

# Copules et risques corrélés

Arthur Charpentier

Université Rennes 1

[arthur.charpentier@univ-rennes1.fr](mailto:arthur.charpentier@univ-rennes1.fr)

<http://freakonometrics.blog.free.fr/>



Journées d'Études Statistique, Luminy, Novembre 2010.

“*having worked out the basic properties of these functions, I wrote about them to Fréchet, in English. He asked me to write a note about them in French. While witting this, I decided I needed a name for those functions. Knowing the word copula as a grammatical term for a word or expression that links a subject and a predicate, I felt that this would make an appropriate name for a function that links a multidimensional distribution to its one-dimensional margins, and used it as such.*” (Abe Sklar en 1959, [61], rapporté par [49]).

... mais la fonction copule apparaît (presque) dans *Masstabinvariante Korrelationstheorie* (Hoeffding, 1940).

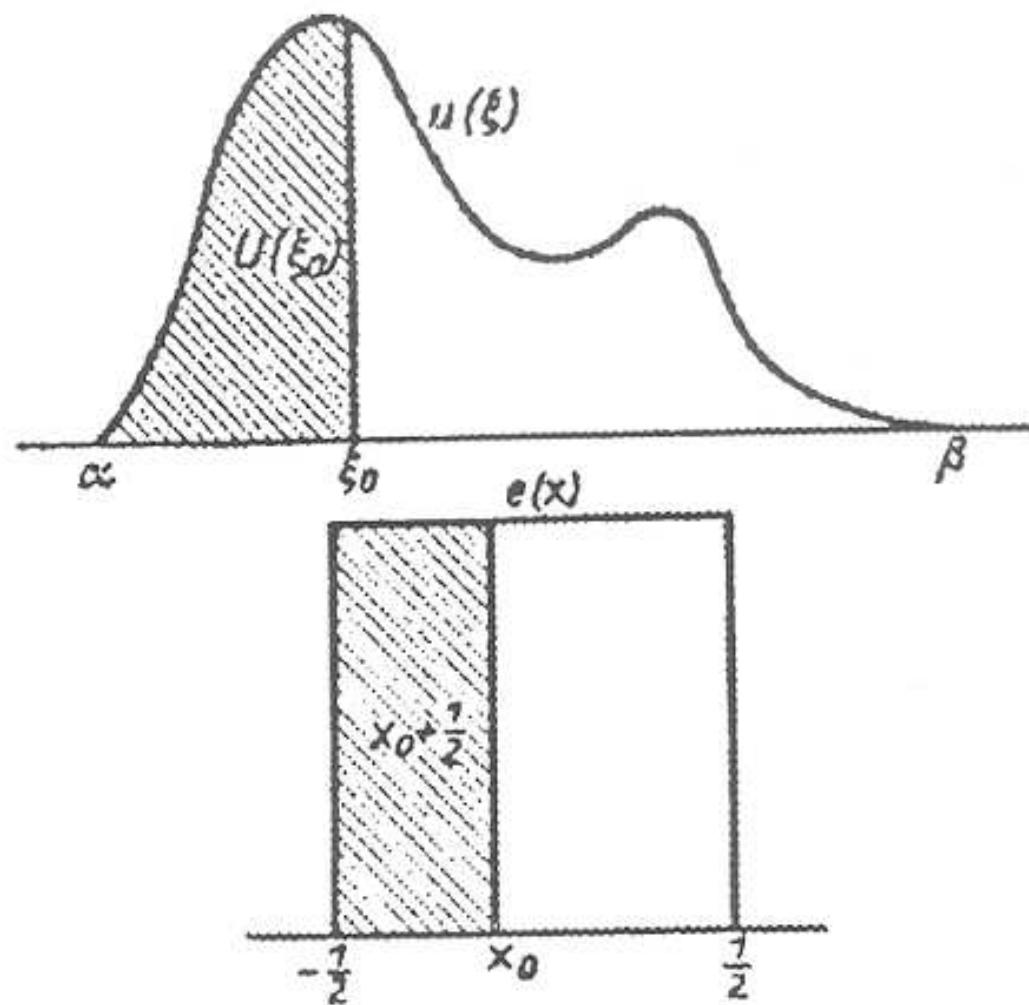


FIGURE 1.

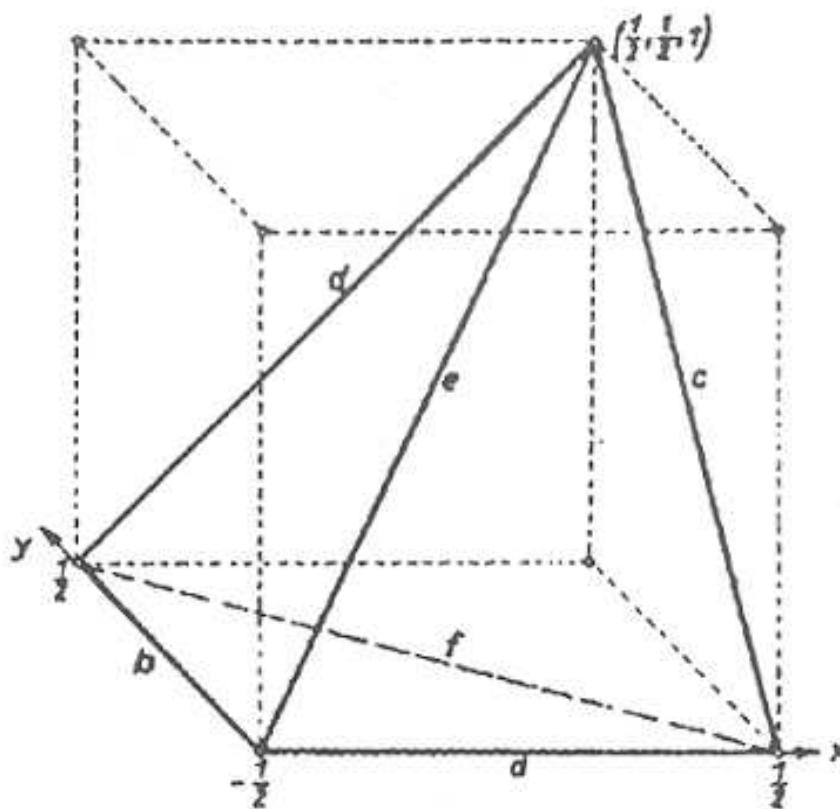


FIGURE 2.

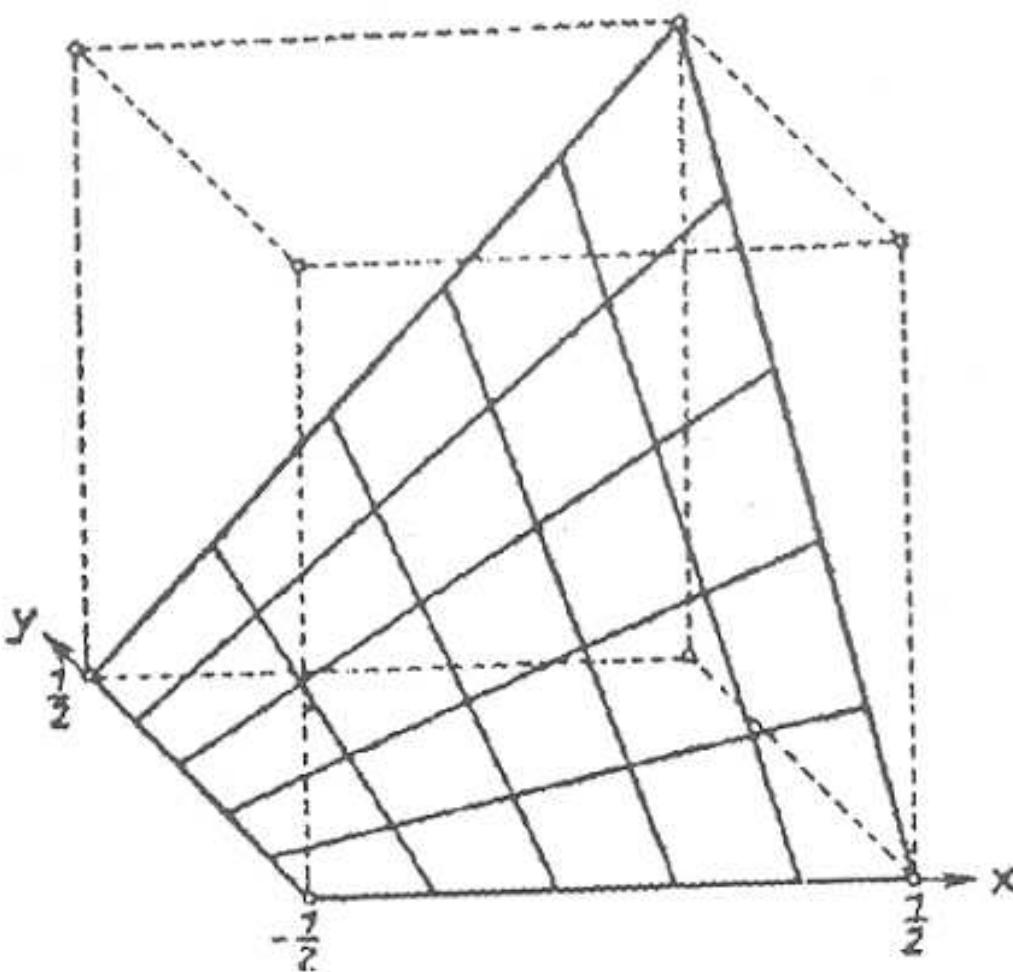


FIGURE 3.

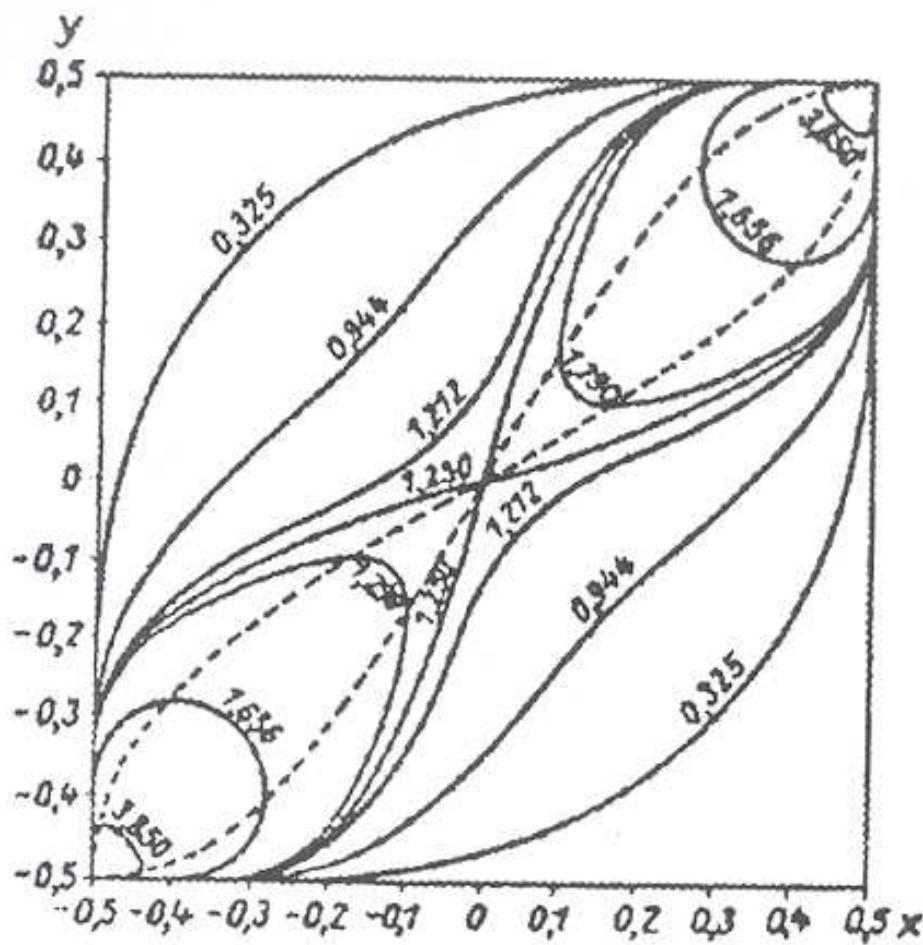


FIGURE 5.

# 1 Introduction

## 1.1 De l'indépendance à la dépendance

Bayes, [7], “*events are independent when the happening of any one of the does neither increase nor abate the probability of the rest*”.

Laplace, [40], “*si les évènements sont indépendants les uns des autres, la probabilité de l'existence de leur ensemble est le produit de leur probabilités particulières*”.

Deux évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A, B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Or  $\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)$ , donc l'indépendance se caractérise par

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Par opposition, on dira que deux évènements sont **dépendants** si

$$\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A, B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si,  $\forall \mathcal{E} = \mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y$ ,

$$\mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{E}_X, Y \in \mathcal{E}_Y) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{E}_X) \times \mathbb{P}(Y \in \mathcal{E}_Y).$$

En particulier, si  $\mathcal{E} = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}((X, Y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y]) = F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x) \times \mathbb{P}(Y \leq y) = F_X(x) \times F_Y(y).$$

Dans le cas des variables discrètes, en considérant  $\mathcal{E} = \{(x, y)\}$ , l'indépendance se caractérise par

$$\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = f(x, y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

Cette dernière relation se généralise aux densités pour des variables continues.

## 1.2 Le vecteur Gaussien

Mardia [43], “*in multivariate analysis, the only distribution leading to tractable inference is the multivariate normal*”.

### Définition1

En dimension  $d$ ,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  admet une distribution **Gaussienne** si et seulement si, pour tout  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{a}'\mathbf{X}$  suit une loi normale (univariée).

Un vecteur Gaussien est alors caractérisé par deux paramètres,  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_i]_{i=1,\dots,d}$  (i.e. l'espérance,  $\mathbb{E}(\mathbf{X})$ ) et  $\boldsymbol{\Sigma} = [\Sigma_{i,j}]_{i,j=1,\dots,d}$  (i.e. la variance  $\text{Var}(\mathbf{X})$ ).

Les **lois marginales** d'un vecteur Gaussien sont également Gaussienne,  $\mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_{i,i})$ .

La **structure de dépendance** est caractérisée par une matrice de corrélation,  $\mathbf{R} = [r_{i,j}]_{i,j=1,\dots,d}$ , où  $\Sigma_{i,j} = r_{i,j} \sqrt{\Sigma_{i,i}\Sigma_{j,j}}$ , en notant que  $r_{i,i} = 1$ .

En utilisant la décomposition de Cholesky, si  $\mathbf{X}^\perp = (X_1^\perp, \dots, X_d^\perp)$  est un vecteur Gaussien centré réduit à composantes indépendantes, alors  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{X}^\perp$  est un vecteur Gaussien  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\mathbf{A}')$ , où  $\mathbf{A}$  est une matrice triangulaire inférieure, décomposition de Cholesky de la matrice  $\boldsymbol{\Sigma}$  (i.e.  $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \boldsymbol{\Sigma}$ ).

On retrouve une propriété énoncée par Rosenblatt, [55]),

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_d) &= f_1(x_1) \cdot f_{2|1}(x_2|x_1) \cdot f_{3|2,1}(x_3|x_2, x_1) \cdots \\ &\quad \cdots f_{d|d-1, \dots, 2,1}(x_d|x_{d-1}, \dots, x_2, x_1). \end{aligned}$$

## Remarque 1

Les copules seront présentées ici afin d'étudier les risques multiples, i.e. des vecteurs aléatoires  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ .

Il est possible de les utiliser pour étudier des séries temporelles, ou des processus,  $(X_t)$ , caractérisé par les lois fini-dimensionnelle  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_d})$ , où  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_d$ .

## 2 Concepts associés aux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$

La loi d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  est caractérisée par

- sa **fonction de répartition**,

$$\textcolor{blue}{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d), \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

- sa **densité** (si elle existe)

$$\textcolor{blue}{f}(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d) = \frac{\partial^d \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}$$

$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ , ou sa **fonction de probabilité**,

$$f(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d).$$

- sa **fonction génératrice**

$$\textcolor{blue}{\psi}(\mathbf{z}) = \mathbb{E}\left(e^{\mathbf{z}' \mathbf{X}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{z_1 X_1 + \dots + z_d X_d}\right), \forall \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d,$$

dès lors que l'espérance existe.

## Remarque 2

Sous des hypothèses de dérivabilités, en dimension  $d = 1$ , les moments de  $X$  peuvent être reliées aux dérivées de la fonction génératrice en 0, i.e.

$$\mathbb{E}(X^n) = \left. \frac{d^n \psi(z)}{dz^n} \right|_{z=0}.$$

On peut obtenir une relation similaire en dimension  $d \geq 2$ , en introduisant les co-moments,

$$\mathbb{E}(X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_d^{n_d}) = \left. \frac{\partial^n \psi(z_1, \dots, z_d)}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2} \cdots \partial z_d^{n_d}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}},$$

où  $n = n_1 + \cdots + n_d$ . Les premiers moments sont donc

- un vecteur de taille  $d$  : l'espérance,  $[\mathbb{E}(X_i)]_{i=1, \dots, d}$ ,
- une matrice  $d \times d$  : la variance,  $[\mathbb{E}(X_i X_j)]_{i,j=1, \dots, d}$ ,
- un tableau  $d \times d \times d$  : la skewness  $[\mathbb{E}(X_i X_j X_k)]_{i,j,k=1, \dots, d}$ , etc.

On note que travailler sur les moments d'ordre supérieur à 2 en dimension  $d$  grande va rapidement être compliqué.

## 2.1 Classes de Fréchet

### Définition2

Soient  $F_1, \dots, F_d$   $d$  fonctions de répartition  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . On notera  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$  l'ensemble des fonctions de répartition  $\mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  dont les lois marginales sont  $F_1, \dots, F_d$ .

Comme l'ont montré Fréchet et Hoeffding, les classes de Fréchet sont bornées,

### Proposition1

Pour tout  $F \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,

$$F^-(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{x}) \leq F^+(\mathbf{x})$$

où

$$F^+(\mathbf{x}) = \min\{F_i(x_i), i = 1, \dots, d\},$$

et

$$F^-(\mathbf{x}) = \max\{0, F_1(x_1) + \dots + F_d(x_d) - (d - 1)\}.$$

On notera que  $F^+ \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ , alors que généralement  $F^- \notin \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ .

### Remarque3

Il est possible que  $F^- \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$  alors que  $d > 2$ . Une condition nécessaire et suffisante est d'avoir soit

$$\sum_{i=1}^d F_i(x_i) \leq 1, \forall 0 < F_i(x_i) < 1; \text{ où } i = 1, \dots, d,$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^d F_i(x_i) \geq d - 1, \forall 0 < F_i(x_i) < 1; \text{ où } i = 1, \dots, d.$$

Mais si  $F^- \notin \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ ,  $F^-$  n'en est pas moins une borne atteignable.

On peut aussi s'intéresser aux classes  $\mathcal{F}(F_{1,\dots,k}, F_{k+1,\dots,d})$ .

En dimension  $d = 3$ ,  $\mathcal{F}(F_{1,2}, F_3)$ , cf. [30].

Avec quelques hypothèses de compatibilité, on peut considérer,  
 $\mathcal{F}(F_{1,\dots,k}, F_{k,\dots,d})$ . En dimension  $d = 3$ ,  $\mathcal{F}(F_{1,2}, F_{2,3})$ .

Cette classe est équivalente à  $\mathcal{F}(F_{1|2}, F_{3|2}, F_2)$ .

### Remarque 1

Cette classe n'est pas vide : elle contient le vecteur obtenu en supposant  $X_1$  et  $X_3$  indépendants, conditionnellement à  $X_2$ , i.e.

$$F(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{x_2} F_{1|2}(u) F_{3|2}(u) dF_2(u).$$

Classes définies par les lois des paires : en dimension 3,  $\mathcal{F}(F_{12}, F_{23}, F_{13})$   
(moyennant quelques hypothèses de compatibilité).

## Exemple 1

Soient  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  un vecteur Gaussien centré réduit dont les corrélations croisées sont  $r + \varepsilon$ , où  $r \in [-1, 1]$  et  $\varepsilon \in [0, 1 - r]$ , et  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  dont les lois marginales sont des lois  $\mathcal{N}(0, 1)$ , et telle que

$$\mathbb{P}(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, Y_3 \leq y_3) = \Phi(y_1)\Phi(y_2)\Phi(y_3)[1 + \theta(1 - \Phi(y_1))(1 - \Phi(y_2))(1 - \Phi(y_3))]$$

On supposera les vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  indépendants. Alors

$$\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3) = \sqrt{\frac{r}{r + \varepsilon}}(X_1, X_2, X_3) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{r + \varepsilon}}(Y_1, Y_2, Y_3)$$

est un vecteur dont les couples  $(X_i, X_j)$  suivent des lois Gaussiennes bivariée de corrélation  $r$  ([37] ou [42]).

## 2.2 Symétrie, échangeabilité et indépendance conditionnelle

Un vecteur aléatoire est dit symétrique si la loi jointe est invariante par permutation des composantes,

### Définition3

Soit  $\mathcal{S}(n)$  la classe des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ . Si  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  est un vecteur tel que

$$(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_1, \dots, X_n), \forall \sigma \in \mathcal{S}(n),$$

alors  $\mathbf{X}$  sera dit *n*-échangeable, ou symétrique.

De manière équivalente,  $\mathbf{X}$  sera dit symétrique si

$$H\mathbf{X} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbf{X}, \forall H \in \mathcal{P}(n),$$

où  $\mathcal{P}(n)$  désigne l'ensemble des matrices  $n \times n$  de permutation.

L'échangeabilité est aussi appelé interchangeabilité. [6] disait des risques échangeables qu'ils étaient “*indistinguishables*”.

## Définition4

Un suite finie de variables aléatoires  $\{X_1, \dots, X_n\}$  est dite **échangeable** si

$$(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

pour tout permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ . Plus généralement, une suite infinie  $\{X_1, X_2, \dots\}$  de variables aléatoires est dite échangeable si

$$(X_1, X_2, \dots) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots)$$

pour tout permutation finie  $\sigma$  de  $\mathbb{N}^*$  (i.e.  $\text{Card } \{i, \sigma(i) \neq i\} < \infty$ ).

## Définition5

Une suite  $n$ -échangeable  $(X_i)$  sera dite  **$m$ -extensible** (pour  $m > n$ ) si

$(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Z_1, \dots, Z_n)$  où  $(Z_i)$  est une suite de variables  $m$ -échangeable.

## Exemple2

Soit  $X_1, \dots, X_n$  une séries de variables aléatoires telles que

$$\text{Var}(X_i) = \sigma^2 \text{ et } \text{cov}(X_i, X_j) = \rho\sigma^2,$$

pour tout  $i = 1, \dots, n$ , et  $j \neq i$ . Alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{cov}(X_i, X_j) \\ &= n\sigma^2 + n(n-1)\rho\sigma^2, \end{aligned}$$

et de plus ;

$$\rho \geq -\frac{1}{n-1}.$$

$\implies$  l'échangeabilité implique une dépendance positive.

Théorème de de Finetti ([4]) : les mesures échangeables peuvent être écrites comme des mélanges de mesures produits : il existe  $\mathcal{S}$  telle que pour tout  $A_i$ ,

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n | \mathcal{S}) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1 | \mathcal{S}) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n | \mathcal{S}).$$

## Théorème1

Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite échangeable, alors il existe  $\Theta$  telle que, sachant  $\Theta$  les  $X_i$  sont indépendants.

## Corollaire1

Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite échangeable de variables suivant une loi de Bernoulli, et notons  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Alors la distribution de  $S_n$  est un mélange de lois binomiales, i.e. il existe une loi  $H$  définie sur  $[0, 1]$  telle que

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \int_0^1 \binom{n}{k} \omega^k (1 - \omega)^{n-k} dH(\omega).$$

## Exemple3

Survenance de catastrophes, cf. polycopié.

## 2.3 Lois sphériques et elliptiques

On peut aussi définir une invariance par rotations (centrées sur l'origine pour des vecteurs centrés).

### Définition6

On dira que  $\mathbf{X}$  a une distribution sphérique si

$$H\mathbf{X} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbf{X}, \forall H \in \mathcal{O}(n),$$

où  $\mathcal{O}(n)$  est l'ensemble des matrices  $n \times n$  orthogonales (i.e.  $H'H = \mathbb{I}$ ).

## Exemple4

La distribution  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I})$  est sphérique.

## Remarque2

Plusieurs caractérisations des distributions sphériques sont possibles (cf. [24]),

1.  $H\mathbf{X} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbf{X}$  pour tout  $H \in \mathcal{O}(n)$ ,
2. la fonction caractéristique de  $\mathbf{X}$  est de la forme  $\mathbb{E}(e^{it'\mathbf{X}}) : \mathbf{t} \mapsto g(\mathbf{t}'\mathbf{t})$ ,
3.  $\mathbf{X}$  admet la représentation  $\mathbf{X} \stackrel{\mathcal{L}}{=} R\mathbf{U}$  où  $R$  est une variable aléatoire positive, indépendante de  $\mathbf{U}$ , vecteur uniformément distribué sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ ,
4. pour tout  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{a}'\mathbf{X} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \|\mathbf{a}\| X_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

En reprenant la construction du vecteur Gaussien  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  à partir du vecteur Gaussien centré, à compostantes indépendantes,  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I})$ , on dira que  $\mathbf{X}$  a une distribution elliptique si  $\mathbf{X} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mu + A\mathbf{Y}$  où  $\mathbf{Y}$  a une distribution sphérique, où  $AA' = \Sigma$  : aussi,  $\mathbf{X}$  aura une **distribution elliptique** de paramètres  $\mu$ ,  $\Sigma = A'A$  et  $\phi$  (caractérisant la distribution sphérique sous-jacente).

Il existe là aussi plusieurs caractérisations de ces distributions sphériques, en

particulier,  $\mathbf{X}$  admet une représentation de la forme  $\mathbf{X} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mu + R A \mathbf{U}$  où  $R$  est une variable positive, indépendante de  $\mathbf{U}$  uniformément distribuée sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ , et  $A$  vérifie  $AA' = \Sigma$ .

### Exemple 5

La distribution  $t$  de Student, de paramètres  $\nu > 0$ ,  $\mu$  et  $\Sigma$ , est obtenue comme loi du vecteur  $\mu + A\sqrt{m}\mathbf{Z}/S$ , où  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I})$  et  $S \sim \chi^2(\nu)$  sont indépendant. La densité de la loi  $t$  de Student, de paramètres  $\nu$ ,  $\mu$  et  $\Sigma$ , est alors

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{\Gamma((n+m)/2)}{(\pi m)^{n/2} \Gamma(m/2)} |\Sigma|^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{m} (\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right)^{-(n+m)/2}$$

(pour reprendre les notations de [24]). Cette densité est représentée sur la Figure 1. Notons que si  $m = 1$ , on retrouve la loi de Cauchy multivariée. On notera que si  $\nu > 1$ ,  $\mu$  correspond à l'espérance de  $\mathbf{X}$ , et que si  $\nu > 2$ ,  $\frac{n}{n-2} \Sigma$  correspond à la matrice de variance-covariance de  $\mathbf{X}$ .

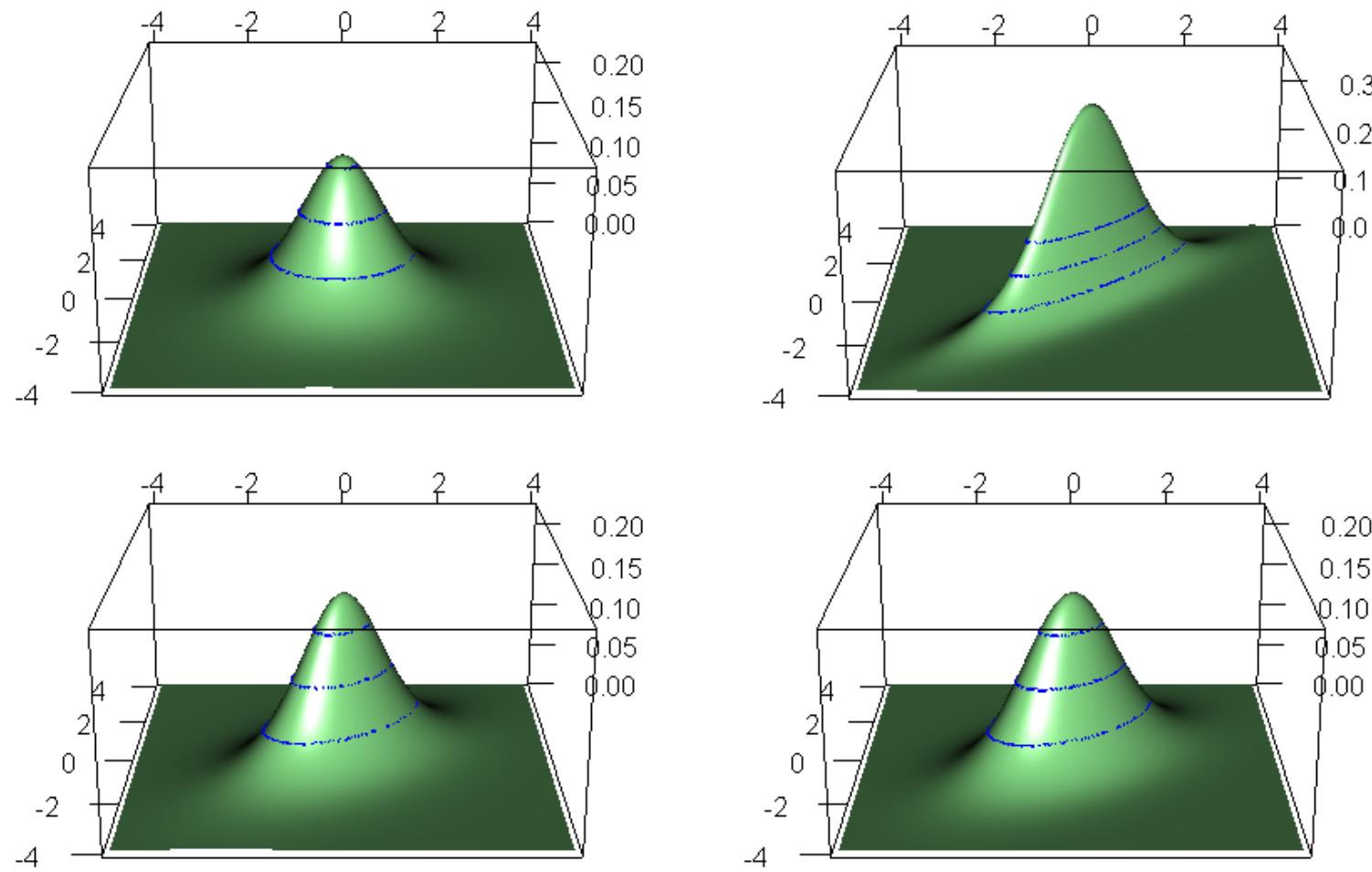


FIGURE 1 – Exemples de densités  $t$  de Student, avec en haut, de gauche à droite,  $(r = 0.1, \nu = 4)$  et  $(r = 0.9, \nu = 4)$ , et en bas  $(r = 0.5, \nu = 4)$  et  $(r = 0.5, \nu = 10)$ .

## 2.4 Modélisation des portefeuilles *homogènes* de crédit

cf. KMV(see [15]) ou CreditMetrics ([33]), modélisation des défauts joints dans un portefeuille d'émetteurs obligataires.

Considérons  $m$  émetteurs, que l'on suit sur un horizon temporel donné  $T$  (classiquement une année).

Soit  $Y_i$  l'indicateur du défaut de l'émetteur  $i$  à horizon  $T$ , i.e.  $Y_i = 1$  si l'entreprise  $i$  fait défaut avant la date  $T$ , et  $Y_i = 0$  sinon.

Dans les *modèles latents*, on suppose qu'il existe  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ , à marges continues et des seuils  $D_1, \dots, D_m$  (en dessous desquels les compagnies sont en faillite, et font défaut).

$Y_i = \mathbf{1}\{X_i \leq D_i\}$ , i.e. la probabilité de défaut pour l'émetteur  $i$  s'écrit

$$p_i = \mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i \leq D_i) = F_i(D_i), \text{ pour } i = 1, \dots, m.$$

Approche classique,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \text{ distribution Gaussienne} \\ \mathbf{X} \sim t_{\nu}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \text{ distribution Student } t \end{array} \right.$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}$  est une matrice de corrélation, avec une unique corrélation croisée  $\rho > 0$ , telle que  $\mathbf{X}$  soit échangeable. Les seuls sont fixés, et donc,  $\mathbf{Y}$  est échangeable.

Ces modèles de mélange ont été intensivement utilisés car ils permettent d'obtenir des modèles facilement interprétables.

Supposons que le vecteur des indicatrices de défaut  $\mathbf{Y}$  suit une mélange échangeable de Bernoulli, i.e. il existe  $\Theta$  à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que, conditionnellement à  $\Theta$  les variables  $Y_1, \dots, Y_m$  soient i.i.d., Bernoulli, de paramètre  $\Theta$ , i.e.

$$p = \mathbb{P}(\text{un défaut}) = \mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(\Theta)$$

$$p_k = \mathbb{P}(k \text{ défauts}) = \mathbb{P}(Y_{i_1} = 1, \dots, Y_{i_k} = 1) = \mathbb{E}(\Theta^k) = \int_0^1 q^k d\Pi(q),$$

où  $\Pi$  est la distribution de la variable de mélange  $\Theta$ . Afin de construire un modèle, plusieurs lois peuvent être considérées

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{loi Beta : } \pi(q) = \beta(\alpha, \beta)^{-1} q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1}, \alpha, \beta > 0. \\ \text{Probit-normal : } \Phi^{-1}(\Theta) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ \text{Logit-normal : } \log(\Theta / (1 - \Theta)) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \end{array} \right.$$

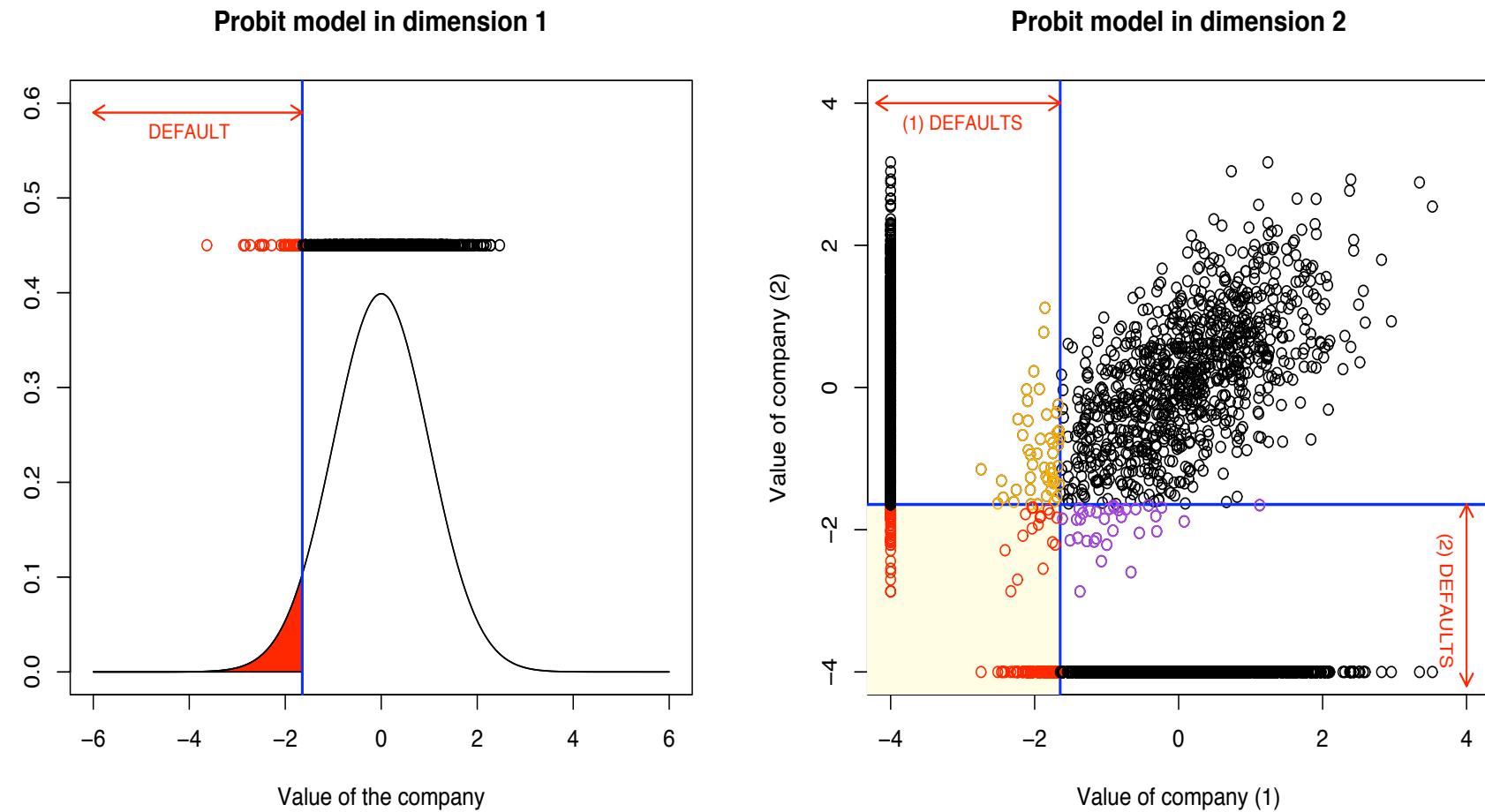


FIGURE 2 – Modélisation probit du risque de défaut.

### 3 Les copules

La notion de **copula** a été introduite par Sklar en 1959, motivé par les travaux de Fréchet dans les années 50.

Les copules sont aussi été appelées “**fonction de dépendance**” par Deheuvels en 1979 ([17]), ou “**représentation uniforme**” par Kimeldorf et Sampson en 1975 ([38]).

#### Remarque4

Les copules sont apparu chez Hoeffding, mais au lieu de considérer des lois uniformes sur  $[0, 1]$ , il considère des lois uniformes sur  $[-1/2, +1/2]$ .

## 3.1 Les copules en dimension 2

### Définition7

Une **copule**  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  est une fonction de répartition dont les lois marginales sont uniforme sur  $[0, 1]$ .

De manière équivalente, on a la caractérisation suivante

### Théorème2

Une copule  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  est une fonction qui vérifie les trois conditions suivantes

- $C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0$  pour tout  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ ,
- $C(u_1, 1) = u_1$  et  $C(1, u_2) = u_2$  pour tout  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ ,
- $C$  est une fonction 2-croissante, i.e. pour tout  $0 \leq u_i \leq v_i \leq 1$ ,

$$C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2) \geq 0.$$

Les deux premières conditions se traduisent graphiquement par les conditions de bords de la Figure 3,

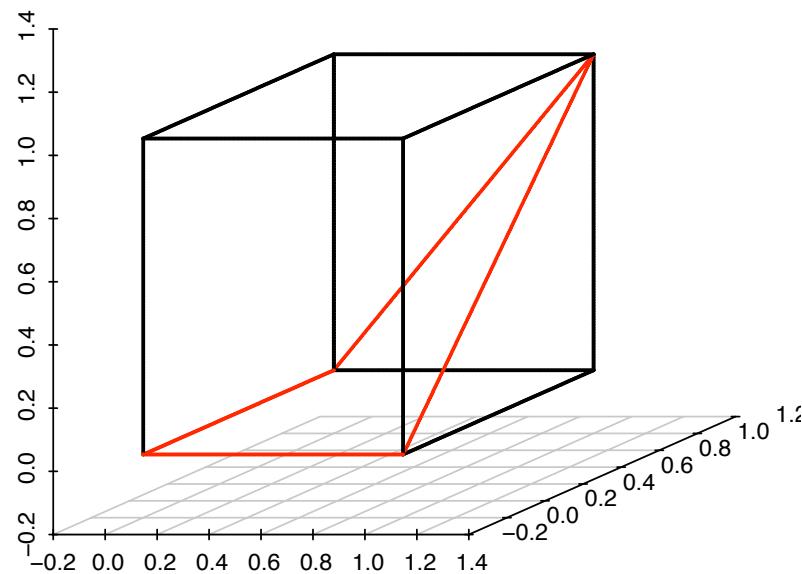
**Borders of the copula function**

FIGURE 3 – Conditions de bord d'une copule en dimension  $d = 2$ ,  $C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0$ ,  $C(u_1, 1) = u_1$  et  $C(1, u_2) = u_2$ .

Si  $C$  est la copule associée à un vecteur aléatoire  $(X_1, X_2)$ , alors  $C$  couple les fonctions de répartition, au sens où

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = C(\mathbb{P}(X_1 \leq x_1), \mathbb{P}(X_2 \leq x_2))$$

Il est aussi possible de *coupler* les fonctions de survie, au sens où il existe une copule  $C^*$  telle que

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = C^*(\mathbb{P}(X > x), \mathbb{P}(Y > y)).$$

On montre aisément que

$$C^*(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2).$$

## Définition8

La copule de survie  $C^*$  associée à la copule  $C$  est la copule définie par

$$C^*(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2).$$

Si  $\mathbf{X}$  est un vecteur à compostantes continues, de loi  $F \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$ , sa copule est donnée par

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)), \forall u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Notons que  $C$  est alors la fonction de répartition du vecteur  $\mathbb{U} = (U_1, U_2)$  où  $U_i = F_i(X_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

De manière générale, en notant  $h^{-1}$  l'inverse généralisé d'une fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  montone, définie par  $h^{-1}(t) = \inf\{x, h(x) \geq t, t \in \mathbb{R}\}$ , la copule  $C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))$  est une copule du vecteur  $\mathbf{X}$ .

### Exemple 6

Soit  $\{X_1, \dots, X_n\}$  un échantillon i.i.d. de loi  $F$ , et notons  $X_{i:n}$  la  $i$ ème plus grande valeur. Rappelons que les fonctions de répartition de  $X_{1:n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$  et  $X_{n:n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  sont respectivement données par

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \text{ et } F_{n:n}(x) = [F(x)]^n \text{ pour tout } x,$$

et de plus, la fonction de répartition du couple est donnée par

$$F_{1,n}(x, y) = \begin{cases} F(x)^n - (F(y) - F(x))^n & , \text{ si } x < y \\ F(y)^n & , \text{ si } x \geq y \end{cases} .$$

On en déduit alors que le copula du couple  $(X_{1:n}, X_{n:n})$ , noté  $C_n$  est de la forme suivante

$$C_n(u, v) = \begin{cases} v - \left(v^{1/n} + (1-u)^{1/n} - 1\right)^n & , \text{ si } 1 - (1-u)^{1/n} < v^{1/n} \\ v & , \text{ si } 1 - (1-u)^{1/n} \geq v^{1/n} \end{cases} ,$$

appelé **copule min-max** par [57].

On notera que les copules sont des fonctions continues. Plus précisément, elles vérifient une condition de Lipschitz : pour tout  $0 \leq u_i, v_i \leq 1$ ,

$$|C(u_1, u_2) - C(v_1, v_2)| \leq |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|.$$

## 3.2 Les copules en dimension $d > 2$

La propriété de croissance de la fonction de répartition est liée à la propriété de  $n$ -croissance, qui s'interprète comme le fait que

$\mathbb{P}(x_1 \leq X_1 \leq y_1, \dots, x_d \leq X_d \leq y_d) \geq 0$  pour  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  de loi  $F$ , pour tout  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$  (au sens  $x_i \leq y_i$ ).

### Définition9

Une fonction  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $d$ -croissante si pour tout hyper-rectangle  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $V_h([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$ , où

$$V_h([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \Delta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} h(\mathbf{t}) = \Delta_{a_d}^{b_d} \Delta_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \dots \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} h(\mathbf{t}) \quad (1)$$

pour tout  $\mathbf{t}$ , où

$$\Delta_{a_i}^{b_i} h(\mathbf{t}) = h(t_1, \dots, t_{i-1}, b_i, t_{i+1}, \dots, t_n) - h(t_1, \dots, t_{i-1}, a_i, t_{i+1}, \dots, t_n). \quad (2)$$

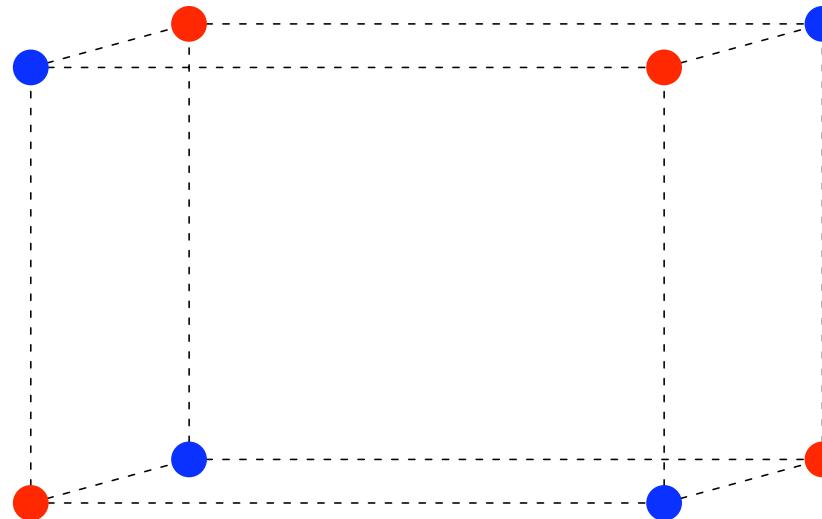
**Increasing functions in dimension 3**

FIGURE 4 – La notion de 3-croissance : on somme la valeur aux différents sommets de l'hyperrectangle, avec un signe positif ou négatif.

## Définition10

Une copule en dimension  $d$  est une fonction de répartition sur  $[0, 1]^d$  dont les lois marginales sont uniformes sur  $[0, 1]$ .

De manière équivalente, les copules sont des fonctions  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  telle que pour tout  $0 \leq u_i \leq 1$  pour tout  $i = 1, \dots, d$  les conditions suivante sont vérifies,

$$C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i, \quad (3)$$

$$C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) = 0, \quad (4)$$

$$C \text{ est } d\text{-croissante.} \quad (5)$$

En fait les équations 3 et 4 implique que les marges sont uniformément répartie sur  $[0, 1]$ . De plus,  $C$  est croissante par marges, avec une plense une propriété de Lipschitz, garantissant la continuité de la fonction  $C$  (comme en dimension 2).

Le résultat le plus important sur les copules est le théorème de Sklar ([60] ou [49]),

**Théorème3** 1. Si  $C$  est une copule, et  $F_1, \dots, F_d$  des fonctions de répartition univariées, alors pour tout  $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (6)$$

est une fonction de répartition de  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ .

2. Réciproquement, si  $F \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ , il existe une copule  $C$  satisfaisant l'équation 6. Cette copule n'est pas forcément unique, mais si les lois marginales  $F_1, \dots, F_d$  sont continues, elle le sera, avec, pour tout  $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ ,

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)), \quad (7)$$

où les fonctions quantiles  $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$  sont les inverses généralisés (continues à gauche) des fonctions  $F_i$ .

Ce théorème a permis de motiver l'utilisation des copules en tant que "fonctions de dépendance", permettant de capture des propriétés de dépendance invariants par changement d'échelle,

## Proposition2

Soit  $(X_1, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire de copule  $C$ . Soient  $\phi_1, \dots, \phi_d, \phi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues strictement croissantes, alors  $C$  est la copule du vecteur  $(\phi_1(X_1), \dots, \phi_d(X_d))$ .

Une démonstration de ce résultat se trouve dans [37], ou [22], dans un cadre plus général : en effet, notons que l'hypothèse de continuité des  $\phi_i$  n'est pas nécessaire si les  $X_i$  sont continues.

## Définition11

Soit  $C$  une copule, alors la fonction

$$C^*(u_1, \dots, u_d) = \sum_{k=0}^d \left( (-1)^k \sum_{i_1, \dots, i_k} C(1, \dots, 1, 1 - u_{i_1}, 1, \dots, 1, 1 - u_{i_k}, 1, \dots, 1) \right), \quad (8)$$

pour tout  $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ , est une copule, appelée **copule de survie**, ou **copule duale**, de  $C$ .

Si  $(U_1, \dots, U_d)$  a pour fonction de répartition  $C$ , alors  $C^*$  est la fonction de répartition du vecteur  $(1 - U_1, \dots, 1 - U_d)$ . Et si

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) = C(\mathbb{P}(X_1 \leq x_1), \dots, \mathbb{P}(X_d \leq x_d)),$$

pour tout  $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}$ , alors

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, \dots, X_d > x_d) = C^*(\mathbb{P}(X_1 > x_1), \dots, \mathbb{P}(X_d > x_d)).$$

### 3.3 Propriétés de l'ensemble des copules

#### Proposition3

La classe des copules est **convexe**, i.e. si  $\{C_\theta, \theta \in \Xi\}$  est une famille de copules, et que  $H$  est une distribution sur  $\Xi$ , alors

$$C(x_1, \dots, x_n) = \int_{\Xi} C_\theta(x_1, \dots, x_n) dH(\theta)$$

est une copule.

Une preuve de ce résultat peut être trouvée dans [49].

#### Exemple7

Les fonctions  $C^\perp(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i$  et  $C^+(u_1, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_d\}$ , sont des copules (respectivement la copule indépendante et la copule comontone, appelée aussi borne supérieure de Fréchet-Hoeffding), et pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$C(u_1, \dots, u_d) = \alpha C^\perp(u_1, \dots, u_d) + [1 - \alpha] C^+(u_1, \dots, u_d),$$

est une copule.

## 3.4 Copules, quasi-copules et semi-copules

### 3.4.1 Quelques définitions

La notion de  $d$ -croissance correspond à avoir une masse positive sur tout hyperrectangle, i.e.

$$\mathbb{P}(\mathbf{U} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0,$$

où  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ .

D'autres notions de "croissance" ont été définie dans la littérature.

Une condition plus faible est de supposer une relation de ce genre mais uniquement pour les hyperrectangles touchant un bord, i.e. il existe  $i \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $a_i = 0$  ou  $b_i = 1$ .

Comme l'a montré [3], cette condition est équivalente à demander une croissance par composante, et que la condition de Lipschitz soit vérifiée.

## Définition 12

Une fonction  $Q : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  est une **quasi-copule** si pour tout  $0 \leq u_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, d$ ,

$$Q(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i, \quad (9)$$

$$Q(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) = 0, \quad (10)$$

$s \mapsto Q(u_1, \dots, u_{i-1}, s, u_{i+1}, \dots, u_d)$  est une fonction croissante, pour tout  $i$ , et

$$|Q(u_1, \dots, u_d) - Q(v_1, \dots, v_d)| \leq |u_1 - v_1| + \dots + |u_d - v_d|.$$

## Exemple 8

Les copules sont des quasi-copules. De plus,  $C^-$  qui n'était pas une copule est en revanche une quasi-copule.

Les quasi-copules sont intéressantes car elles apparaissent naturelles dès que l'on cherche des bornes à des ensembles de copules.

## Proposition4

Soit  $\mathcal{C}$  un ensemble non vide de copules (éventuellement fermé), et notons  $\mathcal{C}^-$  et  $\mathcal{C}^+$  les bornes de  $\mathcal{C}$ , au sens où

$$\mathcal{C}^-(\mathbf{u}) = \inf\{C(\mathbf{u}), C \in \mathcal{C}\} \text{ et } \mathcal{C}^+(\mathbf{u}) = \sup\{C(\mathbf{u}), C \in \mathcal{C}\}.$$

Alors  $\mathcal{C}^-$  et  $\mathcal{C}^+$  sont les meilleures bornes possibles pour  $\mathcal{C}$ , mais en général,  $\mathcal{C}^- \notin \mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^+ \notin \mathcal{C}$ , et ne sont généralement pas des copules. En revanche,  $\mathcal{C}^-$  et  $\mathcal{C}^+$  sont des quasi-copules.

## Remarque5

Cette façon d'écrire les quasi-copules (comme des bornes inférieures) d'ensembles de copules rappelle la construction des capacités comme des bornes inférieures d'ensemble de probabilités.

### Définition 13

Une fonction  $S : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  est une **semi-copule** si pour tout  $0 \leq u_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, d$ ,

$$S(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i, \quad (11)$$

$$S(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) = 0, \quad (12)$$

et  $s \mapsto S(u_1, \dots, u_{i-1}, s, u_{i+1}, \dots, u_d)$  sur  $[0, 1]$ .

## Exemple9

Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble de fonctions de distorsion, continues, strictement croissantes  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telles que  $h(0) = 0$  et  $h(1) = 1$ .

On notera que  $h \in \mathcal{H}$  si et seulement si  $h^{-1} \in \mathcal{H}$

i.e.  $(\mathcal{H}, \circ)$  est un groupe, où  $\circ$  est l'opérateur de composition.

L'élément neutre est la fonction identité sur  $[0, 1]$ .

Pour tout  $h \in \mathcal{H}$  et  $C \in \mathcal{C}$  (l'ensemble des copules), posons

$$\Psi_h(C)(u_1, u_2) = h^{-1}(C(h(u_1), h(u_2))), \forall 0 \leq u_1, u_2 \leq 1.$$

On parlera de  $\mathcal{H}$ -copule. Les  $\mathcal{H}$ -copules échangeables sont des semi-copules.

$\Psi_h(C^\perp)$  est une quasi-copule si et seulement si  $-\log h$  est convexe.

Dans ce cas on peut écrire

$$C(u, v) = h^{-1}(h(u)h(v)) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)),$$

où  $h \in \mathcal{H}$  est le générateur multiplicatif, et  $\phi = -\log h$  le génératrice additif.

## Remarque6

Comme l'a montré [5], la famille  $\mathcal{S}$  est stable par distortion, au sens où  $\Psi_h(C) \in \mathcal{S}$ , pour tout  $C \in \mathcal{S}$  et  $h \in \mathcal{H}$ . Mais cette propriété n'est pas vérifiée pour l'ensemble des copules  $\mathcal{C}$ .

## Définition14

Une capacité sur un espace  $(\Omega, \mathcal{A})$  est une fonction d'ensemble  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\nu(\emptyset) = 0$ ,  $\nu(\Omega) = 1$ , et si  $A \subset B$ , alors  $\nu(A) \leq \nu(B)$ . De plus, la capacité  $\nu$  est convexe si et seulement si pour tout  $A, B$ ,  $\nu(A) + \nu(B) \leq \nu(A \cup B) + \nu(A \cap B)$ .

(cf. la présentation de J.M. Tallon), les capacité sont des notions plus faibles que les probabilités.

### 3.5 Simulations aléatoires et copules

Les copules sont des lois de vecteurs dont les marges sur uniformément réparties sur  $[0, 1]$ .

Or la simulation de lois repose sur les générateurs de nombres aléatoires (les fonctions **Random**) qui génèrent précisément des variables uniformément réparties sur  $[0, 1]$ .

Plus précisément, on impose deux conditions aux générateurs de nombres aléatoires,

- qu'ils génèrent des nombres uniformément distribués sur  $[0, 1]$ ,
- que des appels consécutifs de fonctions **Random** génèrent des variables indépendantes.

on sait générer  $\mathbf{U}^\perp = (U_1^\perp, \dots, U_d^\perp)$  que l'on va utiliser pour simuler ici un vecteur  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$  dont la loi soit une  $C$ , supposée dérivable.

L'idée naturelle est d'utiliser la décomposition à l'aide des lois conditionnelles itérées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) &= \mathbb{P}(U_d \leq u_d | U_1 \leq u_1, \dots, U_{d-1} \leq u_{d-1}) \\ &\quad \times \mathbb{P}(U_{d-1} \leq u_{d-1} | U_1 \leq u_1, \dots, U_{d-2} \leq u_{d-2}) \\ &\quad \times \dots \\ &\quad \times \mathbb{P}(U_3 \leq u_3 | U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \\ &\quad \times \mathbb{P}(U_2 \leq u_2 | U_1 \leq u_1) \times \mathbb{P}(U_1 \leq u_1).\end{aligned}$$

En commençant par la fin,  $\mathbb{P}(U_1 \leq u_1) = u_1$  puisque  $U_1$  suit une loi uniforme.  
Ensuite, notons que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) \\
= & \mathbb{P}(U_2 \leq u_2, U_3 \leq 1, \dots, U_d \leq 1 | U_1 = u_1) \\
= & \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(U_2 \leq u_2, U_3 \leq 1, \dots, U_d \leq 1 | U_1 \in [u_1, u_1 + h]) \\
= & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(u_1 \leq U_1 \leq u_1 + h, U_2 \leq u_2, U_3 \leq 1, \dots, U_d \leq 1)}{\mathbb{P}(U_1 \in [u_1, u_1 + h])} \\
= & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(U_1 \leq u_1 + h, U_2 \leq u_2, U_3 \leq 1, \dots, U_d \leq 1) - \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, U_3 \leq 1, \dots, U_d \leq 1)}{\mathbb{P}(U_1 \in [u_1, u_1 + h])} \\
= & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(u_1 + h, u_2, 1, \dots, 1) - C(u_1, u_2, 1, \dots, 1)}{h} = \frac{\partial C}{\partial u_1}(u_1, u_2, 1, \dots, 1).
\end{aligned}$$

Et de manière plus générale, nous aurions

$$\mathbb{P}(U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1).$$

Nous avons alors un algorithme simple pour générer  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$  suivant  $C$  à partir d'un vecteur  $\mathbf{U}^\perp = (U_1^\perp, \dots, U_d^\perp)$  (généré à partir d'appels successifs de

fonction `Random`),

- générerons  $U_1$  uniformément sur  $[0, 1]$ ,

$$u_1 \leftarrow U_1^\perp$$

- générerons  $U_2$  suivant la loi conditionnelle  $\partial_1 C(\cdot | u_1)$ ,

$$u_2 \leftarrow [\partial_1 C(\cdot | u_1)]^{-1}(U_2^\perp),$$

- générerons  $U_k$  suivant la loi conditionnelle  $\partial_{1, \dots, k-1} C(\cdot | u_1, \dots, u_{k-1})$ ,

$$u_k \leftarrow [\partial_{1, \dots, k-1} C(\cdot | u_1, \dots, u_{k-1})]^{-1}(U_k^\perp),$$

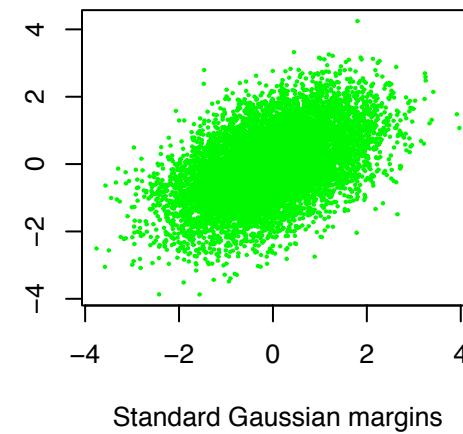
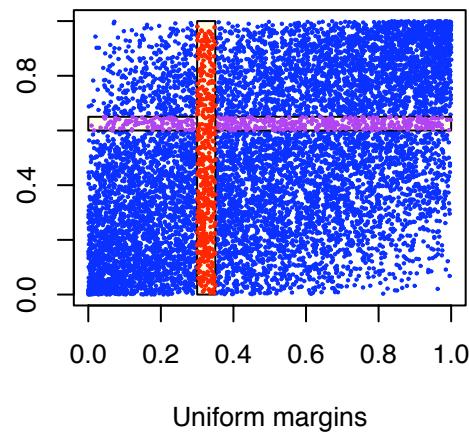
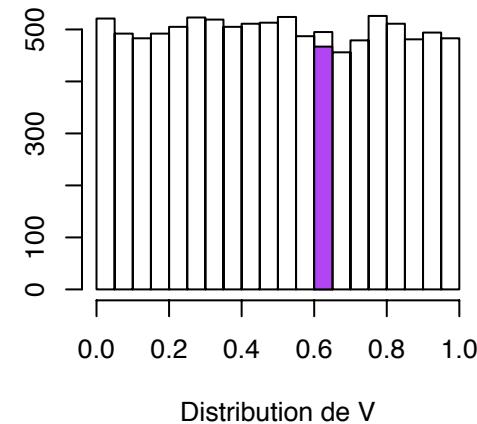
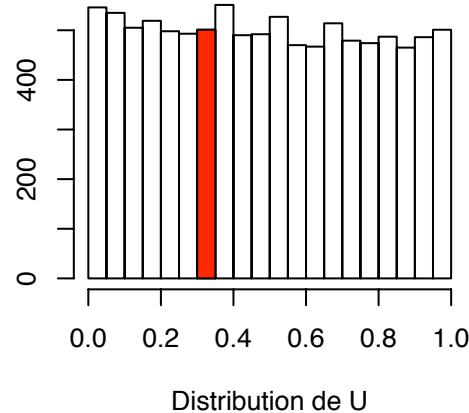
...etc.

## Exemple 10

On retrouve ici l'idée implicite de l'utilisation de la décomposition de Cholesky : on génère un vecteur gaussien centré réduit à composantes indépendantes,  $X^\perp$ , puis on pose  $X = \mu + AX^\perp$ , où  $A$  est une matrice triangulaire triangulaire inférieur telle que  $AA' = \Sigma$ , qui permet de générer un vecteur  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ .

Aussi, en dimension 2, pour générer un vecteur centré-réduit de corrélation  $r \in (-1, 1)$ , on pose

- pour la première composante  $x_1 = X_1^\perp$ ,
- pour la seconde  $x_2 = rx_1 + \sqrt{1 - r^2}X_2^\perp$ .



## Exemple 11

Considérons la copule de Clayton (en dimension  $d = 2$ ,

$C(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$ , où  $\alpha \geq 0$ . Alors  $(U_1, U_2)$  a pour distribution  $C$  si et seulement  $U_1$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$  et que  $U_2|U_1 = u_1$  a pour loi conditionnelle

$$\mathbb{P}(U_2 \leq u_2|U_1 = u_1) = \partial_2 C(u_2|u_1) = (1 + u_1^\alpha[u_2^{-\alpha} - 1])^{-1-1/\alpha}.$$

L'algorithme pour générer une copule de Clayton est alors de la forme suivante,

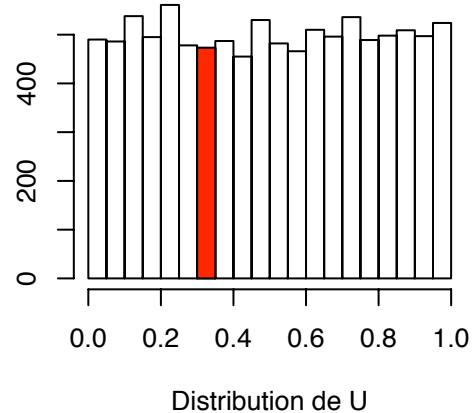
- générerons  $U_1$  uniformément sur  $[0, 1]$ ,

$$u_1 \leftarrow U_1^\perp,$$

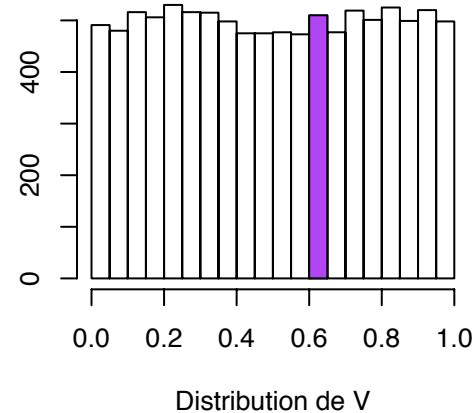
- générerons  $U_2$  suivant la loi conditionnelle  $\partial_2 C(\cdot|u_1)$ ,

$$u_2 \leftarrow [\partial_2 C(\cdot|u_1)]^{-1}(U_2^\perp) = \left( [(U_2^\perp)^{-\alpha/(1+\alpha)} - 1]u_1^{-\alpha} + 1 \right)^{-1/\alpha}.$$

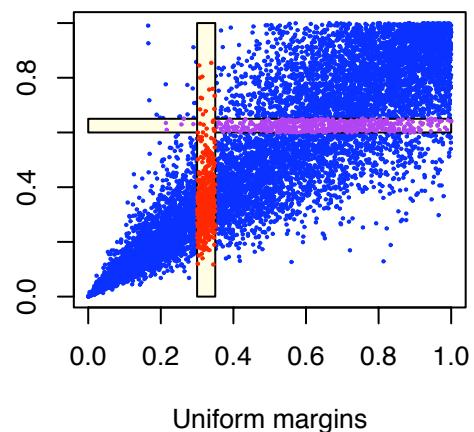
Un exemple de simulation de copule de Clayton peut se visualiser sur la Figure suivante,



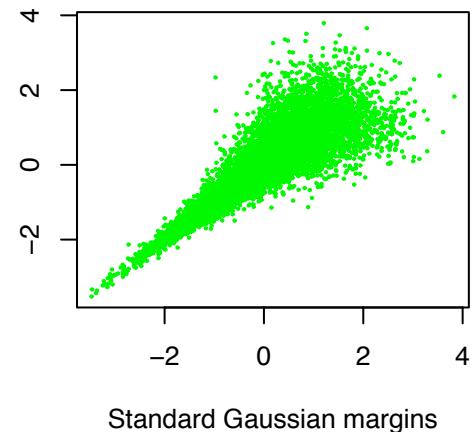
Distribution de  $U$



Distribution de  $V$



Uniform margins



Standard Gaussian margins

## Exemple 12

En fait, plus généralement, il est possible de trouver un algorithme simple pour générer une copule Archimédienne. Pour cela,

- générerons  $U_1$  uniformément sur  $[0, 1]$ ,

$$u_1 \leftarrow U_1^\perp,$$

- générerons  $U_2$  suivant la loi conditionnelle  $\partial_2 C(\cdot | u)$ ,

$$u_2 \leftarrow \phi^{-1} (\phi(u) - \phi(u_1)),$$

où  $u = \phi'^{-1} (\phi'(u_1)/U_2^\perp)$ .

Notons que [31] ont proposé d'utiliser le fait que  $C(U_1, U_2)$  et  $\phi(U_1)/[\phi(U_1) + \phi(U_2)]$  sont deux variables indépendantes, la première de loi  $K$ , où  $K(t) = t - \phi(t)/\phi'(t)$ , et la seconde est uniforme sur  $[0, 1]$ . Aussi,

- générerons  $U$  de loi  $K$

$$u \leftarrow K^{-1}(U_1^\perp),$$

- posons

$$u_1 \leftarrow \phi^{-1}(U_2^\perp \phi(u)) \text{ et } u_2 \leftarrow \phi^{-1}([1 - U_2^\perp] \phi(u)).$$

## 4 Les familles usuelles de copules

Avant de présenter les copules paramétriques les plus usuelles, on appellera  $C^\perp$  la copule indépendante,

### Définition 15

On appellera **copule indépendante**  $C^\perp$  la copule définie par

$$C^\perp(u_1, \dots, u_n) = u_1 \cdots u_d = \prod_{i=1}^d u_i \quad (= \Pi(u_1, \dots, u_n)).$$

### Remarque 7

Soit  $\mathbf{X} \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ . On notera  $\mathbf{X}^\perp \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$  un vecteur dont la copule est  $C^\perp$ . On dira qu'il s'agit d'une version indépendante de  $\mathbf{X}$ .

## 4.1 Les bornes de Fréchet-Hoeffding et la comonotonie

La famille des copules est bornée : pour toute copule  $C$ ,

$$C^-(u_1, \dots, u_d) \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq C^+(u_1, \dots, u_d),$$

pour tout  $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ , où

$$C^-(u_1, \dots, u_d) = \max\{0, u_1 + \dots + u_d - (d - 1)\} \text{ et } C^+(u_1, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_d\}.$$

Les bornes sont appelées bornes de *Fréchet-Hoeffding*. On notera que si  $C^+$  est une copule, en revanche  $C^-$  est une copule uniquement dans le cas  $d = 2$ .

### Définition16

La copule comonotone  $C^+$  est définie par  $C^+(u_1, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_d\}$ .

### Définition17

La borne inférieure de Fréchet  $C^-$  la fonction définie par

$C^-(u_1, \dots, u_d) = \max\{0, u_1 + \dots + u_d - (d - 1)\}$ . En dimension  $d = 2$ ,  $C^-$  sera appelée copule anticomonotone.

## Remarque 8

Soit  $\mathbf{X} \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ . On notera  $\mathbf{X}^+ \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$  une vecteur dont la copule est  $C^+$ . On dira qu'il s'agit d'une version comonotone de  $\mathbf{X}$ . De manière similaire, en dimension  $d = 2$ , on notera  $\mathbf{X}^- \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$  une version anticomonotone de  $\mathbf{X}$ .

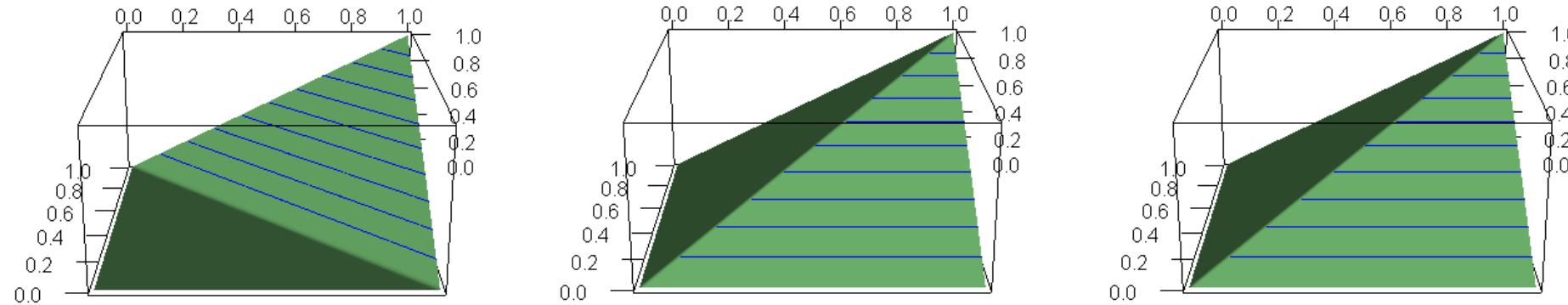


FIGURE 5 – Copule anticomontone, copule indépendante, et copule comonotone, en dimension  $d = 2$ .

- Proposition5**
1. Si  $d = 2$ ,  $C^-$  est la fonction de répartition du couple  $(U, 1 - U)$  où  $U$  est uniformément distribuée sur  $[0, 1]$ .
  2.  $(X_1, X_2)$  a pour copule  $C^-$  si et seulement s'il existe  $\phi$  strictement croissante et  $\psi$  strictement décroissante telles que  $(X_1, X_2) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\phi(Z), \psi(Z))$  où  $Z$  est une variable aléatoire.
  3.  $C^+$  est la fonction de répartition du vecteur  $(U, \dots, U)$  où  $U$  est uniformément distribuée sur  $[0, 1]$ .
  4.  $(X_1, \dots, X_n)$  a pour copule  $C^+$  si et seulement s'il existe des fonctions  $\phi_i$  strictement croissantes telles que  $(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\phi_1(Z), \dots, \phi_n(Z))$  où  $Z$  est une variable aléatoire.
- cf. [49].

### Exemple 13

Ces bornes sur les copules peuvent en fait fournir des bornes sur certaines quantités. En particulier, si  $d = 2$ , et que  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est 2-croissante, alors pour tout  $(X_1, X_2) \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$

$$\mathbb{E}(\phi(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1 - U))) \leq \mathbb{E}(\phi(X_1, X_2)) \leq \mathbb{E}(\phi(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U))),$$

où  $U$  est uniformément répartie sur  $[0, 1]$  (cf. [62]).

### Exemple 14

si  $X_1$  et  $X_2$  sont comonotones, ainsi que  $X_2$  et  $X_3$ ,  $X_1$  et  $X_3$  peuvent ne pas être comonotone. Par exemple, si

$$(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} (1, 1, 1) & \text{avec probabilité } 1/4, \\ (1, 2, 3) & \text{avec probabilité } 1/4, \\ (3, 2, 1) & \text{avec probabilité } 1/4, \\ (3, 3, 3) & \text{avec probabilité } 1/4, \end{cases}$$

alors  $X_1$  et  $X_3$  sont indépendants.

## Exemple 15

si  $X_1$  et  $X_2$  sont comonotones, et que  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendants,  $X_1$  et  $X_3$  peuvent ne pas être indépendants. Aussi, par exemple, avec

- $(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 3)$  avec probabilité  $1/4$ ,
- $(2, 1, 1)$  avec probabilité  $1/4$ ,
- $(2, 3, 3)$  avec probabilité  $1/4$ ,
- $(3, 3, 1)$  avec probabilité  $1/4$ ,

$X_1$  et  $X_2$  sont comonotones,  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendants, et  $X_1$  et  $X_3$  sont indépendants.

## 4.2 Les copules elliptiques

### Définition 1

Soit  $\mathbf{X} \sim \mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$ , et  $F_g$  la distribution des variables  $X_i / \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{i,i}}$ . On appelle copule elliptique de paramètres  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $g$  la distribution du vecteur

$$\left( F_g \left( \frac{X_1}{\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{1,1}}} \right), F_g \left( \frac{X_2}{\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{2,2}}} \right), \dots, F_g \left( \frac{X_d}{\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{d,d}}} \right) \right).$$

### Exemple 16

Soit  $r \in (-1, +1)$ , alors la copule Gaussienne de paramètre  $r$  (en dimension 2) est

$$C(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \exp \left( \frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1-r^2)} \right) dx dy$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{z^2}{2} \right) dz.$$

## Exemple 17

Soit  $r \in (-1, +1)$ , et  $\nu$ , alors la copule de Student de paramètres  $r$  et  $\nu$  est

$$\int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{\pi\nu\sqrt{1-r^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2 - 2rxy + y^2}{\nu(1-r^2)}\right)^{-\frac{\nu}{2}+1} dx dy.$$

où  $T_\nu$  est la fonction de répartition de la loi de Student (univariée) à  $\nu$  degrés de libertés, i.e.

$$T_\nu(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

## 4.3 Les copules Archimédiennes

### 4.3.1 Les copules Archimédiennes strictes en dimension 2

#### Définition 18

Soit  $\phi$  une fonction décroissante convexe sur  $(0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  telle que  $\phi(1) = 0$  et  $\phi(0) = \infty$ . On appellera **copule Archimédienne stricte de générateur  $\phi$**  la copule définie par

$$C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)), \quad u_1, u_2 \in [0, 1].$$

#### Exemple 18

Soit  $\phi(t) = t^\alpha - 1$ ; la copule associée est la **copule de Clayton**.

Notons que le générateur n'est pas unique, en particulier en multipliant par une constante. Les copules Archimédiennes sont des copules symétriques, au sens où  $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$ .

## Exemple 19

Il est aussi possible de chercher des copules Archimédiennes vérifiant une propriété de symmétrie radiale, i.e.  $C(u_1, u_2) = C^*(u_1, u_2)$ . Ceci n'est possible que si  $\phi(t) = \log \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$ . Il s'agit de la copule dite de Frank ([26]).

## Remarque 9

Certains (e.g. [45] ou [21]) préfère une présentation multiplicative,

$$C(u_1, u_2) = h^{-1}[h(u_1) \cdot h(u_2)].$$

On retrouve la forme précédante en posant  $h(t) = \exp[\phi(t)]$ , ou réciproquement  $\phi(t) = h(\log(t))$ .

## Remarque 10

Une autre caractérisation des copules Archimédienne peut se faire à l'aide de la fonction de Kendall,

$$K(t) = \mathbb{P}(C(U_1, U_2) \leq t) = t - \lambda(t) \text{ où } \lambda(t) = \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}$$

et où  $(U_1, U_2)$  a pour loi  $C$ . De façon réciproque,

$$\phi(t) = \exp \left( \int_{t_0}^t \frac{ds}{\lambda(s)} \right),$$

où  $t_0 \in (0, 1)$  est une constante arbitraire (nous avions noté que les générateurs étaient définis à une constante multiplicative près. Cette fonction est particulièrement en inférence statistique.

on peut généraliser en autorisant  $\phi(0) \leq \infty$ .

### Définition 19

Soit  $\phi$  une fonction décroissante convexe sur  $(0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  telle que  $\phi(1) = 0$ .

Définissons l'inverse de  $\phi$  par

$$\phi^{-1}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & , \text{ for } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0 & , \text{ for } \phi(0) < t < \infty. \end{cases}$$

On appellera **copule Archimédienne** de générateur  $\phi$  la copule définie par

$$C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)), \quad u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Les copules Archimédiennes non strictes présente un *ensemble nul*  $\{(u_1, u_2), \phi(u_1) + \phi(u_2) > 0\}$  non vide, pour lequel

$$\mathbb{P}((U_1, U_2) \in \{(u_1, u_2), \phi(u_1) + \phi(u_2) > 0\}) = 0.$$

Cet ensemble est majoré par une *courbe nulle*,  $\{(u_1, u_2), \phi(u_1) + \phi(u_2) = 0\}$ , de masse

$$\mathbb{P}((U_1, U_2) \in \{(u_1, u_2), \phi(u_1) + \phi(u_2) = 0\}) = -\frac{\phi(0)}{\phi'(0^+)},$$

qui est non nulle dès lors que  $-\phi'(0^+)$  est finie.

### Exemple20

Soit  $\phi(t) = t^\alpha - 1$ , où  $\alpha \in [-1, \infty)$ , avec le cas limite  $\phi(t) = -\log(t)$  si  $\alpha = 0$  ; la copule associée est la copule de Clayton. Le générateur est strict si  $\alpha > 0$ .

	$\psi(t)$	range $\theta$	
(1)	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[-1, 0) \cup (0, \infty)$	Clayton, CLAYTON (1978)
(2)	$(1-t)^\theta$	$[1, \infty)$	
(3)	$\log \frac{1-\theta(1-t)}{t}$	$[-1, 1)$	Ali-Mikhail-Haq
(4)	$(-\log t)^\theta$	$[1, \infty)$	Gumbel, GUMBEL (1960), HOUGAARD (1986)
(5)	$-\log \frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	Frank, FRANK (1979), NELSEN (1987)
(6)	$-\log\{1 - (1-t)^\theta\}$	$[1, \infty)$	Joe, FRANK (1981), JOE (1993)
(7)	$-\log\{\theta t + (1-\theta)\}$	$(0, 1]$	
(8)	$\frac{1-t}{1+(\theta-1)t}$	$[1, \infty)$	
(9)	$\log(1 - \theta \log t)$	$(0, 1]$	BARNETT (1980), GUMBEL (1960)
(10)	$\log(2t^{-\theta} - 1)$	$(0, 1]$	
(11)	$\log(2 - t^\theta)$	$(0, 1/2]$	
(12)	$(\frac{1}{t} - 1)^\theta$	$[1, \infty)$	
(13)	$(1 - \log t)^\theta - 1$	$(0, \infty)$	
(14)	$(t^{-1/\theta} - 1)^\theta$	$[1, \infty)$	
(15)	$(1 - t^{1/\theta})^\theta$	$[1, \infty)$	GENEST & GHOUIDI (1994)
(16)	$(\frac{\theta}{t} + 1)(1 - t)$	$[0, \infty)$	

### 4.3.2 Les copules Archimédiennes en dimension $d > 2$

Les copules Archimédiennes sont associatives (e.g. [58] ou [2]), i.e.

$$C(C(u_1, u_2), u_3) = C(u_1, C(u_2, u_3)), \forall 0 \leq u_1, u_2, u_3 \leq 1.$$

#### Définition20

Si  $d > 2$ , supposons que  $\phi^{-1}$  est  $d$ -complètement monotone (où, pour rappels,  $\psi$  est  $d$ -complètement monotone si elle est continue, et que ses dérivées sont monotones, de signe alterné, i.e. pour tout  $k = 0, 1, \dots, d$ ,  $(-1)^k d^k \psi(t)/dt^k \geq 0$ ).

Une copule Archimédienne est alors définie par

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)), \forall u_1, \dots, u_n \in [0, 1].$$

Ces copules sont obtenues par itérations successives, en posant

$$C_2(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$$

et ensuite, pour  $n \geq 2$ ,

$$C_{n+1}(u_1, \dots, u_{n+1}) = C_2(C_n(u_1, \dots, u_n), u_{n+1}).$$

### Exemple21

Soit  $\psi$  une transformée de Laplace d'une variable positive  $\Theta$ , alors d'après le théorème de Bernstein,  $\psi$  est complètement montone, et  $\psi(0) = 1$ . Alors  $\phi = \psi^{-1}$  est complètement montone, et permet d'engendrer une copule Archimédienne de dimension  $d$  pour tout  $d \geq 2$ . Par exemple si  $\Theta$  suit une loi Gamma d'espérance  $a$  et de variance  $a$ , alors  $\psi(t) = (1 + t)^{1/\alpha}$ , on retrouve la copule de Clayton . Cette notation est celle retenue dans [37] pour définir les copules Archimédiennes,

$$C(u_1, \dots, u_d) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)).$$

## Exemple22

Soit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur de durées de vies résiduelles, dont la loi de survie jointe est supposée Schur-constante (i.e. à la fois Schur-concave et Schur-convexe). Alors il existe  $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  telle que

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, \dots, X_d > x_d) = S(x_1 + \dots + x_d).$$

Les lois marginales  $X_i$  sont alors Schur-contantes (i.e. suivent des lois exponentielles), et la copule de survie de  $\mathbf{X}$  est une copule Archimédienne de générateur  $S^{-1}$ . Notons également que les durées de vies conditionnelles sont identiques, au sens où

$$\mathbb{P}(X_i - x_i > t | \mathbf{X} > \mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_j - x_j > t | \mathbf{X} > \mathbf{x}),$$

pour tout  $t > 0$  et  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ . En particulier, si  $S$  est la fonction de survie d'une loi de Pareto, on obtient la copule de Clayton, et si  $S$  est la fonction de survie d'une distribution de Weibull, on obtient la copule de Gumbel, comme l'a montré [48].

## Proposition6

Soit  $(C_n)$  une suite de copules absolument continues de copules Archimédiennes, de générateurs  $(\phi_n)$ . La limite de  $C_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  est une copule Archimédienne si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite,

- il existe  $\phi \in \Phi$  telle que  $s, t \in [0, 1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n(s)}{\phi'_n(t)} = \frac{\phi(s)}{\phi'(t)}. \quad (13)$$

- il existe  $\lambda$  continue telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(t) = \lambda(t)$ .
- il existe  $K$  continue telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(t) = K(t)$ .
- il existe une suite de constante positive  $(c_n)$  telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \phi_n(t) = \phi(t)$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Ce résultat a été montré partiellement par [29] et généralisé par [13].

## Exemple23

Les copules archimédiennes sont intéressantes en rique de crédit (cf. [47]).

## 4.4 Les copules Archimédiennes généralisées et hiérarchiques

Considérons le cas où  $C(u_1, \dots, u_d)$  est

$$\phi_1^{-1}[\phi_1[\phi_2^{-1}(\phi_2[\cdots \phi_{d-1}^{-1}[\phi_{d-1}(u_1) + \phi_{d-1}(u_2)] + \cdots + \phi_2(u_{d-1})]) + \phi_1(u_d)]]$$

où les  $\phi_i$  sont des générateurs de copules.  $C$  est une copule si  $\phi_i \circ \phi_{i-1}^{-1}$  est l'inverse d'une transformée de Laplace.

Cette copule est parfois appelée **fully nested Archimedean** (FNA). On commence par coupler deux composantes (ici  $U_1$  et  $U_2$ ), puis on couple cette paire avec  $U_3$ , etc.

En dimension  $d = 5$ , cela donne

$$\begin{aligned} & \phi_1^{-1}[\phi_1(\phi_2^{-1}[\phi_2(\phi_3^{-1}[\phi_3(\phi_4^{-1}[\phi_4(u_1) + \phi_4(u_2)]) \\ & + \phi_3(u_3)]) + \phi_2(u_4)]) + \phi_1(u_5)]. \end{aligned}$$

On peut aussi envisager une construction plus hiérarchique, avec les copules

*partially nested Archimedean* (PNA), en considérant un couplage complet pour  $(U_1, U_2, U_3)$ , un autre pour  $(U_4, U_5)$ , et en couplant les deux vecteurs,

$$\begin{aligned} & \phi_4^{-1}[\phi_4(\phi_1^{-1}[\phi_1(\phi_2^{-1}[\phi_2(u_1) + \phi_2(u_2)]) + \phi_1(u_3)]) \\ & + \phi_4(\phi_3^{-1}[\phi_3(u_4) + \phi_3(u_5)])] \end{aligned}$$

La condition pour avoir effectivement une copule est que  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  soit l'inverse d'une transformée de Laplace, mais aussi  $\phi_4 \circ \phi_1^{-1}$  ainsi que  $\phi_4 \circ \phi_3^{-1}$ .

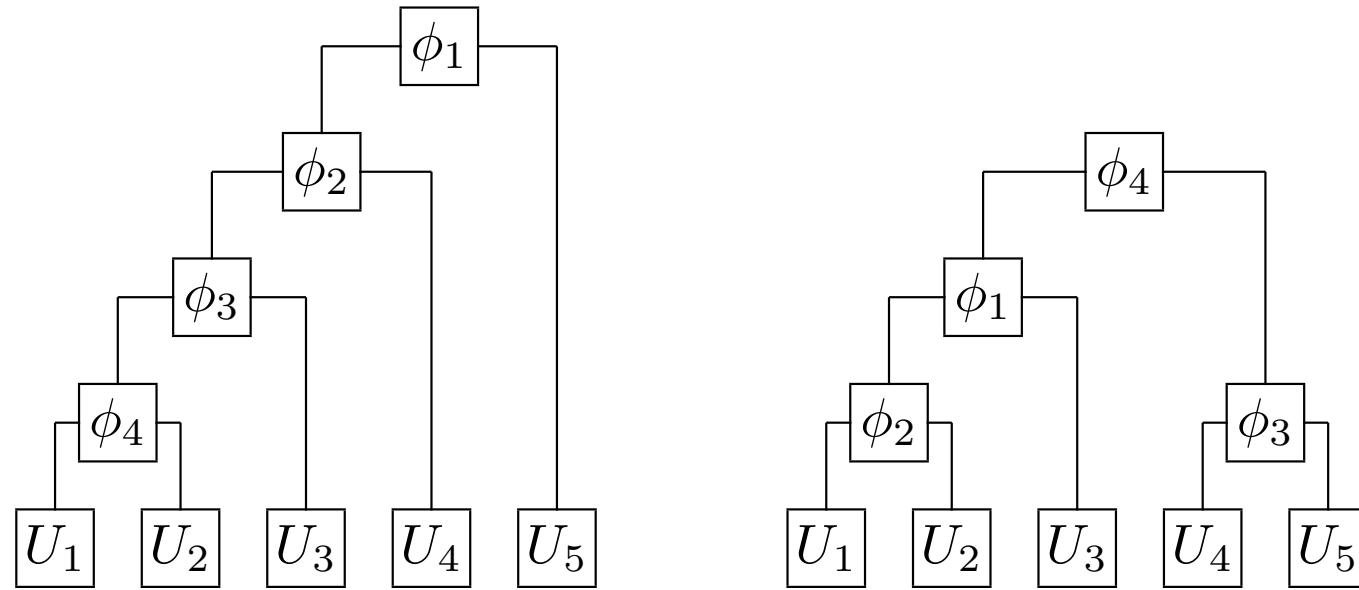


FIGURE 6 – Copules Archimédiennes *fully nested* (gauche) et *partially nested* (droite)

Enfin, on peut envisager une construction réellement hiérarchique, ne visant pas uniquement à faire du *couplage* (deux à deux),

$$\begin{aligned} & \phi_3^{-1}[\phi_3(\phi_1^{-1}[\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2) + \phi_1(u_3)]) \\ & + \phi_3(\phi_2^{-1}[\phi_2(u_4) + \phi_2(u_5)])]. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a effectivement construit une copule si  $\phi_3 \circ \phi_1^{-1}$  ainsi que  $\phi_3 \circ \phi_2^{-1}$  sont des inverses de transformées de Laplace. On pourrait aussi envisager

$$\begin{aligned} & \phi_3^{-1}[\phi_3(\phi_1^{-1}[\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)]) + \phi_3(u_3) \\ & + \phi_3(\phi_2^{-1}[\phi_2(u_4) + \phi_2(u_5)])]. \end{aligned}$$

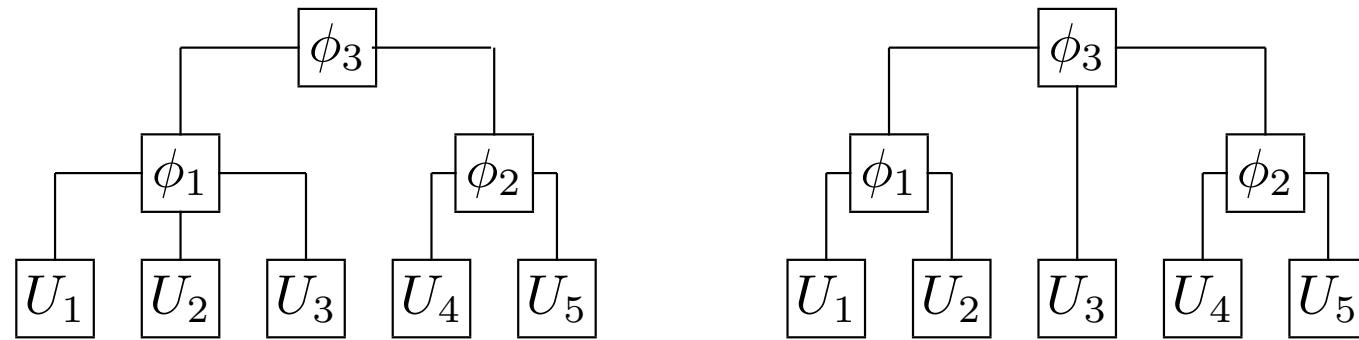


FIGURE 7 – Copules Archimédiennes *hiérarchiques* avec deux constructions différentes.

## Exemple24

Si les  $\phi_i$  sont des générateurs de copules de Gumbel de paramètre  $\theta_i$ , une condition suffisante pour que  $C$  soit une copule est que les  $\theta_i$  soient croissants, et supérieurs à 1. De même, si les  $\phi_i$  sont des générateurs de copules de Clayton de paramètre  $\theta_i$ , une condition suffisante pour que  $C$  soit une copule est que les  $\theta_i$  soient croissants, et supérieurs à 0.

## 4.5 Les copules extrêmes

Soient  $\mathbf{X}^k$ ,  $k = 1, \dots, n$  un échantillon i.i.d. de vecteurs aléatoires de loi jointe  $F$  (supposée continue), de copule  $C$  et de lois marginales  $F_1, \dots, F_d$ . On note  $\mathbf{M}^n$  le vecteur des maximums, composante par composantes,

$$\mathbf{M}^n = (\max\{X_1^1, \dots, X_1^n\}, \dots, \max\{X_d^1, \dots, X_d^n\})$$

Soit  $C_n$  la copule associée à  $\mathbf{M}^n$ , alors

$$C_n(u_1, \dots, u_d) = C\left(u_1^{\frac{1}{n}}, \dots, u_d^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

### Définition 21

Une copule  $C$  est une **copule extrême** s'il existe une copule  $\Gamma$  telle que

$$\Gamma\left(u_1^{\frac{1}{n}}, \dots, u_d^{\frac{1}{n}}\right)^n \rightarrow C(u_1, \dots, u_d) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

pour tout  $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ . On dira de plus que  $\Gamma$  est dans le domaine d'attraction de  $C$ .

L'ensemble des copules extrêmes coïncide avec l'ensembles des **copules max-stables**, i.e. qui vérifient  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ .

$$C\left(u_1^{\frac{1}{n}}, \dots, u_d^{\frac{1}{n}}\right)^n = C(u_1, \dots, u_d)$$

Il est possible de réécrire le théorème de Pickands-Balkema-de Haan sous la forme suivante, afin de caractériser l'ensemble des copules extrêmes,

### Théorème4

Une copule  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  est une copule extrême si et seulement si il existe une mesure finie  $H$  sur le simplexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{S}_d$ , appelée mesure spectrale, telle que

$$C(u_1, \dots, u_d) = \exp[-\ell(-\log u_1, \dots, -\log u_d)]$$

où la fonction de dépendance de queue  $\ell$  est donnée par

$$\ell(x_1, \dots, x_d) = \int_{\mathcal{S}_d} \max\{\omega_1 x_1, \dots, \omega_d x_d\} dH(\omega_1, \dots, \omega_d)$$

pour tout  $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$ . On suppose que  $\int_{\mathcal{S}_d} \omega_i dH(\omega_1, \dots, \omega_d) = 1$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Notons que

$$\ell(x_1, \dots, x_d) = \lim_{t \rightarrow 0} [1 - C(1 - tx_1, \dots, 1 - tx_d)]$$

Cette fonction de dépendance de queue  $\ell$  est convexe, homogène de degré 1 (i.e.  $\ell(tx_1, \dots, tx_d) = t\ell(x_1, \dots, x_d)$  pour tout  $t > 0$ ) et vérifie

$$\max\{x_1, \dots, x_d\} \leq \ell(x_1, \dots, x_d) \leq x_1 + \dots + x_d.$$

Comme tenu de cette propriété d'homogénéité, on peut aussi écrire

$$\ell(x_1, \dots, x_d) = [x_1 + \dots + x_d] A \left( \frac{x_1}{x_1 + \dots + x_d}, \dots, \frac{x_d}{x_1 + \dots + x_d} \right)$$

où  $A$  est une fonction  $\mathcal{S}_d \rightarrow [d^{-1}, 1]$  appelée *fonction de dépendance de Pickands* ([51] et [52]).

La copule extrême s'écrit alors

$$C(u_1, \dots, u_d) = \exp \left[ \left( \sum_{i=1}^d \log u_i \right) A \left( \frac{u_1}{\sum_{i=1}^d \log u_i}, \dots, \frac{u_d}{\sum_{i=1}^d \log u_i} \right) \right]$$

Cette fonction  $A$  est convexe, et vérifie

$$\max\{\omega_1, \dots, \omega_d\} \leq A(\omega_1, \dots, \omega_d) \leq 1$$

pour tout  $(\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathcal{S}_d$ . Cette dernière propriété caractérise l'ensemble des fonctions de dépendance en dimension  $d = 2$  (mais pas au delà). Dans ce cas, on peut alors écrire

$$C(U_1, U_2) = [uv]^{A(\log v / \log uv)}$$

où, par abus de notation,  $A : [0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$  est convexe et vérifie

$$\max\{\omega, 1 - \omega\} \leq A(\omega) \leq 1.$$

## Exemple25

Si  $C$  est une copule Archimédienne de générateur  $\phi$ , tel qu'il existe une limite

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\phi'(1-s)}{\phi(1-s)} = -\theta \in (-\infty, -1]$$

alors  $C$  est dans le domaine d'attraction de la copule dont la fonction de dépendance est

$$\ell(x_1, \dots, x_d) = [x_1^\theta + \dots + x_d^\theta]^{\frac{1}{\theta}}.$$

La copule limite est alors

$$C(u_1, \dots, u_d) = \exp \left[ - \left( [-\log u_1]^\theta + \dots + [-\log u_1]^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right]$$

qui correspond à la copule de Gumbel.

## Exemple26

En dimension 2, la copule de Student  $t$  de corrélation  $r$  et à  $\nu$  s'écrit

$$\int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{\pi\nu\sqrt{1-r^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2 - 2rxy + y^2}{\nu(1-r^2)}\right)^{-\frac{\nu}{2}+1} dx dy.$$

Cette copule est dans le domaine d'attraction de la copule extrême dont la fonction de dépendance de Pickands est définie par

$$A(\omega) = \omega T_{\nu+1}(z_\omega) + (1-\omega)T_{\nu+1}(z_{1-\omega})$$

où

$$z_\omega = \sqrt{\frac{1+\nu}{1-r^2}} \left( \left[ \frac{\omega}{1-\omega} \right]^{\frac{1}{\nu}} - r \right)$$

pour tout  $\omega \in [0, 1]$ .

## 4.6 La copule de Clayton

Commençons par le cas  $d = 2$  afin de simplifier la présentation.

### 4.6.1 La copule de Pareto

Supposons que  $X$  et  $Y$  soient conditionnellement indépendante, sachant  $\Theta$ , et avec  $\mathbb{P}(X > x | \Theta = \theta) = \exp(-\theta x)$  et  $\mathbb{P}(Y > y | \Theta = \theta) = \exp(-\theta y)$ . Supposons de plus que  $\Theta$  suive une loi Gamma, alors

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \int_0^\infty \exp(-\theta[x+y]) \frac{\theta^{\gamma-1} \exp(-\theta/\beta)}{\beta^\gamma \Gamma(\gamma)} d\theta = (1 + \beta x + \beta y)^{-\gamma}. \quad (14)$$

On notera tout d'abord que les lois marginales (non conditionnelles) sont des lois de Pareto,  $\mathbb{P}(X > x) = (1 - \beta x)^{-\gamma}$  et  $\mathbb{P}(Y > y) = (1 - \beta y)^{-\gamma}$ . De plus, la copule de survie du couple  $(X_1, X_2)$  est

$$C^*(U_1, U_2) = (u^{-1/\gamma} + v^{-1/\gamma} - 1)^{-\gamma},$$

avec  $\gamma > 0$ , appelée **copule de Pareto**.

## 4.6.2 L'approche par vieillissement (*frailty model*)

Ces modèles ont été introduits à la fin des années 70, et popularisés par [50].

On suppose que l'on veut modéliser deux durées de vie,  $X$  et  $Y$ , indépendantes conditionnellement à un facteur exogène  $\Theta$ . On assume aussi que les lois conditionnelles de  $X$  et  $Y$  sachant  $\Theta$  sont de la forme

$$\overline{F}_{X|\Theta}(x|\theta) = \mathbb{P}(X > x|\Theta = \theta) = \overline{G}_X(x)^\theta,$$

pour une fonction de référence  $G_X$ , pour tout  $\theta$ , et de manière similaire pour la loi de  $Y$  sachant  $\Theta = \theta$ . Alors

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(X > x, Y > y|\Theta)) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(X > x|\Theta)\mathbb{P}(Y > y|\Theta)),$$

c'est à dire,

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \mathbb{E}(\exp[-\Theta(-\log \mathbb{P}(X > x))]\exp[-\Theta(-\log \mathbb{P}(Y > y))]),$$

d'où finalement, si  $\psi$  correspond à la transformée de Laplace de  $\Theta$ , i.e.

$\psi(t) = \mathbb{E}(\exp(-t\Theta))$ , on peut écrire

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \psi(-\log \mathbb{P}(X > x) - \log \mathbb{P}(Y > y)).$$

Compte tenu de l'écriture des lois marginales,  $\mathbb{P}(X > x) = \psi(-\log \bar{G}_X(x))$  la copule de survie de  $(X_1, X_2)$  est alors donnée par

$$C^*(U_1, U_2) = \psi(\psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(v)),$$

qui est une copule Archimédienne de générateur  $\phi = \psi^{-1}$ . Dans le cas particulier où le facteur exogène  $\Theta$  suit une loi Gamma,  $\psi(t) = (1+t)^{1/\alpha}$ , alors  $C^*$  est la copule de Clayton.

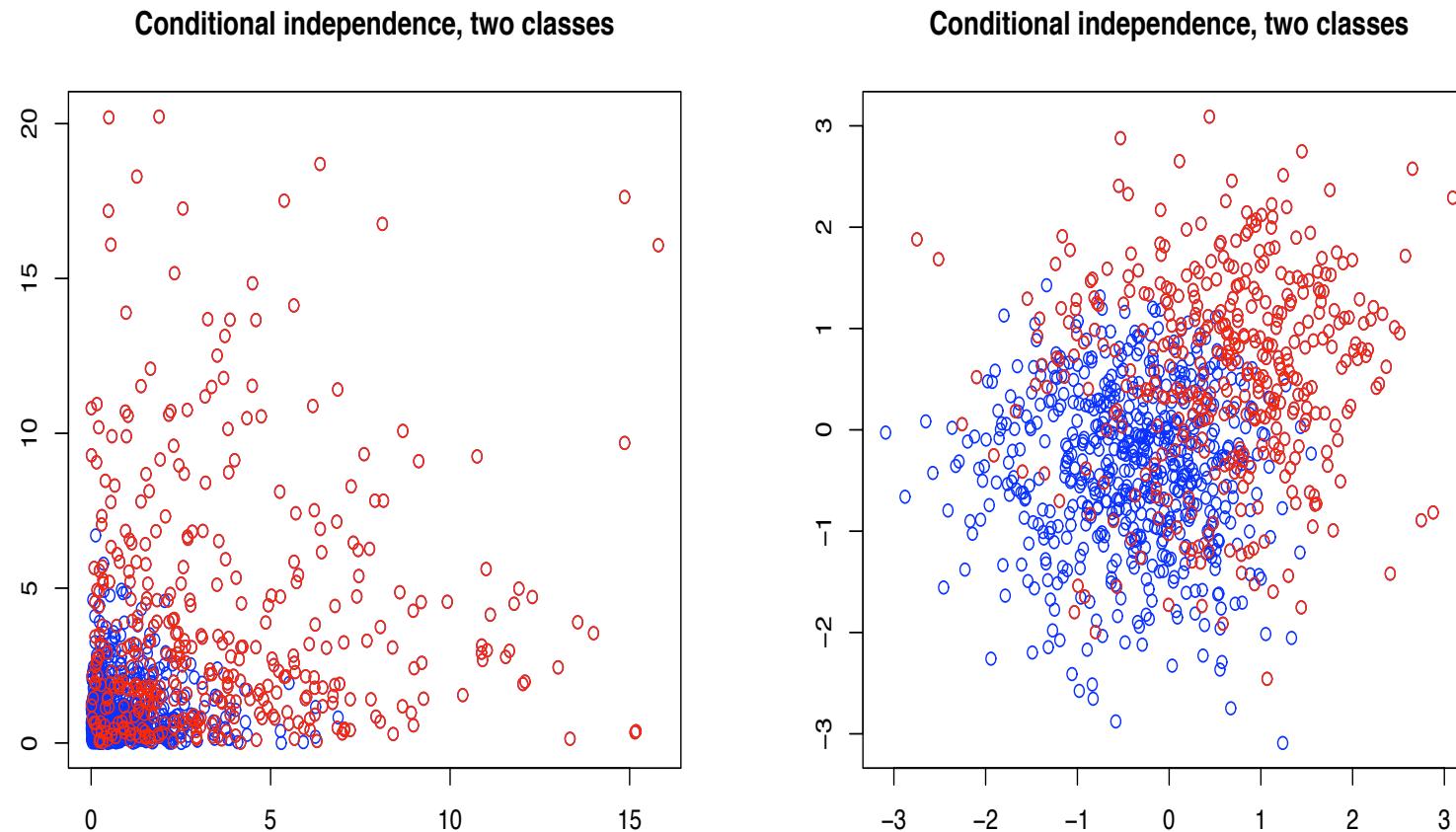
FIGURE 8 – Deux classes de risque  $(X_i, Y_i)$  et  $(\Phi^{-1}(F_X(X_i)), \Phi^{-1}(F_Y(Y_i)))$ .

FIGURE 9 – Trois classes de risque,  $(X_i, Y_i)$  et  $(\Phi^{-1}(F_X(X_i)), \Phi^{-1}(F_Y(Y_i)))$ .

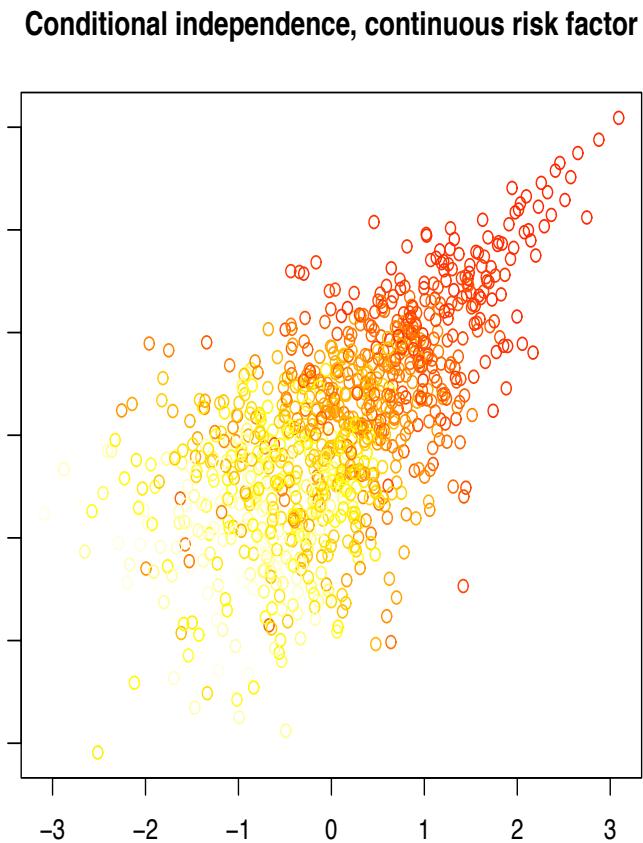
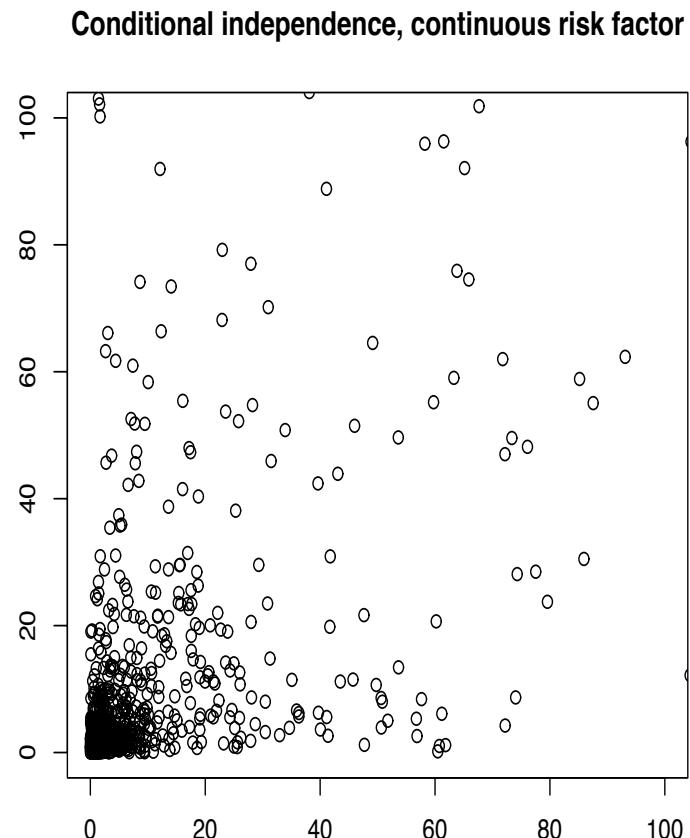


FIGURE 10 – Continuum de classes de risques,  $(X_i, Y_i)$  et  $(\Phi^{-1}(F_X(X_i)), \Phi^{-1}(F_Y(Y_i)))$ .

### 4.6.3 Propriété de la copule de Clayton, en dimension $d = 2$

#### Définition 22

Soit  $\theta \geq -1$ , la copule de Clayton de paramètre  $\theta \geq -1$  est définie sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  par

$$C(u_1, u_2) = (u_1^{-1/\theta} + u_2^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}.$$

Notons que  $\theta \rightarrow -1$ ,  $\theta \rightarrow 0$  et  $\theta \rightarrow \infty$ ,  $C$  correspond respectivement au cas anticomonotone (si  $d = 2$ ), au cas indépendant, et la copule comonotone. De plus, si  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2$ , notons que  $C_1(u_1, u_2) \leq C_2(u_1, v_2)$  pour tout  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ .

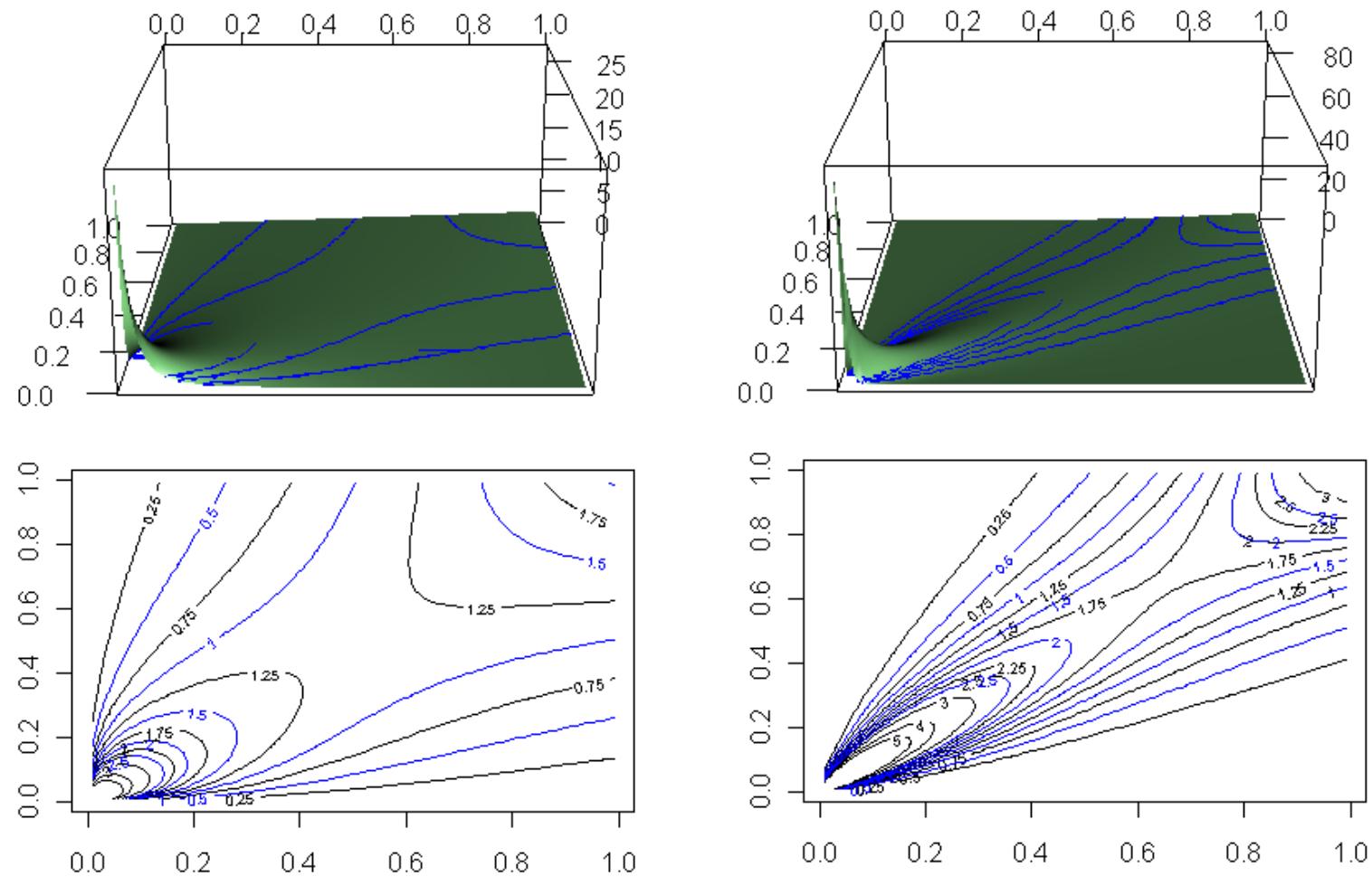


FIGURE 11 – Exemples de densités de la copule de Clayton, avec  $\theta =$  à gauche ( $\rho = 0,5$ ) et  $\theta =$  à droite ( $\rho = 0,8$ ).

#### 4.6.4 Copule de Clayton en dimension $d > 2$

La copule de Clayton étant Archimédienne (de générateur  $\phi(t) = t^{-\theta} - 1$ ) on peut aisément l'étendre à la dimension  $d > 2$ , à condition de se restreindre au cas  $\theta \geq 0$ .

##### Définition23

Pour tout  $\theta \geq 0$ , la copule de Clayton de paramètre  $\theta$  est définie sur  $[0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$  par

$$C(x_1, \dots, x_d) = (x_1^{-1/\theta} + \dots + x_d^{-1/\theta} - (d-1))^{-\theta}. \quad (15)$$

Cette copule peut être obtenue de la manière suivante : posons

$$U_i = \left(1 + \frac{Y_i}{Z}\right)^{-\theta}, \quad i = 1, \dots, d,$$

où les  $Y_i$  sont des variables exponentielles  $\mathcal{E}(1)$  indépendantes, indépendante de  $Z \sim \mathcal{G}(\theta, 1)$ . Alors  $(U_1, \dots, U_d)$  admet pour loi jointe  $C$  donnée par 15.

## 4.7 Le modèle de Marshall et Olkin

### 4.7.1 Le modèle à choc commun

La classe des copules dite de Marshall et Olkin est dérivée du modèle à choc commun introduit par [44].

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux durées de vies, associés à deux composants.

Supposons que 3 chocs peuvent affecter ces composantes : deux associés aux composants  $x_1$  et  $x_2$ , indépendamment, et un dernier qui affecte les deux.

Supposons que ces chocs sont modélisés par des processus de Poisson, avec une durée avant le premier choc  $Z_1$  (exponentielle, de paramètre  $\lambda_1$ ), qui affecte  $x_1$ ,  $Z_2$  (exponentielle, de paramètre  $\lambda_2$ ), qui affecte  $x_2$ , et  $Z_{12}$  (exponentielle, de paramètre  $\lambda_{12}$ ), qui affecte  $x_1$  et  $x_2$ .

Les dates de survenance des chocs sont supposées indépendantes.

Si les chocs sont fatals pour les deux composants, la durée de vie des composants

$(X_1, X_2)$  admet pour fonction de survie

$$\overline{F}(X_1, X_2) = \mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > y > x_2) = \mathbb{P}(Z_1 > x_1)\mathbb{P}(Z_2 > x_2)\mathbb{P}(Z_{12} > \min\{x_1, x_2\}).$$

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \exp(-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_{12} \max\{x_1, x_2\}), \forall x_1, x_2 > 0.$$

On notera que les lois marginales  $X_1$  et  $X_2$  suivent des lois exponentielles de paramètre  $\lambda_1 + \lambda_{12}$  et  $\lambda_2 + \lambda_{12}$ , respectivement.

### Proposition 7

$\overline{F}$  satisfait une propriété *faible* d'absence de mémoire, au sens où

$$\overline{F}(x_1 + t, x_2 + t) = \overline{F}(x_1, x_2)\overline{F}(t, t).$$

Si on note

$$\alpha = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12}} \text{ et } \beta = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12}},$$

la copule de survie du couple  $(X_1, X_2)$  est donnée par

$$C^*(u_1, u_2) = u_1 u_2 \min\{u_1^{-\alpha}, u_2^{-\beta}\} = \min\{u_1^{1-\alpha} u_2, u_1 u_2^{1-\beta}\}.$$

## 4.7.2 Copule induite par le modèle de Marshall et Olkin

### Définition24

Etant donnés  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ , la copule de Marshall-Olkin de paramètre  $(\alpha, \beta)$  est

$$C(u_1, u_2) = \min\{u_1^{1-\alpha}u_2, u_1u_2^{1-\beta}\}.$$

Cette copule est parfois appelée copule de Cuadras-Augé dans le cas  $\alpha = \beta$ , [16].

### Remarque11

Notons que ces copules possèdent une composante singulière, de masse strictement positive sur  $\mathcal{C} = \{(u_1, u_2) \in [0, 1] \times [0, 1], u_1^\alpha = u_2^\beta\}$ . De plus, la masse de cette courbe est

$$\mathbb{P}(U_1 = U_2) = \mathbb{P}(\text{ le premier choc affecte les deux composantes }) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}} > 0.$$

On notera que pour cette copule, le  $\tau$  de Kendall et le  $\rho$  de Spearman sont respectivement

$$\tau = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} \text{ et } \rho = \frac{3\alpha\beta}{2\alpha + 2\beta - \alpha\beta},$$

et les indices de dépendance de queue sont donnés par

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \min\{u^\alpha, u^\beta\}}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} u \min\{u^\alpha, u^\beta\} = 0,$$

et

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + u^2 \min\{u^\alpha, u^\beta\}}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + u^2 u^\alpha}{1 - u} = \alpha,$$

en supposant que  $\alpha < \beta$ . Plus généralement,

$$\lambda_L = 0 \text{ et } \lambda_U = \min\{\alpha, \beta\}.$$

### 4.7.3 Intérêt de la copule de Marshall et Olkin

Ce modèle à choc commun présente l'avantage de le rendre facilement interprétable, et pratique pour la programmation.

En assurance vie, [28] et [9] ont montré son intérêt, (pratique) : si on note  $T_x$  et  $T_y$  les durées de vie résiduelles d'un mari et de son épouse à la signature d'un contrat d'assurance vie (ils sont alors respectivement l'âge  $x$  et  $y$ ), on note classivement  ${}_k p_{\overline{x}\overline{y}}$  la probabilité conditionnelle qu'au moins un des deux survive  $k$  années,

$${}_k p_{\overline{x}\overline{y}} = 1 - \mathbb{P}(T_x \leq k, T_y \leq k).$$

Si l'on suppose ces durées de vie résiduelles exponentielles, alors

$${}_k p_{\overline{x}\overline{y}} = {}_k p_x + {}_k p_y - \exp(-\lambda_{xy} k) {}_k p_x \cdot {}_k p_y.$$

L'annuité pour un contrat au dernier survivant s'écrit alors

$$a_{\overline{x}\overline{y}} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_x > k \text{ or } T_y > k) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_{\overline{x}\overline{y}}.$$

En posant  $k p_x^* = \exp(\lambda_{xy} k) k p_x$  et  $k p_y^* = \exp(\lambda_{xy} k) k p_y$ , les annuités s'écrivent alors as

$$a_{\overline{xy}} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\delta + \lambda_{xy}) \cdot k} (k p_x^* + k p_y^* - k p_x^* \cdot k p_y^*),$$

correspondant à un calcul fait en supposant l'indépendance entre les durées de vie, et en actualisant avec un facteur  $\delta + \lambda_{xy}$ . On note que plus la dépendance est forte, plus faible sera le montant de l'annuité.

## 4.8 Le modèle de Gumbel

La copule de *Gumbel* a été introduite dans [34]. Elle est parfois appelée copule de *Gumbel-Hougaard*, suite à son utilisation dans [35], ou encore la [distribution logistique extrême](#).

### 4.8.1 Une loi logistique bivariée

Considérons la fonction de répartition

$$F(X_1, X_2) = \exp\left(-(x_1^{-\theta} + x_2^{-\theta})^{1/\theta}\right), \forall x_1, x_2 > 0,$$

où  $\theta \geq 1$ . Cette fonction peut se réécrire sous la forme

$$F(X_1, X_2) = \exp\left(-\left([- \log(e^{-1/x_1})]^\theta + [- \log(e^{-1/x_2})]^\theta\right)^{1/\theta}\right), x_1, x_2 > 0.$$

Les lois marginales de cette distribution sont des loi de Fréchet standard ( $F_i(x_i) = e^{-1/x_i}$  for  $x_i > 0$ ). La copule associée à cette loi bivariée est alors

$$C(u_1, u_2) = \exp \left( - \left( [-\log u_1]^\theta + [-\log u_2]^\theta \right)^{1/\theta} \right), \forall u_1, u_2 \in [0, 1],$$

où  $\theta \geq 1$ .

#### 4.8.2 Propriétés de la copule de Gumbel

##### Définition 25

Soit  $\theta \geq 1$ , la copule de Gumbel de paramètre  $\theta$  est définie sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  par

$$C(u_1, u_2) = \exp \left( - \left( [-\log u_1]^\theta + [-\log u_2]^\theta \right)^{1/\theta} \right), \quad u_1, u_2 \in [0, 1].$$

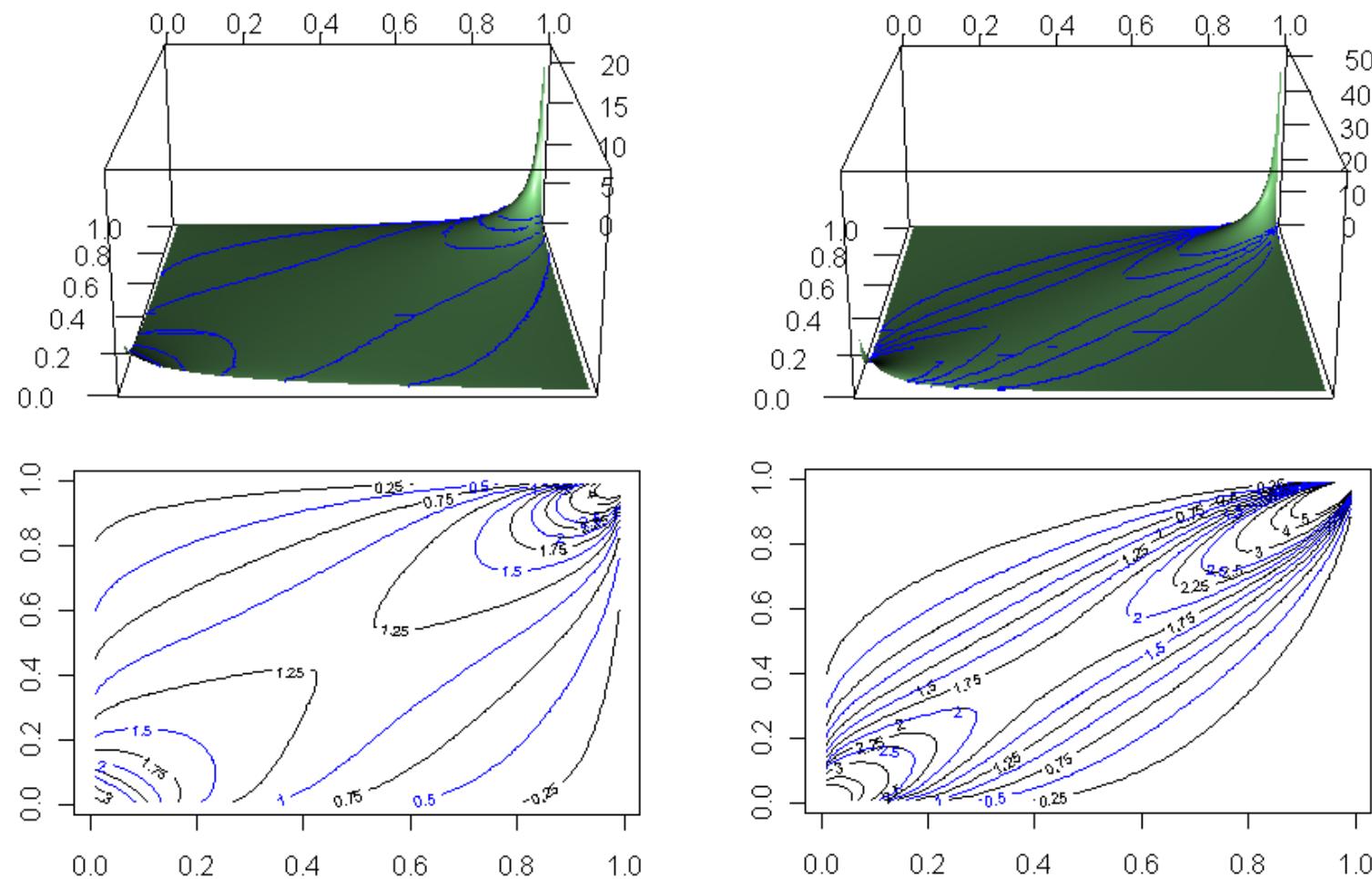


FIGURE 12 – Exemples de densités de la copule de Gumbel, avec  $\theta =$  à gauche ( $\rho = 0, 5$ ) et  $\theta =$  à droite ( $\rho = 0, 8$ ).

Le  $\tau$  de Kendall d'une copule de Gumbel de paramètre  $\theta \geq 1$  est

$$\tau = \frac{\theta - 1}{\theta},$$

([49]), et les indices de dépendance de queue sont  $\lambda_L = 0$  et  $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$ .

### Remarque 12

La copule de Gumbel est **max-stable**, au sens où  $\forall t > 0$ ,

$$C^t(u_1, u_2) = C(u_1^t, u_2^t), \forall u_1, u_2 \in [0, 1],$$

## 4.9 La copule Gaussienne

La copule est obtenue dès lors que l'on

### Définition26

Pour tout  $r \in [-1, 1]$ , la copule Gaussienne est définie par

$$C(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \exp\left(\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1-r^2)}\right) dx dy$$

Pour une copule Gaussienne dont le vecteur Gaussien sous-jacent a pour corrélation  $r \in [-1, +01]$ , le  $\tau$  de Kendall et le  $\rho$  de Spearman sont respectivement

$$\tau = \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(r) \text{ et } \rho = \frac{6}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{r}{2}\right)$$

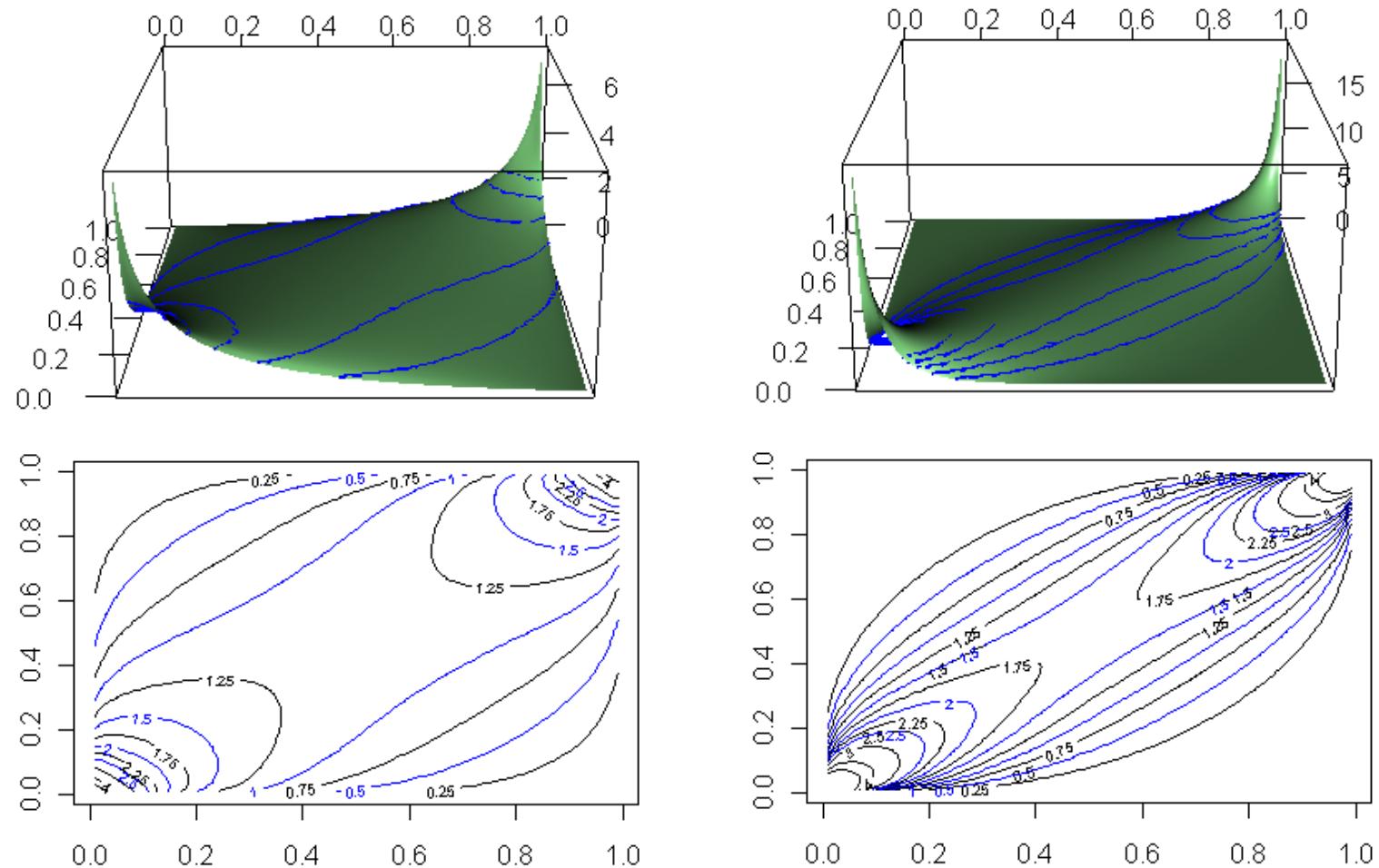


FIGURE 13 – Exemples de densités de la copule de Gaussienne, avec  $\theta =$  à gauche ( $\rho = 0, 5$ ) et  $\theta =$  à droite ( $\rho = 0, 8$ ).

## 5 Mesurer et comparer des dépendance

### 5.0.1 Mesures de dépendance

[56] a proposé une axiomatique sur les propriétés fondamentales que devrait satisfaire une mesure de concordance  $\kappa$ .

Pour cela, il convient que la mesure soit cohérente avec une relation d'ordre sur les paires de variables aléatoire, l'ordre naturel étant l'ordre  $\preceq_{PQD}$  (de dépendance positive par quadrant, parfois appelé aussi ordre de concordance), défini par  $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \preceq_{PQD} (Y_1, Y_2) = \mathbf{Y}$  si et seulement si

$$\mathbb{P}(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, F_{X_2}(X_2) \leq u_2) \leq \mathbb{P}(F_{Y_1}(Y_1) \leq u_1, F_{Y_2}(Y_2) \leq u_2),$$

pour tout  $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$ . Ou de manière équivalente, si  $C_{\mathbf{X}}$  est la copule associée à  $\mathbf{X}$ , et  $C_{\mathbf{Y}}$  est la copule associée à  $\mathbf{Y}$ ,

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2) \preceq_{PQD} (Y_1, Y_2) = \mathbf{Y} \text{ si et seulement si } C_{\mathbf{X}}(u_1, u_2) \leq C_{\mathbf{Y}}(u_1, u_2).$$

## Définition27

$\kappa$  est une mesure de concordance si et seulement si  $\kappa$  vérifie les propriétés suivantes

1.  $\kappa$  est définie pour toute paire de variables continues  $(X_1, X_2)$ ,
2.  $-1 \leq \kappa(X_1, X_2) \leq +1$ ,  $\kappa(X_1, X_1) = +1$  et  $\kappa(X_1, -X_1) = -1$ ,
3.  $\kappa(X_1, X_2) = \kappa(X_2, X_1)$ ,
4. si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, alors  $\kappa(X_1, X_2) = 0$ ,
5.  $\kappa(-X_1, X_2) = \kappa(X_1, -X_2) = -\kappa(X_1, X_2)$ ,
6. si  $(X_1, X_2) \preceq_{PQD} (Y_1, Y_2)$ , alors  $\kappa(X_1, X_2) \leq \kappa(Y_1, Y_2)$ ,
7. si  $(X_1^1, X_2^1), (X_1^2, X_2^2), \dots$  est une suite de vecteurs qui converge en loi vers  $(X_1, X_2)$  alors  $\kappa(X_1^n, X_2^n) \rightarrow \kappa(X_1, X_2)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

## Remarque13

La corrélation par exemple ne satisfait pas le premier.

On peut définir une dépendance positive

## Remarque14

[53] avait proposé de finir les mesures de dépendance sous la forme de distance à l'indépendance, ne permettant pas de distinguer dépendance positive et négative. [53] imposait en particulier que  $\delta(X, \pm X) = +1$ , et des propriétés de linéarité de la mesure, i.e.  $\delta(aX + b, cY + d) = \delta(X_1, X_2)$  pour tout  $a, c > 0$  et  $b, d$ . En supposant que  $\delta$  est compris entre 0 et 1, [53] avoir défini une *mesure*. [59] ont noté que ces hypothèses étaient beaucoup trop contraignantes.

## Proposition8

Si  $\kappa$  est une mesure de concordance, et si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions croissantes  $\kappa(f(X), g(Y)) = \kappa(X_1, X_2)$ . De plus,  $\kappa(X_1, X_2) = 1$  s'il existe  $f$  presque sûrement strictement croissante telle que  $Y = f(X)$  with  $f$ ; et de manière analogue  $\kappa(X_1, X_2) = -1$  si  $Y = f(X)$  où  $f$  presque sûrement strictement décroissante.

On déduit de cette proposition que les mesures de concordance sont fonction de la copule uniquement, au sens où si  $(X_1, X_2)$  et  $(Y_1, Y_2)$  ont la même copule (notée  $C$ ), alors  $\kappa(X_1, Y_1) = \kappa(X_2, Y_2) = \kappa(C)$ .

## Exemple27

Le  $q$  de Blomqvist, parfois appelé *coefficient de corrélation médiane*, est défini par

$$\begin{aligned} q &= \mathbb{P}((X - \text{médiane}(X))(Y - \text{médiane}(Y)) > 0) \\ &\quad - \mathbb{P}((X - \text{médiane}(X))(Y - \text{médiane}(Y)) < 0), \end{aligned}$$

qui peut aussi s'écrire

$$q = 4C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1.$$

## 5.1 La corrélation comme mesure standard de dépendance

### 5.1.1 La corrélation linéaire de Pearson

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires continues de variance finie, alors la corrélation linéaire (ou de Pearson) est définie par

$$\text{corr}(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)][X - \mathbb{E}(Y)])}{\sqrt{\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)\mathbb{E}([Y - \mathbb{E}(Y)]^2)}}.$$

On parle de corrélation *linear* au sens où  $\text{corr}(X_1, X_2) = +1$  si et seulement s'il existe  $a > 0$  et  $b$  tels que  $Y = aX + b$  presque sûrement. De plus, cet coefficient est invariant par transformations affines, i.e.

$$\text{corr}(aX_1 + b, cX_2 + d) = \text{corr}(X_1, X_2) \text{ si } a \text{ et } c \text{ sont de même signe.}$$

## Exemple28

Comme  $\text{corr}(X_1, X_2)$  peut s'écrire sous la forme  $\mathbb{E}(\phi(X_1, X_2))$  où  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  supermodulaire, alors  $\text{corr}(X_1, X_2)$  vérifie l'inégalité de Tchen ([62]),

$$\begin{aligned}\text{corr}(X^-, Y^-) &= \text{corr}(F_X^{-1}(U), F_X^{-1}(1-U)) \leq \text{corr}(X_1, X_2) \\ &\leq \text{corr}(F_X^{-1}(U), F_X^{-1}(U)) = \text{corr}(X^+, Y^+),\end{aligned}$$

où  $U$  est uniformément distribué sur  $[0, 1]$ . En conséquence, le coefficient de corrélation ne décrit pas nécessairement l'intervalle  $[-1, 1]$ . E.g., si  $X$  et  $Y$  suivent une loi lognormale, de paramètre de variance 1 et  $\sigma$ , respectivement,

$$\frac{e^\sigma - 1}{\sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \sqrt{e - 1}} \leq \text{corr}(X, Y) \leq \frac{e^\sigma - 1}{\sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \sqrt{e - 1}}. \quad (16)$$

(cf. [54]). Ceci implique en particulier qu'un coefficient de corrélation proche de 0 peut parfaitement correspondre à un cas de comonotonie.

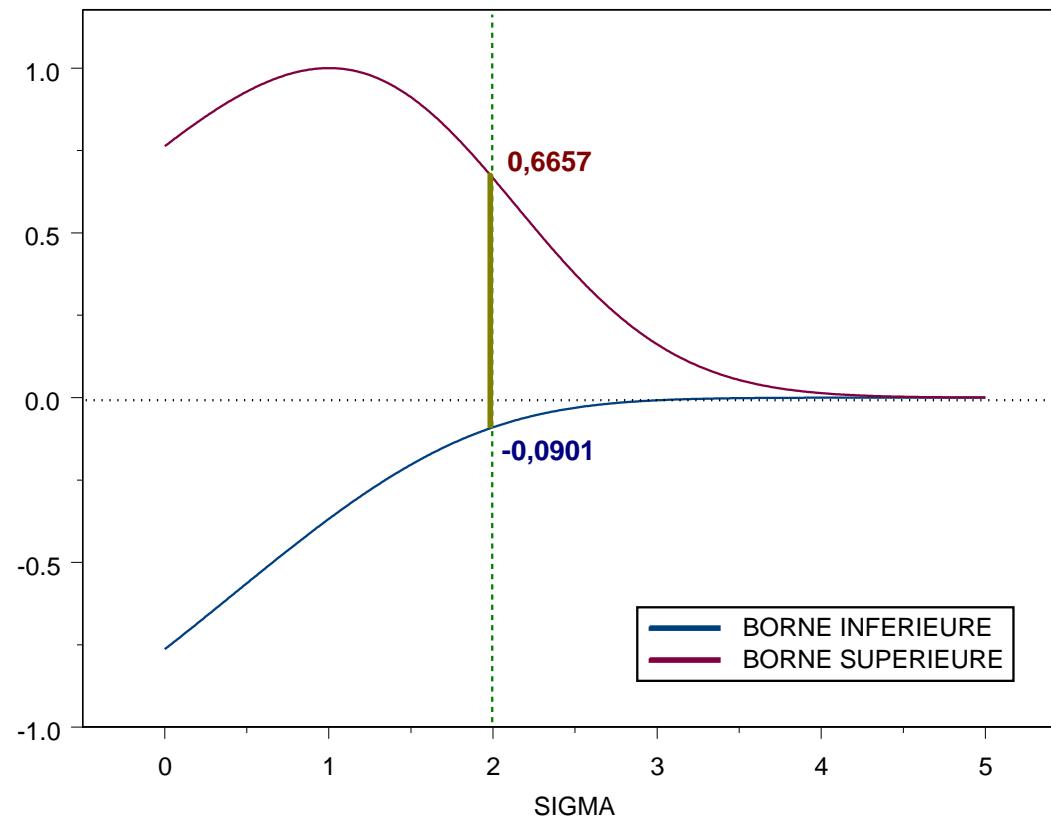


FIGURE 14 – Bornes de la corrélation pour des variables lognormales.

## Exemple29

Ce coefficient de corrélation apparaît naturellement dans les modèles de régression. Si on considère la régression de  $Y$  sur  $X$ , les estimateurs des coefficients de la régression  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  qui minimisent  $\mathbb{E}(Y - (aX + b))^2$  sont

$$\hat{a} = \frac{\text{cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)} \text{ et } \hat{b} = \mathbb{E}(Y) - \hat{a}\mathbb{E}(X).$$

## 5.2 Le tau de Kendall et le rho de Spearman

Le  $\rho$  de Spearman entre deux variables continues est la corrélation (au sens de Pearson) entre  $U_1 = F_1(X_1)$  et  $U_2 = F_2(X_2)$ . Comme  $U_1$  et  $U_2$  sont uniformément répartie sur  $[0, 1]$ ,  $\mathbb{E}(U_1) = \mathbb{E}(U_2) = 1/2$ , and  $Var(U_1) = Var(U_2) = 1/12$ , et donc

$$\rho(X_1, X_2) = corr(U_1, U_2) = \frac{\mathbb{E}(U_1 U_2 - 1/4)}{1/12} = 12\mathbb{E}(U_1 U_2) - 3.$$

### Définition28

Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de variables aléatoire de copule  $C$ , et de lois marginales continues. Alors le  $\rho$  de Spearman est

$$\begin{aligned}\rho(X_1, X_2) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3 \\ &= 12 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} [F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)] dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Comme le note [20], l'expression à droite est une distance moyenne entre  $F$  et  $F^\perp$ . Ce coefficient a été introduit sous sa forme empirique par Spearman en 1904. Il est possible de noter que

$$\rho(X_1, X_2) = 3[\mathbb{P}((X_1 - Y_1)(Y_2 - Z_3) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - Y_2)(X_2 - Z_3) < 0)],$$

où  $(X_1, X_2)$ ,  $(Y_1, Y_2)$  et  $(Z_1, Z_2)$  sont trois versions indépendantes de  $(X_1, X_2)$  ([49]).

### Définition29

Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de variables aléatoires continues, de copule  $C$ , alors de  $\tau$  de Kendall est défini par

$$\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 = 4\mathbb{E}(C(U_1, U_2)) - 1.$$

Là encore, initiallement, le  $\tau$  de Kendall n'a pas été défini, initialement, à l'aide des copules, mais comme une probabilité de concordance à laquelle on soustrait la probabilité de discordance du vecteur  $(X_1, X_2)$ , i.e.

$$\tau(X_1, X_2) = 3[\mathbb{P}((X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0)],$$

où  $(X_1, X_2)$  and  $(Y_1, Y_2)$  sont deux versions indépendantes de  $(X_1, X_2)$  ([49]).

### Proposition9

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont continues, alors le  $\tau$  de Kendall et le  $\rho$  de Spearman sont des mesures de concordance.

En particulier pour des vecteurs comonotones,  $\rho(X_1, X_2) = 1$  et  $\tau(X_1, X_2) = 1$ , alors que pour des vecteurs anticomonotones  $\rho(X_1, X_2) = -1$  and  $\tau(X_1, X_2) = -1$ . Et la réciproque est vraie.

## Exemple30

Pour la copule min-max présentée dans l'Exemple 6, on notera que

$$\tau(X_{1:n}, X_{n:n}) = \frac{1}{2n - 1}.$$

## Exemple31

Si  $X_1$  et  $X_2$  forment un couple de copule Archimédienne, de générateur  $\phi$ , alors le  $\tau$  de Kendall s'écrit

$$\tau(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt.$$

## Exemple32

Comme le montre [37], considérons pour  $\theta \in [0, 1]$  une mélange entre la copule indépendante et la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding,

$$C(u_1, u_2) = (1 - \theta)C^\perp(u_1, u_2) + \theta C^+(u_1, u_2),$$

pour tout  $(u_1, u_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Alors si  $(X_1, X_2)$  a pour copule  $C$ ,  $\rho(X_1, X_2) = \theta$ .

Plus généralement, si l'on rajoute la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding, comme suggéré par [27], avec comme paramètres de mélange  $\alpha, \beta > 0$  tels que  $\alpha + \beta \leq 1$ ,

$$C(u_1, u_2) = \alpha C^-(u_1, u_2) + (1 - \alpha - \beta)C^\perp(u_1, u_2) + \beta C^+(u_1, u_2), \forall (u_1, u_2) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Alors  $\rho(X_1, X_2) = \beta - \alpha$ .

Les Tableaux 1 et 2 montrent l'évolution du  $\tau$  de Kendall et du  $\rho$  de Spearman en fonction du paramètre sous jacent (noté ici  $\theta$ ),

Kendall's $\tau$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Gaussian $\theta$	0.00	0.16	0.31	0.45	0.59	0.71	0.81	0.89	0.95	0.99	1.00
Gumbel $\theta$	1.00	1.11	1.25	1.43	1.67	2.00	2.50	3.33	5.00	10.0	$+\infty$
Plackett $\theta$	1.00	1.57	2.48	4.00	6.60	11.4	21.1	44.1	115	530	$+\infty$
Clayton $\theta$	0.00	0.22	0.50	0.86	1.33	2.00	3.00	4.67	8.00	18.0	$+\infty$
Frank $\theta$	0.00	0.91	1.86	2.92	4.16	5.74	7.93	11.4	18.2	20.9	$+\infty$
Joe $\theta$	1.00	1.19	1.44	1.77	2.21	2.86	3.83	4.56	8.77	14.4	$+\infty$
Galambos $\theta$	0.00	0.34	0.51	0.70	0.95	1.28	1.79	2.62	4.29	9.30	$+\infty$
Morgenstein $\theta$	0.00	0.45	0.90	-	-	-	-	-	-	-	-

TABLE 1 –  $\tau$  de Kendall en fonction du paramètre  $\theta$  de la copule sous-jacente.

Spearman's $\rho$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Gaussian $\theta$	0.00	0.10	0.21	0.31	0.42	0.52	0.62	0.72	0.81	0.91	1.00
Gumbel $\theta$	1.00	1.07	1.16	1.26	1.38	1.54	1.75	2.07	2.58	3.73	$+\infty$
A.M.H. $\theta$	1.00	1.11	1.25	1.43	1.67	2.00	2.50	3.33	5.00	10.0	$+\infty$
Plackett $\theta$	1.00	1.35	1.84	2.52	3.54	5.12	7.76	12.7	24.2	66.1	$+\infty$
Clayton $\theta$	0.00	0.14	0.31	0.51	0.76	1.06	1.51	2.14	3.19	5.56	$+\infty$
Frank $\theta$	0.00	0.60	1.22	1.88	2.61	3.45	4.47	5.82	7.90	12.2	$+\infty$
Joe $\theta$	1.00	1.12	1.27	1.46	1.69	1.99	2.39	3.00	4.03	6.37	$+\infty$
Galambos $\theta$	0.00	0.28	0.40	0.51	0.65	0.81	1.03	1.34	1.86	3.01	$+\infty$
Morgenstein $\theta$	0.00	0.30	0.60	0.90	-	-	-	-	-	-	-

TABLE 2 –  $\rho$  de Spearman en fonction du paramètre  $\theta$  de la copule sous-jacente.

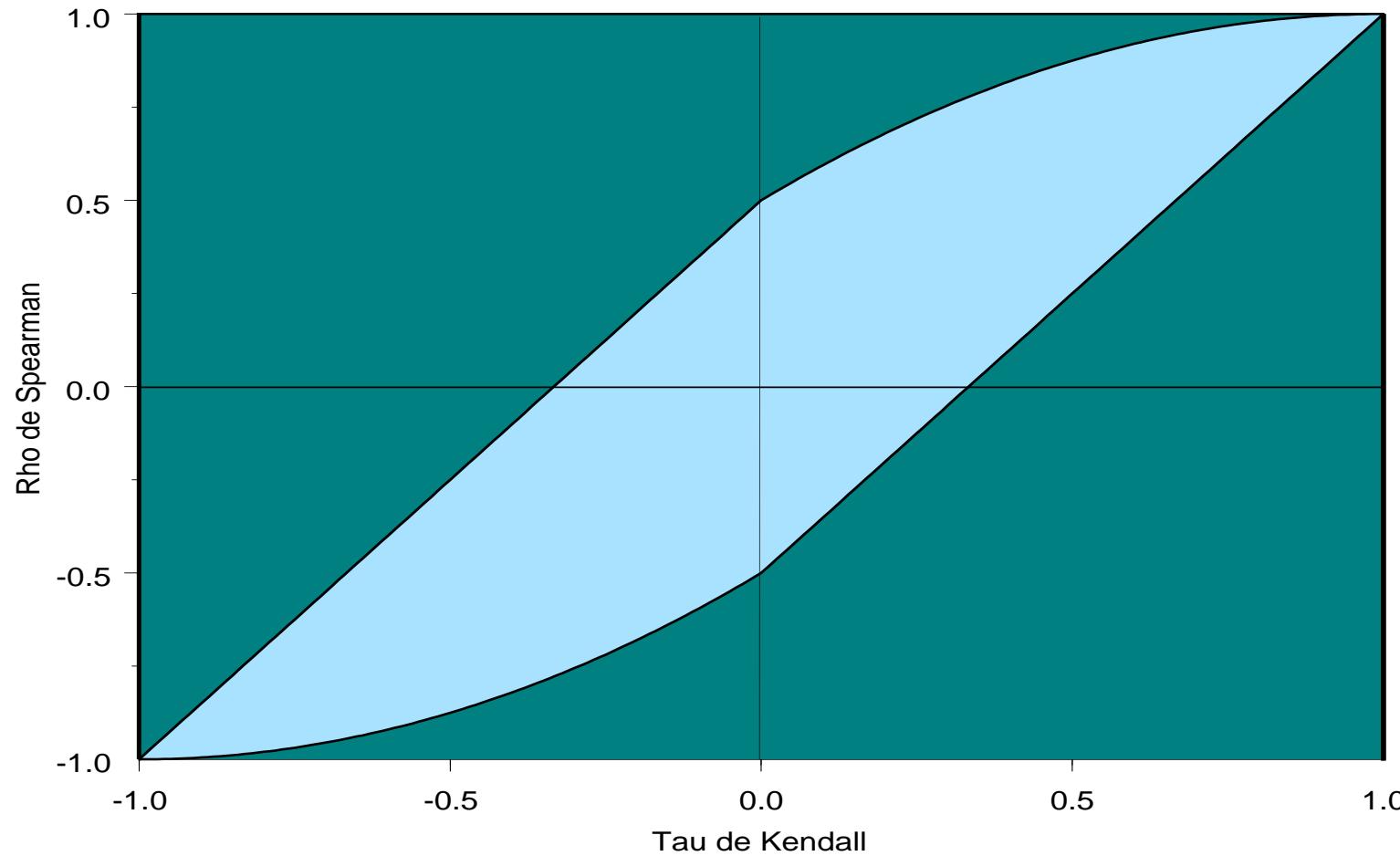


FIGURE 15 – Région d'admissibilité pour le tau de Kendall et le rho de Spearman

## Remarque 15

En analyse canonique nonlinéaire, on cherche les transformations (nonlinéaires) qui maximisent la corrélation entre deux variables,

$$r^*(X_1, X_2) = \max\{a(X), b(Y)\}$$

où  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions mesurables telles que  $\text{Var}(a(X))$  et  $\text{Var}(b(X))$  soient finis. On parle alors de **corrélation maximale**. On notera que cette mesure peut être intéressante, en particulier car  $r^*(X_1, X_2) = 0$  si et seulement si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. De plus, dans le cas Gaussien, comme l'a montré [39],  $r^*(X_1, X_2) = r(X_1, X_2)$ , autrement dit la corrélation est maximale avec des transformations affines.

[38] avaient suggéré de se limiter aux fonctions  $a$  et  $b$  monotones, introduisant ainsi la corrélation monotone.

## 5.3 Autres mesures de corrélation

Parmi les autres mesures intéressantes, car ne dépendant que des rangs, on pourra introduire l'indice  $\gamma$  de Gini, le  $\beta$  de Blomqvist, ou encore la classe de Schweizer et Wolff.

### Définition30

Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de copule  $C$ . L'indice  $\gamma$  de Gini est défini par

$$\gamma(X_1, X_2) = 4 \left( \int_0^1 C(s, 1-s) ds - \int_0^1 |s - C(s, s)| ds \right).$$

[8] a proposé un test dit que quadrant, consistant évaluer la probabilité que  $X$  et  $Y$  dépassent conjointement la valeur médiane.

## Définition31

Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de copule  $C$ . L'indice  $\beta$  de Blomqvist est défini par

$$\beta(X_1, X_2) = 2\mathbb{P}\left(\left[X_1 > F_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \left[X_2 > F_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] > 0\right) - 1 = C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1.$$

Enfin, [59] et [?] ont proposé d'étendre la définition du  $\rho$  de Spearman,

$$\rho(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 |C(u_1, u_2) - C^\perp(u_1, u_2)| du_1 du_2$$

en changeant la norme utilisée pour mesurer la distance entre  $C$  et  $C^\perp$ ,

$$k(X_1, X_2) = \kappa_\star \int_0^1 \int_0^1 \|C(u_1, u_2) - C^\perp(u_1, u_2)\|_\star du_1 du_2,$$

où  $\|\cdot\|_\star$  désigne une norme, et  $\kappa_\star$  une constante de normalisation (de manière à avoir  $k(X_1, X_1) = 1$ ).

## Définition32

Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de copule  $C$ . L'indice  $\Phi^2$  de Hoeffding est défini par

$$k(X_1, X_2) = \sqrt{90 \int_0^1 \int_0^1 [C(u_1, u_2) - C^\perp(u_1, u_2)]^2 du_1 du_2}.$$

## Définition33

Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de copule  $C$ . Le  $\kappa$  est défini par

$$\kappa(X_1, X_2) = 4 \sup_{[0,1]^2} \{|C(u_1, u_2) - C^\perp(u_1, u_2)|\}.$$

Peut se rapprocher d'une distance de Kolmogorov-Smirnov par rapport à l'indépendance.

## 5.4 Dépendance locale, dans les queues

Pour étudier la dépendance dans les queues de distribution [63] avait suggéré d'introduire des fonctions de concentrations dans les queues.

### Définition34

Pour la queue inférieure,

$$L(z) = \mathbb{P}(U < z, V < z)/z = C(z, z)/z = \mathbb{P}(U < z|V < z) = \mathbb{P}(V < z|U < z),$$

et pour la queue supérieure,

$$R(z) = \mathbb{P}(U > z, V > z)/(1 - z) = \mathbb{P}(U > z|V > z).$$

[36] avait définie le paramètre de dépendance de queue supérieure et de queue inférieure, respectivement, en posant

$$\lambda_U = R(1) = \lim_{z \rightarrow 1} R(z) \text{ et } \lambda_L = L(0) = \lim_{z \rightarrow 0} L(z).$$

## Définition35

Soit  $(X_1, X_2)$  un couple aléatoire dans  $\mathbb{R}^2$ . Les indices de dépendance de queue inférieure ( $L$ ) et supérieure ( $U$ ) sont définis respectivement, dès lors que les limites existent, par

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{P} (X \leq F_X^{-1}(u) | Y \leq F_Y^{-1}(u)),$$

et

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \mathbb{P} (X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u)).$$

## Proposition10

Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de copule  $C$ , alors les indices de dépendance de queue, s'ils existent, sont définis par

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} \text{ et } \lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{C^*(u, u)}{1 - u}.$$

## Exemple33

Considérons le cas de copules Archimédiennes (comme dans [49], [12] ou [1]),

$$\lambda_U = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \phi^{-1}(2x)}{1 - \phi^{-1}(x)} \text{ et } \lambda_L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi^{-1}(2\phi(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}(2x)}{\phi^{-1}(x)}.$$

[41] ont proposé une approche alternative pour quantifier la dépendance dans les queues. Supposons que  $X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{\leq} X_2$ .

- sous hypothèse d'**indépendance**,

$$\mathbb{P}(X > t, Y > t) = \mathbb{P}(X > t) \times \mathbb{P}(Y > t) = \mathbb{P}(X > t)^2,$$

- sous hypothèse de **comonotonie**,  $\mathbb{P}(X > t, Y > t) = \mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(Y > t)$ ,

On peut alors supposer que  $\mathbb{P}(X > t, Y > t) \sim \mathbb{P}(X > t)^{1/\eta}$  as  $t \rightarrow \infty$ , où  $\eta \in (0, 1]$  sera appelée indice de dépendance de queue. On peut alors définir un indice de queue inférieure et de queue supérieure, respectivement notés  $\eta_U$  et  $\eta_L$ .

Aussi, suivant l'idée de [14] on utiliser la définition suivante

### Définition36

Soit

$$\bar{\chi}_U(z) = \frac{2 \log(1-z)}{\log C^*(z,z)} - 1 \text{ et } \bar{\chi}_L(z) = \frac{2 \log(1-z)}{\log C(z,z)} - 1$$

Alors  $\eta_U = (1 + \lim_{z \rightarrow 0} \bar{\chi}_U(z))/2$  et  $\eta_L = (1 + \lim_{z \rightarrow 0} \bar{\chi}_L(z))/2$  sont appelés indices de queue supérieure et inférieure, respectivement.

### Exemple34

Si  $(X_1, X_2)$  a une copule de Gumbel, et des marges Fréchet de paramètre 1,

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \exp(-(x^{-\alpha} + y^{-\alpha})^{1/\alpha}), \text{ où } \alpha \geq 0,$$

alors  $\eta_U = 1$  alors que  $\eta_L = 1/2^\alpha$ . On peut montrer que dans le cas d'une copule de Clayton,  $\eta_U = 1/2$  et  $\eta_L = 1$ . Dans le cas d'une copule Gaussienne de corrélation  $r$   $\eta_U = \eta_L = (1+r)/2$ .

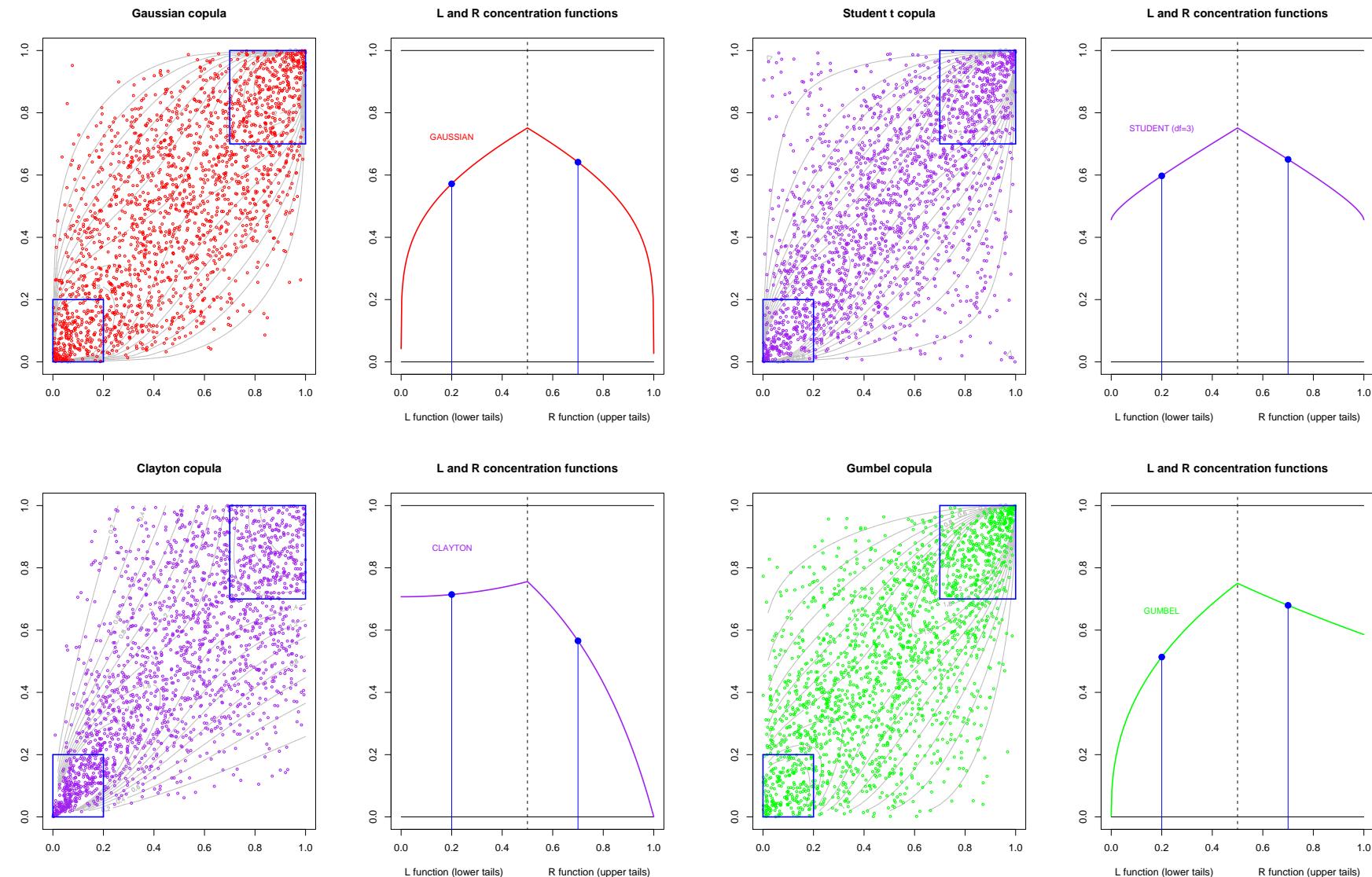


FIGURE 16 – Fonctions cumulatives  $L$  (sur  $[0, 1/2]$ ) et  $R$  (sur  $[1/2, 1]$ ) avec dans la partie supérieure, le cas Gaussien et le cas Student  $t$  à droite, et dans la partie

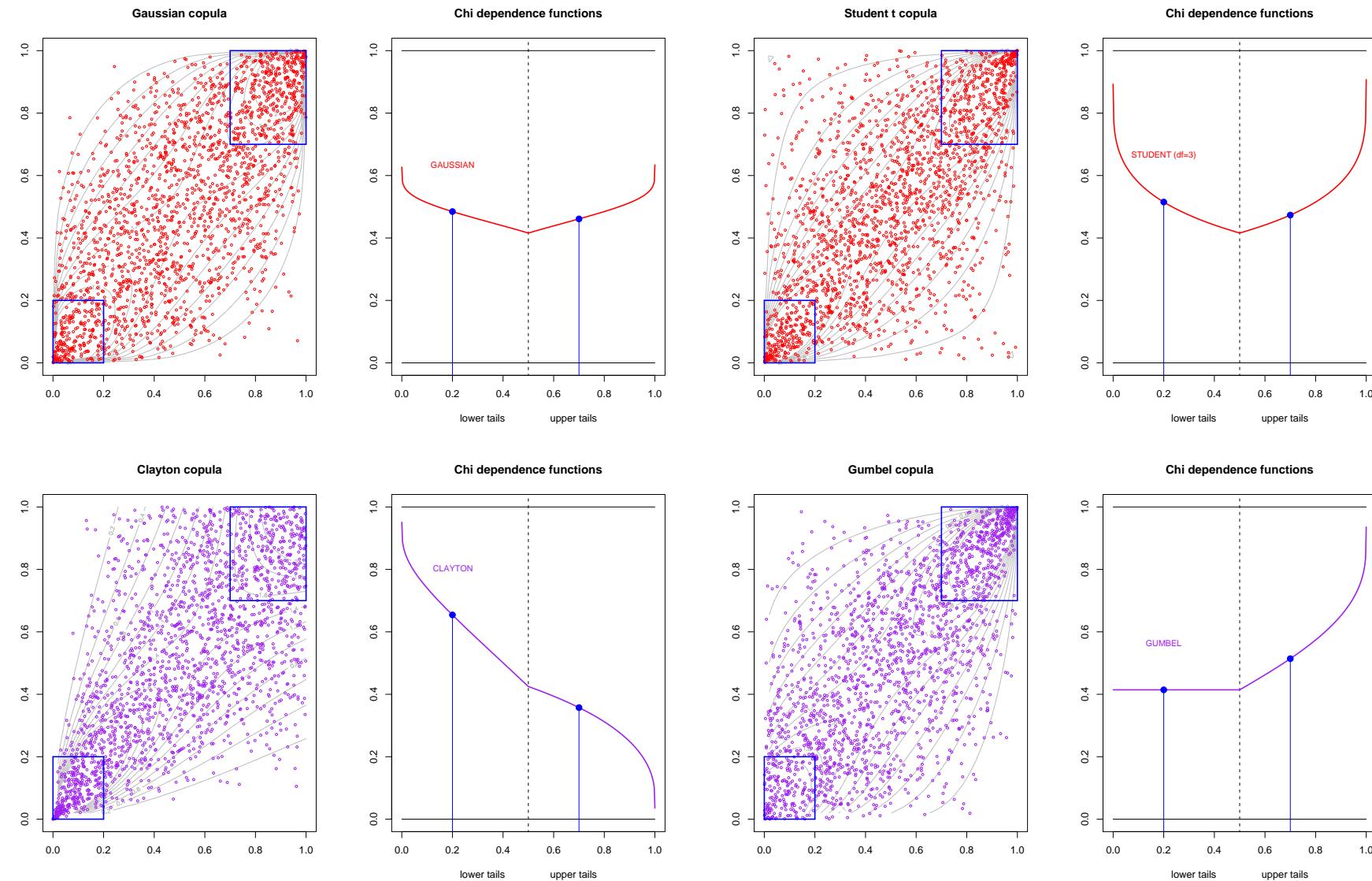


FIGURE 17 – Fonctions cumulatives  $\bar{\chi}_L$  (sur  $[0, 1/2]$ ) et  $\bar{\chi}_U$  (sur  $[1/2, 1]$ ) avec dans la partie supérieure, le cas Gaussien et le cas Student  $t$  à droite, et dans la partie

## 5.5 Quantifier la dépendance en dimension $d > 2$

En dimension  $d > 2$ , le cas Gaussien nous invite à étudier la dépendance par paires, en regarder des *matrices* de mesures de dépendance. On posera ainsi

$$\mathbf{R} = [r(X_i, X_j)], \text{ pour } i, j = 1, \dots, d.$$

Nous avions noté que les mesures de dépendance naturelles pouvaient parfois devoir comme des distances entre la copule sous-jacente  $C$  et la copule indépendante  $C^\perp$ , normalisé de manière à avoir 1 dans le cas comonotone. En particulier,

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\int_{[0,1] \times [0,1]} C(u_1, u_2) - C^\perp(u_1, u_2) du dv}{\int_{[0,1] \times [0,1]} C^+(u_1, u_2) - C^\perp(u_1, u_2) du dv} \quad (17)$$

En suivant les idées de [66] il est possible d'étendre cette définition en dimension

$d > 2$ ,

$$\rho(\mathbf{X}) = \frac{\int_{[0,1]^d} C(\mathbf{u}) - C^\perp(\mathbf{u}) d\mathbf{u}}{\int_{[0,1] \times [0,1]} C^+(\mathbf{u}) - C^\perp(\mathbf{u}) d\mathbf{u}} = \frac{d+1}{2^d - (d+1)} \left( 2^d \int_{[0,1]^d} C(\mathbf{u}) d\mathbf{u} - 1 \right) \quad (18)$$

pour le  $\rho$  de Spearman, et pour le  $\tau$  de Kendall

$$\tau(\mathbf{X}) == \frac{1}{2^{d-1} - 1} \left( 2^d \int_{[0,1]^d} C(\mathbf{u}) dC\mathbf{u} - 1 \right) \quad (19)$$

### Exemple 35

On peut également définir un  $q$  de Blomqvist multivarié,

$$q = \frac{2^{d-1}}{2^{d-1} - 1} \left[ C\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) + C^\star\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) - 2^{1-d} \right]$$

# 6 De l'aggrégation des risques multiples

## 6.1 Espérance de fonctions nonlinéaires

Rappelons tout d'abord que, peu importe la structure de dépendance entre  $X_1$  et  $X_2$ , deux variables d'espérance finie, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(h(X_1, X_2)) = h(\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2)) \text{ si } h \text{ est linéaire.}$$

De manière générale, on a le résultat suivant

### Proposition 11

Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **2-croissante**, i.e.

$$h(x_2, y_2) + h(x_1, y_1) - h(x_1, y_2) - h(y_1, x_2) \geq 0,$$

pour tout  $x_1 \leq y_1$  et  $x_2 \leq y_2$ . Alors pour tout  $(X_1, X_2) \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$ ,

$$\mathbb{E}(h(X_1^-, X_2^-)) \leq \mathbb{E}(h(X_1, X_2)) \leq \mathbb{E}(h(X_1^+, X_2^+)),$$

Cette proposition peut se généraliser en dimension plus grande, mais la notion de croissance n'est alors plus la  $d$ -croissance, mais la supermodularité,

## Proposition 12

Soit  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **supermodulaire**, i.e.

$$\phi(\max\{x_1, y_1\}, \dots, \max\{x_d, y_d\}) + \phi(\min\{x_1, y_1\}, \dots, \min\{x_d, y_d\}) - \phi(x_1, \dots, x_d) - \phi(y_1, \dots, y_d)$$

pour tout  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$ . Alors pour tout

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ ,

$$\mathbb{E} (\phi(X_1^-, \dots, X_d^-)) \leq \mathbb{E} (\phi(X_1, \dots, X_d)) \leq \mathbb{E} (\phi(X_1^+, \dots, X_d^+)).$$

## Remarque 16

Si  $\phi$  est suffisement dérivable, la  $d$ -croissance est équivalente à  $\partial^d \phi / \partial x_1 \cdots \partial x_d$  positive partout, alors que la supermodularité est équivalente à  $\partial^d \phi / \partial x_i \partial x_j$  positive.

## Exemple 36

Le prime (pure) stop-loss d'un traité de réassurance s'écrit comme l'espérance d'une fonction supermodulaire dès lors que l'on somme des risques :  $\phi(x_1, \dots, x_d) = (x_1 + \cdots + x_d - k)_+$  est une fonction supermodulaire.

## Exemple37

Pour une assurance vie jointe sur  $n$  années, l'annuité s'écrit

$$a_{xy:n^\intercal} = \sum_{k=1}^n v^k \mathbb{P}(T_x > k \text{ and } T_y > k) = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_{xy},$$

où  $v$  est le facteur d'actualisation, et  $(T_x, T_y)$  les durées de vie résiduelles des deux assurés. Alors

$$a_{xy:n^\intercal}^- \leq a_{xy:n^\intercal} \leq a_{xy:n^\intercal}^+,$$

où

$$a_{xy:n^\intercal}^- = \sum_{k=1}^n v^k \max\{{}_k p_x + {}_k p_y - 1, 0\} (\text{ cas anticomonotone }),$$

$$a_{xy:n^\intercal}^+ = \sum_{k=1}^n v^k \min\{{}_k p_x, {}_k p_y\} (\text{ cas comonotone }).$$

## Exemple38

Dans le cas d'une assurance au dernier survivant, sur  $n$  années, l'annuité s'écrit

$$a_{\overline{xy}:n}^- = \sum_{k=1}^n v^k \mathbb{P}(T_x > k \text{ or } T_y > k) = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_{\overline{xy}},$$

où  ${}_k p_{\overline{xy}} = \mathbb{P}(T_x > k \text{ or } T_y > k) = {}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_{xy}$ . Alors

$$a_{\overline{xy}:n}^- \leq a_{\overline{xy}:n} \leq a_{\overline{xy}:n}^+,$$

où

$$a_{\overline{xy}:n}^- = \sum_{k=1}^n v^k (1 - \min\{{}_k q_x, {}_k q_y\}) \text{ (cas comonotone),}$$

$$a_{\overline{xy}:n}^+ = \sum_{k=1}^n v^k (1 - \max\{{}_k q_x + {}_k q_y - 1, 0\}) \text{ (cas anticomonotone).}$$

## Exemple39

L'annuité d'une pension de veuvage s'écrit

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_y - \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_{xy}.$$

Aussi,

$$a_{x|y}^- \leq a_{x|y} \leq a_{x|y}^+,$$

où

$$a_{x|y}^- = a_y - a_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_y - \sum_{k=1}^{\infty} v^k \min\{{}_k p_x, {}_k p_y\}. (\text{ cas comonotone }),$$

$$a_{x|y}^+ = a_y - a_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_y - \sum_{k=1}^{\infty} v^k \max\{{}_k p_x + {}_k p_y - 1, 0\}. (\text{ cas anticomonotone }).$$

## 6.2 Comparer des sommes de risques

On dira que  $\mathbf{X} \preceq_{corr} \mathbf{Y}$   $C_{\mathbf{X}} \leq C_{\mathbf{Y}}$ , ou

$$\mathbf{X} \preceq_{corr} \mathbf{Y}, \text{ i.e. } \text{corr}(g(X_1), h(X_2)) \leq \text{corr}(g(Y_1), h(Y_2))$$

pour toutes fonctions croissantes  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que les variances soient finies.

### Proposition 13

Soient  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ ,  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$ .

- si  $\mathbf{X} \preceq_{corr} \mathbf{Y}$ , alors  $X_1 + X_2 \leq_{CX} Y_1 + Y_2$ .
- si  $\mathbf{X} \preceq_{corr} \mathbf{Y}$ , alors pour toute fonction  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  2-croissante,  
 $h(X_1, X_2) \leq_{\text{TVaR}} h(Y_1, Y_2)$

En dimension plus grande,

### Proposition 14

Soient  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ ,  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d) \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ . Si  $\mathbf{X} \preceq_{SM} \mathbf{Y}$ , alors pour toute fonction  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  supermodulaire,  $h(X_1, \dots, X_d) \leq_{\text{TVaR}} h(Y_1, \dots, Y_d)$ .

## 6.3 Mesures de risques pour la somme de risques

En dimension  $d = 2$ , si des versions comonotones et anticomontones permettent d'obtenir des bornes à certains quantités, cela n'est en général pas le cas pour une mesure de risque quelconque,  $\mathcal{R}$ , i.e.

$$\mathcal{R}^- \leq \mathcal{R}(X_1^- + X_2^-) \not\leq \mathcal{R}(X_1 + X_2) \not\leq \mathcal{R}(X_1^+ + X_2^+) \leq \mathcal{R}^+,$$

où la borne supérieure  $\mathcal{R}^+$  peut excéder le cas comonotone, par exemple.

Dans le cas où  $\mathcal{R}$  désigne la Value-at-Risk pour un seuil  $q \in ]0, 1[$ , rappelons que

$$\mathcal{R}(X_1 + X_2) = \text{VaR}_q[X_1 + X_2] = F_{X_1 + X_2}^{-1}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_{X_1 + X_2}(x) \geq q\}.$$

### Exemple 40

Si  $X_1 \sim \mathcal{E}(\alpha)$  et  $Y_1 \sim \mathcal{E}(\beta)$ ,

$$\mathbb{P}(X_2 > x_1) = \exp(-x_1/\alpha), \mathbb{P}(X_2 > x_2) = \exp(-x_2/\beta) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

### Les inégalités

$$\exp(-x / \max\{\alpha, \beta\}) \leq \Pr[X_1 + X_2 > x] \leq \exp(-(x - \xi)_+ / (\alpha + \beta))$$

sont alors valides pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , quelle que soit la dépendance entre  $X_1$  et  $X_2$ , où

$$\xi = (\alpha + \beta) \log(\alpha + \beta) - \alpha \log \alpha - \beta \log \beta.$$

De plus, on a

$$-\max\{\alpha, \beta\} \log(1 - q) \leq \text{VaR}_q[X_1 + X_2] \leq \xi - (\alpha + \beta) \log(1 - q)$$

pour tout niveau  $q \in (0, 1)$ .

Si  $\alpha = \beta = 1$ , rappelons que sous hypothèse d'indépendance  $X_1 + X_2 \sim \mathcal{G}(2, 1)$  alors que sous hypothèse de comonotonie,  $X_1 + X_2 \sim \mathcal{E}(2)$ .

### Exemple 41

De manière générale, quelles que soient les lois  $F_1$  et  $F_2$ , il est possible (au moins numériquement) de calculer les bornes inférieures et supérieures. La Figure 18 montre la Value-at-Risk pour la somme de deux risques Gaussien, alors que la Figure 19 montre la Value-at-Risk pour la somme de deux risques suivant des lois Gamma.

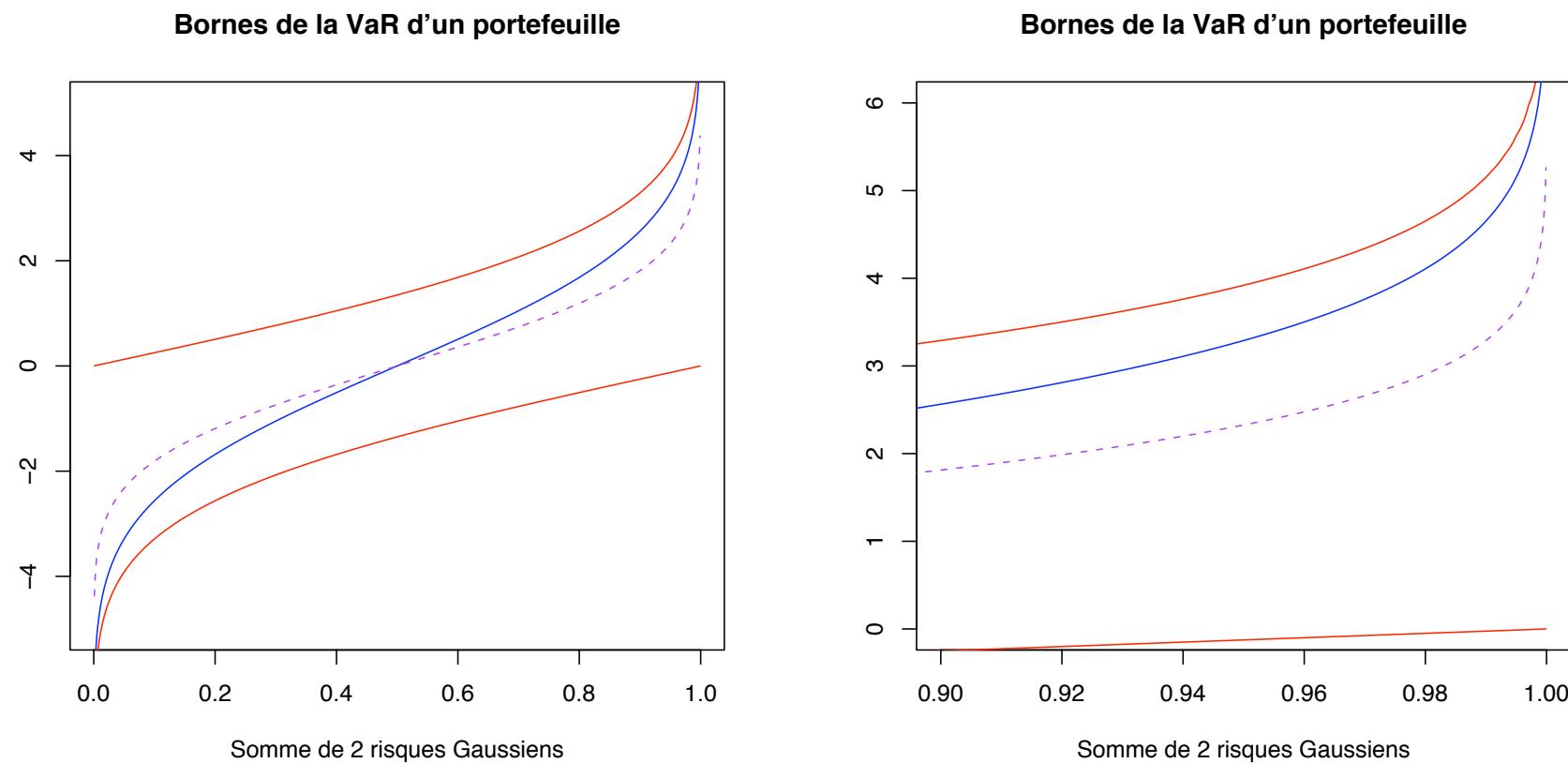


FIGURE 18 – Value-at-Risk pour la somme de 2 variables gaussiennes  $\mathcal{N}(0, 1)$ , avec le cas indépendant en pointillé, et le cas comontone en trait plein. Les courbes en bas et en haut étant les bornes inférieures et supérieures. Le graphique de droite correspond à un agrandissement pour les quantiles excédant le niveau 90%.

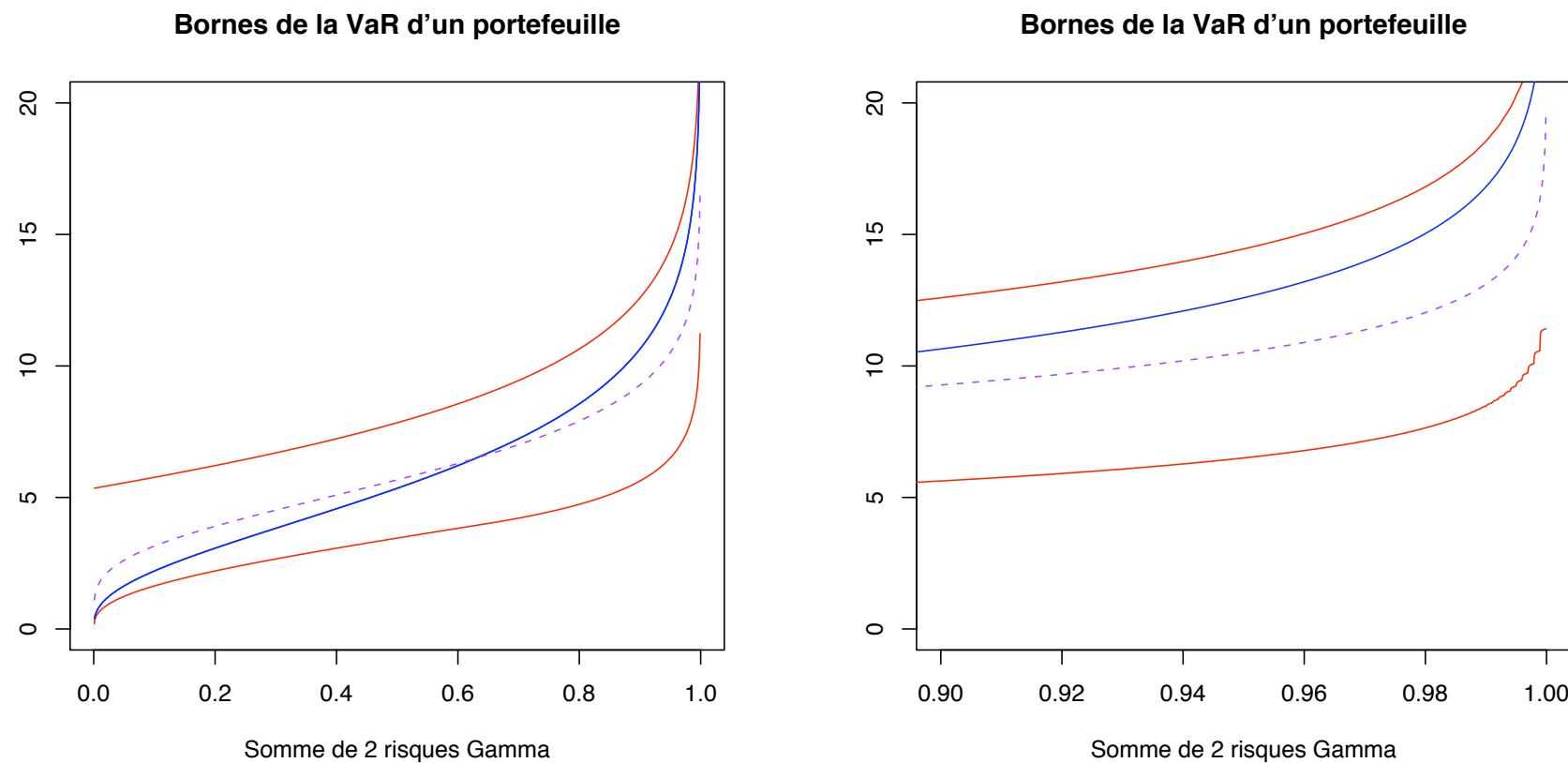


FIGURE 19 – Value-at-Risk pour la somme de 2 variables gaussiennes  $\mathcal{G}(3, 1)$ , avec le cas indépendant en pointillé, et le cas comontone en trait plein. Les courbes en bas et en haut étant les bornes inférieures et supérieures. Le graphique de droite correspond à un agrandissement pour les quantiles excédant le niveau 90%.

Dans un cadre général, et plus théorique, [58] étudiait les bornes possibles pour la Value-at-Risk (ou plutôt la loi jointe) de  $h(X_1, X_2)$  où  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(X_1, X_2) \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$ , introduisant le concept de convolutions *supremal* et *infimal*,

$$F_{\text{sup}}(F_1, F_2)(z) = \sup \{C(F_1(x_1), F_2(x_2)), \psi(x_1, x_2) = z\} \quad (20)$$

$$F_{\text{inf}}(F_1, F_2)(z) = \inf \{C(F_1(x_1), F_2(x_2)), \psi(x_1, x_2) = z\} \quad (21)$$

[65] a proposé des algorithmes numériques pour calculer ces bornes. Dans le cas de la somme, l'idée est de noter que la distribution des bornes correspond à la distribution de  $S_{\min}$  and  $S_{\max}$ , où

$$\mathbb{P}(S_{\max} < s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \max \{\mathbb{P}(X_1 < x) + \mathbb{P}(X_2 < s - x) - 1, 0\}$$

et

$$\mathbb{P}(S_{\min} \leq s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \min \{\mathbb{P}(X_1 \leq x) + \mathbb{P}(X_2 \leq s - x), 1\}.$$

On obtient alors le résultat suivant

## Proposition 15

Soit  $X = (X_1, X_2) \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$  alors pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\tau_{C^-}(F_1, F_2)(s) \leq \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq s) \leq \rho_{C^-}(F_1, F_2)(s),$$

où

$$\tau_C(F_1, F_2)(s) = \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \{C(F_1(x_1), F_2(x_2)), x_1 + x_2 = s\}$$

et si  $\tilde{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - C(u_1, u_2)$ ,

$$\rho_C(F_1, F_2)(s) = \inf_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \{\tilde{C}(F_1(x_1), F_2(x_2)), x_1 + x_2 = s\}.$$

# 7 Inférence statistique

## 7.1 Méthodes paramétriques

Considérons un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ , absolument continu, telle que la densité jointe s'écrit

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))) \cdot \prod_{i=1}^d f_i(x_i)$$

où  $c : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  est la densité de la copule associée à  $\mathbf{X}$ , et où  $f_i$  est la densité de la variable  $X_i$ .

La log-vraisemblance  $\log \mathcal{L}$  associée à un échantillon  $\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n$  i.i.d. s'écrit

$$\log \mathcal{L}_n = \sum_{k=1}^n \log c(F_1(x_1^k), \dots, F_d(x_d^k))) + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^n \log f_i(x_i^k)$$

et peut se décomposer en deux termes : celui de gauche est associé à la structure

de dépendance, et le second aux lois marginales. Notons que le second terme est le seul qui apparaît si l'on suppose que les composantes du vecteur  $\mathbf{X}$  sont indépendantes.

On supposera que la copule  $C$  appartient à une famille paramétrique  $\mathcal{C} = \{C_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$  et que les lois marginales sont également dans des familles paramétriques,  $F_i \in \mathcal{F}_i = \{F_{\alpha_i}, \alpha_i \in A_i\}$ .

Sous les conditions usuelles de régularités, l'estimateur du maximum de vraisemblance  $(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}})$ , solution de

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \operatorname{argmax}\{\log \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})\}$$

est consistant et asymptotiquement Gaussien, au sens où

$$\sqrt{n} \left( (\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) - (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

où

$$\boldsymbol{\Sigma} = - \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \log \mathcal{L}_n}{\partial(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \partial(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})'} \Big|_{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})} \right)^{-1}$$

## 7.2 Méthodes semi-paramétriques

Ici, seule la copule est paramétrique, et l'on utilise les fonction de répartition empiriques des lois marginales pour estimer le paramètre de la copule. En l'occurrence,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{k=1}^n \log c(\hat{F}_1(x_1^k), \dots, \hat{F}_d(x_d^k)) \right\}$$

## 7.3 Méthodes nonparamétriques d'estimation de copule

[11] a proposé un survey sur l'estimation nonparamétrique de densités de copules, en insistant sur l'estimation à noyau. Mais l'estimation à noyau étant biaisé (multiplicativement) sur les bords, il peut être intéressant de s'adapter pour obtenir un estimateur sans biais partout sur  $[0, 1]^d$ . Par la suite, on se limitera au cas  $d = 2$  pour la simplicité de l'exposé. On suppose disposer d'observations  $(U_{1,i}, U_{2,i})$ , i.i.d., distribuées suivant  $C$ , de densité  $c$ .

Une première piste est de transformer les variables, en considérant  $(X_{1,i}, X_{2,i}) = (G^{-1}(U_{1,i}), G^{-1}(U_{2,i}))$ , où  $G$  est une fonction strictement croissante  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , tel que le couple  $(X, Y)$  admette une densité. Pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , posons

$$\widehat{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{nh^2} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_1 - X_{1,i}}{h}\right) K\left(\frac{x_2 - X_{2,i}}{h}\right).$$

Or comm

$$f(x_1, x_2) = g(x_1)g(x_2)c[G(x_1), G(x_2)]. \quad (22)$$

on peut réécrire

$$c(u_1, u_2) = \frac{f(G^{-1}(u_1), G^{-1}(u_2))}{g(G^{-1}(u_1))g(G^{-1}(u_2))}, \text{ pour } (u_1, u_2) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (23)$$

ce qui donne, en subsituant  $\widehat{f}$  dans (23), on obtient

$$\widehat{c}(u_1, u_2) = \frac{1}{nh \cdot g(G^{-1}(u_1)) \cdot g(G^{-1}(u_2))} \sum_{i=1}^n K \left( \frac{G^{-1}(u_1) - G^{-1}(U_{1,i})}{h}, \frac{G^{-1}(u_2) - G^{-1}(U_{2,i})}{h} \right)$$

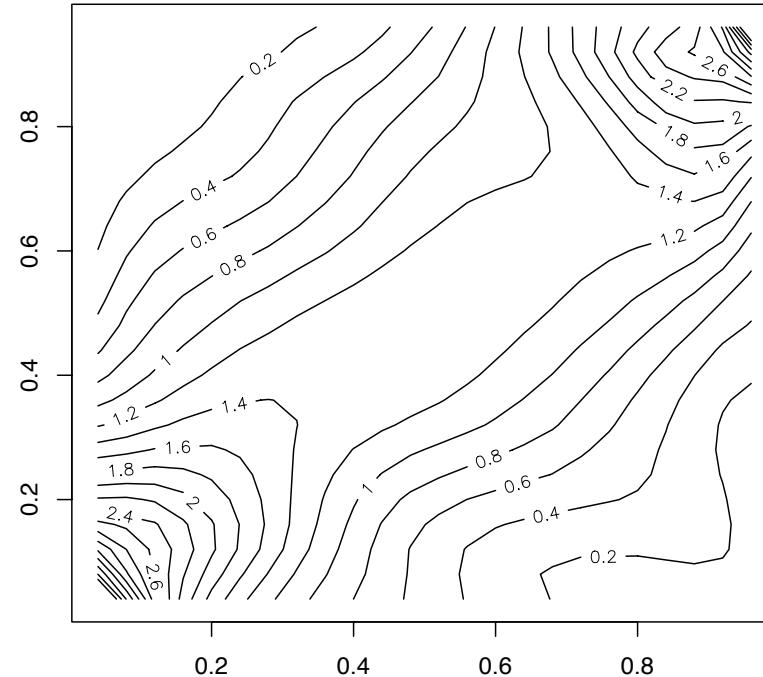
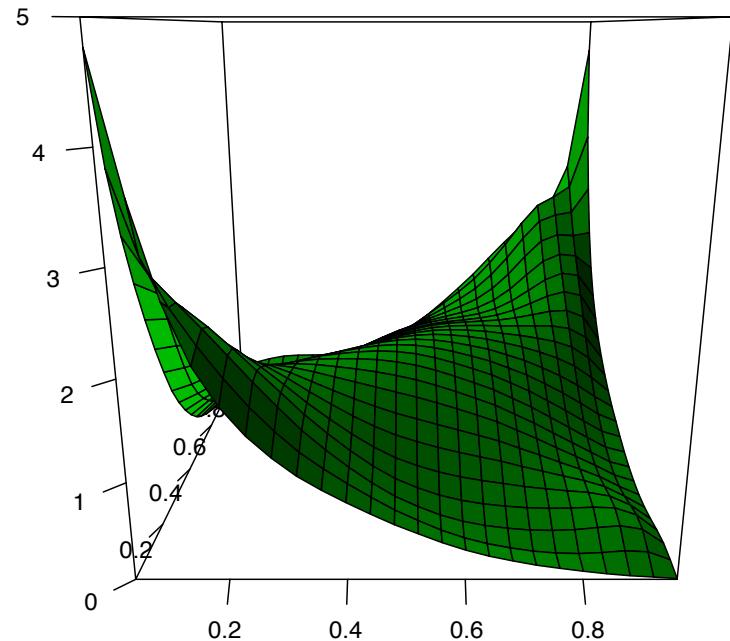
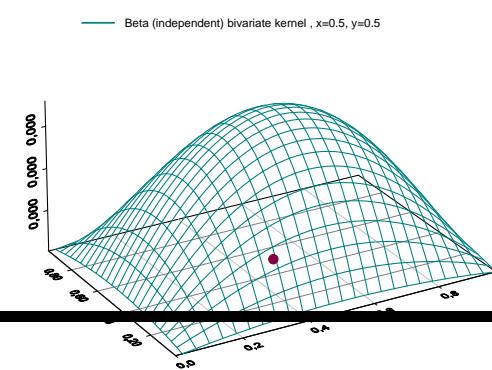
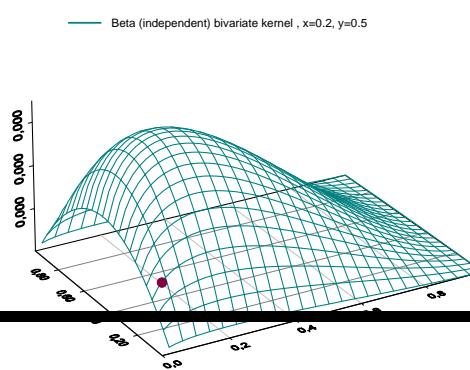
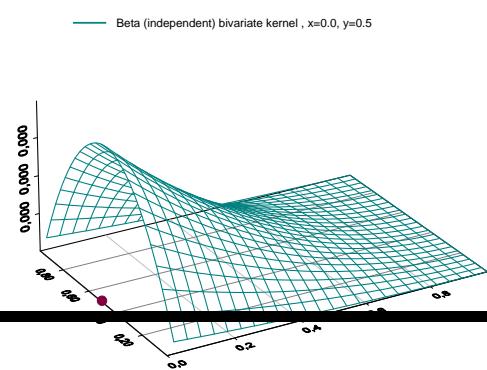
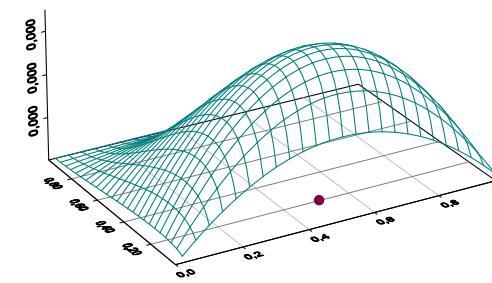
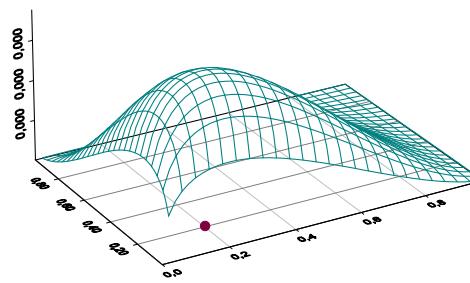
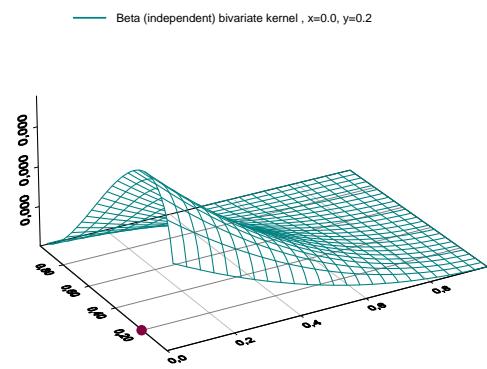
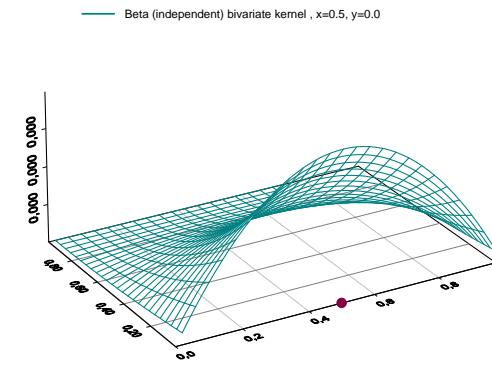
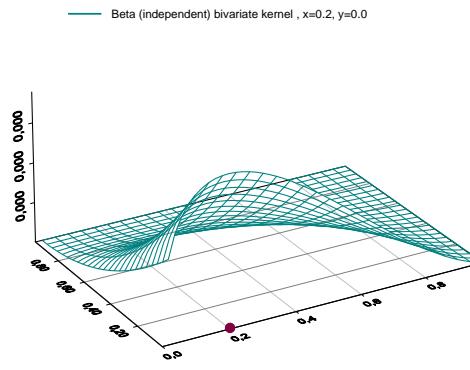
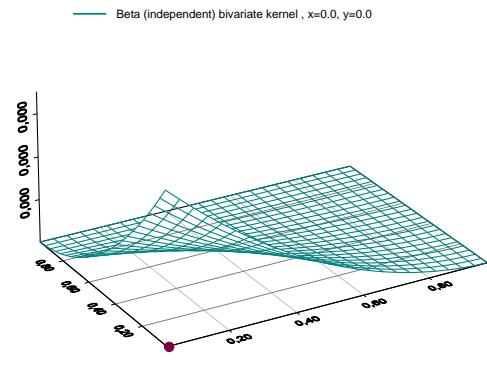
**Estimation of Frank copula**

FIGURE 20 – Estimation d'une densité de copule de Frank, à partir de  $n = 250$  simulation d'une copule de Frank, à l'aide d'une transformation Gaussienne ( $G = \Phi$ ), et un noyau Gaussien bivarié.

Un autre estimateur classique est l'estimateur par noyau Beta de la densité de la copule au point  $(u_1, u_2)$ , est obtenu à l'aide de produits de noyaux Beta,

$$\hat{c}(u_1, u_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(X_i, \frac{u_1}{b} + 1, \frac{1-u_1}{b} + 1\right) \cdot K\left(Y_i, \frac{u_2}{b} + 1, \frac{1-u_2}{b} + 1\right),$$

où  $K(\cdot, \alpha, \beta)$  est la densité de la loi Beta de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .



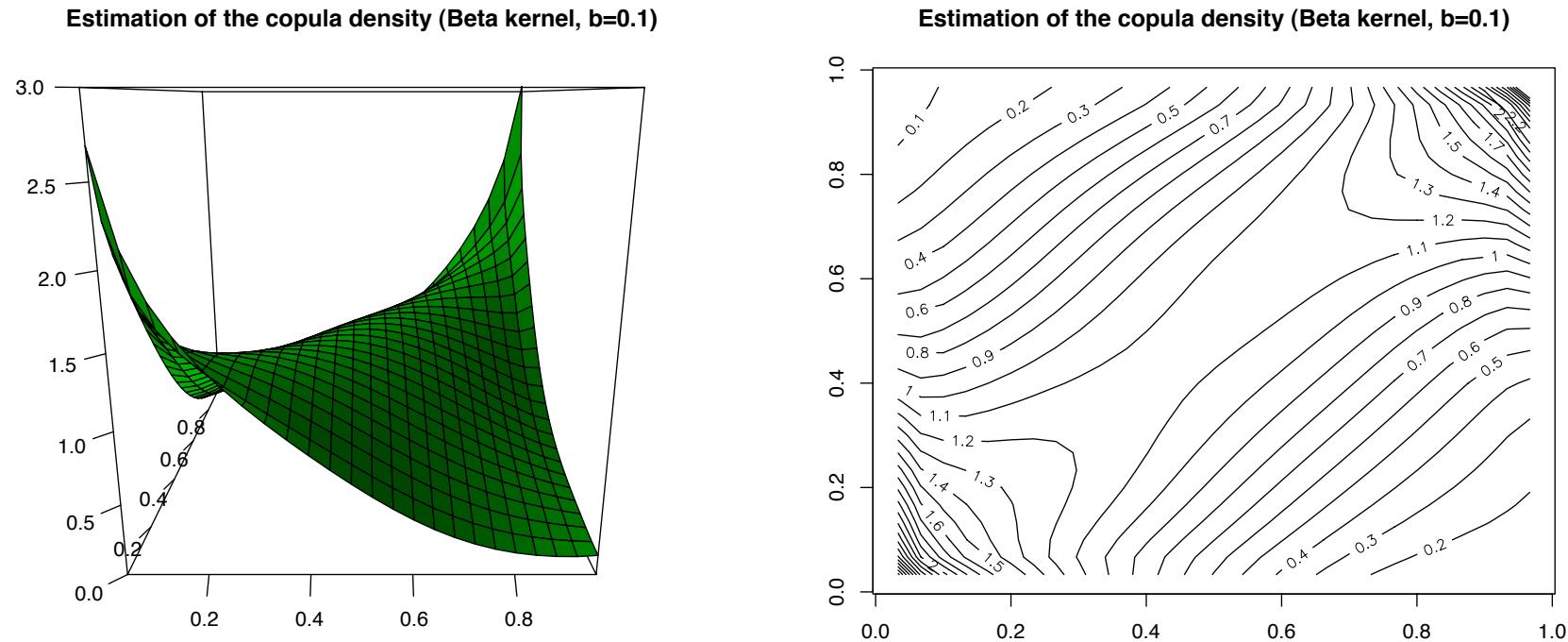
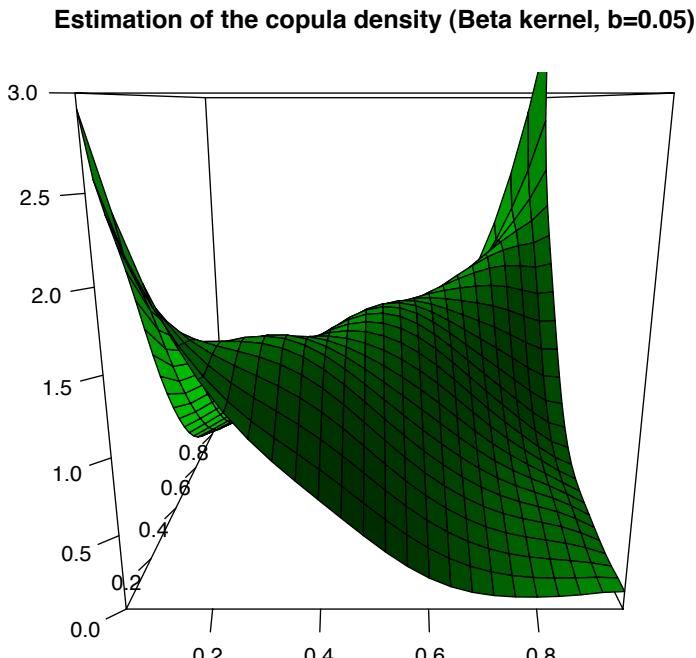


FIGURE 22 – Estimation de la densité de copule par noyaux Beta,  $b = 0.1$  (simulation suivant une copule de Frank).



Estimation of the copula density (Beta kernel, b=0.05)

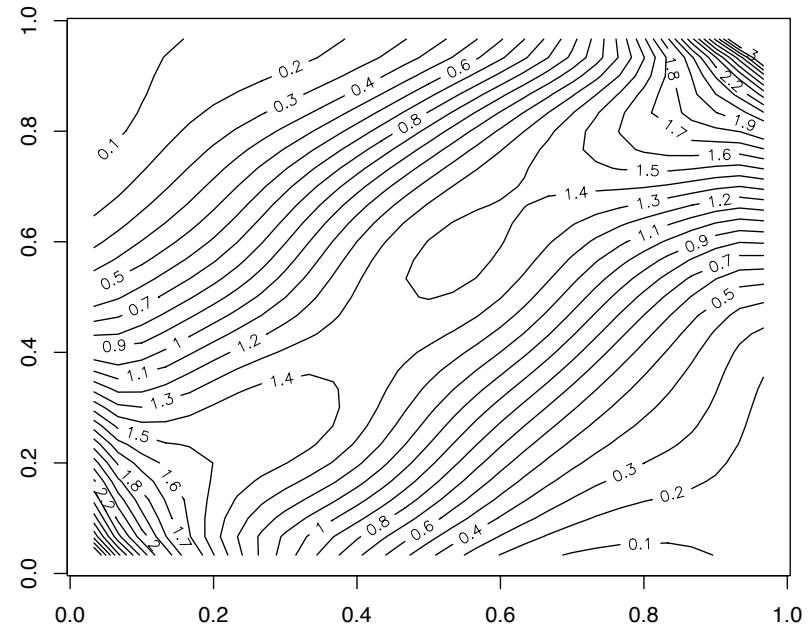


FIGURE 23 – Estimation de la densité de copule par noyaux Beta,  $b = 0.05$

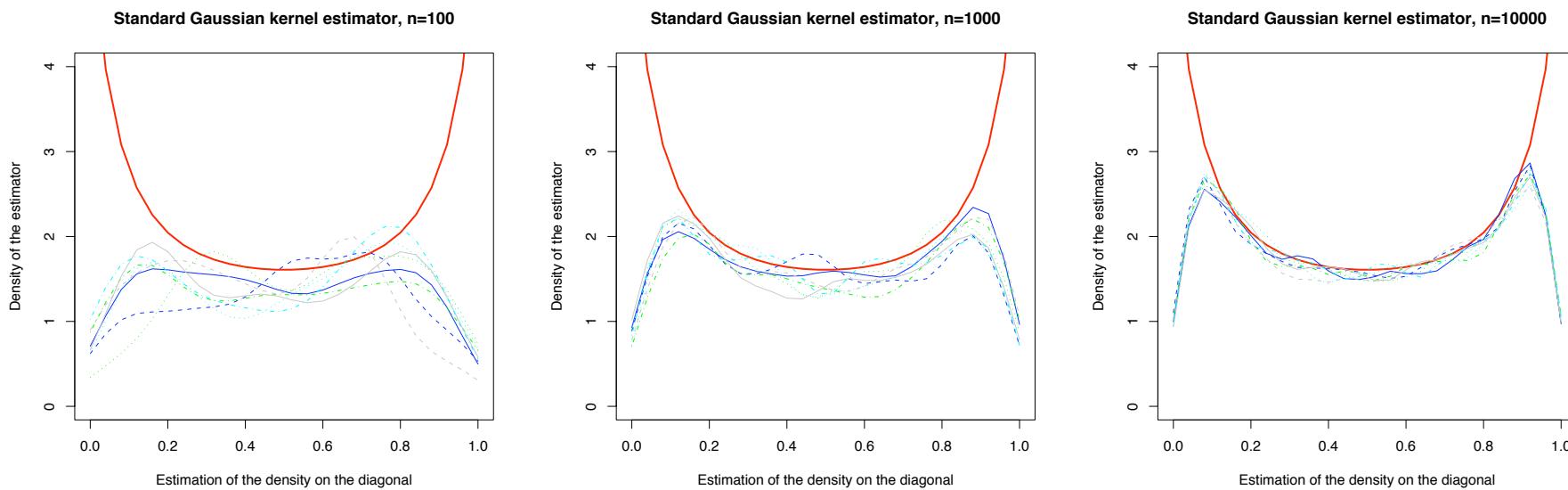


FIGURE 24 – Estimation de la densité sur la diagonale, par noyaux Gaussiens.

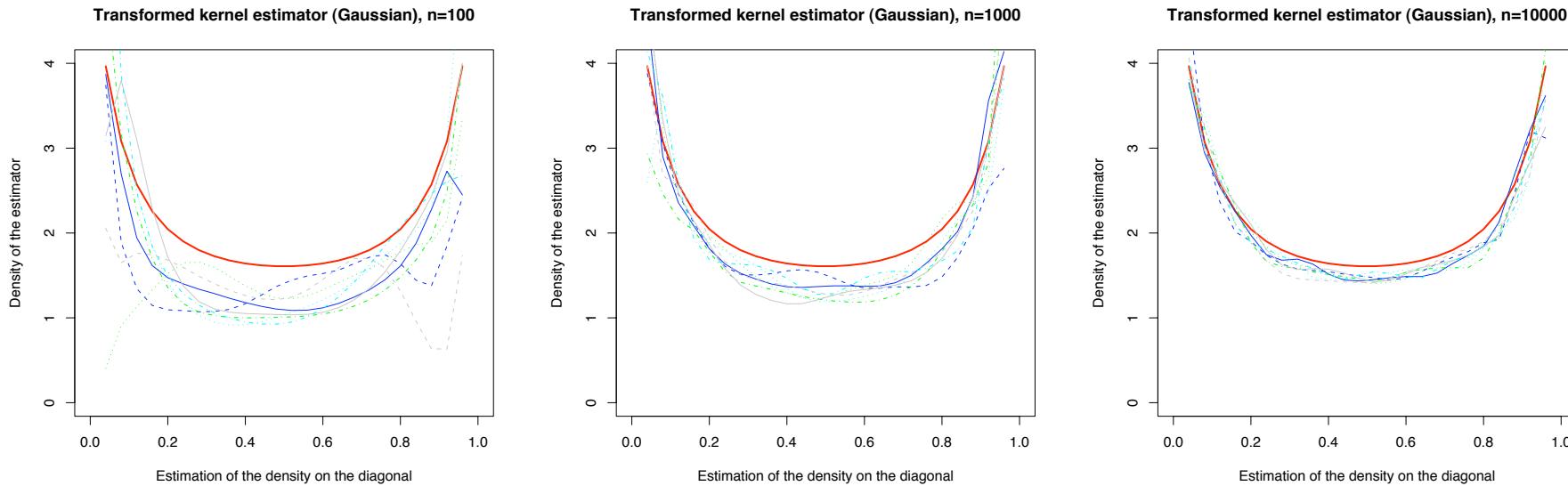


FIGURE 25 – Estimation de la densité sur la diagonale, transformation puis transformation inverse.

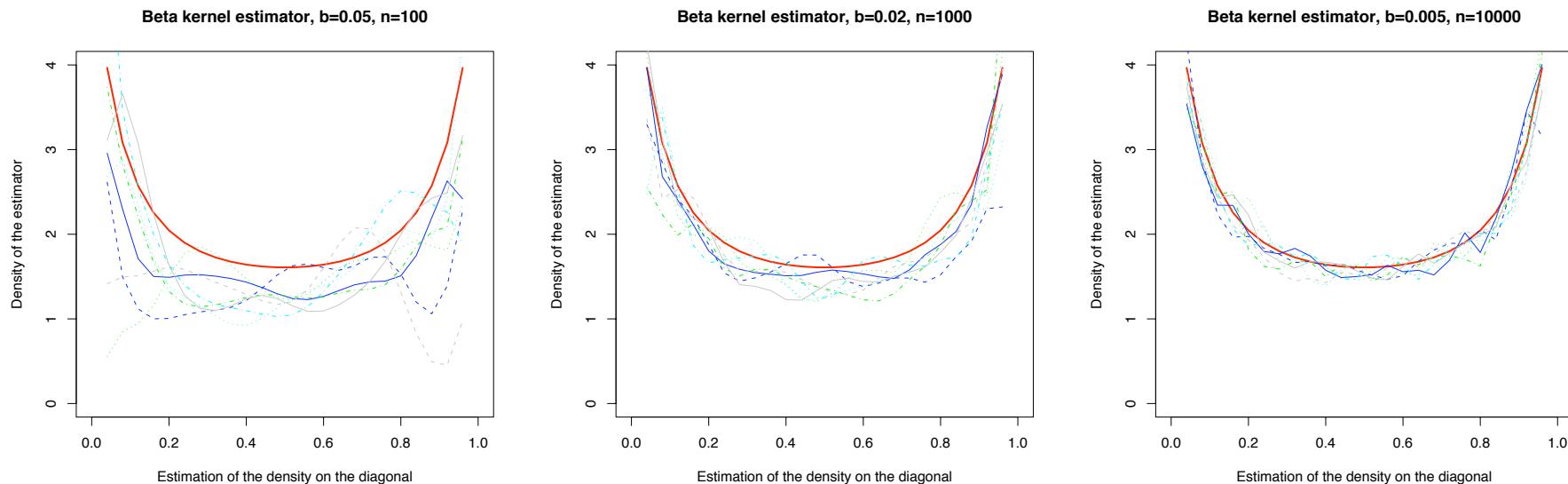


FIGURE 26 – Estimation de la densité sur la diagonale, par noyaux Beta.

Dans le cas Archimédien, nous avions noté dans la Remarque 10 qu'on pouvait caractériser une copule Archimédienne à l'aide de la fonction de Kendall  $K$ . L'estimateur nonparamétrique simple de cette fonction est

$$\widehat{K}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(Z_i \leq t)$$

où

$$Z_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \mathbf{1}(X_{1,j} < X_{1,i}, X_{2,j} < X_{2,i}).$$

L'estimateur du générateur associé est alors

$$\hat{\phi}(t) = \exp \left( \int_{t_0}^t \frac{ds}{s - \hat{K}(s)} \right).$$

## 7.4 Tests d'ajustement

Supposons que l'on cherche à tester  $C \in \mathcal{C}$ , où  $\mathcal{C}$  est une famille de copules (l'hypothèse alternative étant  $C \notin \mathcal{C}$ ). Dans le cas univarié, on pense au test d'Anderson-Darling, ou à l'approche graphique du QQ-plot. Mais en dimension supérieure, c'est plus compliqué.

Si la famille  $\mathcal{C}$  est une famille paramétrique, [25] ou [32] ont suggéré d'utiliser le test de Cramér-von Mises, avec comme statistique

$$T = n \int_{[0,1]^d} [\widehat{C}(\mathbf{u}) - C_{\theta}(\mathbf{u})]^2 d\widehat{C}(\mathbf{u}),$$

où  $\widehat{C}(\cdot)$  est la copule empirique, i.e.

$$\widehat{C}(u_1, \dots, u_d) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(U_1^i \leq u_1, \dots, U_d^i \leq u_d).$$

Une approche un peu plus simple est d'utiliser la fonction de Kendall  $K(t) = \mathbb{P}(C(\mathbf{U}) \leq t)$ . Si on suppose que cette fonction appartient à une famille

paramétrique, alors la statistique précédante peut s'écrire

$$T = n \int_{[0,1]} \left[ \widehat{K}(t) - K_{\widehat{\theta}}(t) \right]^2 dK_{\widehat{\theta}}(t),$$

comme suggéré par [31].

Une autre idée peut être de revenir à la transformation de [55]. Supposons que  $\mathbf{U}$  ait pour copule  $C$ , alors  $\mathbf{V}$  défini par

$$\begin{cases} V_1 = U_1 \\ V_2 = C_{2|1}(U_2|U_1) \\ V_3 = C_{3|2,1}(U_3|U_2, U_1) \\ \dots \\ V_d = C_{d|d-1, \dots, 2,1}(U_d|U_{d-1}, \dots, U_2, U_1) \end{cases}$$

est un vecteur dont la loi est  $C^\perp$  (on utilise ici la méthode de simulation évoquée dans la section ??, à l'envers). Il suffit alors de faire des tests d'indépendance. Toutefois, il convient de faire plusieurs tests, en testant toutes les permutations

possibles d'indices.

[10] a adapté le test présenté auparavant dans ce cas, à l'aide de la statistique de Cramér-von Mises,

$$T = n \int_{[0,1]^d} [\widehat{C}(\mathbf{v}) - C^\perp(\mathbf{v})]^2 d\widehat{C}(\mathbf{v}),$$

où  $\widehat{C}$  est ici la copule empirique associée à  $\mathbf{V}$ .

Pour certaines familles de lois, il existe des tests spécifiques (en particulier des tests de normalité multivariés peuvent être utilisés pour tester l'ajustement d'une copule Gaussienne).

- [1] Charpentier A. and Segers J. Tails of multivariate archimedean copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 100(7) :1521 – 1537, 2009.
- [2] C. Alsina, M. J. Frank, and B. Schweizer. *Associative Functions : Triangular Norms And Copulas*. World Scientific Publishing Company, 2006.
- [3] Nelsen R.B. Alsina, C. and B. Schweizer. On the characteristic function of a class of binary operations on distribution functions. *Statistic and Probability Letters*, 7 :85–89, 1993.
- [4] de Finetti B. La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7 :1–68, 1937.
- [5] Bruno Bassan and Fabio Spizzichino. Relations among univariate aging, bivariate aging and dependence for exchangeable lifetimes. *Journal of Multivariate Analysis*, 93(2) :313 – 339, 2005.
- [6] N. Bäuerle and A. Müller. Modelling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios. *Astin Bulletin*, 28 :59–76, 1998.
- [7] T. Bayes. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 54, 1763.

- [8] N. Blomqvist. On a measure of dependence between two random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, 21 :593–600, 1950.
- [9] N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, and C.J. Nesbitt. *Actuarial mathematics*. The Society of Actuaries, 1997.
- [10] Genest C., Rémillard B., and Beaudoin D. Goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44 :199–213, 2009.
- [11] A. Charpentier, J.-D. Fermanian, and O. Scaillet. The Estimation of Copulas : Theory and Practice. In J. Rank, editor, *Copulas : From theory to application in finance*, pages 35–62. Risk Books, 2007.
- [12] A. Charpentier and J. Segers. Lower tail dependence for archimedean copulas : Characterizations and pitfalls. *Insurance : Mathematics and Economics*, 40(3) :525 – 532, 2007.
- [13] Arthur Charpentier and Johan Segers. Convergence of archimedean copulas. *Statistics & Probability Letters*, 78(4) :412 – 419, 2008.

- [14] J. Coles, S. Heffernan and J.A. Tawn. Dependence measures for multivariate extremes. *Extremes*, 2 :339–365, 1999.
- [15] KMV Corporation. Modelling default risk. *KMV Corporation Technical document*, 1997.
- [16] C. M. Cuadras and J. Augé. A continuous general multivariate distribution and its properties. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 10(4) :339–353, 1981.
- [17] P. Deheuvels. La fonction de dépendance empirique et ses propriétés . *Académie Royale de Belgique (Bulletin de la Classe des Sciences)*, 65 :274–292, 1940.
- [20] D. Drouet-Mari and S. Kotz. *Correlation and dependence*. World Scientific Publishing Company Inc., 2001.
- [21] Fabrizio Durante, José Quesada-Molina, and Carlo Sempi. A generalization of the archimedean class of bivariate copulas. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 59 :487–498, 2007. 10.1007/s10463-006-0061-9.

- [22] P. Embrechts, A. J. McNeil, and D. Straumann. Correlation and Dependence in Risk Management : Properties and Pitfalls. In M. Dempster, editor, *Risk Management : Value at Risk and Beyond*, pages 176–223. Cambridge University Press, 2002.
- [24] K.-T. Fang, S. Kotz, and K.-W. Ng. *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman & Hall/CRC, 1989.
- [25] J.-D. Fermanian. Goodness of fit tests for copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 95(1) :119–152, 2005.
- [26] M. J. Frank. On the simultaneous associativity of  $F(x, y)$  and  $x + y - F(x, y)$ . *Aequationes Mathematicae*, 19 :194–226, 1979.
- [27] M. Fréchet. Remarques au sujet de la note précédante. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 249 :2719–2720, 1958.
- [28] W.E. Frees, J. Carriere, and E.A Valdez. Annuity valuation with dependent mortality. *The Journal of Risk and Insurance*, 63 :229–261, 1996.
- [29] C. Genest and R. J. MacKay. Copules archimédiennes et familles de lois

bidimensionnelles dont les marges sont données. *The Canadian Journal of Statistics*, 14 :145–159, 1986.

- [30] C. Genest, J. J. Quesada Molina, and J. A. Rodríguez Lallena. De l'impossibilité de construire des lois à marges multidimensionnelles données à partir de copules. *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 320 :723–726, 1995.
- [31] C. Genest and L.-P. Rivest. Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423) :1034–1043, 1993.
- [32] C. Genest and B. Rémillard. Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models. *Annales de l'Institut Henri Poincaré : Probabilités et statistiques*, 44 :1096–1127, 2008.
- [33] CreditMetrics Group. Creditmetrics technical document. *J.P. Morgan*, 1997.
- [34] E. J. Gumbel. Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55 :698–707, 1960.

- [35] P. Hougaard. Survival models for heterogeneous populations derived from stable distributions. *Biometrika*, 73(2) :387–396, 1986.
- [36] H. Joe. Families of min-stable multivariate exponential and multivariate extreme value distributions. *Statistical and Probability Letters*, 9 :75–81, 1990.
- [37] H. Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall/CRC, 1997.
- [38] G. Kimeldorf and A. Sampson. One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals. *Communications in Statistics*, 4 :293–301, 1975.
- [39] H.O Lancaster. The structure of bivariate distributions. *Annals of Mathematical Statistics*, 29 :719–736, 1958.
- [40] P.-S. Laplace. *Théorie Analytique des Probabilités*. Paris, Ve. Courcier, Paris, 1812.
- [41] A.W. Ledford and J.A. Tawn. Statistics for Near Independence in Multivariate Extreme Values. *Biometrika*, 83 :169–187, 1996.

- [42] Stéphane Loisel. A trivariate non-Gaussian copula having 2-dimensional Gaussian copulas as margins.
- [43] K. V. Mardia. Mardia's test of multinormality. In S. Kotz & N. L. Johnson, editor, *Encyclopedia of statistical sciences (Vol. 5)*, pages 217–221. Wiley, 1985.
- [44] A. W. Marshall and I. Olkin. A generalized bivariate exponential distribution. *Journal of Applied Probability*, 4 :291–302, 1967.
- [45] Patricia Mariela Morillas. A method to obtain new copulas from a given one. *Metrika*, 61 :169–184, 2005. 10.1007/s001840400330.
- [47] A. Müller and M. Scarsini. Archimedean copulae and positive dependence. *Journal of Multivariate Analysis*, 93 :434–445, 2004.
- [48] R. B. Nelsen. Dependence Modeling with Archimedean Copulas. <http://www.lclark.edu/mathsci/brazil2.pdf> (2010-03-16), 2005.
- [49] R. B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer, 2007.
- [50] D. Oakes. Bivariate survival models induced by frailties. *Journal of the American Statistical Association*, 84,406 :487–493, 1989.

- [51] J. Pickands. Multivariate extreme value distributions. *M. Bull. Internat. Statist. Inst. Proc. 43d. Session (Buenos Aires)*, pages 859–878, 1981.
- [52] J. Pickands. Multivariate negative exponential and extreme value distributions. In J. Hüsler and R.D. Reiss, editors, *Extreme Value Theory*. Springer Verlag, 1989.
- [53] A. Rényi. On measures of dependence. *Acta Mathematica Hungarica*, 10 :441–451, 1959.
- [54] J.P. Romano and A.F. Siegel. *Counterexamples in Probability and Statistics*. Wadsworth and Brooks, 1996.
- [55] M. Rosenblatt. Remarks on a Multivariate Transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(3) :470–472, 1952.
- [56] M. Scarsini. On measures of concordance. *Stochastica*, 8(3) :201–218, 1984.
- [57] V. Schmitz. Revealing the dependence structure between  $x(1)$  and  $x(n)$ . *Journal of Statistical Planning and Inference*, 123(1) :41 – 47, 2004.
- [58] B. Schweizer and A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, New York, 1983.

- [59] B. Schweizer and E. F. Wolff. Sur une mesure de dépendance pour les variables aléatoires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 283 :659–661, 1976.
- [60] A. Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de L'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 8 :229–231, 1959.
- [61] A. Sklar. Random variables, distribution functions, and copulas—a personal look backward and forward. *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, 28 :1–14, 1996.
- [62] A.H. Tchen.
- [63] G. Venter. Tails of copulas. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 2002.
- [65] R.C. Williamson. Probabilistic arithmetic, 1989. PhD thesis.
- [66] E.F. Wolff.  $n$ -dimensional measures of dependence,. *Stochastica*, 4 :175–188, 1980.