LE TABOU DE L'EXPONENTIELLE

Arthur Charpentier
Professeur, Université du Québec à Montréal

Pour Carl Sagan, « if you understand exponentials, the key to many of the secrets of the universe is in your hand *». Mais tout le monde ne semble pas prêt à percer les secrets de l'univers. Ainsi, mi-novembre 2021, plus de 18 mois après le début de pandémie de SRAS-Covid-19, le ministre des Solidarités et de la Santé affirmait : « la circulation du virus s'est accélérée depuis maintenant quelques semaines, de l'ordre de 30 % à 40 % d'augmentation par semaine. Nous ne sommes pas encore dans une phase dite exponentielle » (1). Comme une augmentation à taux constant est précisément la définition d'une « croissance exponentielle », on peut s'interroger sur cette affirmation, qui révèle soit une lacune de numératie de nos dirigeants, soit un élément de langage, le mot « exponentiel » devenant un mot tabou, qu'il ne faudrait pas mentionner ?*

La proportionnalité et la croissance linéaire

Un aspect central des mathématiques enseignées au primaire et au secondaire est la notion de proportionnalité, observée en géométrie avec le théorème de Thalès et que l'on retrouvera en arithmétique avec la « règle de trois ». Comme le raconte la légende, au VIe siècle avant notre ère, Thalès de Milet voulait déterminer la hauteur d'une grande pyramide, et il eut l'idée d'utiliser la longueur des ombres, et la proportionnalité des figures géométriques. Si un bâton de 2 mètres, planté dans le sable a une ombre qui se projette sur 3 mètres, un arbre de 6 mètres aura une ombre de 9 mètres ; et inversement, si l'ombre de la pyramide fait 90 mètres, c'est que la pyramide fait 60 mètres de haut. C'est la base de la proportionnalité, et de la croissante linéaire.

On retrouve ce concept par exemple en physique, quand un corps se déplace à vitesse constante : en doublant la distance à parcourir, on va doubler le temps de trajet. Cette linéarité est importante, et heuristiquement, elle sert de base à de nombreuses réflexions que l'on peut avoir quand on cherche à extrapoler. C'est cette idée qui sert de base pour le calcul des provisions pour sinistres à payer : en supposant que la cadence de paiement reste inchangée, un principe de proportionnalité permet d'extrapoler les paiements futurs. Autrement dit, quand une grandeur croît de manière linéaire, $y(t) = at$, pour un paramètre a positive. Dans ce cas, $dy(t)/dt$ est constante, et c'est cette propriété qui va disparaître quand on aura une croissance exponentielle.

La légende de l'échiquier, des feuilles pliées et des nénuphars

Selon la légende, un roi perse (ou indien, selon la source) avait promis d'offrir à un de ses ministres tout ce qu'il voudrait, et ce dernier avait demandé à son roi de lui donner des grains de blé, en respectant un protocole précis : le roi (ou son intendant) devrait déposer un grain de blé sur la première case d'un échiquier, deux sur la seconde, quatre sur la troisième, en doublant de case en case, jusqu'à la soixante-quatrième. Après s'être moqué de son ministre (la demande semblant relativement modeste), le roi demande à ses comptables de faire les calculs. Ses derniers se rendent compte que tous les grains dans tous les greniers du monde ne devraient pas suffire. Dans une des légendes, le roi céda son trône à son ministre, afin de récompenser sa sagesse. Au IXe siècle, Thābit ibn Qurra, qui s'était interrogé sur l'existence de l'infini, avait parlé de « suite duplicative », alors que Pierre de Fermat, au XVIIe siècle, parlait de « progression double » pour décrire ce problème. Le nombre de grains sur la case n est 2^{n-1}, de telle sorte que la somme totale des grains sur les n premières cases est $2^n - 1$. Soit, au total 18 446 744 073 709 551 615 grains quand n vaut 64... ou un peu plus de 500 milliards de tonnes de blé (soit mille fois la production annuelle de blé dans le monde).

Une autre histoire en lien avec cette légende de l'échiquier est celle de la feuille de papier que l'on plie en deux, puis que l'on plie à nouveau en deux, etc. Si on part d'une feuille de papier standard (d'un dixième de millimètre d'épaisseur), l'épaisseur double à chaque pliage. En une cinquantaine de pliages (si on oublie un instant les difficultés physiques, qui font qu'au bout d'une dizaine de pliages, nous n'avons plus assez de force dans notre pouce pour plier la feuille), l'épaisseur est de 2^{50} dixièmes de millimètre, soit 112 589 991 kilomètres (un peu moins que la distance de la Terre au Soleil).

Finalement, on peut aussi mentionner la fameuse énigme du nénuphar : « Un nénuphar dans un étang double de taille chaque jour. Il recouvre la totalité de l'étang en un mois (30 jours). Quel jour avait-il couvert la moitié de l'étang ? » On parlera d'énigme car la réponse intuitive, 15 jours (la moitié du temps pour la moitié de la surface), n'est pas valide : comme la surface double tous les jours, il faudra 29 jours pour couvrir la première moitié de l'étang, et juste un jour pour couvrir la seconde moitié.

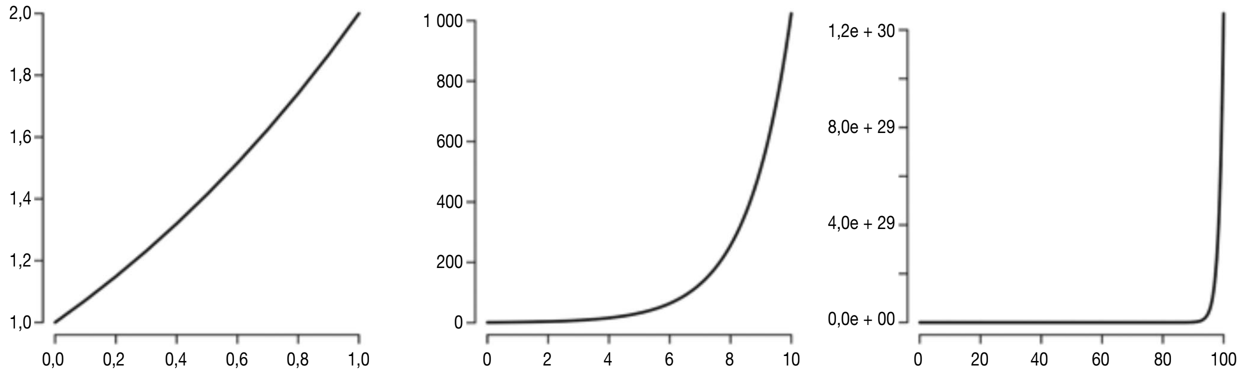
Toutes ces légendes racontent la même histoire, celle d'une croissance dite exponentielle, au sens où $y(t) = a^t$ (à ne pas confondre (2) avec $y(t) = t^a$ qui correspondrait à une croissance « en fonction puissance », ou « polynomiale », par exemple $y(t) = t^2$). On notera parfois $y(t) = \exp(\alpha t)$ où α est le logarithme de a.

Dessiner une exponentielle

Les exponentielles sont une forme un peu étonnante, dépendant de l'échelle de temps (ou le pas de temps) que l'on considère, comme sur la figure 1 (voir p. 119), $y(t) = 2^t$, correspondant au nombre de grains, comme dans la légende de l'échiquier.

La figure 1 représente ce qui se passe avec le jeu de l'échiquier, où le nombre de grain double à chaque étape. La courbe de gauche correspond à un échiquier avec peu de cases, avec une croissance très lente, presque linéaire. La courbe de droite correspondrait à un échiquier avec 100 cases, lorsque $y(t)$ devient « infiniment grand ». En effet, en notant que $2^{10} = 1{,}024$, on peut dire que $y(t) = 2^t \approx 1\,000^{t/10}$, autrement dit, en 10 étapes (la dixième case sur

Figure 1 - Croissance exponentielle $y(t) = 2^t$, avec différentes échelles de temps



Source : auteur.

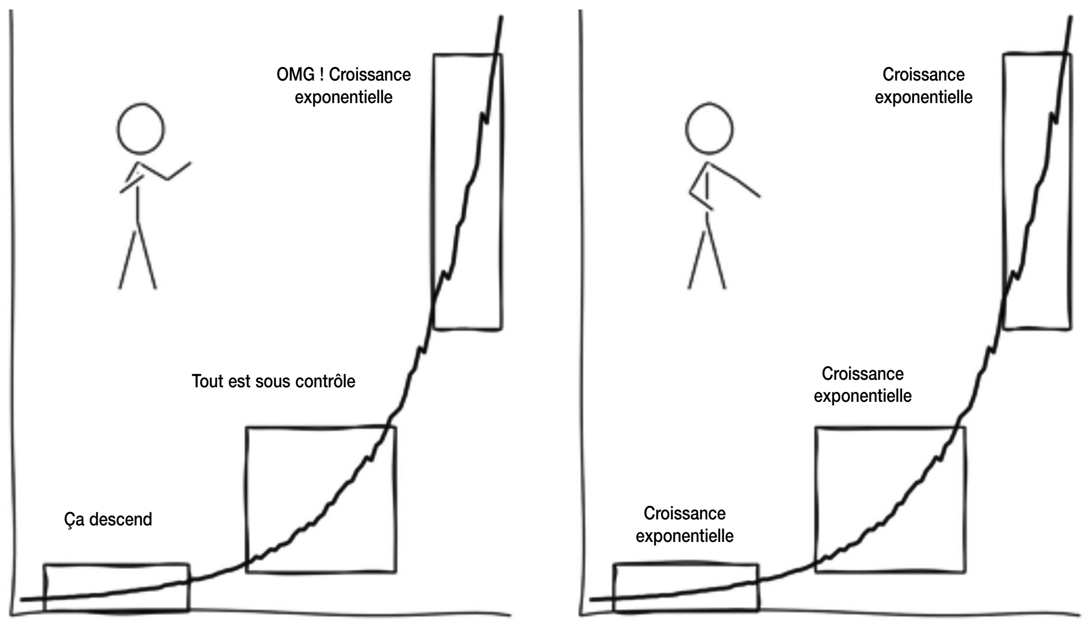
l'échiquier), on a 1 000 grains, 1 000 000 grains sur la vingtième, 1 000 000 000 sur la trentième, etc. On pourrait presque dire que l'écriture du nombre (dans la base 10 classique, avec les 10 chiffres usuels, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), la taille du nombre croît de manière linéaire. Sur la courbe de droite, on a l'impression que le nombre de grains « explose » à partir de 90, mais c'est juste que $y(100) \approx 1\ 000 \times y(90)$, et effectivement, la valeur en 90 est mille fois plus petite que celle en 100.

Mais la représentation la plus intéressante, la plus classique, est probablement celle au centre de la figure 1, on a l'illusion qu'il y a trois phases dans la croissance géométrique :

- une partie très plate, au début (disons entre 0 et 4) ;
- une augmentation raisonnable (entre 4 et 8) ;
- une augmentation brutale entre (8 et 10).

C'est cette idée qui a circulé ces derniers mois sur les réseaux sociaux (3), reprise dans la figure 2.

Figure 2 - A droite, le mathématicien face à une croissance exponentielle d'un phénomène, et à gauche, l'homme politique face à la même courbe



Source : Jens von Bergmann (4).

L'exponentielle donne l'illusion d'une rupture de tendance, mais formellement, la croissance est toujours « exponentielle ». Cela s'explique simplement en notant que l'exponentielle est solution d'une équation différentielle de la forme $dy(t)/dt = ay(t)$, autrement dit la pente, $dy(t)/dt$, est proportionnelle à $y(t)$: la croissance est donc effectivement faible au début (car $y(t)$ est faible) et bien plus conséquente ensuite (car $y(t)$ est plus importante).

Les exponentielles et l'actualisation financière

La grande différence entre les modèles linéaires [$y(t+1) - y(t)$ constants, soit $y(t) = at$] et les modèles multiplicatifs [$y(t+1)/y(t)$ constant, soit $y(t) = a^t$], entre les droites et les exponentielles, c'est que dans un cas, la variation absolue est constante, et pour l'autre, c'est la variation relative. Ceci donne des paradoxes bien connus. Par exemple une baisse de 20 % suivie d'une hausse de 20 % ne permet pas de revenir au point de départ. C'est d'ailleurs une identité dite remarquable, puisque $(1 - r)(1 + r) = 1 - r^2 \neq 1$. C'est la même logique que l'on retrouve dans les intérêts composés, puisque $(1 + r)(1 + r) - 1 = 2r + r^2 \neq 2r$ (le rendement est « un peu » plus grand que deux fois). Etrangement, c'est le cumul de toutes ces petites quantités, négligeables au premier ordre, qui semble perdre toute raison à force de se cumuler.

Car lorsque l'on compose les intérêts, on obtient qu'en plaçant un capital C sur un produit financier rapportant un taux r tous les ans, la richesse au bout de t années croît exponentiellement vite avec le temps, puisque $y(t) = C(1 + r)^t$, tel que l'avait décrit Fibonacci, dans le *Liber Abaci*, publié en 1202, comme le rappelait Charpentier [2016]. Cette croissance exponentielle avait été soulignée en 1772 par Richard Price, qui essaya d'imaginer ce qu'aurait rapporté le placement d'un simple penny dans une banque (virtuelle) à la naissance de Jésus-Christ, « *one penny, put out at our Saviour's birth to 5 per cent, compound interest, would, before this time, have increased to a greater sum, than would be contained in a hundred and fifty millions of earths, all solid gold* ». Il n'est pas certain que donner comme valeur 150 millions de fois le volume de la Terre en or donne une bonne indication, mais rappelons que si r vaut 5 %, $(1 + r)^{100}$ vaut un peu plus de 100, $(1 + r)^{500}$ vaut un peu plus de 40 milliards, et $(1 + r)^{1772}$ est un nombre à 28 chiffres.

Ces nombres qui peuvent donner le tournis (surtout quand on parle de somme financière) ne sont pas sans faire penser au mécanisme mis en place par Charles Ponzi, un peu avant 1920 (et qui aura inspiré bon nombre d'investisseurs, comme Bernard Madoff) : il proposait d'offrir un rendement de 50 % en trois mois ! Supposons qu'il arrive à trouver 10 investisseurs prêts à investir 100 $ lors du lancement du produit. Trois mois après, il doit leur verser 150 $, ce qui revient à trouver 15 investisseurs prêts à investir 100 $. Six mois après, comme il devra leur verser 225 $, il faudra trouver 23 investisseurs prêts à investir 100 $, etc. Au bout de cinq ans, il lui faut un peu plus de 330 000 investisseurs. Au bout de dix ans, toute la terre doit avoir investi dans le placement offert par Charles Ponzi ! Autrement dit, le nombre d'investisseurs doit croître aussi vite que le capital, c'est-à-dire exponentiellement vite ! Ce besoin de doubler le nombre d'investisseurs quasiment tous les six mois correspond à un système pyramidal (même si une pyramide correspondrait davantage à une croissance linéaire). Ce doublement de la taille de la population des investisseurs n'est pas sans faire penser aux premiers modèles démographiques.

Malthus et les modèles démographiques

A la fin du XVIII^e siècle, Malthus propose un modèle de croissance exponentielle de la population, qui a marqué les mémoires, même si John Graunt, à qui on doit les premières tables de mortalité, puis William Petty avaient envisagé la question un siècle plus tôt, et repris par Léonard Euler, en 1748, qui se demandait s'il était possible d'avoir eu une croissance exponentielle de la population depuis Adam et Eve, ou plutôt en partant de six êtres humains ayant commencé à repeupler la terre après le Déluge. Voltaire aura été critique de ce modèle, soulignant qu'« on ne propage point en progression géométrique. Tous les calculs qu'on a faits sur cette prétendue multiplication sont des chimères absurdes. »

Ce qui est (mathématiquement) intéressant, c'est que les démographes ont rapidement proposé une alternative intéressante à la croissance exponentielle, sous l'impulsion de Pierre-François Verhulst, vers 1840, que l'on peut résumer de la manière suivante, en considérant un système dynamique, décrit par une équation différentielle :

- si $dy(t)/dt$ est constante, on a une croissance linéaire, caractérisée par une relation de proportionnalité dont nous parlions en introduction, $[y(t+h) - y(t)$ sera proportionnelle à $h]$;

- si $dy(t)/dt$ est proportionnelle à $y(t)$, on a une croissance exponentielle [ou plus généralement si $dy(t)/dt = a + by(t)$] ;

- si $dy(t)/dt$ est quadratique en $y(t)$, autrement dit si $dy(t)/dt = a + by(t) + cy(t)^2$, on peut obtenir le modèle logistique proposé par Pierre-François Verhulst que l'on retrouvera dans les modèles de démographie, et plus généralement de dynamique des populations et de modélisation des pandémies.

La croissance suivant un modèle logistique donne une croissance ressemblant beaucoup à une exponentielle, au début, avant d'atteindre un point d'inflexion, avant de ralentir et de se stabiliser. En réalité, le modèle logistique de Verhulst [formellement $dy(t)/dt = ay(t)[b - y(t)]$ avait été proposé par Daniel Bernoulli vers 1750 pour modéliser la dynamique d'une épidémie de variole. On revient donc au point de départ, avec un lien entre les exponentielles et les pandémies...

L'explosion exponentielle dans une pandémie

Charpentier et Barry [2020] rappelaient que dans les modèles classiques de pandémie, le nombre de personnes infectées augmentait exponentiellement vite, au commencement, le facteur d'augmentation étant lié au nombre de contacts potentiels d'un individu contagieux. S'il est difficile d'arrêter une croissance exponentielle, $y(t) = a^t$, Ghys [2020] rappelait qu'il est possible de la ralentir très fortement en forçant la distanciation sociale, pour avoir $y(t) = b^t$, avec $b<a$, où $y(t)$ est le nombre de personnes infectées (et contagieuses). Et comme le disait Stevens [2020], « *that is math, not prophecy. The spread can be slowed, public health professionals say, if people practice "social distancing" by avoiding public spaces and generally limiting their movement* ». Et, presque paradoxalement, un petit changement peut avoir des conséquences majeures, précisément à cause de cette amplification « exponentielle ». C'est la vision optimiste que proposait Young [2021] en écrivant « *the infectious nature of a virus means that a tiny bad decision can cause exponential harm, but also that a tiny wise decision can do exponential good* ».

Notes

1. *Cité dans* Ouest-France *[2021].*

2. *En fait, la croissance exponentielle fait aussi peur aux informaticiens : un algorithme qui se résout de manière linéaire en fonction du temps (ou du nombre de calculs à effectuer, comme trouver le plus grand élément parmi* t*), quadratique (comme ordonner une liste de* t *éléments), ou plus généralement polynomial (comme multiplier des matrices* t x t*) est considéré comme « simple ». Un problème qui se résout en un nombre d'étapes qui croît de manière exponentielle (ou plus long encore) sera bien plus difficile (voir la notion de «* NP-hard *» (NP signifiant «* non-deterministic polynomial *»), comme trouver le chemin le plus court passant par* t *villes. Et si la croissance exponentielle est (très) rapide, la « décroissance exponentielle » est elle*

aussi très rapide. Aussi, en probabilité, si $P[X > t] = a^{-t}$*, correspondant à une décroissance exponentielle, on parlera de « queues fines » contrairement à une décroissance polynomiale,* $P[X > t] = t^{-a}$*, qui correspond à des queues de type Pareto, et donc des « risques (potentiellement) extrêmes ».*

3. De manière moins visuelle, Meyer-Vacherand [2020] ou Hernandez [2020] reviennent sur les difficultés de communiquer sur une dynamique exponentielle.

4. Le code est en ligne sur https://github.com/mountain Math/xkcd_exponential*, inspiré du style du webcomic xkcd de Randall Munroe, traduit par l'auteur.*

Bibliographie

BERNOULLI D., « Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir », *Mémoires de mathématiques et de physique, Histoire de l'académie royale des sciences – année MDCCLX*, 1765, pp. 1-45. Disponible sur gallica.bnf.fr

CHARPENTIER A., « Fibonacci, les lapins, le nombre d'or et les calculs actuariels », *Risques*, n° 106, 2016, pp. 110-114.

CHARPENTIER A. ; BARRY L., « Concilier risques collectifs et décisions individuelles », *Risques*, n° 123, 2020, pp. 122-128.

FEERTCHAK A., « Covid-19 : la trajectoire de l'épidémie est-elle exponentielle dans le monde ? », *Le Figaro*, 14 avril 2021. *https://www.lefigaro.fr/sciences/covid-19-la-trajectoire-de-l-epidemie-est-elle-exponentielle-dans-le-monde- 20210413*

GHYS E., « Epidémies : aplatir les exponentielles », *Le Monde*, 25 mars 2020. *https://www.lemonde.fr/sciences/article/2020/03/25/epidemies-aplatir-les-exponentielles_6034339_1650684.html*

HERNANDEZ J., « Comment mieux communiquer sur la dynamique exponentielle de la pandémie ? », *Futura Santé*, 24 décembre 2020. *https://www.futura-sciences.com/sante/actualites/pandemie-mieux-communiquer-dynamique- exponentielle-pandemie-84859/*

MEYER-VACHERAND E., « Covid-19 : comprendre la croissance exponentielle d'une pandémie, un défi cognitif pour la population », *Le Monde*, 8 juillet 2020. *https://www.lemonde.fr/sciences/article/2020/07/08/covid-19-comprendre-la-croissance-exponentielle-d-une-pandemie-un-defi-cognitif-pour-la-population_6045576_1650684.html*

RICHARD PH. ; VERNAY ST., « Covid-19. Olivier Véran : « Nous avons retardé cette cinquième vague », *Ouest-France*, 16 novembre 2021. *https://bit.ly/3IGgK9t*

PRICE R., *An Appeal to the Public on the Subject of National Debt*, London, 1772.

SAGAN C., *Billions and Billions: Thoughts on Life and Death at the Brink of the Millennium*, Headline Publishing, 1997.

STEVENS H., "Why Outbreaks like Coronavirus Spread Exponentially, and how to 'Flatten the Curve'", *The Washington Post*, 14 mars 2020. *https://www.washingtonpost.com/graphics/2020/world/corona-simulator/*

YOUNG E., "I Canceled My Birthday Party Because of Omicron", *The Atlantic*, 17 décembre 2021.