer que $1/\rho \in \mathbb{N}$. Avec ces notations, on va discrétiser les valeurs du processus en temps, mais aussi en espace: $S_{n,j} = S_0 \exp(j\Delta S)$ pour $n = 0, \dots, m$ et $j = -n, -n + 1, \dots, n - 1, n$, et $A_{n,k} = S_0 \exp(k\Delta A)$, où k prend des valeurs entre $-n/\rho$ et n/ρ .

Conformément à la construction de l’arbre binomial pour le prix du sous-jacent, $S_{j,n}$ passe soit à $S_{j+1,n+1}$ soit à $S_{j-1,n+1}$ entre les dates t_n et t_{n+1} , avec les probabilités respectives p et $1 - p$. De manière analogue, $A_{n,k}$ passe soit à A_{n+1,k^+} , soit à A_{n+1,k^-} , en fonction du fait que le sous-jacent est monté ou descendu, c’est à dire

$$A_{n+1,k^\pm} = A_{n,k} + \frac{(S_{n+1,j\pm 1} - A_{n,k})}{n + 2},$$

en utilisant la formule de mise à jour de la moyenne. Dans le cas qui nous intéresse, notons que

$$k^\pm = \text{Partie entière} \left(\frac{\log A_{n+1,k^\pm}}{\rho\Delta S} \right).$$

On calcule alors le prix de l’option, $C_{j,k,n} = C(S_{n,j}, A_{n,k}, n\Delta t)$ atteind par l’option à la date $n\Delta t$, lorsque le prix du sous-jacent est en $S_{n,j}$ et la moyenne du prix du sous-jacent entre 0 et $n\Delta t$ vaut $A_{n,k}$. Si p est la probabilité risque neutre, i.e.

$$p = \frac{\exp(r\Delta t) - \exp(-\sigma\sqrt{\Delta t})}{\exp(\sigma\sqrt{\Delta t}) - \exp(-\sigma\sqrt{\Delta t})}.$$

- la méthode de **HULL & WHITE (1993)**

Dans la méthode précédante, la discrétisation en A se faisait avec un pas de temps quadratique en fonction du temps. On suppose ici qu'elle est linéaire. Au lieu de considérer $A_{n,k} = S_0 \exp(k\Delta S) = S_0 \exp(k\sigma\sqrt{\Delta t})$, on considère ici $A_{n,k} = S_0 \exp(k\Delta t)$. Cette méthode convergera alors beaucoup plus rapidement.

7 Valorisation en temps continu

7.1 Le modèle d'**HARRISON & PLISKA (1981)**

Le résultat fondamental de HARRISON & PLISKA (1981) est de montrer que s'il existe une mesure de probabilité sous laquelle tous les processus de prix actualisés des titres sont des martingales, alors, à partir de cette mesure, il est possible de construire un ensemble de prix contingents cohérents avec les prix de marché. Et réciproquement, s'il existe un tel ensemble de prix, alors il est possible d'en déduire une mesure de probabilité sous laquelle les processus de prix actualisés sont des martingales. Ce résultat établit une correspondance entre ces deux notions, sans pour autant statuer sur l'existence d'une telle mesure.

En fait, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une telle mesure martingale est l'absence d'opportunité d'arbitrage.

7.2 Les évolutions des cours

On considère deux actifs en temps continu, une action **risquée** de prix S_t à l'instant t , et un actif **sans risque** de prix S_t^0 à l'instant t .

On suppose que l'évolution de S_t^0 est régie par l'équation différentielle

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \text{ où } r > 0.$$

r est le taux d'intérêt (instantané).

On suppose que l'évolution de S_t est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \text{ où } \mu, \sigma > 0,$$

où $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un mouvement brownien standard. Cette équation se réécrit

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s.$$

7.3 Résolution et formule d'Ito

La formule d'Ito permet de différencier des applications $t \mapsto g(W_t)$ où g est deux fois continûment dérivable.

Exemple 27. *Le calcul différentiel usuel ne marche pas ici. Rappelons que si g est dérivable et nulle en 0,*

$$g(x)^2 = 2 \int_0^x g(s)g'(s)ds = 2 \int_0^x g(s)dg(s).$$

Si $g(x) = x^2$, on écrirait alors $W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s$. Or $(\int_0^t W_s dW_s)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale, donc si l'égalité précédante était vraie, $(W_t^2)_{t \in \mathbb{R}^+}$ serait également une martingale. Or une martingale positive nulle en 0 est forcément nulle. Donc $W_t^2 = 0$.

En fait le calcul différentiel se fait de la façon suivante,

Définition 28. Soit $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ -mouvement brownien. Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus d'Ito s'il peut s'écrire

$$X_t = x_0 + \int_0^t A_s ds + \int_0^t B_s dW_s, \text{ pour } t \in [0, T],$$

où $X_0 = x_0$ presque sûrement, $(A_t)_{t \in [0, T]}$ et $(B_t)_{t \in [0, T]}$ sont des processus $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ -adaptés tels que

$$\int_0^T |A_s| ds < \infty \text{ et } \int_0^T |B_s|^2 ds < \infty.$$

On notera parfois simplement $dX_t = A_t dt + B_t dW_t$.

Théorème 29. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ -processus d'Ito, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment derivable, alors pour $t \in [0, T]$,

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s, \text{ pour } t \in [0, T],$$

$$\text{où } \langle X, X \rangle_s = \int_0^s B_t^2 dt, \text{ et où}$$

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(A_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) B_s dW_s.$$

Théorème 30. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ -processus d'Ito, et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment derivable en x et dérivable en t , alors pour $t \in [0, T]$,

$$f(t, X_t) = f(0, x_0) + \int_0^t \frac{\partial f(s, X_s)}{\partial t} ds + \int_0^t \frac{\partial f(s, X_s)}{\partial x} dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f(s, X_s)}{\partial x^2} d\langle X, X \rangle_s.$$

La résolution dans le cas du modèle de BLACK & SCHOLES (1973) se fait en posant $Y_t = \log(S_t)$. $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ étant un processus d'Ito, on applique (formellement) la formule d'Ito à $f(x) = \log(x)$, et donc

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{S_s^2} \sigma^2 S_s^2 ds.$$

Cette dernière équation se réécrit

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \int_0^t \sigma dW_t,$$

soit

$$Y_t = \log(S_t) = \log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t,$$

c'est à dire, en prenant l'exponentielle,

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right).$$

Remarque 31. La fonction \log n'était pas définie en 0, la formule d'Ito n'est ici utilisée que "formellement". Il convient alors de vérifier que ce processus est effectivement solution de l'équation différentielle stochastique. Notons $S_t^* = g(t, W_t)$ où $g(t, x) = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x)$. La formule d'Ito donne

$$g(t, W_t) = g(0, W_0) + \int_0^t \frac{\partial g(s, W_s)}{\partial s} ds + \int_0^t \frac{\partial g(s, W_s)}{\partial x} dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g(s, W_s)}{\partial x^2} d\langle W, W \rangle_s,$$

or $\langle W, W \rangle_t = t$ donc finalement

$$g(t, W_t) = S_0 + \int_0^t S_s \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t S_s \sigma^2 ds.$$

Théorème 32. Soient μ, σ deux réels, $T > 0$ et $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien standard. Il existe un unique processus d'Ito $(S_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ qui vérifie

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int \sigma S_s dW_s, \quad (4)$$

et ce processus est donné par

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right). \quad (5)$$

Notons que $(S_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ vérifie une équation de type (6) si et seulement si $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ (où $Y_t = \log(S_t)$) est un mouvement brownien.

7.4 Quelques rappels sur les changements de probabilité

Rappelons que qu'une probabilité \mathbb{Q} est **absolument continue** par rapport à \mathbb{P} , noté $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{P}$ si

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{A}, \text{ si } \mathbb{P}(A) = 0 \text{ alors } \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Le théorème de Radon Nikodyn dit que si \mathbb{Q} est absolument continue par rapport à \mathbb{P} , alors il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives ou nulles telle que

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{A}, \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(A),$$

on parle alors de **densité** de \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P} , notée $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$.

On parlera de probabilités **équivalentes**, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ si $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{P}$ et $\mathbb{P} \preceq \mathbb{Q}$, ou de façon équivalente $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$.

Ce changement de mesure peut être intéressant sur les processus de diffusion. Considérons une diffusion de la forme $dS_t = adt + bdW_t$, où a et b sont des constantes, et (W_t) un mouvement brownien, sous \mathbb{P} . Est-il possible de faire un changement de probabilité, de telle sorte que ce processus puisse s'écrire $dS_t = bd\tilde{W}_t$, où (\tilde{W}_t) est un (autre) mouvement brownien ? Une autre lecture est: peut-on passer d'une diffusion avec drift à une martingale par un changement de mesure ?

La seule solution est que (\tilde{W}_t) satisfasse $d\tilde{W}_t = dW_t - a/bdt$. La question que l'on se posait est alors: est-il possible de faire un changement de probabilité pour que le processus (\tilde{W}_t) soit un mouvement brownien ?

En fait, (\tilde{W}_t) est un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q} , où

$$d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}, \text{ i.e. } Z_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

la dérivée de Radon-Nikodym est telle que

$$Z_t = \exp\left(-\frac{a}{b}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 t\right).$$

En particulier

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \times Z_T) \text{ pour tout } X.$$

Le théorème de Girsanov permet de généraliser ce qui vient d'être fait, c'est à dire, en changeant de probabilité, d'obtenir des martingales,

Théorème 33. Soit $(S_t)_{t \in [0, T]}$ un processus vérifiant $\int_0^T S_t^2 dt < \infty$ presque sûrement, et tel que

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t S_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t S_s^2 s\right) \quad (6)$$

soit une filtration. Sous la probabilité \mathbb{Q} , de densité L_T par rapport à \mathbb{P} , le processus $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ défini par $Y_t = W_t + \int_0^t S_s ds$ est un mouvement brownien.

Proof. Karatzas & Shreve (1988). □

Dans le modèle de BLACK & SCHOLES (1973), il est possible d'utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe une probabilité équivalente à \mathbb{P} sous laquelle le processus de prix actualisé $(\tilde{S}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, défini par $\tilde{S}_t = e^{-rt} \cdot S_t$, est une martingale.

$$d\tilde{S}_t = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t = \tilde{S}_t [(\mu - r)dt + \sigma dW_t],$$

et en notant $\tilde{W}_t = W_t + (\mu - r)t\sigma$, on peut écrire

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma d\tilde{W}_t.$$

D'après le théorème de Girsanov, il existe un probabilité \mathbb{Q} , équivalent à \mathbb{P} sous laquelle $(\tilde{W}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien standard. Aussi, on peut montrer que sous la probabilité \mathbb{Q} , $(\tilde{S}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale, et

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right).$$

7.5 Application au pricing d'options

Considérons un call: en notant $g(x) = (x - K)_+$, le payoff s'écrit $Z = g(S_T)$.

L'idée central pour valoriser les options est celle de portefeuille de **réplique**. Considérons une stratégie $(\alpha_t^0, \alpha_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, la valeur du portefeuille associée est $V_t(\alpha) = \alpha_t^0 S_t^0 + \alpha_t S_t$.

En temps discret, on dira qu'une stratégie $(\alpha_t^0, \alpha_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est **autofinancée** si

$$V_{t+1}(\alpha) - V_t(\alpha) = \alpha_{t+1}^0 (S_{t+1}^0 - S_t^0) + \alpha_{t+1} (S_{t+1} - S_t),$$

dont la version en temps continu est alors

$$dV_t(\alpha) = \alpha_t^0 dS_t^0 + \alpha_t dS_t.$$

Cette dernière relation s'écrit plus généralement

$$\alpha_t^0 S_t^0 + \alpha_t S_t = \alpha_0^0 S_0^0 + \alpha_0 S_0 + \int_0^t \alpha_s^0 S_s^0 + \int_0^t \alpha_s S_s \text{ pour tout } s \in [0, T].$$

On rajoutera également l'hypothèse technique $\int_0^T |\alpha_t^0| dt + \int_0^T \alpha_t^2 dt < \infty$.

On notera que la stratégie est autofinancée si la valeur actualisée du portefeuille associé s'écrit

$$\tilde{V}_t(\alpha) = V_0(\alpha) + \int_0^t \alpha_s d\tilde{S}_s \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

La stratégie sera **admissible** si en plus la valeur actualisée du portefeuille associé, $\tilde{V}_t(\alpha) = \alpha_t^0 + \alpha_t \tilde{S}_t$ est positive et que $\sup_{t \in [0, T]} \{\tilde{V}_t\}$ est de carré intégrable. On dire enfin que l'option est répliqueable s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'échéance est la même que l'option.

Théorème 34. *Dans le modèle de BLACK & SCHOLES (1973), considérons une option définie par un payoff Z , positif, \mathcal{F}_T mesurable et de carré intégrable sous la probabilité \mathbb{Q} . La valeur est alors*

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)} Z | \mathcal{F}_t).$$

Proof. On suppose qu'il existe une stratégie permettant de répliquer l'option. Pour tout $t \in [0, T]$, $V_t = \alpha_t^0 S_t^0 + \alpha_t S_t$, soit, en valeur actualisée,

$$\tilde{V}_t = \alpha_t^0 + \alpha_t \tilde{S}_t = V_0 + \int_0^t \alpha_s d\tilde{S}_s = V_0 + \int_0^t \alpha_u \sigma \tilde{S}_s dW_s.$$

Aussi, \tilde{V}_t s'écrit comme une intégrale stochastique par rapport à $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$, et donc, sous \mathbb{Q} , $(\tilde{V}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une martingale de carré intégrable. Donc pour tout $t \in [0, T]$,

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)} Z | \mathcal{F}_t).$$

La construction d'une telle stratégie se trouve dans LAMBERTON & LAPEYRE (1997). L'idée étant d'écrire la martingale $M_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT} Z | \mathcal{F}_t)$ sous la forme $M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s$ pour tout t (théorème de représentation des martingales), puis de considérer $\alpha_t = K_t / (\sigma \tilde{S}_t)$, et $\alpha_t^0 = M_t - \alpha_t \tilde{S}_t$. \square

Nous avions vu dans un paragraphe précédent que

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right),$$

aussi, si le payoff de l'option s'écrit sous la forme $(S_T - K)_+$ (call européens),

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t),$$

qui peut s'écrire

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} \left(S_t \exp(r(T-t)) \exp \left(\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \right) - K \right)_+ | \mathcal{F}_t \right).$$

La variable S_t étant \mathcal{F}_t -mesurable, sous \mathbb{Q} , $W_T - W_t$ est alors indépendante de \mathcal{F}_t . Aussi, on notera $V_t = H(t, S_t)$ où

$$H(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} \left(x - \exp(r(T-t)) \exp \left(\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \right) \right)_+ \right),$$

soit

$$H(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(x \exp \left(\sigma \sqrt{T-t} Z - \sigma^2 Z/2 - K e^{-r(T-t)} \right) \right),$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ car, sous \mathbb{Q} , $W_T - W_t$ suit une loi $\mathcal{N}(0, T-t)$.

En posant

$$d_1(x) = \frac{\log \left(\frac{x}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \text{ et } d_2(x) = d_1(x) - \sigma \sqrt{T-t} n$$

on peut alors écrire

$$H(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\left(x \exp \left(\sigma \sqrt{T-t} Z - \sigma^2 Z/2 \right) - K e^{-r(T-t)} \right) \mathbb{I}_{Z+d_2(x) \geq 0} \right),$$

soit

$$H(t, x) = \int_{-\infty}^{d_2(x)} \left(x \exp \left(\sigma \sqrt{T-t} Z - \sigma^2 Z/2 \right) - K e^{-r(T-t)} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) dz.$$

En décomposant comme différence de deux intégrale, puis en considérant le changement de variable $y = z + \sigma \sqrt{T-t}$, on écrit

$$H(t, x) = x \Phi(d_1(x)) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(x)),$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque 35. De manière réciproque, si on connaît le prix d'une option sur le marché, à partir du prix "théorique" obtenu à l'aide du modèle de BLACK & SCHOLES, il est possible d'en déduire une volatilité dite **volatilité implicite** afin que les deux coïncident.

8 Approche par les équations aux dérivées partielles

8.1 Petit rappel sur la formule d'Ito

Rappelons que le processus de diffusion suivi par le sous-jacent est $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, et qu'il existe un actif sans risque, de rendement r , dont la dynamique du prix est donnée par un processus de la forme suivante, $dS_t^0 = r S_t^0 dt$.

Le lemme d'Ito nous dit que, plus généralement, si

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t,$$

alors si $X_t = g(S_t)$

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(\frac{\partial g(x, t)}{\partial x} a + \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} b dW_t \\ &= \alpha(S_t, t)dt + \beta(S_t, t)dW_t, \end{aligned}$$

Aussi, $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ suit également un processus d'Ito, dont le drift est α et dont la variance est β . Dans le cas particulier du modèle de BLACK & SCHOLES, pour tout transformation g dérivable

$$dX_t = \left(\frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \mu S_t + \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} \sigma S_t dW_t.$$

8.2 Une première approche, à partir des arbres binomiaux

Nous avons noté qu'il était possible de construire un arbre binomial afin de valoriser l'option, et que pour le prix du sous-jacent était multiplié, entre chaque date, soit par u , soit par d . Un développement limité permet d'obtenir

$$u \sim 1 + \sigma \sqrt{\delta t} \text{ et } d \sim 1 - \sigma \sqrt{\delta t},$$

où δt est le temps entre les deux dates.

Si on note C la valeur d'un call européen, et C^+ et C^- le prix de l'option à la date $t + \delta t$, alors

$$C_{t+\delta t}^+ = C(uS_t, t + \delta t) \sim C(S_t, t) + \sigma \sqrt{\delta t} S_t \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \delta t S_t^2 \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} + \delta t \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t},$$

et par un raisonnement similaire,

$$C_{t+\delta t}^- = C(dS_t, t + \delta t) \sim C(S_t, t) - \sigma \sqrt{\delta t} S_t \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \delta t S_t^2 \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} + \delta t \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t}.$$

On notera alors que

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= \frac{C_{t+\delta t}^+ - C_{t+\delta t}^-}{u - d} + \frac{uC_{t+\delta t}^- - dC_{t+\delta t}^+}{(1 + r\delta t)(u - d)} \\ &= \frac{2\sigma \sqrt{\delta t} S_t}{2\sigma \sqrt{\delta t}} \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S} + \frac{(1 + \sigma \sqrt{\delta t})C^- - (1 - \sigma \sqrt{\delta t})C^+}{(1 + r\delta t)2\sigma \sqrt{\delta t}}. \end{aligned}$$

En réarrangeant, on obtient

$$\begin{aligned} (1 + r\delta t)2\sigma \sqrt{\delta t} C(S_t, t) &= 2\sigma \sqrt{\delta t} C(S_t, t)(1 + r\delta t) \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S} - \left(2\sigma \sqrt{\delta t} S_t \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S} \right) \\ &\quad + 2\sigma \sqrt{\delta t} \left(C(S_t, t) + \frac{1}{2} \delta t S_t^2 \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S^2} + \delta t \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

qui peut, au final, se simplifier sous la forme

$$\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S^2} + r S_t \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S} - r C(S_t, t) = 0.$$

8.3 Une seconde approche, “avec mes mains”

La version discrétisée de ces équations est

$$\Delta S_t = \mu S_t \delta t + \sigma S_t \Delta W_t,$$

et, si $X_t = g(S_t, t)$

$$\Delta X_t = \Delta g = \left(\frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \mu S_t + \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \delta t + \frac{\partial g}{\partial x} \sigma S_t \Delta W_t.$$

Considérons le portefeuille constitué de $\alpha = \partial g(X_t, t)/\partial x$ actions, en position longue, et d'une option en position courte. La valeur du portefeuille est

$$\Pi = -g + \frac{\partial g}{\partial S} S$$

et donc la variation de la valeur du portefeuille sur un court intervalle de temps δt s'écrit

$$\Delta \Pi = -\Delta g + \frac{\partial g}{\partial S} \Delta S.$$

En utilisant les expressions de Δg et de ΔS , notons que

$$\Delta \Pi = \left(-\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t.$$

Comme il n'y a plus de terme aléatoire, cela signifie que pendant un instant très court (δt) le portefeuille est sans risque. Aussi, par absence d'opportunité d'arbitrage,

$$\Delta \Pi = r \Pi \delta t$$

où r désigne le taux sans risque. Par substitution

$$\left(-\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t = r \left(g - \frac{\partial g}{\partial S} S \right) \delta t$$

c'est à dire

$$\frac{\partial g}{\partial t} + r S \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = rg.$$

8.4 De l'équation de BLACK & SCHOLES à l'équation de la chaleur

Proposition 36. *Le prix d'une option européen, de payoff $h(S_T)$ à maturité T vaut, à la date $t = 0$, $g(0, S_0)$ où g est la solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial g}{\partial t} + r S \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = rg, \quad (7)$$

avec les conditions de bords $g(T, S_T) = h(S_T)$. Notons que le portefeuille de réplication est obtenu à partir de $\partial g(0, S_0)/\partial x$ actif risqué. Réciproquement, si l'équation aux dérivées partielles (7) admet une solution dont la dérivée en x est bornée, le prix de l'option en $t = 0$ est alors $g(0, S_0)$.

Cette équation est dite **parabolique** (à coefficients variables). On peut noter que la solution est invariante par la transformation $S \rightarrow hS$ pour tout h : g est alors homogène en x , de degré 0. On peut alors essayer le changement de variable $y = \log x - \log K$, soit $dy = dx/x$. Alors

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = x \frac{\partial g}{\partial x},$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial g}{\partial y} + x^2 \partial^2 g \partial x^2.$$

En posant $s = T - t$, l'équation de BLACK & SCHOLES (1973) devient

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial g}{\partial y} - rg.$$

En introduisant la fonction $u = g/K$, de façon équivalente, l'équation aux dérivées partielles s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial y} - ru, \quad (8)$$

où les conditions de bords sont, dans le cas d'un call,

$$u(y, 0) = \max\{e^y - 1, 0\}, u(-\infty, s) = 0 \text{ et } u(x, s) \sim e^x - e^{-rs} \text{ quand } x \rightarrow \infty,$$

pour tout $s \in [0, T]$.

L'équation 8 est alors de la forme (en changeant les notations, i.e. $y \rightarrow x$ et $s \rightarrow 2t/\sigma^2$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + bu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La première partie $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x}$ est appelée **partie d'advection** (ou d'avection, "advection part"), la partie bu est appelée **terme source**, et enfin, la partie de droite $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est le **terme de diffusion**. Notons que le changement de temps a permis de faire disparaître le facteur du facteur de diffusion.

On note que le terme d'advection s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u$$

qui peut être vu comme la dérivée suivant la direction

$$\frac{dx}{dt} = a,$$

également appelée **courbe caractéristique**. Ceci suggère alors le changement de variable $z = t + ax$, de telle sorte que l'équation aux dérivées partielles se réécrit

$$\frac{\partial u}{\partial z} + bv = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Le terme de gauche $\frac{\partial u}{\partial z} + bv$ laisse à penser que u doit avoir un comportement proche de $\exp(bz)$, le long de la courbe caractéristique. Aussi, on peut penser faire le changement de variable $v = e^{bz}u$, qui vérifie alors l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

qui correspond à l'équation de la chaleur. Rappelons que la forme générale peut s'écrire sous la forme

$$v(z, t) = \int \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4t}\right) v_0(x) dx,$$

où v_0 est la condition de bord en temps, i.e.

$$v_0(x) = \max \left\{ \exp\left(\frac{(c+1)x}{2}\right) - \exp\left(\frac{(c-1)x}{2}\right), 0 \right\}.$$

8.5 Générateur de la diffusion et formule de Feynman-Kac

En reprenant les notations de la section précédante, le calcul de V_t est équivalant au calcul de la fonction $H(t, x)$.

Formellement, on introduit la notion de **générateur infinitésimal** de la diffusion.

Proposition 37. Soit $(S_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ solution de $dS_t = b(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable, à dérivées bornées, et A l'opérateur qui à f associe

$$(Af)(x) = \frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + b(x) \frac{df(x)}{dx}.$$

Alors le processus $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ défini par $M_t = f(X_t) - \int_0^t (Af)(X_s)ds$ est une \mathcal{F}_t -martingale.

Proof. Utilisation de la formule d'Ito. □

Dans le cas du modèle de BLACK & SCHOLES (1973), $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$, et le générateur infinitésimal associé est

$$(Af)(x) = \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + rx \frac{df(x)}{dx}.$$

On posera plus généralement, pour toute fonction $g : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(Ag)(t, x) = (Ag)(x)$. Un calcul direct permet de montrer que le prix du call $H(t, x) = x\Phi(d_1(x)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(x))$ est alors solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} + (Ag)(t, x) - rg(t, x) = 0 \text{ pour tout } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+, \quad (9)$$

avec la condition de bord $g(T, x) = (x - K)_+$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

La valorisation d'un call européen est alors équivalent à la résolution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} + rx \frac{\partial g(x)}{\partial x} - rg(t, x) = 0, \quad (10)$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$, avec la condition de bord $g(T, x) = (x - K)_+$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Formellement, ce lien entre le prix d'une option à partir d'une équation différentielle stochastique et une équation aux dérivées partielles se fait à l'aide du Théorème de **Feynman-Kac**.

Théorème 38. Considérons une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \mu(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(t, x)^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0,$$

dont on se donne la condition terminale de la forme $u(T, x) = h(x)$ pour tout x . Alors, sous des conditions de type Lipschitz pour μ et σ et de croissance polynomiale (KARATZAS & SHREVE

(1991) pour des conditions nécessaires et suffisantes) u peut s'écrire sous la forme d'une espérance conditionnelle,

$$u(t, x) = \mathbb{E}(h(X_T)|X_t = x),$$

où $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est un processus d'Ito, dont la diffusion est donnée par

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

dont la condition initiale à la date t est $X_t = x$. Et réciproquement.

Pour montrer que si $u(t, x) = \mathbb{E}(h(X_T)|X_t = x)$ où (X_t) suit une diffusion de la forme est $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ alors u est solution d'une équation aux dérivées partielles est de montrer que $Z_t = u(t, X_t)$ est une martingale. En effet, pour $s \geq t$, si on note $\mathbb{E}_t(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot|\mathcal{F}_t)$, alors $Z_s = \mathbb{E}_s(h(X_T))$ et donc

$$\mathbb{E}_t(Z_s) = \mathbb{E}_t(\mathbb{E}_s(h(X_T))) = \mathbb{E}_t(\mathbb{E}_s(h(X_T))) = Z_t,$$

comme (X_t) est un processus Markovien. En utilisant la formule d'Ito, on obtient que

$$dZ_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mu(t, X_t) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(t, X_t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(t, X_t) \frac{\partial u}{\partial x} dW_t.$$

Or comme (Z_t) est une martingale, alors nécessairement le drift est nul.

8.6 Généralisation en dimension d

La Proposition 36 se généralise dans les cas d'une option sur plusieurs sous-jacents. Supposons que l'on s'intéresse à une option européenne, de maturité T , offrant un payoff $h(\mathbf{S}_T)$, où les prix des sous-jacents sont donnés par les diffusions suivantes,

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n,$$

où $(\mathbf{W}_t)_{t \geq 0} = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^n)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien (standard) en dimension n , de matrice de corrélation $\Sigma = [\rho_{i,j}]$ (on parlera aussi de corrélation instantanée entre dW_t^i et dW_t^j).

Proposition 39. *Le prix d'une option européen, de payoff $h(\mathbf{S}_T)$ à maturité T vaut, à la date $t = 0$, $g(0, \mathbf{S}_0)$ où g est la solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial g}{\partial t} + r \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma^2 x_i x_j \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = rg, \quad (11)$$

avec les conditions de bords $g(T, \mathbf{S}_T) = h(\mathbf{S}_T)$. Notons que le portefeuille de réplication est obtenu à partir de $\partial g(0, \mathbf{S}_0)/\partial x_i$ investie dans le i ème actif risqué. Réciproquement, si l'équation aux dérivées partielles 11 admet une solution dont la dérivée en x_i est bornée pour tout i , le prix de l'option en $t = 0$ est alors $g(0, \mathbf{S}_0)$.

Proof. L'idée de la preuve est la suivante: on suppose que $dS_t^1 = \mu_1 S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^1$ pour le premier actif, et $dS_t^2 = \mu_2 S_t^2 + \sigma_2 S_t^2 dW_t^2$ pour le second. Si g est suffisamment régulière, on applique la formule de Taylor à $f(S_t^1 + ds_1, S_t^2 + ds_2)$, à savoir

$$\begin{aligned} f(S_t^1 + ds_1, S_t^2 + ds_2) &= f(S_t^1, S_t^2) + ds_1 \frac{\partial f(S_t^1, S_t^2)}{\partial x} + ds_2 \frac{\partial f(S_t^1, S_t^2)}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{2} ds_1^2 \frac{\partial^2 f(S_t^1, S_t^2)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} ds_2^2 \frac{\partial^2 f(S_t^1, S_t^2)}{\partial y^2} + ds_1 ds_2 \frac{\partial^2 f(S_t^1, S_t^2)}{\partial x \partial y} + \dots \end{aligned}$$

En substituant à $ds_i \mu_i S_t^i dt + \sigma_i S_t^i dW_t^i$, on en déduit

$$\begin{aligned} df &= \sigma_1 S_t^1 \frac{\partial f(S_t^1, S_t^2)}{\partial x} dW_t^1 + \sigma_2 S_t^2 \frac{\partial f(S_t^1, S_t^2)}{\partial y} dW_t^2 \\ &+ \mu_1 S_t^1 \frac{\partial f(S_t^1, S_t^2)}{\partial x} dt + \mu_2 S_t^2 \frac{\partial f(S_t^1, S_t^2)}{\partial y} dt \\ &+ \frac{1}{2} \sigma_1^2 (S_t^1)^2 \frac{\partial^2 f(S_t^1, S_t^2)}{\partial x^2} (dW_t^1)^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 (S_t^2)^2 \frac{\partial^2 f(S_t^1, S_t^2)}{\partial y^2} (dW_t^2)^2 \\ &+ \sigma_1 \sigma_2 S_t^1 S_t^2 \frac{\partial^2 f(S_t^1, S_t^2)}{\partial x \partial y} dW_t^1 dW_t^2 + O((dt)^{3/2}). \end{aligned}$$

Lorsque $dt \rightarrow 0$ on passe des différences finies aux dérivées partielles. \square

8.7 Equation et conditions de bord

Rappelons que d'après la formule de Feynman-Kac il est équivalent de considérer

- une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \mu(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(t, x)^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0,$$

et une condition terminale de la forme $u(T, x) = h(x)$ pour tout x ,

- voire u comme une esérance conditionnelle,

$$u(t, x) = \mathbb{E}(h(X_T) | X_t = x),$$

où $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est un processus d'Ito, dont la diffusion est donnée par

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t,$$

dont la condition initial à la date t est $X_t = x$.

Schématiquement

équation aux dérivées partielles \leftrightarrow équation de diffusion,

condition de bord \leftrightarrow forme du payoff.

8.8 Options asiatiques, avec moyenne arithmétique

Considérons un call européen, dont le payoff à la maturité T compare non pas S_T à K , mais la moyenne arithmétique sur la période $[0, T]$ à K , i.e.

$$\max \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K, 0 \right\}.$$

Notons alors $I_t = \int_0^t S_u du$. L'idée est alors de poser $\mathbf{Z}_t = (t, S_t, I_t)'$ et de faire du calcul d'Ito sur ce processus vectoriel. Notons que

$$d\mathbf{Z}_t = \begin{pmatrix} dt \\ dS_t \\ dI_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \mu S_t \\ S_t \end{pmatrix}}_{\alpha(t)} dt + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma S_t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\beta(t)} dW_t.$$

Si g est une fonction deux fois continument dérivable en espace, une fois en temps, $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de la forme $g(\mathbf{z}) = \gamma(t, \mathbf{x}) = \gamma(t, x, y)$. La formule d'Ito donne

$$dg(\mathbf{z}_t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g(\mathbf{z}_t)}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 g(\mathbf{z}_t)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X^i, X^j \rangle_t.$$

Notons que sur la somme des 9 termes de la somme, seul le terme basé sur la dérivée seconde en la seconde composante (en x) est non nul. Aussi,

$$dg(\mathbf{z}_t) = \frac{\partial g(\mathbf{z}_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(\mathbf{z}_t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial g(\mathbf{z}_t)}{\partial I_t} S_t dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(\mathbf{z}_t)}{\partial S_t^2} dt,$$

qui peut également s'écrire, en notant non plus en x, y mais en S_t, I_t

$$dg(\mathbf{z}_t) = \left(\frac{\partial g(\mathbf{z}_t)}{\partial t} + \frac{\partial g(\mathbf{z}_t)}{\partial I_t} S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 g(\mathbf{z}_t)}{\partial S_t^2} dS_t \right) dt + \frac{\partial g(\mathbf{z}_t)}{\partial D_t} dS_t.$$

Aussi, on en déduit l'équation aux dérivées partielles suivie par g , à savoir

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} - rg + rS \frac{\partial g}{\partial S} = 0,$$

avec une condition de bord de la forme $C = g(T, S_T, I_T) = \max\{S_T - I_T/T, 0\}$. Par rapport à l'équation obtenue dans le cas d'un call européen, seul un terme en $\partial g/\partial I$ doit être rajouté.

En posant $R_t = I_t/S_t$, et $g(t, S_t, I_t) = h(t, R_t)$, on notera que

$$\frac{\partial g}{\partial t} = S \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \frac{\partial g}{\partial I} = \frac{\partial h}{\partial I} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial S} = h - R \frac{\partial h}{\partial R},$$

avec pour le terme de dérivée seconde

$$\frac{\partial^2 g}{\partial S^2} = \frac{R^2}{S} \frac{\partial^2 h}{\partial R^2}.$$

En substituant tous ces termes dans l'équation aux dérivées partielles précédente, on obtient

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 h(t, x)}{\partial x^2} + (1 - rx) \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} = 0,$$

avec comme condition de bord $h(T, x) = \max\{1 - x/T, 0\}$.

Une autre approche est la suivante: considérons une option de payoff $\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+$. Définissons le processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ défini par $X_0 = S_0 - K$ et $dX_t = q_t dS_t$, où $q_t = 1 - t/T$. Alors à la date terminale T ,

$$X_T = \int_0^T q_t dS_t + X_0 = \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T} \right) dS_t + S_0 - K = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K.$$

Le cas d'un strike flottant peut être dérivée de ce cas, où le stike était fixe. Pour une option de payoff $\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - KS_T \right)_+$, où définie le processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ par $X_0 = S_0(1 - K)$ et $dX_t = q_t dS_t$, où $q_t = 1 - K - t/T$. Alors à la date terminale T ,

$$X_T = \int_0^T q_t dS_t + X_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - KS_T.$$

Sous cette forme ces options sont un cas particulier des options vue comme un **traded account** (SHREVE & VECER (2000)). De manière générale, étant donnée une stratégie $(q_t)_{t \in [0, T]}$, que l'on supposera bornée $q_t \in [\alpha, \beta]$, on considère

$$dX_t^q = q_t dS_t + \mu(X_t^q - q_t S_t) dt, \text{ avec } X_0^q = X_0.$$

X_0 est vu comme une richesse initiale, et μ un taux sans risque ($\mu = r$ pour une stratégie auto-financante). Si l'on s'intéresse à une option européenne de payoff $(X_T^q)_+$, on peut chercher la stratégie optimale, au sens où l'on souhaite maximiser le prix de toutes les options,

$$V(t, S_t, X_t) = e^{-r[T-t]} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T^q | \mathcal{F}_t), \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Sous cette forme, il s'agit d'un problème de contrôle optimal stochastique. L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman permet alors de trouver l'équation aux dérivées partielles satisfait par le prix. Si on pose $Z_t^q = X_t^q / S_t$, alors $V(t, S_t, X_t) = S_t u(t, Z_t)$, où u vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (r - \mu)(q_t - z) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}(q_t - z)^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

avec la condition de bord $u(T, z) = z_+$.

En appliquant ce résultat (certes, bien au delà du programme que l'on s'était fixé), on peut montrer que dans le cas du call asiatique, l'équation au dérivée partielle est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + r(q_t - z) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}(q_t - z)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

avec la condition de bord $u(T, z) = z_+$. La fonction q_t dépend alors de ma forme du payoff (strike flottant ou pas).

8.9 Options lookback, sur maximum

On suppose ici que le payoff à maturité T s'écrit $\max\{M_T - S_T, 0\}$ où $M_t = \max\{S_u, u \in [0, t]\}$.

L'équation aux dérivées partielles est la même que pour un call européen usuel, $C = g(t, S_T, M_T)$, à savoir

$$\frac{\partial g}{\partial t} + rx \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - rg = 0,$$

pour $0 \leq x \leq M$, avec une condition de bord de la forme $g(T, x, M) = \max\{M - x, 0\}$, mais aussi des conditions en espace de la forme

$$g(t, 0, M) = e^{-r(T-t)} M \text{ et } \frac{\partial g}{\partial M} = 0 \text{ pour } x = M.$$

L'idée est de chercher une solution de la forme $g(t, x, M) = M^\alpha h(t, x/M)$. Notons $z = x/M$, les dérivées partielles qui interviennent dans l'équation s'écrivent alors

$$\frac{\partial g}{\partial t} = M^\alpha \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x} = M^{\alpha-1} \frac{\partial h}{\partial z} \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = M^{\alpha-2} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}.$$

En substituant dans l'équation aux dérivées partielles en g on obtient l'équation suivante en h ,

$$M^\alpha \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 M^{\alpha-2} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + rSM^{\alpha-1} \frac{\partial h}{\partial z} - rM^\alpha h = 0,$$

qui peut se simplifier sous la forme

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + rz \frac{\partial h}{\partial z} - rh = 0,$$

avec comme condition de bord

$$h(T, z) = M^{-\alpha} \left(M \cdot \max \left\{ 1 - \frac{S}{M}, 0 \right\} \right).$$

En particulier, si $\alpha = 1$, on obtient que $h(t, z) = \max\{1 - z, 0\}$. Quand à la condition de bord en espace $S = 0$, elle s'écrit

$$h(t, 0) = e^{-r(T-t)}.$$

Enfin, la condition de bord en $S = M$ elle donne, dans le cas où $\alpha = 1$,

$$\frac{\partial h}{\partial M} = h - z \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \text{ où } \frac{\partial h}{\partial z} = h.$$

.... dans le cas d'une option **floating lookback**, (de payoff $(M_T - S_T)$), $V(t, S, M) = Mu(t, S/M)$ où u vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + rz \frac{\partial u}{\partial z} - ru = 0, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

avec comme conditions de bords $u(T, z) = \phi(z)$, en temps, et en espace $\partial u / \partial z|_{z=1} = u(z, 1)$ pour tout $t > 0$.

8.10 Options avec coût de transaction

Considérons le modèle de LELAND (1985). Le prix vérifie alors l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} z^2 \left(\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \epsilon \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \right) - rz \frac{\partial u}{\partial z} + rv = 0,$$

pour $z \in [0, z_{\max}]$, $u(t, z_{\max}) = 0$ pour tout t , et $u(0, z) = (K - z)_+$ pour tout s .

8.11 Option pour un modèle à volatilité stochastique

On suppose ici que la volatilité est stochastique. Plus précisément, l'équation du diffusion du prix est de la forme

$$\begin{cases} dS_t = S_t \cdot (\mu dt + \sigma_t dW_t^1) \\ d\sigma_t = \sigma_t (p(S, \sigma, t) dt + q(S, \sigma, t)) dW_t^2, \end{cases}$$

où $(W_t^1)_{t \geq 0}$ et $(W_t^2)_{t \geq 0}$ sont deux browniens qui peuvent éventuellement être corrélés ($\langle dW_t^1 | dW_t^2 \rangle = \rho dt$).

L'équation aux dérivées partielles permettant de calculer le prix de tout actif contingent $V(S, s, t)$ se déduit de la formule d'Ito et de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

On constitue un portefeuille sans risque en achetant l'actif à évaluer et en se couvrant contre les variations du sous-jacent et de la volatilité, à l'aide d'une quantité $-\Delta$ d'actions et $-\Delta^*$ d'un autre actif contingent $V^*(S, s, t)$. On a besoin de **deux actifs** pour se couvrir, car on est en présence de deux sources de risque.

On considère alors le portefeuille

$$\Pi = V(S, s, t) - \Delta S - \Delta^* V^*(S, s, t).$$

En appliquant la formule d'Ito, on a

$$d\Pi = dV(S, s, t) - \Delta dS - \Delta^* dV^*(S, s, t)$$

où

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} < dS | dS > + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} < dS | d\sigma > + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} < d\sigma | d\sigma > + \frac{\partial V}{\partial S} ds + \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\sigma$$

$$dV = \frac{\partial V^*}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V^*}{\partial S^2} < dS | dS > + \frac{\partial^2 V^*}{\partial S \partial \sigma} < dS | d\sigma > + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V^*}{\partial \sigma^2} < d\sigma | d\sigma > + \frac{\partial V^*}{\partial S} ds + \frac{\partial V^*}{\partial \sigma} d\sigma,$$

où

$$< dS | dS > = \sigma^2 S^2 dt, < dS | d\sigma > = \rho \sigma S q dt \text{ et } < d\sigma | d\sigma > = \sigma^2 q^2 dt.$$

Pour constituer un portefeuille sans risque (et ainsi en déduire le prix par absence d'opportunité d'arbitrage), il faut que les termes en dS et $d\sigma$ s'annulent, ce qui donne

$$\Delta^* = \frac{\partial V / \partial \sigma}{\partial V^* / \partial \sigma} \text{ et } \Delta = \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta^* \frac{\partial V^*}{\partial S}.$$

Notons que la stratégie constituée ici consiste simplement à se couvrir contre le risque de volatilité (Vega) en vendant de l'actif V^* à une quantité égale au rapport des pertes encourues. Le risque ensuite de variation du sous-jacent (Delta), couru en détenant $V - \Delta^* V^*$ est alors couvert en vendant Δ actions.

Par absence d'opportunité d'arbitrage, $d\Pi = r\Pi dt$, d'où finalement, après réarrangement,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V^*}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma q S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + \frac{q^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V \right] \\ &= \frac{\partial V}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V^*}{\partial S^2} + \rho \sigma q S \frac{\partial^2 V^*}{\partial S \partial \sigma} + \frac{q^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V^*}{\partial \sigma^2} + r S \frac{\partial V^*}{\partial S} - r V^* \right] \end{aligned}$$

...

On en déduit alors l'équation au dérivée partielle suivante

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma q S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + \frac{q^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + (p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial \sigma} - r V = 0$$

où λ , qui est fonction de S , σ et t peut être interprété comme le [prix de marché de la volatilité](#).

Parmi les modèles de diffusion les plus usuels pour la volatilité, on retiendra

- le modèle de [Heston](#),

$$d\sigma_t^2 = \kappa(\theta - \sigma_t^2)dt + \zeta \sigma_t dW_t,$$

- le modèle de [Hull & White](#),

$$d\sigma_t^2 = \kappa \sigma_t^2 dt + \zeta \sigma_t^2 dW_t,$$

- le modèle de [Ornstein-Uhlenbeck](#),

$$d\sigma_t^2 = \kappa(\theta - \sigma_t^2)dt + \zeta dW_t,$$

Notons que le modèle de Heston combine un effet de retour à la moyenne, avec un terme interdisant toute valeur négative. θ s'interprète comme une volatilité à long terme.

8.12 Le modèle de Bates

8.13 Les formes d'équations vues jusqu'à présent

Pour les **options européennes**, le prix est obtenu est résolvant l'équation de la chaleur,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

avec une condition de bord en espace. La condition de bord en temps est liée à la forme du payoff.

Pour les **options lookback**, le prix est obtenu est résolvant l'équation

$$\frac{\partial u(x, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial x}, \text{ pour } |x| < z \text{ et } \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} = 0 \text{ si } |x| > z$$

avec une condition de bord en temps est liée à la forme du payoff.

Pour les **options sur moyenne**, le prix est obtenu est résolvant l'équation

$$\frac{\partial u(x, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, z, t)}{\partial x^2} + x \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z}$$

avec une condition de bord en temps est liée à la forme du payoff.

De manière très générale, pour les produits dérivés de type **européen**, le prix est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme suivante,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{a \frac{\partial u}{\partial S} + b \frac{\partial u}{\partial r} + c \frac{\partial u}{\partial I}}_{\text{convection}} + \underbrace{d \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + e \frac{\partial^2 u}{\partial S \partial r} + f \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}}_{\text{diffusion}} = ru - r \underbrace{\left[\int \eta(x) u(x) dx - u \right]}_{\text{saut convolution}},$$

où (S_t) et (r_t) sont des processus d'Ito, I une composante éventuellement aléatoire mais pas un processus, a, b, c, d, e et f sont (de manière générale) des fonctions de S_t, r_t, I et t , h est l'intensité du processus de sauts, et $\eta(\cdot)$ la densité des sauts.

9 Petits rappels d'analyse numérique

La plupart des méthodes que nous aborderons reposent sur les mêmes grands algorithmes, cherchant des valeurs précises (dans \mathbb{R} voire \mathbb{R}^n),

- trouver un vecteur \mathbf{x} tel que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où A et \mathbf{b} sont données,
- trouver des **zéro** de fonction: trouver \mathbf{x} tel que $f(\mathbf{x}) = 0$, ce qui équivaut à trouver un inverse, i.e. $\mathbf{x} = f^{-1}(0)$,
- trouver des **optimas** de fonction: trouver \mathbf{x}^* tel que $\mathbf{x}^* \in \operatorname{argmin}\{f(\mathbf{x})\}$,
- **interpoler** les fonctions: trouver $\boldsymbol{\omega}$ tel que $f(x) = \sum_{i \geq 0} \omega_i h_i(x)$, dans une base $(h_i)_{i \geq 0}$,
- trouver des **solutions d'équations différentielles** de fonction: trouver une fonction $f(\cdot)$ (généralement en des points bien précis, ce qui revient à trouver $\mathbf{f} = (f(x_1), \dots, f(x_n))$), solution d'une équation différentielle, i.e. $f'(x) = h(f(x), x)$ pour tout x , avec des conditions de bord éventuelles.

9.1 Inversion de matrices et résolution de systèmes linéaires

On s'intéresse ici à résoudre en \mathbf{x} l'équation linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où A est une matrice $n \times n$ inversible, et \mathbf{b} un vecteur colonne de taille n .

La méthode **simpliste** consiste à essayer d'inverser A , de telle sorte que $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. La formule universelle serait d'utiliser la transposée de la commatrice, mais le nombre d'opération nécessaire est alors en $n!$. Pour rappel, si $n = 100$, $n!$ est de l'ordre de 10^{158} .

L'idée de la méthode d'**élimination de Gauss** cherche à rendre la matrice A triangulaire (supérieure ou inférieure).

Exemple 40. Considérons le système suivant

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 3 & 8 & 13 \\ 2 & 9 & 18 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 3 & 8 & 13 \\ 2 & 9 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix},$$

c'est à dire

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 13x_3 = 5 \\ 2x_1 + 9x_2 + 18x_3 = 11 \end{cases}$$

La première équation sert alors de **pivot** pour éliminer x_1 dans les dernières, soit

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_2 + 12x_3 = 9 \end{cases}$$

La seconde équation de ce système sert alors de pivot pour éliminer x_2 dans la troisième

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Ce qui donne le système simpliste suivant

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

On remonte alors pour trouver toutes les valeurs, i.e. $x_3 = 2$, $x_2 = -3$ et $x_1 = 1$.

Sur cet exemple simple, on voit que l'algorithme est peu coûteux en temps de calcul: le nombre d'opérations est de l'ordre de $n^3/3$: en doublant la taille, on multiplie le nombre d'opérations par 8.

Remarque 41. La résolution de systèmes linéaires est très **instable** numériquement. La solution du système suivant (RAPPAZ & PICASSO (1998))

$$\begin{cases} 4.218613x_1 + 6.327917x_2 = 10.546530 \\ 3.141592x_1 + 4.712390x_2 = 7.853982 \end{cases}$$

est trivialement donnée par $x_1 = x_2 = 1$. Mais si on change un peu le système en

$$\begin{cases} 4.218611x_1 + 6.327917x_2 = 10.546530 \\ 3.141594x_1 + 4.712390x_2 = 7.853980 \end{cases}$$

la solution est toujours unique, mais elle devient $x_1 = -5$ et $x_2 = +5$, ce qui est clairement différent du cas précédent.

Retenons toutefois ici qu'un cas simple est obtenu lorsque A est triangulaire.

L'idée de la décomposition LU est alors simple, et repose sur le résultat suivant

Proposition 42. *Si A est une matrice $n \times n$ dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles, alors il existe une unique décomposition $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.*

En fait U correspond à la matrice de l'élimination de Gauss. Notons de plus que le nombre d'opération est ici en n^3 .

Une autre méthode peut être non pas de calculer la vraie valeur de \mathbf{x} mais simplement de s'en approcher. Les méthodes itératives de [Jacobi](#) et de [Gauss-Seidel](#) sont intéressantes. Il s'agit de construire une suite de vecteurs \mathbf{x}^k qui converge vers \mathbf{x} .

L'idée sous-jacente est d'écrire A comme la différence de deux matrice $A = K - M$, où K est inversible (et d'inverse facile à calculer). Alors $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s'écrit

$$K\mathbf{x} = M\mathbf{x} + \mathbf{b} \text{ soit } \mathbf{x} = K^{-1}M\mathbf{x} + K^{-1}\mathbf{b}.$$

Aussi, très naturelle, on se donne \mathbf{x}^0 , et de manière récursive on pose

$$\mathbf{x}^{k+1} = K^{-1}M\mathbf{x}^k + K^{-1}\mathbf{b}$$

La matrice K proposée par [Jacobi](#) est simplement la matrice diagonale constituée des éléments diagonaux de A , et donc

$$K^{-1} = \text{diag}(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}),$$

ce qui donne l'algorithme itératif

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^k + b_i \right) \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

La matrice K proposée par [Gauss-Sigel](#) est la matrice triangulaire inférieure constituée des éléments de A . L'algorithme devient alors

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j < i} a_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j > i} a_{ij} x_j^k + b_i \right) \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Ces algorithmes marchent relativement bien, en général.

Proposition 43. *Cette méthode converge (pour tout \mathbf{b} et tout \mathbf{x}^0) si et seulement si le rayon spectral de $K^{-1}M$ ($\rho = \max\{|\lambda_i|\}$ où les (λ_i) sont les valeurs propres) est strictement inférieur à 1.*

En particulier, si A est symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Siegel est convergente.

Pour l'instant, l'idée était d'écrire A sous la forme $D - U - L$ où D est la diagonale, $-U$ la matrice triangulaire strictement supérieure et $-L$ la matrice triangulaire strictement inférieure.

La méthode de Jacobi était de poser $A = [D] - [U + L]$, alors que Gauss-Siegel proposait d'écrire $A = [D - L] - [U]$.

Une méthode encore plus générale consiste à continuer sur cette écriture, et d'écrire

$$A = \left[\frac{1}{\omega} D - L \right] - \left[\frac{1-\omega}{\omega} D + U \right] = K - M,$$

de telle sorte que $K^{-1} = \omega^{-1}D - L$. On parlera alors de [méthode de relaxation](#).

Parmi les résultats intéressants, on a le suivant

Proposition 44. Si A est une matrice tridiagonale définie positive, la méthode relaxation converge pour $\omega \in]0, 2[$. De plus, il existe un paramètre optimal donné par

$$\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(D^{-1}[-U - L])}}.$$

Si $\omega > 1$, on parlera de surrelaxation.

Enfin, parmi les méthodes classiques, on peut penser à une descente de gradient.

Si l'on cherche à résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, on pose

$$h(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}'A\mathbf{z} - \mathbf{b}\mathbf{z}.$$

Proposition 45. Si A est une matrice symétrique définie positive, et si \mathbf{x} vérifie $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, alors pour tout $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$, $h(\mathbf{z}) > h(\mathbf{x})$.

En effet, soit ϵ tel que $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \epsilon$, alors

$$h(\mathbf{z}) = h(\mathbf{x} + \epsilon) = h(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\epsilon'A\epsilon.$$

A étant symétrique définie positive, et comme $\epsilon \neq 0$, le terme de droite est strictement positif.

On utilise alors une [desciente de gradient](#) pour résoudre ce problème: on se donne un vecteur \mathbf{z}^{k+1} non nul, puis on pose

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_{k+1}\mathbf{z}^{k+1},$$

où α_{k+1} minimise la quantité $h(\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{z}^{k+1})$. Un calcul explicite donne

$$\alpha_{k+1} = \frac{(\mathbf{z}^{k+1})'(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^k)}{(\mathbf{z}^{k+1})'A\mathbf{z}^{k+1}}.$$

Le choix de la direction de la descente \mathbf{z}^{k+1} peut se faire naturellement en prenant la direction de plus grande pente. On pose alors $\mathbf{z}^{k+1} = \text{grad}h(\mathbf{x}^k)$, c'est à dire

$$\mathbf{z}^{k+1} = \text{grad}h(\mathbf{x}^k) = A\mathbf{x}^k - \mathbf{b}$$

L'algorithme est alors relativement simple, à partir de \mathbf{x}^0 (fixé arbitrairement) et de $\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^0$, pour $k = 0, 1, \dots$

- on pose $\boldsymbol{\omega}^k = -A\mathbf{r}^{k-1}$ et $\alpha_{k+1} = \frac{\|\mathbf{r}^k\|^2}{(\mathbf{r}^k)' \boldsymbol{\omega}^{k+1}}$,
- on pose $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha_{k+1}\mathbf{r}^k$, et $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \alpha_{k+1}\boldsymbol{\omega}^{k+1}$.

On s'arrête lorsque \mathbf{r}^{k+1} est nul (ou suffisement petit).

Notons qu'on peut améliorer cet algorithme en corrigeant la direction $-\mathbf{r}^k$ (prise dans le passage de \mathbf{x}^k à \mathbf{x}^{k+1}) de telle sorte que l'erreur commise soit la plus petite possible, pour la norme $\|\cdot\|_A = \sqrt{\cdot'A\cdot}$: on pose alors

$$\mathbf{z}^{k+1} = -\mathbf{r}^k + \beta_k\mathbf{z}^k, \text{ où } \beta_k = \frac{(\mathbf{r}^k)'A\mathbf{z}^k}{(\mathbf{z}^k)'A\mathbf{z}^k}.$$

On parlera alors de [méthode du gradient conjugué](#). L'algorithme est alors, là aussi, relativement simple, à partir de \mathbf{x}^0 (fixé arbitrairement) et de $\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^0$. On pose alors

$$\mathbf{z}^1 = -\mathbf{r}^0, \boldsymbol{\omega}^1 = A\mathbf{z}^1, \alpha_1 = \frac{(\mathbf{r}^0)' \mathbf{z}^1}{(\mathbf{z}^1)' \boldsymbol{\omega}^1},$$

et $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \alpha_1\mathbf{z}^1$. Pour $k = 1, 2, \dots$

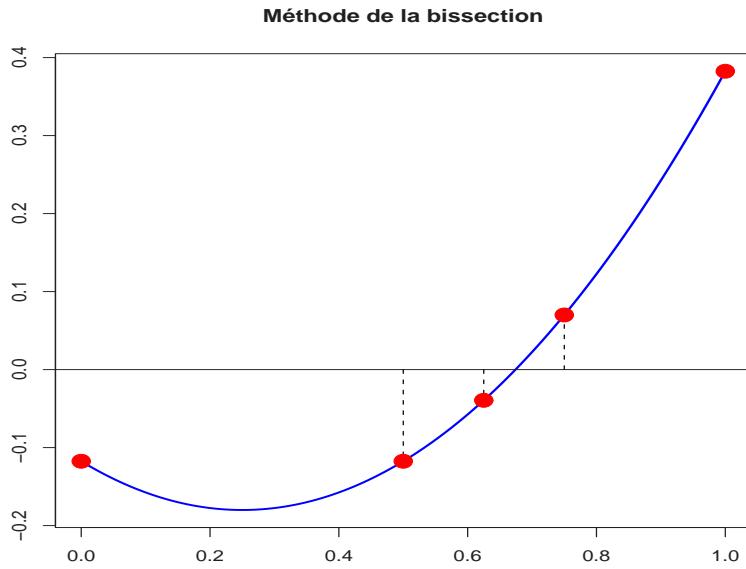


Figure 42: Méthode de la bissection

- on pose $\mathbf{r}^k = \mathbf{r}^{k-1} - \alpha_k \mathbf{z}^k$ et $\beta_k = \frac{(\mathbf{r}^k)' A \mathbf{z}^k}{(\mathbf{z}^k)' A \mathbf{z}^k}$,
- on pose $\mathbf{z}^{k+1} = -\mathbf{r}^k + \beta_k \mathbf{z}^k$ et $\boldsymbol{\omega}^{k+1} = A \mathbf{z}^{k+1}$,
- on pose $\alpha_{k+1} = \frac{(\mathbf{r}^k)' \mathbf{z}^{k+1}}{(\mathbf{z}^{k+1})' \boldsymbol{\omega}^{k+1}}$ et $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_{k+1} \mathbf{z}^{k+1}$.

On s'arrête lorsque \mathbf{r}^{k+1} est nul. Il est possible de montrer que $\mathbf{r}^{k+1} = 0$ en au plus n itérations (n étant la taille de A).

9.2 Recherche de zéros

Nous cherchions auparavant à résoudre un système d'équations linéaires. De manière générale, on peut s'intéresser à un problème non-linéaire de la forme suivante: rechercher \mathbf{x} tel que $f(\mathbf{x}) = 0$.

La méthode de la [bissection](#) est la plus simple, en dimension 1, condition de connaître a et b tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe opposés. On pose alors $x_0 = a$ et $x_1 = (a + b)/2$.

- si $f(x_1) \times f(x_0) < 0$ alors $x_2 = (x_1 + x_0)/2$,
- si $f(x_1) \times f(x_0) > 0$ alors $x_2 = (x_1 + x_0)/2 + (x_1 - x_0)$, et on itère... Notons que la distance entre x^* (vérifiant $f(x^*) = 0$) et x_n est ainsi majorée par $(b - a)/2^{n+1}$. C'est à dire que

$$|x_n - x^*| \leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - x^*|.$$

On parlera alors de [convergence linéaire](#).

Définition 46. Une méthode est convergente l'ordre p s'il existe $\kappa > 0$ telle que

$$|x_n - x^*| \leq \kappa |x_{n-1} - x^*|^p.$$

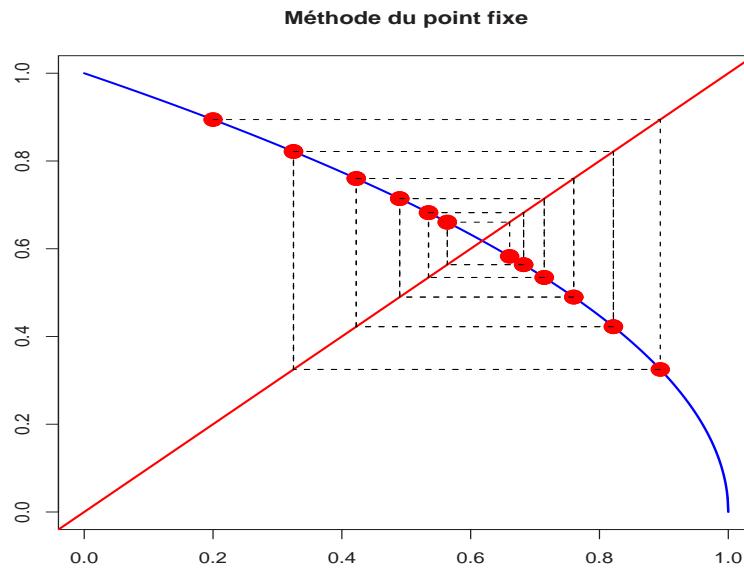


Figure 43: Méthode du point fixe.

On parlera de convergence linéaire si $p = 1$ et quadratique si $p = 2$. Si $|x_n - x^*| \leq \kappa_n |x_{n-1} - x^*|$ avec $\kappa_n \rightarrow 0$, on parlera de convergence surlinéaire.

Parmi les méthodes usuelles, il y a la **méthode du point fixe**. Posons $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - f(\mathbf{x})$: résoudre $f(\mathbf{x}) = 0$ est équivalent à trouver les points fixes de g , i.e. $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

On construit alors une suite récursive \mathbf{x}_k en posant $\mathbf{x}_{k+1} = g(\mathbf{x}_k)$.

Définition 47. Une fonction g est *strictement contractante* s'il existe $\kappa < 1$ telle que

$$\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| \leq \kappa \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \text{ pour tout } \mathbf{x}, \mathbf{y}.$$

On alors le **théorème du point fixe**,

Théorème 48. Si g est contractante sur I , et si $g(I) \cup I$, alors il existe une unique point fixe $\mathbf{x} \in I$, et de plus pour tout \mathbf{x}_0 , la suite $\mathbf{x}_{k+1} = g(\mathbf{x}_k)$ converge vers de point fixe. De plus, la convergence est linéaire.

En dimension 1, on considère

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Ceci se généralise en dimension plus grande. En effet, si $Df(\mathbf{x})$ désigne la matrice jacobienne de f au point \mathbf{x} , on pose

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [Df(\mathbf{x}_k)]^{-1} \times f(\mathbf{x}_k).$$

Notons que cet algorithme est une méthode de recherche de point fixe pour la fonction $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - [Df(\mathbf{x})]^{-1} \times f(\mathbf{x})$.

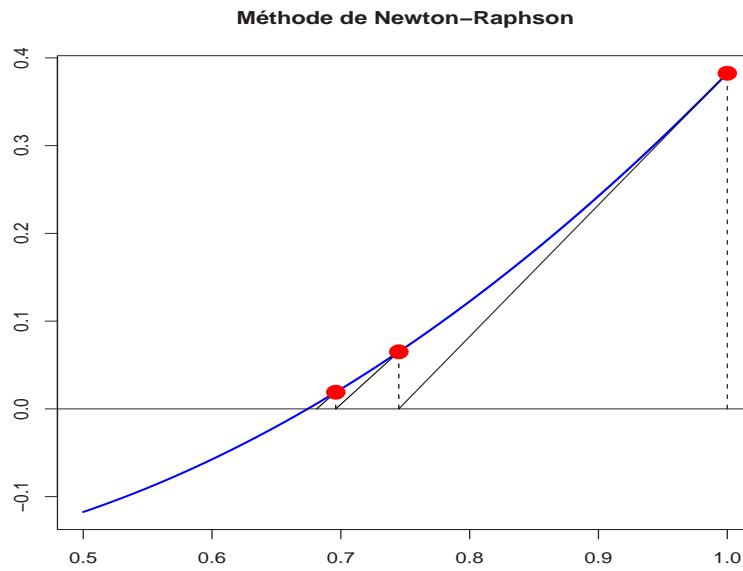


Figure 44: Méthode de Newton-Raphson.

9.3 Recherche d'optimums

9.4 Interpolation de fonctions (par des polynômes)

Etant donnée une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On se donne une partition de $[0, 1]$, i.e. $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n < b$. Il existe un unique polynôme P_n de degré n tel que $f(x_i) = P_n(x_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n$. Ce polynôme est donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right) \cdot f(x_i).$$

Entre les points x_i et x_{i+1} , f et P_n n'ont aucune raison d'être égaux, mais en utilisant le théorème de Rolle, sous des conditions de régularité suffisantes, on peut montrer que pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ existe $\zeta \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\prod_{j=0}^n (x - x_j) \right) f^{(n+1)}(\zeta).$$

Aussi globalement, on en déduit que

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty, \text{ où } \pi(\cdot) = \prod_{j=0}^n (\cdot - x_j).$$

Si les points x_i sont équidistribués, avec un pas $h = (b - a)/n$, alors

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

Les fonctions étant définies sur $[a, b]$ il est possible de se donner un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx,$$

où $\omega(\cdot)$ est une fonction de poids. Une idée est de trouver une base de polynômes qui soit orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- pour $a = 0, b = \infty$ et $\omega(x) = e^{-x}$, on peut considérer les polynômes de [Laguerre](#),
- pour $a = -1, b = 1$ et $\omega(x) = 1$, on peut considérer les polynômes de [Legendre](#),
- pour $a = -1, b = 1$ et $\omega(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, on peut considérer les polynômes de [Chebychev](#).

[Application: le calcul d'une intégrale \(simple\)](#)

La base du calcul d'intégrale repose sur la formule de Chasles, qui permet d'écrire

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)du.$$

On utilise alors des formules approchées sur chacun des intervalles. On parlera de [méthode de quadrature élémentaire](#), consistant à écrire

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)du \sim [x_{i+1} - x_i] \times \sum_{j=0}^{n_i} \omega_{i,j} f(\zeta_{i,j}),$$

où $\zeta_{i,j} \in [x_i, x_{i+1}]$ pour tout $j = 0, 1, \dots, n_i$ et $\sum_{j=0}^{n_i} \omega_{i,j} = 1$. On prend alors une moyenne pondérée d'éléments de $f(\cdot)$ sur l'intervalle élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$.

- la [méthode des rectangles](#), $n_i = 0$.

Dans ce cas, $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)du \sim [x_{i+1} - x_i]f(\zeta_i)$. Suivant le choix de ζ_i , on parlera de [rectangles à gauche](#) (si $\zeta_i = x_i$), de [rectangles à droite](#) (si $\zeta_i = x_{i+1}$) ou de [rectangles au centre](#) (si $\zeta_i = (x_i + x_{i+1})/2$).

- la [méthode d'interpolation linéaire](#), $n_i = 1$, $\zeta_{i,0} = x_i$ et $\zeta_{i+1,0} = x_{i+1}$.

On parle aussi de méthode des trapèzes, l'aire élémentaire étant un trapèze. Dans ce cas, $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)du \sim [x_{i+1} - x_i] \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}$.

- la [méthode de Simpson](#), $n_i = 2$.

Cette méthode, qui est un cas particulier de la méthode dite de Newton-Cotes, consiste à prendre une interpolation polynomiale sur chacun des intervalles élémentaires.

- évaluation de l'[erreur d'approximation](#).

Pour évaluer, ou majorer, l'erreur commise lors de l'approximation de l'intégrale, rappelons que d'après la formule de Taylor,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{2} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(k+1)}(t)dt.$$

Le [Noyau de Peano](#) permet alors d'obtenir des majorations, en notant que si on approche l'intégrale sous la forme suivante

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \sim \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i),$$

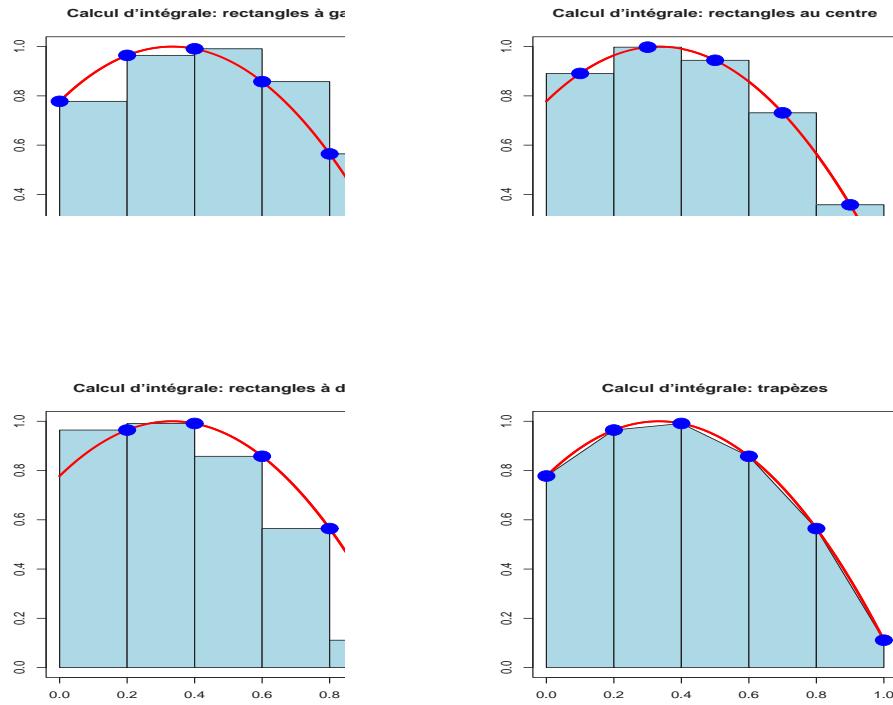


Figure 45: Calcul d’intégrale, méthode des rectangles et des trapèzes.

Proposition 49. L’erreur définit par

$$\varepsilon f = \int_a^b f(x) \omega(x) dx - \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i)$$

est donnée par

$$\varepsilon f = \frac{1}{n!} \int_a^b K_n(t) f^{(n+1)}(t) dt$$

où $K_n(\cdot)$ est appelé noyau de Peano associé à la méthode, défini par

$$K_n(t) = \varepsilon(g_t) \text{ où } g_t(x) = (x - t)_+^n.$$

Un des corollaires est alors que

$$|\varepsilon(f)| \leq \frac{1}{n!} \times \|f^{(n+1)}\|_\infty \times \int_a^b |K_n(t)| dt.$$

Exemple 50. Pour la méthode du rectangle centré, pour un intervalle $[-1, +1]$, $\varepsilon(f) = \int_{-1}^{+1} f(x) dx - 2f(0)$, et le noyau est alors

$$K_1(t) = \varepsilon((x - t)_+) = \int_{-1}^{+1} (x - t)_+ dx - 2(-t)_+ = \frac{1}{2}(1 \pm t)^2,$$

suivant le signe de t , donc $\int K_1(t) dt = 1/3$, et alors

$$\varepsilon(f) = \frac{1}{3} f''(\zeta) \text{ pour } \zeta \in]-1, +1[.$$

Exemple 51. Pour la méthode du trapèze, pour un intervalle $[-1, +1]$, $\varepsilon(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)dx - [f(-1) + f(1)]$, et le noyau est alors

$$K_1(t) = \int_{-1}^{+1} (x-t)_+ dx - [(-1-t)_+ + (1-t)_+] = -\frac{1}{2}(1-t^2) \leq 0,$$

donc $\int K_1(t)dt = -2/3$, et alors

$$\varepsilon(f) = -\frac{2}{3}f''(\zeta) \text{ pour } \zeta \in]-1, +1[.$$

Exemple 52. Pour la méthode de Simpson, pour un intervalle $[-1, +1]$, $\varepsilon(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)dx - \frac{1}{6}[f(-1) + 4f(0) + f(1)]$, et le noyau est alors

$$K_3(t) = \varepsilon((x-t)_+^3) = \int_t^1 (x-t)^3 dx - 2\left(\frac{2}{3}(-t)_+^3 + \frac{1}{6}(1-t)^3\right) = -\frac{(1+t)^3(1-3t)}{12},$$

donc $\int K_3(t)dt = -1/15$, et alors

$$\varepsilon(f) = -\frac{1}{15 \times 3!}f^{(4)}(\zeta) \text{ pour } \zeta \in]-1, +1[.$$

• Application: le calcul d'une intégrale multiple

Le calcul d'intégrale multiple se fait aisément dans un seul cas: celui où l'on intègre sur un hypercube de \mathbb{R}^d , c'est à dire pour simplifier $[0, 1]^d$, comme le note STROUD (1971) (notion de “product formula”). De manière générale,

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 h(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d \sim \sum_{i=1}^n \omega_i f(u_{i,1}, \dots, u_{i,d}),$$

où les $\mathbf{u}_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,d})$ sont des points du cube unité. Les calculs sont généralement plus complexes (même si l'idée de la méthode est toujours la même, approcher une intégrale par une somme) pour des intégrales de la forme $\int_{\mathcal{V}} h(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$, où \mathcal{V} est un volume ou une surface de \mathbb{R}^d , éventuellement difficile à paramétriser. Parmi les méthodes utilisées, on peut essayer de découper \mathcal{V} en petits hypercube, mais aussi essayer de décomposer h dans une base de polynômes. Un tiers de STROUD (1971) est ainsi composé de tables et de formules permettant de décomposer des régions \mathcal{V} simples (ellipsoïdes, simplex, hexagones, tores, polygones usuels), ainsi que des formules d'approximation

9.5 Solutions d'équations différentielles

Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable telle que

$$f'(x) = g(f(x), x) \text{ pour } x > 0 \text{ avec la condition } f(0) = f_0.$$

On parle alors de **problème de Cauchy**.

Notons que si f est Lipschitzienne, alors ce problème admet une solution unique sur \mathbb{R} .

La résolution numérique ne se fait pas sur \mathbb{R} , mais en un nombre fini de points. Pour cela, on se donne

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

L'idée naturelle est alors d'approcher $f'(x)$ au point x_n par

$$f'(x_n) \sim \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}.$$

On parlera de **schéma d'euler explicite** si l'on considère le schéma numérique suivant

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = g(f(x_n), x_n), \text{ ou } \frac{u_{n+1} - u_n}{x_{n+1} - x_n} = g(u_n, x_n) \text{ où } u_n = f(x_n),$$

et de **schéma d'euler implicite** si

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = g(f(x_{n+1}), x_{n+1}), \text{ ou } \frac{u_{n+1} - u_n}{x_{n+1} - x_n} = g(u_{n+1}, x_{n+1}) \text{ où } u_n = f(x_n).$$

En effet, ces deux équation s'écrivent alors respectivement

$$u_{n+1} = u_n + (x_{n+1} - x_n) \times g(u_n, x_n) \text{ pour le schéma explicite}$$

et

$$u_{n+1} - (x_{n+1} - x_n) \times g(u_{n+1}, x_{n+1}) \text{ pour le schéma implicite.}$$

Afin de bien comprendre l'intérêt de ces deux schémas, considérons l'exemple suivant.

Exemple 53. Considérons l'équation différentielle $f'(x) = \beta f(x)$ où $\beta > 0$, avec comme condition initiale $f(x) = f_0$. La solution explicite est connue, ici: $f(x) = e^{-\beta t} f_0$. Pour discréteriser, posons $x_n = nh$ avec $h > 0$. Dans le schéma **explicite**,

$$u_{n+1} = (1 - \beta h)u_n = \dots = (1 - \beta h)^n u_0.$$

Si $u_0 \neq 0$, et si $1 - \beta h < -1$, le schéma sera dit **instable**. Il faut alors imposer $-1 \geq 1 - \beta h$, soit $h \leq 2/\beta$. Aussi, le pas de discréterisation doit être suffisement petit, sinon le schéma explose. Dans le schéma **implicite**,

$$(1 + \beta h)u_{n+1} = u_n \text{ soit } u_n = \left(\frac{1}{1 + \beta h} \right)^n u_0.$$

Dans ce cas, pour tout h , le schéma converge.

D'autres méthodes sont également possibles. Rappelons juste la **méthode de Runge-Kutta**: en intégrant l'équation différentielle, il vient que

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(f(t), t) dt.$$

En utilisant par exemple la méthode des trapèzes pour calculer cette intégrale, il vient

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \frac{g(u_n, x_n) + g(u_{n+1}, x_{n+1})}{x_{n+1} - x_n}.$$

Ce schéma correspond en fait à prendre la moyenne entre le schéma d'Euler explicite, et le schéma d'Euler implicite. Il est possible de montrer qu'il converge à l'ordre 2.

De manière générale, en posant $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$, il est possible d'écrire le système d'équations (linéaires) obtenues par la discréterisation sous la forme matricelle $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$. On peut alors utiliser les méthodes vues auparavant.

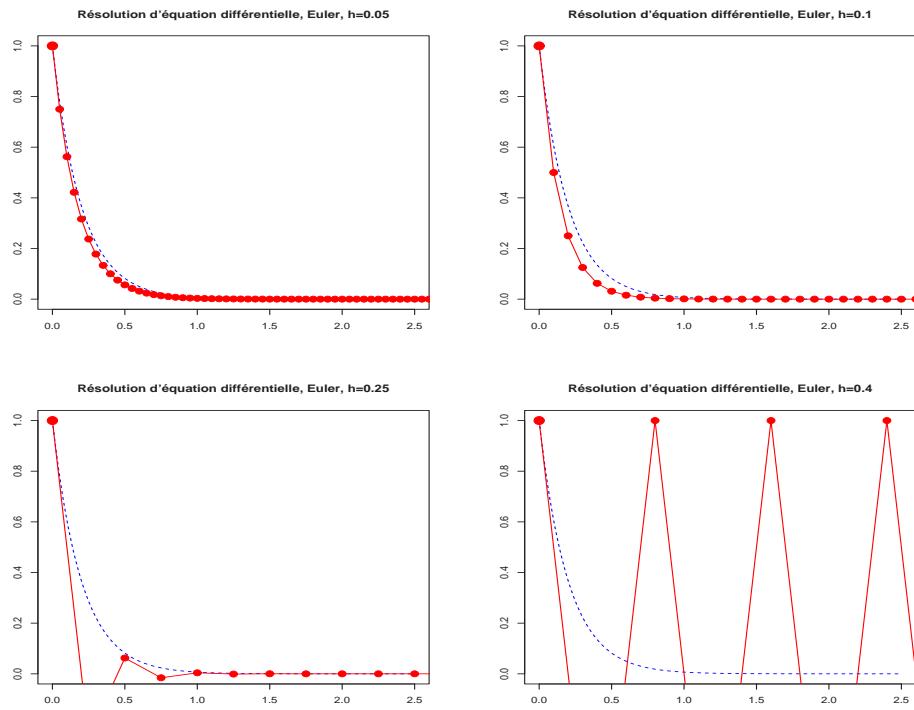


Figure 46: Equation différentielle ordinaire, $\beta = 5$, schéma explicite.

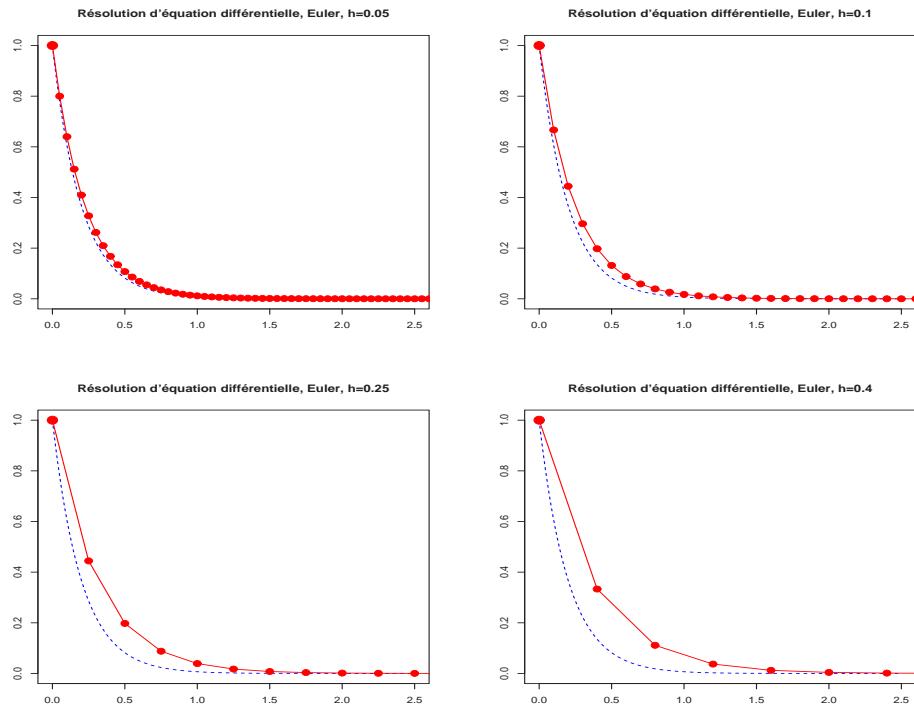


Figure 47: Equation différentielle ordinaire, $\beta = 5$, schéma implicite.

10 Résolution des edp et différences finies

10.1 Méthodes de discréétisation

Un schéma de discréétisation se dit **consistant** si l'erreur d'approximation tend vers 0 quand le pas $h \rightarrow 0$. On parlera de précision à l'ordre p si la norme de l'erreur est $O(h^p)$.

De façon générale, les opérateurs différentiels sont approchés par des combinaisons linaires de valeurs. En effet, le développement de Taylor permet d'écrire

$$\frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) - \frac{h}{2}u''(x) + \dots$$

Donc si on dispose d'un maillage $(x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$, on peut approcher $u'(x)$ au point x_i par

$$u'(x_i) \sim \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-1}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}},$$

pour des commodités d'écriture.

Plus formellement, on se place sur $[0, 1]$ et on considère un maillage $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$,

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1.$$

On note $h_i = x_i - x_{i-1}$. L'**opérateur de différentiation** s'écrit alors sous la forme matricielle suivante

$$D_h = \begin{pmatrix} h_0^{-1} & & & & (0) \\ -(h_0 h_1)^{-1/2} & h_1^{-1} & & & \\ & -(h_1 h_2)^{-1/2} & h_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & h_{n-2}^{-1} \\ & & & & -(h_{n-2} h_{n-1})^{-1/2} & h_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$$

de telle sorte que le vecteur $D_h \cdot u(\mathbf{x})^t$ soit une approximation du vecteur $u'(\mathbf{x})^t$. Notons qu'ici l'erreur est en $O(\max(h_i))$.

De même pour la **dérivée seconde**, une approximation de $u''(x)$ au point $x = x_i$ est donnée par

$$u''(x_i) \sim \frac{1}{(h_i + h_{i-1})/2} \left(\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-1}} \right),$$

soit encore

$$u''(x_i) \sim \frac{2}{(h_i + h_{i-1})} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} \right),$$

Si $h_i = h$ pour tout i (maillage uniforme), la matrice associée est

$$D_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & \ddots & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Le **laplacien** est, en dimension 2, l'opérateur $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. On utilise alors un schéma à 5 points,

$$\Delta(x_i, y_j) \sim \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h_y^2},$$

Là aussi, pour des commodités d'écriture on notera

$$\Delta(x_i, y_j) \sim \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2},$$

Si $h_x = h_y = h$, notons que l'erreur est $O(h^2)$. Il est possible d'améliorer la précision en faisant intervenir les points à distance $2h$, qui donne une erreur en $O(h^4)$. On notera enfin l'opérateur bilharmonique, dont la racine carrée donne le Laplacien.

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} \quad \frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & -16 & & \\ 1 & -16 & 60 & -16 & 1 \\ & -16 & & & \\ & 1 & & & \end{bmatrix} \text{ ou } \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} & 1 & & & \\ 2 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}$$

10.2 Les différentes méthodes de discréétisation

Parmi les méthodes de différenciation,

- $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \sim \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h}$ différence progressive,
- $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \sim \frac{f(x, t) - f(x, t-h)}{h}$ différence rétrograde,
- $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \sim \frac{f(x, t+h) - f(x, t-h)}{2h}$ différence centrée.

Exemple 54. Considérons l'équation de transport dans $\mathbb{R} \times (0, \infty)$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, c > 0,$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$ sur \mathbb{R} . On considère un schéma progressif en temps et en espace,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{t_{j+1} - t_j} + c \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} = 0,$$

On considérant des pas de temps identiques, on note $h = x_{i+1} - x_i$ pour tout i , et $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ pour tout j . En posant $\lambda = \Delta t/h$, on obtient

$$u_{i,j+1} = (1 + \lambda c)u_{i,j} - \lambda c u_{i+1,j} = [1 + \lambda c - \lambda c T_{-h}]u_{i,j},$$

où T_ε désigne l'opérateur de translation spatiale, $[T_\varepsilon]u(x, t) = u(x - \varepsilon, t)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Par récurrence

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= [1 + \lambda c - \lambda c T_{-h}]^i u_{0,j} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + \lambda c)^{n-k} (-\lambda c T_{-h})^k f(x_i) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + \lambda c)^{n-k} (-\lambda c)^k f(x_i + kh). \end{aligned}$$

On utilise alors les points x_i, x_{i+1}, \dots . La solution ainsi obtenue est alors très éloignée de la solution théorique, puisqu'il est possible de montrer que $u(x, t) = f(x - ct)$. Aussi, théoriquement, seul le terme $x_i - c\lambda nh$ aurait du intervenir. On parlera de **schéma instable**.

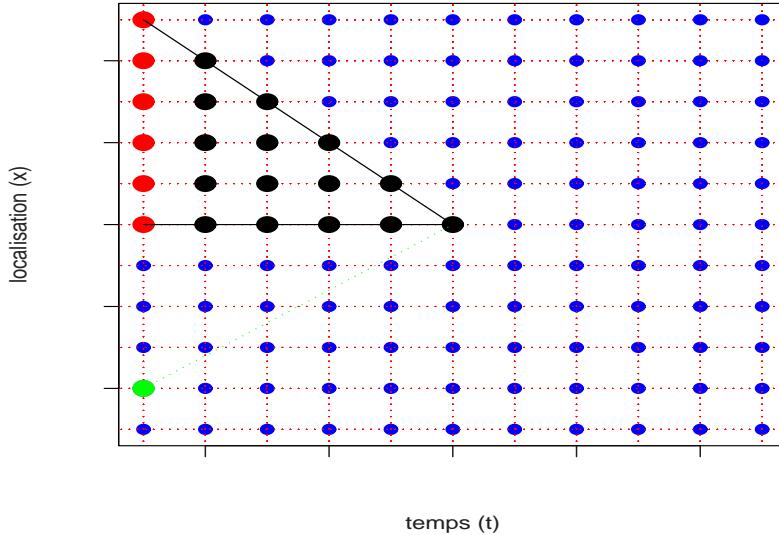


Figure 48: Maillage et résolution numérique.

10.3 Notions de stabilité et de convergence

De façon générale, on note M un opérateur différentiel (linéaire), d'ordre 1 en t , et on cherche une solution u au problème $Mu(t, x) = f(t, x)$ sur $(0, \infty) \times \Omega$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R} , avec la condition initiale $u(x, 0) = \phi(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

En remplaçant les opérateurs différentiels par des différences finies, on obtient un opérateur discret $M_{h,\Delta t}$.

Définition 55. Un schéma est *explicite* si $u_{i,j+1}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $u(x_k, t_j), f(x_k, t_{j-1}), \dots$ pour tout k . Le schéma est *implicite* si d'autres valeurs sont nécessaires.

Définition 56. Le schéma sera dit *à 1 pas de temps* s'il utilise les valeurs à deux dates, uniquement (e.g. en t_i et t_{i+1}), et sinon il sera *à pas multiples*.

Définition 57. Soit $u(t, x)$ la solution de l'équation aux dérivées partielles, et $(u_{i,j})$ une solution associée au schéma discrétisé. On dira que le schéma est *convergent* si $u_{i,j} \rightarrow u(x, t)$ quand $(x_i, t_j) \rightarrow (x, t)$ lorsque $h, \Delta t \rightarrow 0$.

La convergence signifie que la solution numérique du schéma tend vers la solution de l'équation aux dérivées partielles.

Définition 58. Un schéma de discréétisation $M_{h,\Delta t}$ d'un opérateur L est *consistant* si pour toute fonction ϕ infiniment dérivable, en tout point (x, t) du maillage,

$$\lim_{h, \Delta t \rightarrow 0} (M\phi - M_{h,\Delta t}\phi) = 0.$$

En particulier, une solution régulière sur la version discrétisée converge vers la solution de l'équation aux dérivées partielles. Mais la réciproque n'est pas forcément vraie. La consistance est alors une condition nécessaire de convergence, mais pas suffisante.

Enfin, pour un schéma $M_{h,\Delta t}u = 0$ associé à l'équation $Mu = 0$, on dira qu'il est *stable* s'il existe

On a alors le résultat d'équivalence de Lax-Richtmyer,

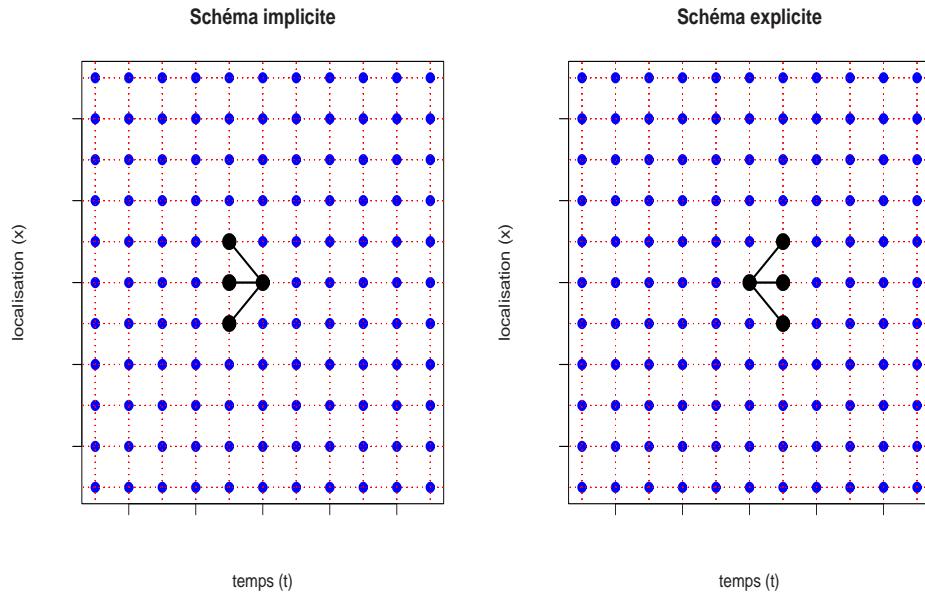


Figure 49: Schémas implicite et explicite.

Proposition 59. *Un schéma linéaire consistant est convergent si et seulement si il est stable.*

10.4 Stabilité numérique de la discréttisation

Considérons le cas particulier de la dérivée seconde. Résoudre $Du(x) = f(x)$ où $Lu = u''$ se traduit numériquement, par

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & \ddots & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}) \\ u(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

ou encore $D_h \mathbf{u} = \mathbf{f}$. Les valeurs propres de L_h sont alors les $\lambda_k = 2(1 - \cos(\pi k/(n+1)))/h^2$ et les vecteurs propres associés

$$\mathbf{V}_k = (\sin(\pi k/(n+1)), \sin(2\pi k/(n+1)), \dots, \sin(n\pi k/(n+1)))^t.$$

En effet, en notant $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{0}$, notons que

$$h^{-2}[-\mathbf{V}_{k-1} + 2\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_{k+1}] = \lambda_k \mathbf{V}_k.$$

Cette relation de récurrence implique que les vecteurs propres s'écrivent

$$\mathbf{V}_k = Ar_1^k + Br_2^k, k = 0, \dots, n,$$

où r_1 et r_2 sont deux solutions (distinctes) de $r^2 + (\lambda h^2 - 2)r + 1 = 0$, et où A et B sont déterminées par les conditions en bords.

Notons que les valeurs propres sont toutes positives, avec

$$\lambda_{min} \sim \frac{\pi^2}{n^2 h^2} \leq \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n \leq \lambda_{max} \sim \frac{4}{h^2}.$$

Si l'on s'intéresse au cas du [Laplacien](#), de façon similaire, on obtient que les valeurs propres de L_h sont alors les

$$\lambda_{i,j} = \frac{2(1 - \cos(\pi i/(n+1)))}{h_x^2} + \frac{2(1 - \cos(\pi j/(n+1)))}{h_y^2},$$

et de la même façon, on peut montrer que ces valeurs propres sont toutes positives, avec

$$\lambda_{min} \sim \frac{1\pi^2}{n^2 h_x^2} + \frac{1\pi^2}{n^2 h_y^2} \leq \lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{i,j}, \dots, \lambda_{n,n} \leq \lambda_{max} \sim \frac{4}{h_x^2} + \frac{4}{h_y^2}.$$

10.5 Examples de discréétisation: l'équation de la chaleur

On considère ici l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x), \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0,$$

avec des conditions de bords $u(x, 0) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (u_0 donnée, et connue). En pratique, on supposera que x et t sont toutefois bornés, soit $x \in [-a, +a]$ et $t \in [0, T]$. Dans ce cas, il convient de rajouter une condition de bord en espace, de la forme

$$u(-a, t) = a(a, t) = 0 \text{ pour tout } t \in]0, T].$$

- schéma [explicite](#)

L'idée est ici d'approcher $(u(t, x))_{t>0, x \in \mathbb{R}}$ par une suite $u_{i,j}$, ou $(u_{i,j})_{i \in [1, \dots, I], j \in [1, \dots, n]}$, définie sur la grille (régulière) (t_i, x_j) , où $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ et $x_j - x_{j-1} = h$ par

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta t} - \kappa \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j},$$

où $f_{i,j} = f(t_i, x_j)$, et en rajoutant les condition de bord

$$u_{0,j} = u_0(x_j) \text{ pour tout } j \text{ et } u_{i,0} = u(i, n+1) = 0.$$

Notons que l'on peut réécrire cette relation sous la forme récurrente

$$u_{i+1,j} = \Delta t f_{i,j} + \lambda(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + [1 - 2\lambda]u_{i,j},$$

en posante $\lambda = \kappa \frac{\Delta t}{h^2}$. Le fait que la valeur à la date t_{i+1} s'écrit en fonction des valeurs à la date t_i explique le terme "[explicite](#)" du schéma.

On note $\varepsilon_{i+1,j}$ la différence entre la solution approchée et la vrai solution, en (t_i, x_j) , i.e.

$$\varepsilon_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta t} - \kappa \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} - f_{i,j}.$$

En supposant que u soit 2 fois continûment dérivable en t et 4 fois en x , en utilisant un développement de Taylor

$$u(t_{i+1}, x_j) = u(t_i, x_j) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t_i, x_j) + O(\Delta t^2),$$

$$\begin{aligned} u(t_i, x_{j+1}) &= u(t_i, x_j) + h \frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) + O(\Delta t^2) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_i, x_j) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_i, x_j) + O(h^4), \\ u(t_i, x_{j-1}) &= u(t_i, x_j) - h \frac{\partial u}{\partial x}(t_i, x_j) + O(\Delta t^2) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_i, x_j) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_i, x_j) + O(h^4). \end{aligned}$$

Aussi,

$$\varepsilon_{i+1,j} = O(\Delta t) + O(h^2).$$

On notant ε l'erreur de troncature du schéma, i.e. $\varepsilon = \max\{\varepsilon_{i+1,j}\}$, on a

$$\varepsilon \leq C \cdot (\Delta t + h^2).$$

Il est aussi possible d'étudier l'erreur due à la discréétisation du schéma,

$$e_{i,j} = u(t_i, x_j) - u_{i,j} \text{ pour tout } i, j,$$

alors

$$\begin{cases} e_{i+1,j} = (1 - 2\lambda) e_{i,j} + \lambda e_{i,j+1} + \lambda e_{i,j-1} + \Delta t e_{i+1,j} & \text{pour } i = 1, \dots, I-1, j = 0, \dots, n-1 \\ e_{i+1,0} = e_{i+1,n} = 0 & \text{pour } i = 0, \dots, I \\ e_{0,j} = 0 & \text{pour } j = 0, \dots, n \end{cases}$$

Si l'on impose la condition $\lambda \leq \frac{1}{2}$, on a alors la majoration

$$|e_{i+1,j}| \leq (1 - 2\lambda) |e_{i,j}| + \lambda(|e_{i,j+1}| + |e_{i,j-1}|) + C\Delta t \cdot (\Delta t + h^2) \leq |e_{i,.}| + C\Delta t \cdot (\Delta t + h^2),$$

où $|e_{i,.}| = \max_j\{|e_{i,j}|\}$, et donc, au final,

$$\max\{|e_{i+1,j}|\} \leq CT \cdot (\Delta t + h^2),$$

c'est à dire que l'erreur de discréétisation est du même ordre que l'erreur de troncature.

Proposition 60. Soit u la solution de l'équation de la chaleur, et $(u_{i,j})$ la solution du schéma explicite. On suppose que u est 2 fois continûment dérivable en t et 4 fois en x , et si de plus

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{2\kappa}, \tag{12}$$

alors il existe une constante C , indépendante de Δt et de h telle que

$$|u(t_i, x_j) - u_{i,j}| \leq C \cdot (\Delta t + h^2) \text{ pour tout } i, j.$$

La condition (12) est appelée **condition de stabilité**. Aussi, il faut que le pas de temps soit suffisement petit pour que le schéma converge. Dans le cas où $\kappa = 1$, la condition de stabilité pour le schéma explicite est $\lambda \leq \frac{1}{2}$. La Figure 50 montre la suite $u_{i,j}$ pour différentes valeurs de λ .

Résolution schéma explicite - équation de la Chaleur

- schéma implicite

Un schéma dit implicite (ou rétrograde) peut également être construit,

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta t} - \kappa \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{h^2} = f_{i+1,j}.$$

L'absence d'écriture sous forme récursive oblige à résoudre un système linéaire.

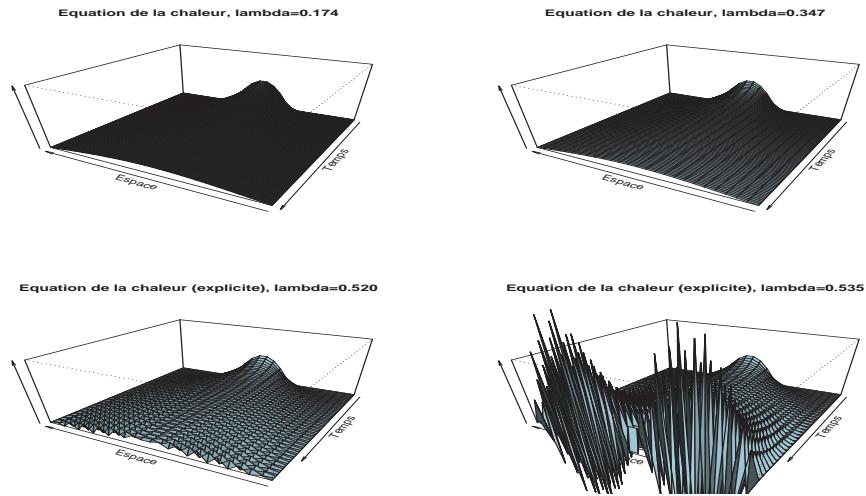


Figure 50: Schéma explicite pour l'équation de la chaleur, diminution du pas de temps Δt , et augmentation de λ .

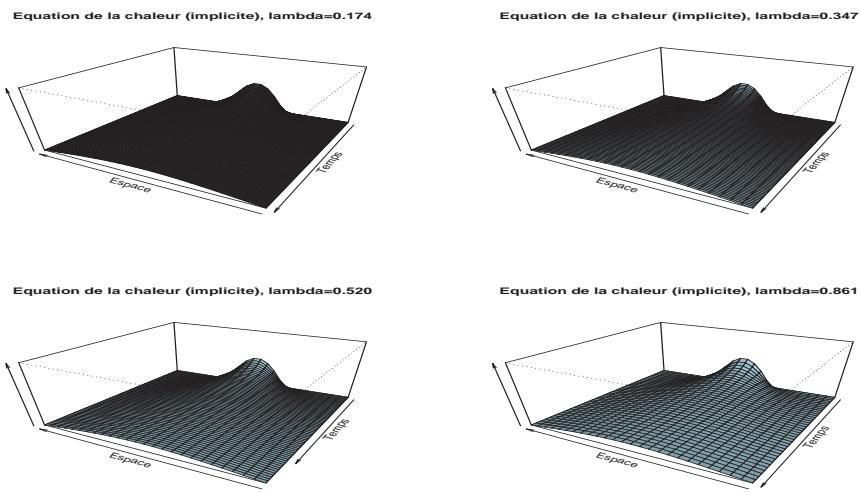


Figure 51: Schéma implicite pour l'équation de la chaleur, diminution du pas de temps Δt , et augmentation de λ .

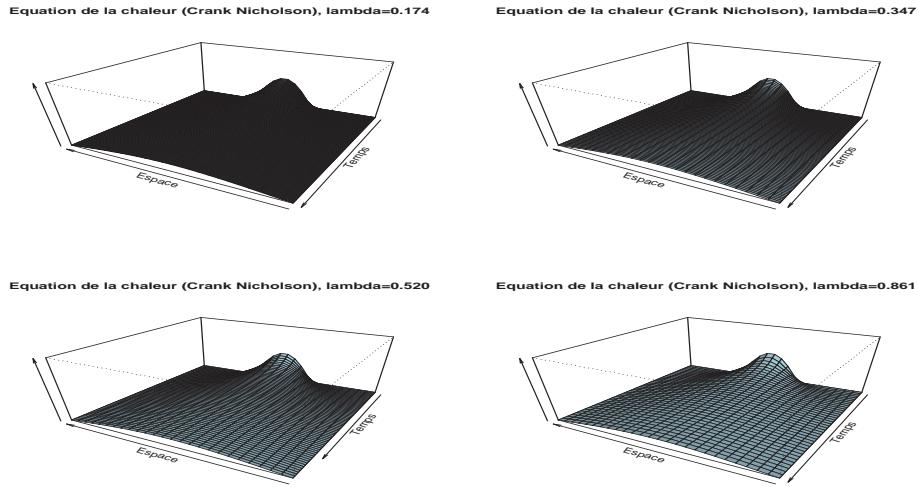


Figure 52: Schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur, diminution du pas de temps Δt , et augmentation de λ .

Résolution schéma implicite - équation de la Chaleur

- schéma de Crank-Nicolson

En combinant ces deux approches, on génère un θ -schéma. En particulier, si $\theta = 1/2$, on obtient le schéma de Crank Nicolson,

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta t} - \frac{\kappa}{2} \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{h^2} - \frac{\kappa}{2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f_{i+1,j}.$$

L'absence d'écriture sous forme récursive oblige à résoudre un système linéaire.

Résolution schéma Crank-Nicolson - équation de la Chaleur

- le schéma saute-mouton (*leap frog*)

Dans ce schéma, on considère la discrétisation suivante de l'équation aux dérivées partielles,

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta t} - \kappa \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j}.$$

10.6 La notion de consistance

Rappelons que $\varepsilon(\Delta t, h) = \max\{\varepsilon_{i,j}\}$ est appelé erreur de troncature.

Définition 61. Un schéma numérique est dite *consistant* si l'erreur de troncature tend vers 0 quand $\Delta t, h \rightarrow 0$. Un schéma numérique est dite *précis à l'ordre p en espace, et q en temps* s'il existe une constante C telle que

$$\varepsilon(\Delta t, h) \leq C(h^p + \Delta t^q).$$

En particulier, pour les schémas présentés dans la section précédante, on a

Proposition 62. Si la solution u est suffisement régulière, alors

- le θ -schéma est précis à l'ordre 2 en espace, et 1 en temps, pour tout $\theta \in [0, 1]$,
- le schéma de Crank-Nicolson est précis à l'ordre 2 en espace, et 2 en temps ($\theta = 1/2$),
- le schéma saute-mouton est précis à l'ordre 2 en espace, et 2 en temps.

10.7 La notion de stabilité

On note $\|\cdot\|_h$ la norme sur \mathbb{R}^{n-1} définie par

$$\|\mathbf{v}\|_h = \sqrt{h \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2}.$$

Définition 63. Un schéma numérique à un pas de temps est dite *stable* s'il existe une constante C telle que

$$\|\mathbf{u}^i\|_h \leq C \left(\|\mathbf{u}^0\|_h + \sqrt{\Delta t \sum_{k=0}^i \|\mathbf{f}^k\|_h^2} \right),$$

pour tout n , et quel que soit le second même $\mathbf{f}^k = (f_{k,1}, \dots, f_{k,n-1})$. Dans le cas d'un schéma à deux pas de temps, la condition de stabilité s'écrit

$$\|\mathbf{u}^i\|_h \leq C \left(\|\mathbf{u}^0\|_h + \|\mathbf{u}^1\|_h + \sqrt{\Delta t \sum_{k=0}^i \|\mathbf{f}^k\|_h^2} \right),$$

Afin de mieux comprendre cette notion, il peut être plus simple de travailler sous forme vectorielle. Dans le cas d'un θ -schéma, rappelons que

$$\mathbf{u}^{i+1} = A\mathbf{u}^i + \Delta t \mathbf{b}^{i+1},$$

où $\mathbf{b}^{i+1} = (\mathbb{I} - \lambda \theta K)^{-1} \mathbf{f}^i$, et $A = (\mathbb{I} - \lambda \theta K)^{-1} [\mathbb{I} - \lambda(1 - \theta)K]$, avec

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Proposition 64. Un schéma de la forme $\mathbf{u}^{i+1} = A\mathbf{u}^i + \Delta t \mathbf{b}^{i+1}$ est stable si et seulement si il existe une constante C telle que

$$\|A^i\|_2 \leq C \text{ pour tout } i = 1, \dots, I,$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme matricielle induite par la norme euclidienne. Dans le cas où A vérifie $AA' = A'A$, alors $\|A\|_2$ correspond au rayon spectral, et une condition suffisante de stabilité est que le rayon spectral soit majoré par 1.

Proposition 65. Dans le cas d'un θ -schéma, si $\theta \in [1/2, 1]$ alors le schéma est stable.

Proof. Dans le cas d'un θ -schéma, rappelons que

$$A = (\mathbb{I} - \lambda\theta K)^{-1}[\mathbb{I} - \lambda(1 - \theta)K],$$

et on peut vérifier aisément que $A' = A$. Les valeurs propres de A sont les $\nu_k = 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$. Si on suppose que $\theta \in [1/2, 1]$, on obtient que $\nu_k \geq -1$ (la condition $\nu_k \leq 1$ étant elle toujours vérifiée). \square

Proposition 66. *Dans le cas d'un θ -schéma, si $\theta \in [0, 1/2[$ alors le schéma est stable si*

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{2\kappa(1 - 2\theta)}.$$

En revanche, le schéma saute mouton est instable.

10.8 Approximation d'une solution et consistance

Définition 67. *On appelle **erreur de troncature** le vecteur $\varepsilon = (\varepsilon_{1,h}, \dots, \varepsilon_{I-1,h})$, où*

$$\varepsilon_{i,h} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f(x_i) \text{ pour } i = 1, \dots, I-1.$$

*Le schéma de discréttisation sera dit **consistant** si*

$$\max_{i=1, \dots, I-1} \{|\varepsilon_{i,h}|\} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Proposition 68. *Si u est 4 fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, alors*

$$\max_{i=1, \dots, I-1} \{|\varepsilon_{i,h}|\} \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in]0, 1[} \left\{ \left| \frac{d^4 u(x)}{dx^4} \right| \right\}.$$

Proof. L'idée de la preuve s'obtient en utilisant un développement de Taylor à l'ordre 4,

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u''''(x_+), \\ u(x_{i-1}) &= u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u''''(x_-), \end{aligned}$$

où x_- et x_+ sont deux valeurs appartenant respectivement à $]x_{i-1}, x_i[$ et $]x_i, x_{i+1}[$. On obtient en particulier que

$$u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}) = h^2u''(x_i) + \frac{h^4}{24} [u''''(x_-) + u''''(x_+)],$$

c'est à dire que

$$\varepsilon_{i,h} = -\frac{h^2}{24} [u''''(x_-) + u''''(x_+)],$$

d'où, en utilisant un majorant correspondant au maximum de $u''''(\cdot)$, le résultat proposé. \square

10.9 Approximation d'une solution et convergence

Définition 69. Un schéma est convergent si

$$\max_{i=1,\dots,I-1} \{|e_i|\} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0,$$

où $e_i = u(x_i) - u_i$ pour $i = 1, \dots, I-1$.

Proposition 70. Si f est 2 fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, alors

$$\max_{i=1,\dots,I-1} \{|e_i|\} \leq Ch^2 \sup_{x \in]0,1[} \left\{ \left| \frac{d^2 u(x)}{dx} \right| \right\}.$$

Proof. Il est facile de noter que si f est deux fois continûment dérivable, alors u l'est 4 fois. De plus,

$$-\frac{e_{i-1} - 2e_i + e_{i+1}}{h^2} = \varepsilon_{i,h}.$$

Aussi,

$$\max_{i=1,\dots,I-1} \{|e_i|\} \leq \max_{i=1,\dots,I-1} \{|\varepsilon_{i,h}|\} \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in]0,1[} \left\{ \left| \frac{d^4 u(x)}{dx} \right| \right\},$$

d'après la proposition précédante. □

10.10 Quelques aspects numériques et résolution de systèmes linéaires

L'inversion de la matrice $n \times n$ peut être délicate en pratique, mais en notant que la matrice est tridiagonale, il est possible d'utiliser des méthodes numériques plus efficace pour déterminer les vecteurs \mathbf{u}_{i+1} .

- La méthode LU (Lower-Upper)

La méthode LU (Lower-Upper) est une méthode de décomposition d'une matrice M en le produit LU une matrice triangulaire inférieure L (Lower) et une matrice triangulaire supérieure U (Upper).

Schématiquement, il s'agit d'une forme particulière d'élimination de Gauss Jordan. On transforme une matrice en une matrice triangulaire supérieure en éliminant les éléments sous la diagonale. Les éliminations se font colonne après colonne, en commençant par la gauche, en multipliant la matrice M par la gauche avec une matrice triangulaire inférieure.

Exemple 71. Considérons le système (très simple)

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 9 \\ 6x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases}$$

La méthode naturelle de résolution consiste à substituer à la seconde équation la combinaison linéaire de 2 fois la première équation, moins la seconde, qui donne le système équivalent

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 9 \\ -3x_2 = -14 \end{cases}$$

On parle alors d'*élimination de Gauss*. L'interprétation matricielle est la suivante,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}}_M = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_U$$

où l'on a respectivement une matrice triangulaire inférieure à gauche (L), et triangulaire supérieure à droite (U). Résoudre $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ revient à résoudre $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$, qui se résout en deux temps:

- on cherche la solution \mathbf{y} $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, qui se résoud aisément puisque L est une matrice triangulaire inférieure: si $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$, et $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^t$

$$y_i = \frac{1}{L_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} x_j \right), \text{ i.e. } \begin{array}{c|c|c} \cdot & & \cdot \\ * & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} = \begin{array}{c|c} \cdot & * \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

- on cherche la solution \mathbf{x} $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, qui se résoud aisément puisque U est une matrice triangulaire supérieure: si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$, et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$

$$x_i = \frac{1}{U_{i,i}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n U_{i,j} x_j \right), \text{ i.e. } \begin{array}{c} \text{matrix} \\ \downarrow \\ \text{row } i \end{array} = \begin{array}{c} \text{matrix} \\ \downarrow \\ \text{row } i \end{array}$$

Dans le cas particulier de la matrice triangulaire, on notera que les matrices L et U sont assez spécifiques,

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\kappa & & & (0) \\ -\kappa & 1+2\kappa & -\kappa & & \\ & -\kappa & 1+2\kappa & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1+2\kappa & -\kappa \\ (0) & & & & -\kappa & 1+2\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \\ y_3 & \ddots \\ \ddots & \ddots \\ y_{n-1} & z_{n-1} \\ y_n & \end{bmatrix}$$

Il convient de déterminer les coefficients L_i , y_i et z_i . Des rapides calculs d'algèbre linéaire

$$\begin{cases} y_1 = (1 + 2\kappa) \\ y_k = (1 + 2\kappa) - \kappa^2/y_{k-1}, \text{ pour } k = 2, \dots, n \\ z_k = -\kappa \text{ et } L_k = -\kappa/y_k, \text{ pour } k = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

On peut alors réécrire $M\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{b}_i$ sous la forme $L(U\mathbf{u}_{i+1}) = \mathbf{b}_i$, qui se sépare alors en deux problèmes,

$$L\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{b}_i \text{ et } U\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{v}_i,$$

où \mathbf{v}_i est un vecteur intermédiaire.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & (0) \\ -\kappa/y_1 & 1 & & & \\ & -\kappa/y_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ (0) & & & & -\kappa/y_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t_i, x_1) \\ v(t_i, x_2) \\ v(t_i, x_3) \\ \vdots \\ v(t_i, x_{n-1}) \\ v(t_i, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} y_1 & -\kappa & & & (0) \\ y_2 & -\kappa & & & \\ y_3 & & \ddots & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ (0) & & y_{n-1} & -\kappa & \\ & & & y_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i+1,1} \\ u_{i+1,2} \\ u_{i+1,3} \\ \vdots \\ u_{i+1,n-1} \\ u_{i+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}$$

Les vecteurs \mathbf{v}_i sont obtenus aisément par substitution (forward),

$$v_1 = b_1 \text{ et } v_k = b_k + \frac{\kappa v_{k-1}}{y_{k-1}} \text{ pour } k = 2, \dots, n-1.$$

On obtient alors, par substitution (backward),

$$u_{i+1,1} = \frac{v_1}{y_1} \text{ et } u_{i+1,k} = \frac{v_k + \kappa u_{i+1,k+1}}{y_k} \text{ pour } k = 1, \dots, n-2.$$

```
Implémentation de la méthode LU
tri.diag.inv<-function(a,b,c,r)
n<-length(b)
gam<-u<-tri.diag.inv<-1:n
for (j in (n-1):1) {
  b0=b[1]
  u[1]<-r[1]/b0
  for (j in 2:n) {
    gam[j]<-c[j-1]/b0
    b0<-b[j]-a[j]*gam[j]
    u[j]<-(r[j]-a[j]*u[j-1])/b0
    u[j]<-u[j]- gam[j+1]*u[j+1]
  }
  tri.diag.inv<-u }
```

• La méthode SOR (Successive Over-Relaxation)

La méthode **SOR** (Successive Over-Relaxation) est une méthode itérative. Elle est généralement présentée comme un raffinement de la méthode de Gauss-Siegel. L'idée est ici de réécrire l'algorithme implicite sous la forme

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{1+2\kappa}(b(x_i, t_j) + \kappa [u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1}]), \quad (13)$$

en gardant les notations de la partie précédente.

La méthode de **Jacobi** consiste à se donner une valeur $u_{i,j+1}^0$, puis de construire une suite de $u_{i,j+1}^k$, en posant

$$u_{i,j+1}^{k+1} = \frac{1}{1+2\kappa}(b(x_i, t_j) + \kappa [u_{i-1,j+1}^k + u_{i+1,j+1}^k]), \quad (14)$$

et de regarder la limite quand $k \rightarrow \infty$ (cette méthode est en effet convergente dès lors que $\kappa > 0$).

La méthode de **Gauss-Siegel** est une amélioration, qui propose de calculer $u_{i,j+1}^{k+1}$ à partir de $u_{i-1,j+1}^{k+1}$, au lieu de $u_{i-1,j+1}^k$. Aussi, (14) devient

$$u_{i,j+1}^{k+1} = \frac{1}{1 + 2\kappa} (b(x_i, t_j) + \kappa [u_{i-1,j+1})^{k+1} + u_{i+1,j+1}^k]). \quad (15)$$

Enfin, la méthode **SOR** est un raffinement supplémentaire, où on écrit simplement

$$u_{i,j+1}^{k+1} = u(x_i, t_{j+1})^k + [u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j+1}^k], \quad (16)$$

c'est) dire que la valeur à l'étape $k + 1$ correspond à la valeur à la date k , auquel est ajouté un terme correctif. On peut en particulier introduire un paramètre de relaxation $\theta \in]0, 2[$, et

$$\begin{cases} y(x_i, t_{j+1})^{k+1} = \frac{1}{1 + 2\kappa} (b(x_i, t_j) + \kappa [u_{i-1,j+1}^{k+1} + u_{i+1,j+1}^k]) \\ u(x_i, t_{j+1})^{k+1} = u(x_i, t_{j+1})^k + \theta [u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j+1}^k] \end{cases}$$

On parle de “**sur-relaxation**” si $\theta \in]1, 2[$, et de “**sous-relaxation**” si $\theta \in]0, 1[$.

Résolution - méthode SOR

10.11 schéma de Crank-Nicolson

Ce schéma est une “*moyenne*” des deux précédents, où on considère la discrétisation suivant

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2} + \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1}}{h^2} \right] \\ & = 0, \end{aligned}$$

Ce schéma implicite est consistant, d'ordre 2 en x et en t . Notons que

$$\kappa u_{i-1,j+1} - 1(1 + \kappa)u_{i,j+1} + d\kappa u_{i+1,j+1} = -\kappa u_{i,j-1} - 2(1 - \kappa)u_{i,j} - d\kappa u_{i,j+1}.$$

Le facteur d'amplification s'écrit

$$g(h\xi) = \frac{1 - 2\kappa \sin^2(h\xi/2)}{1 + 2\kappa \sin^2(h\xi/2)} = 1 + \frac{4\kappa \sin^2(h\xi/2)}{1 + 2\kappa \sin^2(h\xi/2)},$$

donc $g(h\xi) \leq 1$ quelles que soient les valeur retenue. Le schéma est donc stable.

Le schéma itératif s'écrit

$$u_{i,j+1} - \frac{1}{2}\kappa (u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) = u_{i,j} - \frac{1}{2}\kappa (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}),$$

en notant encore une fois $\kappa = \Delta t/h^2$. La résolution se fait à l'aide de méthodes similaires à celles définie auparavant. En particulier, on peut calculer

$$v(x_i, t_j) = (1 - \kappa)u_{i,j} + \frac{\kappa}{2} (u_{i-1,j+u_{i+1,j}}),$$

(l'algorithme étant récursif) puis de résoudre

$$(1 + \kappa)u_{i,j+1} - \frac{\kappa}{2}(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1}) = v(x_i, t_j).$$

Sous cette forme, on retrouve l'équation obtenue dans le schéma implicite.

10.12 schéma de De Fort-Frankel

On considère ici le schéma suivant

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} - d\frac{u_{i-1,j} - (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + u_{i+1,j}}{h^2} = 0,$$

de telle sorte que

$$L_{h,\Delta t}u(x, t) - Lu(x, t) = -\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + O(h^2) + O((\Delta t)^2).$$

Ce schéma est alors consistant si et seulement si $\Delta t/h \rightarrow 0$ quand $h, \Delta t \rightarrow 0$. Posons $\kappa = \Delta t/h^2$, alors

$$(1 + 2d\kappa)u_{i,j+1} = 2\kappa(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (1 - 2\kappa)u_{i,j-1}.$$

L'étude de la stabilité est un peu plus complexe, mais on peut montrer qu'il y a toujours stabilité.

Les quatre schémas présentés dans cette partie peuvent être représentés par les dessins de la Figure 53

10.13 Prix d'un call européen par résolution d'e.d.p.

Résolution à partir de l'équation de la chaleur, et changement de variables

Le prix d'une option européen, de payoff $h(S_T)$ à maturité T vaut, à la date $t = 0$, $g(0, S_0)$ où g est la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial t} + rx\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = rg, \text{ pour } x \geq 0, t \in [0, T],$$

avec la condition finale donnée par $g(T, x) = h(x) = \max\{0, x - K\}$, dans le cas d'un call. Pour les calculs, on rajoute la condition limite $g(\cdot, 0) = 0$. De plus, comme il faut discréteriser l'espace des prix ($x \in [0, a]$, quand $x = a$, g doit être solution de l'équation

$$\frac{\partial g}{\partial t} + rx\frac{\partial g}{\partial x} = rg \text{ pour } x = a.$$

Aussi, en $x = a$, on en déduit que $\frac{\partial g}{\partial t} + rx = rg$ car $g(x) = x - K$ en a . Aussi, après intégration, on en déduit que g vérifie la condition de bord $g(\cdot, a) = a - K \exp(r[\cdot - T])$.

On considère le changement de variable $y = \log(x/K)$ (ou $x = Ke^y$), de telle sorte que l'équation s'écrit

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = rg, \text{ pour } y \leq \log(a/K), t \geq 0.$$

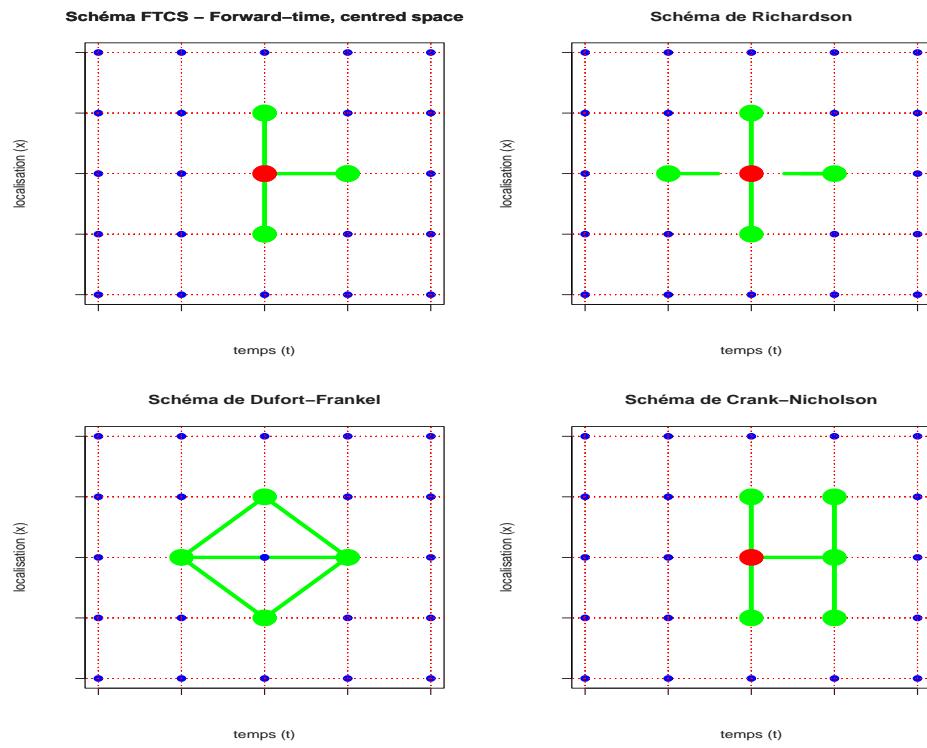


Figure 53: Les différents schémas de discréétisation de l'équation de la chaleur

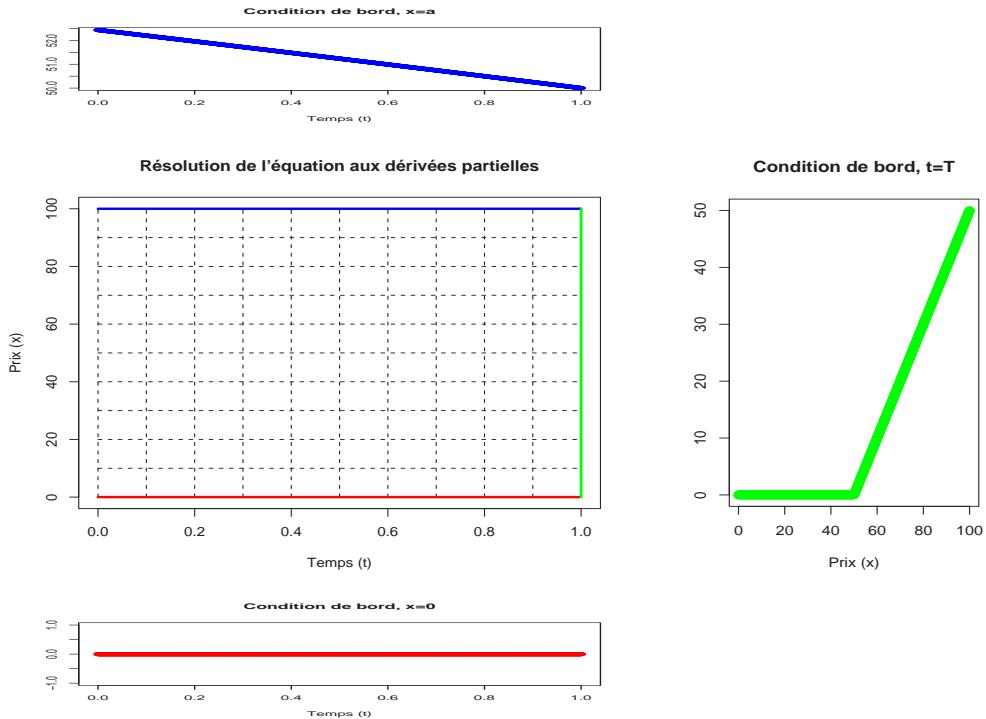


Figure 54: Résolution de l'équation aux dérivées partielles.

On fait alors le changement de temps $t = T - 2\tau/\sigma^2$, soit

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = (k-1) \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - kg, \text{ pour } y \leq \log(a/K), \tau \in [0, (\sigma^2 - 2)/\sigma^2],$$

en posant $k = 2r/\sigma^2$. On se ramène à l'équation classique en posant $f(y, \tau) = \exp(\alpha y + \beta \tau)g(y, \tau)$, où

$$\alpha = \frac{1-k}{2} \text{ et } \beta = \alpha^2 + \alpha(k-1) - k = -(1+k)^2/4,$$

soit f solution de $\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, avec comme conditions de bords une condition en temps

$$f(y, 0) = \exp(-\alpha y) \max\{\exp(x) - 1, 0\} = \max\{e^{(k+1)y/2} - e^{(k-1)y/2}, 0\},$$

(correspondant au temps $t = T$), et les conditions en espace

$$f(y, \tau) = \exp((k+1)y/2), \text{ quand } y \rightarrow +\infty$$

(ou tout du moins la borne supérieure du support) et $f(y, \cdot) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow -\infty$.

On met alors en place un algorithme numérique pour résoudre cette équation.

Pour rappel, la solution de ce problème s'écrit

$$f(\tau, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) e^{-(x-y)^2/4\tau} dx,$$

où g_0 est la condition de bord en temps,

$$f_0(x) = f(0, x) = \max\{e^{(k+1)x/2} - e^{(k-1)x/2}, 0\}.$$

Comme on sait que $S_0 = 50$ et $K = 50$, on sait autour de quelle valeur (en y) il convient de faire les calculs. En particulier, on peut considérer une grille $[-1, 1]$ en y .

A partir de cette solution numérique, en y et τ , on fait alors les changements de variable inverse, en notant que

$$g(y, \tau) = \exp(-\alpha y - \beta \tau) f(y, \tau),$$

soit

$$g(x, t) = \exp\left(-\alpha \log \frac{x}{K} - \beta \frac{(T-t)\sigma^2}{2}\right) \hat{f}\left(\log \frac{x}{K}, \frac{(T-t)\sigma^2}{2}\right).$$

La condition de bord supérieure est un peu délicate à traiter. Aussi, il peut être plus judicieux de valoriser un [put](#), et d'utiliser les [formules de parité](#) pour obtenir le prix du call.

Remarque 72. *En faisant le changement de temps, $t = T - 2\tau/\sigma^2$, on s'est ramené de $[0, T]$ à $[0, \sigma^2 T/2]$: si σ est petit, l'intervalle de temps sera tout petit (avec un cas limite si $\sigma \rightarrow 0$).*

Résolution directe

On peut aussi tenter une résolution directe à partir de l'équation obtenue par BLACK & SCHOLES (1973),

$$\frac{\partial g}{\partial t} + rx \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = rg, \text{ pour } x \geq [0, a], t \in [0, T],$$

Résolution de l'équation de la chaleur

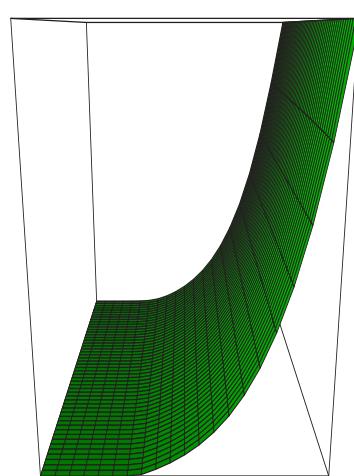
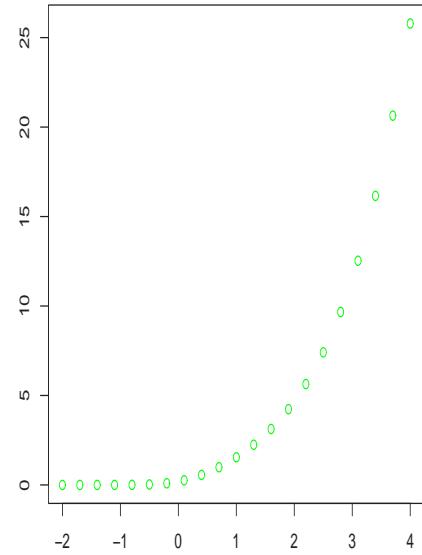
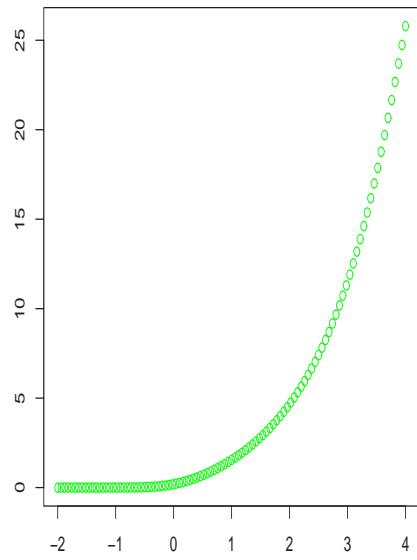
Résolution de l'équation de la chaleur, valeur en $t=T$ 

Figure 55: Résolution de l'équation de la chaleur et prix du call.

Résolution de l'équation de la chaleur



Résolution de l'équation de la Black & Scholes

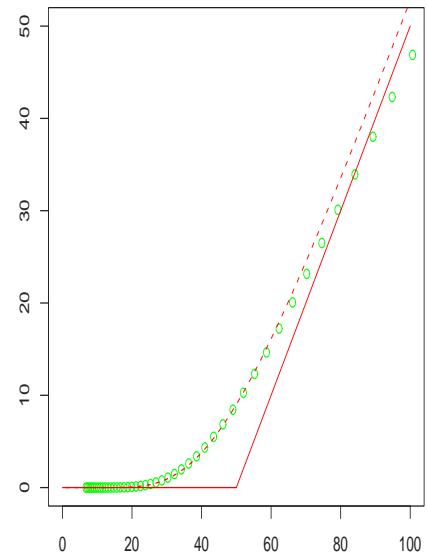


Figure 56: Résolution de l'équation de la chaleur et prix du call.

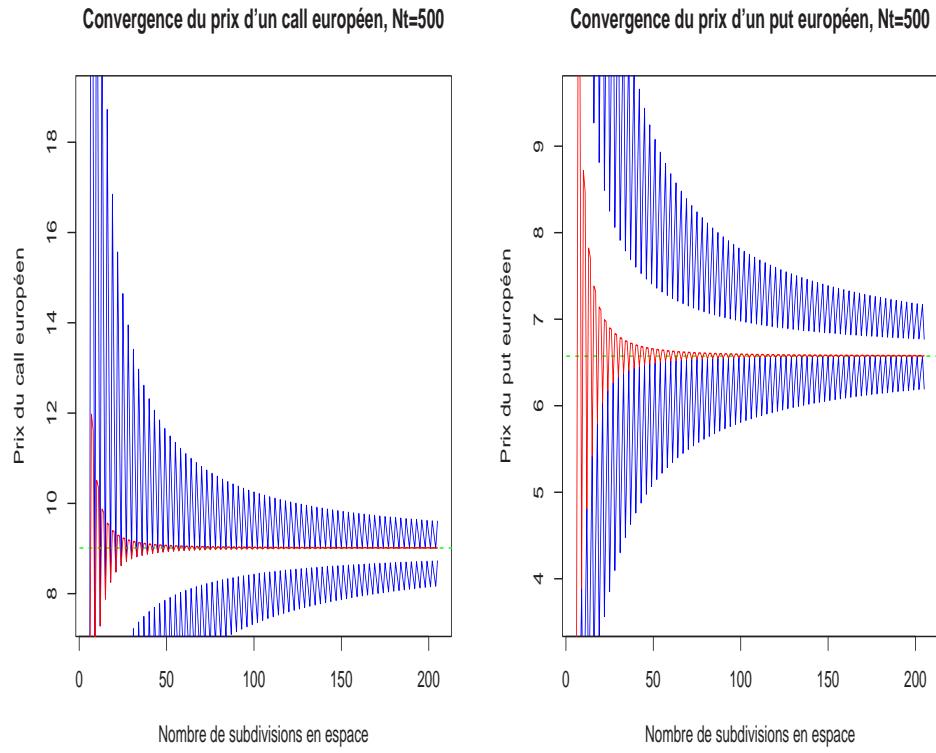


Figure 57: Convergence de la résolution de l'équation aux dérivées partielles, valorisation d'un call et d'un put.

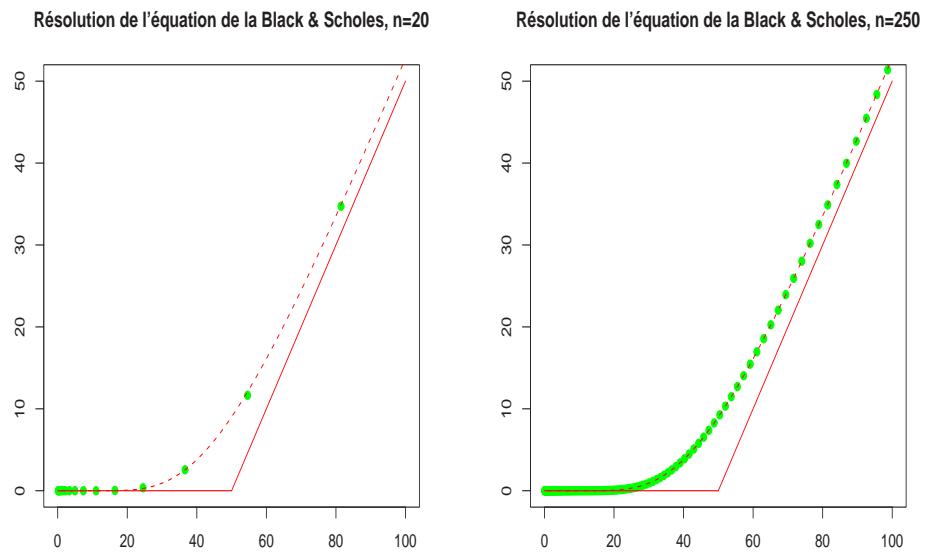


Figure 58: Résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles.

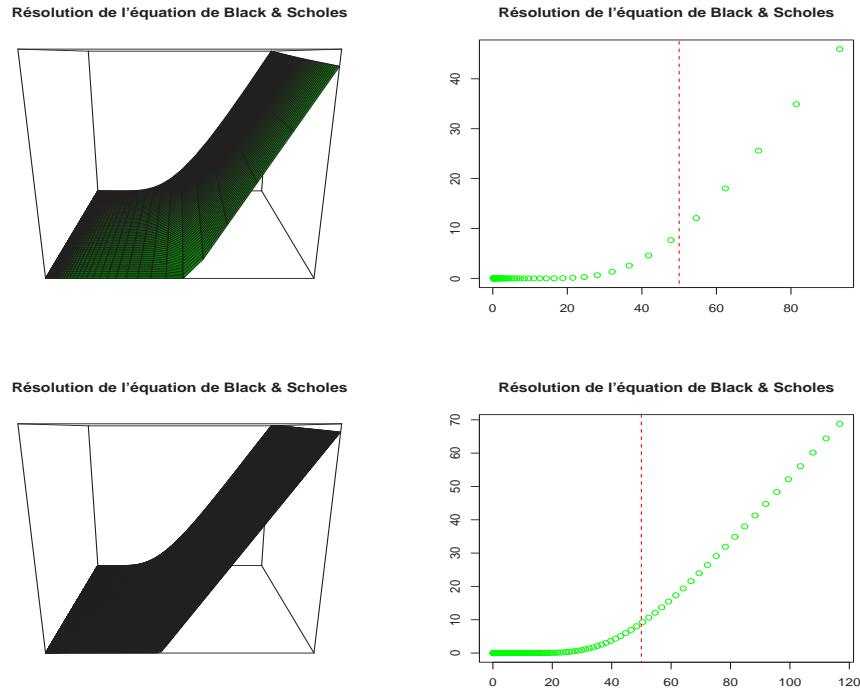


Figure 59: Résolution directe de l'équation aux dérivées partielles.

avec la condition finale donnée par $g(T, x) = h(x) = \max\{0, x - K\}$, dans le cas d'un call. Pour les calculs, on rajoute la condition limite $g(\cdot, 0) = 0$ et $g(\cdot, a) = a - K \exp(r \cdot - T)$.

Les graphiques ci-dessous montrent la convergence du prix en fonction du pas de temps en espace, à λ fixé. Sont représentées les deux valeurs du prix obtenues pour des valeurs de S les plus proches de S_0 , et le trait au centre correspond à une interpolation linéaire entre les deux valeurs les plus proches.

10.14 Différence entre les schémas forward, backward et centrés

Considérons le cas limite $\sigma = 0$, de telle sorte que l'équation aux dérivées partielles devient, où t désigne le temps avant échéance,

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = rx \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} - rg(x, t).$$

Un schéma de discréétisation centré donne

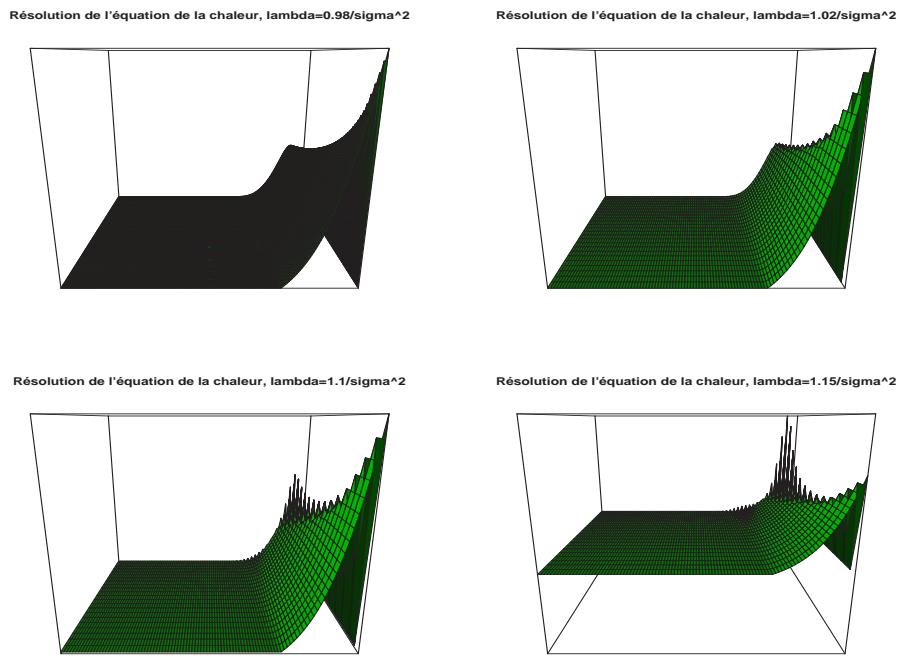
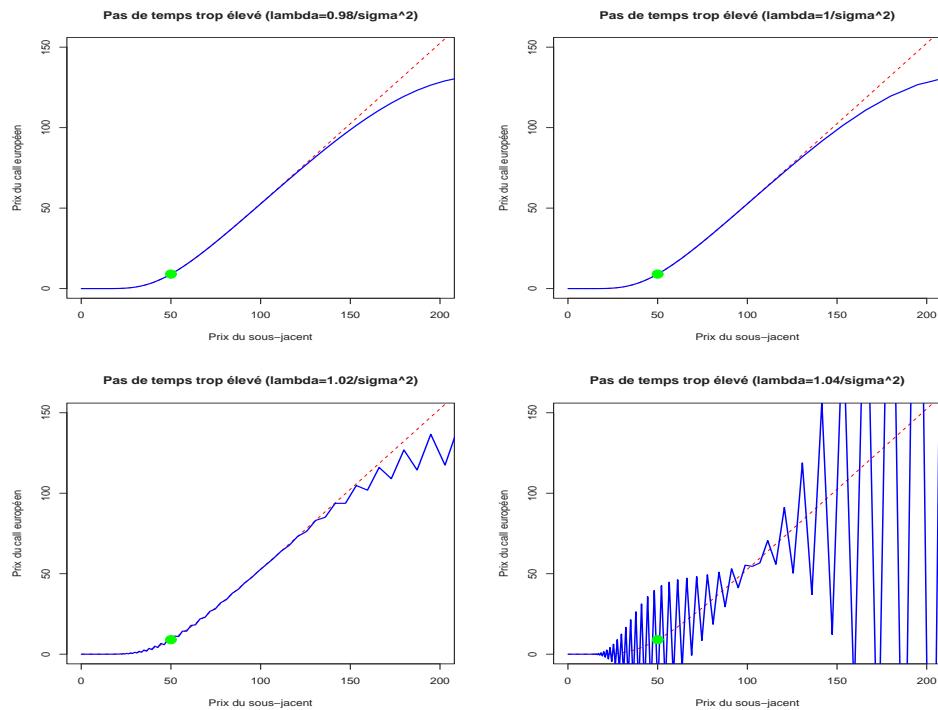
$$g_{i,j+1} = [1 - r\Delta t]g_{i,j} - \frac{S_i r \Delta t}{2h}g_{i-1,j} + \frac{S_i r \Delta t}{2h}g_{i+1,j}.$$

Supposons de plus que le payoff (en $t = 0$) est de la forme suivant

$$g(S, t = 0) = \mathbf{1}(S \in [S_k \pm h/2]) \text{ soit } g_{i,0} = \mathbf{1}(i = k).$$

En substituant dans l'équation de récurrence, on en déduit que

$$g_{k,1} = (1 - r\Delta t) \text{ et } g_{k\pm 1,1} = \mp \frac{(k \pm 1)r\Delta t}{2}.$$

Figure 60: Résolutions numériques pour différentes valeurs de λ .Figure 61: Résolutions numériques pour différentes valeurs de λ .

Si $r\Delta t \leq 1$ alors $g_{k,1} \geq 0$ et $g_{k-1,1} \geq 0$. En revanche, quelles que soient Δt et h , on aura toujours

$$g_{k+1,1} = -\frac{(k+1)r\Delta t}{2} < 0,$$

ce qui est improbable, économiquement.

Un schéma de discréétisation **forward** donne

$$g_{i,j+1} = \left[1 - \left(1 + \frac{S_i}{h} \right) r\Delta t \right] g_{i,j} + \frac{rS_i\Delta t}{h} g_{i+1,j},$$

avec toujours la même condition initiale, $g_{i,0} = \mathbf{1}(i = k)$. Là aussi, par substitution, on en déduit que

$$g_{k,1} = \left(1 - \left(1 + \frac{S_k}{h} \right) r\Delta t \right), g_{k-1,1} = \left(\frac{S_k}{h} - 1 \right) r\Delta t \text{ et } g_{k+1,1} = 0.$$

Si Δt est suffisement petit (i.e. $(1+n)r\Delta t \leq 1$), les trois valeurs sont positives.

On peut noter sur cet exemple simple qu'une méthode a priori moins efficace (forward vs. Crank Nicholson) peut donner des résultats sensiblement plus intéressants.

10.15 Discréétisation d'une edp sur un maillage non uniforme

L'idée est ici de considérer un maillage qui se rafine au voisinage de S_0 et de K .

La première difficulté est qu'en faisant un maillage trop fin en S , le schéma explose.

L'autre difficulté est de réécrire correctement l'algorithme itératif. En gardant un pas de temps constant, le schéma **centré** se réécrit sous la forme suivante

$$u_{i,j+1} = [1 - (\alpha_i + \beta_i + r)\Delta t]u_{i,j} + \alpha_i\Delta t u_{i-1,j} + \beta_i\Delta t u_{i+1,j},$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\sigma^2 S_i^2}{(S_i - S_{i-1})(S_{i+1} - S_{i-1})} - \frac{rS_i}{S_{i+1} - S_{i-1}}, \\ \beta_i &= \frac{\sigma^2 S_i^2}{(S_{i+1} - S_i)(S_{i+1} - S_{i-1})} + \frac{rS_i}{S_{i+1} - S_{i-1}}. \end{aligned}$$

Pour le schéma **forward**, (??) reste valide, mais

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\sigma^2 S_i^2}{(S_i - S_{i-1})(S_{i+1} - S_{i-1})}, \\ \beta_i &= \frac{\sigma^2 S_i^2}{(S_{i+1} - S_i)(S_{i+1} - S_{i-1})} - \frac{rS_i}{S_{i+1} - S_i}. \end{aligned}$$

Pour le schéma **backward**,

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\sigma^2 S_i^2}{(S_i - S_{i-1})(S_{i+1} - S_{i-1})} - \frac{rS_i}{S_i - S_{i-1}}, \\ \beta_i &= \frac{\sigma^2 S_i^2}{(S_{i+1} - S_i)(S_{i+1} - S_{i-1})}. \end{aligned}$$

Nous avons vu dans l'exemple limite où $\sigma \rightarrow 0$ qu'il était souhaitable qu'un schéma de discrétisation ait des coefficients $a_{i,j}, b_{i,j}$ et $c_{i,j}$ positifs,

$$u_{i,j+1} = \underbrace{[1 - (\alpha_i + \beta_i + r)\Delta t]}_{c_{i,j}} u_{i,j} + \underbrace{\alpha_i \Delta t}_{a_{i,j}} u_{i-1,j} + \underbrace{\beta_i \Delta t}_{b_{i,j}} u_{i+1,j}.$$

Cette condition de positivité est en fait **nécessaire** pour assurer la stabilité de l'algorithme.

Une condition **nécessaire** pour assurer la positivité des coefficients est d'avoir

$$\alpha_i \geq 0 \text{ et } \beta_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Pour corriger et assurer la positivité des coefficients, on peut utiliser une méthode de **décentrage** (upstream weighting). L'idée du recentrage dans les méthodes de différences finies et de poser

$$\alpha_i^{\text{décentré}} = \alpha_i^{\text{forward}} \text{ et } \beta_i^{\text{décentré}} = \beta_i^{\text{forward}} \text{ si } \alpha_i^{\text{forward}}, \beta_i^{\text{forward}} \geq 0,$$

et

$$\alpha_i^{\text{décentré}} = \alpha_i^{\text{backward}} \text{ et } \beta_i^{\text{décentré}} = \beta_i^{\text{backward}} \text{ sinon.}$$

Ce mécanisme assure la positivité des coefficients α et β . On peut alors accélérer la convergence en considérant comme poids

$$\alpha_i^{\text{centré}} = \alpha_i^{\text{centré}} \text{ et } \beta_i^{\text{centré}} = \beta_i^{\text{centré}} \text{ si } \alpha_i^{\text{centré}}, \beta_i^{\text{centré}} \geq 0,$$

et

$$\alpha_i = \alpha_i^{\text{décentré}} \text{ et } \beta_i = \beta_i^{\text{décentré}} \text{ sinon.}$$

L'intérêt de cette méthode est en particulier important si σ est faible. En effet, $\alpha_i^{\text{centré}} \geq 0$ si $\sigma^2 \geq r[S_i - S_{i-1}]/S_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$, soit $\sigma^2 \geq rh/S_i$.

Remarque 73. *En fait, cette méthode de décentrage devient essentielle pour des diffusions plus complexes, en particulier si elles font intervenir un retour à la moyenne.*

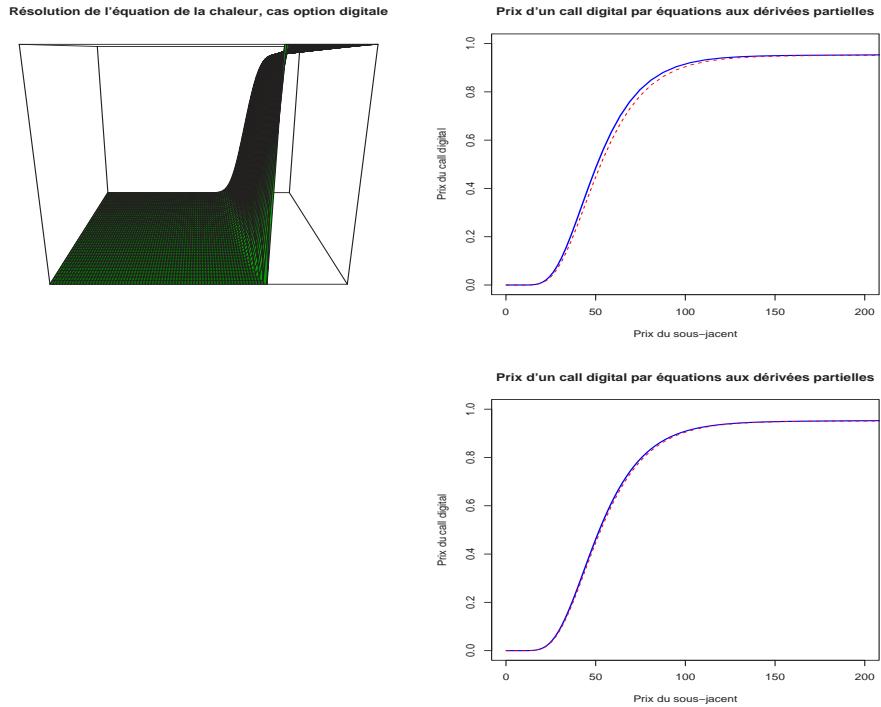
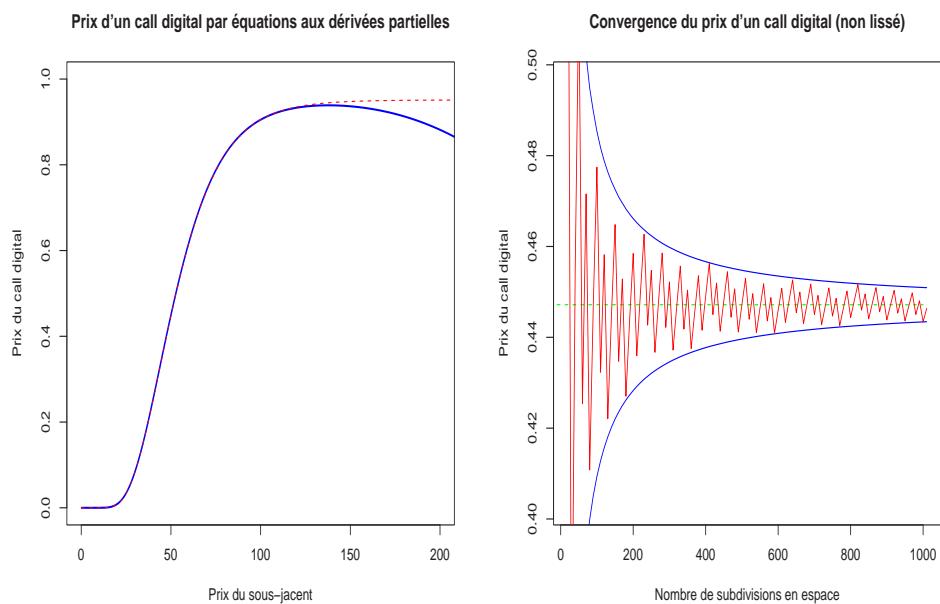
Dans le schéma centré de Crank-Nicolson, cette condition nécessaire n'est toutefois pas suffisante, et il est possible d'obtenir une divergence (et oscillations).

10.16 Autres formes de payoff, et conditions de bord

Considérons, au lieu d'un call européen classique le cas d'un call digital. La convergence est relativement lente. La raison étant la discontinuité de la fonction de payoff (fonction indicatrice), une idée peut être d'approcher le payoff par une fonction \mathcal{C}^∞ aussi proche qu'on le souhaite (RANNACHER (1984)). Au lieu de considérer comme payoff $x \mapsto \mathbf{1}(x > 0)$, on considère

$$g_h(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{x}{h} \right) \right),$$

qui converge vers la fonction indicatrice lorsque $h \rightarrow 0$.

Figure 62: Valorisation d'un call digital, $m = 100, 250$.Figure 63: Valorisation d'un call digital, $m = 1000$.

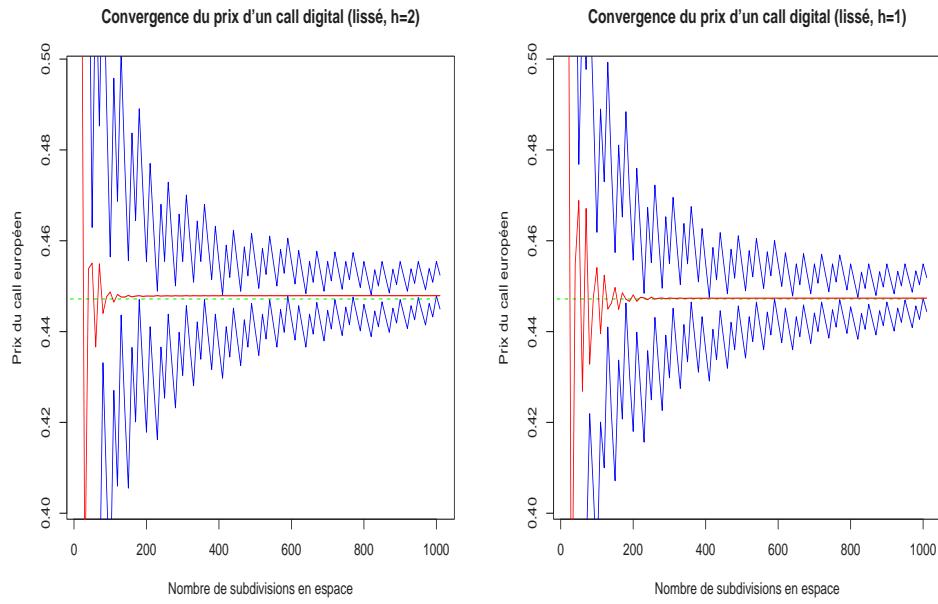


Figure 64: Valorisation d'un call digital, impact du lissage.

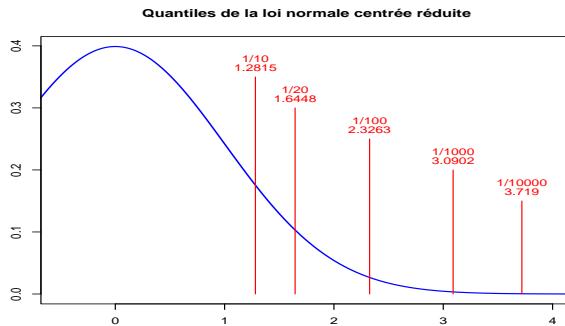
10.17 Les conditions de bord

Une des conditions de bords est obtenue lorsque $S_t \rightarrow \infty$. Concrètement, il convient de borner $S \in [0, b]$ (voire $[a, b]$ si on s'intéresse au logarithme).

Si $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ (modèle de BLACK & SCHOLES (1973)), alors

$$S_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma Z \sqrt{T-t} \right), \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Avec un seuil $M = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma 3\sqrt{T} \right)$, on oublie 1 cas sur 750, et si $M = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma 4\sqrt{T} \right)$, 1 sur 31 500.



Comme le note FORSYTH & VETZAL (2006), en pratique, si $\sigma \leq 0.4$ et $T \leq 1$ année, alors $M = 10K$ est un ordre de grandeur très conservateur.

La Figure suivante montre la convergence vers le prix théorique de la formule de BLACK & SCHOLES si $\sigma = 0.4$ et $T = 1$ année, lors que $M = \theta K$, où $\theta = 2, 4, 6$ et 8 .

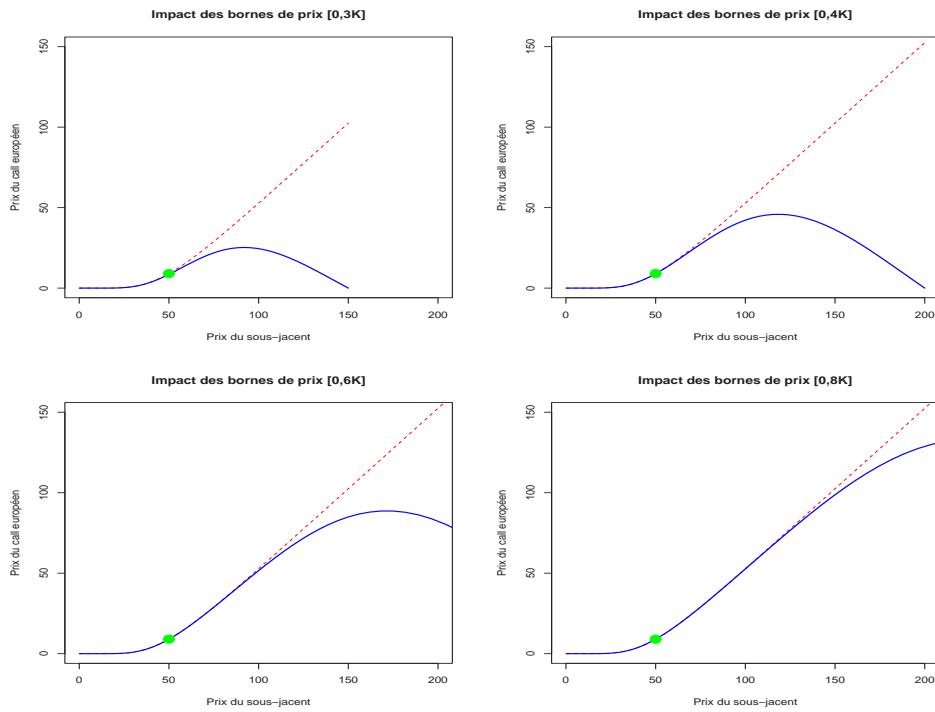


Figure 65: Impact des bornes sur la valorisation.

10.18 Résolution implicite de l'équation

Pour le schéma explicite, nous venons d'implémenter l'algorithme, soit sur l'équation de la chaleur, soit sur l'équation de BLACK & SCHOLES directement. Le schéma converge à condition que le pas de temps soit suffisamment petit.

Les autres schémas (implicite, ou Crank Nicolson) font intervenir une résolution implicite. Notons pour simplifier

$$\mathcal{A}g(x, t) = \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} + rx \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} - rg(x, t),$$

de telle sorte que l'équation de BLACK & SCHOLES devient

$$\mathcal{A}g(x, t) = \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}.$$

En discrétoisant cet opérateur, i.e. $[\mathcal{A}g]_{i,j}$ on peut écrire, pour le schéma implicite,

$$[\mathcal{A}g]_{i,j+1} = \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{\Delta t},$$

et pour le schéma de Crank Nicolson (centré),

$$\frac{1}{2} ([\mathcal{A}g]_{i,j+1} + [\mathcal{A}g]_{i,j}) = \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{\Delta t}. \quad (18)$$

Ces deux méthodes donnent alors respectivement

$$g_{i,j+1} = g_{i,j} + \Delta t [\alpha_1 (g_{i-1,j+1} - g_{i,j+1}) + \beta_i (g_{i+1,j+1} - g_{i,j+1}) - r g_{i,j+1}],$$

pour le schéma implicite, et pour le schéma de Crank-Nicolson

$$\begin{aligned} g_{i,j+1} &= g_{i,j} \\ &+ \frac{\Delta t}{2} [\alpha_1(g_{i-1,j+1}) - g_{i,j+1}] + \beta_i(g_{i+1,j+1}) - g_{i,j+1} - r g_{i,j+1}] \\ &+ \frac{\Delta t}{2} [\alpha_1(g_{i-1,j}) - g_{i,j}] + \beta_i(g_{i+1,j}) - g_{i,j} - r g_{i,j}]. \end{aligned}$$

En posant $\mathbf{g}_j = (g_{0,j}, g_{1,j}, \dots, g_{m,j})$, et M la matrice tridiagonale, avec comme ligne générique

$$M_i = \Delta t [\begin{array}{ccccccc} 0 & \dots & 0 & -\alpha_i & (\alpha_i + \beta_i + r) & -\beta_i & 0 & \dots & 0 \end{array}]$$

Le système d'équations dans le schéma implicite s'écrit

$$[\mathbb{I} + M] \mathbf{g}_{j+1} = \mathbf{g}_j$$

Pour le schéma de Crank-Nicolson, le système d'équations écrit

$$[\mathbb{I} + M/2] \mathbf{g}_{j+1} = [\mathbb{I} - M/2] \mathbf{g}_j.$$

10.19 Calcul des grecques par équations aux dérivées partielles

Rappelons que les grecques sont des sensibilités des prix d'options par rapport à une de ses composantes.

Le ρ est la sensibilité par rapport au taux sans risque r . Rappelons que le prix d'un call C vérifie l'équation suivante

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rs \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0,$$

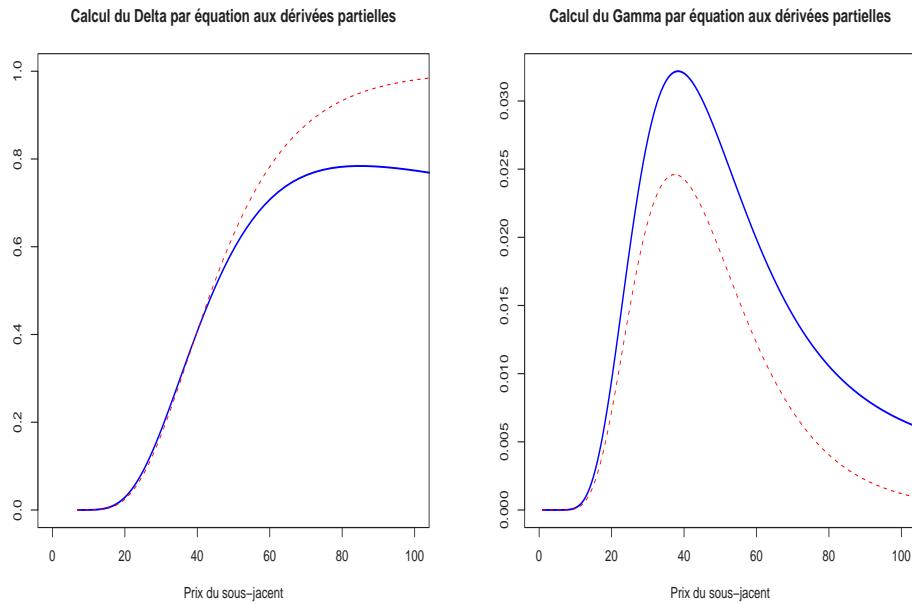
avec une condition de bord de la forme.....

Une autre approche est d'utiliser une méthode de différence finie sur la valeur numérique. Pour $\Delta = \partial C / \partial S$ et $\Gamma = \partial^2 C / \partial S^2$, rappelons que pour le call européen, la fonction de payoff n'est pas dérivable à la monnaie ($S_T = K$). On pourrait s'attendre à avoir numériquement une discontinuité en étudiant la différence finie au voisinage de K , ce qui n'est pas le cas

10.20 Equations aux dérivées partielles pour les options “path-dependent”

Comme nous l'avons vu, plusieurs options appartiennent à la vaste catégorie des options dites “path-dependent”,

- les calls dit **average strike**, de payoff $\max \left\{ S_0 - \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt, 0 \right\}$,
- les calls dit **average rate**, de payoff $\max \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K, 0 \right\}$,
- les calls dit **lookback strike**, de payoff $\max \{ \max\{S_t, t \in [0, T] - S_0, 0 \} \}$,
- les calls dit **lookback rate**, de payoff $\max \{ K - \max\{S_t, t \in [0, T] \}, 0 \}$.

Figure 66: Calcul du Δ et du Γ pour un call européen.

Notons que pour les premiers, la moyenne arithmétique $\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$ peut être remplacée par la moyenne géométrique, $\exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \log S_t dt\right)$.

10.21 Cas particulier, les options sur moyenne

De manière générale pour les options sur moyenne, étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière, on note

$$I_t = \int_0^t f(S_u, u) du,$$

de telle sorte que $f(s, t) = s$ corresponde à la moyenne arithmétique, et $f(s, t) = \log s$ à la moyenne géométrique.

Si le prix de l'option européenne peut s'écrire $g(S, I, t)$, alors $g(x, y, t)$ doit être solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + f(x, t) \frac{\partial g}{\partial y} = r \left(g - x \frac{\partial g}{\partial x} \right).$$

Dans le cas des options strike call sur moyenne arithmétique, le payoff est $S_T \cdot g(R, T)$ où

$$g(R, T) = \max \left\{ 1 - \frac{R}{T} \right\} \text{ où } R_t = \frac{1}{S_t} \int_0^t S_u du,$$

où g vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (1 - rx) \frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

avec des conditions de bords de la forme $g(\infty, t) = 0$.

10.22 Cas particulier, les options sur maximum

Dans le cas des options sur maximum (voire minimum), il est possible d'utiliser la méthode présentée pour les options sur moyenne, en notant que

$$\max \{|S_u|, u \in [0, t]\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^t |S_u|^n du \right)^{\frac{1}{n}}.$$

En notant que le prix est supposé toujours positif, on peut alors noter $I_{n,t}$ le processus

$$I_{n,t} = \int_0^t S_u^n du, \text{ et } J_{n,t} = (I_n n, t)^{1/n}.$$

Remarque 74. Pour les calculs formels sur les options sur minima ou maxima, quelques formules de calcul stochastiques sont utiles. Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien arithmétique, i.e. $Z_t = \mu t + W_t$ où $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. On note M_t et m_t respectivement le maximum et le minimum du processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ sur la période $[0, t]$, i.e.

$$M_t = \sup_{s \in [0, t]} \{\mu s + W_s\} \text{ et } m_t = \inf_{s \in [0, t]} \{\mu s + W_s\}.$$

Enfin, on note τ_h le premier temps d'atteinte du niveau h pour $(Z_t)_{t \geq 0}$. Alors la loi jointe de (Z_t, M_t) admet pour densité

$$f_{Z,M,t}(x, y) = \frac{2(2y - x)}{\sqrt{2\pi t^2}} \exp \left(-\frac{(2y - x)^3}{2t} + \mu x - \frac{\mu^2 t}{2} \right). \quad (19)$$

De manière similaire la loi jointe de (Z_t, m_t) admet pour densité

$$f_{Z,m,t}(x, y) = \frac{2(x - 2y)}{\sqrt{2\pi t^2}} \exp \left(-\frac{(2y - x)^3}{2t} - \mu x - \frac{\mu^2 t}{2} \right) \quad (20)$$

On peut en déduire en particulier la loi du maximum M_t ,

$$f_{M,t}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp \left(-\frac{(x - \mu t)^2}{2t} \right) - 2\mu \exp(2\mu x) \Phi \left(-\frac{x + \mu t}{\sqrt{t}} \right), \quad (21)$$

où comme toujours Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Enfin, la loi du temps d'arrêt est donnée par

$$f_{\tau,h}(x) = \frac{|h|}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp \left(-\frac{h - \mu x}{2x} \right), \quad (22)$$

Pour tout complément, on pourra consulter KARATZAS & SHREVE (1991) ou BORODIN & SALMINEN (1996).

A FAIRE...

10.23 Pour aller plus loin sur l'utilisation des e.d.p.

Nous avons vu que trouver le prix d'un call ou d'un put dans le modèle de BLACK & SCHOLES (1973) se ramenait à résoudre une **équation parabolique** de la chaleur, de la forme

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

pour lesquelles des méthodes simple d'éléments finis permettent d'obtenir facilement et rapidement un prix.

Toutefois, dans certains cas, l'équation dégénère en un cas limite, celui des **équations hyperboliques**,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \pm \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

En particulier,

- dans les modèles à volatilité stochastique,
- dans les modèles de retour à la moyenne.

De plus, un autre problème peut se poser pour certaines options (avec volatilité incertaine, ou les options **passport**): l'équation aux dérivées partielles devient nonlinéaire, et la solution peut ne pas être unique.

L'absence d'unicité de la solution est toujours gênante d'un point de vue financier, et on introduit alors la notion de **solution de viscosité**.

10.24 Cas des processus à sauts, et valorisation par e.d.p.

Supposons maintenant que le processus de diffusion sous-jacent n'est plus simplement un mouvement brownien géométrique, mais qu'il y ait en plus un processus à sauts,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \nu dt + \sigma dW_t + (\eta - 1) dq_t,$$

où dq_t est un processus de Poisson homogène, de paramètre λ , et où $\eta - 1$ correspond à l'amplitude du saut (faisant passer de S_t à ηS_t s'il y a un saut en t). On note f_η la densité de la taille des sauts.

Exemple 75. Si la taille des sauts augmente d'un facteur suivant une loi lognormale

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma x} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\gamma^2}\right).$$

Il est alors possible de montrer que le prix d'un produit contingent vérifie une **équation intégro-différentielle** de la forme

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} + Ag(x, t) + \lambda \int_0^\infty g(xz) f_\eta(z) dz = 0, \quad (23)$$

où, pour ici, en notant $\kappa = \mathbb{E}(\eta - 1)$,

$$Ag(x, t) = \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} + (r - \lambda \kappa)x \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} - (r + \lambda)g(x, t),$$

Les sauts empêchent toute couverture parfaite impossible.

ZHANG (1997) puis ANDERSEN & ANDREASEN (2000), et CONT & VOLTCHKOVA (2003) ont proposé une méthode de calcul basé sur des différences finies. L'équation 23 devient, dans un schéma implicite

$$\frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{\Delta t} + [Ag]_{i,j+1} + \left[\lambda \int_0^\infty g(xz) f_\eta(z) dz \right]_{i,j} = 0.$$

Le terme $[Ag]$ est certes différent du cas sans sauts, mais il reste facilement discétisable. La principale difficulté est dans l'évaluation du troisième terme.

Faisons le changement de variable $y = \log x$, et notons $g_* = g(\exp(\cdot))$ et $f_{\eta*}(\cdot) = f_\eta(\exp(\cdot)) \exp(\cdot)$, de telle sorte que

$$\int_0^\infty g(xz) f_\eta(z) dz = \int_{-\infty}^\infty g_*(y + s) f_{\eta*}(s) ds = I(y).$$

Cette dernière intégrale se calcule alors simplement par interpolation (e.g. par des trapèzes),

$$I(y_i) \sim \sum_{j=-k/2+1}^{k/2} [g_*]_{i+j} [f_{\eta*}]_j \Delta y.$$

En poursuivant un peu les calculs, on peut montrer que l'on se ramène à un système matriciel de la forme suivante

$$(\mathbb{I} + \Delta t A - \lambda \Delta t B) \mathbf{g}_{j+1} = \mathbf{g}_j, \quad (24)$$

où A est la discréation de \mathcal{A} , et B de l'intégrale. Mais si A est une matrice relativement creuse (elle est généralement composée de la diagonale et des deux premières surdiagonale), alors que B est beaucoup plus dense.

Une solution *a priori* simpliste consiste à supposer que

$$\lambda \Delta t B) \mathbf{g}_{j+1} \sim \lambda \Delta t B) \mathbf{g}_j,$$

de telle sorte que (24) peut se réécrire

$$(\mathbb{I} + \Delta t A) \mathbf{g}_{j+1} = \mathbf{g}_j + [\lambda \Delta t B] \mathbf{g}_j.$$

La matrice de gauche est alors suffisement creuse pour que les calculs ne soient pas trop complexes.

Aussi surprenant que cela paraisse D'HALLUIN, FORSYTH & VETZAL (2005) ont montré que ce schéma convergeait (sous des conditions pas trop fortes) vers la bonne valeur.

Pour le schéma de Crank Nicolson, le système matriciel devient

$$\left(\mathbb{I} + \frac{\Delta t}{2} A - \frac{\lambda \Delta t}{2} B \right) \mathbf{g}_{j+1} = \left(\mathbb{I} - \frac{\Delta t}{2} A + \frac{\lambda \Delta t}{2} B \right) \mathbf{g}_j.$$

Au lieu de faire des calculs et des inversions de matrices relativement denses, des méthodes de type itératives peuvent être intéressantes ici.

Pour calculer \mathbf{g}_{j+1} , on utilise \mathbf{g}_j , et à l'étape $k + 1$, on utilise \mathbf{g}_{j+1}^k , sous la forme suivante (inspiré de l'approximation faite dans le cas implicite)

$$\left(\mathbb{I} + \frac{\Delta t}{2} A \right) \mathbf{g}_{j+1}^k = \left(\mathbb{I} - \frac{\Delta t}{2} A \right) \mathbf{g}_j + \frac{\lambda \Delta t}{2} (B\mathbf{g}_j^k + B\mathbf{g}_j).$$

On a ici un algorithme de recherche de point fixe, qui converge très rapidement. En particulier, si $\epsilon^k = \mathbf{g}_{j+1} - \mathbf{g}_{j+1}^k$, alors

$$\|\epsilon^{k+1}\|_\infty \leq \|\epsilon^k\|_\infty \left(\frac{\lambda \Delta t / 2}{1 + (r + \lambda) \Delta t} / 2 \right).$$

En particulier, si $\lambda \Delta t \ll 1$, alors $\|\epsilon^{k+1}\|_\infty \sim \|\epsilon^k\|_\infty \lambda \Delta t / 2$.

11 Méthodes de simulations dans le modèle de BLACK & SCHOLES (1973)

11.1 Introduction aux méthodes de *Monte Carlo*

Les méthodes de Monte Carlo sont particulièrement intéressante pour calculer des aires, des volumes, ou plus généralement des intégrales.

- **Méthode déterministe de calcul d'aire, de volume ou d'intégrale**

On cherche à évaluer un volume \mathcal{V} dans \mathbb{R}^d , à l'aide n points. L'idée est d'entourer le volume par une boîte. Si $n = k^d$ pour un entier k , cela signifie qu'on peut considérer une grille de \mathbb{R}^d ayant k points de chaque côté. Formellement, si $\mathcal{V} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, pour tout dimension i , on considère une partition homogène de l'intervalle $[a_i, b_i]$, i.e. des points $x_{i,j} = a_i + (j - 1)(b_i - a_i)/(k - 1)$, pour $j = 1, \dots, k$.

Une approximation du volume sera alors

$$V(\mathcal{V}) \sim \left(\prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \right) \times \frac{1}{n} \times \sum_{j_1, \dots, j_d \in \{1, \dots, k\}} \mathbf{1}((x_{1,j_1}, \dots, x_{d,j_d}) \in \mathcal{V}) = V_n(\mathcal{V}),$$

c'est à dire que l'on compte combien de points appartiennent au volume.

Notons que si $L(\mathcal{V})$ est la longueur du contour du volume, en dimension 2, alors il est possible de montrer que

$$|V_n(\mathcal{V}) - V(\mathcal{V})| \leq \frac{L(\mathcal{V})}{k} = \frac{L(\mathcal{V})}{n^{1/d}}.$$

Aussi à n fixé, la vitesse de convergence va décroître avec la dimension d , c'est à dire que l'erreur est en $O(1/n^{1/d})$.

Exemple 76. On cherche ici à approcher le volume de la sphère unité en dimension 2 et 3. La Figure ci dessous montre l'évolution de l'approximation en fonction de n .

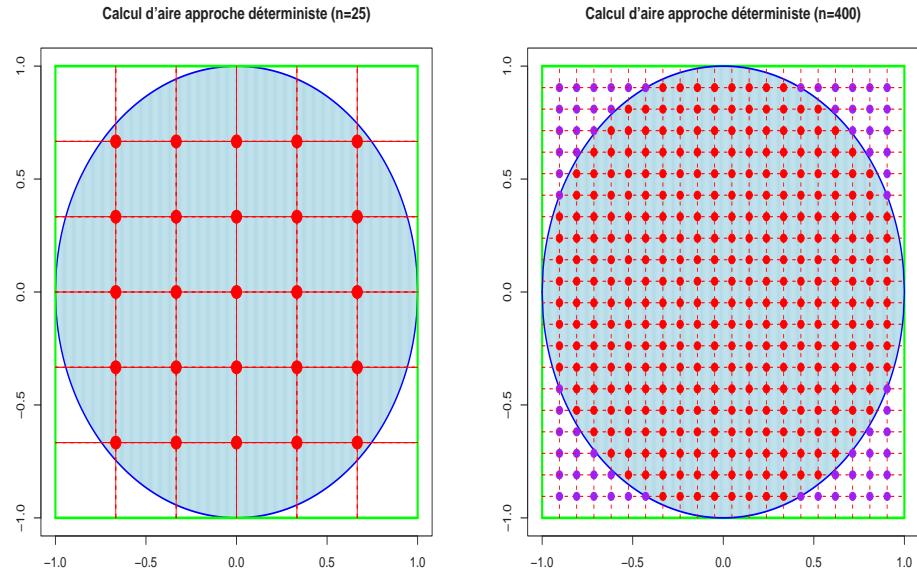
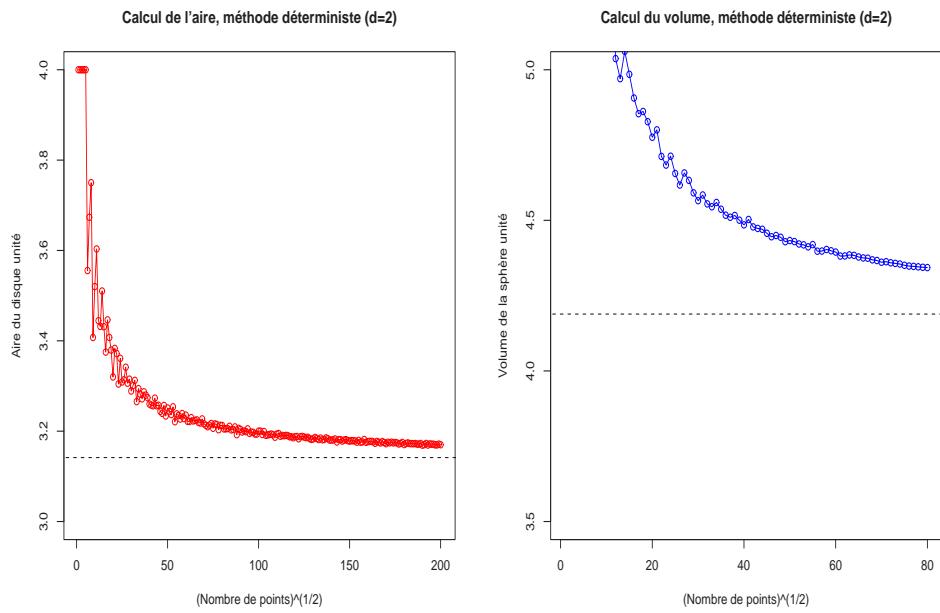
Figure 67: Calcul d'aires, méthode déterministe, $n = 25, 400$.

Figure 68: Calcul d'aires, méthode déterministe, dimension 2 et 3.

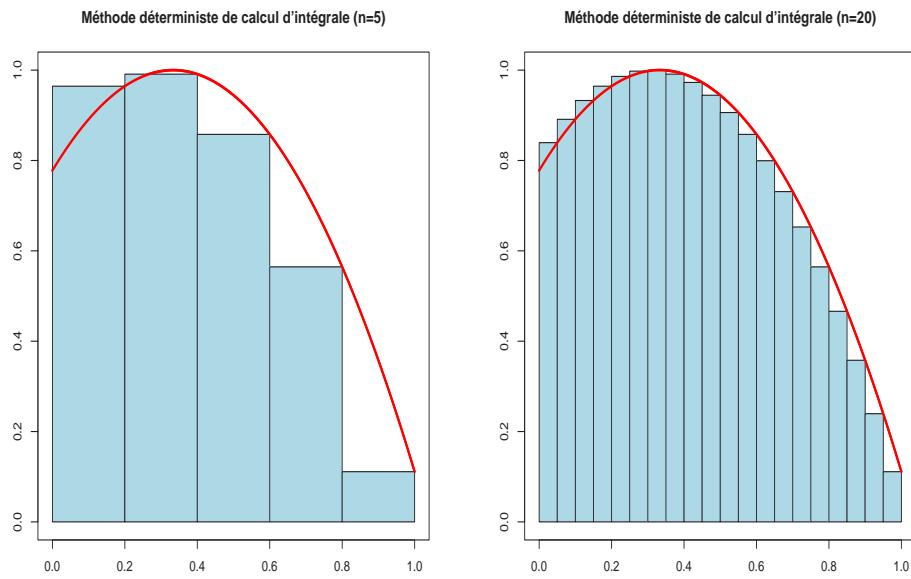


Figure 69: Calcul d'intégrales, méthode déterministe.

Ce dernier exemple, basé sur la boule unité, peut se généraliser en terme de calcul d'intégrales (simples ou multiples).

Pour les intégrales simples, supposons que l'on cherche à calculer $\int_{[0,1]} h(u)du$ où h est une fonction suffisamment régulière. En reprenant la construction de l'intégrale de Riemann, une première idée est d'approcher la fonction par des fonctions en escalier. Aussi,

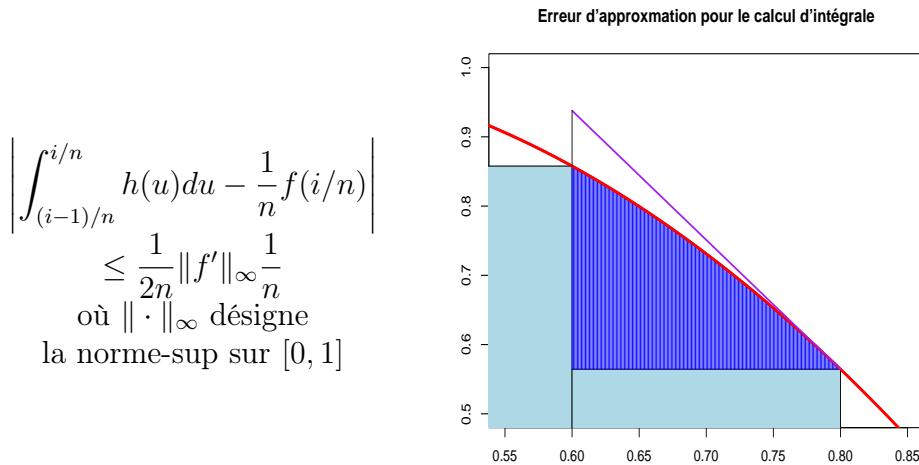
$$\int_{[0,1]} h(u)du \sim \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \times h\left(\frac{j}{n}\right)$$

où les termes de la somme sont les aires des petits rectangles élémentaires, de largeur $1/n$ (on partitionne $[0,1]$ en n points), et de taille la valeur de la fonction à droite, i.e. $h(j/n)$ pour le j ème rectangle.

En dimension supérieure, on cherche à calculer un volume $\int_{[0,1]^d} h(\mathbf{u})d\mathbf{u}$. Là aussi, si $n = k^d$, on subdivisionne chacun des côtés du carré unité, et on considère comme approximation

$$\int_{[0,1]^d} h(\mathbf{u})d\mathbf{u} \sim \sum_{j_1, \dots, j_d \in \{1, \dots, k\}} \left(\frac{1}{k}\right)^d \times h\left(\frac{j_1}{k}, \dots, \frac{j_d}{k}\right).$$

L'erreur commise en approchant h par une fonction en escalier peut être quantifier à l'aide de la formule de Taylor. Dans le cas qui nous intéresse, sur un petit intervalle $[(i-1)/n, i/n]$, on note que l'on peut majorer l'erreur simplement,



En sommant ces petites erreurs, on obtient alors que

$$\left| \int_0^1 h(u)du - \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \times h\left(\frac{j}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{2n} \|f'\|_\infty.$$

Notons qu'en utilisant la méthode des [trapèze](#) (interpolation linéaire), on aurait améliorer la précision, avec une majoration de la forme

$$\left| \int_0^1 h(u)du - I_n \right| \leq \frac{1}{12n^2} \|f''\|_\infty,$$

et par la méthode de [Simpson](#) (interpolation polynomiale - de degré 2)

$$\left| \int_0^1 h(u)du - I_n \right| \leq \frac{1}{180n^4} \|f^{(4)}\|_\infty.$$

En dimension supérieure, on s'intéresse dans un premier temps au calcul d'intégrales de la forme $\int_{[0,1]^d} h(\mathbf{u})d\mathbf{u}$. Dans ce cas, l'idée est toujours la même: discréteriser uniformément $[0, 1]^d$ et sommer des petits volumes élémentaires.

Dans ce cas, on peut aussi simplement majorer l'erreur. Sur un petit hypercube de longueur $h = 1/k = n^{-1/d}$, on majore l'erreur faite par la pyramide de base l'hypercube, et de hauteur $h\|\partial^d f\|_\infty$. Aussi, par sommation, on en déduit que

$$\left| \int_{[0,1]^d} h(\mathbf{u})d\mathbf{u} - \sum_{j_1, \dots, j_d} \left(\frac{1}{k}\right)^d \times h\left(\frac{j_1}{k}, \dots, \frac{j_d}{k}\right) \right| \leq nh^d h\|\partial^d f\|_\infty = \frac{1}{n^d} \|\partial^d f\|_\infty.$$

Cette méthode est bien entendu loin d'être optimale, mais notons qu'un calcul rapide nous donne le même ordre de grandeur qui pour le calcul du volume dans l'introduction, $O(n^{-1/d})$.

En fait, la principale difficulté des intégrales multiples n'est pas le calcul de $\int_{[0,1]^d} h(\mathbf{u})d\mathbf{u}$, mais d'avantage d'intégrales $\int_{\mathcal{V}} h(\mathbf{u})d\mathbf{u}$ où \mathcal{V} est un volume plus général qu'un cube en dimension d (le simplexe, une sphère, la boule unité, un tore...). La principale difficulté sera de paramétriser correctement le volume.

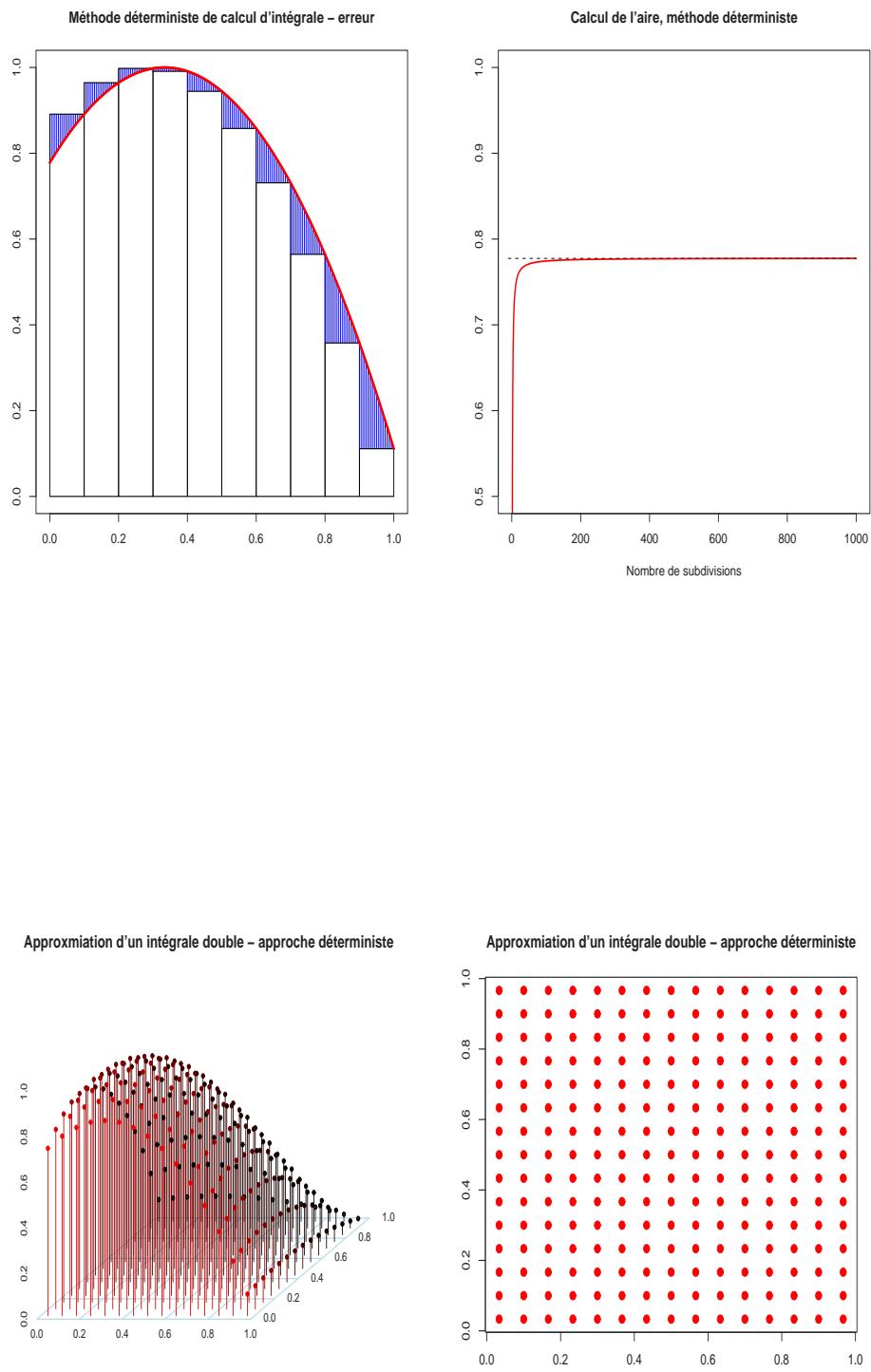


Figure 71: Calcul d'une intégrale double, approche déterministe.

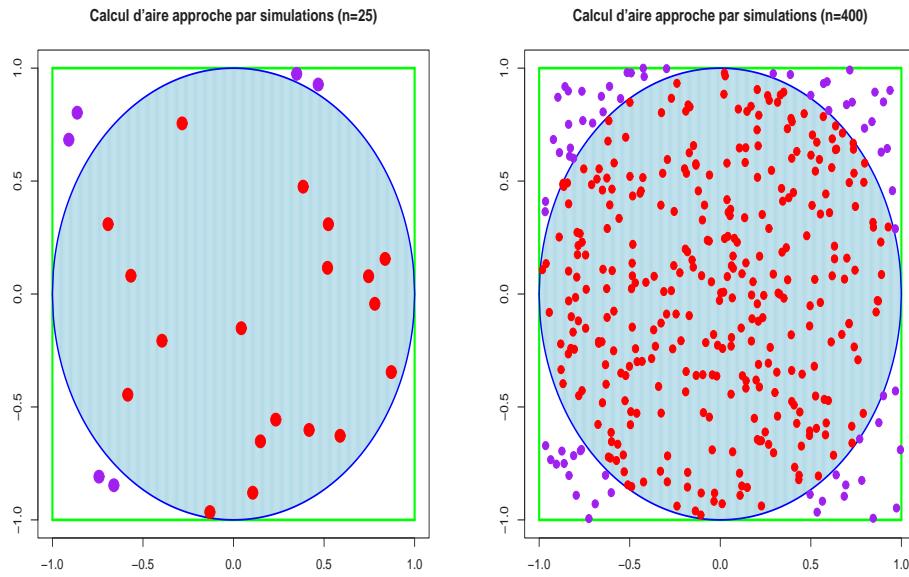


Figure 72: Calcul d'aires, méthode par simulations, $n = 25, 400$.

- [La méthode de Monte Carlo pour calculer des intégrales](#)

Pour reprendre l'exemple du calcul du volume, une fois fixée l'hyperbole $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ qui englobe le volume, au lieu de prendre les points sur une grille uniforme, on peut en tirer n au hasard, uniformément et indépendamment, dans l'hypercube.

Une approximation du volume sera alors

$$V(\mathcal{V}) \sim \left(\prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \right) \times \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(\mathbf{X}_i \in \mathcal{V}) = V_n(\mathcal{V}),$$

c'est à dire que l'on compte là aussi combien de points appartiennent au volume.

Notons que la probabilité que \mathbf{X}_i appartienne au volume \mathcal{V} suit une loi binomiale, de probabilité p ,

$$p = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{V}) = \frac{V(\mathcal{V})}{\prod_{i=1}^d (b_i - a_i)}.$$

On en déduit alors que $\mathbb{E}(V_n(\mathcal{V})) = V(\mathcal{V})$, et que, par indépendance entre les tirages,

$$\text{Var}(V_n(\mathcal{V})) = \frac{1}{n} \times \frac{V(\mathcal{V})}{\prod_{i=1}^d (b_i - a_i)} \times \left(1 - \frac{V(\mathcal{V})}{\prod_{i=1}^d (b_i - a_i)} \right)$$

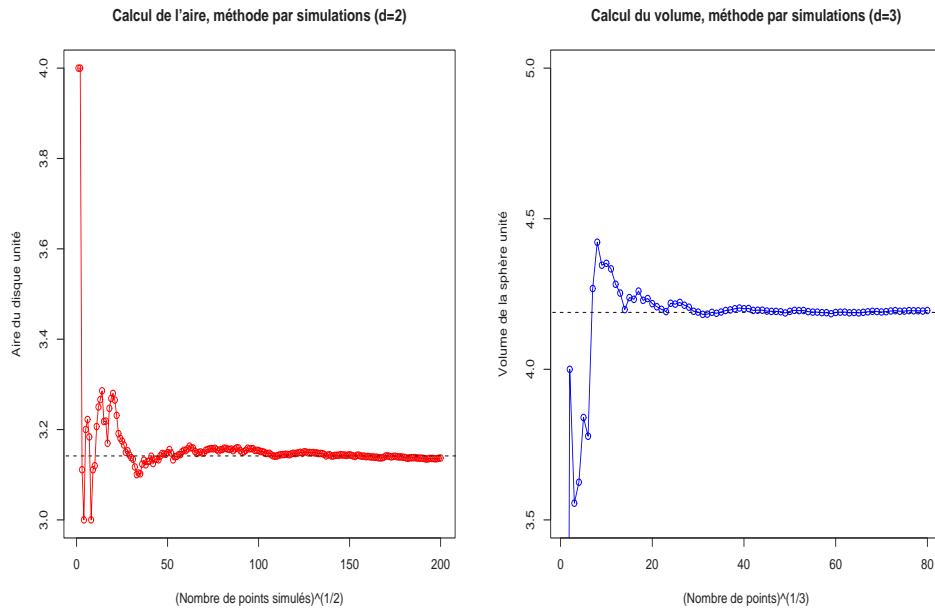


Figure 73: Calcul d'aires, méthode par simulation, dimension 2 et 3.

La aussi, le calcul d'intégrales (simples ou multiples) peut se faire à l'aide de simulations. En effet, $\int_{[0,1]} h(u)du$ peut se voir comme une espérance,

$$\int_{[0,1]} h(u)du = \mathbb{E}(h(U)) \text{ où } U \sim \mathcal{U}([0, 1]),$$

et plus généralement, pour une intégrale multiple

$$\int_{[0,1]^d} h(\mathbf{u})d\mathbf{u} = \mathbb{E}(h(\mathbf{U})) \text{ où } \mathbf{U} \text{ est à composante i.i.d, avec } U_i \sim \mathcal{U}([0, 1]).$$

Une approximation naturelle découle immédiatement de la loi des grands nombres: si on peut générer $n \times d$ variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\mathbf{U}_i) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(h(\mathbf{U})).$$

De plus, si on pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\mathbf{U}_i) \text{ et } V_n^2 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\mathbf{U}_i)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\mathbf{U}_i) \right)^2 \right),$$

alors grâce au théorème central limite,

$$\sqrt{n} \frac{S_n - \mathbb{E}(h(\mathbf{U}))}{V_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

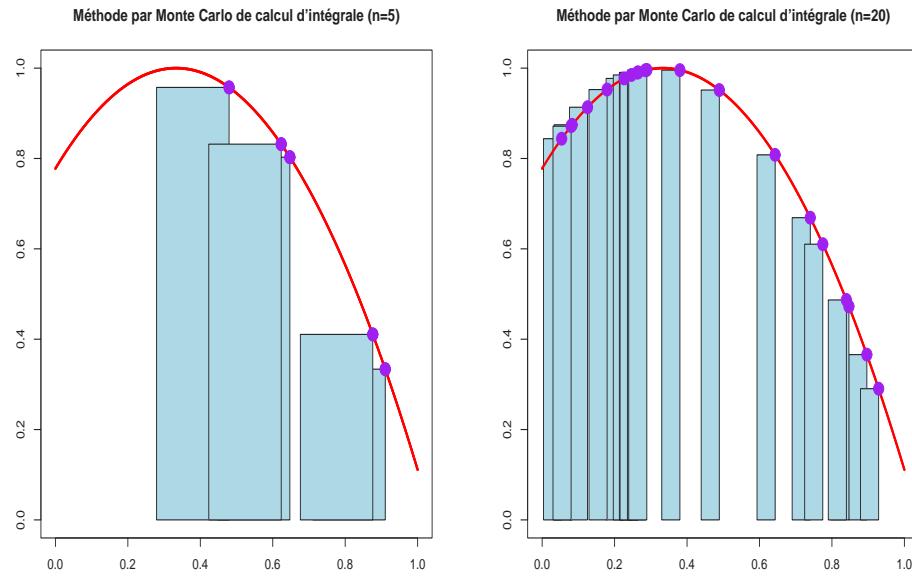


Figure 74: Calcul d'intégrales, méthode de Monte Carlo.

On en déduit alors un intervalle de confiance au niveau $\alpha \in [0, 1]$ pour $\mathbb{E}(h(\mathbf{U}))$,

$$\left[S_n \pm \frac{u_{1-\alpha/2} V_n}{\sqrt{n}} \right], \text{ où } u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

L'erreur est alors proportionnelle à l'écart-type, i.e. $O(1/\sqrt{n})$. En particulier la dimension n'intervient pas ici - en théorie car en réalité elle intervient dans la constante !

Exemple 77. La Figure suivante montre l'approximation du volume de la sphère unité en dimension 2 et 3.

- [Introduction à la méthode de Monte Carlo par Chaîne de Markov](#)

L'idée n'est plus ici de simuler forcément des X_i indépendants et identiquement distribué (suivant une loi uniforme), mais de simuler une chaîne de Markov $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ dont la mesure invariante est la loi uniforme sur $[0, 1]$.

...

D'après le théorème ergodique, si ... alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{t+i} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

- [Pour aller plus loin, la notion de Quasi Monte Carlo](#)

Au lieu de considérer un découpage déterministe de pas $1/n$, ou aléatoire (avec ou non indépendance), une autre méthode peut être de générer une suite, qui n'oblige pas, si l'on souhaite rajouter des simulations, à tout recalculer (comme dans l'approche déterministe).

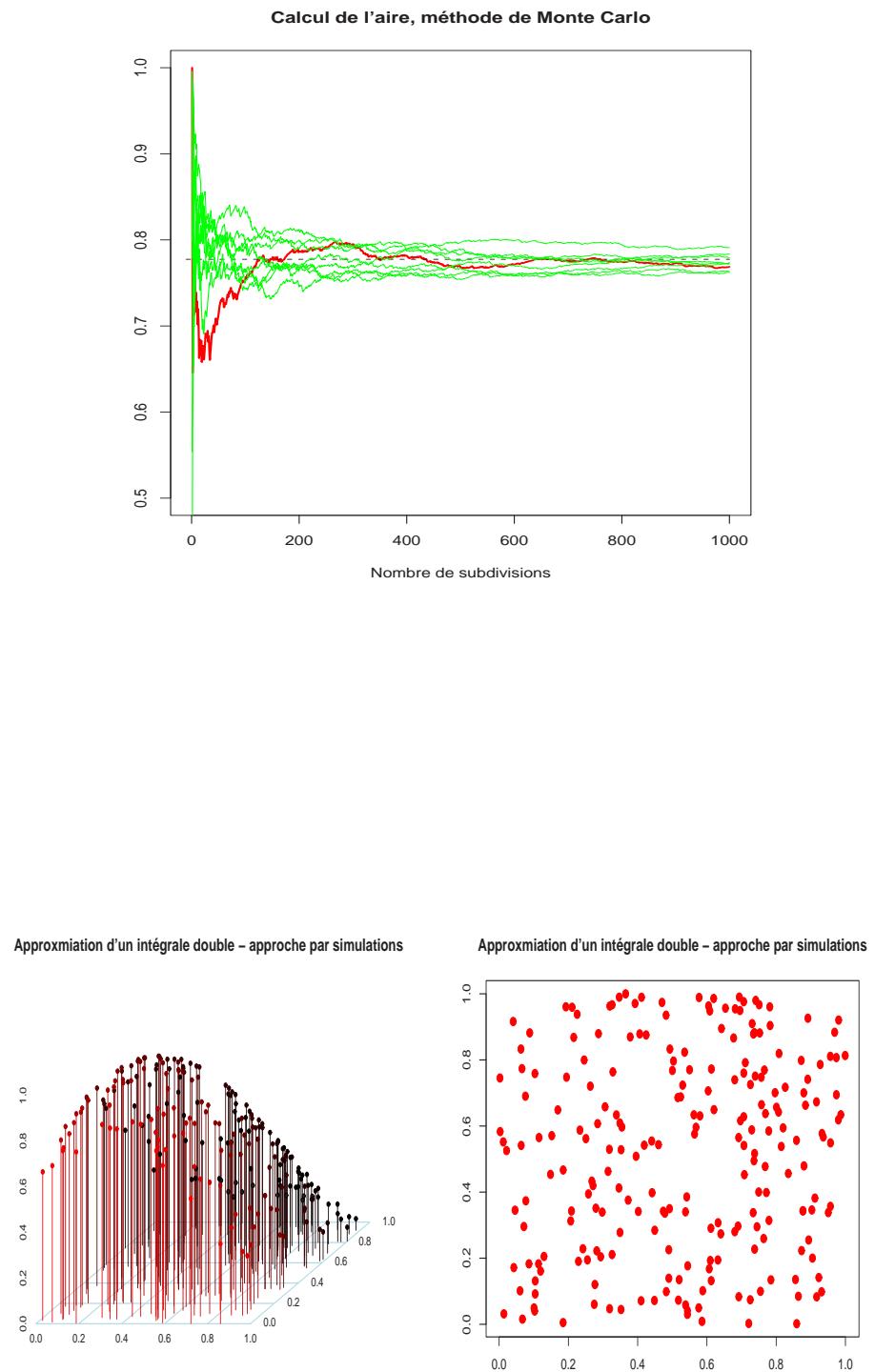


Figure 76: Calcul d'une intégrale double, approche par Monte Carlo.

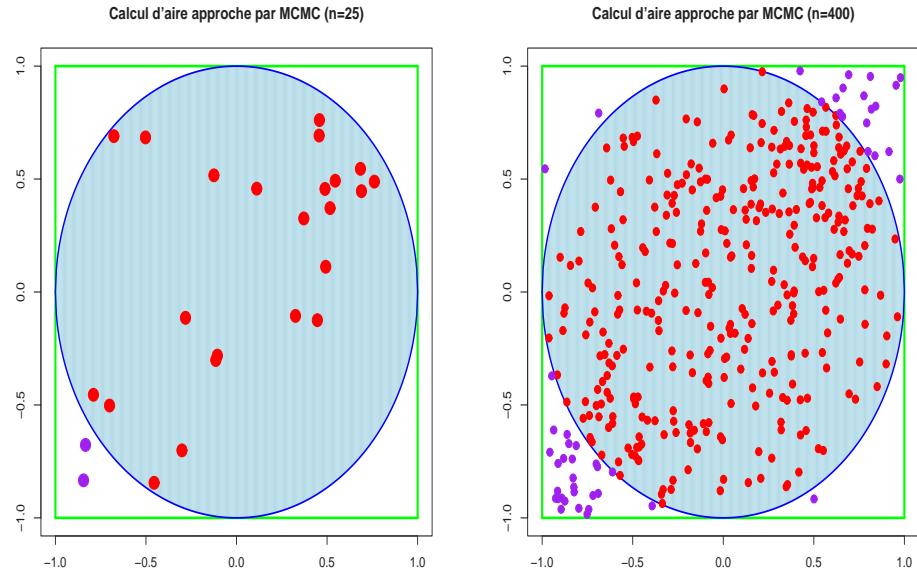
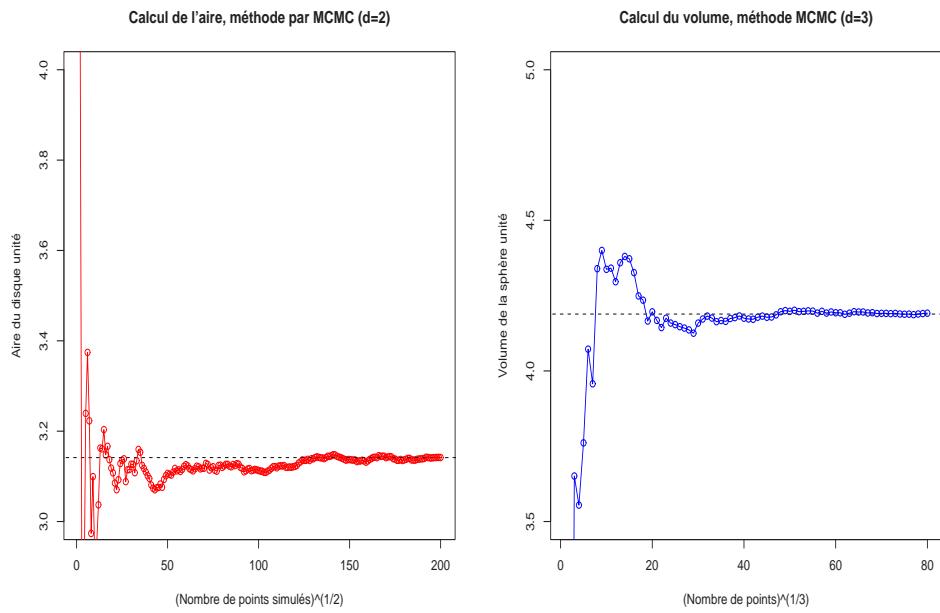
Figure 77: Calcul d'aire, méthode par MCMC, $n = 25, 400$.

Figure 78: Calcul d'aires, méthode par MCMC, dimension 2 et 3.

L'idée est d'utiliser la décomposition en base p d'un entier: soit k un entier et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ sa composition p -addique, i.e.

$$k = \alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_r p^r \text{ où } 0 \leq \alpha_i < p \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, r. \quad (25)$$

La suite de [Van der Corput](#) en base p est la suite définie par

$$u_n = \frac{\alpha_0}{p} + \dots + \frac{\alpha_r}{p^{r+1}}.$$

Exemple 78. En [base 2](#), on a

- $k = 1$, qui s'écrit 1 en base 2, et $u_1 = \frac{1}{2}$,
- $k = 2$, qui s'écrit 10, et $u_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2} = \frac{1}{4}$,
- $k = 3$, qui s'écrit 11, et $u_3 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$,
- $k = 4$, qui s'écrit 100, et $u_4 = \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^1} = \frac{1}{8}$,
- $k = 19$, qui s'écrit 10011, et $u_{19} = \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} = \frac{25}{32}$,

La suite de Halton est obtenue en dimension 2 en prenant pour la première composante la suite de Van der Corput de base 2, et de base 3 pour la seconde. Plus généralement, en dimension d , on prend comme bases respectives les d premiers nombres premiers (2, 3, 5, 7, 11, ...)

Remarque 79. Ces suites ne sont pas aléatoires, mais purement déterministes: on ne peut invoquer de théorème central limite pour avoir un intervalle de confiance.

A propos des méthodes de quasi-monte carlo, ZAREMBA (1968) notait fort justement “*the proper justification of normal practice of Monte Carlo integration must not be based on the randomness of the procedure, which is spurious, but on the equidispersion properties of the sets of points at which the integrand values are computed*”.

11.2 Méthodes de simulation en finance ?

Les méthodes de Monte Carlo sont relativement intéressantes car elles permettent de modéliser, a priori, des produits relativement complexes. De manière générale, rappelons que le prix d'une option de maturité T , à la date 0 s'écrit

$$V_0 = B_0 \mathbb{E} \left(\frac{g(S_T)}{B_T} \right),$$

où (B_t) est le facteur d'actualisation, ou le [numéraire](#). En particulier, il est possible d'étendre le modèle de BLACK & SCHOLES (1973) (où r est un taux constant) à un taux stochastique (LIBOR par exemple).

La base des techniques de simulation est la loi forte des grands nombres, afin d'estimer une espérance. Si X_1, \dots, X_n sont des réalisations indépendantes,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X),$$

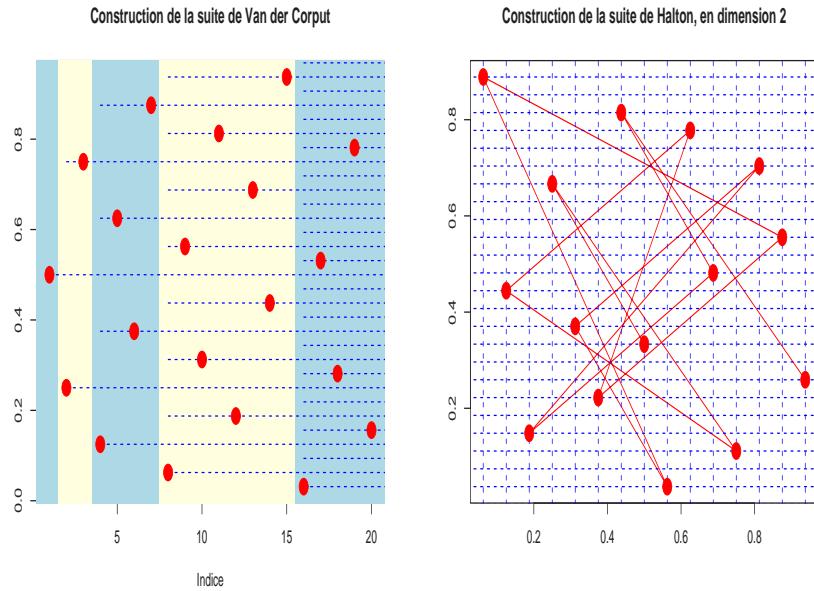


Figure 79: Construction de la suite ce Van der Corput et de Halton.

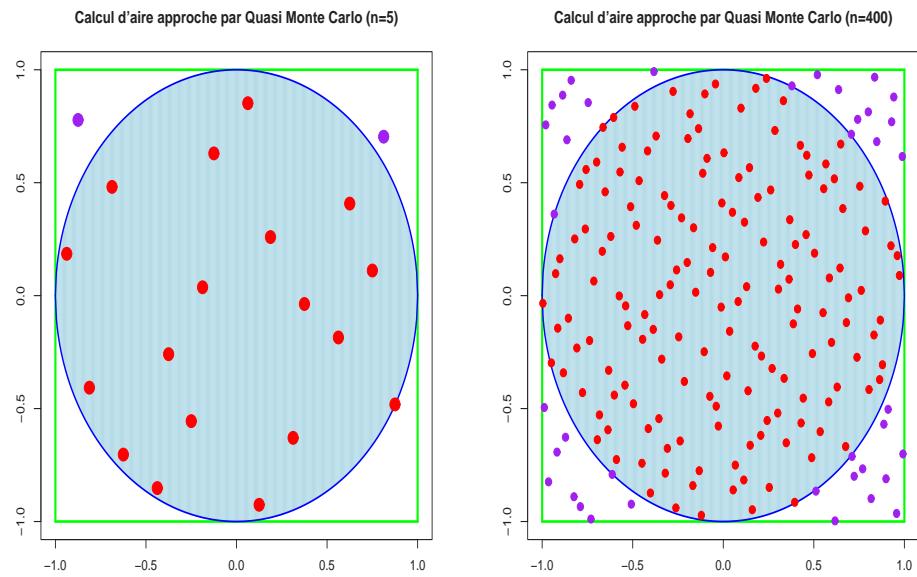


Figure 80: Calcul d'aire, méthode par quasi-monte carlo, $n = 25, 400$.

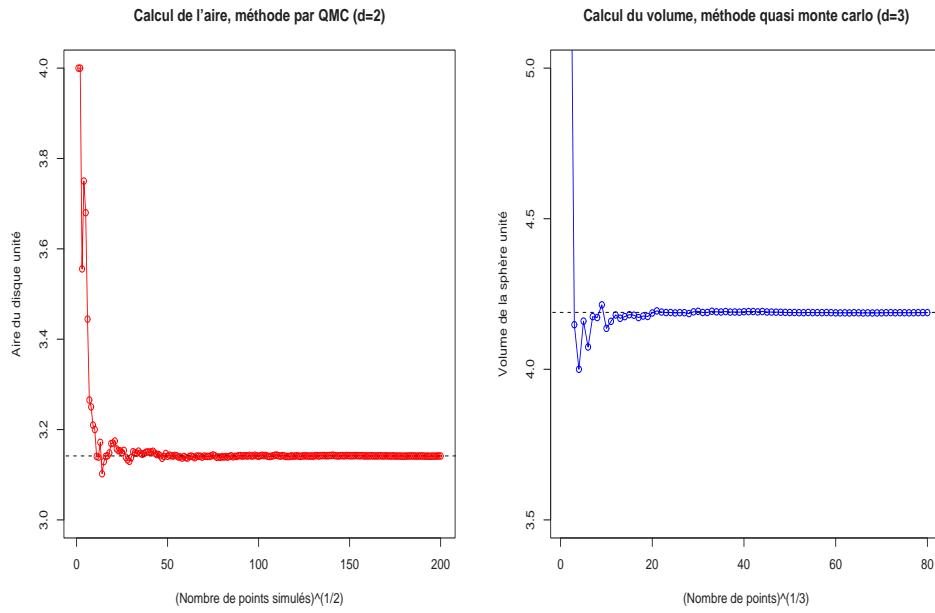


Figure 81: Calcul d'aires, méthode par quasi-monte carlo, dimension 2 et 3.

et plus généralement, pour toute fonction g .

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}(g(X)).$$

Le théorème central limite permet quant à lui d'avoir une idée de la qualité de l'approximation. Si $g(X)$ est de variance finie, alors

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - \mathbb{E}(g(X)) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \text{Var}(g(X))).$$

En particulier après n simulations, cette première approximation permet d'obtenir un intervalle de confiance de la forme

$$IC_\alpha = \left[I_n - \sqrt{\frac{\text{Var}(g(X))}{n}} u_{1-\alpha/2}, I_n + \sqrt{\frac{\text{Var}(g(X))}{n}} u_{1-\alpha/2} \right],$$

où $u_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile de la loi normale centrée réduite de niveau $\alpha/2$. Notons que si $\text{Var}(g(X))$ est *a priori* inconnue, il est possible d'obtenir un estimateur sous la forme

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \right)^2,$$

Notons d'ailleurs que cette approximation rajoute une nouvelle source d'erreur, et ce d'autant plus que les deux estimations ne sont pas forcément indépendantes.

Exemple 80. Comme le notait FISHMAN (1995), si $g(X) \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\text{corr}(I_n, s_n^2) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ si $p = 1/2$, mais si $p \in [0, 1/2[$, $\text{corr}(I_n, s_n^2) \rightarrow -1$, et si $p \in]1/2, 1]$, $\text{corr}(I_n, s_n^2) \rightarrow 1$.

11.3 Méthodes de simulation

De manière générale, la simulation de variables aléatoires (quelconques) repose sur la simulation de variables uniformément distribuées sur $[0, 1]$. Ce sera en particulier le cas pour la méthode dite d'inversion. De façon plus générale, on peut noter le résultat suivant, que l'on peut trouver dans BOULEAU (1986).

Lemme 81. *Pour tout vecteur aléatoire X de \mathbb{R}^d , il existe $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ presque sûrement continue telle que $X =_{\text{loi}} \psi(U_1, \dots, U_n)$ où U_1, \dots, U_n sont indépendantes et de même loi $\text{Uni}(0, 1)$.*

Il est possible que n soit ici infini. De plus, l'hypothèse centrale est que les U_i soient indépendants, puiqu'ils peuvent suivre une autre loi que la loi uniforme.

Exemple 82. *Si $\psi(u) = -(\log u)/\lambda$, alors $\psi(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ . Si $\psi(u_1, u_2) = \sqrt{(-2 \log u_1)} \cos(2\pi u_2)$, alors $\psi(U_1, U_2)$ suit une loi normale centrée réduite. Si $\psi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(U_i \leq p)$, alors $\psi(U_1, \dots, U_n)$ suit une loi binomiale de paramètres n et p .*

Proposition 83. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, de loi uniforme sur le disque unité $\mathcal{S} = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$. Notons R et Θ les coordonnées polaires associées à (X, Y) , i.e. $X = R \cos \Theta$ et $Y = R \sin \Theta$. Notons $T = \sqrt{-4 \log R}$, alors $U = T \cos \Theta$ et $V = T \sin \Theta$ sont indépendantes, et de même loi $\text{Nor}(0, 1)$.*

Proof. Considérons le changement de variables permettant de passer des coordonnées cartésiennes aux données polaires,

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{S} \setminus \{]0, 1[\times \{0\}\} & \rightarrow]0, 1[\times]0, 2\pi[\\ (x, y) & \mapsto (r, \theta) \end{cases}$$

et

$$\phi^{-1} : \begin{cases}]0, 1[\times]0, 2\pi[& \rightarrow \mathcal{S} \setminus \{]0, 1[\times \{0\}\} \\ (r, \theta) & \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \end{cases}$$

avec pour jacobien $J_{\phi^{-1}} = r$. La densité du couple (R, Θ) est alors donnée par

$$g(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \mathbb{I}_{\mathcal{S}}(r \cos \theta, r \sin \theta) r = \frac{r}{\pi} \mathbb{I}_{\mathcal{S}}(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

dont les lois marginales sont respectivement

$$g(r) = 2r \mathbb{I}_{]0, 1[}(r) \text{ et } g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{I}_{]0, 2\pi[}(\theta).$$

On en déduit alors que R et Θ sont indépendantes, R étant de loi triangulaire sur $]0, 1[$, et Θ de loi uniforme sur $]0, 2\pi[$. La loi de T est alors donnée par $\mathbb{P}[T \leq t] = 0$ pour $t \leq 0$, et sinon,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T \leq t] &= \mathbb{P}\left[\sqrt{-4 \log R} \leq t\right] \\ &= \mathbb{P}\left[R > \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)\right] \\ &= 1 - G\left(\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)\right), \end{aligned}$$

où G est la fonction de répartition de R . D'où la densité de T ,

$$t \mapsto t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(t).$$

Déterminons pour conclure la densité du couple (U, V) , obtenu par le changement de variable

$$\psi : \begin{cases}]0, +\infty[\times]0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (]0, +\infty[\times \{0\}) \\ (t, \theta) & \mapsto (u, v) = (t \cos \theta, t \sin \theta) \end{cases}$$

En notant que ψ restreint à $]0, 1[\times]0, 2\pi[$ coïncide avec ϕ^{-1} , on en déduit que

$$J_{\psi^{-1}} = \frac{1}{J_{\phi^{-1}}(t(u, v), \theta(u, v))} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

d'où finalement la densité du couple (U, V) ,

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{1}{2\pi} \sqrt{u^2 + v^2} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les variables U et V sont indépendantes, de loi normale centrée réduite. \square

L'utilisation de cette propriété permet d'obtenir l'algorithme polaire, permettant de simuler un vecteur gaussien centré, réduit et indépendant, en notant que

$$Z = \sqrt{-\frac{2 \log R^2}{R^2}} = \frac{T}{R} \text{ et } \begin{cases} U = T \cos \Theta = Z \cdot X \\ V = T \sin \Theta = Z \cdot Y \end{cases}$$

La première étape permettant de simuler la loi uniforme sur le disque unité. Toutefois, la méthode la plus utilisée pour simuler une loi gaussienne n'est pas celle-ci, et repose sur une programmation légèrement différente du résultat précédent. En effet, il est possible de simuler non pas le couple (X, Y) , mais le couple (T, Θ) , qui sont deux variables indépendantes,

A partir de la simulation d'un vecteur de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}or(0, 1)$, il est possible de se ramener à des lois gaussiennes $\mathcal{N}or(\mu, \sigma^2)$, en posant $Y = \sigma X + \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, et $X \sim \mathcal{N}or(0, 1)$. Comme on peut le noter sur les graphiques de la Figure ??, μ est un paramètre de localisation, et σ est un paramètre d'épaisseur des queues.

Dans le cas du modèle de BLACK & SCHOLES (1973), il s'agit de simuler la solution de l'équation $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$, avec $X_0 = x$. On sait qu'à la date t ,

$$S_t = S_0 \exp\left(rt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right), \text{ où } W_t \sim \mathcal{N}(0, t).$$

On simule alors la trajectoire du mouvement brownien par $\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, et on considère

$$S_n = S_0 \exp\left(\left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right] n \Delta t + \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right), \text{ où } W_t \sim \mathcal{N}(0, t).$$

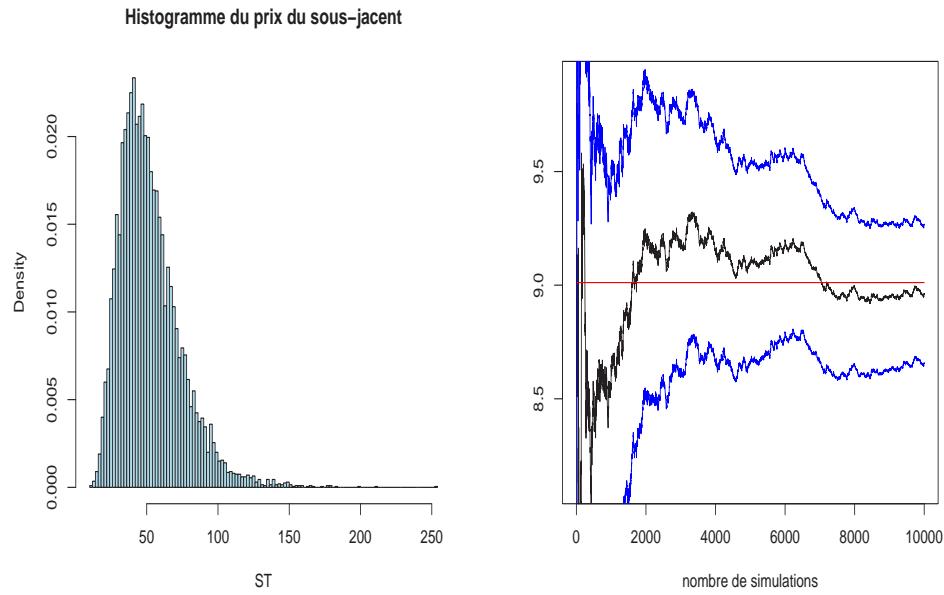


Figure 82: Calcul du prix d'un call européen en utilisant la propriété de loi log-normale du prix du sous-jacent, sous la probabilité risque neutre.

```

Call européen - simulations (simples)
X=rnorm(Nsim)
Ssim=s*exp(T*(r-0.5*sigma^2) + sigma * sqrt(T) * X)
C=exp(-r*T)*pmax(Ssim-K,0)
print.noquote(c('Prix call - simulations (simples):', mean(C),
" +/- ", 1.96*sqrt(var(C))/sqrt(Nsim)))

```

11.4 Simulation d'un processus

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour simuler un processus $(S_t)_{t \in [0, T]}$, à différentes dates $t_0 = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n$.

1. si on connaît les lois conditionnelles (e.g. processus Markovien) on simule S_{t_0} , puis $S_{t_1}|S_{t_0}$, puis $S_{t_2}|S_{t_1}, S_{t_0}$, ...etc,
2. si on connaît les lois fini-dimensionnelles (e.g. processus Gaussien), on simule le vecteur $\mathbf{S} = (S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$,
3. si l'on souhaite simuler à des dates intermédiaires, on utilise des propriétés de pont brownien, où l'on simule S_{t_0} , puis $S_{t_n}|S_{t_0}$, la date terminale. On peut alors simuler à une date intermédiaire $S_t|S_{t_0}, S_{t_n}$, et plus généralement, sachant S_{t_i} et S_{t_k} , il est possible de connaître $S_{t_j}|S_{t_i}, S_{t_k}$, pour tout $i \leq j \leq k$.

11.5 Simulation d'une diffusion continue

De façon générale, une [solution numérique](#) de l'équation

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t \text{ pour tout } t \in [0, T], \quad (26)$$

est un processus $(X_t^{(n)})_{t \in [0, T]}$ qui approche suffisement $(X_t)_{t \in [0, T]}$ solution de l'équation (26).

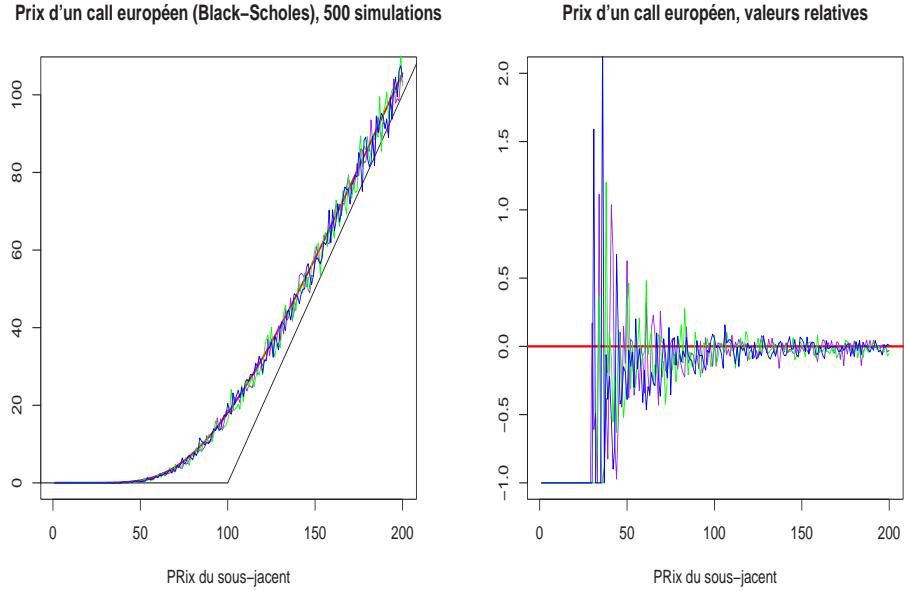


Figure 83: Calcul du prix d'un call européen, en fonction du prix du sous-jacent.

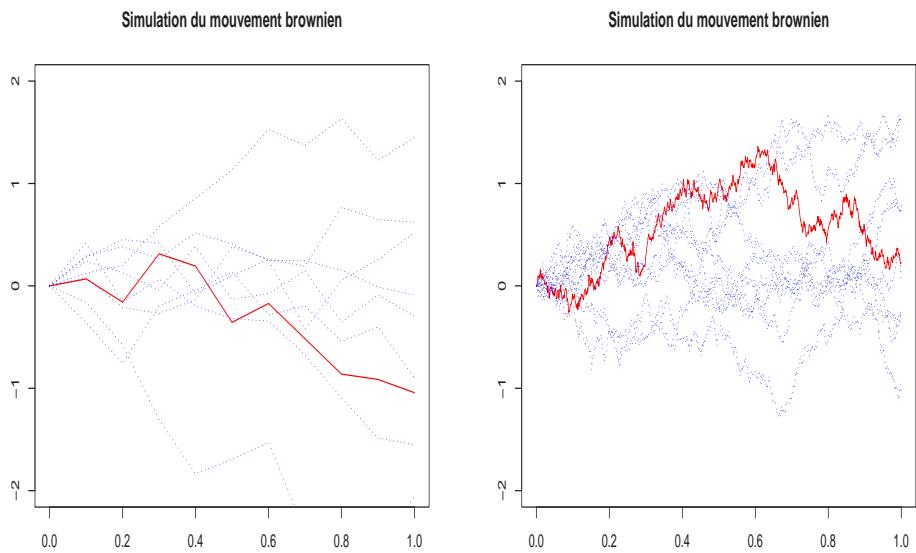


Figure 84: Simulation du mouvement brownien, pas de temps $1/10$ ou $1/1000$.

Une telle solution est caractérisée par une partition \mathcal{T}_n de $[0, T]$,

$$\mathcal{T}_n : \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T\},$$

dont la maille est

$$\delta_n = \max_{i=1,\dots,n} [t_i - t_{i-1}].$$

On évalue alors $(X_t^{(n)})_{t \in [0, T]}$ au point de la partition t_i , et une certaine liberté est laissée sur les intervalles $[t_i, t_{i+1})$. On peut alors considérer une valeur constante, ou une interpolation linéaire.

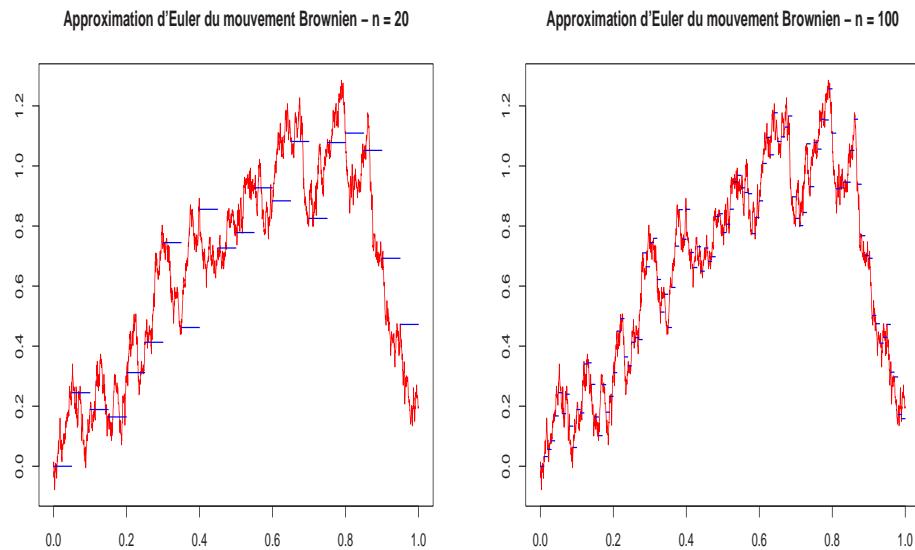


Figure 85: Schéma d'Euler, fonction en escaliers, $n = 20$, et $n = 100$.

On a alors le schéma itératif suivant, en notant $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ et $\Delta_i W = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$,

- $X_0^{(n)} = X_0$,
- $X_{t_1}^{(n)} = X_0^{(n)} + a(X_0^{(n)}) \cdot \Delta_1 + b(X_0^{(n)}) \cdot \Delta_1 W$,
- $X_{t_2}^{(n)} = X_{t_1}^{(n)} + a(X_{t_1}^{(n)}) \cdot \Delta_2 + b(X_{t_1}^{(n)}) \cdot \Delta_2 W$,
- ...
- $X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)}) \cdot \Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)}) \cdot \Delta_i W$,
- ...
- $X_T^{(n)} = X_{t_{n-1}}^{(n)} + a(X_{t_{n-1}}^{(n)}) \cdot \Delta_n + b(X_{t_{n-1}}^{(n)}) \cdot \Delta_n W$.

Le plus simple est de prendre une partition de maille constante, $\delta_n = T/n$. Afin de quantifier la qualité de l'ajustement, on peut introduire

$$e_s(\delta_n) = \mathbb{E}|X_T(\omega) - X_T^{(n)}(\omega)|.$$

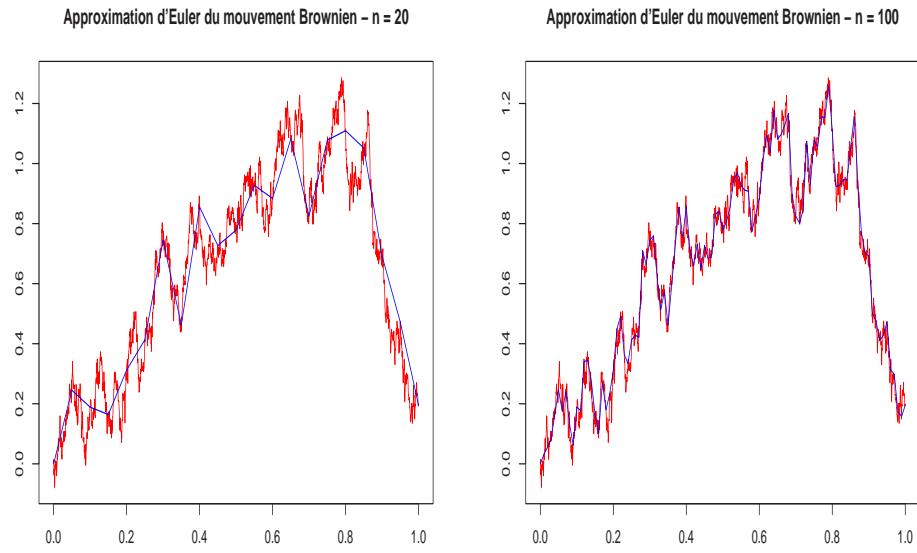


Figure 86: Schéma d'Euler, interpolation linéaire, $n = 20$, et $n = 100$.

Définition 84. Le processus $(X_t^{(n)})_{t \in [0, T]}$ est une *solution forte* de l'équation (26) si et seulement si

$$e_s(\delta_n) \rightarrow 0 \text{ quand } \delta_n \rightarrow 0.$$

Une notion plus faible est basée sur l'étude des moments,

$$e_w(\delta_n) = |\mathbb{E}f(X_T(\omega)) - \mathbb{E}f(X_T^{(n)}(\omega))|.$$

Définition 85. Le processus $(X_t^{(n)})_{t \in [0, T]}$ est une *solution faible* de l'équation (26) si et seulement si

$$e_w(\delta_n) \rightarrow 0 \text{ quand } \delta_n \rightarrow 0.$$

Un indice permet de plus de quantifier la vitesse de convergence de l'approximation.

Définition 86. Le processus $(X_t^{(n)})_{t \in [0, T]}$ converge vers $(X_t)_{t \in [0, T]}$ à l'ordre $\gamma > 0$ de l'équation (26) si et seulement si il existe $\kappa > 0$ telle que

$$e_s(\delta_n) \leq \kappa \delta_n^\gamma \text{ ou } e_w(\delta_n) \leq \kappa \delta_n^\gamma.$$

Proposition 87. L'approximation d'Euler à pas constant converge fortement à l'ordre $\gamma = 1/2$, et faiblement à l'ordre $\gamma = 1$.

Notons qu'il existe d'autres approximations, qui convergent plus vite. Rappelons que l'équation différentielle stochastique peut se réécrire

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t b(X_s)dW_s \text{ pour } t \in [0, T].$$

Aux points t_i de la partition \mathcal{T}_n , on peut réécrire

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(X_s)ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)dW_s \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Dans l'approximation d'Euler, on discrétisait les intégrales sous la forme

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(X_s)ds \sim a(X_{t_{i-1}})\Delta_i \text{ et } \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)dW_s \sim b(X_{t_{i-1}})\Delta_i W,$$

puis on remplaçait X_{t_i} par $X_{t_i}^{(n)}$, ce qui donnait l'algorithme itératif

$$X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)}) \cdot \Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)}) \cdot \Delta_i W.$$

L'idée de l'approximation de Milstein est d'utiliser les formules de Taylor et d'Ito, appliquées à $a(X_s)$ et à $b(X_s)$, et d'écrire la différence $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ sous la forme

$$\begin{aligned} & X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(a(X_{t_{i-1}}) + \int_{t_{i-1}}^s \left[a(X_y)a'(X_y) + \frac{1}{2}b^2(X_y)a''(X_y) \right] dy + \int_{t_{i-1}}^s b(X_y)a'(X_y)dW_y \right) ds \\ &+ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(b(X_{t_{i-1}}) + \int_{t_{i-1}}^s \left[a(X_y)b'(X_y) + \frac{1}{2}b^2(X_y)b''(X_y) \right] dy + \int_{t_{i-1}}^s b(X_y)b'(X_y)dW_y \right) dW_s \\ &= a(X_{t_{i-1}})\Delta_i + b(X_{t_{i-1}})\Delta_i W + R_{t_i, t_{i-1}}, \end{aligned}$$

où

$$R_{t_i, t_{i-1}} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\int_{t_{i-1}}^s bb'dB_y \right] dB_s + \mathcal{R}_{t_i, t_{i-1}}.$$

Notons que ce premier terme peut s'approcher par

$$b(X_{t_{i-1}})b'(X_{t_{i-1}}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\int_{t_{i-1}}^s dB_y \right] dB_s.$$

Le calcul de l'intégrale double se fait alors de la façon suivante: rappelons tout d'abord que

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (dW_s)^2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} ds = \Delta_i,$$

et que

$$\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_s \right)^2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_y \right) dW_s = (\Delta_i W)^2.$$

Cette dernière intégrale se réécrit alors

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^s dW_y \right) dW_s + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_s^{t_i} dW_y \right) dW_s + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (dW_s)^2$$

c'est à dire, tout simplement

$$2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^s dW_y \right) dW_s + \Delta_i$$

c'est à dire, en combinant les deux termes que

$$R_{t_i, t_{i-1}} \sim \frac{1}{2} b(X_{t_{i-1}}) b'(X_{t_{i-1}})[(\Delta_i W)^2 - \Delta_i] + \mathcal{R}_{t_i, t_{i-1}}.$$

Sous des conditions de régularités des fonctions $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$, il est alors possible de montrer que le reste $\mathcal{R}_{t_i, t_{i-1}}$ est négligeable par rapport à l'expression de gauche.

On a alors le schéma itératif suivant, en notant $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ et $\Delta_i W = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$,

- $X_0^{(n)} = X_0,$
- ...
- $X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)}) \cdot \Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)}) \cdot \Delta_i W + \frac{1}{2} b(X_{t_{i-1}}) b'(X_{t_{i-1}})[(\Delta_i W)^2 - \Delta_i],$
- ...
-

Proposition 88. *L'approximation de Milstein à pas constant converge fortement à l'ordre $\gamma = 1$.*

A partir de là, on en déduit l'algorithme suivant pour simuler le prix d'une option,

1. Pour $k = 1, \dots, N$, on simule S_T , solution de $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$, i.e.

$$S_t = S_0 \exp \left(\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] t + \sigma W_t \right)$$

soit $S(k) \Leftarrow \exp \left(S_0 \exp \left(\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] t + \sigma \sqrt{t} N \right) \right)$, où $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

2. Pour chaque scénario k on détermine le payoff, $V(S_T, T)(k) \leftarrow V(S(k), T)$,
3. On détermine alors l'espérance (risque neutre) associée

$$\hat{\mathbb{E}}(V(S_T, T)) \Leftarrow \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N V(S_T, T)(k)$$
4. Enfin, la valeur actualisée $\hat{V} \Leftarrow e^{-rT} \hat{\mathbb{E}}(V(S_T, T))$ est le prix en 0 de l'option.

11.6 Simulation du mouvement brownien...

```
Simulation processus brownien géométrique - Euler
N.euler=1000; dt.euler=T/N.euler
S.euler=S0; W=0
for(j in 1:N.euler) {
  dW=sqrt(dt.euler)*rnorm(1)
  S.euler=c(S.euler,S.euler+dt.euler*S.euler*r + sigma*S.euler*dW)
}
```

Un autre code est possible en utilisant la discréétisation de Milstein.

```
Simulation processus brownien géométrique - Milstein
N.milstein=1000; dt.milstein=T/N.milstein
S.milstein=S0; W=0
for(j in 1:N.milstein) {
  dW=sqrt(dt.milstein)*rnorm(1)
  S.milstein<-c(S.milstein,S.milstein+dt*S.milstein*r+sigma*S.milstein*dW+0.5*sigma*sigma*S.milstein * (dW^2 - dt))}
```

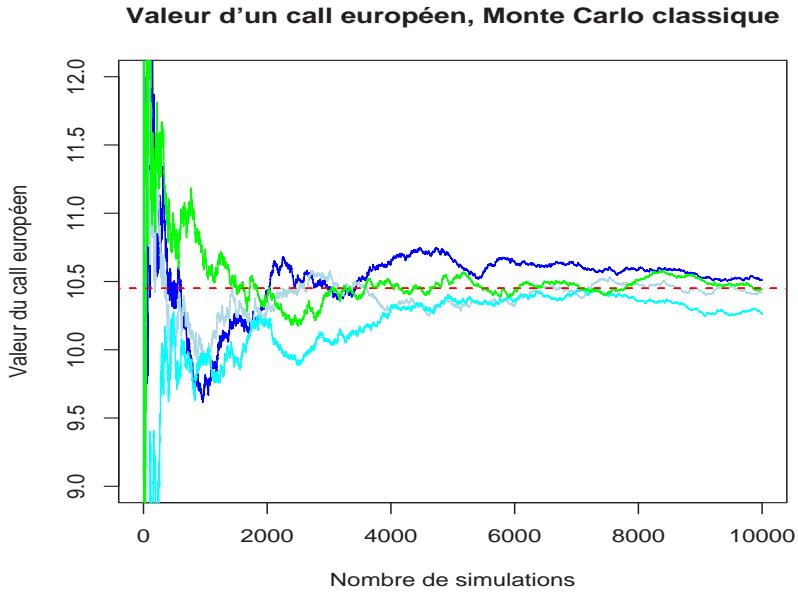


Figure 87: Valeur d'un call européen, méthode de Monte Carlo classique.

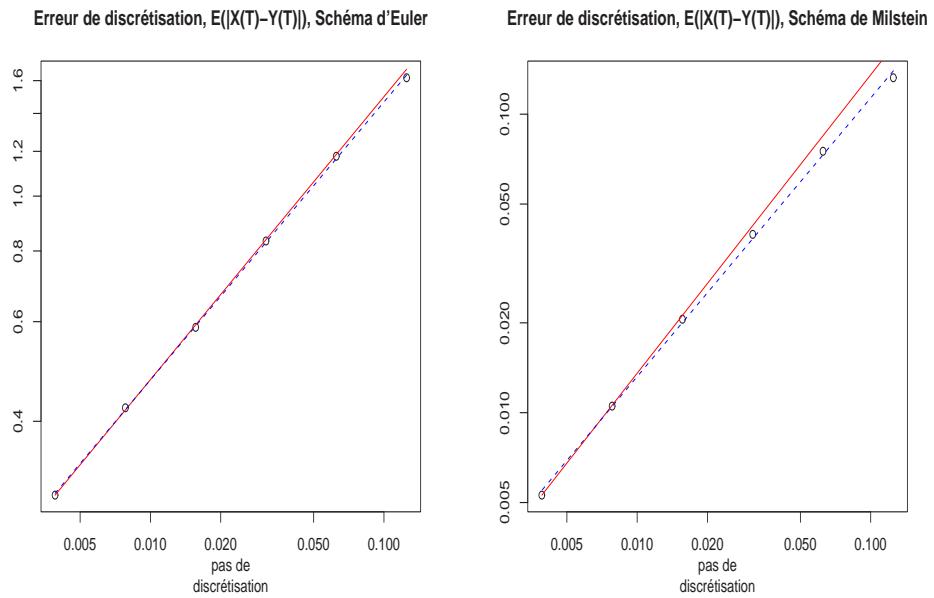


Figure 88: Erreur de discréétisation, en fonction du nombre de subdivisions (2^{n+2} pour $n = 1, 2, \dots, 6$) pour le schéma d'Euler et de Millstein.

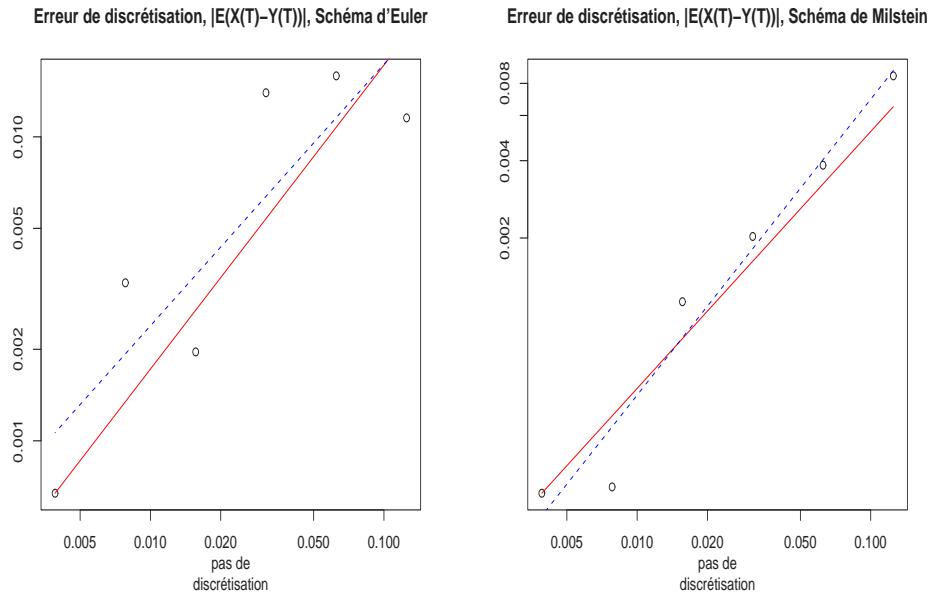


Figure 89: Erreur de discréétisation, en fonction du nombre de subdivisions (2^{n+2} pour $n = 1, 2, \dots, 6$) pour le schéma d'Euler et de Millstein.

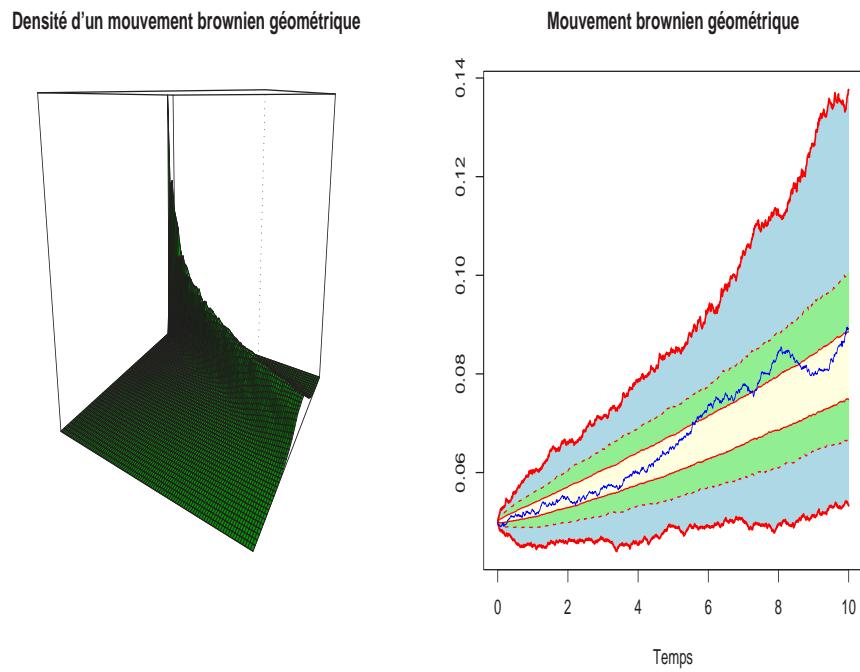


Figure 90: Mouvement brownien géométrique.

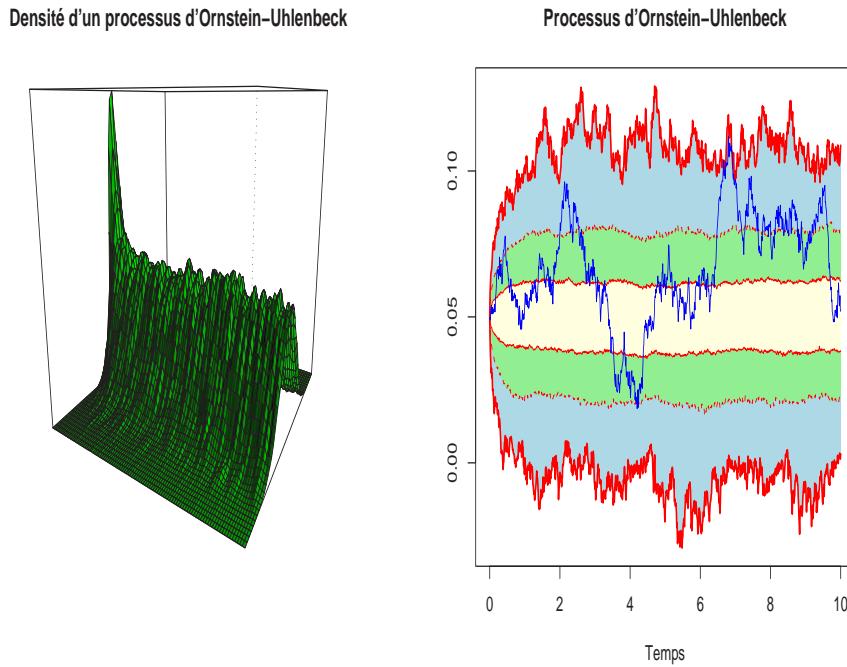


Figure 91: Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

11.7 Simulation d'un processus à saut, le processus de Poisson

Un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ est un processus de comptage, tel que

- $N_0 = 0$,
- $(N_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants,
- $N_{t+h} - N_t$ suit un loi de Poisson de paramètre λh

Si on définit les durées entre les sauts, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et la date d'arrivée du n ième saut $T_n = X_1 + \dots + X_n$, on peut montrer simplement que les durées entre sauts (X_n) sont indépendantes, et suivent une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$. Aussi, T_n suit un loi Gamma de paramètres n et $1/\lambda$.

En changeant la hauteur des sauts, et en la prenant aléatoire, on peut ainsi simuler un processus de Poisson composé. En combinant à ce processus à saut une diffusion brownienne, on peut alors simuler un processus de Lévy.

11.8 Simulation pour options *path-dependent*, première approche

Considérons le cas d'une option à barrière up and out.

GOLDMAN, M.B., SOSIN, H.B. & GATTO, M.A. (1979). Path Dependent Options: "Buy at the Low, Sell at the High". *The Journal of Finance*, **34**, 1111-1127.

Un second exemple où il est possible de visualiser l'impact de la méthode retenue pour discréteriser le processus est celui d'options lookback. En particulier (GOLDMAN, SOSIN & GATTO (1979)) l'algorithme suivant permet de valoriser un call européen, dont le payoff

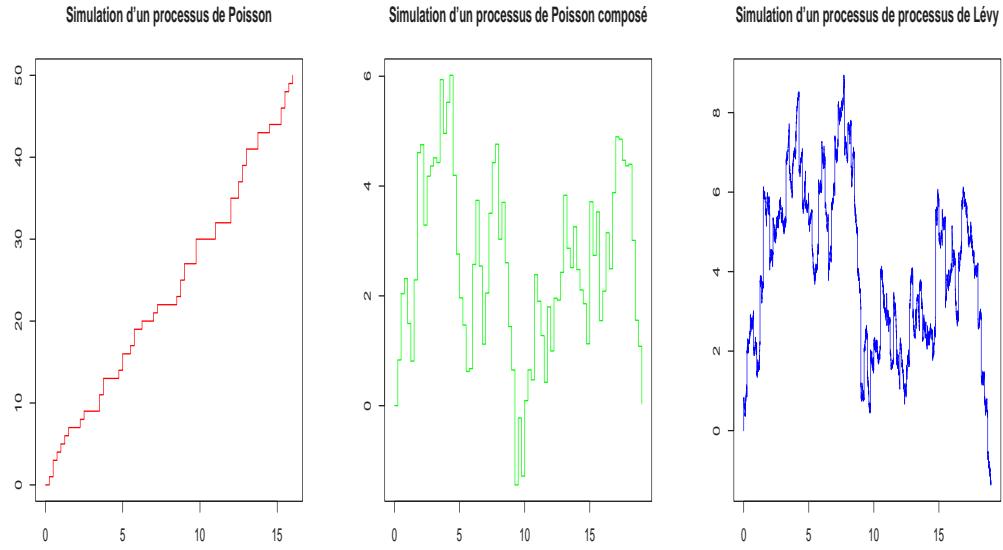
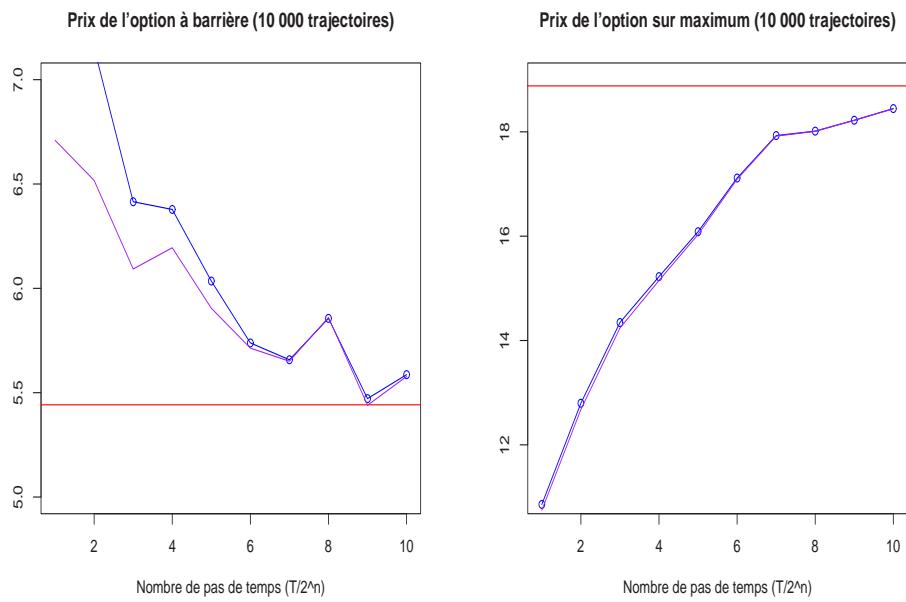


Figure 92: Simulations de processus à sauts.

Figure 93: Calcul du prix d'une option up-and-out, et *fixed strike lookback option*)

est la différence entre le strike (K fixé) et non plus S_T mais la valeur maximale atteinte entre 0 et T .

11.9 Options lookback

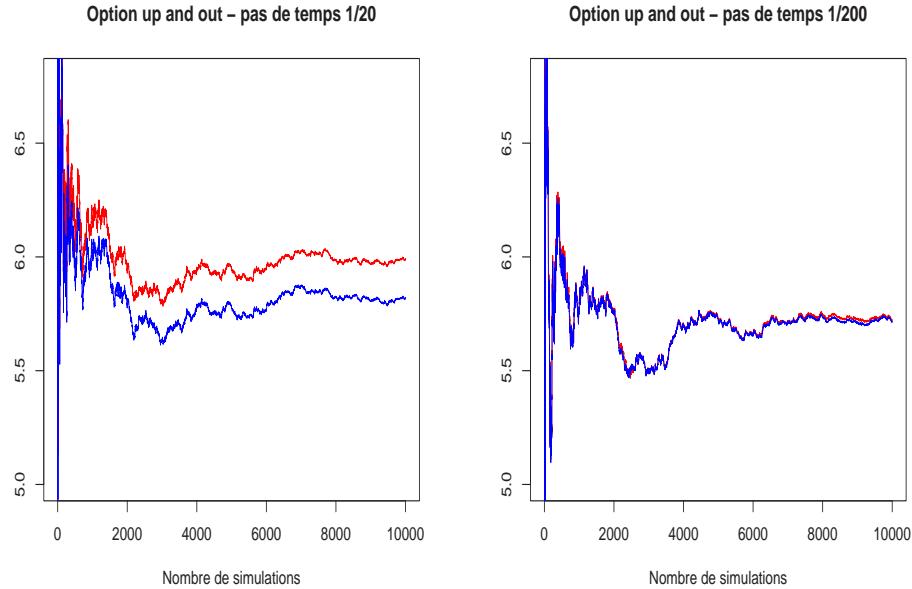


Figure 94: Pricing d'un call *up and out*, à barrière, à l'aide de méthodes de Monte Carlo, pour un pas de $T/20$ à gauche, et un pas de $T/200$ à droite.

La Figure suivante permet de visualiser l'impact de la volatilité σ et en fonction de la maturité T , pour un pas de temps en $T/20$ en haut, et $T/100$ en bas. Chaque point est obtenu avec 25 000 simulations.

11.10 Simulation d'un vecteur aléatoire

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire, de fonction de répartition F , i.e. $F(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})$. D'après le théorème de Sklar, si les lois marginales de \mathbf{X} sont à densité, il existe une unique copule C telle que

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)),$$

où F_i est la i ème loi marginale, i.e. $F_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i)$.

De ce résultat, on peut noter que

$$(X_1, \dots, X_d) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_d^{-1}(U_d)),$$

où $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ a pour fonction de répartition C .

Afin de simuler un copule, rappelons que l'algorithme de base pour simuler un vecteur aléatoire est basé sur la simulation de loi conditionnelle. En dimension 2, soit (X, Y) un

Erreurs de discréétisation (Euler), avec $dt=T/20$ Erreurs de discréétisation (Millstein), avec $dt=T/20$

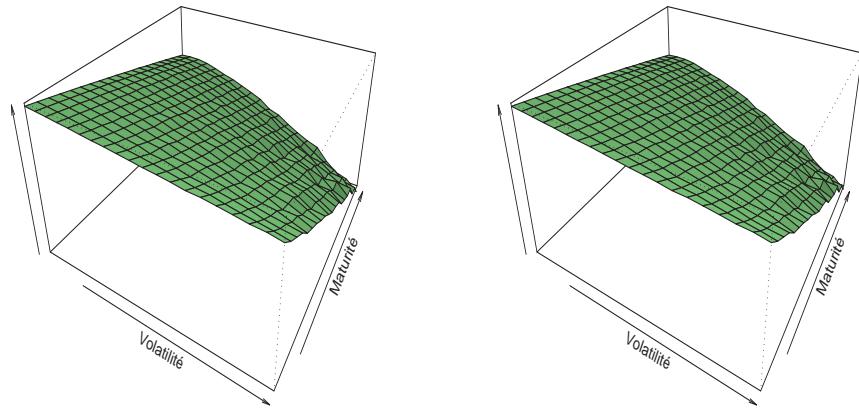


Figure 95: Erreur de discréétisation, option *fixed strike lookback option* avec le schéma d'Euler à gauche, et de Millstein à droite.

Erreurs de discréétisation (Euler), avec $dt=T/100$ Erreurs de discréétisation (Millstein), avec $dt=T/100$

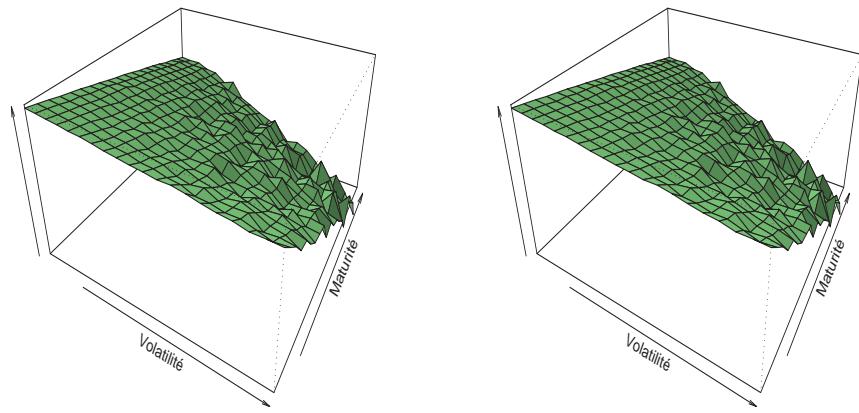


Figure 96: Erreur de discréétisation, option *fixed strike lookback option* avec le schéma d'Euler à gauche, et de Millstein à droite.

couple aléatoire, de lois marginales F_X et F_Y , de fonction de répartition (jointe) F_{XY} et de copule C . Si $y \mapsto \mathbb{P}(X \leq x|Y = y)$ est continue à droite, alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X \leq x|Y = y) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(X \leq x|y \leq Y < y + h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{XY}(x, y + h) - F_{XY}(x, y)}{F_Y(y + h) - F_Y(y)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(F_X(x), F_Y(y + h)) - C(F_X(x), F_Y(y))}{F_Y(y + h) - F_Y(y)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(F_X(x), F_Y(y) + \varphi(y, h)) - C(F_X(x), F_Y(y))}{\varphi(y, h)} \end{aligned}$$

où $\varphi(y, h) = F_Y(y + h) - F_Y(y) \rightarrow 0$ pour tout y , lorsque $h \rightarrow 0$, étant donné que F_Y est continue. Aussi,

$$\mathbb{P}(X \leq x|Y = y) = \frac{\partial C}{\partial v}(F_X(x), F_Y(y)). \quad (27)$$

Si $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ admet pour fonction de répartition C , alors l'algorithme suivant permet de générer un tel vecteur

- simuler U_1 uniformément sur $[0, 1]$,

$$u_1 \leftarrow \text{Random}_1,$$

- simuler U_2 from the conditional distribution $\partial_2 C(\cdot|u_1)$,

$$u_2 \leftarrow [\partial_1 C(\cdot|u_1)]^{-1}(\text{Random}_2),$$

- simuler U_k from the conditional distribution $\partial_k C(\cdot|u_1, \dots, u_{k-1})$,

$$u_k \leftarrow [\partial_1 \dots \partial_{k-1} C(\cdot|u_1, \dots, u_{k-1})]^{-1}(\text{Random}_k),$$

...etc, où les Random_i ' sont des appels indépendants de la fonction Random.

Exemple 89. Pour simuler la copule de Clayton $C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$, on tire U et W avec deux appels indépendants de la fonction Random, et on pose

$$V = (W^{-\theta/(\theta+1)} \times u^{-\theta} - u^{-\theta} + 1)^{-1/\theta}.$$

Exemple 90. Pour simuler la copule de Frank, $C(u, v) = \frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right)$, on tire U et W avec deux appels indépendants de la fonction Random, et on pose

$$V = \frac{1}{\theta} \log \left(\frac{(e^{-\theta} - 1)^3}{e^{-\theta U} - 1} \left(\frac{e^{-\theta u}}{(e^{-\theta U} - 1) \times W} \right) + 1 \right)$$

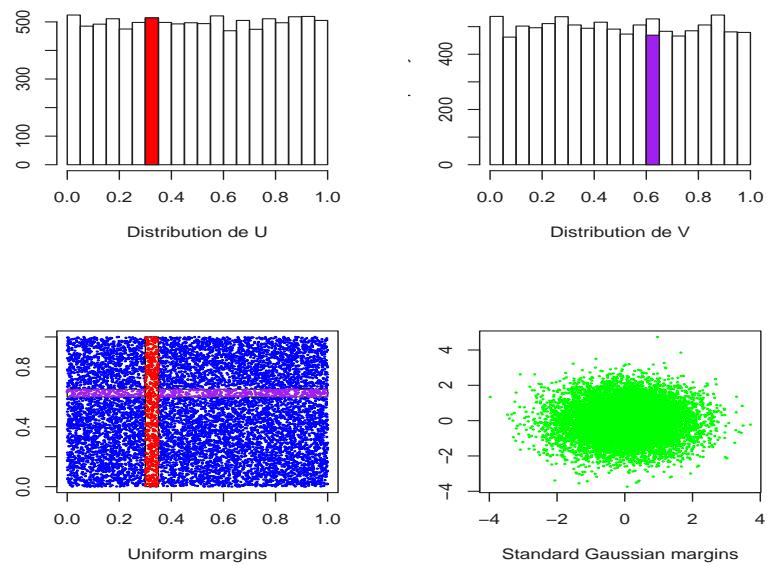


Figure 97: Simulation of the independent copula.

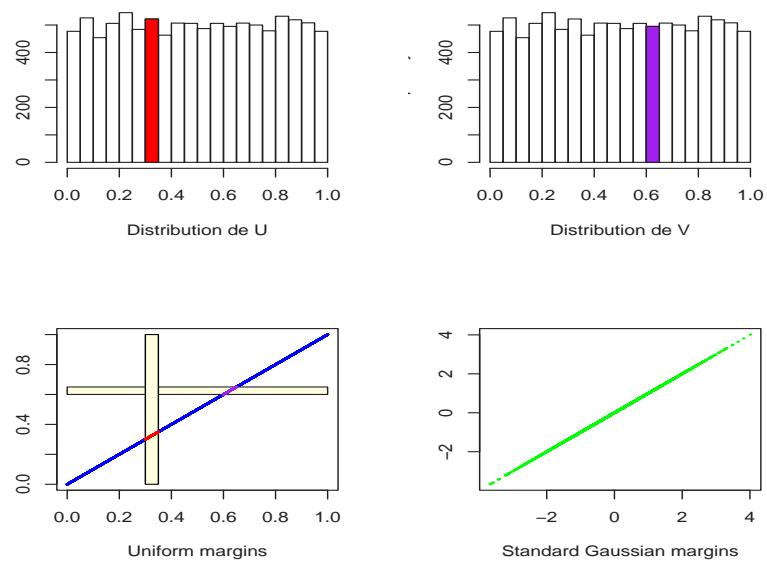


Figure 98: Simulation of the comontone copula.

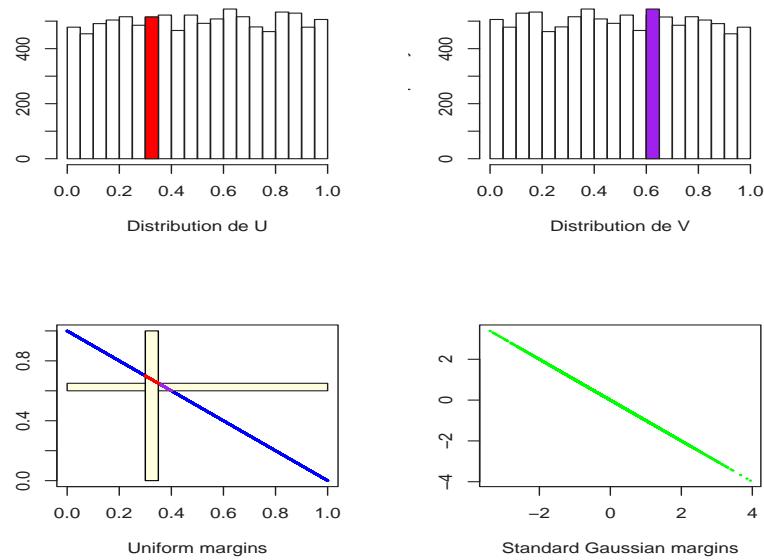


Figure 99: Simulation of the contercomonotone copula.

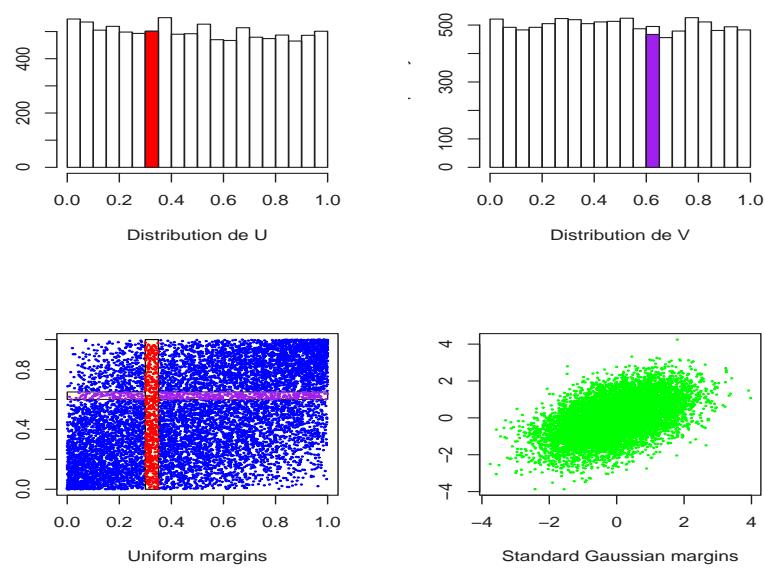


Figure 100: Simulation of the Gaussian copula.

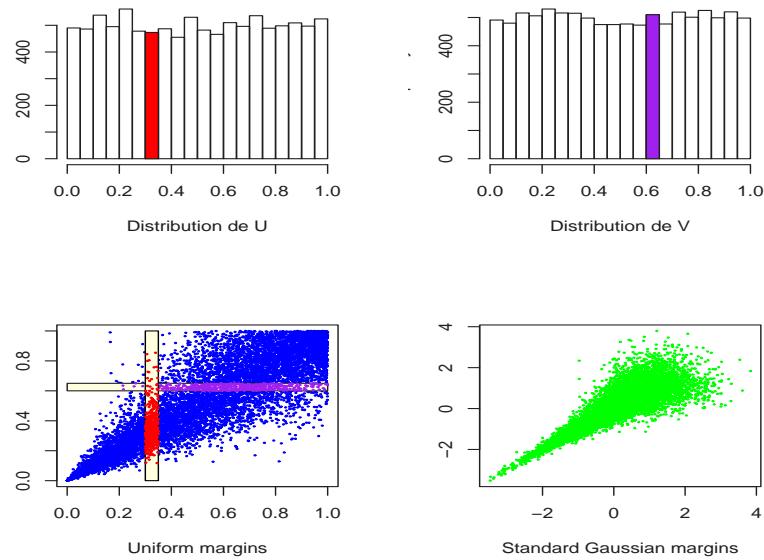


Figure 101: Simulation of Clayton's copula.

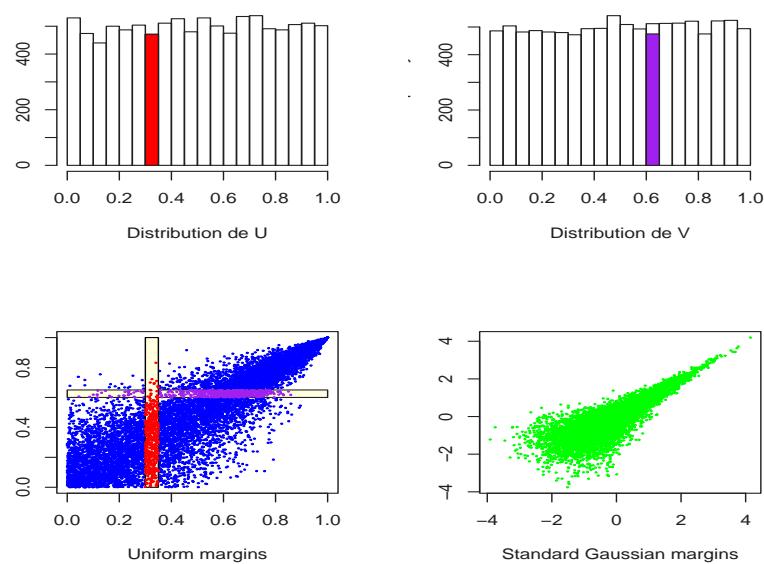


Figure 102: Simulation of Clayton's survival copula.

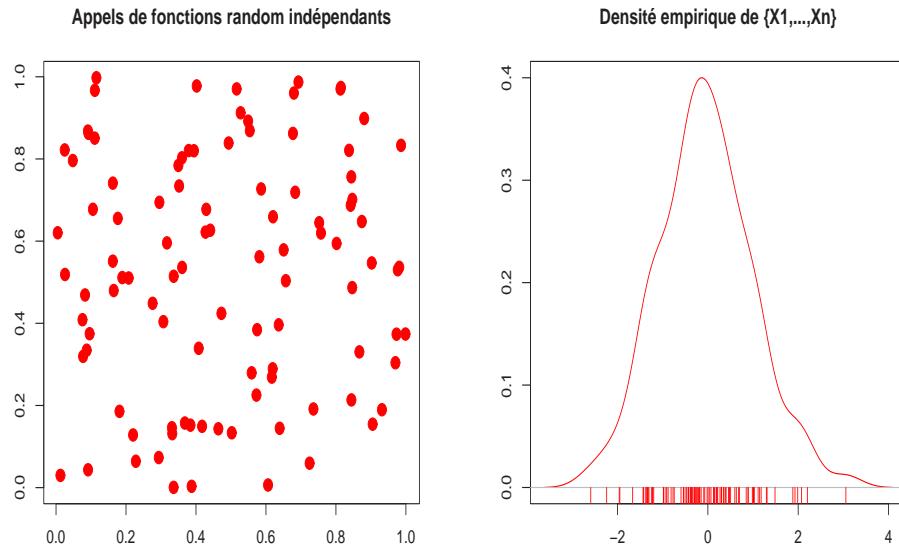


Figure 103: Simulation de variables indépendantes, par copules.

Pour générer une copule Archimédienne, $C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$, où ϕ est décroissante convexe, s'annulant en 1, GENEST & MACKAY (1986), GENEST (1987) et LEE (1993) ont proposé différentes algorithmes.

Notons que lors de simulations d'un vecteur indépendant en dimension 2, plusieurs techniques peuvent être utilisées.

- faire des appels indépendants de fonctions randoms, U et V , puis poser $X = F_X^{-1}(U)$ et $Y = F_Y^{-1}(V)$,
- faire des appels indépendants de fonctions randoms, et prendre les rangs: $X = F_X^{-1}(\text{rang}(U)/(n+1))$ et $Y = F_Y^{-1}(\text{rang}(V)/(n+1))$,

La figure suivante montre la réalisation de 100 simulations de paires, et l'impact sur la densité de X , lorsque $F_X = \Phi$.

- la méthode [Latin hypercube](#),

Il s'agit d'une méthode intermédiaire entre les deux méthodes précédentes. L'idée est de pavier le carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ en petits carrés, puis de tirer indépendamment des variables indépendantes dans chaque carré.

Dans le cas des 100 simulations, on découpe le carré unité en $5^2 = 25$ petits carrés de longueur $1/5$, et dans chaque carré, on tire au hasard 4 points.

11.11 Simulation de processus corrélés

Le processus de base étant le mouvement brownien, la première étape est donc de savoir simuler un mouvement brownien.

La corrélation ρ est, théoriquement, la [corrélation instantanée](#) entre dW_t^1 et dW_t^2 , au sens où $\text{corr}(dW_t^1, dW_t^2) = \rho$, ou plus proprement, $d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho dt$. L'interprétation

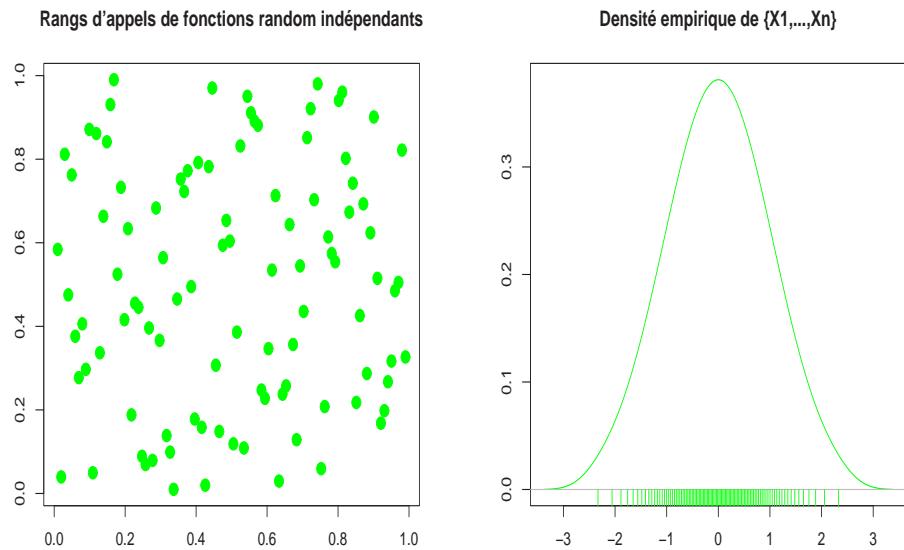


Figure 104: Intérêt des rangs lors de simulations.

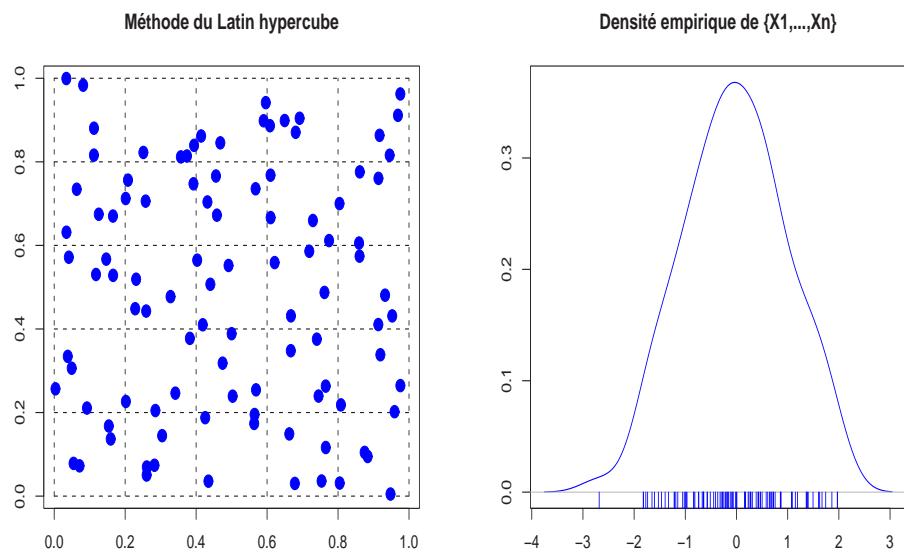


Figure 105: La méthode du latin hypercube.

en terme de simulations est alors claire: les incrémentations sont corrélées, avec une corrélation ρ . En fait, on peut montrer qu'alors, plus généralement, pour tout $s < t$,

$$\text{corr}(W_t^1 - W_s^1, W_t^2 - W_s^2) = \rho \text{(indépendamment de } t \text{ et } s\text{).}$$

L'interprétation peut également être la suivante: si X_1, \dots, X_n sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$, si Y_1, \dots, Y_n sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ et si pour tout i , (X_i, Y_i) est un vecteur gaussien de corrélation ρ , alors

$$\text{corr}(X_1 + \dots + X_n, Y_1 + \dots + Y_n) = \rho \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En effet

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{array} \right) \sim \mathcal{N} \left(\left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & \rho & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & (0) \\ \rho & (0) & 1 & \rho \\ & \ddots & & \ddots \\ (0) & \rho & & 1 \end{array} \right) \right)$$

On pose alors

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 1 & (0) \\ (0) & & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

On peut alors monter que

$$A \left(\begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} X_1 + \dots + X_n \\ Y_1 + \dots + Y_n \end{array} \right) \sim \mathcal{N} \left(\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} n & n\rho \\ n\rho & n \end{array} \right) \right)$$

c'est à dire que $\text{corr}(X_1 + \dots + X_n, Y_1 + \dots + Y_n) = \rho$.

Notons qu'au lieu d'avoir un les incrémentations des vecteurs gaussiens indépendants, de corrélation r , il est possible d'avoir d'autres types de dépendance (i.e. copules, Figure 110). A partir de ces processus, il est possible de tarifer des options multisupports, ou des processus à volatilité stochastique (dont les browniens sont corrélés).

11.12 Impact de la corrélation sur les prix d'options

On considère une option sur spread, payant $(S_T^1 - S_T^2)_+$ à échéance. La figure suivante montre l'impact de la corrélation sur le prix d'une telle option.

11.13 Processus à volatilité stochastique

Plaçons nous dans le cas où le prix d'un actif est donné par la diffusion suivante,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \Sigma_t dW_t^1,$$

où le processus de volatilité $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$ suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, i.e.

$$d\Sigma_t = -b\Sigma_t + \delta dW_t^2,$$

où $(\mathbf{W}_t)_{t \geq 0} = (W_t^1, W_t^2)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien (standard) bivariée, de corrélation ρ (on parlera aussi de corrélation instantanée entre dW_t^1 et dW_t^2).

On peut utiliser un schéma d'Euler, et à chaque date, utiliser la volatilité simulée.

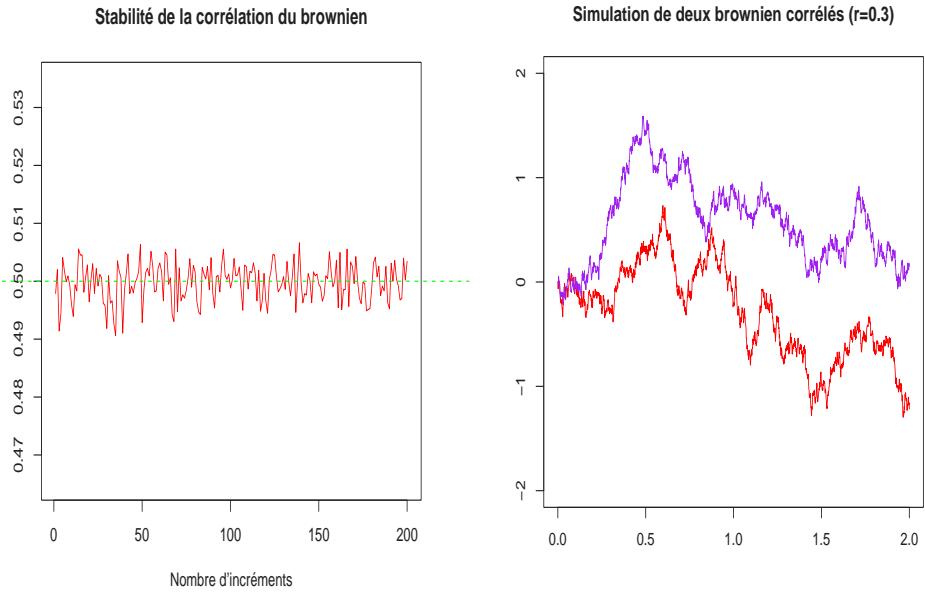


Figure 106: Corrélation d'un brownien multivarié et corrélation de la somme de n gaussiennes corrélées.

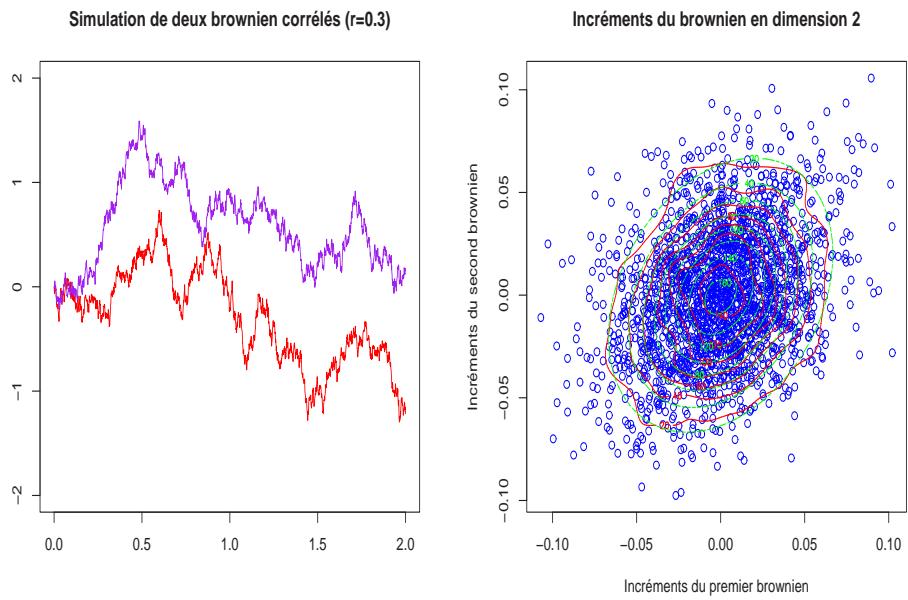


Figure 107: Simulation de trajectoires de browniens, $\rho = 0.3$

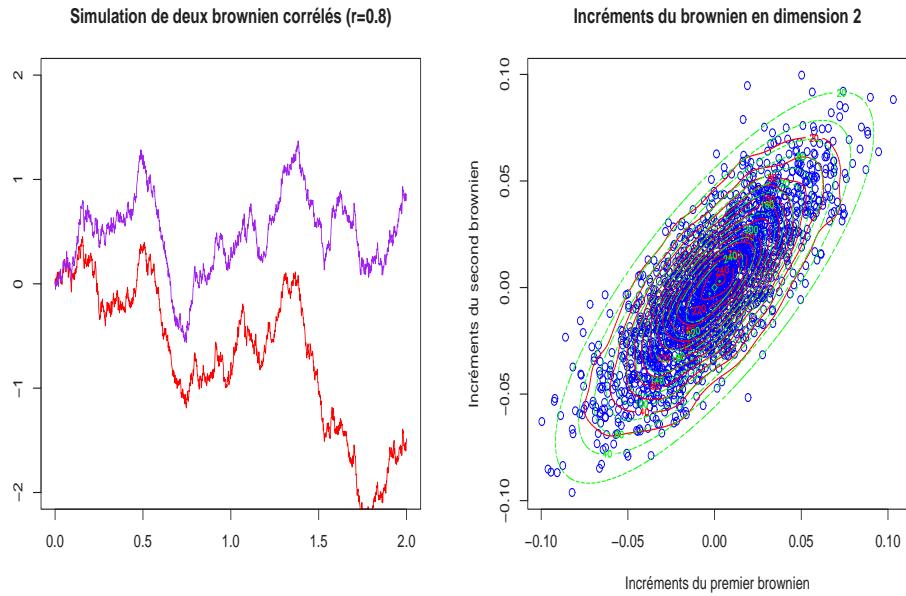


Figure 108: Simulation de trajectoires de browniens, $\rho = 0.8$

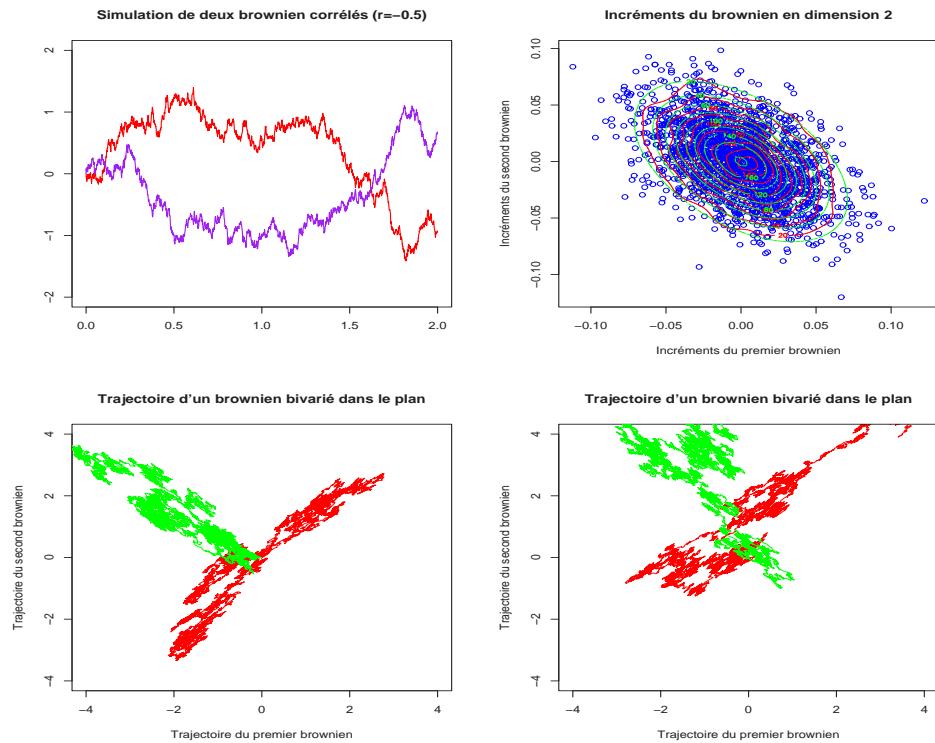


Figure 109: Simulation de trajectoires de browniens, avec un brownien positivement corrélé (en rouge) et négativement corrélé (en vert).

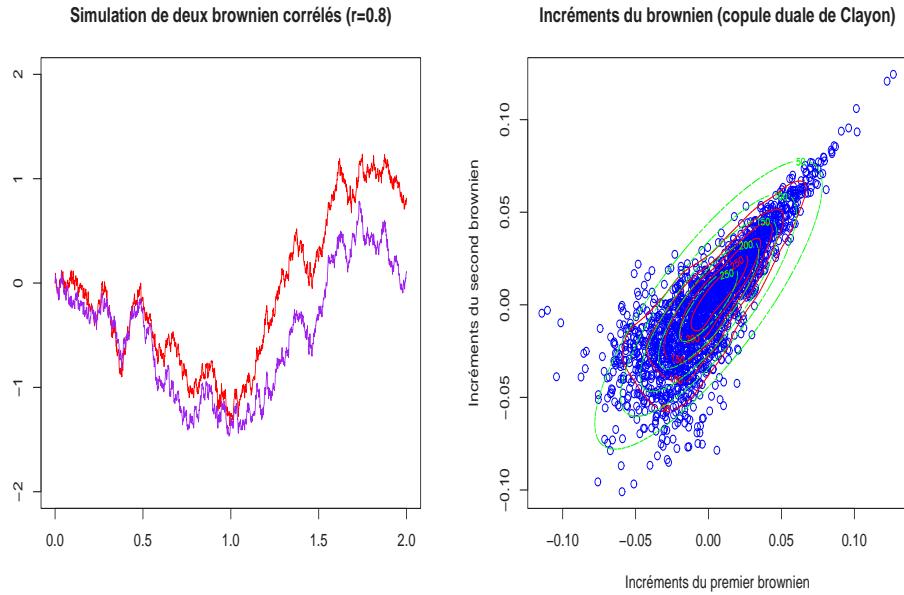


Figure 110: Simulation de trajectoires processus Gaussien.

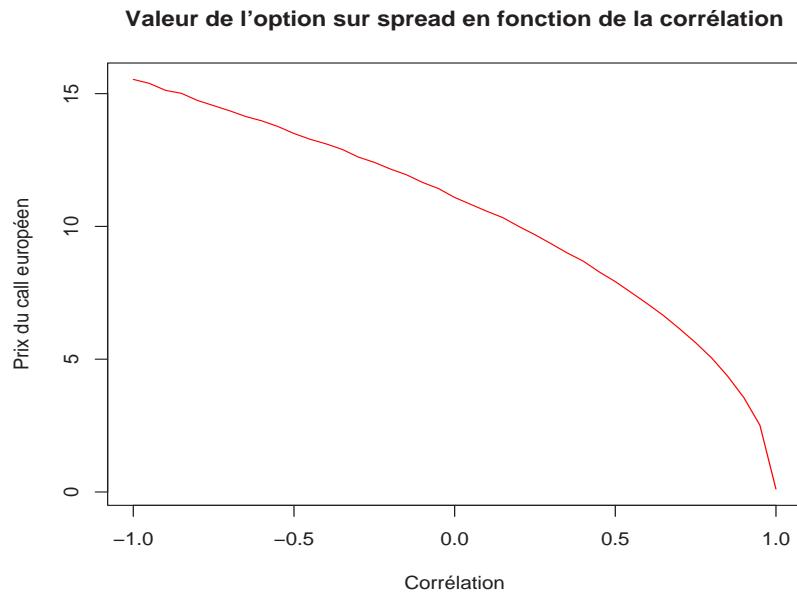


Figure 111: Prix d'une option sur spread, impact de la corrélation.

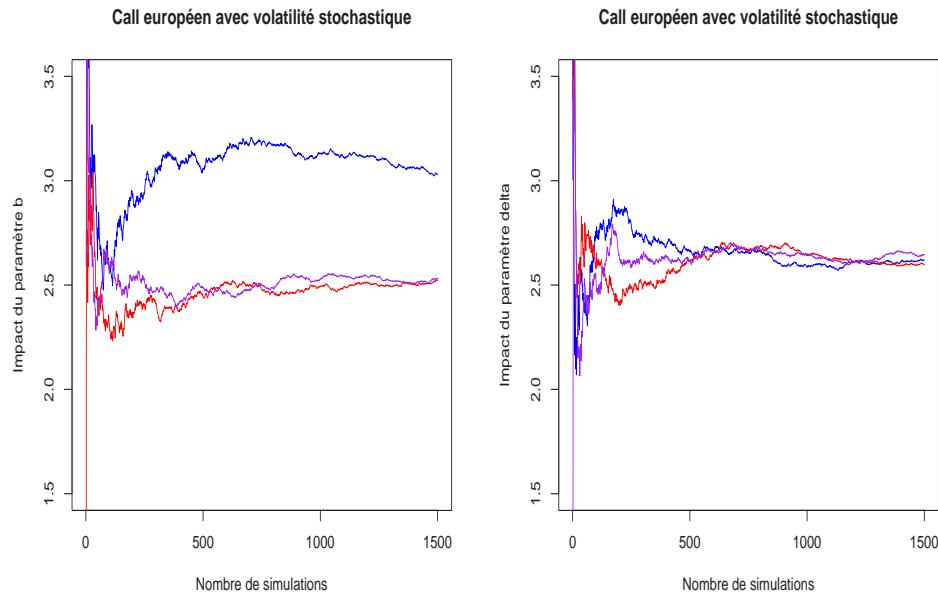


Figure 112: Valorisation d'un call européen à volatilité stochastique, avec plusieurs b à gauche, et plusieurs δ à droite.

12 Améliorer la précision des estimations

Plusieurs méthodes permettent d'améliorer la précision, ou la vitesse de convergence,

- utiliser des propriétés de calculs stochastique ou de probabilités,
- utiliser des méthodes de [réduction de variance](#),
- utiliser des méthodes de [lissage](#).

12.1 Méthodes de réduction de variance

Les méthodes de réduction de variance peuvent être très utilisées.

Considérons un call très en dehors de la monnaie, i.e. $S_0 \ll K$. Les méthodes "classiques" de Monte Carlo donnent très peu de trajectoires qui atteignent le strike K , et il y aura alors beaucoup de rejets. En effet,

$$C_0 = \mathbb{E} \left(\left(S_0 \exp \left[\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] - K \right)_+ \right),$$

et puisque $S_0 \ll K$, on peut légitimement penser que

$$\mathbb{P} \left(S_0 \exp \left[\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] > K \right) \sim 0.$$

Au lieu de simuler $X \sim \mathcal{I}, \infty$, pour calculer $\mathbb{E}(\phi(X))$, où

$$\phi(x) = \left(\left(S_0 \exp \left[\sigma \sqrt{T} x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \right) - K \right)_+$$

par des méthodes classiques de Monte Carlo, l'idée est de simuler une autre variable aléatoire (Z) telle que $\mathbb{P}(\phi(Z) > 0)$ ne soit plus proche de 0, mais éventuellement proche de 1/2. On va ainsi simuler une loi $Z \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ où μ vérifie

$$S_0 \exp \left[\sigma \sqrt{T} x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] = K,$$

soit

$$m = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left(\log \frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right).$$

La valeur de l'option sera alors

$$\mathbb{E} \left(f(Z) \exp \left(-mZ + \frac{m^2}{2} \right) \right).$$

Cette technique est appelée “*importance sampling*”.

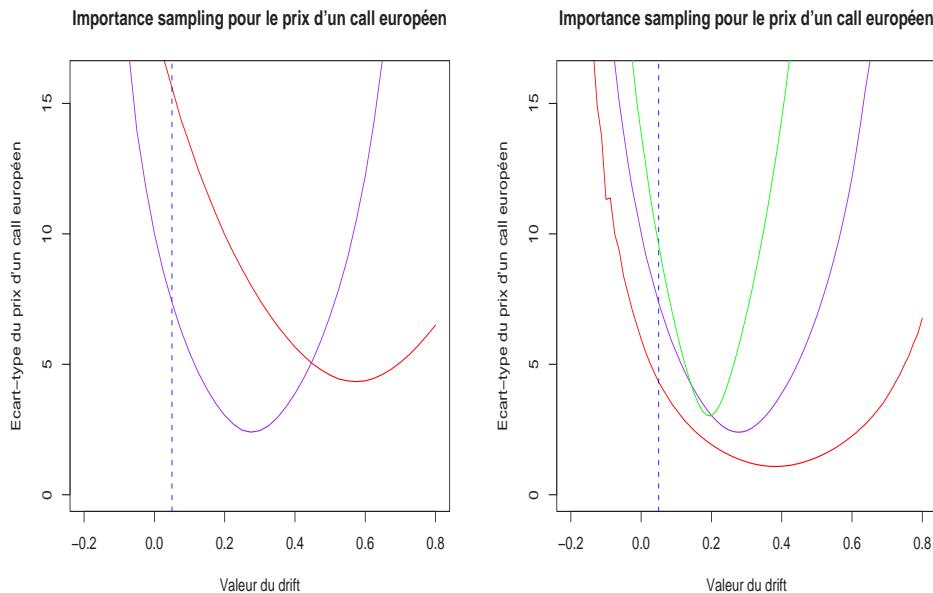


Figure 113: Importance sampling, volatilité de l'estimateur en fonction de la valeur du drift, avec différentes volatilités, ou différents strikes.

12.2 Les méthodes de stratification

Le plus simple est de présenter un exemple simple. Considérons un vecteur aléatoire gaussien \mathbf{X} de dimension d , avec $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I})$. Le vecteur \mathbf{X} peut se réécrire

$$\mathbf{X} = (\mathbf{s}' \mathbf{X}) \mathbf{s} + \mathbf{Y},$$

où \mathbf{s} est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^d et $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - (\mathbf{s}' \mathbf{X}) \mathbf{s}$ est un vecteur gaussien centré, de matrice de variance-covariance $\Sigma = \mathbb{I} - P_s$ où P_s est la matrice de projection orthogonale sur \mathbf{s} . \mathbf{s} étant un vecteur unitaire, notons que $\mathbf{s}' \mathbf{X}$ est une variable $\mathcal{N}(0, 1)$.

On constitue alors k strates $(\mathcal{S}_i)_{i=1,\dots,k}$, suivant la valeur de $\mathbf{s}'\mathbf{X}$. La strate i est définie de la façon suivante,

$$\mathbf{X} \in \mathcal{S}_i \text{ si et seulement si } \frac{i-1}{k} \leq \Phi(\mathbf{s}'\mathbf{X}) < \frac{i}{k}.$$

On tire alors le vecteur le aléatoire $\mathbf{X}|\mathbf{X} \in \mathcal{S}_i$ en utilisant la décomposition

$$\mathbf{X}|\mathbf{X} \in \mathcal{S}_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Phi^{-1}(U_i) \cdot \mathbf{s} + \mathbf{Y},$$

où U_i suit une loi uniforme sur $\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]$, indépendante de \mathbf{Y} .

Il s'agit alors de déterminer la direction \mathbf{s} optimale qui permettra de réduire la variance.

12.3 Les variables antithétiques

Supposons que l'on cherche à calculer $\theta = \mathbb{E}[h(U)]$ où $U \sim \text{Uni}(0, 1)$. A partir de n variables uniformes indépendantes U_1, \dots, U_n , la méthode standard de Monte Carlo consiste à approximer θ par

$$\theta \sim \frac{1}{n} \left(h(U_1) + \dots + h(U_n) \right) = \hat{\theta},$$

mais compte tenu de la relation

$$\int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [h(x) + h(1-x)] dx, \quad (28)$$

on peut également approcher θ à l'aide de la relation

$$\theta \sim \frac{1}{2n} \left(h(U_1) + h(1-U_1) + \dots + h(U_n) + h(1-U_n) \right) = \hat{\theta}_A.$$

En notant $X_i = h(U_i)$ et $Y_i = h(1-U_i)$, alors

$$\text{Var} [\hat{\theta}] = \text{Var} \left[\frac{1}{n} (h(U_1) + \dots + h(U_n)) \right] = \frac{\text{Var} [X]}{n}$$

alors que

$$\begin{aligned} \text{Var} [\hat{\theta}_A] &= \text{Var} \left[\frac{1}{2n} (h(U_1) + h(1-U_1) + \dots + h(U_n) + h(1-U_n)) \right] \\ &= \text{Var} [\hat{\theta}] + \frac{\text{Cov} [X, Y]}{n}. \end{aligned}$$

C'est à dire que $\text{Var} [\hat{\theta}_A] < \text{Var} [\hat{\theta}]$ si, et seulement si, $\text{Cov} [h(U), h(1-U)] < 0$. Cette condition est vérifiée en particulier si h est une fonction monotone. Aussi, si h est une fonction monotone, alors la qualité de l'approximation est améliorée.

De façon générale, $\theta = \mathbb{E}[h(X)]$ peut se réécrire

$$\theta = \mathbb{E} [h(F_X^{-1}(U))] = \mathbb{E} [h^*(U)],$$

ce qui permet de se ramener au cas uniforme.

Valeur d'un call européen, Monte Carlo et variables antithétiques

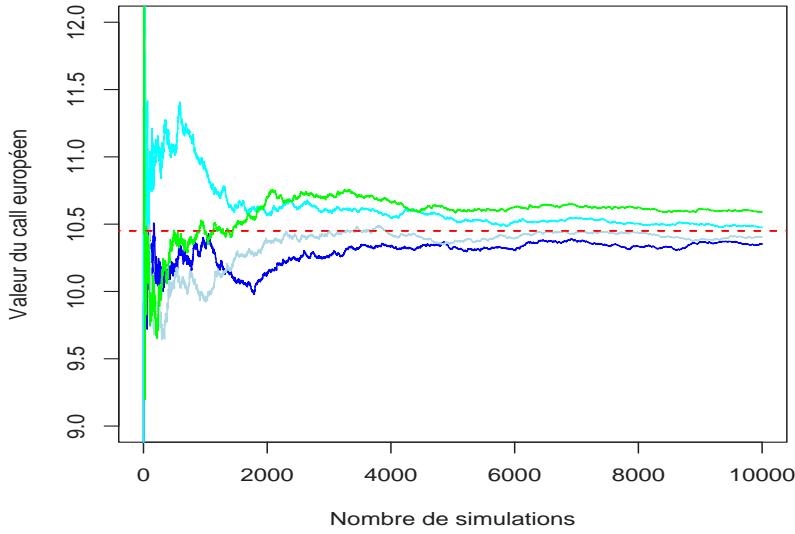


Figure 114: Valeur d'un call européen, méthode de Monte Carlo classique.

Cette méthode peut être utilisée pour la simulation de processus en temps continu. En particulier, dans le cas du modèle de BLACK & SCHOLES (1973) (Exemple ??), on utilise la propriété de symétrie du mouvement brownien, i.e. $(W_t) =_{\text{loi}} (-W_t)$, et on en déduit que $X_t =_{\text{loi}} Y_t$ où

$$Y_t = x \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t - \sigma W_t \right).$$

On peut alors obtenir une meilleure précision en simulant deux fois moins d'accroissements du brownien. Si l'on s'intéresse à $g(X_t)$ (par exemple $g(x) = (K - x)^+$ pour des puts européens) où g est supposée monotone et $\sigma > 0$, alors $\text{Cov}[g(X_t), g(Y_t)] \leq 0$ (avec une inégalité stricte si g est strictement monotone sur un ensemble de mesure non nulle), et donc

$$\text{Var} \left[\frac{1}{2} (g(X_t) + g(Y_t)) \right] \leq \frac{1}{2} \text{Var}[g(X_t)].$$

Aussi, en simulant $N/2$ trajectoires de $g(X_t) + g(Y_t)$, l'estimateur obtenu sera plus précis que simuler N trajectoires de $g(X_t)$.

```
Call européen - simulations (antithétiques)
S=exp(T*(r-0.5*sigma^2) - sigma * sqrt(T) * X)
C.ant=0.5*exp(-r*T)*(pmax(Ssim-K,0)+pmax(S.ant-K,0))
print.noquote(c("Prix call - simulations (antithétiques):",
mean(C.ant), "+/-", 1.96*sqrt(var(C.ant))/sqrt(Nsim)))
```

```
X=rnorm(Nsim)
Ssim=s*exp(T*(r-0.5*sigma^2) + sigma * sqrt(T) * X)
```

12.4 Echantillonage par importance, ou *importance sampling*

Pour calculer des intégrales, l'idée ici est de l'écrire sous la forme d'une espérance mathématique, et de bien choisir la loi de la variable à simuler (qui peut être différente de la loi du problème)/

Exemple 91. Un cas d'école est le calcul de $\mathbb{P}(X > 2)$ où X suit une loi de Cauchy. On cherche à calculer

$$\theta = \mathbb{P}[X > 2] = \int_2^\infty \frac{dx}{\pi(1+x^2)}.$$

(la vraie valeur étant proche de 0.15 - ce qui n'est pas un événement rare). Pour une approche de Monte Carlo standard, l'estimateur est alors

$$\hat{\theta}_{MC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}[X_i > 2]$$

où les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes de loi de Cauchy. La variance de cet estimateur de $\hat{\theta}_{MC}$ s'écrit alors $\theta(1-\theta)/n = 0.1275/n$ (puisque $\theta \sim 0.15$).

La distribution étant symétrique (et donc $\theta = \Pr[|X| > 2]/2$) on peut considérer comme estimateur

$$\hat{\theta}_{MC}^* = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}[|X_i| > 2],$$

dont la variance est alors $\theta(1-2\theta)/2n = 0.0525/n$.

Ces méthodes classiques de Monte Carlo sont ici relativement inefficace puisqu'un grand nombre de simulation sont sans intérêt pour la simulation (les simulations ne tombant pas dans le domaine $[2, \infty)$). Une amélioration peut être obtenue en notant que θ peut se réécrire

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} - \mathbb{P}[0 \leq X \leq 2] = \frac{1}{2} - \int_0^2 \frac{dx}{\pi(1+x^2)} \\ &= \frac{1}{2} - \mathbb{E}[h(U)] \text{ où } h(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \end{aligned}$$

avec $U \sim \mathcal{U}_{[0,2]}$. Aussi, un estimateur naturel de θ s'écrit

$$\hat{\theta}_{IS} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(U_i),$$

où les variables U_1, \dots, U_n sont indépendantes de loi $\mathcal{U}(0, 2)$. Aussi, la variance de $\hat{\theta}_{IS}$ s'écrit $[\mathbb{E}(h(U)^2) - \mathbb{E}(h(U))^2]/n$ et une intégration par partie permet d'écrire $\text{Var}[\hat{\theta}_{IS}] = 0.0092/n$. Pour conclure, notons qu'une autre façon de réécrire θ est

$$\theta = \int_0^{1/2} \frac{y^{-2}}{\pi(1+y^{-2})} dy = \mathbb{E}\left[\frac{1}{4}h'(V)\right],$$

où

$$h'(y) = \frac{1}{2\pi(1+y^2)} \text{ et } V \sim \mathcal{U}([0, 1/2]).$$

Aussi, considérons comme estimateur

$$\hat{\theta}'_{IS} = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n h(V_i)$$

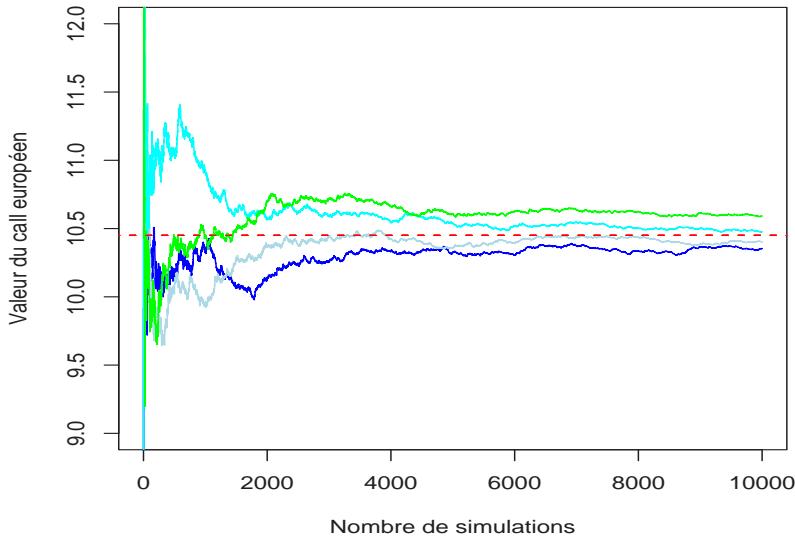
Valeur d'un call européen, Monte Carlo et variables antithétiques


Figure 115: Méthode d'importance sampling: cas d'école avec le calcul de $\mathbb{P}(X > 2)$ où X suit une loi de Cauchy.

où V_1, \dots, V_n sont indépendantes, de loi $\text{Uni}(0, 1/2)$. La même intégration par partie donne

$$\text{Var} [\widehat{\theta}'_{IS}] = 0.00095/n \leq \text{Var} [\widehat{\theta}_{MC}] / 1000.$$

Aussi, la même précision est obtenue en utilisant 1000 fois moins de simulations. La Figure 115. montre ainsi l'évolution de l'estimation en fonction de n .

La méthode d'importance sampling peut être particulièrement intéressante lorsqu'elle permet de passer d'une fonction non-bornée, à une fonction bornée. On cherche ici à estimer $\theta = \int g(X) dF(x)$. Supposons que g ne soit pas bornée. L'idée de l'échantillonage par importance est de réécrire

$$\theta = \int g(x) f(x) dx = \int g(x) \frac{f(x)}{f^*(x)} f^*(x) dx = \int g^*(x) f^*(x) dx$$

ou encore $\theta = \mathbb{E}_F(g(X)) = \mathbb{E}_{F^{ast}}(g^*(X^*))$, où X et X^* ont pour loi F et F^* respectivement.

L'estimation dans le cas où g est non-bornée devrait être meilleure si on peut trouver une loi f^* telle que g^* est alors bornée.

Exemple 92. Supposons que l'on cherche à calculer $\theta = \int_0^1 z^{\alpha-1} e^{-z} dz$, pour $1/2 < \alpha \leq 1$. La première idée peut être de voir

$$\theta = \mathbb{E}(g(U)) \text{ où } g(z) = z^{\alpha-1} e^{-z} \text{ et } U \sim \mathcal{U}([0, 1]).$$

Notons qu'alors

$$\text{Var}(g(U)) = \int_0^1 z^{2(\alpha-1)} e^{-2z} dz - \theta^2.$$

Une écriture plus astucieuse consiste à noter que

$$\theta = \mathbb{E}(g^*(X)) \text{ où } g(z) = e^{-z/\alpha} \text{ et } X \sim \mathcal{B}(\alpha, 1),$$

c'est à dire une loi Béta, i.e. $f^*(x) = alphaz^{\alpha-1}$ sur $[0, 1]$. Notons qu'alors

$$\text{Var}(g^*(X)) = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 z^{\alpha-1} e^{-2z} dz - \theta^2.$$

La Figure ci-après montre le gain (théorique) de cette transformation, avec après, quelques résultats de simulations, pour des valeurs différentes de α .

Remarque 93. On ne cherche ici qu'à améliorer la vitesse de convergence, sans tenir compte du temps CPU pour tirer des lois. Ici le second algorithme est plus rapide, mais tirer une loi Beta au lieu d'une loi uniforme est aussi plus coûteux en temps CPU.

L'outil de base pour les méthodes d'importance sampling dans le cas des options est le théorème de Girsanov.

Rappelons que dans le cas des processus du modèle de BLACK & SCHOLES (1973),

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

et seules les dates 0 et T intervenant, il suffit de simuler la valeur du sous-jacent en T .

Intuitivement, il paraîtrait plus efficace de changer le processus, de telle sorte que l'option soit à la monnaie à la date T (et donc que $(S_T - K)_+$ soit nul le moins souvent possible). La solution la plus simple serait alors de changer le strike K . On réécrit l'équation différentielle stochastique sous la forme

$$dS_t = (r + c)S_t dt + \sigma S_t \left(dW_t - \frac{c}{s}t \right) = (r + c)S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t,$$

où

$$d\tilde{W}_t = dW_t - \frac{c}{s}t.$$

On notera que $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien, sous une autre mesure, notée \mathbb{Q} . On notera que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(g(S_T)) = \frac{1}{Z_0} \mathbb{E}(Z_t \cdot g(S_T)), \quad (29)$$

où g est la fonction de payoff, et Z_t la variable aléatoire

$$Z_t = \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{c^2}{\sigma^2} \cdot t + \frac{c}{\sigma} W_t \right).$$

On peut alors réécrire 29 sous la forme

$$\mathbb{E}(g(S_T)) = Z_0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{g(S_T)}{Z_T} \right).$$

En notant que

$$S_t = S_0 \exp \left(\left[r + c - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \cdot t + \sigma \tilde{W}_t \right),$$

et que Z_t peut également se réécrire

$$Z_t = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{c^2}{\sigma^2} \cdot t + \frac{c}{\sigma}\tilde{W}_t\right),$$

on en déduit le prix d'un call européen à la date 0, sous la forme

$$V(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp(-rT) \frac{\left(S_0 \exp\left([r + c - \frac{1}{2}\sigma^2] \cdot T + \sigma\tilde{W}_T\right) - K\right)_+}{\exp\left(\frac{1}{2}\frac{c^2}{\sigma^2} \cdot T + \frac{c}{\sigma}\tilde{W}_T\right)}\right).$$

Pour rappel, sans ajustement sur le drift, nous aurions

$$V(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp(-rT) \left(S_0 \exp\left(\left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \cdot T + \sigma W_T\right)\right)_+ - K\right).$$

Le choix du changement de drift est relativement délicat. Notons que le changement de mesure à l'aide du théorème de Girsanov, au lieu de se faire sur le processus $(S_t)_{t \in [0, T]}$, peut être fait sur le processus discréétisé par un algorithme de type Euler.

La méthode de réduction de variance peut se faire en limitant les processus possibles aux fonctions en escaliers et déterministes, suivant l'idée de GLASSERMAN, HEIDEL-BERGER & SHAHABUDDIN (1998).

Notons qu'il est possible d'utiliser un principe de grandes déviations pour trouver la dérive optimale.

Le problème peut s'écrire sous la forme suivante: on cherche un vecteur \mathbf{s} de \mathbb{R}^{nl} , telle que

$$g(\mathbf{Z} + \mathbf{s}) \exp\left(-\mathbf{s}'\mathbf{Z} - \frac{1}{2}\mathbf{s}'\mathbf{s}\right) \mathbf{1}_{\mathbf{Z} + \mathbf{s} \in \mathcal{D}},$$

ait la variance la plus faible possible, où \mathbf{Z} est un vecteur gaussien centré réduit de dimension nl , sous la probabilité $\mathbb{Q}_{\mathbf{s}}$, et où \mathcal{D} est l'ensemble $\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{nl}, g(\mathbf{z}) > 0\}$. Ce problème peut s'écrire

$$\min_{\mathbf{s}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{\mathbf{s}}} (g(\mathbf{Z} + \mathbf{s})^2 \exp(-2\mathbf{s}'\mathbf{Z} + \mathbf{s}'\mathbf{s}) \mathbf{1}_{\mathbf{Z} + \mathbf{s} \in \mathcal{D}})$$

ou encore, en repassant sous la probabilité initiale \mathbb{P}

$$\min_{\mathbf{s}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \exp((2F(\mathbf{Z}) + \mathbf{s}'\mathbf{Z} + \mathbf{s}'\mathbf{s}) \mathbf{1}_{\mathbf{Z} + \mathbf{s} \in \mathcal{D}}),$$

où $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$ sous \mathbb{P} , et où $F(\cdot) = \log g(\cdot)$.

En fait, il est possible d'accélérer encore la convergence en utilisant la méthode de stratification présentée dans la section ??.

Remarque 94. *En fait, il est possible d'utiliser des méthodes stochastiques afin de déterminer le changement de drift optimal (LIONS (2002)).*

12.5 Utilisation de variables de contrôle

Si l'on considère un estimateur $\hat{\theta}$ du paramètre θ que l'on cherche à estimer, l'idée est ici de poser

$$\hat{\theta}_c = \hat{\theta} + \kappa[Z - \mathbb{E}(Z)],$$

où Z est simulable, et dont on connaît l'espérance. On notera que

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_c) = \mathbb{E}(\hat{\theta}),$$

et que

$$\text{Var}(\hat{\theta}_c) = \text{Var}(\hat{\theta}) + \kappa^2 \text{Var}(Z) + 2\kappa \text{Cov}(\hat{\theta}, Z).$$

On choisit alors la constante κ de façon à minimiser la variance de cet estimateur contrôlé, soit

$$\kappa^* = -\frac{\text{cov}(\hat{\theta}, Z)}{\text{Var}(Z)},$$

et donc, par substitution

$$\text{Var}(\hat{\theta}_c^*) = \text{Var}(\hat{\theta}) - \frac{\text{cov}(\hat{\theta}, Z)^2}{\text{Var}(Z)}.$$

Encore une fois, pour que Z soit une “vraie” variable de contrôle, il convient d'avoir une variable non-indépendante de $\hat{\theta}$.

Exemple 95. Considérons un call asiatique, basé sur le maximum

$$\max \left\{ 0, \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right\}.$$

Un algorithme classique de Monte Carlo est basé sur la simulation de n trajectoires $(S_t)_{t \in [0, T]}$, discrétisées, puis de poser

$$C_i = \max \left\{ 0, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{iT/m} - K \right\}, i = 1, \dots, n,$$

puis de prendre la moyenne. Parmi les variables de contrôle, on pourra retenir

- $Z_1 = S_T$, la valeur terminale de la trajectoire du sous-jacent,
- $Z_2 = e^{-rT} \max\{0, S_T - K\}$, le payoff d'un call européen (actualisé),
- $Z_3 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{iT/m}$, la valeur moyenne du sous-jacent sur la période $[0, T]$.

```
Call européen - simulations (antithétiques avec contrôle)
X=rnorm(Nsim)
Ssim=s*exp(T*(r-0.5*sigma^2) + sigma * sqrt(T) * X)
S.ant=s*exp(T*(r-0.5*sigma^2) - sigma * sqrt(T) * X)
C.ant=0.5*exp(-r*T)*(pmax(Ssim-K,0)+pmax(S.ant-K,0))
Z<-0.5*exp(-r*T)*(Ssim+S.ant)
alpha.ant<-cov(Z,C.ant)/var(Z)
Y<-C.ant-alpha.ant*(Z-s)
print.noquote(c("Prix call - simulations (antithétiques +
contrôle):", mean(Y), "+/-", 1.96*sqrt(var(Y))/sqrt(Nsim)))
```

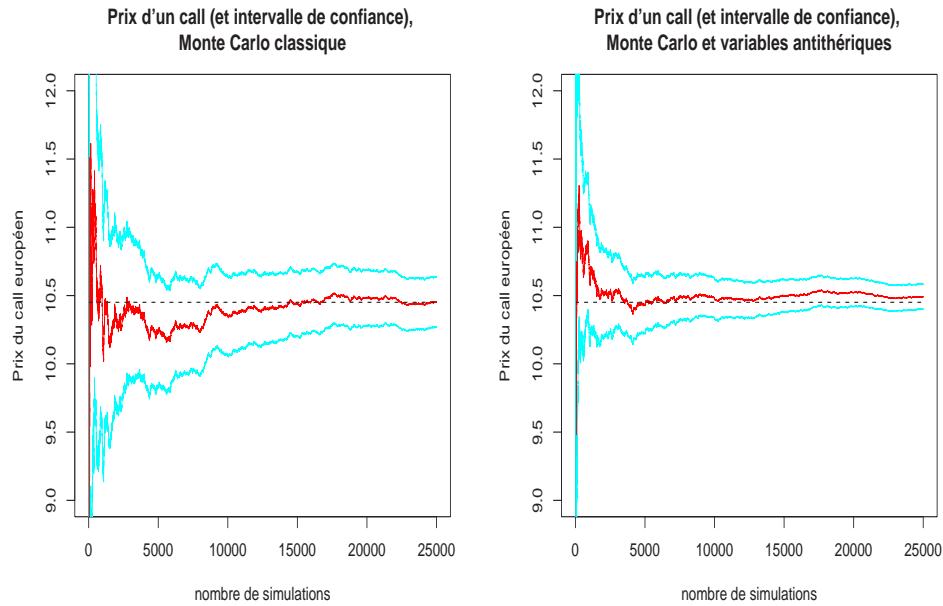


Figure 116: Monte Carlo classique et variables antithétiques.

12.6 Comparaison des différents méthodes de réduction de variance

En faisant 25,000 simulations Gaussiennes indépendantes, on obtient les résultats présentés dans le tableau ci-dessous,

vrai prix (Black & Scholes)	10.45058	
Monte Carlo classique	10.45471	± 0.18259
Monte Carlo avec variables antithétiques	10.49112	± 0.09145
Monte Carlo avec variable de contrôle (prix du sous-jacent) <i>corrélation</i>	10.48373	± 0.06987
Monte Carlo avec variable de contrôle et antithétiques <i>corrélation</i>	0.92387	
Monte Carlo et importance sampling (drift -0.200)	10.45088	± 0.02378
Monte Carlo et importance sampling (drift +0.200)	0.96557	
Monte Carlo et importance sampling (drift +0.275)	10.23757	± 0.92585
Monte Carlo et importance sampling (drift +0.275)	10.42974	± 0.07566
Monte Carlo et importance sampling (drift +0.275)	10.41608	± 0.05959

Les différentes vitesses de convergence peuvent être visualisées sur les Figures 116 à 119.

12.7 Méthodes de quasi-Monte Carlo

La base des méthodes de Monte Carlo était le Lemme 81 consistant à représenter X comme une fonction de variables indépendantes, uniformément distribuées sur $[0, 1]$. On simulait alors des variables U_i pour estimer $\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(\psi(U_1, \dots, U_n))]$. Dans le cas des méthodes de quasi-Monte Carlo, on cherche alors des suites déterministes u_1, \dots, u_n telles que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(u_i) \rightarrow \mathbb{E}[h(U)] \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad (30)$$

avec une vitesse de convergence plus rapide que $1/\sqrt{n}$.

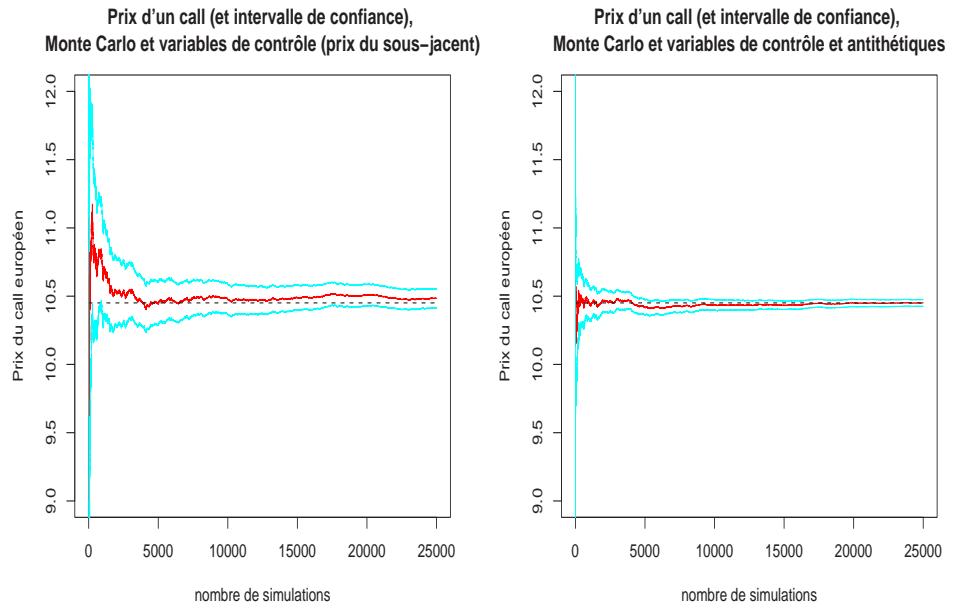


Figure 117: Monte Carlo avec variable de contrôle (le prix du sous-jacent), et en combinant avec les variables antithétiques.

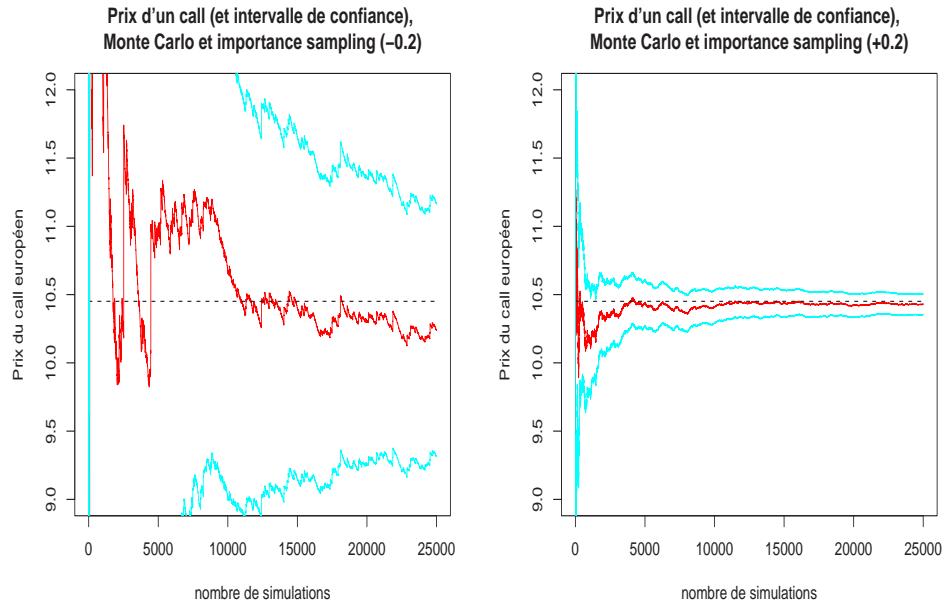


Figure 118: Monte Carlo avec importance sampling (Girsanov), changement du drift de ± 0.2 .

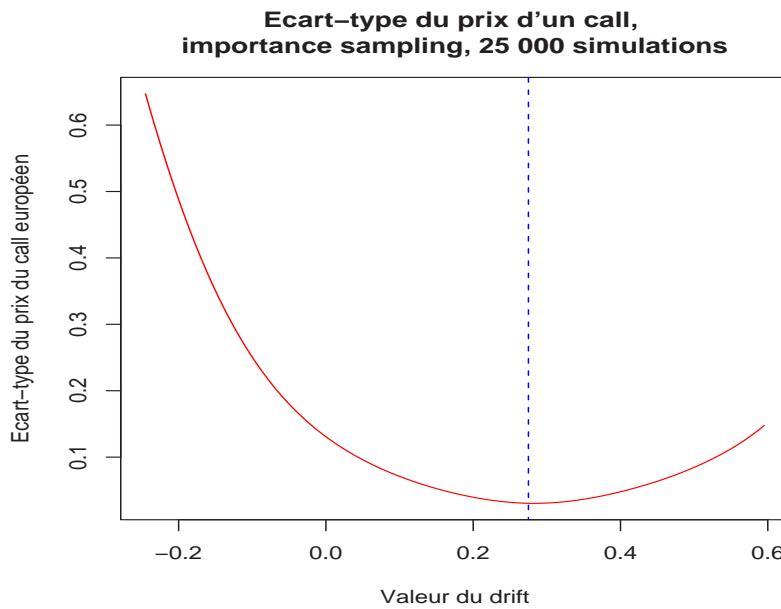


Figure 119: Ecart-type du prix du call en fonction du changement de la valeur de drift, importance sampling

Définition 96. Considérons une suite $\{u_1, u_2, \dots\}$ où pour tout i , $u_i \in [0, 1]^d$. On notera $\lambda_n(B)$ la proportion des n premiers points de la suite appartenant à B , pour tout $B \subset [0, 1]^d$, i.e.

$$\lambda_n(B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(u_i \in B).$$

On appelle alors discrépance la suite

$$D_n(u) = \sup_B \{|\lambda_n(B)| - \lambda(B)\},$$

où λ est la mesure de Lebesgue, et où le sup est pris sur l'ensemble des pavés de $[0, 1]^d$.

Cette notion théorique permet en fait de comparer une fonction de répartition empirique à celle définie par rapport à la mesure de Lebesgue.

Définition 97. La suite $\{u_1, u_2, \dots\}$ où pour tout i , $u_i \in [0, 1]^d$ est dite équirépartie sur $[0, 1]^d$ si pour toute fonction $h : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(u_i) \rightarrow \int_{[0,1]^d} h(u) du \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Exemple 98. Si $\{U_1, U_2, \dots\}$ est une suite de variables indépendantes de loi $Uni(0, 1)$, alors les suites $(U_n(\omega))$ sont presque sûrement équiréparties. De plus, la loi du logarithme itéré permet de montrer que

$$\Pr \left[\limsup \sqrt{\frac{2n}{\log(\log(n))}} D_n(U) = 1 \right] = 1.$$

L'inégalité de Koksma-Hlawka permet alors d'étudier des convergence de type (30),

Lemme 99. *Pour toute fonction h , alors*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(u_i) - \int_{[0,1]^d} h(u) du \right| \leq V(h) D_n(u),$$

où $V(h)$ est une constante ne dépendant que de la fonction h (correspondant à la notion de variation totale de h au sens de Hardy-Krause).

On a alors le corollaire suivant

Corollaire 100. *La suite $\{u_1, u_2, \dots\}$ est équirépartie sur $[0, 1]^d$ si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(u) = 0$.*

Pour des fonctions dont la discrépance est équivalente à $\log^\alpha n / n^{1/\alpha}$, on a alors une amélioration de la vitesse de convergence. On parle dans ce cas de suites à discrépance faible.

Exemple 101. *Parmi les exemples de suites à discrépance faible, on notera la suite $u_i = i/n$, pour laquelle*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h\left(\frac{i}{n}\right) \rightarrow \int_{[0,1]} h(u) du.$$

On retrouve ici la construction de l'intégrale par Riemann.

Exemple 102. *La suite de Van der Corput est définie en dimension 1 de la façon suivante : soit n un entier positif, et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ sa décomposition p -addique, où p est un entier strictement supérieur à 1, au sens où*

$$n = \alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_r p^r \text{ où } 0 \leq \alpha_i < p \text{ pour } i = 0, 1, \dots, r.$$

La suite de Van der Corput, en base p est alors définie par

$$u_n = \frac{\alpha_0}{p} + \dots + \frac{\alpha_r}{p^{r+1}}.$$

Halton a alors généralisé cette construction en dimension d . Le graphique de la Figure 120 représente la simulation de 1500 couples (U_i, V_i) , indépendants et uniformément distribués sur $[0, 1] \times [0, 1]$. La Figure ?? montre l'estimation de $\mathbb{E}[UV]$ où U et V sont indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 1]$.

Une autre méthode permet de simuler des échantillons en dimension d : l'échantillonage uniforme par variables antithétiques.

En dimension d , on peut simuler $n = 2 \times k^d$ points, $k \in \mathbb{N}$:

- on partitionne $[0, 1]^d$ en des cubes de taille $1/k$,
- dans chaque cube, on tire un point uniformément, puis on prend sa version antithétique.

Malgré le fait que ces algorithmes couvrent mieux l'espace, ils ne sont pas nécessairement tous optimaux pour résoudre des problèmes simples convexes.

On cherche ici à calculer $\int_{[0,1]^3} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} dx$ par différentes méthodes,

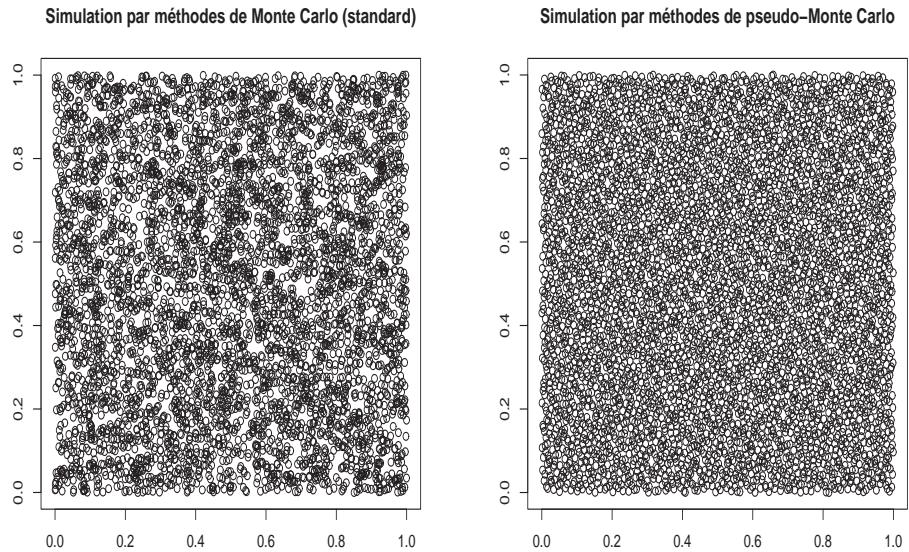


Figure 120: Suite de Halton et suite aléatoire sur $[0, 1] \times [0, 1]$ - 5000 points.

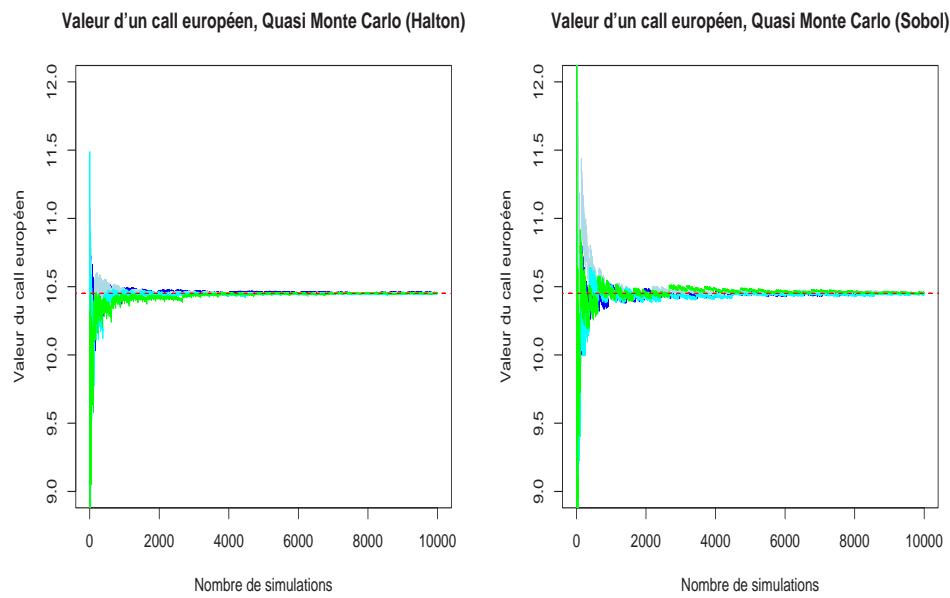


Figure 121: Valeur d'un call européen, méthode de Quasi Monte Carlo (Halton-Sobol).

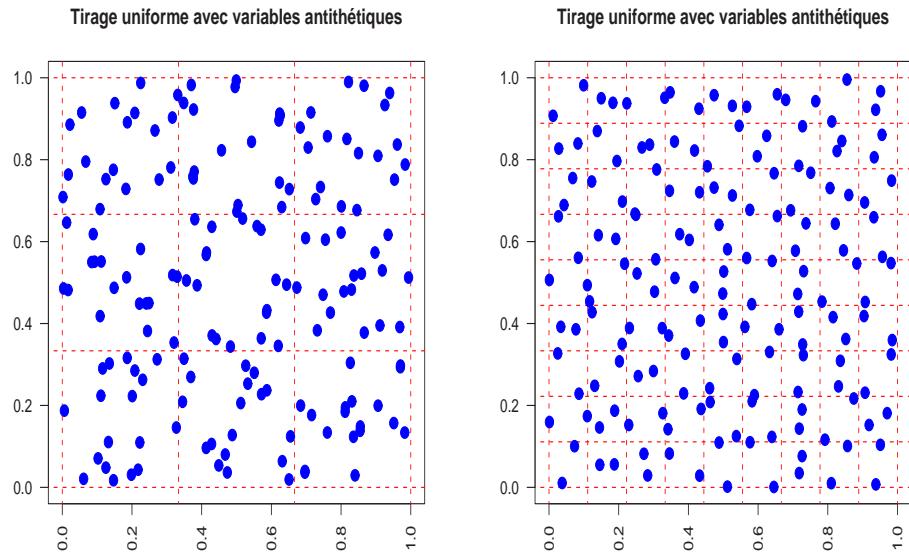


Figure 122: Méthode UWAN *uniform sampling with antithetic noise*.

- une méthode classique de Monte Carlo
- une suite de Halton en dimension 3
- une suite de Sobol en dimension 3
- une méthode échantillonage uniforme par variables antithétiques UWAN

Les suites de Halton sous-estiment toujours la vraie valeur, et on note que l'algorithme UWAN basé sur une partition du cube unité converge plus rapidement que les autres algorithmes.

12.8 Complément sur la simulation de trajectoires

Supposons que l'on connaisse W_s et W_u à deux dates $s < u$. On souhaite connaître la loi de W_t à une date t intermédiaire $s < t < u$.

On suppose que l'on peut écrire

$$W_t = \alpha W_s + \beta W_u + \gamma \varepsilon,$$

et où $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Compte tenu des propriétés du mouvement Brownien, rappelons que

$$\begin{cases} cov(W_s, W_t) &= \min\{s, t\} = s \\ cov(W_t, W_u) &= \min\{t, u\} = t \\ Var(W_t) &= t \end{cases}$$

de telle sorte que les coefficients vérifient

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha s + \beta u &= t \\ \alpha^2 s + 2\alpha\beta s + \beta^2 u + \gamma^2 &= t \end{cases}$$

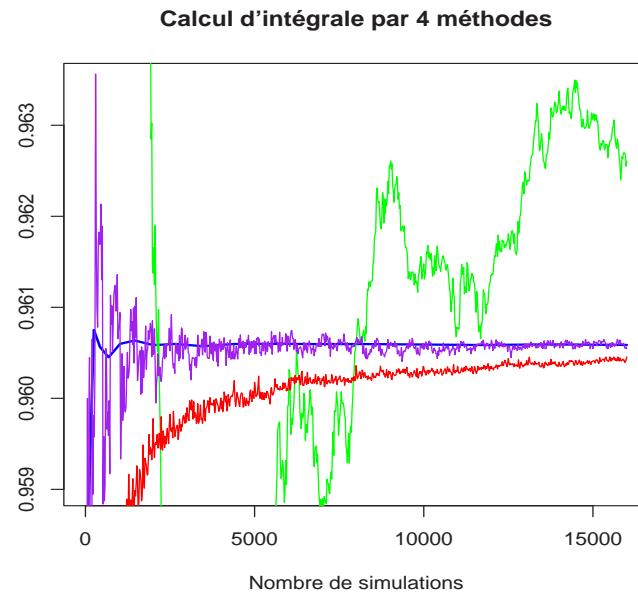


Figure 123: Comparaison de méthodes de Monte Carlo en dimension 3.

qui se résout sous la forme

$$\alpha = \frac{u-t}{u-s}, \beta = 1 - \alpha \text{ et } \gamma = \sqrt{\alpha(t-s)},$$

de telle sorte que

$$W_t = \frac{u-t}{u-s}W_s + \frac{t-s}{u-s}W_u + \sqrt{\frac{(u-t)(t-s)}{u-s}}Z.$$

Par exemple, considérant un mouvement Brownien entre 0 et T , on cherche à connaître W_{t_i} où $t_i = iT/4$, $i = 0, 1, \dots, 4$. On a alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} W_{t_0} & = & 0 \\ W_{t_4} & = & W_{t_0} + \sqrt{t_4}Z_4 = \sqrt{t_4}Z_4 \\ W_{t_2} & = & \frac{1}{2}(W_{t_0} + W_{t_4}) + \sqrt{(t_2 - t_0)}Z_2 = \frac{1}{2}W_{t_4} + \sqrt{\frac{t_2 - t_0}{2}}Z_2 \\ W_{t_1} & = & \frac{1}{2}W_{t_2} + \sqrt{\frac{t_1 - t_0}{2}}Z_1 \\ W_{t_3} & = & \frac{1}{2}(W_{t_2} + W_{t_4}) + \sqrt{\frac{t_3 - t_2}{2}}Z_1 \end{array} \right.$$

12.9 Options asiatiques

Le payoff s'écrit ici comme une fonction du prix du sous-jacent à maturité S_T et de la moyenne du prix du payoff jusqu'à maturité, c'est à dire proportionnel à $Y_T = \int_0^T S_t dt$.

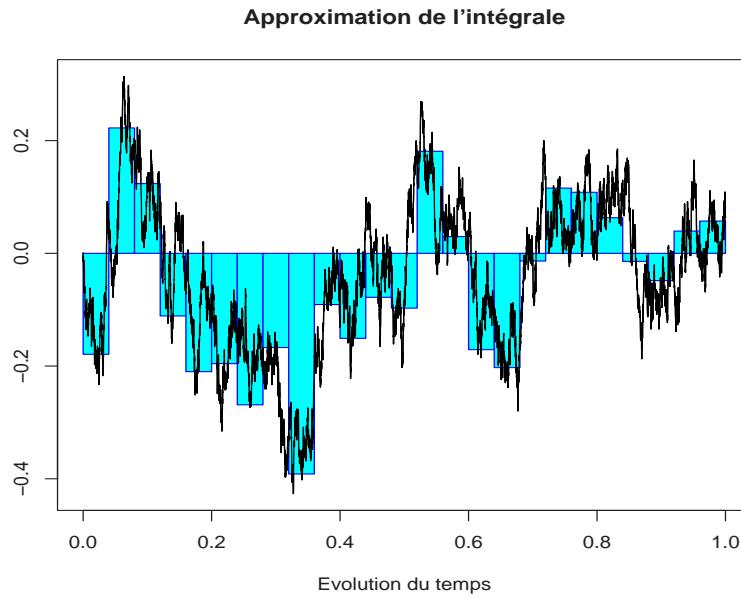


Figure 124: Options asiatiques, valeur moyenne du processus de prix sur $[0, T]$.

On suppose que l'actif suit une diffusion de BLACK & SCHOLES (1973),

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t,$$

où $(W_t)_{t \leq T}$ est un mouvement brownien standard.

- approximation de l'intégrale par une somme de Rieman, c'est à ditre des rectangles

$$\frac{1}{T} * \int_0^T S_u du \sim \frac{h}{T} * \sum S_{t_i}$$

- approximation de l'intégrale par une méthode de trapèzes,

$$\frac{1}{T} * \int_0^T S_u du \sim \frac{h}{T} * \sum S_{t_i} \left(1 + \frac{r * h}{2} + \sigma * \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{2} \right)$$

- une discréétisation de l'intégrale à un ordre supérieur,

$$\frac{1}{T} * \int_0^T S_u du \sim \frac{h}{T} * \sum S_{t_i} \left(1 + \frac{r * h}{2} + \sigma * \int_{t_i}^{t_{i+1}} (W_u - W_{t_i}) du \right)$$

Dans ce dernier cas, notons que cela nécessite de déterminer la loi conditionnelle de $\int_{t_i}^{t_{i+1}} (W_u - W_{t_i}) du$ sachant W_{t_i} et $W_{t_{i+1}}$: C'est une loi normale de moyenne

$$\mathcal{N} \left(h \cdot \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{2}, \frac{h^3}{3} \right).$$

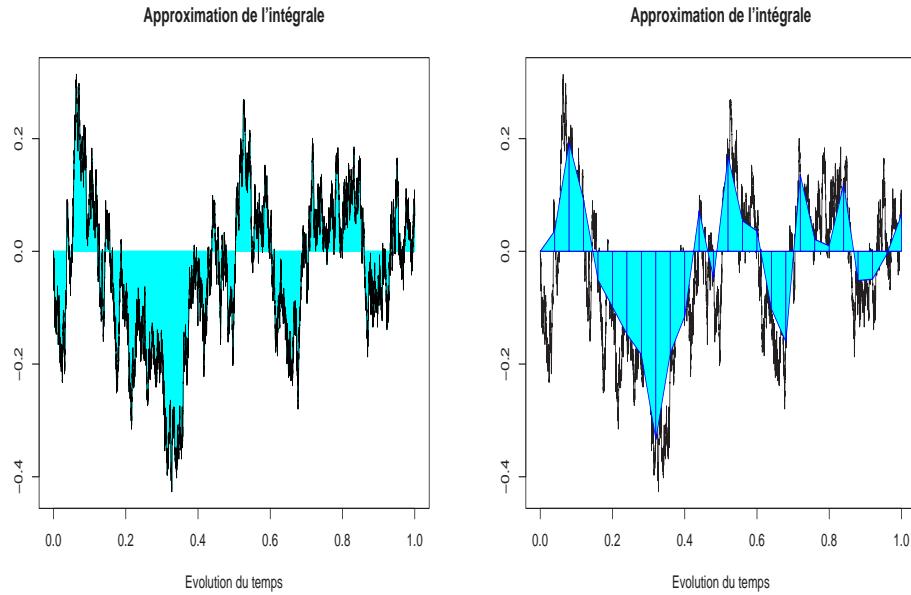


Figure 125: Options asiatiques, approximation de l'intégrale par des sommes de Riemann et des trapèzes.

Comme nous l'avions noté, il est possible d'utiliser des méthodes de réduction de variance pour accélérer la convergence. En particulier si le taux court r et la volatilité σ^2 ne sont pas trop élevés le prix varie peu sur la période considérée et donc

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_u du \sim \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du \right).$$

On peut alors prendre comme variable de contrôle

$$e^{-r*T} \left(\exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du \right) - K \right)_+,$$

variable qui est intéressante car $\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du$ est gaussienne (son espérance est calculable analytiquement par la formule de BLACK & SCHOLES (1973)).

Une autre approche consiste à changer la manière de discréteriser le processus. En prenant un pas de temps $\Delta t = T/m$ constant, et en notant $t_k = k\Delta t$, on approche l'intégrale par des sommes de Riemann,

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du \sim \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=0}^{m-1} S_{t_k}.$$

Aussi, en faisant n simulations, le prix d'un call asiatique s'écrit

$$\frac{\exp(-rT)}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta t}{T} \sum_{k=0}^{m-1} S_{t_k} - K \right)_+.$$

L'erreur commise est alors en $O(1/\sqrt{n})$.

En utilisant une méthode des trapèzes,

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du \sim \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=0}^{m-1} S_{t_k} \left(1 + \frac{rh}{2} + \sigma \frac{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}{2} \right).$$

Dans le chapitre précédent, nous avions vu les options asiatiques sont un cas particulier des options vue comme un [traded account](#) (SHREVE & VECER (2000)). Nous avions noté que $V(t, S_t, X_t) = S_t u(t, Z_t)$, où u vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (r - \mu)(q_t - z) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}(q_t - z)^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

avec la condition de bord $u(T, z) = z_+$, (q_t) étant une stragtégiie, i.e. $q_t = 1 - t/T$ pour les options asiatiques à strike fixe.

En appliquant ce résultat (certes, bien au delà du programme que l'on s'était fixé), on peut montrer que dans le cas du call asiatique, l'équation au dérivée partielle est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + r(q_t - z) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}(q_t - z)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

avec la condition de bord $u(T, z) = z_+$. La fonction q_t dépend alors de ma forme du payoff (strike flottant ou pas).

Un schéma de discréétisation classique peut alors être utilisé (par exemple un θ -schéma). En posant $q_j = q(t_j) = 1 - [nj/T]/n$, et h le pas de discréétisation en espace (en z) on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \theta (\sigma^2 (q_j - z_i)^2 - hr(q_j - z_i)) u_{i-1,j} - 2(\theta \sigma^2 (q_j - z_i)^2 + \lambda) u_{i,j} \\ & + \theta (\sigma^2 (q_j - z_i)^2 + hr(q_j - z_i)) u_{i+1,j} \\ & = -(1 - \theta) (\sigma^2 (q_j - z_i)^2 - hr(q_j - z_i)) u_{i-1,j+1} + 2((1 - \theta) \sigma^2 (q_j - z_i)^2 + \lambda) u_{i,j+1} \\ & - (1 - \theta) (\sigma^2 (q_j - z_i)^2 + hr(q_j - z_i)) u_{i+1,j+1}, \end{aligned}$$

où $\theta \in [0, 1]$ ($\theta = 0$ pour un schéma explicite, $\theta = 1/2$ pour le schéma de Crank Nicolson et $\theta = 1$ pour le schéma implicite, par exemple), et où $\lambda = h^2/\Delta t$. Les conditions de bord sont ici $u_{i,n} = (z_i)_+$ (condition en temps), et $u_{0,j} = 0$ et $u_{m,j} = 2u_{m-1,j} - u_{m-2,j}$ (condition en espace, la dernière condition étant une simple interpolation linéaire).

12.10 Options sur maximum

Le payoff s'écrit ici comme une fonction du prix du sous-jacent à maturité S_T et du maximum du prix du payoff jusqu'à maturité, c'est à dire proportionnel à $M_T = \max\{S_t, t \in [0, T]\}$.

- une approche naturelle est de considérer le [maximum sur une trajectoire discréétisée](#),

$$\hat{M}_T = \max\{S_{t_k}, k = 1, \dots, n\}.$$

Mais ce maximum sous-estimera toujours la vraie valeur, $\hat{M}_T \leq M_T$. En fait, l'erreur commise se sera - sous des conditions de régularité suffisantes, $O(1/\sqrt{n})$.

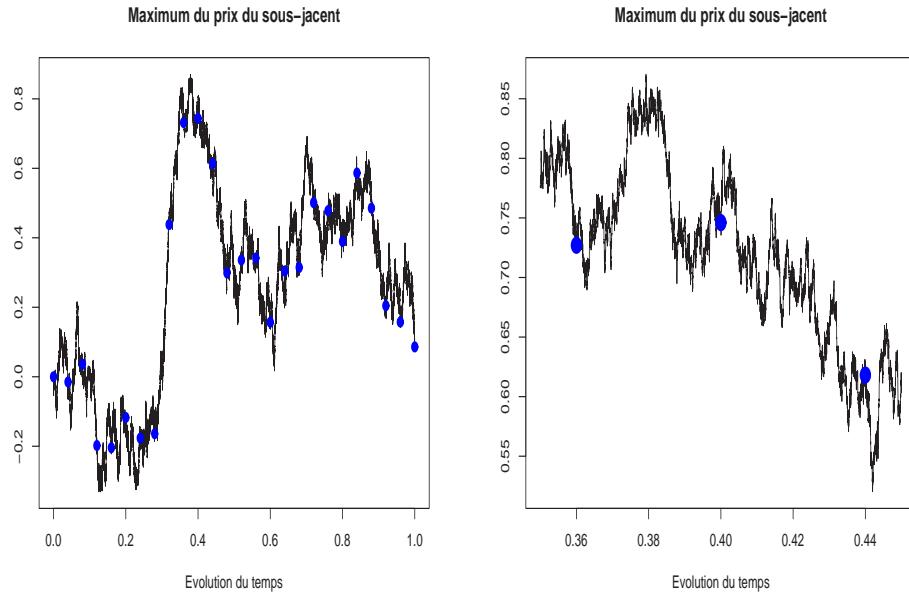


Figure 126: Maximum du prix du sous-jacent et version discrétisée.

- utilisation de **ponts brownien** pour améliorer la précision. En particulier, on peut noter que

$$\mathbb{P}(\max\{X_t, t \in [t_k, t_{k+1}] \leq z | X_{t_k} = x_k, X_{t_{k+1}} = x_{k+1}\}) = 1 - \exp\left(-\frac{2}{h} \frac{(z - x_k)(z - x_{k+1})}{\sigma^2 x_k}\right),$$

qui est très facilement simulable en inversant cette fonction de répartition.

L'algorithme associé s'écrit alors simple

- $Z_k \leftarrow \mathcal{N}(0, 1)$
- $S_{k+1} \leftarrow S_k \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma \cdot \sqrt{h} \cdot Z_k\right)$
- $M_k \leftarrow \frac{1}{2} \left(S_k + S_{k+1} + \sqrt{(S_{k+1} - S_k)^2 - 2\sigma^2 S_k h \log \text{Random}} \right).$

12.11 Les options à barrière(s)

Les options à barrières sont caractérisées le fait un payoff du type $g(S_T)\mathbb{I}(S_t \in \mathcal{B}, t \in [0, T])$, c'est à dire que le prix du sous-jacent de doit pas avoir quitté un ensemble \mathcal{B} avant la maturité (typiquement $S_t \leq B$ pour tout $t \in [0, T]$).

Ces options sont caractérisées par l'étude du temps d'arrêt de sortie de l'ensemble $\tau = \inf\{t \geq 0, S_t \notin \mathcal{B}\}$.

- une approche naturelle est de considérer le **maximum sur une trajectoire discrétisée**,

$$\hat{\tau} = \inf\{t_k \geq 0, S_{t_k} \notin \mathcal{B}, k = 1, \dots, n\}.$$

Mais ce temps d'arrêt sur-estimera toujours la vraie valeur, $\hat{\tau} \geq \tau$. En fait, l'erreur commise se sera - sous des conditions de régularité suffisantes, $O(1/\sqrt{n})$.

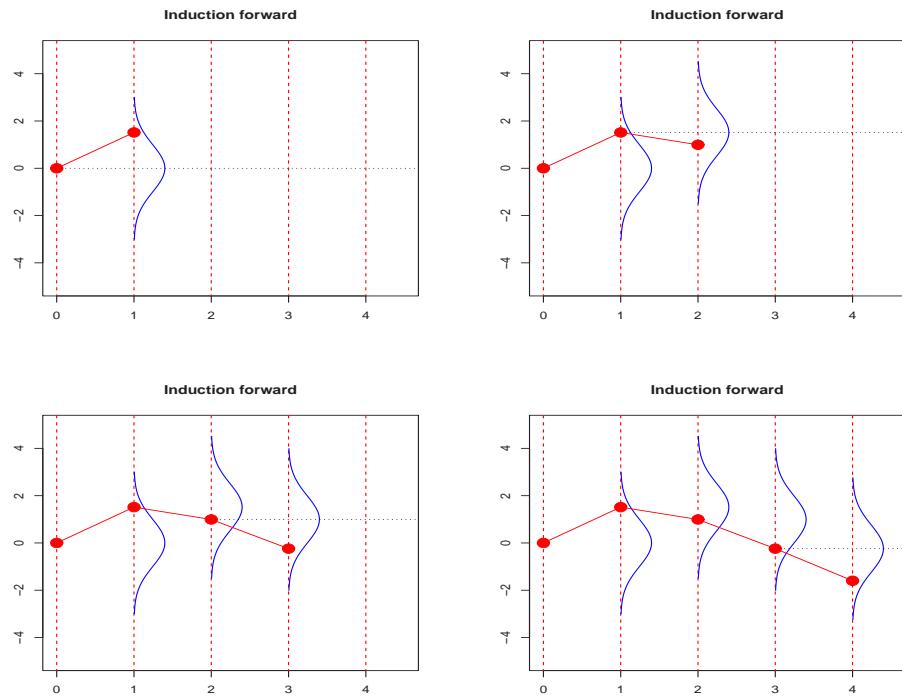


Figure 127: Induction forward (algorithme d'Euler).

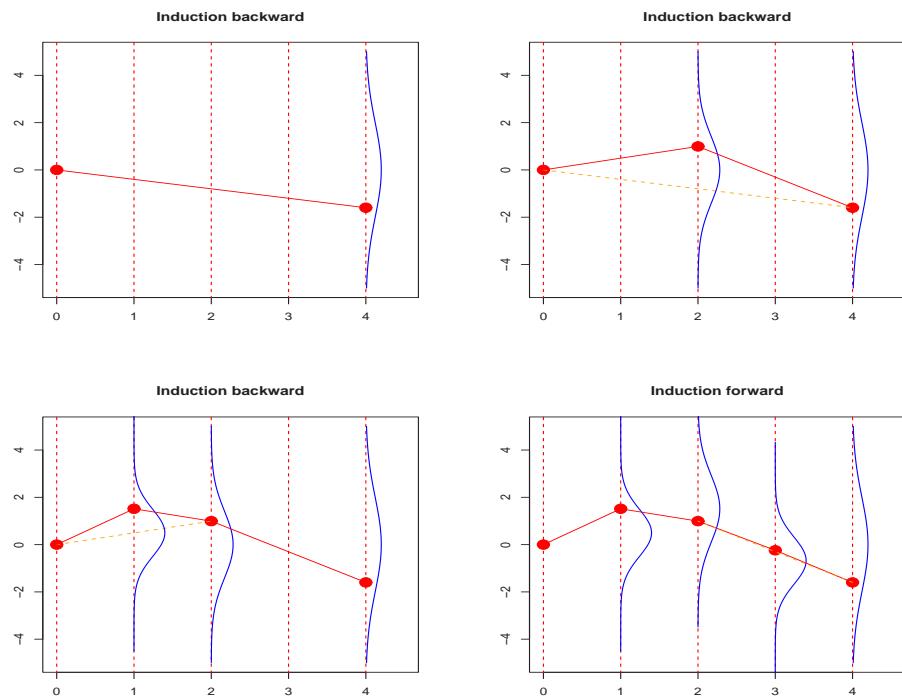


Figure 128: Induction backward (simulation de ponts Browniens).

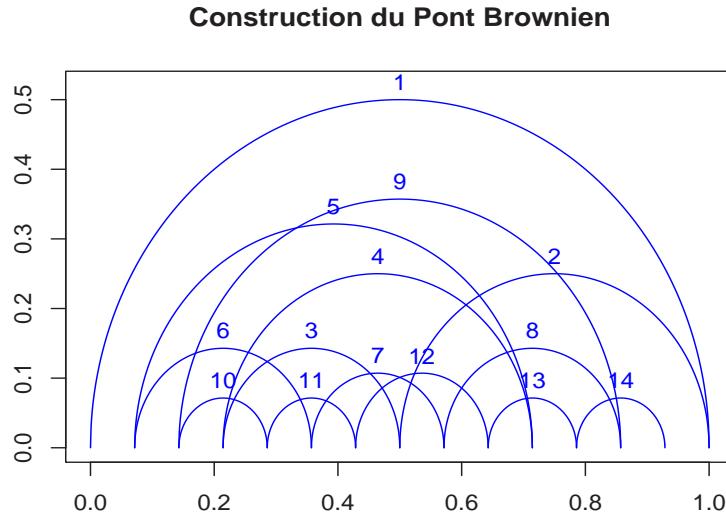


Figure 129: Construction du pont Brownien.

Pour améliorer la précision, on peut utiliser des propriétés de réflexion du mouvement brownien.

12.12 Calcul de grecques par Monte Carlo

La première approche peut être d'approcher une dérivée par une différence finie.

On calcule ainsi le prix de l'option à partir de la valeur initiale S_0 , puis on calcule l'option à partir de $S_0 + h$, et on approxime

$$\frac{\partial C(S_0)}{\partial S_0} \sim \frac{\hat{C}(S_0 + h) - \hat{C}(S_0)}{h}$$

Une seconde idée est d'utiliser la méthode proposée par BROADIE & GLASSERMAN (1996). Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ le prix de l'actif sous-jacent, et de manière générale, notons f la fonction de payoff de l'option. Rappelons que le Delta est la sensibilité au prix du sous-jacent, ce qui revient à calculer

$$\Delta = e^{-rT} \frac{\partial}{\partial S_0} \mathbb{E}(f(S_T)).$$

Si on suppose que f est Lipschitzienne et différentiable, on peut dériver sous le signe somme, i.e.

$$\Delta = e^{-rT} \frac{\partial}{\partial S_0} \mathbb{E}(f(S_T)) = e^{-rT} \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial S_0} f(S_T)\right) = e^{-rT} \mathbb{E}\left(f'\left(\frac{\partial S_T}{\partial S_0}\right)\right). \quad (31)$$

De même si f est deux fois différentiable, on peut calculer le Gamma, qui est la sensibilité du Delta,

$$\Gamma = e^{-rT} \frac{\partial^2}{\partial S_0^2} \mathbb{E}(f(S_T)) = e^{-rT} \mathbb{E}\left(f''\left(\left(\frac{\partial S_T}{\partial S_0}\right)^2 + f'\left(\frac{\partial^2 S_T}{\partial S_0^2}\right)\right)\right). \quad (32)$$

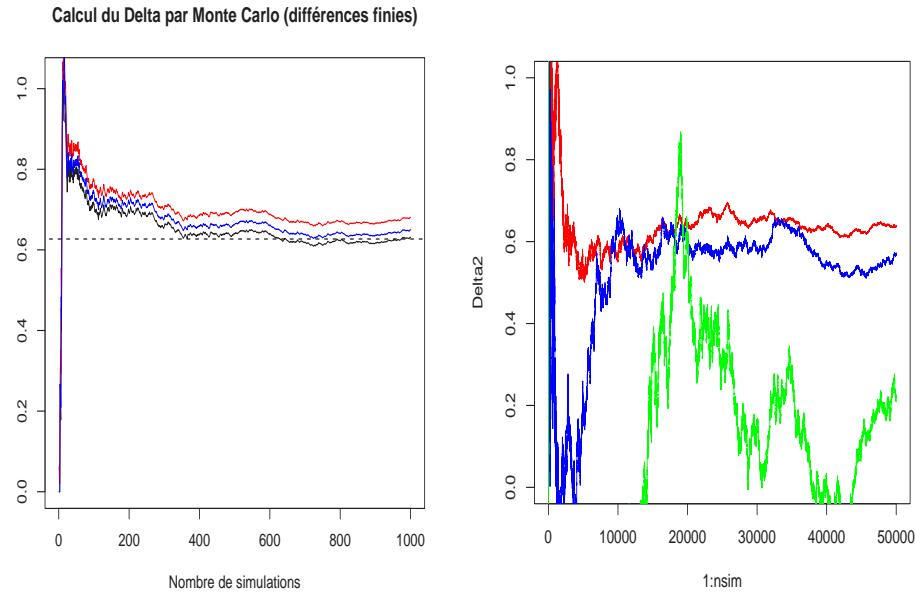


Figure 130: Calcul des grecques par monte carlo, par différences finies, avec à droite deux valorisations de l'options à l'aide de scénarios différents.

Pour ces deux calculs, une idée naturelle est alors de discréteriser les processus $S'_t = \partial S_t / \partial S_0$ et $S''_t = \partial^2 S_t / \partial S_0^2$. Sous des conditions sur le drift et la volatilité (de continuité et de dérivabilité), alors en utilisant une discréétisation d'Euler,

$$\hat{S}'_{n+1} = \hat{S}'_n + \frac{\partial \mu(\hat{S}'_n)}{\partial S} \hat{S}'_{n+1} \Delta t + \frac{\partial \sigma(\hat{S}'_n)}{\partial S} \hat{S}'_n \Delta W_n.$$

Toutefois, cette méthode bien que naturelle a de vraies limites, en particulier si l'on sort des hypothèses mentionnées.

12.13 Calcul des grecques dans le cas d'un call digital

Considérons un Brownien géométrique comme dans le modèle de BLACK & SCHOLES (1973), $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$, pour le prix du sous-jacent, et supposons que l'on cherche à valoriser une option digitale, de payoff $f(S_T) = 1$ si $S_T > K$, 0 sinon. Il est clair que Δ et $Gamma$ sont non nuls, pourtant, les espérances dans les équations 31 et 32 seront nulles. Le problème vient ici de la discontinuité du payoff. Une idée peut alors être de régulariser le payoff. Par exemple, on peut s'intéresser à des payoff de la forme

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{x - K}{\eta} \right) \right)$$

Si on note ψ la loi de S_T à la date terminale, on peut alors chercher l'erreur qui est faite dans le prix d'une option identique pour un payoff lissé,

$$C_\eta - C = \int_0^\infty \psi(s)[f_\eta(s) - f(s)]ds.$$

En faisant un développement de Taylor de f au voisinage du strike K , on peut alors obtenir que

$$C_\eta - C = a_2\eta^2 + a_4\eta^4 + \dots$$

où il est possible d'obtenir la forme des coefficients (a_k) .

Afin d'estimer le Δ , il suffit de différencier $\tanh(\cdot)$, et donc

$$\Delta_\eta = e^{-rT} \mathbb{E} \left(\frac{\partial f(S_T)}{\partial S_0} \right) = e^{-rT} \int_0^\infty \frac{1}{2\eta} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{s - K}{\eta} \right) \right] \frac{s}{S_0} \psi(s) ds,$$

soit encore

$$\Delta_\eta = e^{-rT} \mathbb{E} \left(\frac{1}{2\eta} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{S_T - K}{\eta} \right) \right] \frac{S_T}{S_0} \right).$$

Aussi, il suffit de simuler la valeur terminale du processus, S_1, \dots, S_n et de poser

$$\hat{\Delta}_\eta = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\eta} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{S_i - K}{\eta} \right) \right] \frac{S_i}{S_0} \right).$$

De manière analogue, en dérivant deux fois,

$$\Gamma_\eta = e^{-rT} \int_0^\infty -\tanh \left(\frac{s - K}{\eta} \right) \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{s - K}{\eta} \right) \right] \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{s}{S_0} \right] \psi(s) ds.$$

La aussi, l'intégrale correspondant à une espérance (d'un fonction de S_T), il suffit de simuler la valeur à maturité du sous-jacent, puis d'approcher l'espérance par un moyenne.

On obtient ainsi l'algorithme de Monte Carlo présenté ci-après, et d'obtenir ainsi la Figure 132. Notons que la vraie valeur du Δ est 0.01892 et que celle du Γ est -0.00031.

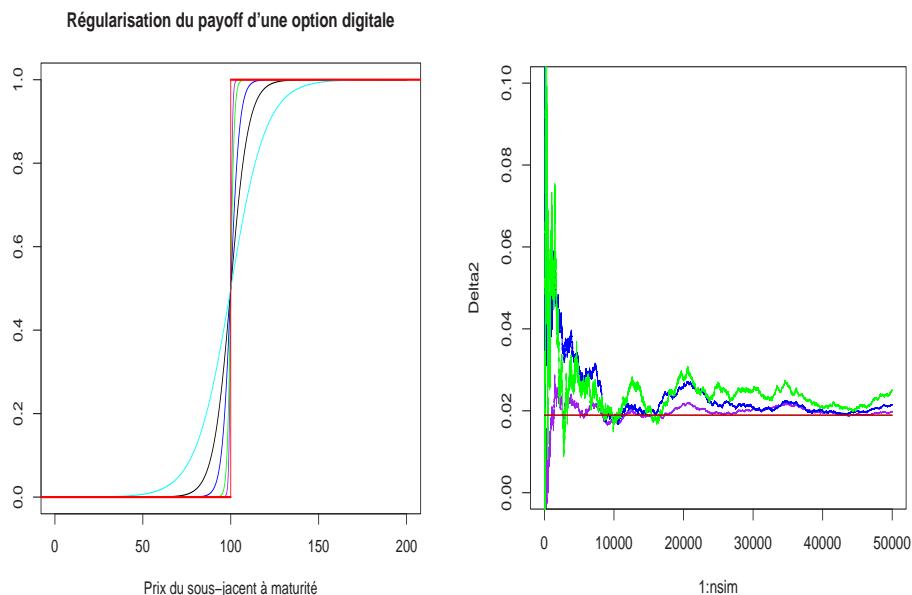


Figure 131: Calcul des grecques pour une option digitale, avec la fonction de payoff lissée à gauche, et la convergence de la méthode de monte carlo.

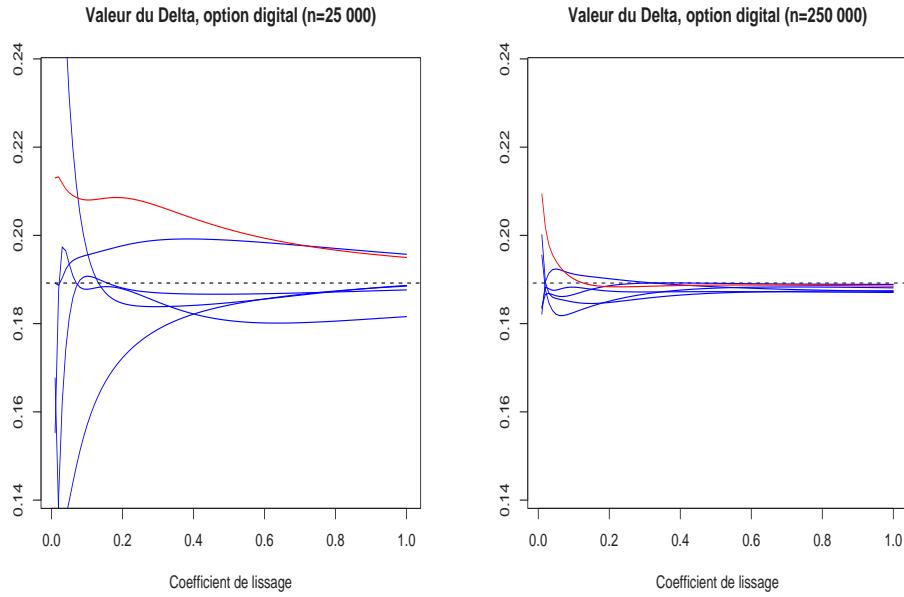


Figure 132: Calcul des grecques pour une option digitale, à l'aide de 25 000 simulations à gauche, et de 250 000 simulations à droite.

12.14 Le problème de la dimension

On considère ici m actifs (*a priori* corrélés).

La simulation d'un vecteur Gaussien de \mathbb{R}^m nécessite la recherche d'une matrice triangulaire inférieure M telle que $MM' = \Sigma$ (algorithme de Cholesky).

L'[analyse en composantes principales](#) propose de réduire le problème, de la dimension m à une dimension k beaucoup plus faible. Rappelons que M peut s'écrire $M = Q\sqrt{D}$ où Q est la matrice des valeurs propres unitaires de Σ , et D la matrice diagonale des valeurs propres.

L'idée est ici de ne garder que les k plus grandes valeurs propres, afin de réduire la dimension.

$$\begin{pmatrix} 1.65 & 0.29 & 0.00 & 0.56 \\ 0.29 & 0.75 & -0.04 & 0.56 \\ 0.00 & -0.04 & 0.16 & 0.00 \\ 0.56 & 0.56 & 0.00 & 0.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.81 & 0.55 & 0.069 & 0.15 \\ 0.36 & -0.71 & 0.15 & 0.57 \\ -0.01 & 0.04 & -0.95 & 0.31 \\ 0.45 & -0.42 & -0.26 & -0.7408629 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2.09 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.85 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.17 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.81 & 0.55 & 0.069 & 0.15 \\ 0.36 & -0.71 & 0.15 & 0.57 \\ -0.01 & 0.04 & -0.95 & 0.31 \\ 0.45 & -0.42 & -0.26 & -0.7408629 \end{pmatrix}$$

On peut alors construire la matrice induite en supprimant les plus petites valeurs propres

$(k = 2)$,

$$\begin{pmatrix} 1.64 & 0.28 & 0.01 & 0.57 \\ 0.28 & 0.72 & -0.031 & 0.60 \\ 0.01 & -0.03 & 0.00 & -0.02 \\ 0.57 & 0.60 & -0.02 & 0.58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.81 & 0.55 & 0.069 & 0.15 \\ 0.36 & -0.71 & 0.15 & 0.57 \\ -0.01 & 0.04 & -0.95 & 0.31 \\ 0.45 & -0.42 & -0.26 & -0.7408629 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2.09 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.85 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & \textcolor{red}{0.00} & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \textcolor{red}{0.00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.81 & 0.55 & 0.069 & 0.15 \\ 0.36 & -0.71 & 0.15 & 0.57 \\ -0.01 & 0.04 & -0.95 & 0.31 \\ 0.45 & -0.42 & -0.26 & -0.7408629 \end{pmatrix}$$

Pour les problèmes de très grande dimension $m = 250$, ACWORTH, BROADIE & GLASSERMAN (1998) montre que cette méthode permet d'aller beaucoup plus rapidement.

12.15 Décomposition de trajectoires continues

Plus généralement, pour simuler des processus continus, la représentation de [Karhunen-Loève](#) permet d'accélérer la simulation de tels processus (ADLER (1990)). Les processus ainsi simulés seront même infiniment dérivable (alors que la plupart des processus que l'on cherche à simuler ne sont dérivables nulle part, presque sûrement).

Pour le mouvement brownien sur $[0, 1]$ par exemple, il suffit de noter que

$$W_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \psi_n(t) Z_n,$$

où Z_0, Z_1, \dots sont des variables $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes, et où

$$\lambda_n = \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} \right)^2 \text{ et } \psi_n(t) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{(2n+1)\pi t}{n} \right).$$

Les valeurs propres (λ_n) sont décroissantes, et une bonne approximation est obtenue avec seulement les m plus petites ($m \sim 30$ suffisant généralement).

Le pont brwonien peut aussi être décomposé par l'expension de [Lévy-Ciesielski](#) (KARLIN & TAYLOR (1975)), en utilisant la base de Haar. Rappelons que $H_1(t) = 1$ sur $[0, 1]$, $H_2(t) = 1$ sur $[0, 1/2[$ et -1 sur $[1/2, 1]$, et plus généralement,

$$H_{2^n+1}(t) = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{sur } [0, 2^{-(n+1)}[\\ -2^{n/2} & \text{sur } [2^{-(n+1)}, 2^{-n}[\\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et ensuite

$$H_{2^n+j}(t) = H_{2^n+1} \left(t - \frac{j-1}{2^n} \right) \text{ pour } j = 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

On construit alors les fontions de Schauder, $F_n(t) = \int_0^t H_n(x) dx$, et on note que le Pont Brownien sur $[0, 1]$ peut être représenté sous la forme

$$\Pi_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) Z_n,$$

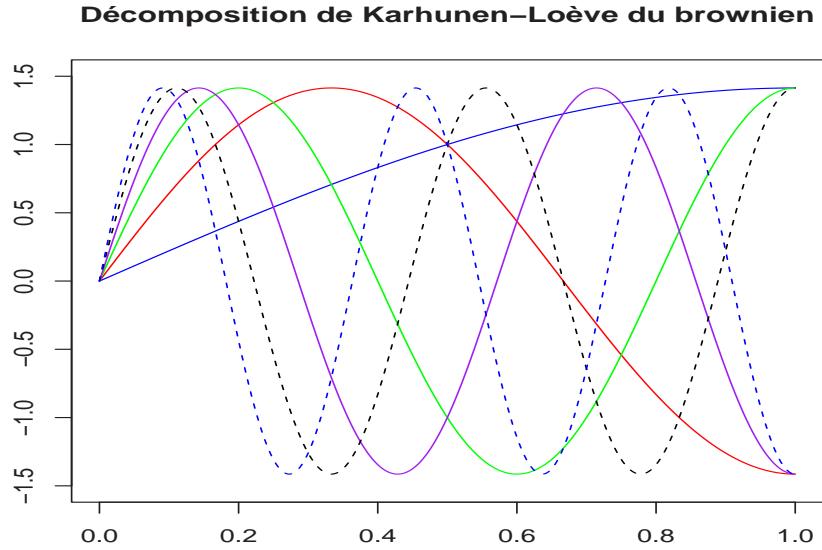


Figure 133: Base $\psi_n(\cdot)$ de décomposition du Brownien (Karhunen-Loève).

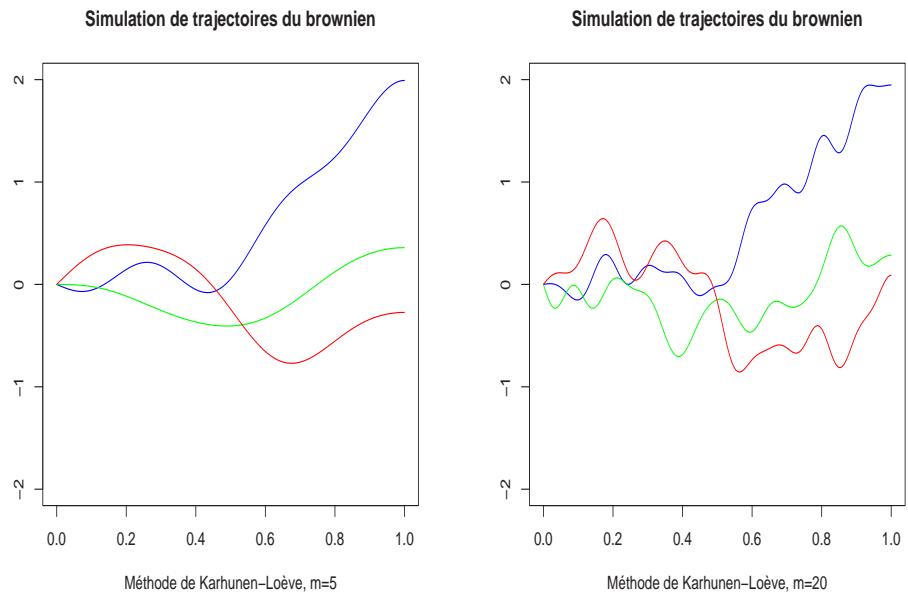


Figure 134: Simulation de trajectoires du Brownien, décomposition de Karhunen-Loève ($n = 5$ et $n = 20$).

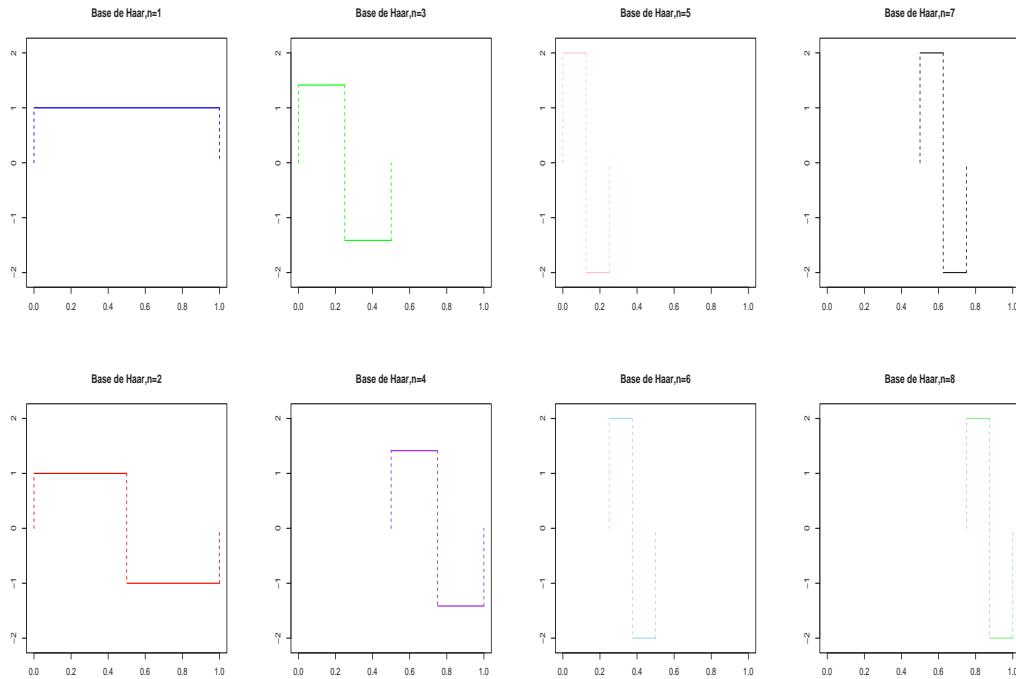


Figure 135: Base $H_n(\cdot)$ de décomposition du Pont Brownien (base de Haar).

où Z_0, Z_1, \dots sont des variables $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes.

Cet algorithme peut s'écrire de manière plus simple en posant

$$F_{1,1}(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, 1/2[\\ 1-t & \text{sur }]1/2, 1[\\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

puis $F_{k,j}(t) = 2^{-(k-1)/2} \times F_{1,1}(2^{k-1}t - j + 1)$ pour $k \geq 1$ et $1 \leq j \leq 2^{k-1}$.

On note que le Pont Brownien sur $[0, 1]$ peut être représenté sous la forme

$$\Pi_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^k-1} F_{k,j}(t) Z_{k,j},$$

où $Z_{1,1}, \dots, Z_{i,j}, \dots$ sont des variables $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes.

13 Quelques mots sur d'autres méthodes

13.1 La *Fast Fourier Transform*

14 Options américaines

Dans le cas d'une option américaine, le détenteur de l'option peut l'exercer non plus uniquement à la date T , mais à toute date entre 0 et T . Intervient alors une **stratégie d'exercice**, caractérisée par un temps d'arrêt τ “optimal” d'exercice de l'option.

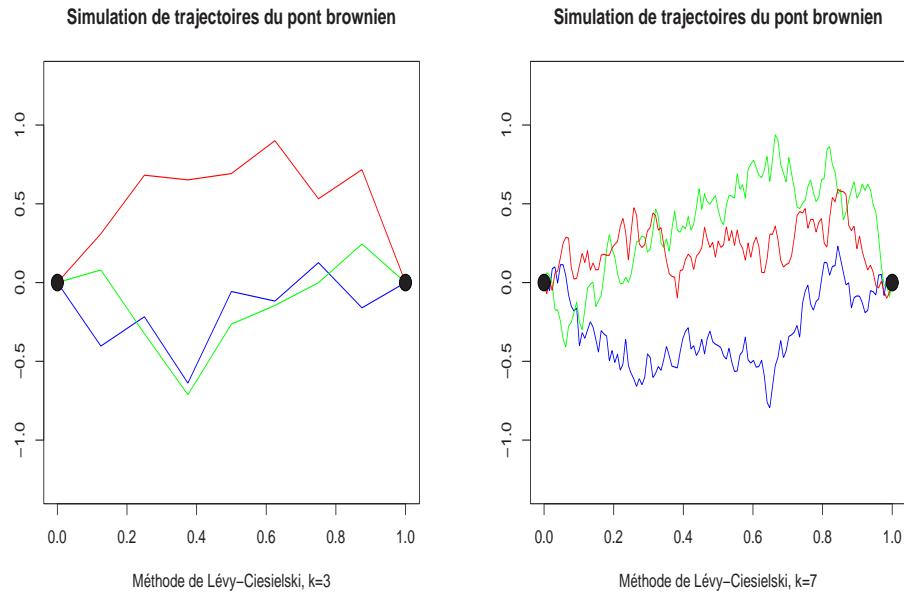


Figure 136: Simulation de trajectoires du pont Brownien, décomposition de Lévy-Ciesielski ($k = 3$ et $k = 7$).

Un premier résultat est qu'il n'est jamais optimal d'exercer un call américain avant l'échéance, ou plus précisément

Proposition 103. *Le prix d'un call américain coincide avec le prix d'un call européen.*

Proof. MERTON (1973). □

Dans toute la suite, l'option de base sera donc le put américain, de payoff à la date t $(K - S_t)_+$.

14.1 Introduction pour des options bermudiennes

Dans un premier temps, on peut s'intéresser au cas des options bermudiennes qui peuvent être exercicée à des dates finies, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$. Ces options “convergent” vers des options américaines si $n \rightarrow \infty$.

14.2 L'enveloppe de Snell du payoff

L'idée de la valorisation est simple: à chaque date t_k , le détenteur de l'option a en effet de choix,

- exercer son option (et en retirer un payoff Z_k)
- conserver son option, de telle sorte que son option vaut en t_{k+1} V_{k+1} .

Si on note $B_{k,k+1}$ le facteur d'actualisation entre les dates t_k et t_{k+1} , on en déduit que la valeur en t_k de l'option peut s'écrire

$$V_k = \max\{Z_k, B_{k,k+1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_{k+1} | \mathcal{F}_k)\},$$

où

- $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ est la filtration naturelle,
- \mathbb{Q} est une probabilité risque neutre, sous laquelle la valeur actualisée de l'actif est une martingale, i.e. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_{t+h} | \mathcal{F}_t) = S_t$.

On notera que sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , la valeur actualisée d'un portefeuille de couverture autofinancé est également une martingale.

Aussi, on peut construire la suite (V_k) de manière récurrente, qui peut s'écrire, en notant (V_k^*) la suite des valeurs actualisées dans le cas d'un put bermudien,

$$\begin{cases} V_n^* = Z_n^* = (K - S_T)_+ \\ V_{k-1}^* = \max \{Z_{k-1}^*, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_k^* | \mathcal{F}_{k-1})\} \end{cases}$$

La suite (V_k^*) (correspondant aux valeurs actualisées de l'option aux dates $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$) est alors l'[enveloppe de Snell](#) sous \mathbb{Q} de la suite (Z_k^*) , c'est à dire la plus petite surmartingale majorant (Z_k^*) .

Remarque 104. Si $(S_k)_{k=0, \dots, n}$ (ou $S_k = S_{t_k}$) est une chaîne de Markov, de matrice de transition M , notons que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_k^* | \mathcal{F}_{k-1})$ peut s'écrire

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_k^* | \mathcal{F}_{k-1}) = (M \times V_k^*)(S_{k-1}).$$

14.3 La notion de temps d'arrêt optimal

L'option est exercée à un instant $\tau = t_k$, entre l'origine et la maturité. Notons que, mathématiquement parlant, τ est un [temps d'arrêt](#) puisque la décision d'exercer ou non l'option en $t = t_k$ se fera en fonction de la seule connaissance du cours de l'actif entre 0 et t (i.e. de la filtration \mathcal{F}_t à la date t).

D'après les résultats sur l'enveloppe de Snell, rappelons que pour tout $k = 0, \dots, n-1$, $V_k^* \geq Z_k^*$ et, à maturité, $V_n^* = Z_n^*$. On note τ le temps d'arrêt correspondant au premier instant où $V_\tau^* = Z_\tau^*$. On en déduit que pour tout $t_k < \tau$, $V_\tau^* > Z_\tau^*$, et donc la propriété de martingale

$$V_{k-1}^* = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_\tau^* | \mathcal{F}_{k-1})$$

est vérifiée. Aussi, le prix de l'option, en $t = 0$, est donné par

$$V_0^* = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_\tau^* | \mathcal{F}_0).$$

Soit $\mathcal{T}_{i,j}$ l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $\{t_i, \dots, t_j\}$. Rappelons qu'un temps d'arrêt τ^* est [optimal](#) s'il est tel que

$$U_0^* = U_{\tau^*}^* = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,n}} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z_\tau^* | \mathcal{F}_0)\}.$$

Remarque 105. De manière générale, si on souhaite connaître le prix de l'option à un instant t_k , on considère alors

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{k,n}} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z_\tau^* | \mathcal{F}_n)\}.$$

14.4 Valorisation d'options bermudviennes et arbres binomiaux

On se place dans le cas de l'arbre binomial, où à chaque date, $S_{n+1})S_n \cdot u$ en cas de hausse, et $S_{n+1})S_n \cdot d$ en cas de baisse, avec les probabilités (historiques) p et $1 - p$.

En utilisant les résultats d'une remarque précédante, notons que la suite des prix (S_k) est une chaîne de Markov homogène, dont la matrice de transition est

$$M = [M_{x,y}] \text{ où } \begin{cases} p & \text{si } y = xu \\ 1-p & \text{si } y = xd \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas d'un put, le payoff actualisé Z_k^* , à la date t_k , s'écrit alors $e^{-rt_k}(K - S_k)_+$. De manière générale, notons $Z_k^* = h(k, S_k)$, et son enveloppe de Snell V_k^* est alors une fonction $u(k, S_k)$ qui vérifie $u(n, S_n) = h(n, S_n)$ à maturité, et, de manière récursive

$$u(k, s) = \max\{h(k, s), [p \cdot u(k+1, su) + (1-p) \cdot u(k+1, sd)]\}.$$

Sous cette forme, on obtient un algorithme numérique qui nous permettra de valoriser une option américaine.

14.5 Valeur d'un call américain

Proposition 106. Soit $\mathcal{T}_{[t,T]}$ l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[t, T]$. Soit $g : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-r[\tau-t]} x \exp \left[r - \frac{\sigma^2}{2} (\tau-t) + \sigma(W_\tau - W_t) \right] - K_+ \right). \quad (33)$$

Il existe une stratégie telle que pour tout $t \in [0, T]$, $V_t(\alpha) = g(t, S_t)$. De plus, pour toutes les autres stratégies, $V_t(\alpha') \geq g(t, S_t)$.

Proof. La preuve est relativement délicate (Karatzas & Shreve (1989)). \square

$g(t, S_t)$ est la valeur de l'option américaine puisque c'est la valeur minimale d'une stratégie couvrant l'option.

Remarque 107. La valeur d'une option américaine est toujours supérieure à la valeur d'une option européenne de même caractéristiques.

Proposition 108. Sous des conditions de régularité (le prix du sous-jacent doit être positif, avec $\mathbb{E}([\max\{X_t, t \in [0, T]\}]^q) < \infty$ pour un $q > 2$), il existe un temps d'arrêt optimal.

Proof. Là aussi, la preuve est relativement délicate (Karatzas & Shreve (1989)). \square

Rappelons que de manière schématique, le prix d'une option américaine à la date t s'écrit

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(g(\tau, S_\tau) | \mathcal{F}_t) = h(t, S_t).$$

On en déduit en particulier que $h \geq g$. En utilisant un raisonnement analogue à celui fait sur les options bermudviennes, la stratégie optimale d'exercice est donnée par

$$\tau^a st = \min\{t \in [0, T], h(t, S_t) = g(t, S_t)\}.$$

Aussi, on peut définir la [région d'exercice](#), noté \mathcal{E} comme

$$\mathcal{E} = \{(s, t) \in \mathbb{R} \times [0, T], h(t, S_t) = g(t, S_t)\},$$

ou son complémentaire

$$\mathcal{C} = \{(s, t) \in \mathbb{R} \times [0, T], h(t, S_t) > g(t, S_t)\}.$$

Notons que $\tau^* = \min\{t \in [0, T], (S_t, t) \in \mathcal{E}\}$. Il suffit alors de représenter cette région, et d'exercer l'option dès que le sous-jacent appartient à la région d'exercice \mathcal{E} . La principale difficulté est qu'il est souvent délicat de décrire \mathcal{E} .

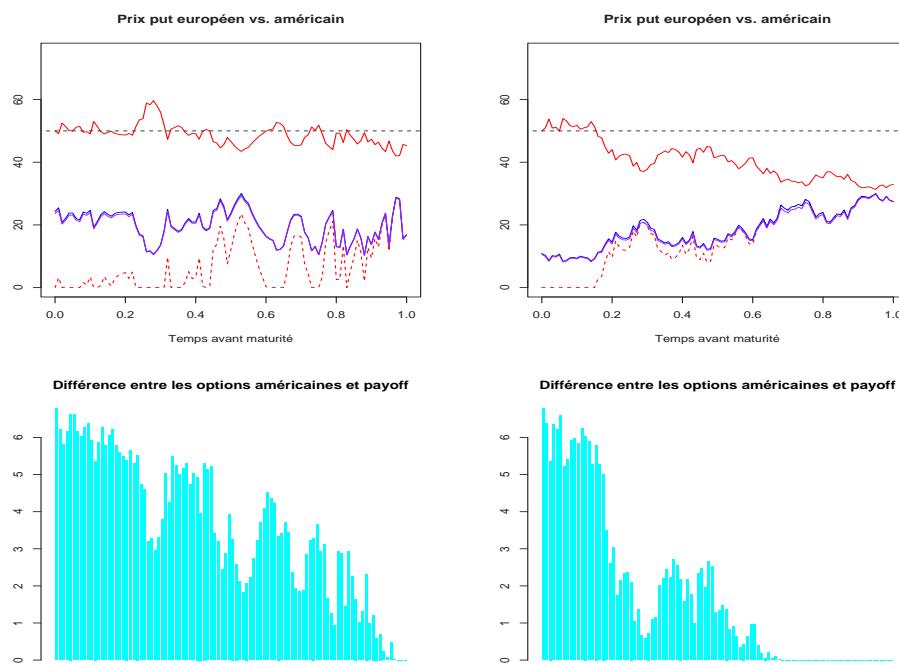


Figure 137: Comparaison des prix des puts européens et américains, en fonction de l'évolution du prix du sous-jacent.

On note r le taux sans risque, et b le coût de portage

14.6 Méthode d'approximation de Bjerkund et Stensland

Le prix d'un call s'écrit

$$\begin{aligned} C(K, S, T, r, b, \sigma) &= \alpha S^\beta - \alpha \phi(S, T, \beta, I, I) + \phi(S, T, 1, I, I) \\ &\quad - \phi(S, T, 1, K, I) - K \phi(S, T, 0, I, I) + K \phi(S, T, 0, K, I) \end{aligned}$$

où

$$\beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{b}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \frac{r}{\sigma^2}}$$

et

$$I = B_0 + (B_\infty - B_0)(1 - \exp(h(T)))$$

où

$$h(T) = -\left(bT + 2\sigma\sqrt{T}\right) \frac{B_0}{B_\infty - B_0}$$

avec

$$B_0 = \max\left\{K, \frac{r}{r-b}K\right\} \text{ et } B_\infty = \frac{\beta}{\beta-1}K$$

On pose également $\alpha = (I - K)I^{-\beta}$, et enfin la fonction ϕ est donnée par

$$\phi(S, T, \gamma, H, I) = e^\lambda S^\gamma \left(\Phi(d) - \left(\frac{I}{S}\right)^\kappa \Phi\left(d - \frac{2\log(I/S)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right)$$

où les constantes sont

$$\lambda = \left(-r + \gamma b + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\sigma^2\right)T, \quad \gamma = \frac{2b}{\sigma^2} + (2\gamma-1)$$

et

$$d = -\frac{\log(S/H) + (b + (\gamma-1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Notons que si $S \geq I$, il est optimal d'exercer l'option tout de suite (et la valeur de l'option est alors sa valeur intrinsèque). Si $b \geq r$, il n'est jamais optimal d'exercer le call américain avant échéance (et la valeur de l'option coincide avec le prix BLACK & SCHOLES dans le cas d'un call européen).

Le prix d'un put est obtenu en notant que

$$P(S, K, T, r, b, \sigma) = C(K, S, T, r-b, -b, \sigma)$$

14.7 Méthode d'approximation de Barone-Adesi et Whaley (call)

Le prix d'un call s'écrit

$$C(S, K, T) = \begin{cases} C_{BS}(S, K, T) - A(S/S^*)^q & \text{si } S < S^* \\ S - K & \text{si } S \geq S^* \end{cases}$$

où $C_{BS}(S, K, T)$ est le prix du call européen (donnée par la formule de BLACK & SCHOLES (1973)), où

$$A = \frac{S^*}{q} \left(1 - e^{(b-r)T} \Phi(d(S^*))\right) \text{ où } d(s) = \frac{\log(s/K) + (b - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

et où

$$q = \frac{-(2b/\sigma^2 - 1) + \sqrt{(2b/\sigma^2 - 1)^2 + 8r(1 - e^{-rT})^{-1}/\sigma^2}}{2}$$

S^* est la "valeur critique du call", et elle est obtenue en notant qu'elle vérifie l'équation

$$\underbrace{C_{BS}(S^*, K, T) - \frac{S^*}{q} \left(1 - e^{(b-r)T} \Phi(d(S^*))\right)}_{g(S^*, K, T)} = S^* - K.$$

La solution s'obtient par exemple à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson, en notant que la pente du terme de gauche en S_n s'écrit, en notant ϕ la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

$$g'(S_n) = \frac{\partial g(S_n, K, T)}{\partial S_n} = e^{(n-r)T} \Phi(d(S_n)) \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \left(1 - \frac{e^{(b-r)T} \phi(d(S_n))}{\sigma \sqrt{T}}\right) \frac{1}{q}$$

On construit alors la suite des (S_n) à partir d'une valeur S_0 (qui peut être S), sous la forme

$$S_{n+1} = \frac{K + g(S_n, K, T) - S_n g'(S_n)}{(1 - g'(S_n))}$$

et de stopper l'algorithme dès lors que

$$|(S_n - K) - g(S_n)| \leq \varepsilon,$$

pour un ε suffisement petit.

14.8 Méthode d'approximation de BARONE, ADESI & WHALEY (put)

Le prix d'un put s'écrit

$$C(S, K, T) = \begin{cases} P_{BS}(S, K, T) + A(S/S^*)^q & \text{si } S > S^* \\ K - S & \text{si } S \leq S^* \end{cases}$$

où $P_{BS}(S, K, T)$ est le prix du call européen (donnée par la formule de BLACK & SCHOLES (1973)), où

$$A = -\frac{S^*}{q} \left(1 - e^{(b-r)T} \Phi(-d(S^*))\right) \text{ où } d(s) = \frac{\log(s/K) + (b - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

et où

$$q = \frac{-(2b/\sigma^2 - 1) - \sqrt{(2b/\sigma^2 - 1)^2 + 8r(1 - e^{-rT})^{-1}/\sigma^2}}{2}$$

S^* est la "valeur critique du call", et elle est obtenue en notant qu'elle vérifie l'équation

$$\underbrace{P_{BS}(S^*, K, T) - \frac{S^*}{q} (1 - e^{(b-r)T} \Phi(d(S^*)))}_{g(S^*, K, T)} = K - S^*.$$

La solution s'obtient par exemple à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson, en notant que la pente du terme de gauche en S_n s'écrit, en notant ϕ la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

$$g'(S_n) = \frac{\partial g(S_n, K, T)}{\partial S_n} = -e^{(n-r)T} \Phi(-d(S_n)) \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \left(1 + \frac{e^{(b-r)T} \phi(-d(S_n))}{\sigma \sqrt{T}}\right) \frac{1}{q}$$

On construit alors la suite des (S_n) à partir d'une valeur S_0 (qui peut être S), sous la forme

$$S_{n+1} = \frac{K - g(S_n, K, T) + S_n g'(S_n)}{(1 - g'(S_n))}$$

et de stopper l'algorithme dès lors que

$$|(K - S_n) - g(S_n)| \leq \varepsilon,$$

pour un ε suffisement petit.

14.9 Utilisation des arbres

Une méthode simple pour valoriser un peu américain est d'utiliser ce qui a été obtenu dans la section ??.

Aussi $u(k, \cdot)$ est représenté sous la forme d'un vecteur \mathbf{U}_k . En particulier

$$U_k(i) = u(k, S_0 u^i d^{k-i}) \text{ pour } i = 0, 1, \dots, k,$$

et on calcule de manière itérative, avec comme valeur à maturité

$$U_n(i) = (S_0 u^i d^{n-i} - K)_+$$

et

$$U_k(i) = \max\{(S_0 u^i d^{k-i} - K)_+, e^{-rT/n}[p \cdot U_{k+1}(i+1) + (1-p) \cdot U_{k+1}(i)]\}.$$

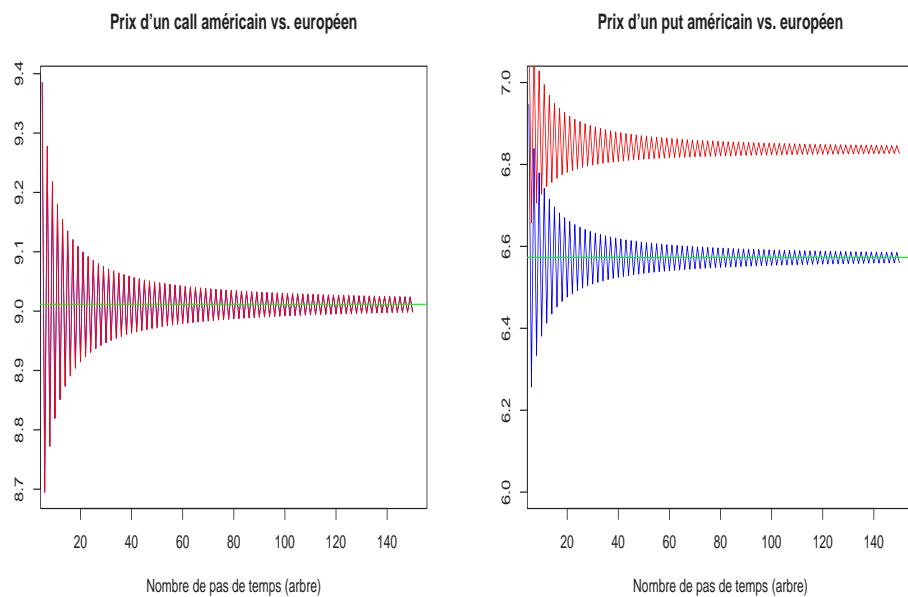


Figure 138: Call et put européens et américains, méthode par arbre.

Pour évaluer efficacement les options américaines, le maillage doit être fin lorsque l'on s'approche de l'échéance.

14.10 Représentation de la région d'exercice

En utilisant les arbres, il est possible de représenter la région d'exercice de l'option.

14.11 Arbre de LEISEN (1998)

Au lieu d'utiliser comme nous l'avons fait

$$\begin{cases} u = \exp((r - 0.5 * \sigma^2)h + \sigma\sqrt{\Delta t}) \\ d = \exp((r - 0.5 * \sigma^2)h - \sigma\sqrt{\Delta t}) \end{cases}$$

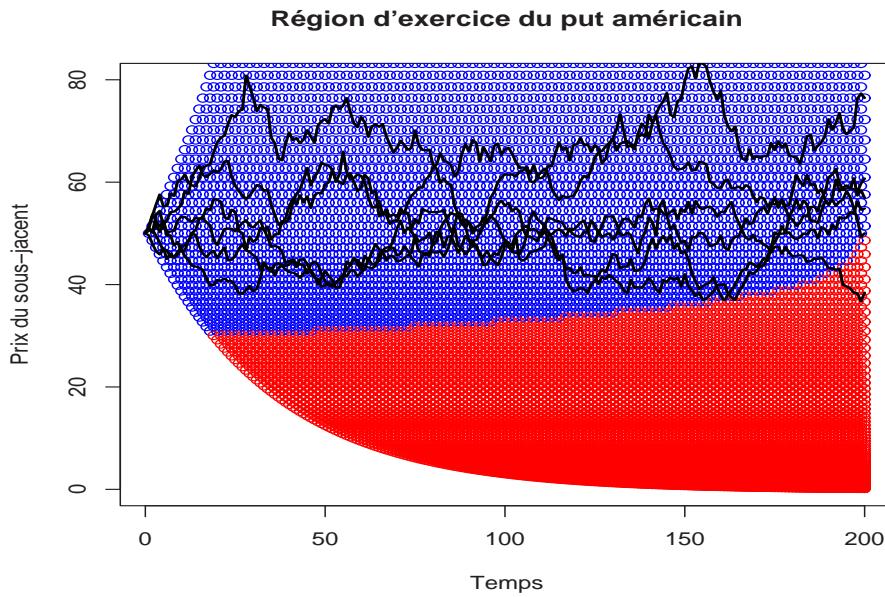


Figure 139: Région d'exercice d'un put américain, méthode par arbre.

LEISEN (1998) suggère de poser, si $n = T/\Delta t$

$$\begin{cases} u^* = \exp(\log(K/S_0)/n + \sigma\sqrt{\Delta t}) \\ d^* = \exp(\log(K/S_0)/n - \sigma\sqrt{\Delta t}) \end{cases}$$

La probabilité (risque neutre) de monter était $q = (\exp(rh) - d)/(u - d)$ devient $q^* = (\exp(rh) - d^*)/(u^* - d^*)$.

La figure 140 compare ainsi l'évolution de ces deux arbres.

14.12 Approche par équations aux dérivées partielles

Dans le cas des options américaines, le domaine des prix d'actifs s_t se découpent en deux, séparées par une valeur S_t^* telle que

- si $S_t \leq S_t^*$, la décision optimal pour l'acheteur du put est d'exercer son droit, et donc pour tout t tel que $S_t \leq S_t^*$, $P_t = K - S_t$,
- si $S_t > S_t^*$, la décision optimal pour l'acheteur du put est de pas exercer son droit: tant que le prix du sous-jacent reste dans cette zone, l'option est équivalente à une option européenne. Il est alors possible de constituer un portefeuille de réplication, et donc, dans cette zone de prix, le put américain vérifie l'équation

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P_t}{\partial S_t^2} = rP_t.$$

Notons de plus que quelle que soit la région où se trouve le prix du sous-jacent, le prix actualité de l'option américaine est une [surmartingale](#), i.e.

$$\text{pour tout } t, h > 0, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(t+h)} P_{t+h} | \mathcal{F}_t) \leq e^{-rt} P_t.$$

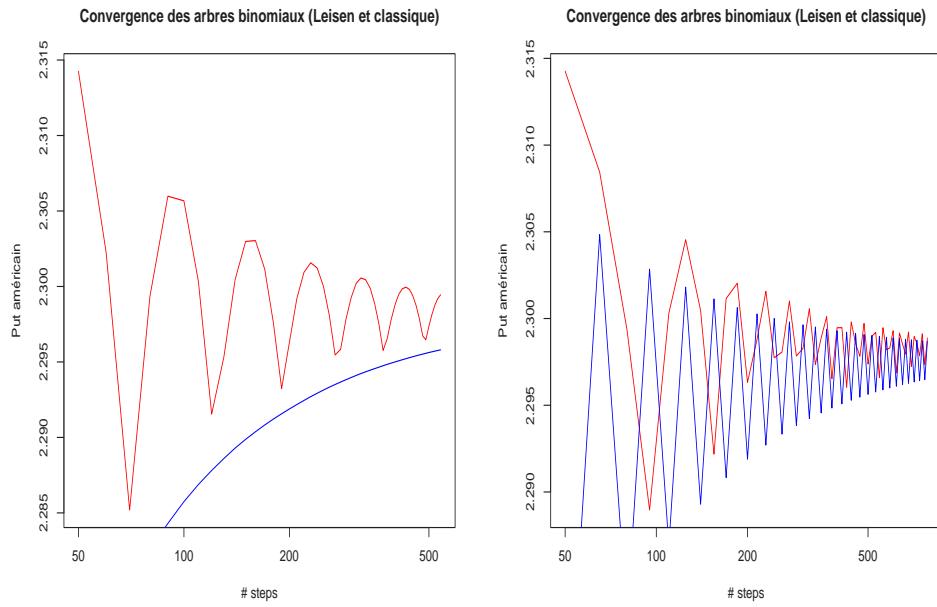


Figure 140: Convergence du prix d'un put américain, par arbre **classique** et par l'arbre de **Leisen**.

Aussi, dans un pas de temps dt , on n'a plus l'égalité, mais l'inégalité suivante

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}dP_t|\mathcal{F}_t) \leq rP_t dt.$$

Aussi, on peut intuiter que l'on aboutie non plus à une équation aux dérivées partielles, mais à une **inéquation variationnelle**

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P_t}{\partial S_t^2} \leq rP_t,$$

avec une égalité dans la zone où $S_t > S_t^*$.

14.13 Approche par équations aux dérivées partielles: frontière libre

Dans le cas d'un put européen,

- si $0 < S_t \leq S_t^*$,

on a les conditions de bord suivantes, $P_t = P(S_t, t) = K - S_t$ et $\partial P / \partial t = -1$, et

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} - rP < 0.$$

- si $S_t^* < S_t$,

on a les conditions de bord suivantes, $P_t = P(S_t, t) > K - S_t$ et $\partial P / \partial t \rightarrow -1$ lorsque $S_t \rightarrow S_t^*$, et

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} - rP = 0.$$

On parle de **frontière libre** car la frontière S_t^* est inconnue.

14.14 Approche par équations aux dérivées partielles: inégalité variationnelle

Les deux possibilités évoquées précédemment peuvent aussi être exprimées sous d'un système d'inégalités, appelée **inéquation variationnelle** (BENSSOUSSAN & LIONS (1982)), en notant H la fonction de payoff,

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} - rP \leq 0 \\ P(S_t, t) - H(S_t, t) \geq 0 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} - rP \right) (P(S_t, t) - H(S_t, t)) \end{cases}$$

La dernière condition est là simplement pour rappeler que nécessairement une des deux inégalités est forcément une égalité.

Lors de la résolution de l'équation obtenue par BLACK & SCHOLES, nous avions vu qu'il était possible de se ramener à l'équation de la chaleur,

$$\frac{\partial u(x, t\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} = 0.$$

En utilisant les mêmes changement de variable, en notant g la fonction de payoff, le système précédent s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} \geq 0 \\ u(x, \tau) - g(x, \tau) \geq 0 \\ \left(\frac{\partial u(x, t\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right) (u(x, \tau) - g(x, \tau)) = 0 \end{cases}$$

C'est à partir ce système de BRENNAN & SCHWARTZ (1978) a proposé une solution par différence finie.

- Pour mieux comprendre le programme, une introduction en [dimension 1](#).

Pour commencer, essayons de comprendre comment résoudre ce problème en dimension 1, c'est à dire un programme de la forme suivante,

$$\begin{cases} u''(x) \geq f(x) \text{ pour } x \in]-1, 1[\\ u(x) \leq g(x) \text{ pour } x \in]-1, 1[\\ (u''(x) - f(x)) \cdot (u(x) - g(x)) = 0 \text{ pour } x \in]-1, 1[\end{cases}$$

avec la condition de bord suivante $u(-1) = u(1) = 0$.

On considère alors une grille $x_0 = -1 < x_1 < \dots < x_n = 1$, que l'on supposera homogène, de pas $h = 2/n$, i.e. $x_i = -1 + ih$ pour $i = 0, \dots, n$. En notant $u_i = u(x_i)$, on réécrit le système sous la forme

$$\begin{cases} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \geq h^2 f_i \\ u_i \leq g_i \\ ((u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) - h^2 f_i) \cdot (u_i - g_i) = 0 \end{cases}$$

avec comme conditions de bords $u_0 = u_n = 0$. En notant A la matrice associé à cette

discrétisation, on peut écrire simplement le problème sous forme matricielle,

$$\left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{u} \geq \mathbf{f} \\ \mathbf{u} \leq \mathbf{g} \\ (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{f})(\mathbf{u} - \mathbf{g}) = 0 \end{array}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix} \right.$$

Une fois posé le problème numérique discrétisé, reste à le résoudre. On peut noter que ce programme s'écrit de manière équivalente

$$\min\{\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{g} - \mathbf{u}\} = 0$$

où le minimum est pris composante par composante. Notons que la matrice A peut s'écrire $A = L + U - D$, où L est la matrice contenant des 1 sur la première surdiagonale, U sur la première sous diagonale, et D des 2 sur la diagonale. Un peu d'écriture matricielles permet de réécrire cette équation sous la forme

$$\min\{\mathbf{u} - D^{-1}(L\mathbf{u} + U\mathbf{u} + \mathbf{f}), \mathbf{g} - \mathbf{u}\} = 0,$$

ou encore $\mathbf{u} = \max\{D^{-1}(L\mathbf{u} + U\mathbf{u} + \mathbf{f}), \mathbf{g}\}$.

Ce problème là peut alors se résoudre par des algorithmes itératifs, en particulier l'algorithme de SOR projeté:

Pour $i = 1, \dots, n$, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} z_i^{k+1} = \frac{1}{2}(-L\mathbf{u}^{k+1} - U\mathbf{u}^k + \mathbf{f})_i \\ u_i^{k+1} = \max\{u_i^k + \omega[z_i^{k+1} - u_i^k], g_i\} \end{array} \right.$$

La convergence de cet algorithme a été montrée par CRYER (1971) dans un cadre encore plus général.

- Résolution du problème (x, t) : méthode SOR projetée.

Cette méthode est exposée en détails dans LAPEYRE, SULEM & TALAY (2002).

Résolution - méthode SOR projetée

- Résolution du problème (x, t) : l'algorithme de Cryer.
- La méthode de pénalisation.

En fait, pour montrer l'existence et l'unicité de la solution au système (14.14), on utilise une méthode de pénalisation pour transformer cette équation en une équation non-linéaire.

L'idée est d'utiliser une méthode discrétisation de pénalisation, puis de résoudre les équations nonlinéaires obtenues par une itération de type Newton-Raphson.

On écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} - rP \leq 0 \\ P(S_t, t) - H(S_t, t) \geq 0 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} - rP \right) (P(S_t, t) - H(S_t, t)) \end{array} \right.$$

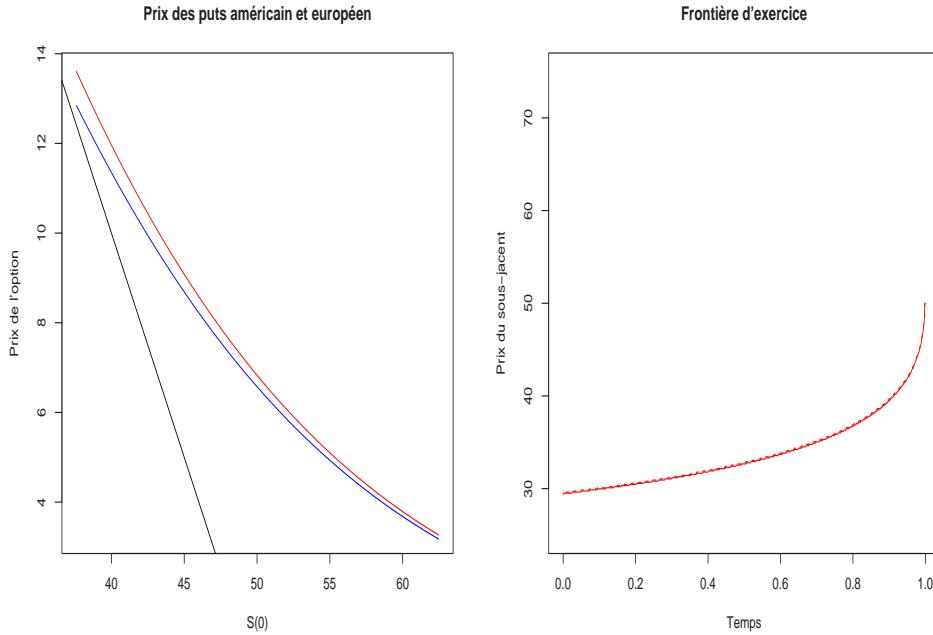


Figure 141: Valorisation d'un put américain.

sous la forme suivante, en notant P^* le prix du put à la date t si on décide d'exercer, i.e. $P^*(S_t, t) = (K - S_t)_+$,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} - rP + Q_\varepsilon(P, P^*)$$

où $Q(P, P^*) = \max\{P^* - P, 0\}/\varepsilon$ où ε est choisi suffisement petit pour que

$$P > P^* \text{ implique } \frac{\partial P}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} - rP = 0,$$

$$P = P^* - \epsilon \text{ implique } \frac{\partial P}{\partial t} + rS_t \frac{\partial P}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} - rP < 0.$$

Cette équation pénalisée s'écrit alors, en discréétisant par un schéma de Crank-Nicolson (en reprenant l'écriture de l'équation 18)

$$\frac{1}{2} ([\mathcal{A}g]_{i,j+1} + [\mathcal{A}g]_{i,j}) + q_{i,j+1} = \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{\Delta t} \quad (34)$$

ou le terme de pénalité $q_{i,j+1}$ est simplement

$$q_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{M}{\Delta t} [g_i^* - g_{i,i+j}] & \text{si } g_{i,j+1} < g_i^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où M est une grande constante donnée *a priori* et où $g_i^* = (K - S_i)_+$ pour un put américain.

Remarque 109. *On rajoute ici un terme de pénalisation à l'équation de discréétisation dans le cas d'une option européenne.*

Ici, l'écriture matricielle des équations discrétisées se fait sous la forme suivante

$$[\mathbb{I} + M/2 + \Pi(\mathbf{g}_{j+1})]\mathbf{g}_{j+1} = [\mathbb{I} - M/2]\mathbf{g}_j + [\Pi(\mathbf{g}_{j+1})]\mathbf{g}^*,$$

où $\Pi(\mathbf{g}_{j+1})$ est une matrice diagonale qui vaut

$$\Pi(\mathbf{g}_{j+1}) = \text{diag}(M \times \mathbf{1}(g_{i,j+1} < g_i^*)).$$

On obtient ainsi une équation [nonlinéaire](#). Elle se résoud de manière récursive où on utilise l'estimation de $\Pi(\mathbf{g}_{j+1})$ à l'étape k pour en déduire une valeur de \mathbf{g}_{j+1} à l'étape $k+1$.

A partir d'un \mathbf{g}_{j+1}^0 , on résoud, pour $k \geq 1$

$$[\mathbb{I} + M/2 + \Pi(\mathbf{g}_{j+1}^k)]\mathbf{g}_{j+1}^{k+1} = [\mathbb{I} - M/2]\mathbf{g}_j^{k+1} + [\Pi(\mathbf{g}_{j+1}^k)]\mathbf{g}^*.$$

Comme l'a montré FORSYTH & VERTZAL (2002) cet algorithme converge vers une solution du système d'équations suivantes

$$\frac{1}{2} ([\mathcal{A}g]_{i,j+1} + [\mathcal{A}g]_{i,j}) - \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{\Delta t} \leq 0,$$

$$\text{et } (g - g^*)_{i,j+1} \geq -\frac{\kappa}{M},$$

où κ est une constante indépendante de Δt et h .

Numériquement, la difficulté est de choisir pertinament M : si M est très grand, la précision sera d'autant meilleure, mais l'algorithme sera lent à converger. FORSYTH & VERTZAL (2002) suggère de prendre pour M l'inverse de la précision que l'on souhaite sur le calcul, car

$$\left| \frac{g_i^* - g_{i,j+1}}{g_i^*} \right| \sim \frac{1}{M} \text{ dans la région d'exercice, i.e. } g_i^* \neq 0.$$

14.15 Une solution analytique dans le cas du put américain

En utilisant le principe de Duhamel sur les équations aux dérivées partielles (ZAUDERER (1989)), on peut montrer que

$$\begin{aligned} P(S, t) &= e^{-rt} \int_0^K (X - S_T) \psi(S_T, S) dS_T \\ &\quad + \int_0^t e^{-rs} \int_0^{S_{t-s}^*} rK \psi(S_s, S) dS_s ds, \end{aligned}$$

où la probabilité de transition $\psi(S_T, S_t)$ (de passer de S_t à la date t à S_s à S_T à la date t) peut être calculée explicitement. Notons toutefois que cette formule nécessite de connaître le prix du sous-jacent sur la frontière d'exercice, S_t^* .

14.16 Approximation de la forme de la frontière d'exercice

OMBERG (1987) et CHESNEY (1987) ont obtenue une **formule exponentielle** en supposant que la frontière d'exercice avait une forme exponentielle.

Remarque 110. *Cette spécification de la forme de la frontière d'efficience est parfois appelée **option canadienne** (CARR (1996)).*

On considère ici une option européenne dont la maturité n'est plus T , mais une variable aléatoire τ , distribuée suivant une loi exponentielle de moyenne T , i.e.

$$\mathbb{P}(\tau > t) = \exp(-t/T)$$

Une autre interprétation est de dire que l'option est exercée à une date correspondant au premier saut d'un processus de Poisson. Rappelons aussi que la loi exponentielle est une loi sans mémoire, i.e. $\mathbb{P}(\tau > t + x | \tau > x) = \exp(-t/T)$.

Un calcul rapide permet de montrer que le prix de cette option est

$$\Pi^*(S_0, T) = \int_0^\infty \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \Pi(S_0, t) dt,$$

où $\Pi(S_0, t)$ est le prix de l'option européenne de même payoff, de maturité t . Aussi, dans le cas d'un put canadien, une formule fermée peut être obtenue puisque

$$\Pi(S_0, t) = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rt} \Phi(d_2)$$

où, pour rappel,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t \right),$$

avec $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$.

Proposition 111. *Le prix d'un **put** canadien est donné par*

$$P^*(S_0, T) = \begin{cases} \zeta(S_0) + \frac{1}{1+rT} K & \text{si } S_0 < K \\ \eta(S_0) & \text{si } S_0 \geq K \end{cases},$$

où

$$\zeta(x) = \frac{1}{\theta_+ - \theta_-} \left(1 - \frac{\theta_-}{1+rT} \right) K \left(\frac{x}{K} \right)^{\theta_+},$$

$$\eta(x) = \frac{1}{\theta_+ - \theta_-} \left(1 - \frac{\theta_+}{1+rT} \right) K \left(\frac{x}{K} \right)^{\theta_-},$$

où θ_\pm sont les racines de l'équation du second degré

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta - \frac{1}{T} = r,$$

soit

$$\theta_\pm = \frac{1}{\sigma^2} \left(-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 \left(\frac{1}{T} + r\right)} \right)$$

Dans le cas d'un **call** canadien, alors

$$C^*(S_0, T) = \begin{cases} \zeta(S_0) & \text{si } S_0 < K \\ \eta(S_0) - \frac{1}{1+rT} K \eta(S_0) & \text{si } S_0 \geq K \end{cases},$$

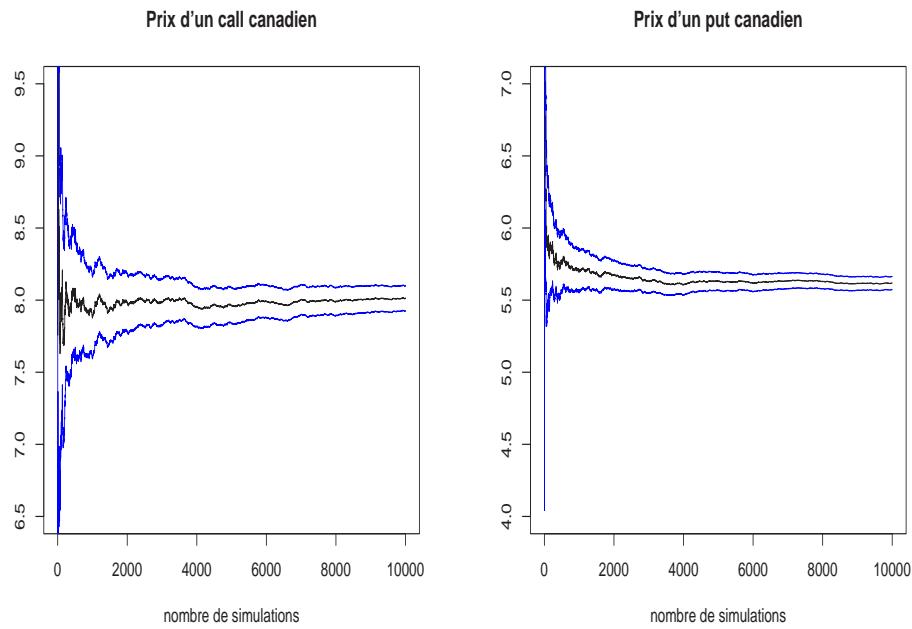


Figure 142: Call et put canadiens.

Des méthodes de simulations peuvent être utilisée pour calculer ce prix.

Dans ce modèle, la date à laquelle le détenteur de l'option se demande s'il peut exercer (ou non) est aléatoire. Il attend donc une durée τ où $\mathbb{E}(\tau) = T$. Afin d'améliorer le modèle, on peut supposer qu'il attend un temps τ_1 avant de se donner le droit d'exercer, et s'il n'exerce pas, il attend un temps τ_2 pour voir à nouveau s'il exerce ou non. On peut supposer que τ_1 et τ_2 sont deux variables exponentielles, indépendantes et équidistribuées. La contrainte précédante impose alors que $\mathbb{E}(\tau_1 + \tau_2) = T$, on a donc deux lois indépendantes, exponentielles, de moyenne $T/2$.

De manière générale, si on suppose que les n dates possibles d'exercices sont données par un processus de Poisson, alors $\mathbb{E}(\tau_i) = T/n$. L'idée est alors de faire tendre n vers l'infini, ce qui fait tendre cette option vers l'option américaine de maturité T .

Cette somme de lois exponentielles étant une loi Gamma, on peut alors légitimement être tenté de valoriser une option canadienne dont la date d'exercice suit une loi [Gamma](#), de moyenne T .

Une autre possibilité est de prendre non pas une loi exponentielle pour la durée avant maturité, mais une loi gamma. On notera alors P_n le prix d'un put obtenu en prenant la somme de n lois exponentielles. En considérant l'extrapolation de Richardson (MARCHUK & SHAIDUROV (1983)), on pose

$$P_{1,n} = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-i} i^n}{i!(n-i)!} P_i.$$

BROADIE & DETEMPLE (1996) propose d'utiliser cette méthode pour approcher le prix d'une option américaine.

14.17 Utilisation des méthodes de simulations

La principale difficulté est ici qu'il faut calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\cdot|\mathcal{F}_n)}$ à une date intermédiaire t_n pour compte tenu du prix à la date t_{n+1} . Or parmi toutes les trajectoires, une seule passe par x_n à la date t_n . L'idée est ici d'approcher l'espérance par la moyenne arithmétique sur toutes les trajectoires simulées passant près de x_n à la date t_n .

14.18 Algorithme de TILLEY (1993)

Etape 0 Générer n trajectoires pour le prix du sous-jacent, $k = 1, \dots, n$

Etape 1 A une date $t \in [0, T]$ réordonner les prix $S_t(1), \dots, S_t(n)$ sur les n trajectoires, dans le sens décroissant pour un put et dans le sens croissant pour un call. On regroupe les trajectoires en m sous-groupes de n/m trajectoires. On note $B(t, k)$ le groupe auquel appartient la k ème trajectoire à la date t (pour la trajectoire k qui atteignait la plus grande valeur en t , $B(t, k) = 1$ pour un put et $k = 1$, et $B(t, k) = m$ pour un call et $k = n$).

Etape 2 Pour chaque trajectoire k , appeler la valeur intrinsèque du prix de l'option

$$I_t(k) = \begin{cases} (S_t(k) - K)_+ & \text{pour un call} \\ (K - S_t(k))_+ & \text{pour un put} \end{cases}$$

Etape 3 Calculer la valeur de détention de l'option $H_t(k)$ sur une période, soit

$$H_t(k) = e^{-r\delta} \frac{1}{n/m} \sum_{j \in B(t, k)} V_{t+1}(j)$$

où $V_t(j)$ sera définie à l'étape 6, et où $V_T(j) = I_T(j)$ pour tout j .

Etape 4 On définit la variable indicatrice d'exercice ou de conservation de l'option

$$X_t(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } I_t(k) > H_t(k) \quad \text{on exerce alors l'option} \\ 0 & \text{si } I_t(k) \leq H_t(k) \quad \text{on garde alors l'option (au moins une période)} \end{cases}$$

Etape 5 On note k_t^* les trajectoires pour lesquelles on a intérêt à exercer l'option

Etape 6 Pour chaque trajectoire, on définit la valeur actuelle comme

$$V_t(k) = \begin{cases} I_t(k) & \text{si } k \geq k_t^* \\ H_t(k) & \text{si } k < k_t^* \end{cases}$$

Etape 7 On pose $t = t - \delta$, et on retourne à l'étape 1.

Etape 8 Pour obtenir finallement le prix de l'option à la date $t = 0$, on définit la variable indicatrice d'exercice

$$Y_t(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq k_t^* \\ 0 & \text{si } k < k_t^* \end{cases}$$

$$Z_t(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_t(k) = 1 \text{ et } Y_s(k) = 0 \text{ pour } s < t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le prix de l'option est alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_t Z_t(k) e^{-rZ_t(k)t} I_t(k) \right)$$

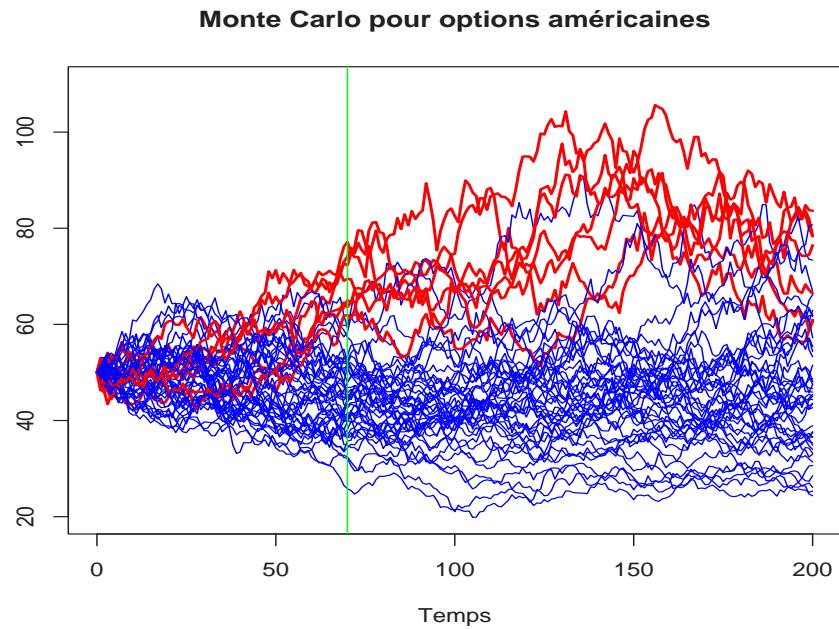


Figure 143: Idée de la méthode de Monte Carlo, TILLEY (1993).

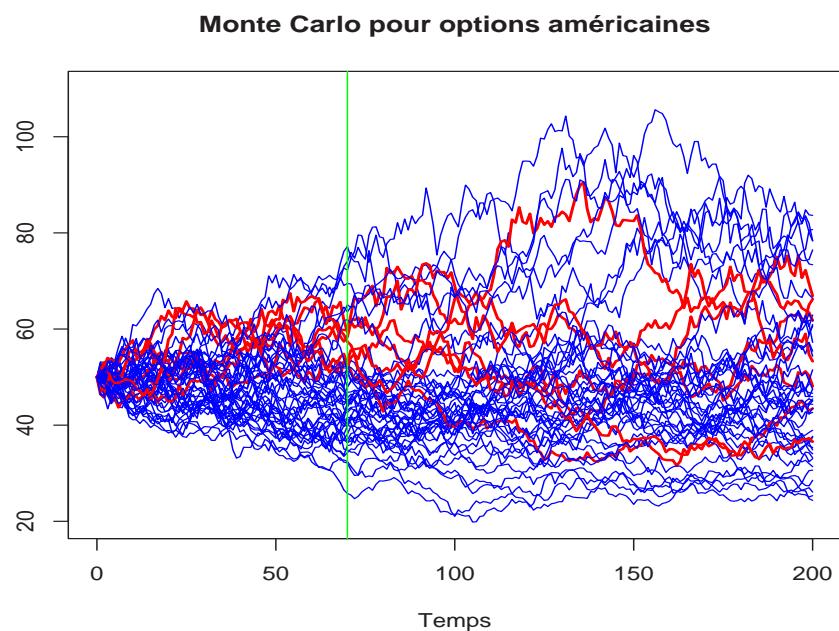


Figure 144: Idée de la méthode de Monte Carlo, TILLEY (1993).

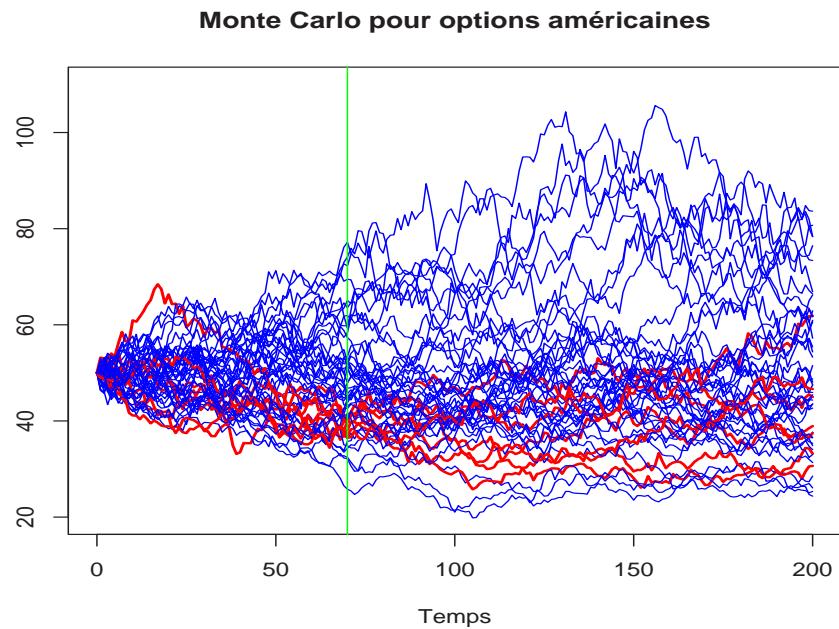


Figure 145: Idée de la méthode de Monte Carlo, TILLEY (1993).

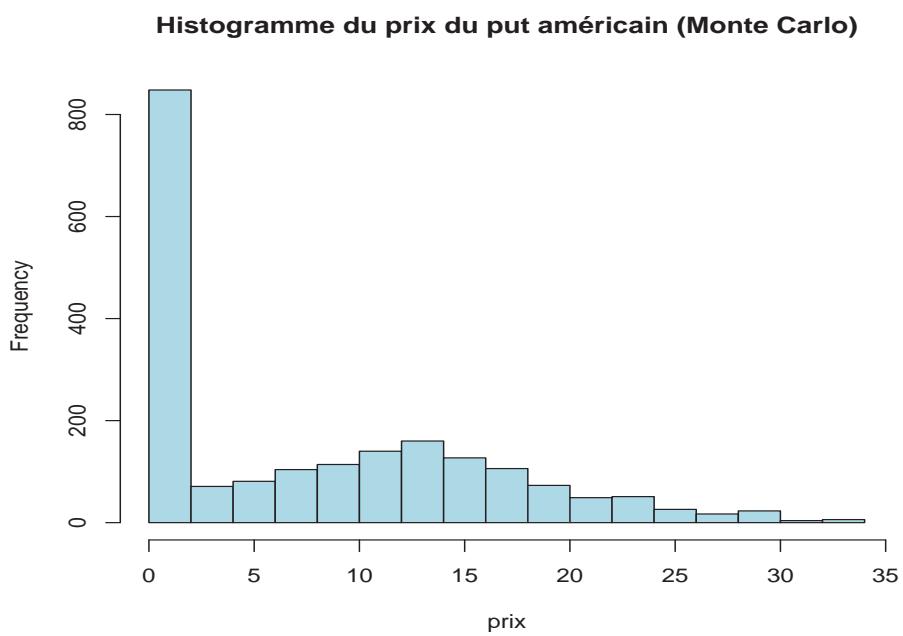


Figure 146: Convergence de la méthode de Monte Carlo.

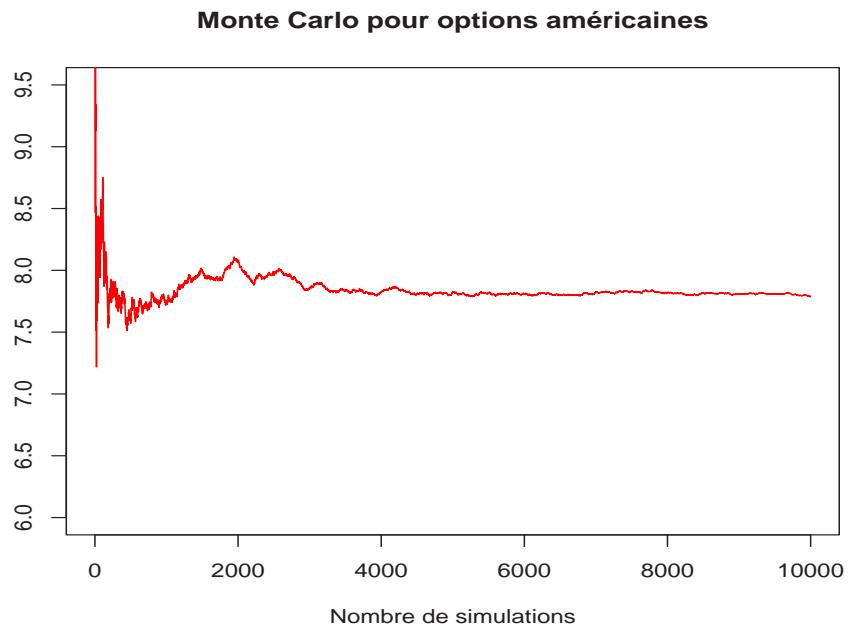


Figure 147: Convergence de la méthode de Monte Carlo.

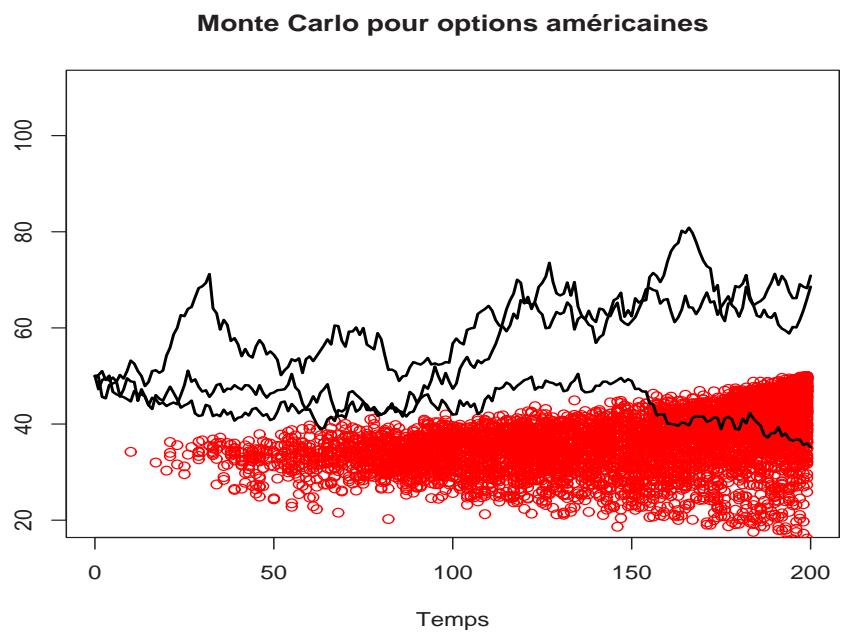


Figure 148: Intuition de la frontière d'exercice par Monte Carlo.

14.19 Algorithme de GRANT, VORA & WEEKS (1996)

A la date T , la payoff de l'option est $P_T(S_T) = (S_T - K)_+$ pour un call américain, et $P_T(S_T) = (K - S_T)_+$ pour un put américain. Le prix critique d'exercice est alors $S_T^* = S_T$ puisqu'on a intérêt à acheter.

Plaçons nous dans le cas d'un call américain. A la date $t = T - \delta$, on utilise un algorithme backward, en notant que

$$P_t(S_t) = \begin{cases} S_t - K & \text{si } S_t \geq S_t^* \\ e^{-r\delta} E(P_t(S_T) | S_t) & \text{si } S_t \leq S_t^* \end{cases}$$

La valeur critique à la date t , S_t^* est le prix pour lequel ces deux quantités sont égales, soit

$$S_t^* - K = e^{-r\delta} E(P_{t+\delta}(S_{t+\delta}) | S_t = S_t^*)$$

Il s'agit alors de trouver s tel que $f(s) = 0$ où

$$f(s) = s - K - e^{-r\delta} E(P_t(S_T) | S_t = s)$$

où $E(P_{t+\delta}(S_{t+\delta}) | S_t = s)$ est calculé par des méthodes de Monte Carlo, c'est à dire en simulant S_T sachant $S_t = s$. On calcule alors $f(s)$ pour plusieurs valeurs de s , puis on cherche une valeur qui annule f .

L'algorithme de calcul de l'espérance conditionnelle est alors le suivant: supposons que l'on cherche à approcher S_n^* , à partir des valeurs critiques déjà obtenues, $\{S_{n+1}^*, S_{n+2}^*, \dots, S_T^* = K\}$. Pour estimer $E(P_{n+1}(S_{n+1}) | S_n = s)$, on simule des valeurs des valeurs S_{n+1}, S_{n+2}, \dots jusqu'à arriver soit à expiration, soit à une valeur critique, i.e. $S_m > S_m^*$ pour un m entre $n+1$ et t . L'espérance est alors approchée par la moyenne des valeurs suivantes

$$\begin{aligned} & e^{-r(T-(n+1))\delta} (S_T - K_+) \mathbb{I}(S_{n+1} \leq S_{n+1}^*, \dots, S_T \leq S_T^*) \quad (\text{par d'exercice anticipé}) \\ & + e^{-r(m-(n+1))\delta} (S_m - K_+) \mathbb{I}(S_{n+1} \leq S_{n+1}^*, \dots, S_{m-1} \leq S_{m-1}^*, S_m > S_m^*) \quad (\text{exercice anticipé en } m) \end{aligned}$$

14.20 Algorithme de WELCH & CHEN (1991)

Rappelons que le prix d'un call américain s'écrit simplement

$$C = \sup_{\tau \in \mathcal{T}(0, T)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r\tau} (S_\tau - K)_+)$$

où τ est un temps d'arrêt optimal. Une idée "naturelle" peut alors être de chercher une procédure permettant de trouver un algorithme permettant d'obtenir le temps d'arrêt optimal.

Ce problème d'optimisation stochastique peut se résoudre de la manière suivante (voir e.g. FU (1994) pour un survey sur ce genre de méthodes).

14.21 Algorithme de BARRAQUAND & MARTINEAU (1995)

Cet algorithme est très proche de celui de TILLEY (1993), basé sur une partition des trajectoires simulées. L'idée est partitionner l'espace de la valeur du payoff en K valeurs,

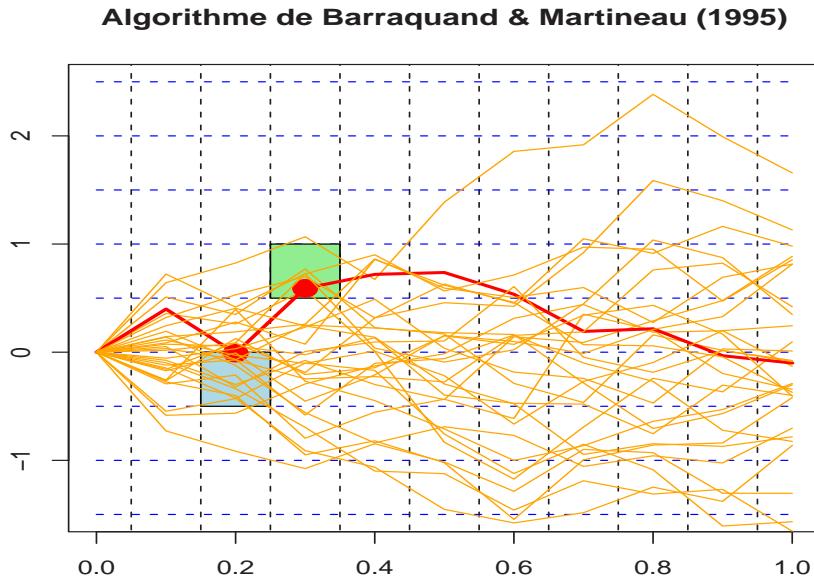


Figure 149: Algorithme de BARRAQUAND & MARTINEAU (1995).

puis d'estimer, à partir de n simulations, les matrices de transition de k_1 à k_2 , entre chaque date.

Soient \mathbf{S}_t^i , $i = 1, \dots, n$ les n trajectoires simulées, aux dates t_1, \dots, t_m . À chaque dates $(s, t) = (t_i, t_j)$, et pour tout $t_1, t_2 \in \{1, \dots, K\}$, on note $p_{i,j}(k_1, k_2)$ le nombre de trajectoires qui sont passés du niveau k_1 à la date t_i au niveau k_2 à la date t_j . On note également $a_i(k)$ le nombre de trajectoires au niveau k à la date t_i .

Posons $c_i(k)$ la somme de tous les payoffs cumulés des trajectoires qui étaient au niveau k à la date t_i . La valeur moyenne est alors $c_i(k)/a_i(k) = \gamma_i(k)$. De manière récursive, on calcule $\gamma_m(k)$ (à échéance, $t_m = T$), puis on pose

$$\gamma_i(k) = \max \left\{ \frac{c_i(k)}{a_i(k)}, \sum_{j=1}^K p_{k_1, k_2} \times \gamma_{i+1}(j) \right\},$$

et on calcule récursivement jusqu'à $t = 0$.

14.22 Complément: simulation de chaînes de Markov

Définition 112. Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un espace E (dit espace d'état) tel que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$,

$$(X_{n+1}|X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{n+1}|X_n = x_n).$$

Si l'espace d'état E est fini, ou dénombrable, on l'identifiera à \mathcal{N} (ou $\{1, 2, \dots, n\}$). On note

$$p_{i,j,n} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \text{ pour tout } i, j \in E.$$

Si $p_{i,j,n}$ ne dépend pas de n , on parlera de **chaîne de Markov homogène**, et $p_{i,j}$ est appelée **probabilité de transition**. On note P la matrice des probabilités de transition $P = (p_{i,j})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si

$$p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \text{ pour } i, j \in E,$$

alors

$$P^{(n)} = (p_{i,j}^{(n)}) = P^n.$$

En particulier, la loi (marginale) de X_n , p_n est donnée par

$$p_n = (P^n)' \cdot p_0.$$

Un état k est dit **absorbant** si $\mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k) = 1$.

14.23 Simulations et moindres carrés pour les options américaines

Une dernière solution pour calculer le prix d'une option américaine peut être d'utiliser la méthode de LONGSTAFF & SCHWARTZ.

Le but n'est pas d'avoir la fonction valeur, mais de trouver numériquement le temps d'arrêt optimal, pour une trajectoire donnée, τ .

Considérons une option Bermudéenne, permettant d'exerce l'option aux date $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. On a alors l'algorithme récursif suivant, permettant de trouver le temps d'arrêt optimal τ_i , lorsque l'on l'on se trouve à la date t_i ,

$$\begin{aligned} \tau_n &= T \\ \tau_i &= t_i \cdot \mathbf{1}(g(S_{t_i}) \geq u(t_i, S_{t_i})) + \tau_{i+1} \cdot \mathbf{1}(g(S_{t_i}) < u(t_i, S_{t_i})), \end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, \dots, n - 1$. De plus, notons que l'on a également

$$\{g(S_{t_i} < u(t_i, S_{t_i}))\} = \{g(S_{t_i}) < \mathbb{E}(e^{-r(\tau_{i+1}-t_i)} g(S_{\tau_{i+1}}) | S_{t_i})\}.$$

A l'aide de cette définition des temps d'arrêt τ_i , on peut vérifier qu'ils s'écrivent, récursivement,

$$\tau_i = \min\{t_j \geq t_i, g(S_{t_j} = u(t_j, S_{t_j}))\}.$$

Il s'agit bien des temps d'arrêts optimaux au dates t_i .

La difficulté est alors de calculer numériquement l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(e^{-r(\tau_{i+1}-t_i)} g(S_{\tau_{i+1}}) | S_{t_i})$: LONGSTAFF & SCHWARTZ ont proposé d'utiliser une méthode de moindres carrés pour calculer cette espérance conditionnelle.

Notons - pour simplifier - $Z_{i+1} = e^{-r(\tau_{i+1}-t_i)} g(S_{\tau_{i+1}})$. Si la fonction g est bornée, Z_{i+1} sera alors bornée. En voyant l'espérance conditionnelle comme une projection dans L^2 , on écrit $\mathbb{E}(Z_{i+1} | S_{t_i})$ sous la forme $\psi_i(S_{t_i})$, où ψ est la fonction telle que

$$\psi = \underset{f \in L_i^2}{\operatorname{argmin}} \left\{ \mathbb{E} \left((S_{t_{i+1}} - f(S_{t_i}))^2 \right) \right\},$$

parmi l'ensemble des fontions f telles que $\mathbb{E}(f(S_{t_i})^2) < \infty$ (en toute rigueur, cet espace dépend de la date t_i).

On se donne alors une base $(h_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions qui forme une base de L_i^2 . Alors

$$\psi_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{i,k} h_{i,k}(x).$$

L'idée de l'algorithme est alors le suivant

1. On initialise en posant $\tau_n = T$,
2. On cherche $\boldsymbol{\omega}_i = (\omega_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$, suite qui minimise

$$\mathbb{E} \left(\left(e^{-r(\tau_{i+1}-t_i)} g(S_{\tau_{i+1}}) - \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{i,k} h_{i,k}(S_{t_i}) \right)^2 \right).$$

3. On pose alors

$$\tau_i = \tau_i = t_i \cdot \mathbf{1} \left(g(S_{t_i}) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{i,k} h_{i,k}(S_{t_i}) \right) + \tau_{i+1} \cdot \mathbf{1} \left(g(S_{t_i}) < \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{i,k} h_{i,k}(S_{t_i}) \right).$$

La difficulté est ici de résoudre un problème d'optimisation sur un espace infini, on va alors considérer une approximation de $\boldsymbol{\omega}_i = (\omega_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$, $\boldsymbol{\omega}_i^* = (\omega_{i,k})_{k=1,\dots,K}$, solution du programma

$$\min \left\{ \mathbb{E} \left(\left(e^{-r(\tau_{i+1}-t_i)} g(S_{\tau_{i+1}}) - \sum_{k=1}^K \omega_{i,k} h_{i,k}(S_{t_i}) \right)^2 \right) \right\}.$$

A partir de là, on estime l'espérance par une méthode de Monte Carlo, ce qui donne l'algorithme suivant: on simule M trajectoires $(S_{t_i}^m)_{i=0,\dots,n}$, pour $m = 1, \dots, M$, puis considère l'algorithme suivant

1. On initialise en posant $\tau_n^m = T$,
2. On cherche $\boldsymbol{\omega}_i = (\omega_{i,k})_{k=1,\dots,K}$ qui minimise

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\left(e^{-r(\tau_{i+1}-t_i)} g(S_{\tau_{i+1}^m}) - \sum_{k=1}^K \omega_{i,k} h_{i,k}(S_{t_i}^m) \right)^2 \right).$$

3. On pose alors

$$\tau_i^m = \tau_i = t_i \cdot \mathbf{1} \left(g(S_{t_i}^m) \geq \sum_{k=1}^K \omega_{i,k} h_{i,k}(S_{t_i}^m) \right) + \tau_{i+1}^m \cdot \mathbf{1} \left(g(S_{t_i}^m) < \sum_{k=1}^K \omega_{i,k} h_{i,k}(S_{t_i}^m) \right).$$

A partir de cet algorithme, l'estimateur du prix de l'option américaine à la date 0 est

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M e^{-r(\tau_0^m)} g(S_{\tau_0^m}).$$

Remarque 113. Par soucis de simplicité, on peut prendre une base de fonction (h_k) qui ne dépende pas de la date t_i .

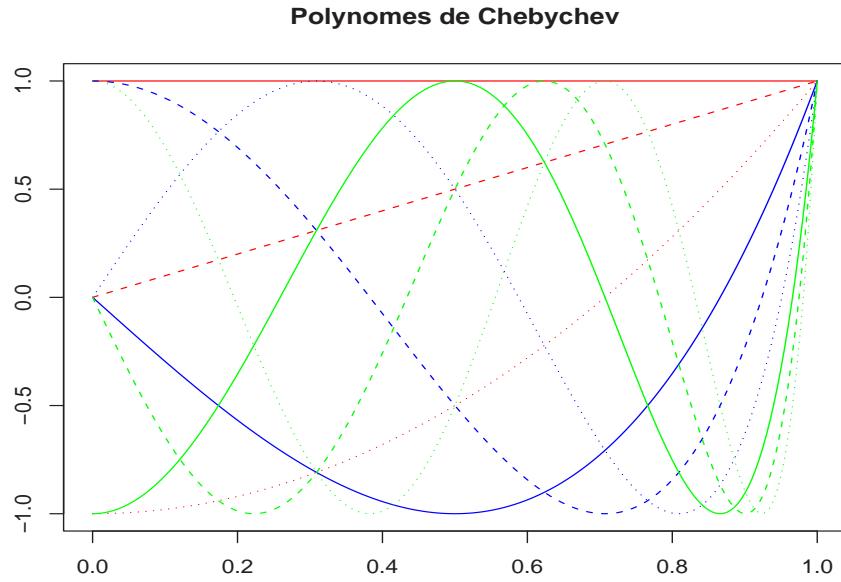


Figure 150: Polynômes de Chebychev, $T_n(x) = \cos(n(\arccos(x)))$.

On utilisera ici comme base les [polynômes de Chebychev](#). Rappelons que les polynômes de Chebychev sont définis par

$$T_n(x) = \cos(n(\arccos(x))), \text{ sur } [-1, 1], \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 114. Il n'est pas a priori évident que ces fonction soient des polynômes, et pourtant, ils vérifient les formules de récurrence suivantes,

$$T_0(x) = 1 \text{ et } T_1(x) = x$$

et pour $n \geq 1$,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Ces polynômes sont représentés sur la Figure suivante,

Pour résoudre numériquement notre problème, on notera T la matrice $n \times n$ de Chebychev-Vandermonde,

$$T(t_1, \dots, t_n) = \begin{pmatrix} T_0(t_1) & T_1(t_1) & \dots & T_{n-1}(t_1) \\ T_0(t_2) & T_1(t_2) & \dots & T_{n-1}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_0(t_n) & T_1(t_n) & \dots & T_{n-1}(t_n) \end{pmatrix}$$

Décomposer une fonction $f(\cdot)$ dans la base des polynômes de Chebychev revient à chercher $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ tels que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i T_i(x) \sim \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i T_i(x).$$

Aussi, étant donnée une grille $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$, cela revient à résoudre numériquement $T(x_1, \dots, x_n)\omega = f$.

Exemple 115. Dans le cas qui nous intéresse, f est une fonction de la forme

Dans le papier original, LONGSTAFF & SHWARTZ (2001) suggèrent d'utiliser comme base les polynômes de Laguerre. Ces derniers sont obtenus à partir de la formule de Rodrigues,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n),$$

comme solution de récurrence

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \text{ où } n \geq 1,$$

avec $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = 1 - x$.

```
Algorithme de Longstaff-Schwarz
PLS<-function(K, S, N, M, r){
Vn=max(K-S[N+1],0)
for(i in 0:(N-1)
```

14.24 Les options perpétuelles

Considérons tout d'abord le cas des [options russes](#), qui sont des options américaines perpétuelles, qui paieront le maximum observé sur le sous-jacent jusqu'à la date d'exercice.

15 Elements bibliographiques

- HULL, J. (2003). Options, futures et autres actifs dérivés. Pearson.
- LAMBERTON, D. & LAPEYRE, B. (1997). Introduction au calcul stochastique appliquée à la finance. Ellipses.
- HENRICI, P. (1964). Elements of numerical analysis. John Wiley & Sons.
- CIALET, P.G. (1998). Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Dunod.
- RAVIART, P.A. & THOMAS, J.M. (1992). Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson.
- WILLMOTT, P., HOWISON, S. & DEWYNNE, J. (1997). The mathematics of financial derivatives. Cambridge University Press.
- ROGERS, L.C.G. & TALAY, D. (1997). Numerical Methods in Finance. Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press.
- TALAY, D. (1995). Simulation and numerical analysis of stochastic differential systems : a review. *in* P. Krée and W. Wedig, editors, Probabilistic Methods in Applied Physics, volume 451 of Lecture Notes in Physics, chapter 3, pages 54-96. Springer-Verlag.
- KLOEDEN, P.E. & PLATEN, E. (1995). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag.
- TAVELLA, D. & RANDALL, K. (2000). Pricing Financial Instruments: The Finite Difference Method. John Wiley.
- TAVELLA, D. (2002). Quantitative Methods in Derivative Pricing: An Introduction to Computational Finance. John Wiley.
- TEMAN, E. (2004). Méthodes de Monte Carlo pour la finance. Notes de cours, DEA Paris 6.
- LAPEYRA, B., SULEM, A. & TALAY, D. (2000). Understanding Numerical Analysis for Option Pricing. Cambridge University Press.
- JACKEL, P. (2002). Monte Carlo Methods in Finance. John Wiley.
- COX, J. & RUBINSTEIN, M. (1985). Options Markets. Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
- DEMANGE, G. & ROCHE, J.C. (1992) Méthodes mathématiques de la Finance. Economica.
- SIMON, Y. edt. (1997). Encyclopédie des marchés financiers. Economica.
- KARATZAS, I. & SHREVE, S. (1988). Brownian motion and stochastic calculus. Springer.
- HAUG, E.G. (1997). The complete guide to option pricing formulas. Mc Graw Hill.
- KUNSHER, H. (1977). Probabilistic methods for approximations in stochastic control and elliptic equation. Academic Press.

- DEMAILLY, J.P. (1996). Analyse numérique et équations différentielles. Presses de l'Université de Grenoble.
- DUPIRE, B. (1998). Monte Carlo: methodologies and applications for pricing and risk management. Risk Book.
- KWOK, Y.W. (1997). Mathematical models of financial derivatives. Springer.
- GLASSERMAN, P. (2004). Monte Carlo methods in financial engineering. Springer.
- SEYDEL, R. (2004). Tools for computational finance. Springer.
- MCLEISH, D.L. (2005). Monte carlo simulation & Finance. Wiley Finance.
- LAPEYRE, B., SULEM, A. & TALAY, D. (2002). Understanding numerical analysis for financial models. *version provisoire*
- RAPPAZ, J. & PICASSO, M. (2000). Introduction à l'analyse numérique. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- FORTIN, A. (1995). Analyse numérique pour ingénieurs. Editions de l'école polytechnique de Montréal.
- AHN, H., PENAUD, A. & WILMOTT, P. (1998). Various Passport Options and Their Valuation. *Oxford University OCIAM Working Paper*.
- ANDRIANJAKAHERIVOLA, E. & RUSSO, F. (2001). The Quantile of a Diffusion: Pricing a Quantile Lookback Option. *Working Paper*.
- AVELLANEDA, M. & WU, L. (1999). Pricing Parisian-Style Options with a Lattice Method. *International Journal of Theoretical & Applied Finance*, **2**, 1-16.
- BABBS, S. (1992). Binomial Valuation of Lookback Options. *Journal of Economic Dynamics & Control*, **24**, 1499-1525.
- BALLOTTA, L. & KYPRIANOU, A. (2001). A Note on the Alpha-Quantile Option. *Applied Mathematical Finance*, **8**, 137-144.
- BEAGLEHOLE, D.R., DYBVG, P.H. & ZHOU, G. (1997). Going to Extremes: Correcting Simulation Bias in Exotic Option Valuation. *Assocation for Investment Management & Research Papern* ?, ??-??.
- BERMIN, H. (1996). Exotic Lookback options: The case of Extreme Spread Options. (Working Paper, Lund University).
- BOYLE, P. & LAU, S.H. (1994). Bumping Against the Barrier with the Binomial Method. *Journal of Derivatives*, **1**, 6-14.
- BOYLE, P. & TIAN, Y. (1998). An Exlicit Finite Difference Approach to the Pricing of Barrier Options. *Applied Mathematical Finance*, **5**, 17-43.
- BUETOW, G. (1999). Ratchet Options. *Journal of Financial & Strategic Decision*, **12**.
- CONZE, A. & VISWANATHAN, R. (1991). Path Dependent Options: The Case of Lookback Options. *Journal of Finance*, ?. 1893-1907.
- DASSIOS, A. (1995). The Distribution of the Quantile of a Brownian Motion with Drift & the Pricing of Related Path-Dependent Options. *Annals of Applied Probability*, **5**, 389-98.

- DELBAEN, F. & YOR, M. (1998). Passport Options. *Working Paper*.
- DERMAN, E., KANI, I., ERGENER, D. & BARDHAN, I. (1995). Enhanced Numerical Methods for Options With Barriers. *Goldman Sachs Working Paper*.
- DRAVID, A., RICHARDSON, M. & SUN, T.S. (1993). Pricing foreign index contingent claims: an application to Nikkei index warrants. *Journal of Derivatives*, **1**, 33-51.
- DUAN, J.C. (2003). An Enhanced Path-Derivative Monte-Carlo Method for Computing Option Greeks. *University of Toronto Working Paper*.
- DUAN, J.C., PLISKA, S. (2003). Option Valuation with Co-Integrated Asset Prices. *Journal of Economic Dynamics & Control*, ?, ??-??.
- FIGLEWSKI S. & GAO, B. (1999). The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing. *Journal of Financial Economics*, **53**, 313-351.
- FUJITA, T. & MIURA, R. (2003). Edokko Options: A New Framework of Barrier Options. *Asia-Pacific Financial Markets*, **9** 141-153.
- FUJITA, T. (2000). A Note on the Joint Distribution of a,SS-Percentiles and Its Application to the Option Pricing. *Asia-Pacific Financial Markets*, **7** 339-344.
- GESKE, R. (1977). The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **12**, 541-552.
- GESKE, R. (1979). The Valuation of Compound Options. *Journal of Financial Economics*, **7**, 63-81.
- GOLDMAN, B., SOSIN, H. & GATTO, M. A. (1979). Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High. *Journal of Finance*, ?, 1111-1127.
- HABER, R.J., SCHÖNBUCHER, P.J. & WILMOTT, P. (1999). Pricing Parisian Options. *Journal of Derivatives*, **6**, 71-79.
- HARTLEY, P. (2002). Pricing Parisian Options by Laplace Inversion. *Decisions in Economics & Finance*. ?, ??-??
- KAT, H. M. (1995). Pricing Lookback Options Using Binomial Trees: An Evaluation. *Journal of Financial Engineering*, **4**, 375-397.
- KLASSEN, T. R. (2001). Simple, Fast & Flexible Pricing of Asian Options. *Journal of Computational Finance*, **4**, 89-124.
- KWOK, Y.K. & LAU, K.W. (2001). Pricing Algorithms for Options with Exotic Path-Dependence. *Journal of Derivatives*, ?, ??-??.
- KYPRIANOU, A. & BAURDOUX, C. (2004). Further Calculations for Israeli Options. *Stochastics & Stochastics Reports*, **76**, 549-569.
- KYPRIANOU, A., KÜHN, C. (2003). Israeli Options as composite Exotic Options. *Working Paper*.
- KYPRIANOU, A. (2002). "Some Calculations for Israeli Options. *Journal of Finance & Stochastics*, ?, ??-??.
- LEVITAN, S. (2001). Lattice Methods for Barrier Options. *University of Witwatersrand Honours Project*.
- MACASKILL, J. (2001). Managing the Downturn, *Thomson IF Review*.

- MARGRABE, W. (1978). The Value of an Option to Exchange One Asset for Another. *Journal of Finance*, **33**, 177-186.
- NAGAYAMA, I. (1999). Pricing of Passport Options. *Journal of Mathematical Science*, **5**, 747-785.
- OVERHAUS, M. (2002). Himalaya Options. *Deutsche Bank Masterclass*.
- POOLEY, D.M., VETZAL, K. & FORSYTH, P.A. (2001). Digital Projection. *University of Waterloo Working Paper*.
- QUESSETTE, R. (2002). New Products, New Risks. *Deutsche Bank Masterclass*.
- REINER, E. (1992). Quanto mechanics. *RISK*, **5**, 59-63.
- RUBINSTEIN, M. (1991). Options for the Undecided. *Risk*, **4**.
- RUBINSTEIN, M. (1994). Return to Oz. *Risk Magazine*, **7**.
- SHREVE, S. & VECER, J. (2000). Options on a Traded Account: Vacation Calls, Vacation Puts & Passport Options. *Finance & Stochastics*, **4**, 255-274.
- SCHRODER, M. (2000). On the Valuation of Paris Options: Foundational Results. *Universitat Mannheim Working Paper*.
- TOPPER, J. (2003). A Finite Element Implementation of Passport Options. *University of Oxford Working Paper*.
- VORST, A. & CHEUK, T. (1994). Lookback Options and the Observation frequency: A Binomial Approach. *Working Paper, University of Rotterdam*.
- VORST, A. (1999). Parisian Option Valuation. *Derivatives Week*, **8** 6-7 .
- WILMOTT, P. (2002). Cliquet Options & Volatility Models. *Wilmott Magazine*.
- WYSTUP, U., SCHMOCK, U. & SHREVE, S. (2001). Dealing With Dangerous Digitals. *Risk*.