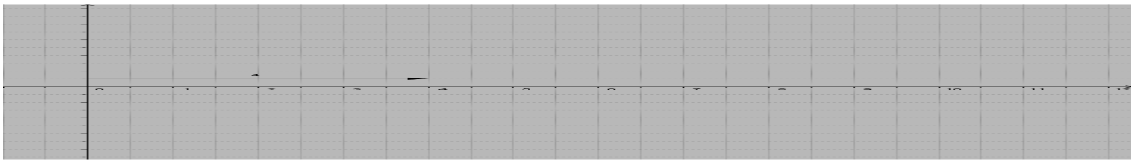
Zahlenbereiche und Grundrechnungsarten

Die natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit **N** bezeichnet.
Sie umfasst die Zahlen 1, 2, 3, ... und wird folgendermaßen angegeben:
N = {1, 2, 3, ...}. **N₀** = {0, 1, 2, 3, …}
Jede natürliche Zahl kann mit Hilfe von Pfeilen auf einer Zahlengeraden dargestellt werden.



Jede natürliche Zahl außer 0 hat einen Vorgänger und einen Nachfolger.

Die Addition und die Subtraktion

Addiert man zwei natürliche Zahlen, so erhält man wieder eine natürliche Zahl. Man sagt, die Menge der natürlichen Zahlen ist **abgeschlossen**. Die Teile der Addition werden folgendermaßen benannt:

Summand + Summand = Summe

Gesetze der Addition:

Gesetze	Beispiele
1. Das Kommutativgesetz Die Reihenfolge der Summanden hat keinen Einfluss auf das Ergebnis. Allgemein gilt: **a + b = b + a**	2 + 4 = 4 + 2 6= 6 1523 + 542 = 542 + 1523 2065=2065
2. Das Assoziativgesetz Werden mehr als zwei Zahlen addiert, so kann man beliebig klammern setzen. Allgemein gilt: **(a + b) + c = a + (b + c)**	(15 + 13) + 9 = 15 + (13 + 9) 28 + 9 = 15+22 37 = 37
3. Das neutrale Element Wird die Zahl „Null“ zu einer natürlichen Zahl addiert, so erhält man dieselbe natürliche Zahl. Allgemein gilt: **a + 0 = a**	7 + 0 = 7 156 + 0 = 156

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.
Beispiel: 26 + 52 = 78 == > 78 – 26 = 52

Die Teile der Subtraktion werden folgendermaßen benannt:

Minuend - Subtrahend = Differenz

Die Subtraktion ist in der Menge der natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar, sie dort also **nicht abgeschlossen**.
Beispiel: 7 – 12 = ??

Kommen Klammern vor, so ist die **Klammerregel** anzuwenden:

Klammerregel:

a) Man rechnet zuerst immer die Addition, Subtraktionen usw. in der Klammer.

B: 4 + (7 – 3) - (3 + 2) – 1 =

4 + 4 - 5 – 1 = 2

b) Kommen mehrere Klammern vor beginnt man mit der innersten, meist die runden.

B: 4 + [(7 – 3) - 3]- [(3 + 2) – 1] +1 =

4 + [4- 3]- [5 – 1] +1 =

4 + 1 – 4 +1 = 2

Die Multiplikation und die Division

Die Multiplikation entsteht durch die verkürzte Schreibweise der Addition von gleichen Summanden.

Beispiel: $\underbrace{4+4+4+4+4+4}_{6mal} = 6 \cdot 4$

Multipliziert man zwei natürliche Zahlen, so erhält man wieder eine natürliche Zahl, daher ist IN bezüglich der Multiplikation **abgeschlossen**.
Die Teile der Multiplikation werden folgendermaßen benannt:

Faktor * Faktor = Produkt

Gesetze der Multiplikation:

Gesetze	Beispiele
1. Das Kommutativgesetz Die Reihenfolge der Faktoren hat keinen Einfluss auf das Ergebnis. Allgemein gilt: **a · b = b · a**	5 · 14 = 14 · 5 70 = 70

2. Das Assoziativgesetz Werden mehr als zwei Zahlen multipliziert, so kann man beliebig klammern setzen. Allgemein gilt: **$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$**	$(4 \cdot 3) \cdot 7 = 4 \cdot (3 \cdot 7)$ $12 \cdot 7 = 4 \cdot 21$ $84 = 84$
3. Das neutrale Element Wird die Zahl „Eins“ mit einer natürlichen Zahl multipliziert, so erhält man dieselbe natürliche Zahl. Allgemein gilt: **$a \cdot 1 = a$**	$32 \cdot 1 = 32$

Weiters gilt:

Das Distributivgesetz Das Distributivgesetz gibt einen Zusammenhang zwischen der Addition und der Multiplikation an. Allgemein gilt: **$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$**	$4 \cdot (23 + 35) = 4 \cdot 23 + 4 \cdot 35$ $4 \cdot 58 = 92 + 140$ $232 = 232$

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.

$8 \cdot 9 = 72$ ==> $72 : 9 = 8$

Die Division ist in N nicht immer ausführbar, sie dort also **nicht abgeschlossen**.
Beispiel: 12 : 5 = ?

Achtung: Die Division durch Null ist nicht definiert. 5 : 0 ist nicht definiert.

Die Teile der Division heißen:

Dividend : Divisor = Quotient

Weitere wichtige Rechenregeln:
a) Kommen mehrere Punktrechnungen hintereinander vor, so werden sie von links nach rechts abgearbeitet.

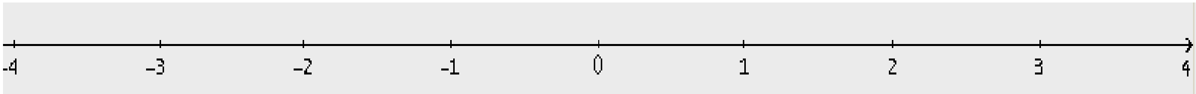
B.: $\underline{4 \cdot 5} : 10 \cdot 3 = \underline{20 : 10} \cdot 3 = \underline{2 \cdot 3} = 6$

b) Kommen verschiedene Rechenoperationen in einer Rechnung vor, so gilt die Regel: Punkt- vor Strichrechnung.

B.: **$4 + \underline{7 \cdot 3} + \underline{24 : 6} + 1 =$**
$4 + 21 + 4 + 1 = 30$

Die ganzen Zahlen

Die Einführung der negativen ganzen Zahlen



Negative Zahlen sind die Gegenstücke zu den bekannten positiven Zahlen und erweitern dadurch die natürlichen Zahlen zusammen mit der Zahl Null zu den **ganzen Zahlen**. Sie werden auf der **Zahlengeraden** dargestellt. Auf der rechten Seite liegen die uns bekannten positiven ganzen Zahlen.

Ganze Zahlen haben ein Vorzeichen: -2; -3 oder +1; +2... . Die Zahl Null besitzt **kein** Vorzeichen.

Schreibweisen:

$Z=\{\ldots,-2,-1,0,+1,+2\ldots\}$ … die Menge der ganzen Zahlen

$Z^{+}=\{+1,+2\ldots\}=N$ … die Menge der positiven Zahlen

$Z^{-}=\{\ldots,-2,-1,.\}$ … die Menge der negativen Zahlen

$-3\in Z$ … - 3 gehört zu Z (ist Element von Z)

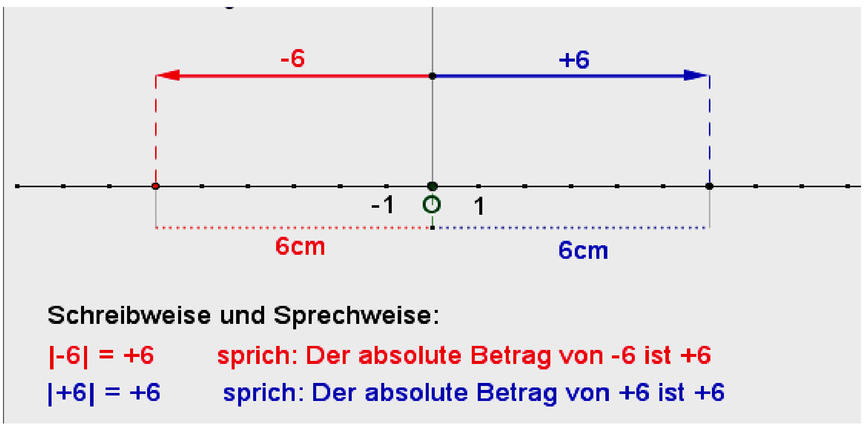
$-3\notin N$ … - 3 gehört nicht zu N (ist nicht Element von N)

Die Anordnung der ganzen Zahlen

Wie bei den natürlichen Zahlen werden die ganzen Zahlen von links nach rechts größer. Daraus folgt logischerweise, dass jede **negative Zahl** kleiner als die Zahl Null ist und jede **positive Zahl**, größer als die Zahl Null ist.

Betrag einer ganzen Zahl:

Definition: Der Abstand einer Zahl vom Nullpunkt heißt Betrag einer Zahl. Der Betrag ist stets eine positive Zahl! Eine Zahl und ihre Gegenzahl haben denselben Betrag.



Rechnen mit ganzen Zahlen

Es gelten die **Rechenregeln** und **Rechengesetze** für das Rechnen mit natürlichen Zahlen erklärt. Hier noch einmal ein Überblick über die Grundrechnungsarten:

Rechenvorgang:	**10**		**5**	**=**	
Addition:	**1.Summand**	+	**2.Summand**	gleich	**Summenwert**, hier **15**
Subtraktion:	**Minuend**	-	**Subtrahend**	gleich	**Differenzwert**, hier **5**
Multiplikation:	**1.Faktor**	*	**2.Faktor**	gleich	**Produktwert**, hier **50**
Division:	**Dividend**	:	**Divisor**	gleich	**Wert des Quotient**, hier **2**

Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

Zur Addition und Subtraktion ganzer Zahlen braucht man folgende **Merkregel**:

Stoßen zwei gleiche Vorzeichen aufeinander, also "...+ (+..." oder "...- (-..." wird aus ihnen ein **Plus**
Stoßen zwei unterschiedliche Vorzeichen aufeinander, also "...-(+..." oder "...-(+..." wird aus ihnen ein **Minus**

Hier einige Beispiele:

bei Summen:	**bei Differenzen:**
(+4)+(+3) = **3 + 4** = 7	(+4)-(+3) = **4 - 3** = 1
(+4)+(-3) = **4 - 3** = 1	(+4)-(-3) = **4 + 3** = 7
(-4)+(+3) = **-4 + 3** = -1	(-4)-(+3) = **-4 - 3** = -7
(-4)+(-3) = **-4 - 3** = -7	(-4)-(-3) = **-4 + 3** = -1

Für die Addition ganzer Zahlen gelten dieselben Gesetze wie bei den natürlichen Zahlen z. B.:

Kommutativgesetz:	**Assoziativgesetz:**
(-1)+(+2) = (+2) +(-1)	(-1)+**[**(+2)+(+3)**]** =**[**(-1)+(+2)**]**+(+3)
-1 + 2 = 2 -1	(-1)+**[+ 5]** =**[+1]**+(+3)
1 = 1	4 = 4

Multiplikation und Division

Auch bei Multiplikation und Division gelten fast die gleichen Regeln wie bei den natürlichen Zahlen, nur können durch das Auftreten von negativen Zahlen Vorzeichenänderungen vorkommen. Hier wurden folgende Regeln festgelegt:

Vorzeichenregeln:

Bei der Multiplikation (bzw. Division) zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen erhält man eine positive Zahl, bei zwei verschiedenen Vorzeichen eine negative Zahl:

(+a)·(+b) = + (a·b)		**(+3)·(+5) = + (3·5) = +15**
(−a)·(−b) = + (a·b)	**Bsp:**	**(−3)·(−5) = + (3·5) = +15**
(+a)·(−b) = − (a·b)		**(+3)·(−5) = − (3·5) = −15**
(−a)·(+b) = − (a·b)		**(−3)·(+5) = − (3·5) = −15**
(+a):(+b) = + $\left(\frac{a}{b}\right)$		**(+35):(+5) = +** $\left(\frac{35}{5}\right)$ **= +7**
(−a):(−b) = + $\left(\frac{a}{b}\right)$	**Bsp:**	**(−35):(−5) = +** $\left(\frac{35}{5}\right)$ **= +7**
(+a):(−b) = − $\left(\frac{a}{b}\right)$		**(+35):(−5) = −** $\left(\frac{35}{5}\right)$ **= −7**
(−a):(+b) = − $\left(\frac{a}{b}\right)$		**(−35):(+5) = −** $\left(\frac{35}{5}\right)$ **= −7**

Und natürlich gelten auch bei der Multiplikation und Division von ganzen Zahlen dieselben Gesetze wie bei den natürlichen Zahlen.

Potenzen

Definition: Eine Potenzrechnung ist eine Vereinfachung der Kettenmultiplikation.

B:. $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 mal} = 32 = 2^5$

$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 mal} = 81 = 3^4$

Kettenmultiplikation Potenzrechnung oder

$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343; \quad 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

Begriffe:

Beizahl **Potenzwert**

$3 \cdot 4^2 = 48$

Basis + **Exponent** = **Potenz**

Zusammenfassung: Ausdrücke der Form a^n heißen Potenzen. Dabei wird a **als *Basis* oder *Grundzahl* und n als *Exponent* oder *Hochzahl* bezeichnet. Diese Rechenoperation heißt *Potenzieren***

Für die Potenzen gilt:

1. Jede Potenz mit dem Exponenten 1 ist gleich der Basis selbst.

   Beispiel: $5^1 = 5$; $7^1 = 7$

2. Jede Potenz von 1 ist gleich 1.

   Beispiel: $1^{20} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 = 1$

3. Jede Potenz (ausgenommen 0) mit dem Exponenten 0 ist 1.

   Beispiel: $12^0 = 1$ $23^0 = 1$

4. Jede Potenz (ausgenommen 0) von 0 ist 0.

   Beispiel: $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

aber 0^0 ist nicht definiert

Addieren und Subtrahieren von Potenzen

Man kann nur gleiche Potenzen addieren und subtrahieren:

$3^2 + 4^2 + 4 \cdot 3^2 = 5 \cdot 3^2 + 4^2 \qquad 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3$

$5^3 + 4^3 \neq 9^3$!!!!! *ACHTUNG*

Multiplikation und Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis	
Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält.	$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$
Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.	$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
Potenzen mit gleichem Exponenten	
Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten beibehält	$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$
Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten beibehält.	$8^2 \div 4^2 = \left(\frac{8}{4}\right)^2 = 2^2 = 4$

Potenzen potenzieren
Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält.
$\left(2^2\right)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$, aber $2^{\left(2^3\right)} = 2^8 = 256$

Primzahlen

Alle natürlichen Zahlen, außer 1, die nur durch 1 und durch sich selber teilbar sind, heißen Primzahlen. Die Primzahlen lauten: 2, 3, 5, 7,11,13,17,19,23,…

Teilbarkeit von Zahlen

Teilbarkeitsregeln	**Beispiele**
1) Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die Einerziffer durch 2 teilbar ist.	$14 = 2 \cdot 7$ Einerziffer ist hier 4, also ist 14 durch 2 teilbar
2) Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn die Quersumme (Ziffernsumme) durch 3 teilbar ist.	$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ Quersumme ist 1+8=9 also ist 18 durch 3 teilbar
3) Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzen beiden Ziffern durch 4 teilbar sind.	$112 = 4 \cdot 28$ Die letzten beiden Ziffern 12 sind durch 4 teilbar, also ist 112 durch 4 teilbar
4) Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die Einerziffer 5 oder 0 ist.	$35 = 5 \cdot 7$; $40 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ Einerziffer ist 5 oder 0, also ist 35 und 40 durch 5 teilbar.
5) Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.	$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ 42 ist durch 2 und 3 teilbar (siehe Regel 1 und 2)
6) Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre letzen drei Ziffern durch 8 teilbar sind.	$1160 = 8 \cdot 145$ Die letzten drei Ziffern 160 sind durch 8 teilbar, also ist 1160 durch 8 teilbar
7) Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist.	$72 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 9$ Quersumme ist 7+2=9 also ist 72 durch 9 teilbar
8) Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn die Zahl auf 0 endet.	$230 = 10 \cdot 23$ Einerziffer ist 0 ,also ist 230 durch 10 teilbar

Primfaktorzerlegung:

Jede Zahl kann in Primfaktoren zerlegt werden.

Beispiel 1:

66	**2**
33	**3**
11	**11**
1	

Ergebnis: 66 = 2·3·11

Beispiel 2:

18	**2**
9	**3**
3	**3**
1	

Ergebnis: 18 =2·3·3

…ößter gemeinsamer Teiler)

Zahl 1:

27	**3**
9	**3**
3	**3**
1	

Ergebnis: **27= 3·3·3**

Zahl 2:

63	**3**
21	**3**
7	**7**
1	

Ergebnis: **63 =3·3·7**

Gemeinsame Teiler sind 3 und 3 ➔ 3·3 = 9 der größte gemeinsame Teiler.
Schreibweise: **ggT (27, 63) = 9**

kgV (kleinste gemeinsame Vielfache)

Das **kgV** findet man, in dem man alle vorkommenden Primfaktoren mit einander multipliziert.

Zahl 1:

27	**3**
9	**3**
3	**3**
1	

Ergebnis: **27= 3·3·3**

Zahl 2:

63	**3**
21	**3**
7	**7**
1	

Ergebnis: **63 =3·3·7**

Das kgV ist also: $\underbrace{3\cdot 3\cdot 3}_{\text{1.Zahl}}\cdot \underbrace{7}_{\substack{\text{fehlender}\\ \text{Faktor der}\\ \text{2. Zahl}}} = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7 = 189$

Schreibweise: **kgV (27,63) = 189**

Die rationalen Zahlen

Bei der Division zweier ganzer Zahlen erhalten wir als Ergebnis oft keine ganze Zahl, z.B. ½. Um in solchen Fällen rechnen zu können, verwendet man Brüche. Alle ganzen Zahlen und alle Brüche ergeben zusammen die Menge der rationalen Zahlen Q.

Brüche

Brüche bestehen aus zwei Zahlen und einem Bruchstrich. Die Zahl oberhalb des Bruchstriches heißt Zähler, die unter dem Bruchstrich heißt Nenner.

$$\frac{3 \rightarrow}{4 \rightarrow} \quad \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Der **Nenner** gibt an, in wie viele Teile das Ganze geteilt werden soll. Der **Zähler** gibt an, wie viele von diesen Teilen genommen und zusammengefasst werden sollen.

Ein Bruch, bei dem die Zahl im Zähler kleiner als die Zahl im Nenner ist, heißt **echter Bruch**.	Beispiel: $\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{9}{10}$
Ein Bruch, bei dem die Zahl im Zähler größer als die Zahl im Nenner ist, heißt **unechter Bruch**.	Beispiel: $\frac{3}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{19}{3}$

Unechte Brüche kann man in eine **gemischte Zahl** umformen.	$\frac{13}{4}=\frac{12+1}{4}=\frac{12}{4}+\frac{1}{4}=3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$
Jede ganze Zahl lässt sich als Bruch mit dem Nenner 1 darstellen	$\frac{2}{1}=2:1=2, \quad \frac{-3}{1}=-3:1=-3$

Ein Bruch, dessen Zähler 0 ist, stellt die Zahl 0 dar.	$\frac{0}{5}=0:5=0$
Null darf nicht im Nenner eines Bruches stehen, da die Division durch Null nicht ausführbar ist.	$\frac{7}{0}$ ist nicht definiert

Vorzeichenregeln für Brüche:

Beim Rechnen mit Brüchen gelten dieselben Vorzeichenregeln wie beim Dividieren ganzer Zahlen.

$\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b}$ Beispiel: $\frac{+4}{+9}=+\frac{4}{9}$	$\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}$ Beispiel: $\frac{-2}{-7}=+\frac{2}{7}$
$\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}$ Beispiel: $\frac{+3}{-2}=-\frac{3}{2}$	$\frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b}$ Beispiel: $\frac{-3}{+5}=-\frac{3}{5}$

Rechnen mit Brüchen

Überblick: Man kann Brüche

- **Erweitern und Kürzen**
- **Multiplizieren**
- **Dividieren**
- **Addieren und Subtrahieren**

1) Erweitern und Kürzen von Brüchen

Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man Zähler und Nenner mit derselben (von Null verschiedenen) Zahl multipliziert (erweitern) oder dividiert (kürzen).

Beispiele:

Aufgabe	***Lösung***
Erweitere $\frac{2}{3}$ mit 5.	$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{5}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}$

Vor dem Kürzen müssen Zähler und Nenner so weit wie möglich in Produkte zerlegt werden. Nur jene Faktoren, die Zähler und Nenner gemeinsam haben können gekürzt werden.

Aufgabe	***Lösung***
a) $\frac{42}{12}$ kürzen	$\frac{42}{12}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 7}{2\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}=\frac{7}{2}$

2) Multiplikation von Brüchen

Bevor man eine Multiplikation ausführt, zerlegt man Zähler und Nenner in Faktoren und kürzt die gemeinsamen Faktoren. Dann werden die Brüche multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Aufgabe	***Lösung***
a) $\frac{6}{11}\cdot\frac{35}{3}=?$	$\frac{6}{11}\cdot\frac{35}{3}=\frac{2\cdot 3}{11}\cdot\frac{5\cdot 7}{3}=\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot 5\cdot 7}{\cancel{3}\cdot 11}=\frac{2\cdot 5\cdot 7}{11}=\frac{70}{11}$

3) Division von Brüchen

Algebraische Brüche werden dividiert, indem man vom zweiten Bruch (Divisor) den Kehrwert bildet und anschließend mit dem ersten Bruch (Dividend) multipliziert.

Aufgabe	***Lösung***
a) $\frac{15}{7} \div \frac{10}{21} = ?$	$\frac{15}{7} \div \frac{10}{21} = \frac{15}{7} \cdot \frac{21}{10} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{7}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{7}}{2 \cdot \cancel{5}} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$

Doppelbrüche

Aufgabe	***Lösung***
a) $\frac{1}{4} \div \frac{3}{5} = ?$	Da der Bruchstrich dieselbe Bedeutung wie das Divisionszeichen hat, werden Doppelbrüche aufgelöst, indem man mit dem Kehrwert multipliziert. $\frac{1}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 3} = \frac{5}{12}$
b) $\frac{\frac{5}{14}}{\frac{3}{7}} = ?$	$\frac{\frac{5}{14}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{14} \div \frac{3}{7} = \frac{5}{14} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5}{2 \cdot 7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot \cancel{7}}{2 \cdot \cancel{7} \cdot 3} = \frac{5}{6}$

4) Addition von Brüchen

Addition bzw. Subtraktion von gleichnamigen Brüchen

Zwei Brüche sind gleichnamig, wenn sie denselben Nenner haben.

Aufgabe	***Lösung***
a) $\frac{4}{17} + \frac{8}{17} = ?$	Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner anschreibt. $\frac{4}{17} + \frac{8}{17} = \frac{4+8}{17} = \frac{12}{17}$

b) $\frac{16}{13}-\frac{8}{13}=?$	Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und den Nenner anschreibt. $$\frac{16}{13}-\frac{8}{13}=\frac{16-8}{13}=\frac{8}{13}$$

Addition bzw. Subtraktion von Brüchen, die nicht gleichnamig sind

Die Brüche müssen, bevor sie addiert werden können, gleichnamig gemacht werden. Dazu wird das kgV der Nenner gesucht (eventuell vorher faktorisieren). Alle Brüche werden so erweitert, dass sie alle denselben Nenner (das kgV) haben. Wenn die Brüche gleichnamig sind könne sie addiert bzw. subtrahiert werden.

Aufgabe	***Lösung***
a) $\frac{3}{7}+\frac{8}{14}=?$	$$\frac{3}{7}+\frac{8}{14}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 2}+\frac{8}{14}=\frac{6}{14}+\frac{8}{14}=\frac{6+8}{14}=\frac{14}{14}$$
b) $\frac{16}{21}-\frac{8}{14}=?$	$$\frac{16}{21}-\frac{8}{14}=\frac{16\cdot 2}{\underbrace{3\cdot 7\cdot 2}_{\text{kgV}}}-\frac{8\cdot 3}{2\cdot 7\cdot 3}=\frac{32}{42}-\frac{24}{42}=\frac{\cancel{12}\,2}{\cancel{42}\,7}=\frac{2}{7}$$

Potenzen von Brüchen

Aufgabe	***Lösung***
a) $\left(\frac{3}{4}\right)^3=?$	Brüche potenzieren heißt Brüche multiplizieren!! $$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3\cdot 3}{4\cdot 4\cdot 4}=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}$$
b) $\left(\frac{1}{7}\right)^2=?$	$$\left(\frac{1}{7}\right)^2=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1\cdot 1}{7\cdot 7}=\frac{1^2}{7^2}=\frac{1}{49}$$

Dezimalzahlen

Stufenzahlen und Systembrüche

Um das Wesen der Dezimalzahlen zu verstehen, ist es einmal mehr hilfreich, sich den Aufbau unseres Zahlensystems zu vergegenwärtigen.

In unserem Dezimalsystem mit der Basis 10 erhält man so von rechts nach links die Stufenzahlen 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 usw. oder 1, 10, 100, 1000 usw.

Setzt man das Stellenwertsystem nach rechts fort, indem man weiter fortgesetzt durch die Basis dividiert, im Dezimalsystem also jeweils den zehnten Teil bildet, erhält man die Potenzen 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} usw., also $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ usw. Diese Brüche nennt man auch Systembrüche.

b^5	b^4	b^3	b^2	b^1	b^0	Kom- ma	b^{-1}	b^{-2}	b^{-3}	b^{-4}	b^{-5}
10000 0	10000	100 0	100	10	1		1/10	1/100	1/1000	1/10000	1/100000

So bedeutet die Zahl 35,26 im Dezimalsystem 30 + 5 + 2/10 + 6/100

Dezimalzahlen sind also lediglich spezielle Schreibweisen für Brüche!!

Begriffe	**Beispiele**
Dezimalzahlen, deren Nachkommastellen bis ins Unendliche gehen, heißen **unendliche** Dezimalzahlen. Dezimalzahlen, deren Nachkommastellen endlich sind heißen **endliche** Dezimalzahlen.	$0{,}123534256\ldots$ $0{,}044444\ldots = 0{,}0\overline{4}$ $12{,}3$ $0{,}0000234$
Zahlen, die durch eine immer wiederkehrende Zifferngruppe (= Periode) zusammengesetzt sind, heißen **periodische** Dezimalzahlen	$0{,}125125\ldots = 0{,}\overline{125}$ $0{,}044444\ldots = 0{,}0\overline{4}$
Periodische Dezimalzahlen, deren Periode unmittelbar hinter dem Komma beginnt, heißen **reinperiodisch**, die anderen heißen **gemischt periodisch**. Die Ziffern zwischen dem Komma und der	$0{,}125125\ldots = 0{,}\overline{125}$ $0{,}44444\ldots = 0{,}\overline{4}$ $0{,}1234773535\ldots = 0{,}\underbrace{123477}_{\text{Vorperiode}}\overline{35}$

ersten Periode heißen **Vorperiode**	

Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen

Wie rechnet man Brüche in Kommazahlen um?

Erster Schritt: Zuerst kürzt man den Bruch so weit wie möglich. **Zweiter Schritt**: Anschließend teilt man den Zähler durch den Nenner. Man braucht von diesem Divisionsergebnis höchstens so viele Nachkommastellen zu betrachten, wie der Nenner groß ist, also z.B. bei 5/3 nur 2 Nachkommastellen, da sich dann die Nachkommastellen immer wieder wiederholen (***Periode***).	$\frac{8}{10}=\frac{4}{5}=4\div 5=0{,}8;$ $\frac{20}{12}=\frac{5}{3}=5\div 3=1{,}6666=1{,}\overline{6};$ $\frac{32}{56}=\frac{4}{7}=4\div 7=0{,}57142857..=0{,}\overline{571428};$ $\frac{2}{900}=2\div 900=0{,}00222...=0{,}00\overline{2}$

Umwandlung von Dezimalzahlen in Brüche

Wie rechnet man endliche Dezimalzahlen in Brüche um?

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3
$3{,}7=\frac{37}{10}$	$0{,}008=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}$ (kürzen)	$3{,}6=\frac{36}{10}=\frac{18}{5}$ kürzen!!

Wie rechnet man periodische Dezimalzahlen in Brüche um?

Regel: Jeder Bruch lässt sich in eine endliche oder periodische Dezimalzahl verwandeln und umgekehrt.

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3
$0{,}\overline{4}=\frac{4}{9}$	$0{,}\overline{12}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$	$3{,}1\overline{2}=3+0{,}1+0{,}0\overline{2}=$ $\frac{3}{1}+\frac{1}{10}+\frac{2}{90}=\frac{270+9+2}{90}$ $=\frac{281}{90}=3\frac{11}{90};$

Prozentrechnung

Zu den **bequemen Prozentsätzen** gehören u.a.:

1%,	5%	10%	20%,	25%	$33\frac{1}{3}\%$	50%,	75%,	100%,	200%
$\frac{1}{100}$	$\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{100}{100}=1$	$\frac{200}{100}=2$
0,01	0,05	0,1	0,2	0,25	0,33..	=0,5	0,75	1	2

Prozentangaben werden verwendet, um Anteile anzugeben bzw. zu vergleichen, indem man die Vergleichszahl 100 benutzt. Prozentangaben sind nur in Verbindung mit einer **Bezugsgröße** sinnvoll

$$p=\frac{P}{G}$$

G... **Grundwert (**Bezugsgröße)
p%... **Prozentsatz**
P... Prozentwert

Beispiele mit Formel:

1) Textaufgabe: Wenn Katrin von ihren 15€ Taschengeld 7,50€ für ein Geburtstagsgeschenk ausgibt, sind das?.

geg: G= 15€ ges: p
P= 7,50€

Rechnung: $p=\frac{P}{G}\cdot 100=\frac{7,5}{15}\cdot 100=0,5\cdot 100=50\%$

Antwort: Wenn Katrin von ihren 15€ Taschengeld 7,50€ für ein Geburtstagsgeschenk ausgibt, sind das 50%.

2) 16 sind 40% von was ?

geg: P= 16€ ges: G
p= 40%

Rechnung:

$$p=\frac{P}{G}\Rightarrow \qquad gN\ \ bilden$$

$$\frac{G\cdot p}{G}=\frac{P}{G}\Rightarrow \qquad |\cdot G$$

$$G\cdot p=P \qquad |\div p$$

$$G=\frac{P}{p}=\frac{16}{0,4}=\frac{16}{40}\cdot 100=40$$

Beispiele ohne Formel:

3) 50 % von 34 kg? da 50 % =0,5= $\frac{1}{2}$ folgt $\frac{1}{2}$·von 34 kg = 34 · 0,5 = 17 kg.

4) 20 % von 20 km? da 20 % =0,2= $\frac{1}{5}$ folgt $\frac{1}{5}$·von 20 km = 20 · 0,2 = 4 km.

5) 16 sind 40% von was ? da 40 % =0,4 folgt 100%·von 16 = 16 : 0,4 = 40.

Termrechnung

Was versteht man unter einem Term ?

Der Begriff Term ist ein Sammelbegriff für alle Ausdrücke, mit denen man rechnen kann (Rechenausdrücke).

Definition: Eine Term ist ein mathematisch sinnvoller Ausdruck aus Zahlen, Variablen und Operationszeichen.

Beispiele für Terme:

Zahlenterme			
Variablenterme			
Kombinationsterme			

und unendlich viele weitere Möglichkeiten

Man unterscheidet auch:

Monom			
Binom			
Polynom			

Der Wert eines Terms ?

Während man bei Zahlentermen den Wert rasch angeben (berechnen) kann, hängt der Wert von Termen mit Variablen von den Zahlen ab, die man in die Variablen einsetzt.

Beispiele:

Term	Wert des Terms
$2\cdot(5+3)$	Wert
$(a-b)^2$	für a=2 und b=1 Wert ; für a=5 und b=2 Wert ....
$3\cdot(a-2)$	für a=1 Wert ; für a=2 Wert ; für a=7 Wert ....

Für Terme gelten dieselben Rechenregeln wie für Zahlen, da Variable nur "Platzhalter" für (zunächst noch unbekannte) Zahlen sind. Einschränkungen gibt es aber bei Bruchtermen (Termen mit Variablen im Nenner), wo durch Null nicht geteilt werden darf.

Beispiel:

$\frac{12}{x}$ für x=2 Wert ; für x=1 Wert ....

für x=0 kein Wert möglich,
denn durch die Zahl Null darf man nicht teilen.

Die Begründung dafür finden wir aus der folgenden Tabelle:

$\frac{12}{x}$	x =	12	6	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	0	
	Term-Wert									

Eine größte Zahl kann man nicht angeben

MERKE: Wenn zwei Terme bei jeder Ersetzung denselben Wert liefern, heißen sie **gleichwertig** oder kurz **gleich**.

Die Schreibweise $(x - 2)\cdot x = x^2 - 2x$ heißt also nicht, dass es sich um die gleichen Terme handelt, sondern dass sie die gleichen Werte liefern!

Addition und Subtraktion von Termen

Klammern bei Termen:

Es gelten für Variable dieselben Regeln wie bei den Zahlen.

Beispiel 1:

$$2a + 3b + (a - 2b)$$

Plusklammer Vorzeichen bleiben

$$= 2a + 3b + a - 2b$$

$$= 3a + b$$

Beispiel 2:

$$c + 2d - (2c - 5d)$$

Minusklammer Vorzeichen ändern sich

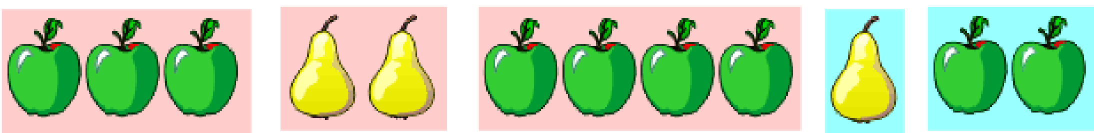
$$= c + 2d - 2c + 5d$$

$$= -c + 7d$$

Addition / Subtraktion bei Termen:

Es dürfen nur gleiche Variable zusammengefasst werden.

Beispiel 3:



$$3a + 2b + 4a - b - 2a$$

$$= 3a + 4a - 2a + 2b - b$$

$$= \underline{\underline{5a + b}}$$

Beispiel 4:

$$3x - [x + (2y + x - 4z) - (x - 3y)]$$

Plusklammer Minusklammer

Klammern von innen her auflösen

$$= 3x - [x + 2y + x - 4z - x + 3y]$$

Minusklammer

$$= 3x - x - 2y - x + 4z + x - 3y$$

$$= 3x - x - x + x - 2y - 3y + 4z$$

Vertauschungsgesetz: aber Vorzeichen jedes Glieds mitnehmen!

$$= 2x - 5y + 4z$$

Beispiele

a.) $11x + 4x - 16x + 9x = (11 + 4 - 16 + 9)x = \underline{8x}$

b.) $7ab + 3ab + 6ab = (7 + 3 + 6)\,ab = \underline{16ab}$

c.) $5x^2 - 20x^2 + 3x^2 = (5 - 20 + 3)x^2 = \underline{-12x^2}$

d.) $6a + 2b - 8a - b = (6 - 8)a + (2 - 1)b = -2a + b$

Terme wie -2a + b kann man nicht weiter zusammenfassen!

e.) $12(x - 2) - 8(x - 2) + (x - 2) = (12 - 8 + 1)(x - 2) = \underline{5(x - 2)}$

f.) $3(a + b) + 6(a + b) - 8(a + b) = (3 + 6 - 8)(a + b) = \underline{a + b}$

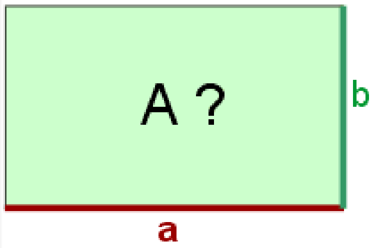
g.) $14a - 3b + 4a - 5b - 9a = (14 + 4 - 9)a + (-3 - 5)b = \underline{9a - 8b}$

h.) $4a - 3b + 5c - 4a + 3b - 4c =$

$(4-4)a+(-3+3)b+(5-4)c=\underline{c}$

Multiplizieren von Termen

Welchen Flächeninhalt hat ein Rechteck der Länge a und Breite b ?



Wenn man weiss, welche Zahlen man für die Variablen a und b einsetzen soll, kann man einen konkreten Wert für die Fläche ausrechnen.

hier $A = 5\text{cm} \cdot 3\text{cm} = 15\ \text{cm}^2$

Normalerweise kennt man aber die Einsetzung für die Variablen nicht. Es heisst dann ...

$A = a \cdot b = ab$

ab ist die abgekürzte Schreibweise von a·b

Potenzen

weitere Beispiele:

Aufgabe	Lösung (vereinfachte Schreibweise)
a·b·c	= abc (Volumen beim Quader)
a·a	= a^2 (Fläche beim Quadrat)
a·a·b	= a^2b (Volumen einer quadratischen Säule)

Potenzen

$a \cdot a = a^2$

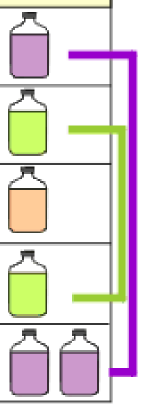
$a \cdot a \cdot a = a^3$

usw ...

Potenzrechnung = Multiplikation mit demselben Faktor

Gleich- und verschiedenartige Terme:

Term	vereinfacht
a·a·b·c·c	= a^2bc^2
a·b·b·b·c	= ab^3c
a·a·b·c	= a^2bc
b·b·a·b·c	= ab^3c
$2ab \cdot ac^2$	= $2a^2bc^2$



Es ist ähnlich wie bei den Flaschen im chemischen Labor.

Man darf nur gleichartige Terme addieren und subtrahieren.

Auch bei Termen gilt die “Punkt vor Strich-Regel”.

$a \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c + a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c + a \cdot a \cdot b \cdot c - b \cdot b \cdot a \cdot b \cdot c + 2ab \cdot ac^2$

$= a^2bc^2 + ab^3c + a^2bc - ab^3c + 2a^2bc^2$

$= 3a^2bc^2 + a^2bc$

Beispiele

a.) $4(x+5) = 4\cdot x + 4\cdot 5 = \underline{4x + 20}$

b.) $x(2x + 5) = x \cdot 2x + x \cdot 5 = \underline{2x^2 + 5x}$

c.) $-2(3 - a) = -2\cdot 3 - 2\cdot(-a) = \underline{-6 + 2a}$

d.) $5x(x+1) - 2(x^2 + 3x) =$

$5x^2 + 5x - 2x^2 - 6x =$

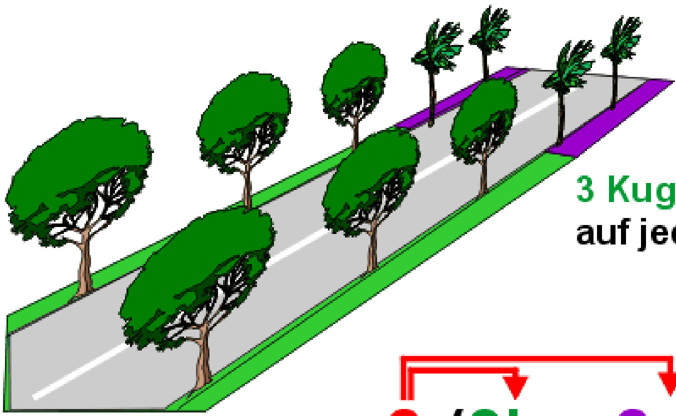
$\underline{3x^2 - x}$

e.) $a(a + 2b) + b(b - 2a) =$

$a\cdot a + a\cdot 2b + b\cdot b + b\cdot(-2a) =$

$\underline{a^2 + b^2}$

Faktorisieren und Ausklammern



$$2\cdot(3k + 2p) = 6k + 4p$$

Faktorisieren ← | → Klammer auflösen

Distributivgesetz bei der Multiplikation

$$a\cdot(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)\cdot c = ac + bc$$

jeder Summand mal dem Faktor

Faktorisierungsbeispiel:

$$24a^2b^3 + 36ab^2 - 30a^3b$$

Primfaktorzerlegung

$$= 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b + 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot a\cdot b\cdot b - 2\cdot3\cdot5\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b$$

$$= 2\cdot3\cdot a\cdot b\cdot(2\cdot2\cdot a\cdot b\cdot b + 2\cdot3\cdot b - 5\cdot a\cdot a)$$

$$= 6ab\,(4ab^2 + 6b - 5a^2)$$

Beispiele

a.) $8x - 12 = 4 \cdot 2x - 4 \cdot 3 = \underline{4\,(2x - 3)}$

Probe: $\underline{4\,(2x - 3) =}$

b.) $20\,x^2 + 5x = 5 \cdot 4 \cdot x \cdot x + 5 \cdot 1 \cdot x = \underline{5x\,(4x + 1)}$

Probe: $5x\,(4x + 1) =$

c.) $21a + 35x - 14z = 7 \cdot 3 \cdot a + 5 \cdot 7 \cdot x - 2 \cdot 7 \cdot z =$

$\underline{7(3a + 5x - 2z)} =$

Probe:

d.) $7y^2 - 14y = 7 \cdot y \cdot y - 7 \cdot 2 \cdot y = \underline{7y\,(y - 2)}$

Probe:

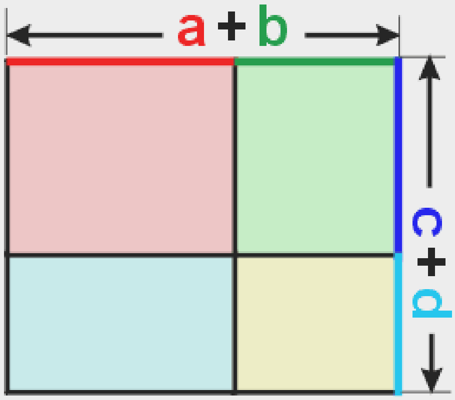
e.) $x^2 + 35\,x - 14\,x^3 = x \cdot x + 5 \cdot 7 \cdot x - 7 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x =$

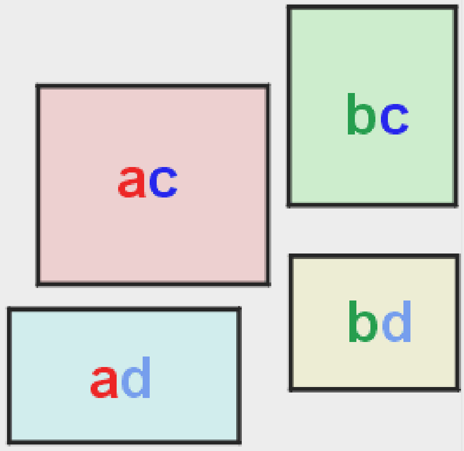
$\underline{x\,(x + 35 - 14x^2})$

Probe:

Multiplikation von Summen

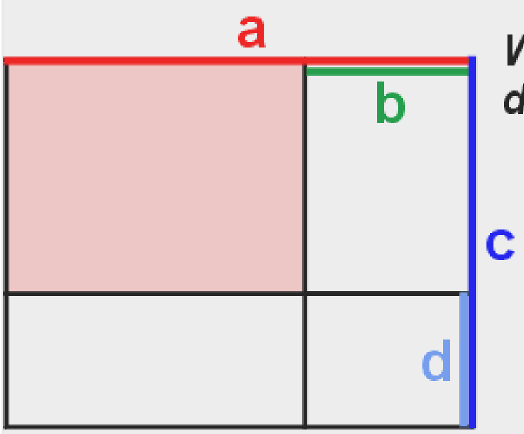
Wie groß ist der Flächeninhalt des gesamten Rechtecks ?

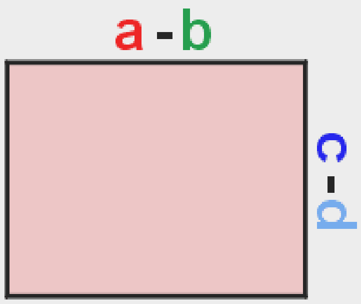




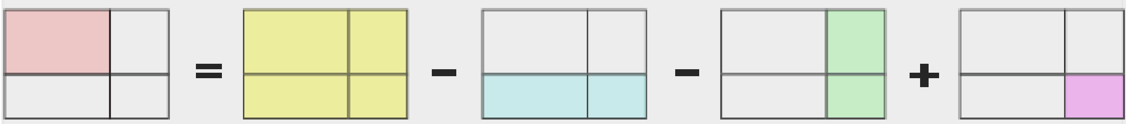
$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Wie groß ist der Flächeninhalt des linken oberen Rechtecks ?





$$(a-b)\cdot(c-d) = ac - ad - bc + bd$$



Was 1x zu viel subtrahiert wurde, muss wieder addiert werden (!)

Beispiele

a.) $(a + 4)(b - 2) =$ $\underline{ab - 2a + 4b - 8}$

b.) $(a + 12)(a - 10) =$

$a^2 - 10a + 12a - 120 =$

$\underline{a^2 + 2a - 120}$

c.) $(3a - 4)(5a + 7) =$

$15a^2 + 21a - 20a - 28 =$

$\underline{15a^2 + a - 28}$

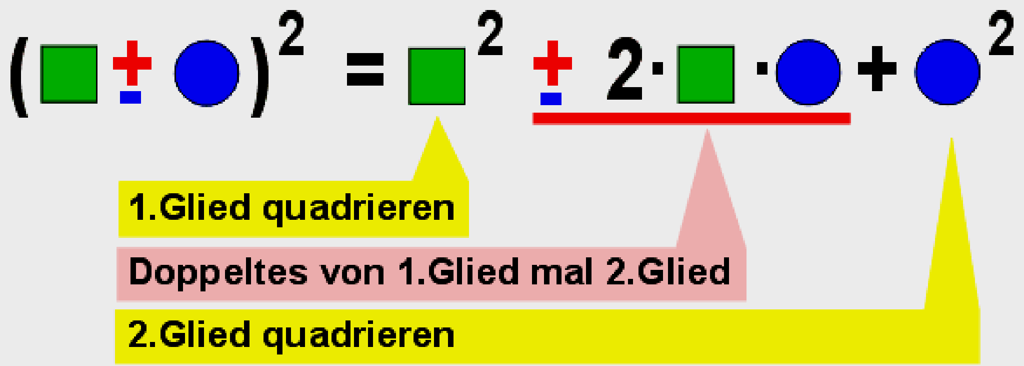
d.) $(5x - 10y)(5y - 10x) =$

$25xy - 50x^2 - 50y^2 + 100yx$

$\underline{125xy - 50x^2 - 50y^2}$

Binomische Formeln Überblick

$\cdot$	$(a+b)$	$(a-b)$
$(a+b)$	1. binomische Formel $a^2 + 2ab + b^2$	3. binomische Formel $a^2 - b^2$
$(a-b)$	3. binomische Formel $a^2 - b^2$	2. binomische Formel $a^2 - 2ab + b^2$



1

$$(a+b)\cdot(a+b) = \boxed{(a+b)^2}$$

$$= a^2+ab+ab+b^2 = \boxed{a^2+2ab+b^2}$$

2

$$(a-b)\cdot(a-b) = \boxed{(a-b)^2}$$

$$= a^2-ab-ab+b^2 = \boxed{a^2-2ab+b^2}$$

3

$$(a+b)\cdot(a-b)$$

$$= a^2-ab+ab-b^2 = \boxed{(a+b)\cdot(a-b) \quad a^2-b^2}$$

Beispiele

1. binomische Formel

a) $(3 + x)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 = \underline{9 + 6x + x^2}$

b) $(5x + 3y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3y + (3y)^2 = \underline{25x^2 + 30xy + 9y^2}$

c) $9x^2 + 30\,xy + 25y^2 = (3x + 5y)^2$ ***(faktorisieren)***

2. binomische Formel

a) $(4 - x)^2 = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + x^2 = \underline{16 - 8x + x^2}$

b) $(5x - y)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot y + (y)^2 = \underline{25x^2 - 10xy + y^2}$

c) $r^2 – 6r + 9 = (r – 3)^2$ ***(faktorisieren)***

3. binomische Formel

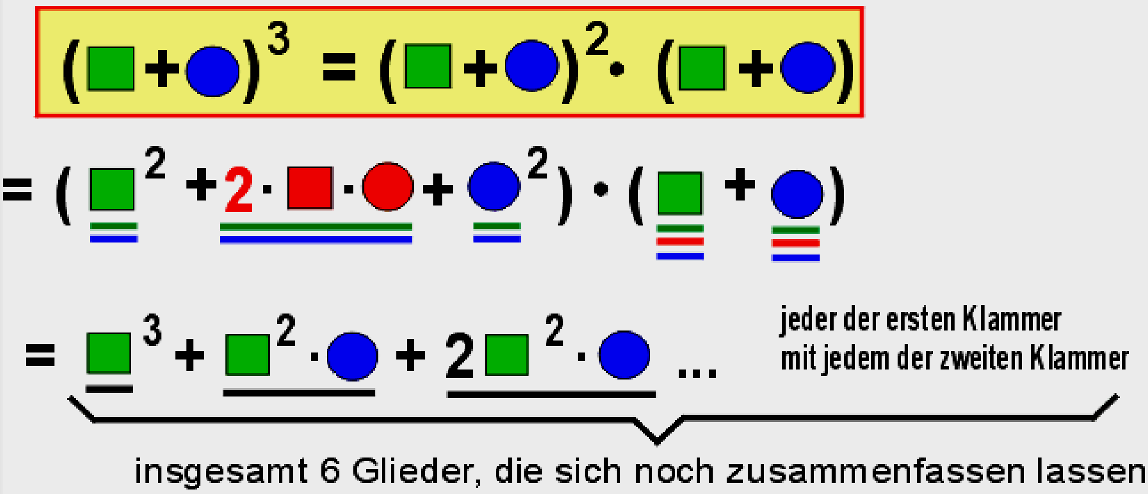
a) $(3 - x)\,(3 + x) = 3^2 – x^2 = 9 – x^2$

b) $(5x + 3y)\,(5x – 3y) = (5x)^2 – (3y)^2 = 25x^2 – 9y^2$

c) $81a^2 – 64b^2 = (9a + 8b)\,(9a – 8b)$ ***(faktorisieren)***

Produkte mit mehr als 2 Klammern

Lösungsrezept der Form $(a+b)^3$



Lösung mit Hilfe der binomischen Formel:

$$(a+b)^3$$

$$= (a+b)^2 \cdot (a+b)$$

□ = binomische Formel

$$= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b)$$

$$= a^3 + \underbrace{a^2b + 2a^2b} + \underbrace{2ab^2 + ab^2} + b^3$$

$$= a^3 + \underbrace{3a^2b} + \underbrace{3ab^2} + b^3$$

Beispiel (beliebige Klammern)	Beispiel $(a+b)^3$
Methode 1: $(4x+3)(2x-5)(6x+11) =$ $(8x^2-20x+6x-15)(6x+11)) =$ $(8x^2-14x-15)(6x+11)) =$ $= 48x^3 - 84x^2 - 90x + 88x^2 -$ $154x - 165 =$ $48x^3 + 4x^2 - 244x - 165$	***Methode 1:*** $(3x+2)^3 =$ $(3x+2)^2 \cdot (3x+2) =$ $(9x^2+12x+4) \cdot (3x+2) =$ $27x^3+18x^2+36x^2+24x+$ $12x+8 =$ $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$
Methode 2: $(4x+3)(2x-5)(6x+11) =$ $(4x+3)(12x^2+22x-30x-55) =$ $(4x+3)(12x^2-8x-55) =$ $= 48x^3 - 32x^2 - 220x + 36x^2 -$ $24x - 165 =$ $48x^3 + 4x^2 - 244x - 165$	***Methode 2:*** $(x-2)^3 =$ $(x-2)(x-2)^2 =$ $(x-2)(x^2-4x+4) \cdot =$ $x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x + 4x - 8 =$ $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Produkte mit mehr als 2 Klammern

Terme der Form $(a+n)^4$ und das Pascalsche Dreieck:

dwu-Unterrichtsmaterialien.de
mbf007f

Lösungsrezept der Form $(a+b)^4$

$$\boxed{(■+●)^4 = (■+●)^2 \cdot (■+●)^2}$$

$$= (■^2 + 2\cdot ■\cdot ● + ●^2)\cdot(■^2 + 2\cdot ■\cdot ● + ●^2)$$

$$\underbrace{= ■^4 + 2\cdot ■^3 ● + ■^2\cdot ●^2 \ldots}_{\text{insgesamt 9 Glieder, die sich noch zusammenfassen lassen}}$$

jeder der ersten Klammer
mit jedem der zweiten Klammer

insgesamt 9 Glieder, die sich noch zusammenfassen lassen

$(a+b)^4$

$= (a+b)^2 \cdot (a+b)^2$

$= (a^2 + 2ab + b^2)\cdot(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Das Pascalsche Dreieck:

$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	1 1	$a+b$
$(a+b)^2$	1 2 1	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$a^3 + 3a^2b + \ldots$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$a^4 + 4a^3b + \ldots$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$a^5 + 5a^4b + \ldots$

Beispiele

Beispiel:

$(2x - 3y)^4 =$ hat die Form $(a + b)^4$

mit $a = 2x$ und $b = -3y$

allgemeiner Lösungsansatz (siehe linke Seite):

und nun zur Umsetzung:

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(2x)^4 + 4(2x)^3(-3y) + 6(2x)^2(-3y)^2 + 4(2x)(-3y)^3 + (-3y)^4 =$$

jetzt die einzelnen Terme ausrechnen:

$$\underline{(2x - 3y)^4 = 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4}$$

Bruchterme

Wiederholung: Mathematisch sinnvolle Verknüpfungen von Zahlen und Variablen werden in der Mathematik als **Terme** bezeichnet.

Beispiele:

0,7 9 a x y 0,7+9 b-x b·x y:9 (x+7)·3 8:(c^2+1)

Definition: Ein Term hingegen, der im Nenner mindestens eine Variable enthält, heißt **Bruchterm**.

Beispiele:

$$\frac{2}{x};\quad \frac{y}{x^2};\quad \frac{5}{a^2-0{,}3};\quad \frac{11}{(x-12)(x+15)}$$

Das Hauptproblem solcher Bruchterme liegt darin, dass im Nenner Variablen stehen.

Wenn man also für die Variable Zahlen einsetzt, kann es passieren, dass der Nenner Null wird.

Der Nenner darf nicht Null sein!!!

Man muss also festlegen, welche Zahlen eingesetzt werden dürfen
= = > **Definitionsmenge**

Beispiele:

$\frac{12}{x-4}$	für x = 4 wird der Nenner Null. Man schreibt also = = > D=Q\{4} Für die Menge D ist der Term definiert. Anders ausgedrückt bedeutet es, dass der Term für die Variable (x = 4) kein Ergebnis hat. Für alle andere Werte sehr wohl.
$\frac{3x}{2x^2-4x}=\frac{3x}{x(2x-4)}$	für x = 0 und x = 2 wird der Nenner Null. Man schreibt also = = >D=Q\{0; 2}
$\frac{3a}{a^2+4a+4}=\frac{3a}{(a+2)^2}$	für a = -2 wird der Nenner Null. Man schreibt also = = >D=Q\{-2}

Rechnen mit Bruchtermen

Gegeben seien zwei Bruchterme mit den Definitionsmengen D_1 bzw. D_2. In der Menge D_1 und D_2, in der kein Nenner Null wird, kann man mit Bruchtermen wie mit Brüchen rechnen.

Man kann Bruchterme (wie Brüche):

- **Erweitern und Kürzen**
- **Multiplizieren**
- **Dividieren**
- **Addieren und Subtrahieren**

1) Erweitern und Kürzen von Bruchtermen

Der Wert eines Bruchterms ändert sich nicht, wenn man Zähler und Nenner mit demselben (von Null verschiedenen) Term multipliziert (erweitern) oder dividiert (kürzen).

Beispiele:

Aufgabe	*Lösung*
Erweitere $\frac{2x-1}{x}$ mit 5x.	$\frac{2x-1}{x}=\frac{(2x-1)}{x}\cdot\frac{5x}{5x}=\frac{10x^2-5x}{5x^2}$
Erweitere $\frac{5x}{x-2}$ mit 5x-1.	$\frac{5x}{x-2}=\frac{5x}{(x-2)}\cdot\frac{(5x-1)}{(5x-1)}=\frac{25x^2-5x}{5x^2-10x-x+2}=\frac{25x^2-5x}{5x^2-11x+2}$

Vor dem Kürzen müssen Zähler und Nenner so weit wie möglich in Produkte zerlegt werden. Nur jene Faktoren, die Zähler und Nenner gemeinsam haben können gekürzt werden.

Aufgabe	*Lösung*
a) $\frac{144a^2bc}{12acd}$	$\frac{144a^2bc}{12acd}=\frac{12\cdot12\cdot a\cdot a\cdot b\cdot c}{12\cdot a\cdot c\cdot d}=\frac{12\cdot\cancel{12}\cdot a\cdot\cancel{a}\cdot b\cdot\cancel{c}}{\cancel{12}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{c}\cdot d}=\frac{12ab}{d}$
b) $\frac{x^2-y^2}{x-y}$	$\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x-y}}=x+y$

2) Multiplikation von Bruchtermen

Bevor man eine Multiplikation ausführt, zerlegt man Zähler und Nenner in Faktoren und kürzt die gemeinsamen Faktoren. Dann werden die Brüche multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Aufgabe	***Lösung***
a) $\frac{a^2}{4x^2} \cdot \frac{y^4}{9b^3} =$	$\frac{a^2}{4x^2} \cdot \frac{y^4}{9b^3} = \frac{a^2 \cdot y^4}{4x^2 \cdot 9b^3} = \frac{a^2 y^4}{36x^2 b^3}$
b) $\frac{3a^2}{2b^2} \cdot \frac{b}{6a} =$	$\frac{3a^2}{2b^2} \cdot \frac{b}{6a} = \frac{3a^2 \cdot b}{2b^2 \cdot 6a} = \frac{3 \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b}}{2 \cdot b \cdot b \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot a} = \frac{a}{4b}$
c) $\frac{3a^2 - 6ax + 3x^2}{4a - 2x} \cdot \frac{4a^2 - x^2}{3a - 3x} \cdot \frac{2}{(2a + x)(a - x)} =$	$\frac{3a^2 - 6ax + 3x^2}{4a - 2x} \cdot \frac{4a^2 - x^2}{3a - 3x} \cdot \frac{2}{(2a + x)(a - x)} =$ $\frac{3\cancel{(a-x)}\cancel{(a-x)}}{2\cancel{(2a-x)}} \cdot \frac{\cancel{(2a+x)}\cancel{(2a-x)}}{3\cancel{(a-x)}} \cdot \frac{2}{\cancel{(2a+x)}\cancel{(a-x)}} =$ $= \frac{6}{6} = 1$

3) Division von Bruchtermen

Algebraische Brüche werden dividiert, indem man vom zweiten Bruch (Divisor) den Kehrwert bildet und anschließend mit dem ersten Bruch (Dividend) multipliziert.

Aufgabe	***Lösung***
a) $\frac{2a^3 b}{5c^2 d^2} : \frac{2a^2 b}{5cd^2} =$	$\frac{2a^3 b}{5c^2 d^2} : \frac{2a^2 b}{5cd^2} = \frac{2a^3 b}{5c^2 d^2} \cdot \frac{5cd^2}{2a^2 b} = \frac{2 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot b \cdot 5 \cdot \cancel{c} \cdot \cancel{d} \cdot \cancel{d}}{5 \cdot \cancel{c} \cdot \cancel{c} \cdot d \cdot d \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b}} = \frac{a}{c}$
b) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4x} : \frac{x^2 - y^2}{8xy} =$	$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4x} : \frac{x^2 - y^2}{8xy} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4x} \cdot \frac{8xy}{x^2 - y^2} =$ $= \frac{\cancel{(x+y)}(x+y) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cancel{x} \cdot y}{\cancel{4} \cdot \cancel{x} \cdot (x-y)\cancel{(x+y)}} = \frac{2y(x+y)}{x-y}$

4) Addition von Bruchtermen

Addition bzw. Subtraktion von gleichnamigen Bruchtermen

Zwei Bruchterme sind gleichnamig, wenn sie denselben Nenner haben. Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner anschreibt. Werden zwei Bruchterme subtrahiert, so muss auf den Vorzeichenwechsel geachtet werden.

Aufgabe	Lösung
a) $\frac{2(x+y)}{x^2}+\frac{3(x-y)+y}{x^2}=$	$\frac{2(x+y)}{x^2}+\frac{3(x-y)+y}{x^2}=\frac{2(x+y)+3(x-y)+y}{x^2}=$ $\frac{2x+2y+3x-3y+y}{x^2}=\frac{5x}{x^2}=\frac{5}{x}$
b) $\frac{2x^2}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x-y}=$	$\frac{2x^2}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{2x^2-(x^2+y^2)}{x-y}=\frac{2x^2-x^2-y^2}{x-y}=$ $\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)}{\cancel{x-y}}=x+y$

Addition bzw. Subtraktion von Bruchtermen, die nicht gleichnamig sind

Die Brüche müssen, bevor sie addiert werden können, gleichnamig gemacht werden. Dazu wird das kgV der Nenner gesucht (eventuell vorher faktorisieren). Alle Bruchterme werden so erweitert, dass sie alle denselben Nenner (das kgV) haben. Wenn die Brüche gleichnamig sind können sie addiert werden.

Aufgabe	Lösung
a) $\frac{2x}{3y}+\frac{4y}{5z}=$	$\frac{2x}{3y}+\frac{4y}{5z}=$ $\quad kgV: 3y\cdot 5z=15yz$ $\frac{2x\cdot 5z}{3y\cdot 5z}+\frac{4y\cdot 3y}{5z\cdot 3y\cdot}=\frac{2x\cdot 5z+4y\cdot 3y}{15yz}=\frac{10xz+12y^2}{15yz}$
b) $\frac{2x}{x+y}-\frac{4x}{2x+2y}=$	$\frac{2x}{x+y}-\frac{4x}{2x+2y}=$ $\quad$ kgV: 2(x + y) $2(x+y)$ $\quad$ Nenner faktorisieren $\frac{2\cdot 2x-4x}{2(x+y)}=\frac{4x-4x}{2(x+y)}=\frac{0}{2(x+y)}=0$

Gleichungen

Aussagen

Eine Aussage ist ein Satz (eine Behauptung; allgemein: ein sprachliches Gebilde), von dem man feststellen kann, ob er wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- Sterzing liegt im Wipptal.
- Das Auto ist rot.
- **8** ist eine Primzahl.
- Der Schüler S ist fleißig
- Der Lehrer R ist vorbereitet

Aussagen, die nicht objektiv auf ihren Wahrheitsgehalt überprüft werden können, sind keine Aussagen im mathematischen Sinne!

Beispiele:

Keine Aussage im math. Sinne	Aussage im math. Sinne
Ulli fühlt sich nicht wohl!	Ulli ist im Krankenhaus.
Das Auto gefällt mir.	Das Auto fährt 100 km/h
Rot ist schöner als blau.	Rot und blau sind Farben
Die Aufgabe gefällt mir	Die Aufgabe hat 2 Teilaufgaben

Viele Aussagen liegen auch in Form einer Gleichung oder Ungleichung vor.

Auch hier kann entschieden werden, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- $5=3$
- $2+4=6$
- $4 > 7-3$
- $5+2<-17$

Aussageformen

Eine **Aussageform** ist ein sprachliches Gebilde, das mindestens eine Leerstelle (oder einen Platzhalter, eine Variable) enthält. Erst sobald für die Leerstelle/ die Variable ein geeigneter Ausdruck eingesetzt wird, entsteht eine (wahre oder falsche) Aussage.

Beispiele:

Aussageform	Aussage
Sterzing liegt im …….	Sterzing liegt im Inntal.
$3x+2=5-7x$	$3\cdot 9+2=5-7\cdot 9$
$4x+5y=14x$	$4\cdot 2+5\cdot 4=14\cdot 2$

Beachte: In einer Aussageform kann für ein und denselben Platzhalter immer auch nur ein und derselbe Ausdruck eingesetzt werden!

Setzt man in die Gleichung bzw. Ungleichung Zahlen für die Variable ein, so entsteht eine wahre oder falsche Aussage.

Beispiel:

Gleichung:	5 + x = 7	
setze für x die Zahl 1 ein	5 + 1 = 7	falsche Aussage
setze für x die Zahl 2 ein	5 + 2 = 7	wahre Aussage

Wenn in einer Aussageform für die Variablen zugelassene Elemente eingesetzt werden, können drei verschiedene Fälle auftreten:

Es gibt **kein Element**, das eingesetzt werden kann, so dass eine wahre Aussage entsteht. Die Aussageform ist nicht erfüllbar, man sagt sie ist **unerfüllbar**. Beispiel: $x^2 = -1$ ➢ Der ….. Ball ist eckig.
Es gibt **mindestens ein Element**, das eingesetzt werden kann. Man sagt, die Aussageform ist **erfüllbar**. Beispiel: x + 1 = 3 ➢ Die weiße Tasse gehört …
Alle Elemente können eingesetzt werden. Man sagt, die Aussageform ist **allgemeingültig**. Beispiel: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ➢ Das …… Viereck hat vier Ecken.

Gleichungen

Im Mathematikunterricht haben wir es mit Gleichungen zu tun, die als Aussageform vorliegen. Eine Gleichung lösen bedeutet deshalb nichts anderes, als diejenige Zahl herauszufinden, durch welche die Aussageform in eine wahre Aussage umgewandelt werden kann.

Definitionen:

Eine Gleichung ist eine Aussageform. Sie hat die Form „ $\mathbf{T_1 = T_2}$“, wobei T_1 und T_2 Terme sind.
Beispiel: $2x + 6 = 5 - 3x$

Die Menge der Zahlen, die zum Einsetzen für die Variable zur Verfügung stehen, fasst man in der Grundmenge G zusammen.

Diejenigen Zahlen aus der Grundmenge G, die die Gleichung erfüllen (die beim Einsetzen eine wahre Aussage ergeben), fasst man in der Lösungsmenge L zusammen.

Werden in einer Gleichung für die Variablen Elemente der Grundmenge eingesetzt, so können folgende Fälle auftreten:

	Beispiele
Es gibt kein Element der Grundmenge, das in die Gleichung eingesetzt werden kann, so dass eine wahre Aussage entsteht. Die Gleichung (=Aussageform) ist nicht erfüllbar, die Lösungsmenge ist leer.	$2x = 5$ $G = \mathbb{N}$ $L = \{\ \}$
Es gibt mindestens ein Element der Grundmenge, das in die Gleichung eingesetzt werden kann, so dass eine wahre Aussage entsteht. Die Gleichung (=Aussageform) ist erfüllbar.	$2x = 4$ $G = \mathbb{N}$ $L = \{2\}$
Alle Elemente der Grundmenge können in die Gleichung eingesetzt werden, so dass eine wahre Aussage entsteht. Die Gleichung (=Aussageform) ist allgemeingültig, die Lösungsmenge entspricht der Grundmenge.	$2x = x + x$ $G = \mathbb{N}$ $L = G$

Äquivalenzumformungen

Definition: Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen. Eine Äquivalenzumformung ist eine Umformung einer Gleichung in eine andere Gleichung, wobei die Lösungsmenge unverändert bleibt.

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich bei folgenden Umformungen nicht.

Äquivalenzumformung	Beispiel
a) die Seiten der Gleichung können vertauscht werden.	$2x = x + 4$ $x + 4 = 2x$
b) zu beiden Seiten einer Gleichung kann derselbe Term addiert oder subtrahiert.	$3x + 1 = 7 - 2x \quad \lvert +2x - 1$ $3x + 1 + 2x - 1 = 7 - 2x + 2x - 1$ $5x=6$
c) beide Seiten einer Gleichung können mit derselben Zahl (aber nicht Term mit Variable*) multipliziert werden.	$-x = 3 \quad \lvert \cdot (-1)$ $-x \cdot (-1) = 3 \cdot (-1)$ $x = -3$
d) beide Seiten einer Gleichung können durch dieselbe Zahl (aber nicht Term mit Variable*) dividiert werden.	$4x = 1 \quad \lvert :4$ $\frac{4x}{4} = \frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{4}$

*) Gegenbeispiel zu c):

$x = 2$ L = {2}
$x^2 = 2x$ L = {2, 0} Die Lösungsmenge hat sich geändert!!!

Arten und Formen von Gleichungen

Gleichungen werden in folgende Arten eingeteilt:

Arten	Beispiel
Bestimmungsgleichungen	$2x + 3 = x - 6$
Funktionsgleichungen	$y = 2x + 5$
Formeln	$U = 2a + 2b$

Gleichungen werden nach ihrer Form unterschieden:

Form	Beispiel
Lineare Gleichungen	$y = x + 4$; $3x + 7 = 12x + 3$
Produktgleichungen	$(2 - x)(x + 5) = 0$
Bruchgleichungen	$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x+1}{x} + 2$
Verhältnisgleichungen	$5 : x = 4 : 8$
Quadratische Gleichungen	2. Klasse
Wurzelgleichungen	2. Klasse
Logarithmusgleichungen	3. Klasse
Exponentialgleichungen	3. Klasse
Trigonometrische Gleichungen	3. Klasse

Lineare Gleichungen

Hat die Variable die Hochzahl 1, so spricht man von einer linearen Gleichung. Hier die Schrittfolge zum Bestimmen der Lösungsmenge:

Schritte	Kurzform
1. Löse alle Klammern nach den bekannten Regeln auf.	Klammern auflösen
2. Fasse die Terme auf beiden Seiten zusammen	zusammenfassen
3. Forme so um, dass auf der einen Seite nur Vielfache der Variablen und auf der anderen Seite nur Zahlen stehen.	ordnen
4. Forme so um, dass die Variable „alleine“ steht, d.h. den Faktor (die Vorzahl) +1 besitzt.	Variable isolieren
5. Gib die Lösungsmenge an.	Lösungsmenge
6. Führe die Probe durch.	Probe

Ein Beispiel (genauer):

1. Klammern auflösen	$3\,(5 + x) - 2\,(x + 1)\,(x - 1) = 2x\,(1 - x) + 5 - x$ $15 + 3x - 2\,(x^2 - 1) = 2x - 2x^2 + 5 - x$ $15 + 3x - 2x^2 + 2 = 2x - 2x^2 + 5 - x$
2. zusammenfassen	$17 + 3x - 2x^2 = x - 2x^2 + 5$
3. ordnen	$17 + 3x - 2x^2 = x - 2x^2 + 5 \qquad \vert +2x^2 - x - 17$ $2x = -12$
4. isolieren	$2x = -12 \qquad \vert : 2$ $x = -6$
5. Lösungsmenge	$L = \{-6\}$
6. Probe	$3\,(5 - 6) - 2(-6 + 1)(-6 - 1) = 2(-6)(1 + 6) + 5 - (-6)$ $3(-1) - 2(-5)(-7) = -12 \cdot 7 + 5 + 6$ $-3 - 70 = -84 + 11$ $-73 = -73$ ➔ wahre Aussage, also eine Lösung!!!

Weitere Beispiele:

$17 + x = 1$ $17 + x = 1 \quad \vert -17$ $\Leftrightarrow x = -16$ $L = \{-16\}$	$3x - 8 = 136 - 6x$ $3x - 8 = 136 - 6x \quad \vert +6x$ $\Leftrightarrow 9x - 8 = 136 \quad \vert +8$ $\Leftrightarrow 9x = 144 \quad \vert : 9$ $\Leftrightarrow x = 16$ $L = \{16\}$
$4(3x + 1) = 5x + 18$ $4(3x + 1) = 5x + 18 \quad \vert$ Klammer auflösen $\Leftrightarrow 12x + 4 = 5x + 18 \quad \vert -5x$ $\Leftrightarrow 7x + 4 = 18 \quad \vert -4$ $\Leftrightarrow 7x = 14 \quad \vert : 7$ $\Leftrightarrow x = 2$ $L = \{2\}$	$(12 + 8x) + 7 = 1 - (7x - 3)$ $(12 + 8x) + 7 = 1 - (7x - 3)$ $\Leftrightarrow 12 + 8x + 7 = 1 - 7x + 3$ $\Leftrightarrow 19 + 8x = 4 - 7x \quad \vert +7x$ $\Leftrightarrow 19 + 15x = 4 \quad \vert -19$ $\Leftrightarrow 15x = -15 \quad \vert : 15$ $\Leftrightarrow x = -1$ $L = \{-1\}$
$2(x - 1) = \frac{3x + 5}{2}$ $2(x - 1) = \frac{3x + 5}{2} \quad \vert \cdot 2$ $\Leftrightarrow 4(x - 1) = 3x + 5$ $\Leftrightarrow 4x - 4 = 3x + 5 \quad \vert -3x$ $\Leftrightarrow x - 4 = 5 \quad \vert +4$ $\Leftrightarrow x = 9$ $L = \{9\}$	$(x + 3)^2 - 1 = (x + 2)^2 + 3x$ $(x + 3)^2 - 1 = (x + 2)^2 + 3x$ $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 1 = x^2 + 4x + 4 + 3x \quad \vert -x^2$ $\Leftrightarrow 6x + 8 = 7x + 4 \quad \vert -6x$ $\Leftrightarrow 8 = x + 4 \quad \vert -4$ $\Leftrightarrow 4 = x$ $L = \{4\}$

Produktgleichungen

Unter einer Produktgleichung versteht man eine Gleichung, bei der auf einer Seite ein Produkt und auf der anderen Seite Null steht.	Beispiele: $(x + 2)(x - 3) = 0$ $x(2x + 3)(8 - 7x) = 0$
Damit ein Produkt Null ergibt, muss einer der Faktoren Null sein.	Beispiel: $(x + 2)(x - 3) = 0$ $x + 2 = 0 \quad \vert -2$ oder $x - 3 = 0 \quad \vert +3$ $x = -2$ oder $x = 3$ **L = {-2; 3}**
Probe:	**Wir setzen für die Variable x die Zahl -2 ein.** $(-2 + 2)(-2 - 3) = 0$ $0 \cdot (-5) = 0$ **Wir setzen für die Variable x die Zahl 3 ein.** $(3 + 2)(3 - 3) = 0$ $5 \cdot 0 = 0$

Noch ein Beispiel:

$$x(2x - 2)^2 (x + 5) = 0 \quad ==>$$
$$x(2x - 2)(2x - 2)(x + 5) = 0$$

$x = 0$ oder $2x - 2 = 0 \quad \vert +2$ oder $x + 5 = 0 \quad \vert -5$

$2x = 2 \vert : 2$ $\qquad$ $x = -5$

$x = 1$

L = {0; 1; - 5}

Probe:

Für x = 0:	Für x = 1:	Für x = -5:
0(-2)(5)=0 0=0	1(2-2)(1+5)=0 1·0·6=0 0=0	-5(-10-2)(-5+5)=0 -5(-12)·0=0 0=0
➔ wahre Aussage, also eine Lösung!!!		

Verhältnisgleichungen

Eine Gleichung der Form a : b = c : d heißt Verhältnisgleichung.

Die Glieder einer Verhältnisgleichung werden wie folgt bezeichnet:

Innenglieder

a : b = c : d

Außenglieder

Jede Verhältnisgleichung kann in eine Produktgleichung umgewandelt werden: Das Produkt der Außenglieder ist gleich dem Produkt der Innenglieder.

Beispiel1 (einfach):

9 : x = 3 : 2	in eine Produktgleichung umwandeln
3x = 2 · 9	ausmultiplizieren
3x = 18	durch 3 dividieren
x = 6 L= {6}	Lösung angeben

Beispiel 2 (schwierig):

$\frac{5a}{3b} : 5x = \frac{2c}{b} : \frac{c}{a}$	in eine Produktgleichung umwandeln
$\frac{5a}{3b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{2c}{b} \cdot 5x$	ausmultiplizieren
$\frac{5ac}{3ab} = \frac{10cx}{b}$	kürzen
$\frac{5c}{3b} = \frac{10cx}{b}$	durch $\frac{10c}{b}$ dividieren
$x = \frac{5c}{3b} : \frac{10c}{b}$	die Division ausführen
$x = \frac{5c}{3b} \cdot \frac{b}{10c}$	kürzen
$x = \frac{1}{6}$ L= { $\frac{1}{6}$ }	Lösung angeben

Formeln umformen

Formeln kann man wie Gleichungen behandeln.
Die Variable, nach der die Gleichung aufzulösen ist, heißt Gleichungsvariable. Alle Variablen, die nicht Gleichungsvariablen sind, heißen Formvariablen und werden wie bestimmte Zahlen behandelt.

Beispiel 1: (Zinsrechnung)

$Z=\frac{K\cdot p\cdot t}{100}$	$p=?$	p Gleichungsvariable Z,K,t Formvariable
$Z=\frac{K\cdot p\cdot t}{100}$	$\mid\cdot 100$	mit dem g. N.:= 100 multiplizieren
$100\cdot Z=K\cdot p\cdot t$	$\mid:(K\cdot t)$	durch $(K\cdot t)$ dividieren
$\frac{100\cdot Z}{K\cdot t}=p$		Ergebnis

Beispiel 2: (Fläche des Trapezes)

$A=\frac{a+c}{2}\cdot h$	$a=?$	a Gleichungsvariable A,c,h Formvariable
$2A=(a+c)\cdot h$		mit dem g. N.:= 2 multiplizieren
$2A=a\cdot h+c\cdot h$		ausmultiplizieren
$2A-c\cdot h=a\cdot h$		isolieren
$\frac{2A-c\cdot h}{h}=a$		durch h dividieren

Beispiel 3 (Kinematik schwieriger):

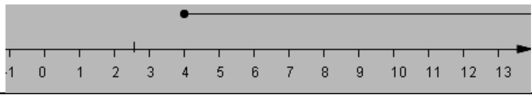
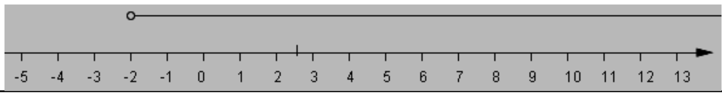
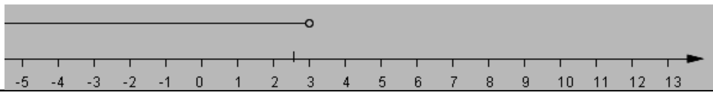
$s=\frac{v\cdot t_1}{2}+v(t-t_1)$	$v=?$	v Gleichungsvariable s,t_1,t Formvariable
$s=\frac{v\cdot t_1}{2}+vt-vt_1$	$\mid\cdot 2$	ausmultiplizieren
$2s=vt_1+2vt-2vt_1$		mit 2 multiplizieren
$2s=2vt-vt_1$		zusammenfassen
$2s=v(2t-t_1)$		herausheben
$\frac{2s}{2t-t_1}=v$		durch $(2t-t_1)$ dividieren

Ungleichungen

Definition:	**Beispiele:**
Unter einer Ungleichung versteht man eine Aussageform, bei der zwischen zwei Termen ein Ungleichheitszeichen (>; >; ≥;…) steht.	$3x + 2 < x - 3$ **$5x - 7 \geq -3$**

Die **Lösungsmenge** einer Ungleichung kann meist sehr viele (unendlich) Elemente enthalten, daher ist es naheliegend sie auf der Zahlengeraden darzustellen.

Beispiele:

Ungleichung	Darstellung auf der Zahlengeraden	Lösungsmenge
$x \geq 4$		L={x ∈ Q | x ≥ 4}
	Die Lösungsmenge L ist die Menge aller x aus Q für die gilt x ≥ 4	
$x > -2$		L={x ∈ Q | x > -2}
$x < 3$		L={x ∈ Q | x < 3}

Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

Zwei Ungleichungen sind äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen (siehe Gleichungen). Die Lösungsmenge ändert sich bei folgenden Umformungen nicht.

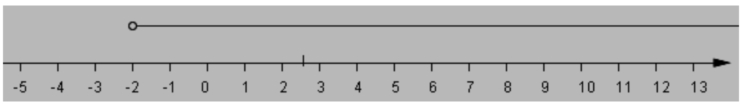
Äquivalenzumformung	Beispiel
Auf beiden Seiten einer Ungleichung wird derselbe Term addiert oder subtrahiert.	$3x + 1 < 7 - 2x$ |+2x-1 $3x + 1 + 2x - 1 < 7 - 2x + 2x - 1$ $5x < 6$
Beide Seiten einer Ungleichung werden mit derselben **positiven** Zahl (nicht Term) multipliziert.	$\frac{1}{2}x \geq 3$ |·2 $\frac{1}{2}x \cdot 2 \geq 3 \cdot 2$ = = > $x \geq 6$
Beide Seiten einer Ungleichung werden durch dieselbe **positive** Zahl dividiert.	$4x > 1$ |:4 $\frac{4x}{4} > \frac{1}{4}$ $x > \frac{1}{4}$

Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich bei folgenden Umformungen nicht, wenn das Ungleichheitszeichen umgedreht wird.

.

Die Seiten der Ungleichung werden vertauscht.	3 > x x < 3
Beide Seiten einer Ungleichung werden mit derselben **negativen** Zahl (nicht Term) multipliziert.	$-\frac{1}{2}x \le 3$ |·(-2) $-\frac{1}{2}x \cdot (-2) \ge 3 \cdot (-2)$ x ≥ -6
Beide Seiten einer Ungleichung werden durch dieselbe **negative** Zahl dividiert.	-4x > 1 |:(-4) $\frac{-4x}{-4} < \frac{1}{-4}$ x < $-\frac{1}{4}$

Beispiel: Gegeben ist: 4x + 26 > -17x – 4 (2 - x)

1. Schritt: **Auf beiden Seiten der Ungleichung ausmultiplizieren und zusammenfassen**	4x + 26 > -17x – 8 + 4x
2. Schritt: **Alle Terme ohne Variable auf eine Seite und alle Terme mit Variable auf die andere Seite bringen.**	4x + 26 > -13x - 8 |+13x - 26
3. Schritt: ***Die Variable* x isolieren.**	17x > -34 |:17
4. Schritt: **Lösungsmenge angeben.**	x > -2 L = {x ∈ Q |x > -2} 
Probe: **Da die Lösungsmenge sehr (unendlich) viele Elemente enthält, ist eine Überprüfung ein bisschen aufwendig. :-)** **Wir begnügen uns daher die Probe für ein Element der Lösungsmenge zu machen.**	**Wir setzen für die Variable x die Zahl -1 ein, da -1 größer als -2 ist.** **4(-1 + 3) + 16 > -17 · (-1) - 4(2 – (-1))** **4 · 2 + 16 > 17 - 4 · 3** **8 + 16 > 17 – 12** **24 > 5 wahre Aussage**

Bruchgleichungen

Definition: Eine Gleichung, die im Nenner eine Variable enthält, heißt **Bruchgleichung**.

Wiederholung (Bruchterme):

Definitionsmenge

Bereits bei den rationalen Zahlen haben wir gesehen, dass Null nicht im Nenner eines Bruches stehen darf, da die Division durch Null nicht ausführbar ist. $\frac{7}{0}$ ist nicht definiert.

Bei der Bestimmung der Lösungsmenge einer Bruchgleichung muss man daher darauf achten, dass beim Einsetzen der Lösungsmenge nur definierte Terme entstehen.

Vor dem Berechnen der Lösungsmenge wird daher die **Definitionsmenge** bestimmt (siehe dazu auch das Kapitel „Bruchterme“).

Die **Definitionsmenge D** einer Gleichung ist die Menge jener Elemente aus der Grundmenge, für die der Nenner nicht Null wird.

Beispiele:

$\frac{x}{x+5}$ Hier darf man für x alle rationalen Zahlen außer – 5 einsetzen, denn – 5 + 5 = 0 In der Sprache der Mathematik schreibt man: D = Q\ { - 5 }	$\frac{3+x}{x(x-5)}$ Hier darf man für x alle rationalen Zahlen außer 0 und 5 einsetzen, denn 0·(0–5)=0 und 5·(5–5)=0 In der Sprache der Mathematik schreibt man: D = Q\ { 0 ; 5 }

Lösen von Bruchgleichungen mit zwei gleichen Nennertermen

Brüche mit gleichem Nenner werden addiert, indem man die Zähler addiert und die Nenner anschreibt. Dadurch erhält man eine Bruchgleichung mit einem Bruchterm. Die Lösung von Gleichungen dieser Art wurde bereits behandelt.

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3x}{x-3}=5$$ | Bestimmung der Definitionsmenge

D = Q \ {3}

| Bestimmen des gemeinsamen Nenners

g.N.: (x - 3)

| Addition der Bruchterme

$$\frac{2+3x}{x-3}=\frac{5\cdot(x-3)}{x-3}$$ | mit dem gemeinsamen Nenner multiplizieren

$$2+3x=5(x-3)$$ | ausmultiplizieren

$$2+3x=5x-15$$ | 15 addieren

$$17+3x=5x$$ | 3x subtrahieren

$$17=2x$$ | durch 2 dividieren

$$x=\frac{17}{2}$$

Die Zahl $\frac{17}{2}$ ist in der Definitionsmenge enthalten. Die Lösungsmenge beträgt somit:

$$L=\left\{\frac{17}{2}\right\}$$

Lösen von Bruchgleichungen mit zwei verschiedenen Nennertermen, wobei einer das Vielfache des anderen ist

Brüche, bei denen ein Nenner das Vielfache des anderen Nenners ist, werden addiert, indem man das kgV der Nenner sucht. Die einzelnen Brüche der Gleichung, werden auf den Nenner erweitert. Dadurch erhält man eine Bruchgleichung mit einem Bruchterm. Die Lösung von Gleichungen dieser Art wurde bereits behandelt.

$\frac{4}{2x+8}-\frac{3x}{x+4}=-2$	| Zerlegung der Nennerterme
$2(x+4)$	| Bestimmen des gemeinsamen Nennerterms (kgV der Nennerterme) g. N.: $2(x+4)$
	| Bestimmung der Definitionsmenge D = Q \ {-4}
	| Erweiterung der Brüche
$\frac{4}{2(x+4)}-\frac{6x}{2(x+4)}=-2$	| Addition der Brüche
$\frac{4-6x}{2(x+4)}=\frac{-4(x+4)}{2(x+4)}$	| mit dem gemeinsamen Nenner multiplizieren
$4-6x=-4(x+4)$	| ausmultiplizieren
$4-6x=-4x-16$	| 16 addieren
$20-6x=-4x$	| 6x addieren
$20=2x$	| durch 2 dividieren
$x=10$	

Die Zahl 10 ist in der Definitionsmenge enthalten. Die Lösungsmenge lautet somit:

L = $\{10\}$

Lösen von Bruchgleichungen mit zwei verschiedenen Nennertermen, wobei einer nicht das Vielfache des anderen ist

Brüche mit verschiedenen Nennern werden addiert, indem man das kgV der Nenner sucht. Die einzelnen Brüche der Gleichung werden auf den gemeinsamen Nenner erweitert. Dadurch erhält man eine Bruchgleichung mit einem Bruchterm. Die Lösung von Gleichungen dieser Art wurde bereits behandelt.

$$\frac{2}{7+4x} = \frac{10}{\underbrace{6-9x}_{3(2-3x)}}$$

| Zerlegung der Nennerterme

| Bestimmen des gemeinsamen Nennerterms (kgV der Nennerterme)

g. N.: $3(7+4x)(2-3x)$

| Bestimmung der Definitionsmenge

D=Q $\left\{-\frac{7}{4}; \frac{2}{3}\right\}$

$$\frac{6(2-3x)}{\cancel{3(7+4x)(2-3x)}} = \frac{10(7+4x)}{\cancel{3(7+4x)(2-3x)}}$$

| Erweiterung der Brüche und mit dem gemeinsamen Nenner multiplizieren

$6(2-3x) = 10(7+4x)$ | ausmultiplizieren

$12-18x = 70+40x$ | 12 subtrahieren

$-18x = 58+40x$ | 40x subtrahieren

$-58x = 58$ | durch -58 dividieren

$x = -1$

Die Zahl 1 ist in der Definitionsmenge enthalten. Die Lösungsmenge beträgt somit:

L = $\{-1\}$

Menge, Relation, Abbildung

Definition der Menge:

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohl bestimmten und wohl unterschiedenen Objekten zu einem Ganzen (G. Cantor 1883).
Die Objekte einer Menge M heißen Elemente von M. Durch Mengenbildung wird aus mehreren Objekten ein neues Objekt gemacht, die Menge (ital. insieme, engl. set, franz. ensemble).

Schreibweise:

$M = \{a, b, c\}$	(lies: M besteht aus den Elementen a, b und c)
$a \in M$	(lies: „a ist Element der Menge M)
$m \notin M$	(lies: „m ist nicht Element der Menge M)
$\emptyset$, $\{\}$	Die leere Menge enthält kein Element.

Beispiele:

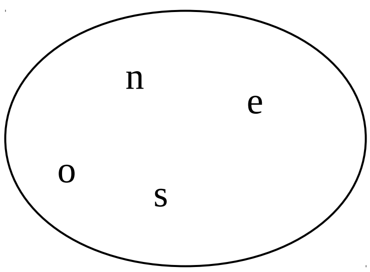
C = {3, 6, 11}	Menge mit endlich vielen Elementen
G = {2, 4 , 6, 8, …}	Menge mit unendlich vielen Elementen

Besondere Zahlenmengen

N = {1, 2, 3, …}	Menge der natürlichen Zahlen
N_0 = {0, 1, 2, 3, …}	Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
Z = {… ,-3,-2,-1,0,1,2, …}	Menge der ganzen Zahlen
$Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in Z, b \in Z \right\}$	Menge der Brüche (rationalen Zahlen)

Darstellungsformen von Mengen

Beispiel: Menge D={e, n, o, s}

 Mengendiagramm oder Venndiagramm	Zeichnerische Form
D = {e, n, o, s}	Aufzählende Form
D = { x | x ist ein Buchstabe des Wortes „Sonne“} (lies: „ D ist die Menge aller x, für die gilt: x ist ein Buchstabe des Wortes „Sonne“)	Beschreibende Form

Definition der Produktmenge

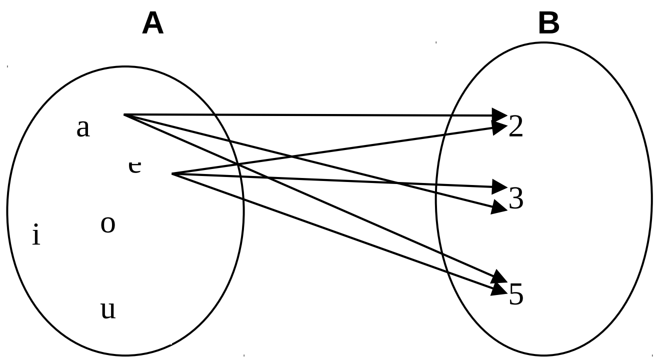
Unter der Produktmenge von A und B versteht man die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Schreibweise: $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A$ und $b \in B \}$
(lies: „A Kreuz B ist die Menge aller Paare (a, b) für die gilt: a Element von A und b Element von B“)

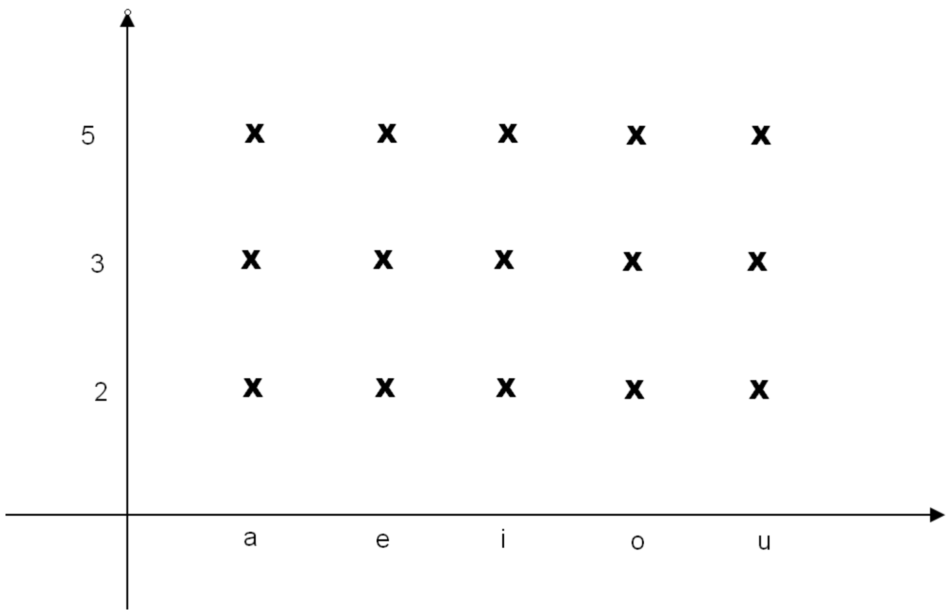
Beispiel:

A = { a, e, i, o, u} B = { 2, 3, 5}	A × B = {(a, 2), (e ,2), (i, 2), (o, 2), (u, 2), (a, 3), (e ,3), (i, 3), (o, 3), (u, 3) (a, 5), (e ,5), (i, 5), (o, 5), (u, 5)}

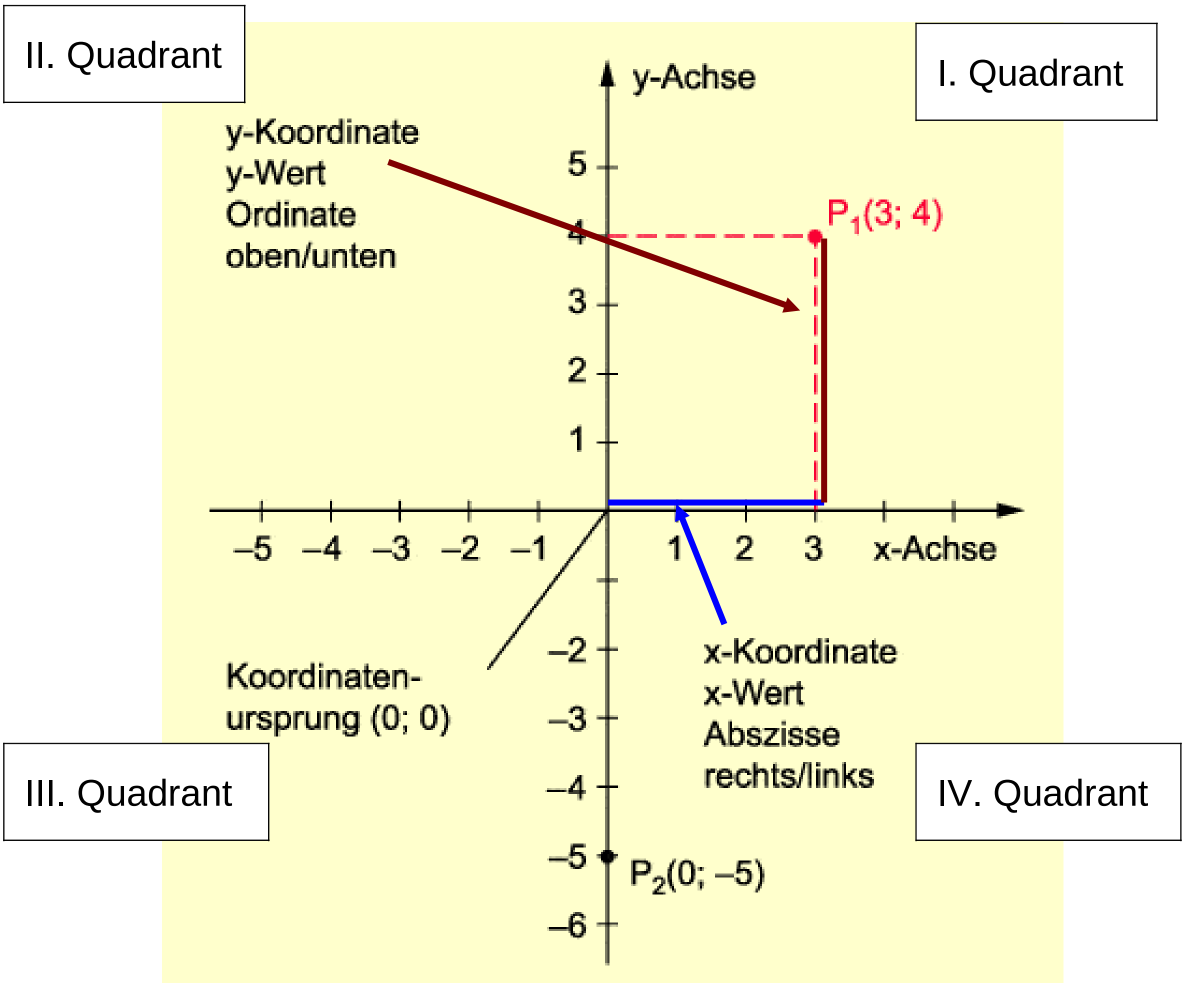
Mengendiagramm



Darstellung im Achsenkreuz:



Das kartesische Koordinatensystem ("Q x Q")



Koordinaten sind ***Längen!!***
Durch jedes der oben beschriebenen Koordinatensysteme wird die Ebene in vier **Quadranten** geteilt (Bild 2). Es gilt für die Punkte:

Quadrant	***I***	***II***	***III***	***IV***
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-
Beispiel	**P_1(2/3)**	**P_2(-2/2)**	**P_3(-13/-2)**	**P_4(1/-2)**

<u>Beispiele</u>

P(2/-4) P liegt im IV. Quadrant. Die x- Koordinate ist 2 Einheiten lang, die y- Koordinate ist 4 Einheiten lang.

Q(-3/-4) Q liegt im III. Quadrant. Die x- Koordinate ist 3 Einheiten lang, die y- Koordinate ist 4 Einheiten lang.

Relationen

Unter Relation versteht man im Allgemeinen eine ***Beziehung*** zwischen Menschen und Menschen, Menschen und Tieren, Menschen und Dingen, Dingen und Dingen.

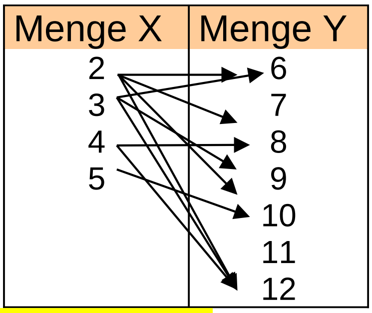
Definition

In der Mathematik versteht man unter ***Relation*** eine allgemeine Zuordnung zwischen Mengen.

Beispiel:

R…“ist Teiler von“

Pfeildiagramm:

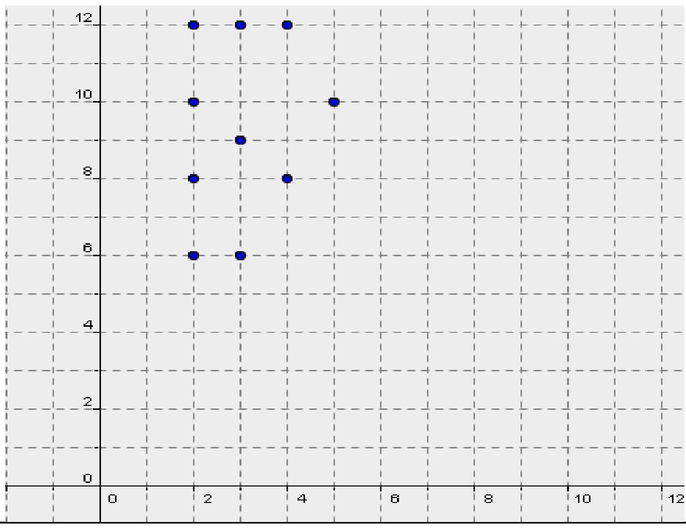


Das Pfeildiagramm und die aufzählende Form sind recht unübersichtlich.

aufzählende Form:

R={(2,6), (2,8), (2,10), (2,12), (3,6), (3,9), (3,12), (4,8), (4,12), (5,10)}

Darstellung im Achsenkreuz:

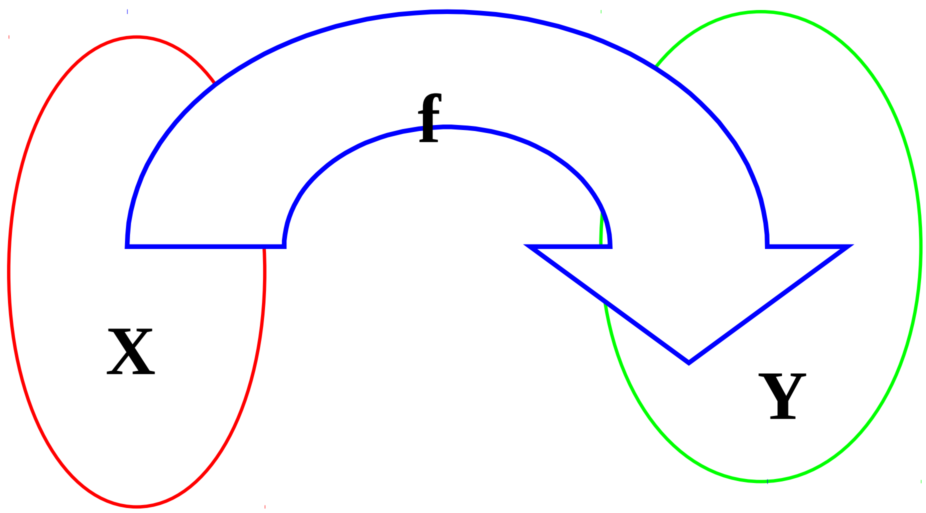


Für die Darstellung der Relation R eignet sich besser die Darstellung im Achsenkreuz

Definition (genauer):

Sind X und Y zwei Mengen, so ist eine "Relation von *X* nach *Y*" (oder: "von der Menge *X* in die Menge *Y*") eine Vorschrift, die jedem Element x von *X* ein oder mehrere Elemente y von *Y* zuordnet.

<u>Mengendarstellung für Funktionen</u>:



<u>Bezeichnungen:</u>

Menge X	**... Definitionsbereich D**
Element x	**... unabhängige Variable**
Menge Y	**... Wertebereich W**
Element y	**... abhängige Variable**
f	**… Zuordnungsvorschrift oder Funktionsgleichung**

Zusammenfassend lässt sich sagen:

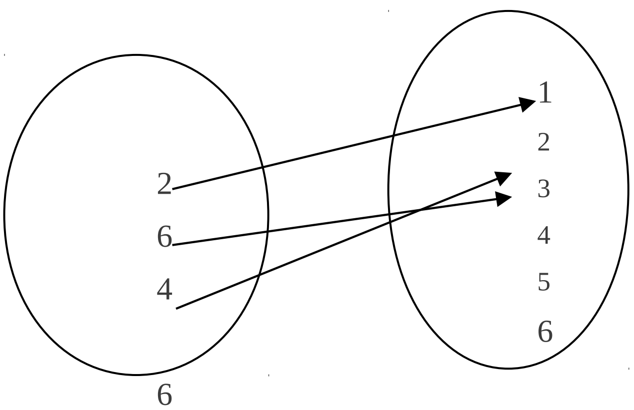
Eine Relation ist also eine Menge geordneter (Zahlen)-Paare. Man nennt sie auch Lösungsmenge oder Lösung der Relation. Relationen können graphisch dargestellt werden (Mengendarstellung, Darstellung im Achsenkreuz, …).

Die Funktion

Im Unterschied zur Relation wird hier jedem Element x aus der Menge X **genau ein** Element y aus der Menge Y zugeordnet. Man spricht von einer **eindeutigen** Zuordnung bzw. Zuordnungsvorschrift.

Beispiel: Gegeben seien die Mengen A={2,4,6} und B={1,2,3,4,5,6,}
Zuordnungsvorschrift f: ***„y ist die Hälfte von x".***

Wir stellen diese Funktion mit Hilfe eines Pfeildiagrammes dar.



L={(2,1),(4,2),(6,2)}

Eine **Funktion** ist damit eine **spezielle Relation**. Eine Funktion ist damit immer eine Relation. Nicht jede Relation ist jedoch notwendigerweise eine Funktion.

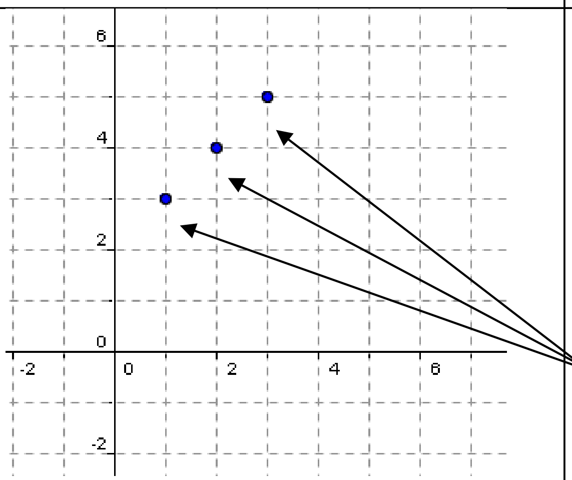
Schreibweisen

f: „y ist das Doppelte von x" oder **f**: **y = 2x** **g: y = 3x + 4** **h: y = 4**	Funktionen können auch als Gleichungen, so genannte ***„Funktionsgleichungen"***, dargestellt werden.
f, g, h	ist der Name der Funktion

Einteilung der Funktionen:

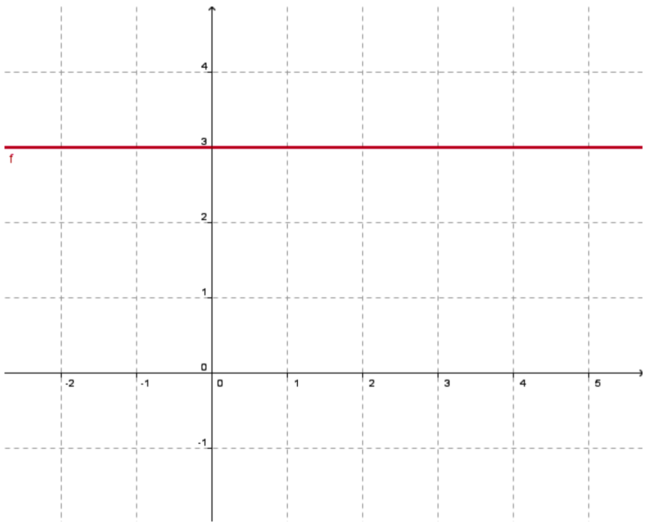
1. konstante Funktion	(z. B. y = 2)	**1. Klasse**
2. proportionale Funktion	(z. B. y = 2x)	
3. lineare Funktion	(z. B. y = 3x+1)	
4. quadratische Funktion		**2. Klasse**
5. Wurzelfunktion		
6. Potenzfunktion		**3. Klasse**
7. Exponentialfunktion		
8. Logarithmusfunktion		

Die Darstellung von Funktionen (Schaublider/Graph erstellen)

<table>
<tr><td colspan="2">Beispiel 1: Gegeben ist die Menge A={1,2,3} und die Menge B={2,3,4,5,6}, sowie die Zuordnungsvorschrift f: y = x + 2 .</td></tr>
<tr><td>0.1 Darstellungsart</td><td>Beschreibung</td></tr>
<tr><td>0.2 L={(1,3),(2,4),(3,5)}</td><td>Darstellung einer Funktion durch eine Menge geordneter Paare.
(Alle Lösungspaare werden in eine Lösungsmenge geschrieben.)</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td></tr></table></td><td>Darstellung einer Funktion durch eine Wertetafel</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Graphische Darstellung einer Funktion im Koordinatensystem

Graph der Funktion</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beispiel 2: konstante Funktion</td></tr>
</table>

Graph:



Gegeben sei die Zuordnungs-vorschrift:

f: $y = 3$

die Menge X = Q
die Menge Y = Q

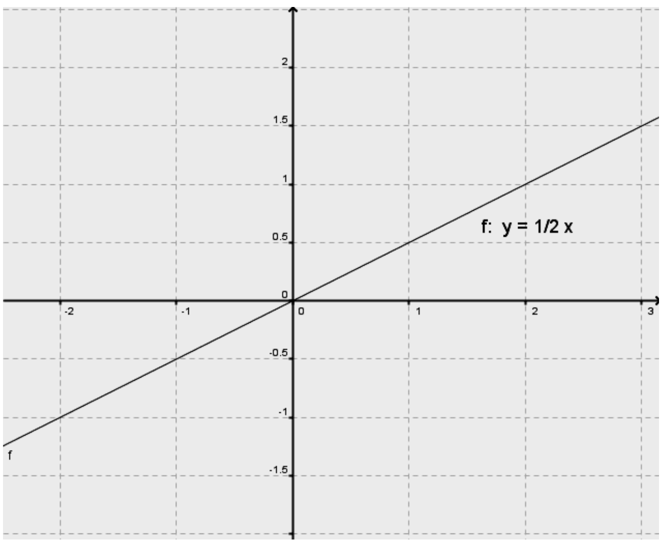
Wertetabelle:

x	-2	0	1	2
y	3	3	3	3

Der y-Wert ist immer konstant , nämlich 3!!!!

Beispiel 3: proportionale Funktion

Graph:



Gegeben sei die Zuordnungs-vorschrift:

f: $y = \frac{1}{2}x$

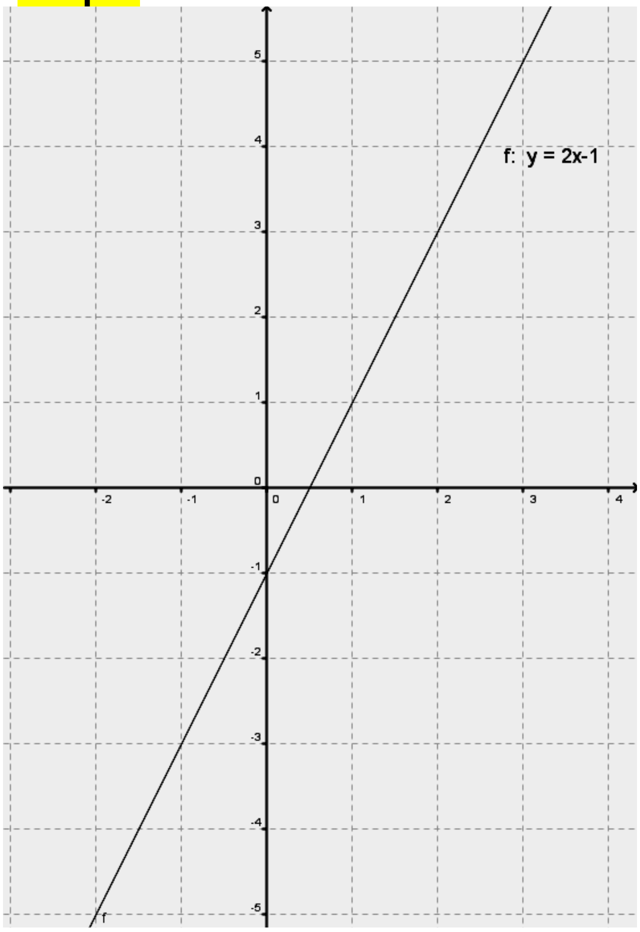
die Menge X = Q
die Menge Y = Q

Wertetabelle:

x	-2	0	2	4
y	-1	0	1	2

Beispiel 4: lineare Funktion

Graph:



Gegeben sei die Zuordnungs-vorschrift:

f: $y = 2x - 1$

die Menge X = Q
die Menge Y = Q

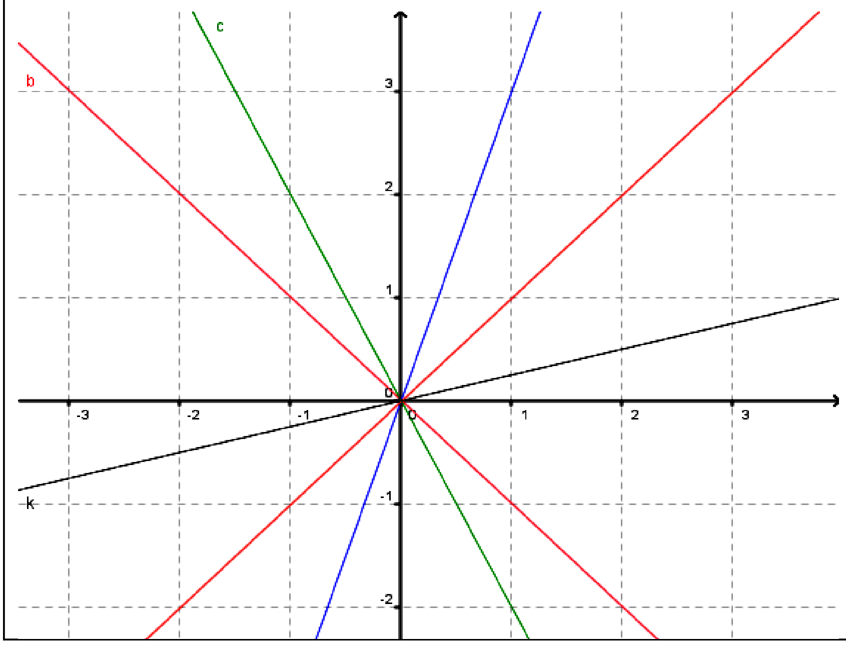
Wertetabelle:

x	-2	0	2	3
y	-5	-1	3	´5

Die proportionale Funktion (nun genauer!!)

Beispiel 1:

Graph oder Schaubild:



Funktions-glei-chungen

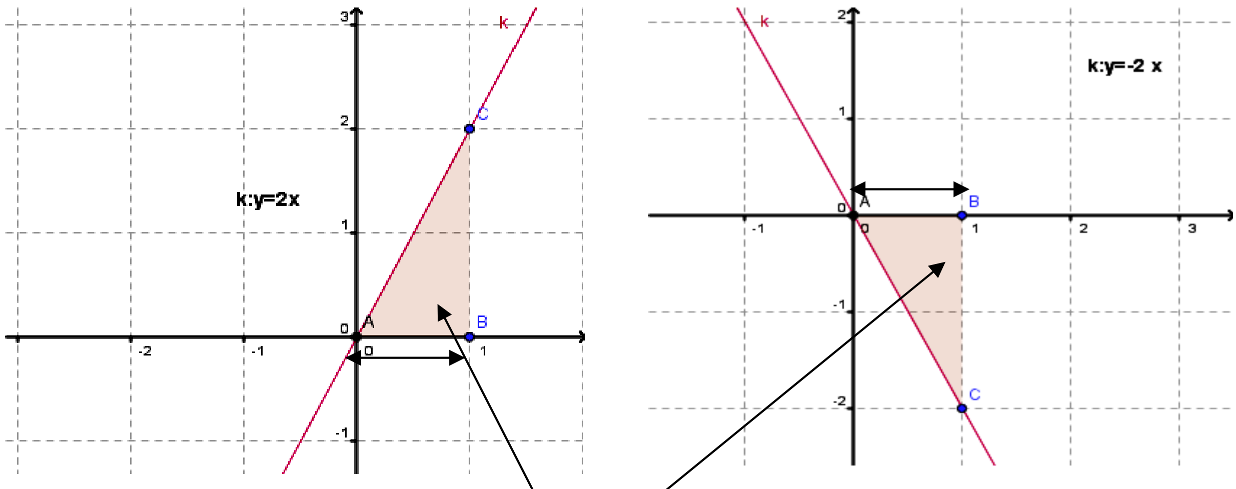
a: y = x (rot)
b: y = -x (rot)
c: y = -2x (grün)
h: y = 3x (blau)
k: y = 1/4x (grau)

Wertetabelle:

(selber erstellen)

Merkmale einer proportionalen Funktion y = m x:

- Das **Schaubild** einer proportionalen Funktion ist eine **Gerade** im Koordinatensystem, die durch den **Ursprung** verläuft.
- Der y-Wert ist immer ein **bestimmtes Vielfaches** vom zugehörigen x-Wert, der Quotient $\frac{y}{x}$ **=m ist konstant**. Die Konstante **m** nennt man auch **Proportionalitätsfaktor.**
- **m** zeigt uns die **Steigung** der proportionalen Funktion an und wird daher auch so genannt. (**siehe dazu folgende Zeichnung**).

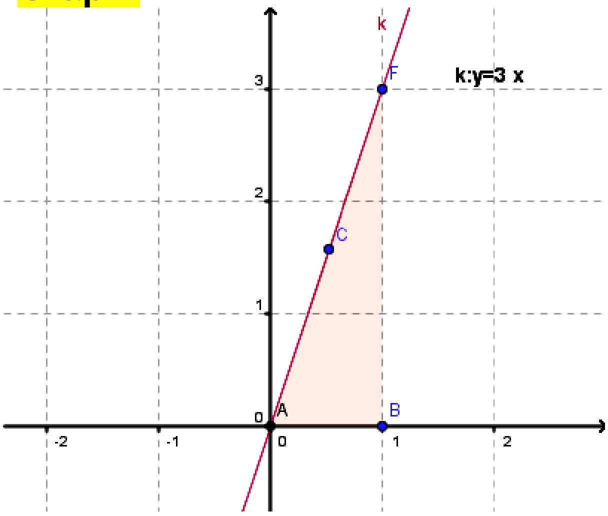


Steigungsdreieck

Damit kann man schneller den Graphen von proportionalen Funktionen zeichne (ohen Wertetabelle) = = > folgendes Beispiel

Beispiel 1

Graph:



Gegeben sei die Zuordnungs-vorschrift:

f: $y = 3x$

1) m ablesen ==> m=3

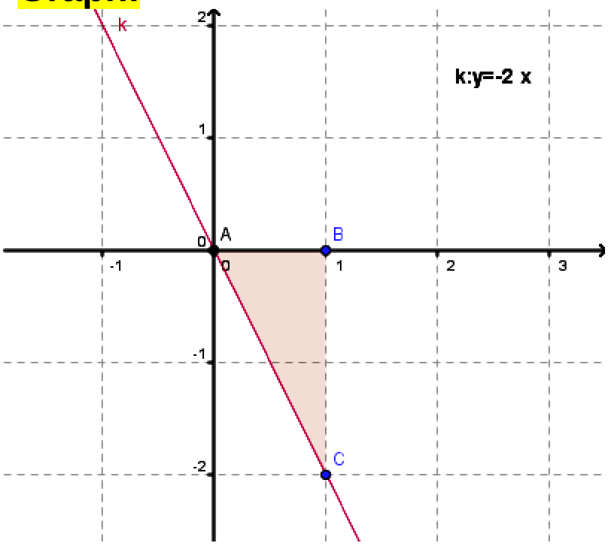
2) P(0/0) einzeichnen

3) Steigungsdreieck einzeichnen

4) Graph einzeichnen

Beispiel 2

Graph:



Gegeben sei die Zuordnungs-vorschrift:

f: $y = -2x$

1) m ablesen ==> m=-2

2) P(0/0) einzeichnen

3) Steigungsdreieck einzeichnen

4) Graph einzeichnen

Punktprobe

Ein Punkt P(x|y) liegt auf einer Geraden immer dann, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen.
Es gibt **zwei** Möglichkeiten festzustellen, ob der Punkt die Geradengleichung erfüllt:

1. Man zeichnet den Punkt in ein Koordinatensystem ein (ungenau).
2. Man setzt den Punkt in die Funktionsgleichung ein.

Beispiel: $g: y = \frac{1}{4}x$ a) P(4/1) ∈ g??? b) Q(2/2) ∈ g???

ad a) P(4/1) einsetzen

$1 = \frac{1}{4} 4$

1 = 1 w. Aussage ➔ P ∈ g

ad b) Q(2/2) einsetzen

$2 = \frac{1}{4} 2$ ➔ $2 = \frac{1}{2}$ f. Aussage ➔ Q ∉ g

Von der proportionalen Zuordnung zur linearen Funktion

Unten sieht man das Schaubild der proportionalen Funktion

$$g: y = \frac{1}{2}x$$

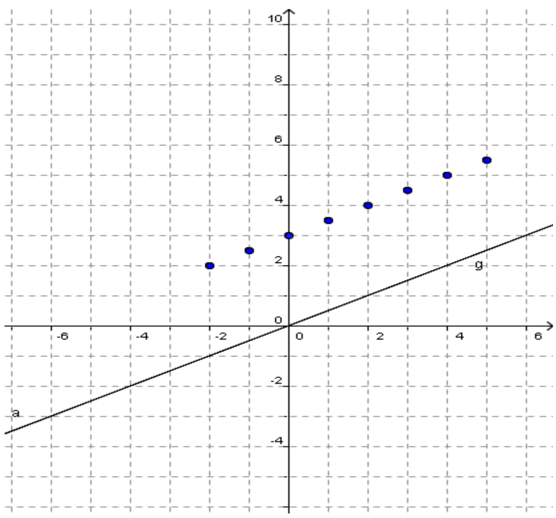
also mit Steigung m= $\frac{1}{2}$.

Wie verläuft die Funktion h: $y = \frac{1}{2}x + 3$ **?**

Dazu erstellen wir zunächst eine Wertetabelle:

x	-2	-1	0	+1	+2	+3
y	2	2,5	3	3,5	4	4,5

Die Wertepaare sind als Punkte im kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Der Graph verläuft nicht mehr durch den Ursprung.



Allgemein gilt:

y = m · x + b

m = Steigungsfaktor
b = Verschiebungskonstante

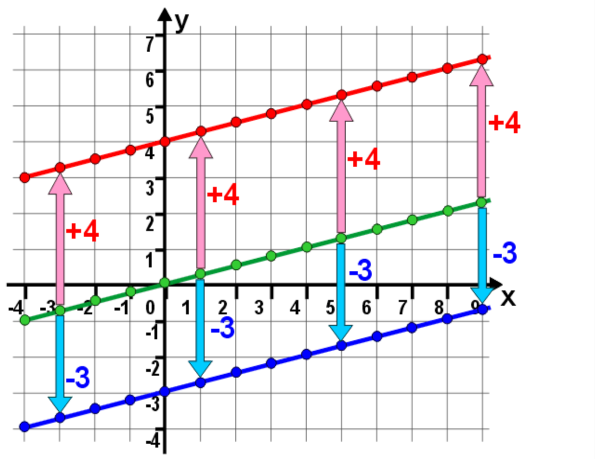
Die Verschiebungskonstante b gibt an, um wieviel alle Punkte eines Graphen in y-Richtung verschoben werden.

b positiv Verschiebung "nach oben"	b negativ Verschiebung "nach unten"

Beispiele:

+4 alle Punkte des Graphen werden um 4LE nach oben verschoben.

-3 alle Punkte des Graphen werden um 3LE nach unten verschoben.



***Zusammenfassung*:**

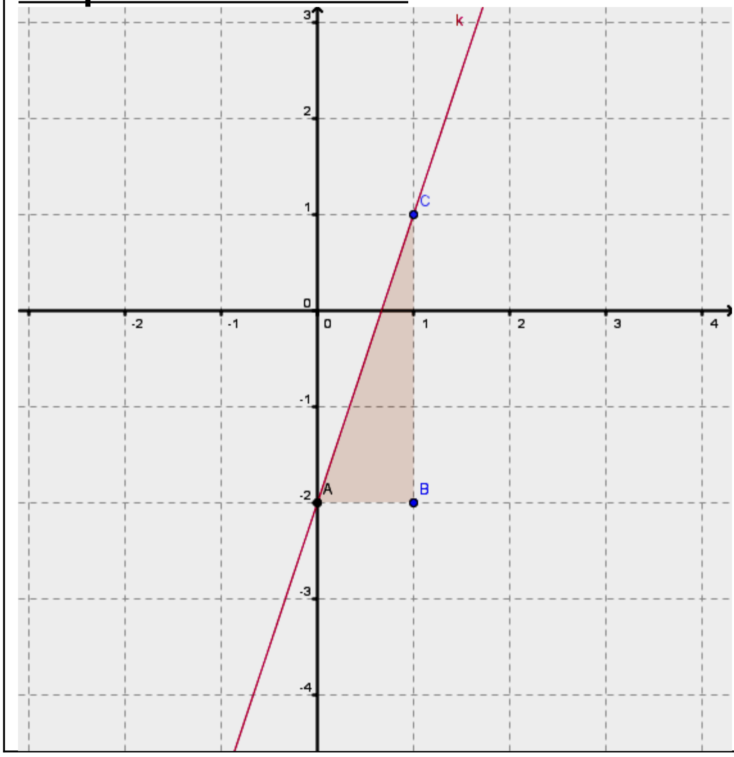
Eine Funktion von der Form **y= mx + b** nennt man **lineare** Funktion. Die Variablen x und y treten hier stets wie bei der proportionalen Funktion in der ersten Potenz auf, daher der Name „**linear**". Der Graph ist eine Gerade. Ist b gleich Null, so handelt es sich um eine proportionale Funktion.

Der Parameter **b** gibt an, in welcher Höhe (=Abschnitt) die Gerade die y- Achse schneidet (= ***y - Achsenabschnitt***), **m** hingegen gibt die ***Steigung*** an.

Mithilfe des Steigungsdreiecks **kann man eine Gerade** zeichnen, **ohne eine Wertetabelle anlegen zu müssen.**

Beispiel 1:

Graph oder Schaubild:



Funktionsgleichung

k: y = 3 x + 2

a) Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1
y	-4	-1	2	5

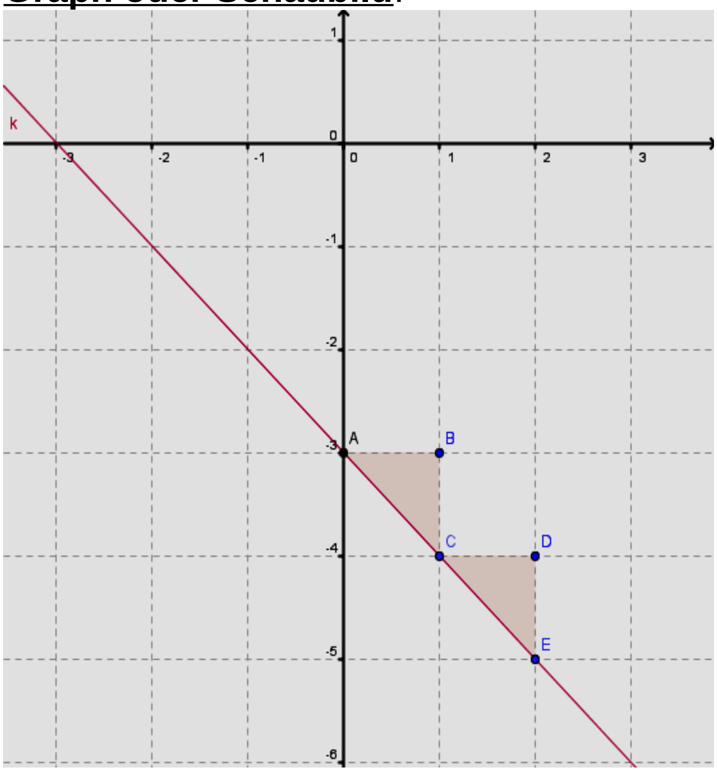
b) ohne Wertetabelle:

m = 3
b = 2

1) Zuerst b =+2 einzeichnen.
2) nun das Steigungsdreieck bei b beginnend einzeichnen.

Beispiel 2:

Graph oder Schaubild:



Funktionsgleichung

j: y = -x - 3

a) Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1
y	0	-1	-2	-3	-4

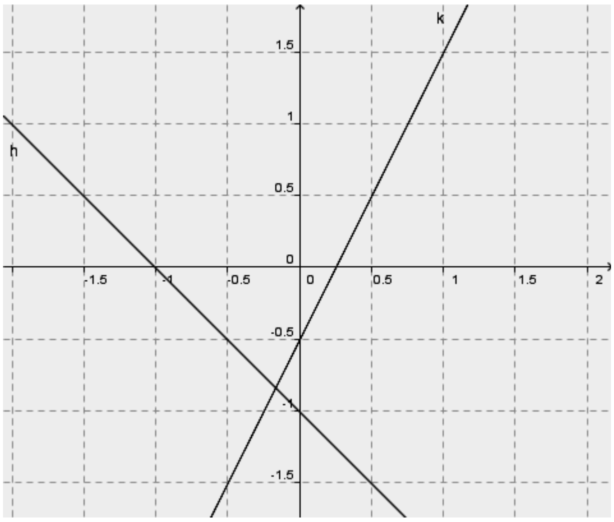
b) ohne Wertetabelle:

m= -1
b= - 3

1) Zuerst b=-3 einzeichnen.
2) nun das Steigungsdreieck bei b beginnend einzeichnen.
3) eventuell mehrere Steigungsdreiecke anhängen, um die Genauigkeit zu erhöhen.

Funktionsgleichung aus dem Graphen ermitteln

Geradengleichungen haben die Form **y = m x +b**. Kennt man also die Steigung m und den y-Achsenabschnitt **b** einer Geraden im Koordinatensystem, ist es nicht schwer, die entsprechende Funktionsgleichung für die Gerade zu finden.
Umgekehrt ist es dann auch nicht schwer die Funktionsgleichungen aus eine Schaubild herauszulesen:

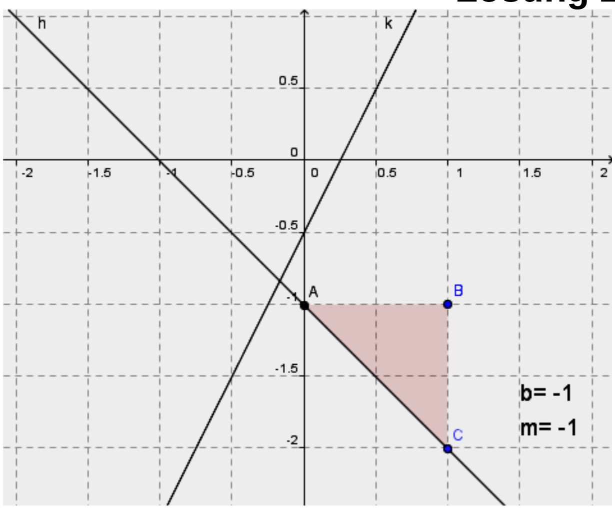


Lösung allgemein:

1) Man ermittelt zuerst den y-Achsenabschnitt **b**

2) Man ermittelt dann die Steigung **m** mit Hilfe des Steigungsdreiecks der Geraden.

Lösung zu h:

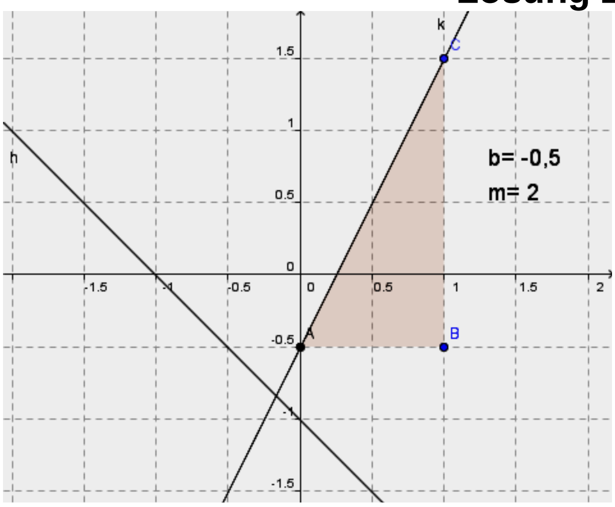


Die Gerade h schneidet die y-Achse bei y = -1, also gilt
b = -1.

Die Gerade fällt – sie verläuft nämlich von links oben nach rechts unten – und hat die Steigung m = -1. (Steigungsdreieck!!!)

Die gesuchte Gleichung lautet also: $h: y = -x - 1$

Lösung zu k:

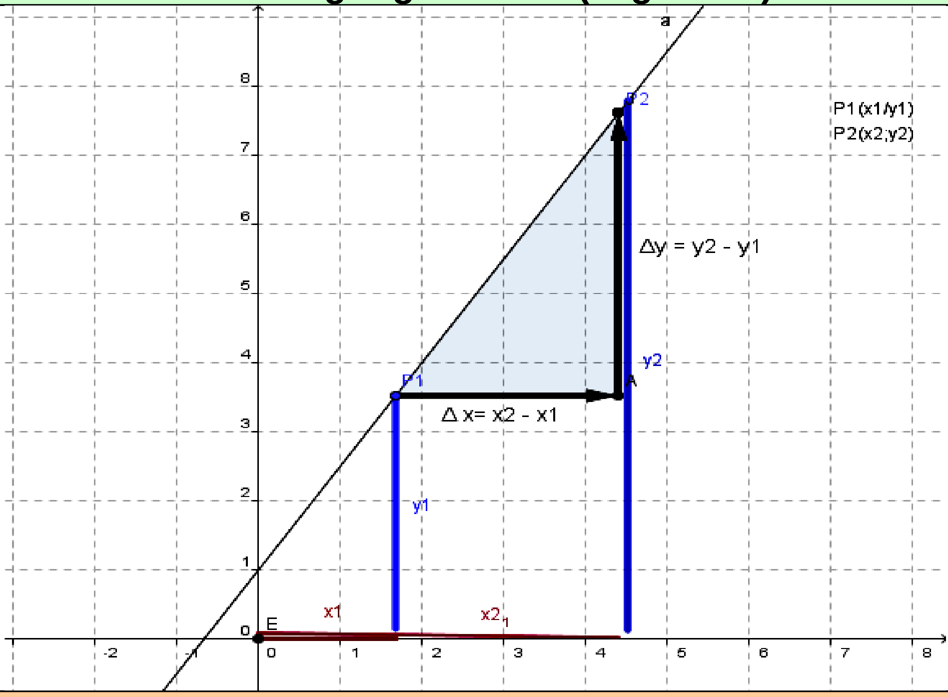


Die Gerade h schneidet die y-Achse bei y = -1, also gilt
b = -1/2

Die Gerade fällt – sie verläuft nämlich von links oben nach rechts unten – und hat die Steigung m = 2 (Steigungsdreieck!!!)

Die gesuchte Gleichung lautet also: $g: y = 2x - \frac{1}{2}$

Das Steigungsdreieck (allgemein)



Berechnung der Steigung mit Hilfe des Steigungsdreiecks und den Koordinaten von 2 Punkten P_1 und P_2:

Definition:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Δ... *Differenz*

Beispiel 1: Bestimme die Steigung durch die A(2;4) und B(-2;-4)

Lösung: Setze A und B in die Formel für m ein:

$$\left.\begin{matrix} A(2/4) \\ B(-2/-4) \end{matrix}\right\} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-4)-(4)}{(-2)-(2)} = \frac{-8}{-4} = 2$$

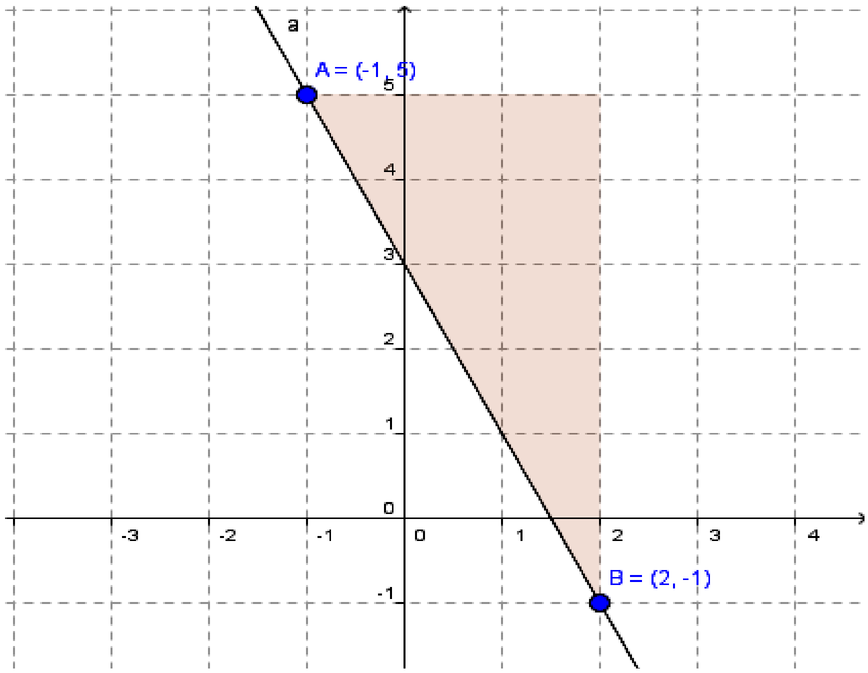
Beispiel 2: Eine proportionale Funktion soll durch A(2/6) gehen. Bestimme m und die Funktionsgleichung.

Lösung: Setze A in die Funktionsgleichung **y = m x** ein und berechne m:

$$\left.\begin{array}{l} A(2/6) \\ h: y = m \cdot x \end{array}\right\} \quad 6 = m \cdot 2 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow h: y = 3x$$

Beispiel 3: Bestimmung der Funktionsgleichung einer Geraden durch zwei Punkte

Wie lautet die Gleichung der Gerade durch die Punkte A(0 | 3) und B(2 | -1)?



Methode 1

Steigung bestimmen mit Hilfe des Steigungsdreiecks :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad m=\frac{(-1)-(5)}{(2)-(-1)}=\frac{-6}{3}; \qquad m=-2$$

y-Achsenabschnitt lässt mit Hilfe eines Punktes und der Steigung m berechnen:

$$y = m \cdot x + b$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$5=-2\cdot(-1)+b \implies b=3$$

Die Geradengleichung lautet also: y = -2x+3

Methode 2 (später)

Ansatz: $y = mx + b$

Koordinaten von A (siehe I) und B (siehe II) einsetzen ➔ Gleichungssystem:

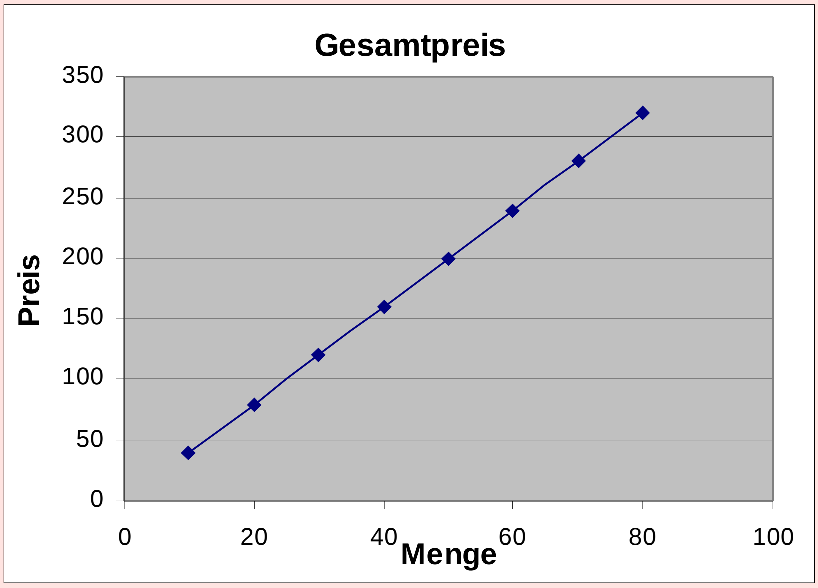
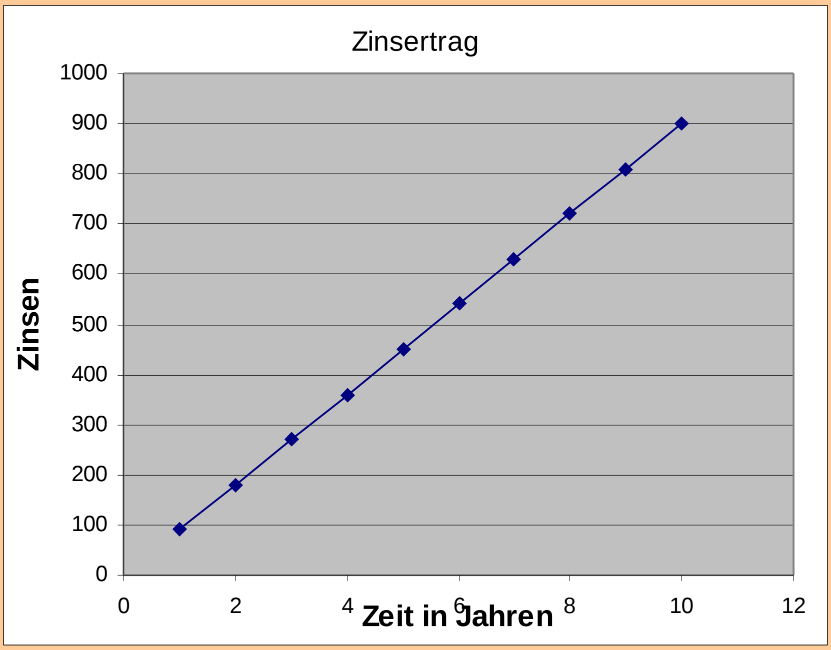
$$\begin{cases} (I)\ 3 = 0\cdot m + b \\ (II)\ -1 = 2m + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (I)\ 3 = b \\ (II)\ -1 = 2m + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{\text{Die Geradengleichung lautet also: } y = -2x + 3}$

Anwendungen von linearen Funktionen

Bei der mathematischen Betrachtung natürlicher, technischer oder auch alltäglicher Vorgänge hat man es oft mit Relationen (Beziehungen) zweier Größen zu tun. Der Wert einer Größe hängt linear vom Wert einer anderen Größe ab (= wie der y –Wert einer Funktion vom x Wert).

Einfache Zusammenhänge dieser Art sind unten tabellarisch zusammengestellt und graphisch in einem Koordinatensystem dargestellt.

Beispiele	Graph
Der **Gesamtpreis P** einer Ware hängt manchmal linear von der verkauften **Menge x** ab: $P = 4 \cdot x$ $y = m \cdot x$ m … Einzelpreis	
Der **Zinsertrag Z** eines Kapitals K hängt bei festem Zinssatz p von der **Laufzeit t** ab. $Z = K \cdot p/100 \cdot t$ $y = m \cdot x$	

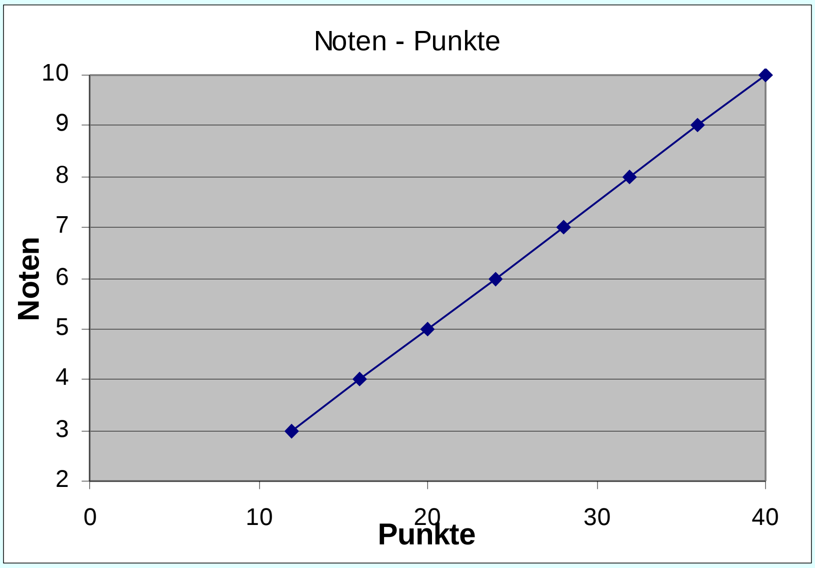
-

Die **Note** **N** einer Mathematikarbeit hängt von der erreichten **Punktzahl P** ab.

N = 0,25 . P

↓ ↓

y = m . x



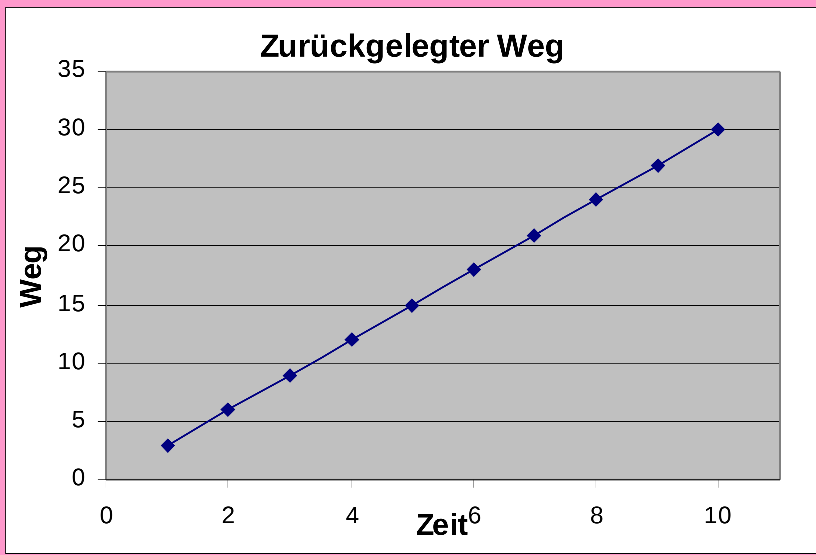
Der **Weg** **s** eines Fahrzeugs hängt von der **Zeit** **t** ab.

s = 10 . t

↓ ↓ ↓

y = m . x

m … Geschwindigkeit

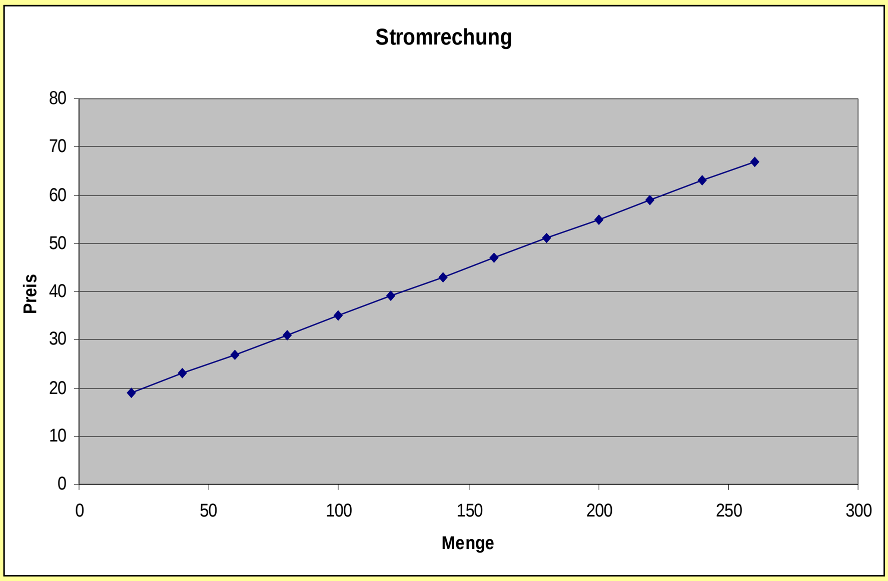


Der Strompreis **SP** hängt vom Grundpreis **b** und der Menge **x** ab.

SP = 0,2 · x+ 15

↓ ↓ ↓

Y = m · x + b



Lineare Gleichungssysteme

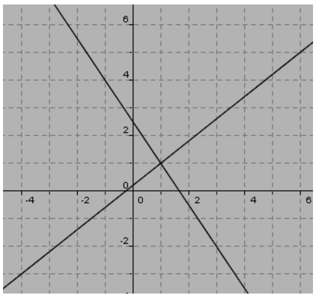
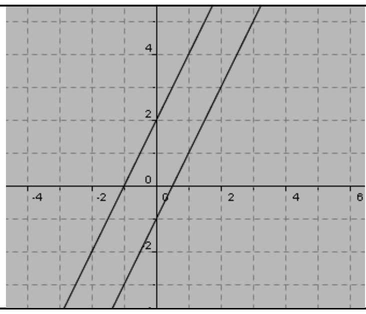
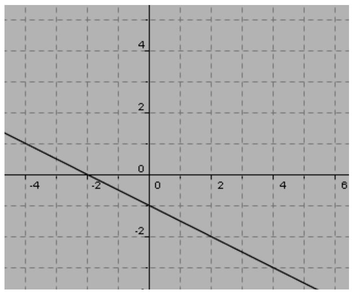
Übersicht: **Lineare Gleichungssysteme** haben eine lange Geschichte. Schon vor 4000 Jahren haben sich Menschen mit Problemen beschäftigt, die wir heute mit Hilfe von solchen Gleichungssystemen lösen. In der Mathematik unterscheiden wir ***lineare*** und ***nichtlineare*** Gleichungssysteme. In diesem Skriptum geht es um Systeme, die nur aus linearen Gleichungen bestehen. Lineare Gleichungssysteme sind enorm wichtig und können mathematisch vergleichsweise einfach behandelt werden.

Definition: Ein Gleichungssystem kann folgende Form haben:

$\begin{cases} 2x+y=1 \\ -x+y=3 \end{cases}$ $\begin{array}{ll} (1) & 2x+y=1 \\ (2) & -x+y=3 \end{array}$ $\begin{array}{ll} I & 2x+y=1 \\ II & -x+y=3 \end{array}$	***Normalform*** *(d.h. ohne Brüche)*

Die einzelnen Gleichungen können als lineare Funktionen gedeutet werden. Es geht darum, die Unbekannten (Zahlenpaar) so zu bestimmen, dass mit dieser Wahl alle beiden Gleichungen ***zugleich*** erfüllt werden.

LÖSUNGSMÖGLICHKEITEN

Fall 1: Geraden schneiden sich	**Fall 2:** Geraden sind parallel	**Fall 3:** Geraden liegen übereinander
		
$L=\{(1,1)\}$	$L=\{\ \}$	$L=\left\{(x,y)/\,y=-\frac{1}{2}x-1\right\}$
Haben zwei lineare Funktionen verschiedene Steigungen, so gibt es beim dazugehörigen Gleichungssystem immer eine Lösung.	Haben zwei lineare Funktionen dieselbe Steigung und verschiedene y-Achsenabschnitte, so gibt es beim dazugehörigen Gleichungssystem keine Lösung:	Haben zwei lineare Funktionen dieselbe Steigung und denselben y-Achsenabschnitt, so gibt es beim dazugehörigen Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Lösungsverfahren

Man unterscheidet: **a)Graphisches Lösungsverfahren**
b) Rechnerische Lösungsverfahren

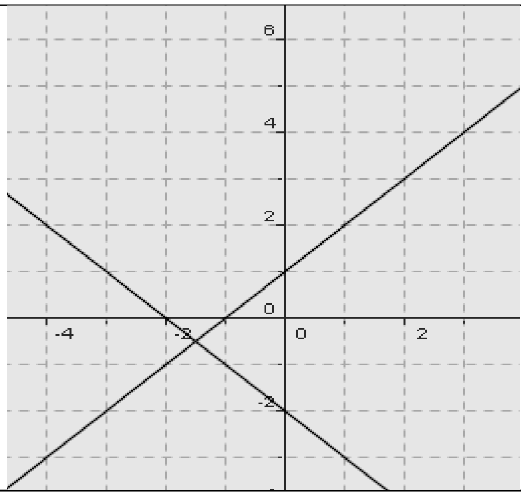
Graphisches Lösungsverfahren

Jedes lineare Gleichungssystem kann in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist die Lösung, also jenes Punktepaar, das beide Gleichungen erfüllt.

Beispiel 1:

(1) –x + y = 1 (2) –x – y = 2	Beide Gleichungen werden nach y aufgelöst
(1)' y = x +1 (2)' y =–x – 2	und in das Koordinatensystem eingezeichnet

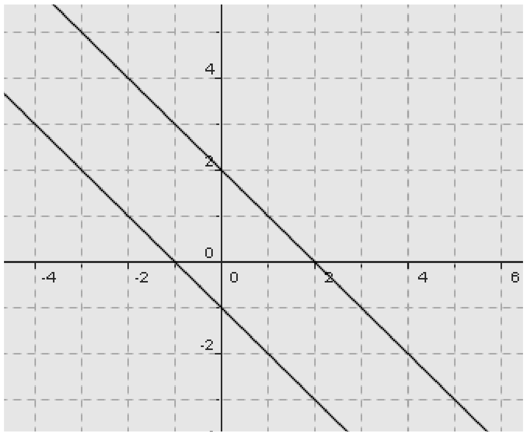
Die Lösung wird abgelesen: Man sieht, dass sich beide Graphen schneiden. Der Schnittpunkt ist die Lösung. $L=\left\{(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})\right\}$



Beispiel 2:

(1) 2x + 2y = 4 (2) x + y = -1	Beide Gleichungen werden nach y aufgelöst
(1)' y = -x + 2 (2)' y = -x – 1	und in das Koordinatensystem eingezeichnet

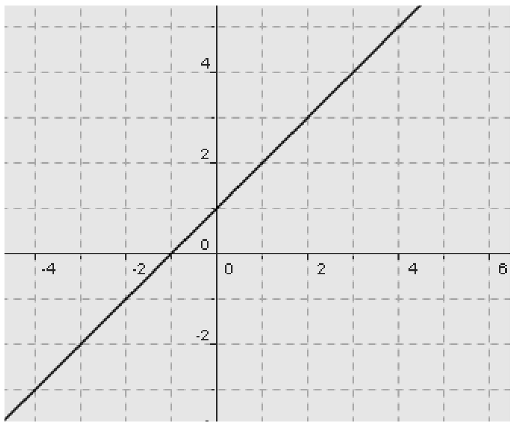
Die Lösung wird abgelesen: Man sieht, dass sich beide Graphen nicht schneiden. Somit hat das Gleichungssystem keine Lösung: $L=\{\ \}$



Beispiel 3:

(1) x – y=-1 (2) 2x–2y=-2	Beide Gleichungen werden nach y aufgelöst.
(1)' y=x+1 (2)' 2y=2x+2 |:2 y=x+1	 Die zweite Gleichung ist ein Vielfaches der ersten.

Die Geraden fallen zusammen, die Lösungsmenge besteht aus allen Punkten auf den Geraden: L={(x|y) | y=x+1}



Rechnerische Lösungsverfahren

Ziel ist es, aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen durch Äquivalenzumformung eine Gleichung mit einer Variablen zu machen.

ELIMINATIONSVERFAHREN (ADDITIONSVERFAHREN)

Ausgangssituation:	
(1) $3x = -2y + 5 \quad \vert +2y$ (2) $4x = -1 + 5y \quad \vert -5y$	Zuerst muss man das Gleichungssystem auf Normalform bringen.
(1) $3x + 2y = 5 \quad \vert \cdot 5$ (2) $4x - 5y = -1 \quad \vert \cdot 2$	Dann werden beide Gleichungen günstig multipliziert, so dass zwei gleich große Terme (x- oder y-Terme) entstehen, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen.
(1)' $15x + 10y = 25$ (2)' $8x - 10y = -2$ (1)'+(2)' $23x = 23 \quad \vert :23$ $x = 1$	Nun werden beide Gleichungen zusammengezählt.
(1) $3 \cdot 1 + 2y = 5 \quad \vert -3$ $2y = 2 \quad \vert :2$ $y = 1$	x wird in eine der beiden Gleichungen eingesetzt und nach y aufgelöst.
Lösung: $L = \{(1\vert 1)\}$	
Probe: (1) $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$ $5 = 5$ ✓ wahre Aussage (2) $4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -1$ $-1 = -1$ ✓ wahre Aussage	Zur Sicherheit sollte man noch die Probe machen. Dazu setzt man die Koordinaten der Lösungsmenge in beide Gleichungen ein und vereinfacht sie. Wenn eine wahre Aussage entsteht, so wurde richtig gerechnet, ansonsten ist das Ergebnis falsch.

-

EINSETZUNGSVERFAHREN

Ausgangssituation: (1) $5x + 3y = 8$ (2) $x + 2y = 3 \quad \| -2y$	Dieses Verfahren ist nur dann günstig, wenn eine Variable alleine steht. Eventuell zuerst auf Normalform bringen.
(1) $5x + 3y = 8$ (2) $x = 3 - 2y$ (1) $5 \cdot (3 - 2y) + 3y = 8$	Aus einer der beiden Gleichungen wird durch Äquivalenzumformungen eine der Variablen (hier x) in Abhängigkeit von der anderen ausgerechnet und das Ergebnis in die andere Gleichung eingesetzt.
$5 \cdot (3 - 2y) + 3y = 8$ ausmultiplizieren. $15 - 10y + 3y = 8$ zusammenfassen $15 - 7y = 8 \quad \| +7y-8$ $7 = 7y \quad \| :7$ $y = 1$	Wir erhalten sodann eine Gleichung mit einer Variablen, die wir lösen können.
(2) $x = 3 - 2 \cdot 1$ $x = 1$ ***Lösung***: $L = \{(1\|1)\}$	y wird in eine der obigen Gleichungen eingesetzt und nach x aufgelöst.
Probe: (1) $5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8$ $8 = 8$ ✓ wahre Aussage (2) $1 + 2 \cdot 1 = 3$ $3 = 3$ ✓ wahre Aussage	Zur Sicherheit sollte man noch die Probe machen. Dazu setzt man die Koordinaten der Lösungsmenge in beide Gleichungen ein und vereinfacht sie. Wenn eine wahre Aussage entsteht, so wurde richtig gerechnet, ansonsten ist das Ergebnis falsch.

GLEICHSETZUNGSVERFAHREN

<table>
<tr><td>

Ausgangssituation:

</td><td></td></tr>
<tr><td>

(1) $2x - 3y = -2$
(2) $x + y = -1$

</td><td>

Eventuell zuerst auf Normalform bringen.

</td></tr>
<tr><td>

(1) $2x - 3y = -2$
(2) $x + y = -1 \quad |\cdot 2$

</td><td>

Die Gleichungen werden so umgeformt, dass auf beiden Seiten ein äquivalenter Term entsteht

</td></tr>
<tr><td>

(1) $2x - 3y = -2$
(2) $2x + 2y = -2$

</td><td></td></tr>
<tr><td>

(1) $2x = -2 + 3y$
(2) $2x = -2 - 2y$

</td><td>

Beide Gleichungen nach diesem Term auflösen.

</td></tr>
<tr><td>

$-2 + 3y = -2 - 2y \quad |+2$
$3y = -2y \quad |+2y$
$5y = 0 \quad |:5$
$y = 0$

</td><td>

Da beide linken Seiten gleich sind, müssen es auch die rechten sein. Diese werden nun gleichgesetzt.

Wir erhalten eine Gleichung mit einer Variablen, die wir lösen können.

</td></tr>
<tr><td>

(2) $x + 0 = -1$
$x = -1$

</td><td>

y wird in eine der obigen Gleichungen eingesetzt und nach x aufgelöst.

</td></tr>
<tr><td>

Lösung: L = {(-1|0)}

</td><td></td></tr>
<tr><td>

Probe:

(1) $2\cdot(-1) + 3\cdot 0 = -2$
$-2 = -2$ ✓ wahre Aussage
(2) $-1 + 0 = -1$
$-1 = -1$ ✓ wahre Aussage

</td><td>

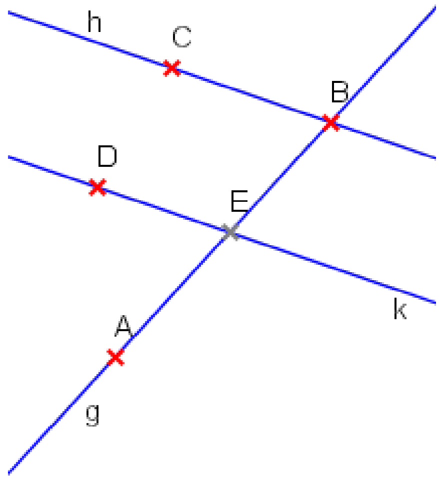
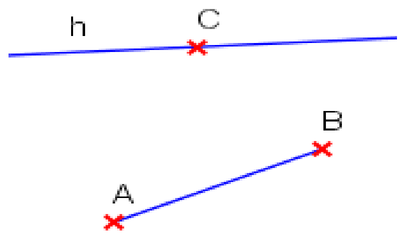
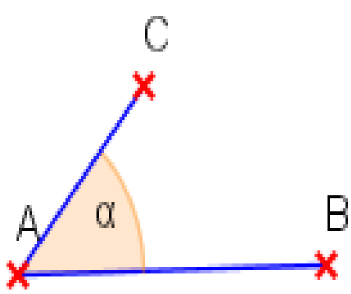
Zur Sicherheit sollte man noch die Probe machen. Dazu setzt man die Koordinaten der Lösungsmenge in beide Gleichungen ein und vereinfacht sie.

Wenn eine wahre Aussage entsteht, so wurde richtig gerechnet, ansonsten ist das Ergebnis falsch.

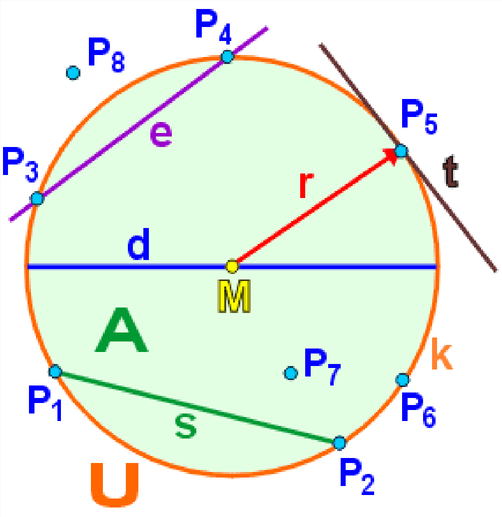
</td></tr>
</table>

Grundbegriffe

Punkte, Geraden, Strecken

Die grundlegenden Objekte der ebenen Geometrie sind **Punkte** und **Geraden**. Jeweils zwei verschiedene Punkte bestimmen eindeutig eine Gerade und zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Haben zwei Geraden keinen Punkt gemeinsam so sind sie **parallel** (h und k in der nebenstehenden Grafik). Man schreibt dafür $h \parallel k$. Punkte werden mit großen Buchstaben und Geraden mit kleinen Buchstaben bezeichnet.	
Liegen zwei Punke A und B auf einer Geraden, so heißt der Abschnitt zwischen A und B **Strecke**, mit der Bezeichnung $\overline{AB}$. Liegt ein Punkt C auf einer Geraden, so teilt er diese in zwei **Halbgeraden**. Alle Punkte einer Halbgeraden bilden einen **Strahl**, ausgehend vom Punkt C.	
Zwei vom Punkt A ausgehende Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ bestimmen den **Winkel** $\measuredangle BAC$. Der Punkt A heißt **Scheitelpunkt** des Winkels. Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. ***Winkelmessung:*** Zur Messung der Winkel benutzt man die Einheit Grad (Symbol: °). Dabei entspricht der Vollwinkel 360°. Dieses Maß heißt Gradmaß.	

Kreis



Linien am Kreis:

d = *Durchmesser (doppelter Radius) ist die größte Sehne im Kreis.*

r = *Radius (Halbmesser) = Abstand vom Mittelpunkt zur Kreislinie.*

k = *Kreislinie = Linie, die überall den Abstand r vom Mittelpunkt hat.*

s = *Sehne = gerade Linie von einem Punkt der Kreislinie zu einem anderen.*

t = *Tangente = Gerade, die die Kreislinie an einem Punkt berührt.*

e = *Sekante = Gerade, die die Kreislinie in zwei Punkten schneidet.*

Größen am Kreis:

U = ***Kreisumfang = Gesamtlänge der Kreislinie.***

A = ***Kreisfläche = Flächeninhalt des Kreises.***

Punkte am Kreis:

M = *Kreismittelpunkt = Mittelpunkt des Durchmessers.*

P_1;P_2 = *Anfangs- und Endpunkt der Sehne s.*

P_3;P_4 = *Schnittpunkte der Sekante e mit der Kreislinie k.*

P_5 = *Berührungspunkt der Tangente t mit der Kreislinie k.*

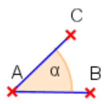
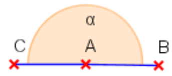
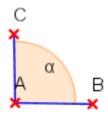
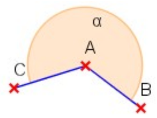
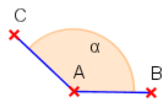
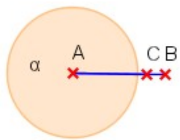
P_6 = ***Punkt der Kreislinie k.***

P_7 = *Punkt der Kreisfläche (innerhalb der Kreislinie).*

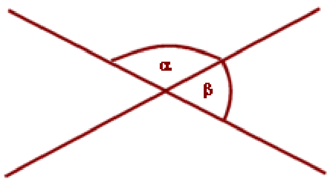
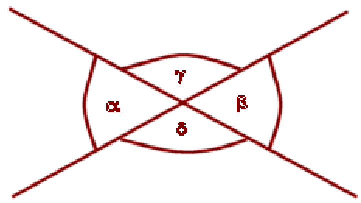
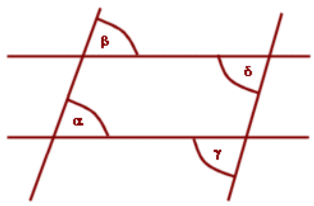
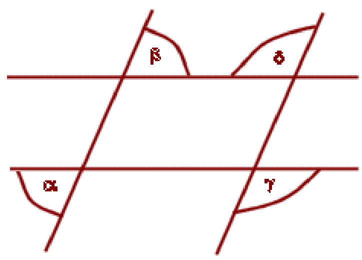
P_8 = ***Punkt außerhalb der Kreislinie.***

0.3 Einteilung der Winkel

Nach ihrer Größe können die Winkel wie folgt eingeteilt werden.

Name	Beispiel	Größe	Name	Beispiel	Größe
spitzer Winkel		$0 < \alpha < 90°$	gestreckter Winkel		$180°$
rechter Winkel		$90°$	überstumpfer Winkel		$180° < \alpha < 360°$
stumpfer Winkel		$90° < \alpha < 180°$	Vollwinkel		$360°$

Scheitel-, Neben-, Stufen- und Wechselwinkel

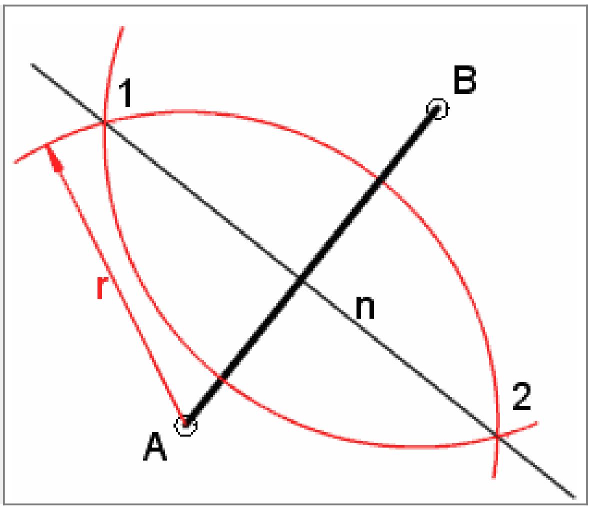
	**Nebenwinkel** **Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°** $\alpha + \beta = 180°$
Scheitelwinkel **Scheitelwinkel sind gleich groß** $\alpha = \beta \qquad \gamma = \delta$	
	**Stufenwinkel** **Stufenwinkel sind gleich groß** $\alpha = \beta \qquad \gamma = \delta$
Wechselwinkel **Wechselwinkel sind gleich groß** $\alpha = \beta \qquad \gamma = \delta$	

Grundkonstruktionen

1) Halbierung einer Strecke und Mittelsenkrechte

Konstruktion:

1. Zeichne die Strecke AB;
2. Wähle einen Radius r und beschreibe damit um die Endpunkte A und B Kreisbögen;
3. Ziehe durch die Schnittpunkte der beiden Kreisbögen 1 und 2 die Mittelsenkrechte n, die die Strecke AB in zwei gleiche Teile teilt.

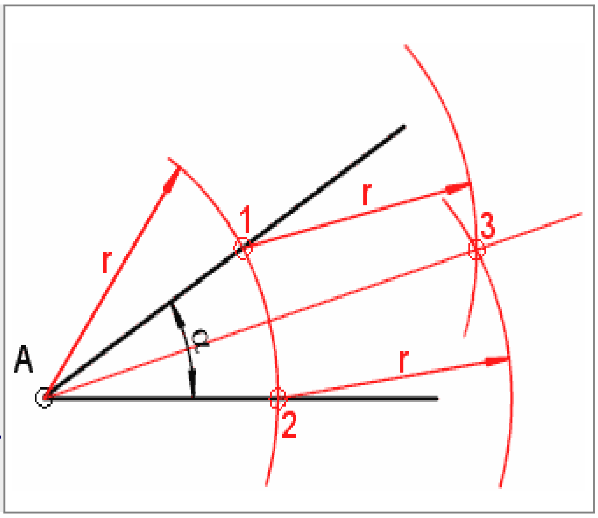


Definition: Die Mittelsenkrechte ist eine Gerade, die senkrecht zu einer Strecke verläuft und diese Strecke in der Hälfte teilt. Ganz formal ist die Definition, dass die Mittelsenkrechte (oder auch Streckensymmetrale) die Menge aller Punkte ist, die von zwei gegebenen Punkten den gleichen Abstand haben.

2) Halbierung eines Winkels

Konstruktion:

1. Zeichne den Winkel α ;
2. Beschreibe um A mit einem beliebigen Radius r einen Kreisbogen;
3. Beschreibe um die beiden Schnittpunkte 1 und 2 auf den beiden Schenkeln des Winkels Kreisbögen mit r, die sich in 3 schneiden;
4. Zeichne von A aus durch 3 die Winkelhalbierende.

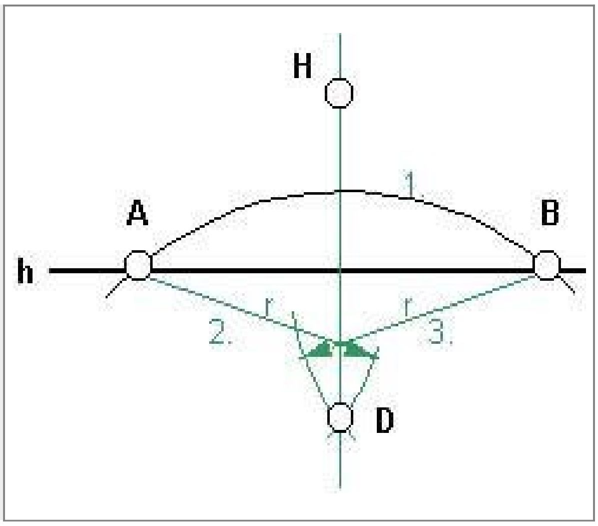


Definition: Eine Halbgerade, die durch den Scheitelpunkt des Winkels läuft und den Winkel in zwei gleichgroße Teile teilt, nennt man Winkelhalbierende. Ganz formal ist die Definition, dass die Winkelhalbierende die Menge aller Punkte ist, deren Lote (kürzester Abstand!!) von den Schenkeln eines Winkels immer gleich groß sind.

3) Fällen eines Lotes vom Punkt H auf Gerade h

Konstruktion:

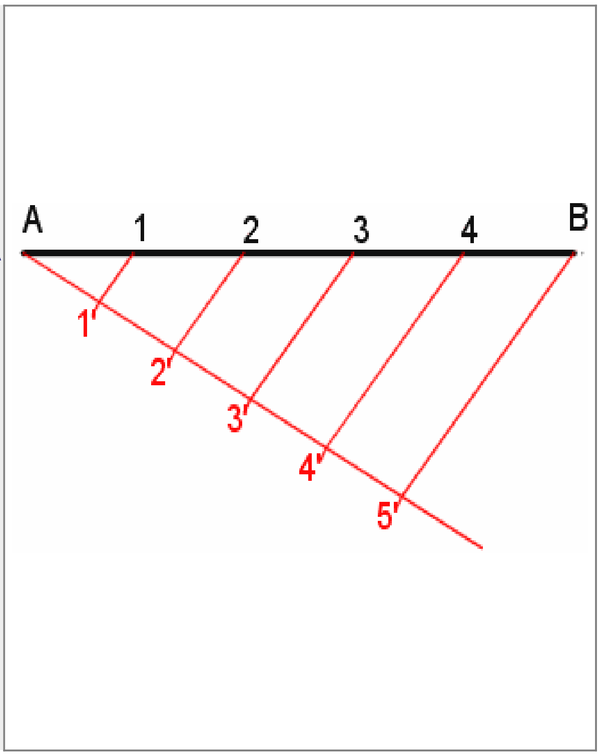
1. Beliebiger Kreisbogen um H ergibt Schnittpunkte A und B
2. Kreisbogen um A mit Radius r, r mindestens 0,5xStrecke zw. A und B
3. Kreisbogen um B mit gleichem Radius r ergibt Schnittpunkt D
4. Das Lot ist die Gerade durch den Schnittpunkt D und den Punkt H



4) Teilung einer Strecke in n gleiche Teile

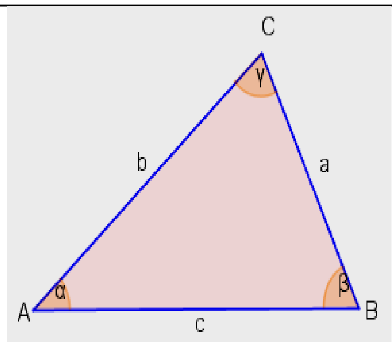
Konstruktion (für n=5):

1. Zeichne die Strecke AB;
2. Zeichne von A aus unter einem beliebigen Winkel (<90°) einen Strahl;
3. Trage auf diesem Strahl von A aus fünf gleichlange Teilstrecken ab, deren gleiche Länge beliebig ist;
4. Verbinde den letzten Teilungspunkt 5' mit B;
5. Zeichne zu dieser Vebindungsgeraden Parallelen durch die anderen Teilungspunkte, wodurch die Strecke AB in fünf gleichlange Teile geteilt wird



Das Dreieck

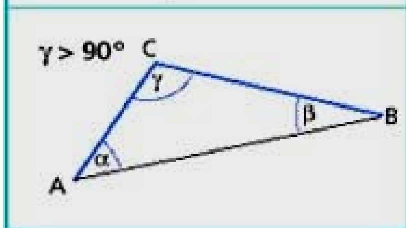
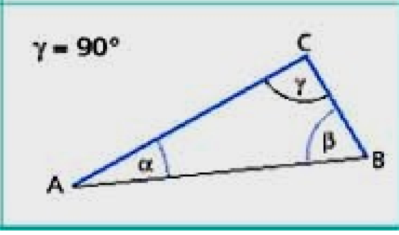
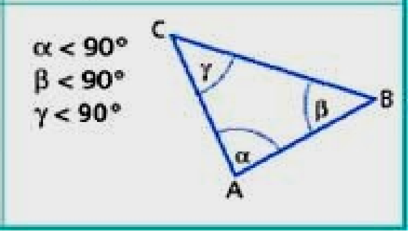
Allgemeines:

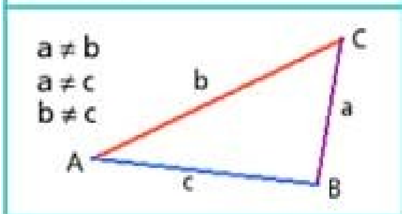
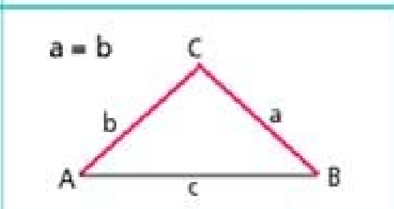
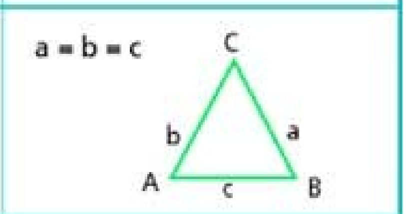
Die Ecken des Dreiecks werden meistens mit *A*, *B*, *C*, bezeichnet, die gegenüberliegenden Seiten $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{AB}$ und die Innenwinkel $\alpha=\angle CAB$, $\beta=\angle ABC$ und $\gamma=\angle BCA$.	

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°
(Innenwinkelsummensatz). $\alpha+\beta+\gamma=180°$

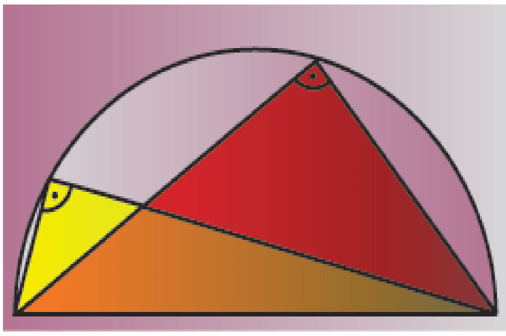
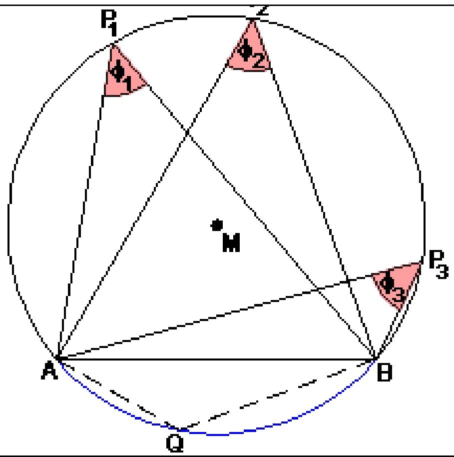
Die Summe der Längen zweier Seiten ist stets größer als die Länge der dritten Seite
(Dreiecksungleichung). a+b>c, b+c>a, a+c>b

Arten:

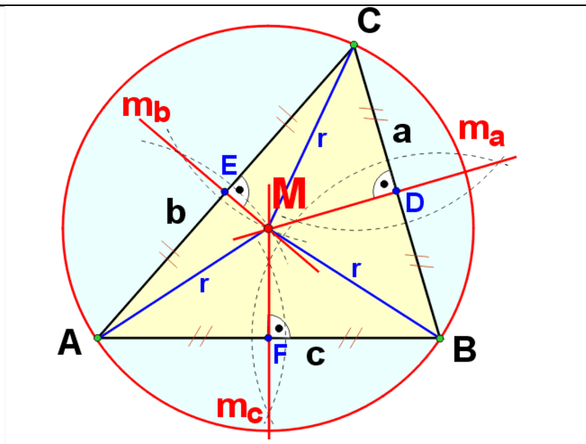
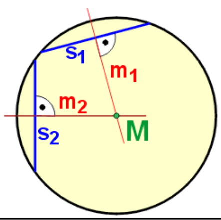
Stumpfwinkliges Dreieck	Rechtwinkliges Dreieck	Spitzwinkliges Dreieck
Ein Innenwinkel ist ein stumpfer Winkel.	Ein Innenwinkel ist ein rechter Winkel.	Alle Innenwinkel sind spitze Winkel.
		

Unregelmäßiges Dreieck	Gleichschenkliges Dreieck	Gleichseitiges Dreieck
Alle Seiten des Dreiecks sind verschieden lang.	Genau zwei Seiten (Schenkel) sind gleich lang.	Alle Seiten des Dreiecks sind gleich lang.
		

Satz des Thales

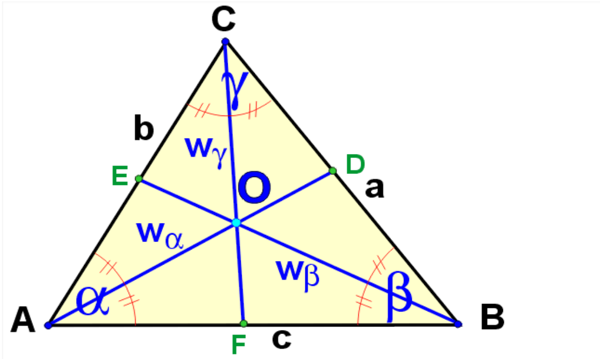
	**Satz des Thales:** Alle Winkel im Halbkreis sind rechte Winkel. Der Satz war in empirischer Form schon den Ägyptern und Babyloniern bekannt. Der erste Beweis wird dem griechischen Mathematiker und Philosophen Thales v. Milet zugeschrieben. Der Thaleskreis ist ein Spezialfall des Umfangswinkelsatzes.
	**Umfangswinkelsatz** Alle Umfangswinkel (Peripheriewinkel) über einem Kreisbogen sind gleich groß. Umfangswinkel oder Peripheriewinkel nennt man einen Winkel $\angle APB$, dessen Scheitel P auf demjenigen Kreisbogen liegt, der den gegebenen Kreisbogen AB zum vollständigen Kreis ergänzt.

Mittelsenkrechte eines Dreiecks (Umkreis)

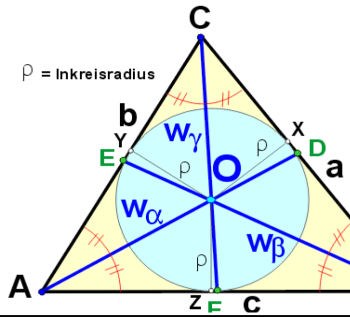
Die Mittelsenkrechten der drei Seiten schneiden sich ebenfalls in genau einem Punkt und bilden den Mittelpunkt des Umkreises **M**. (meist U)	 **Die Mittellote der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des Umkreises.**  Durch Anwendung dieser Tatsache kann man den Mittelpunkt eines Kreises finden, wenn man ihn noch nicht kennt. Man konstruiert 2 beliebige Sehnen. Deren Mittellote schneiden sich dann im Mittelpunkt des Kreises.

Winkelhalbierende eines Dreiecks (Inkreis)

Zeichnet man zu den Innenwinkeln die Winkelhalbierenden, so schneiden auch diese sich in genau einem Punkt, dem **Inkreismittelpunkt O** (meist I)des Dreiecks.



Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt O, dem Mittelpunkt des Inkreises.

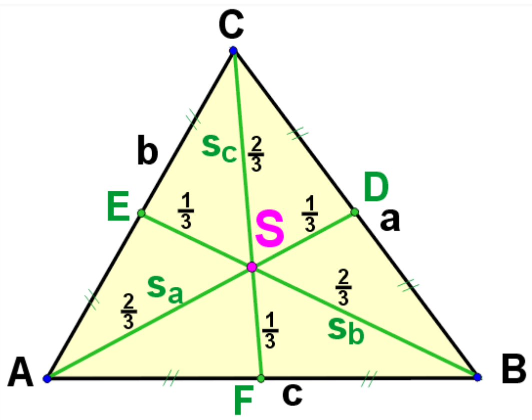


Die Endpunkte D, E, F der Winkelhalbierenden sind nur in Ausnahmefällen (gleichseitiges Dreieck) zugleich die Berührungs-punkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten.

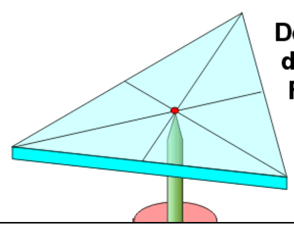
Seitenhalbierenden im Dreieck

Definition: Eine **Schwerlinie** eines Dreiecks verläuft durch einen Eckpunkt und den Halbierungspunkt der gegen-überliegenden Dreiecksseite.

Schließlich schneiden sich auch die drei Seitenhalbierenden in genau einem Punkt; dieser Punkt ist der **Schwerpunkt S** des Dreiecks.



Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S, dem Schwerpunkt des Dreiecks. Sie teilen sich dabei gegenseitig im Verhältnis 2:1.



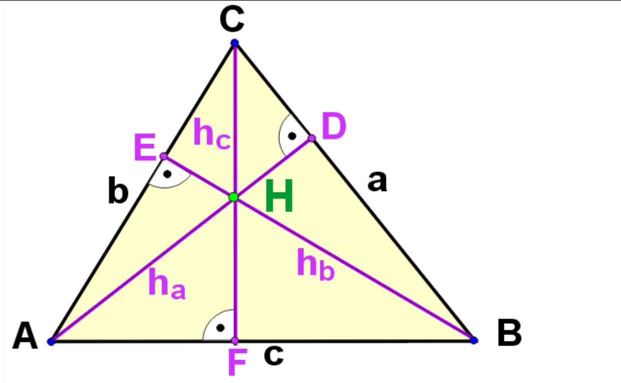
Der Schwerpunkt S ist der Punkt, an dem eine Figur auf eine Nadelspitze aufgesetz werden muss, um ausbalanciert zu sein.

Höhe eines Dreiecks

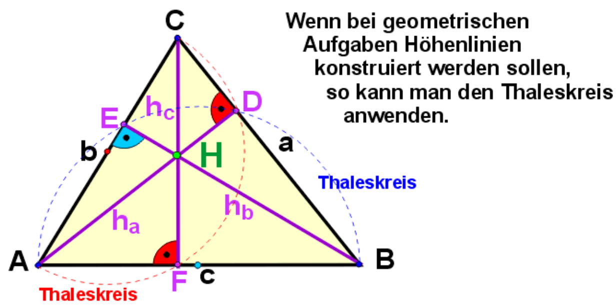
Definition: Als Höhen eines Dreiecks bezeichnet man die drei Lote von den Eckpunkten auf die jeweils gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung. Die Höhe durch *A* steht also senkrecht auf *a* und heißt dementsprechend h_a.

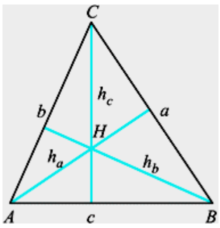
In rechtwinkligen Dreiecken sind die Katheten gleichzeitig Höhen des Dreiecks, in stumpfwinkligen Dreiecken verlaufen zwei der drei Höhen außerhalb des Dreiecks.

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich immer in genau einem Punkt, dem **Höhenschnittpunkt *H***. Dieser Punkt liegt bei stumpfwinkligen Dreiecken außerhalb des Dreiecks.

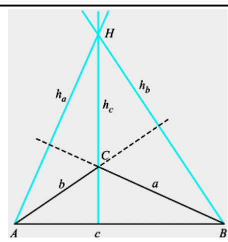


Die Höhen des Dreiecks schneiden sich in einem Punkt H.





Höhenschnittpunkt H im spitzwinkligen Dreieck



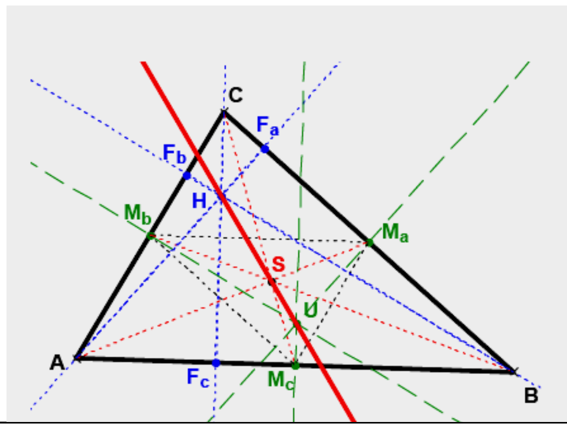
Höhenschnittpunkt H im stumpfwinkligen Dreieck

1 Euler-Gerade

Euler-Gerade

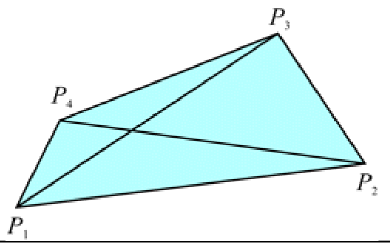
(L. Euler, 1765)

Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S und Höhenschnittpunkt H liegen auf einer Geraden. Der Inkreismittelpunkt O hingegen nicht.



Vierecke

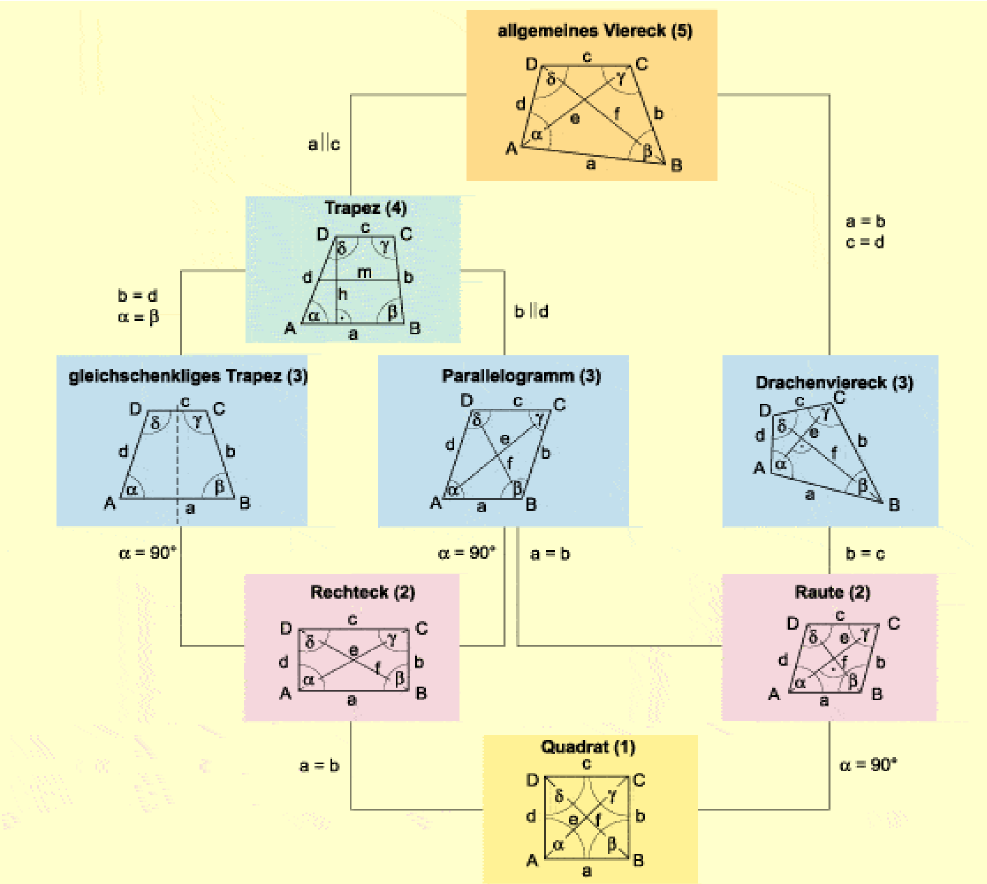
Ein **Viereck** ist ein geschlossenes Polygon, mit 4 Eckpunkten P_1, P_2, P_3, P_4.
Die Strecken $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, $\overline{P_4P_1}$ heißen Seiten, die Verbindungen $\overline{P_1P_3}$ und $\overline{P_2P_4}$ Diagonalen.



Ausgehend vom allgemeinen (konvexen) **Viereck** lassen sich

Quadrat,	**Rechteck**	**Raute (Rhombus)**
Trapez	**Parallelogramm**	**Drachenviereck**

aufgrund ihrer Eigenschaften in einer Übersicht (**Haus der Vierecke**) darstellen:

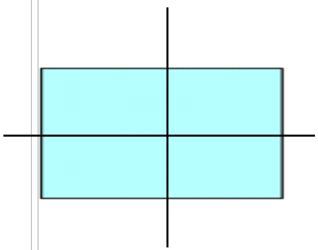
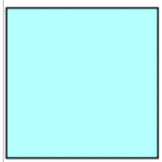
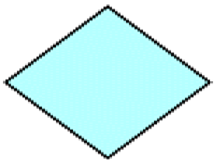
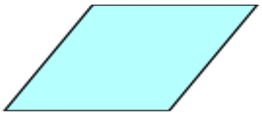
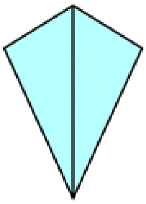
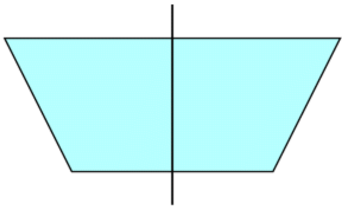


Anhand der Übersicht werden Beziehungen zwischen den Vierecken deutlich, wie etwa die folgenden:

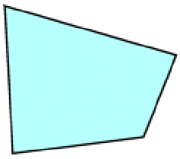
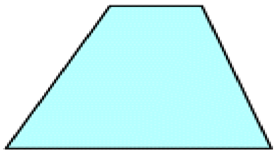
- ***Jedes Parallelogramm ist ein Trapez.***
- ***Jedes Rechteck ist sowohl ein rechtwinkliges als auch ein gleichschenkliges Trapez.***
- ***Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.***
- ***Jede Raute (jeder Rhombus) ist ein Parallelogramm.*** *usw.*

Vierecke lassen sich auf Grund ihrer Symmetrieeigenschaften in verschiedene **Viereckarten** einteilen. Man unterteilt sie in **punktsymmetrische**, **achsensymmetrische** und **nicht symmetrische** Vierecke.

Beispiel**: Punkt- und achsensymmetrisch**

Parallelogramme			
Rechtecke	Quadrat	Raute	Parallelogramm
			
gleichschenkliger Drachen 		gleichschenkliges Trapez 	

Beispiel**: nicht symmetrisch**

andere Vierecke	
Allgemeines Viereck	Allgemeines Trapez
	

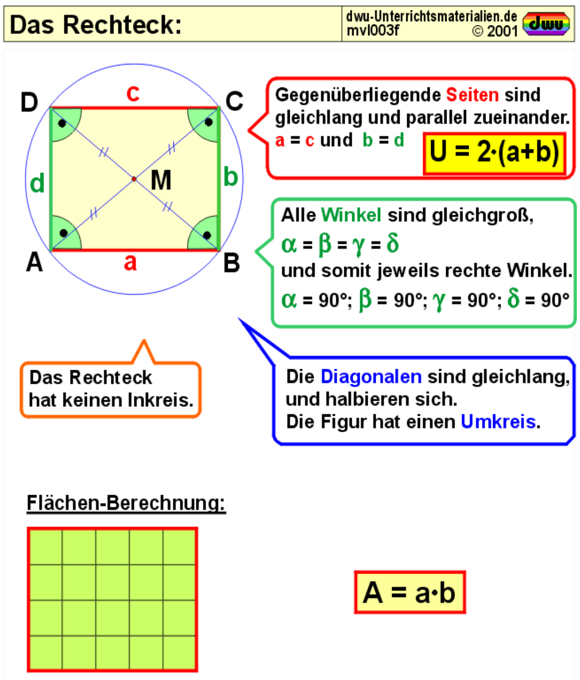
Nun sollen diese Spezialfälle nach ihren Symmetrieeigenschaften geordnet werden.

Lösung: Ganz oben (unten) muss somit das Quadrat sein, da es 4 Symmetrieachsen besitzt und darüber hinaus **punktsymmetrisch** (d.h. wenn man es um 180 Grad dreht, kommt es mit sich selbst wieder zur Deckung) ist. Dann folgen Rechteck und Raute. Beide haben 2 Symmetrieachsen und sind punktsymmetrisch. Als nächstes kommen Trapez und Drache. Sie besitzen nur noch 1 Symmetrieachse. Dabei ist aber zu beachten, dass das Trapez unter (über)das Rechteck gesetzt wird, da in diesem Fall die Symmetrieachsen immer durch die Seiten verlaufen. Umgekehrt kommt der Drache unter (über) die Raute, da hier die Symmetrieachsen durch die Ecken verlaufen. In der Mitte fehlt nur noch das Parallelogramm, das nur punktsymmetrisch ist nicht symmetrisch, wie oft angenommen, bezüglich einer Spiegelachse. Zu guter letzt folgt das allgemeine Viereck, das natürlich überhaupt keine Symmetrie besitzt. **Vergleiche mit „Das Haus der Vierecke“.**

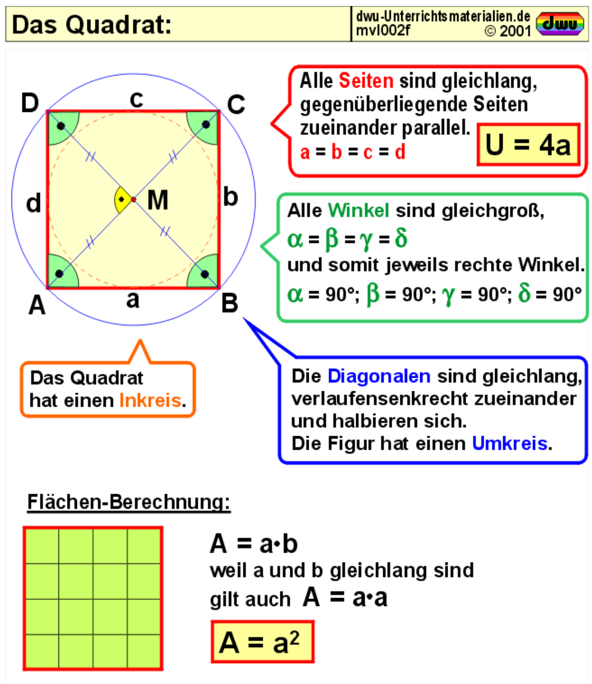
Umfang und Flächenberechnung

Einfache Figuren:

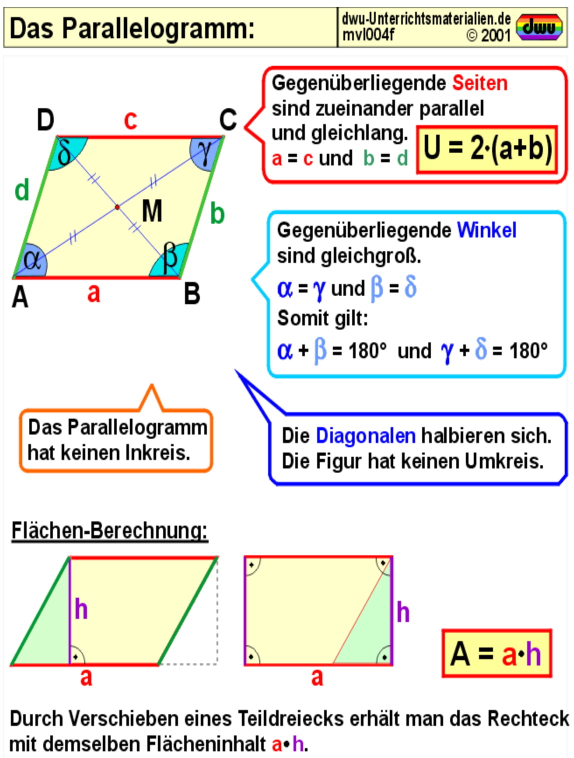
Rechteck



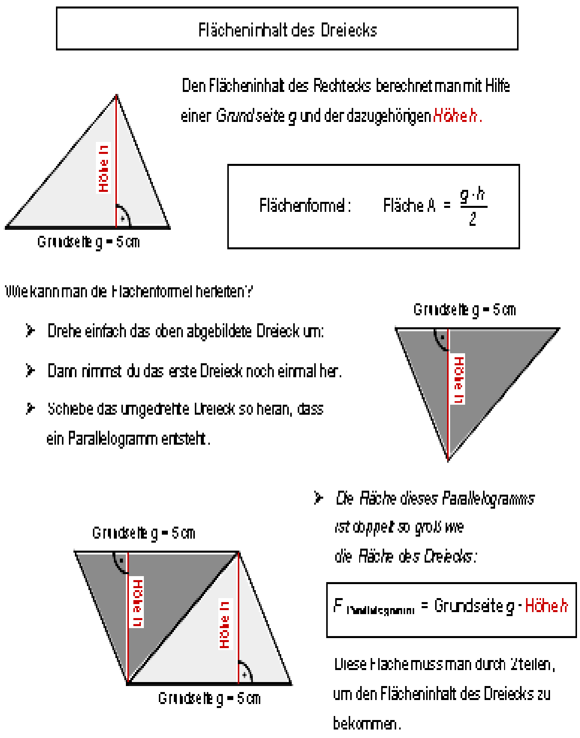
Quadrat



Parallelogramm

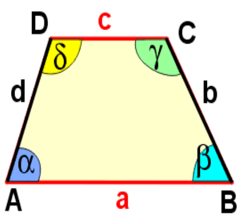


Dreieck



Schwere Figuren:

Trapez



Ein Seitenpaar ist zueinander parallel (hier a // c).

$U = a + b + c + d$

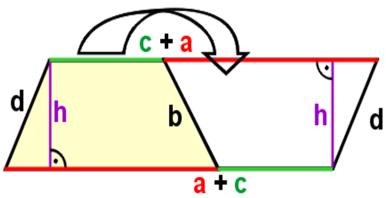
Die Winkel haben unterschiedliche Größe.

$\alpha \neq \gamma \neq \beta \neq \delta$

Das Trapez hat keinen Inkreis.

Die Diagonalen haben keine besonderen Eigenschaften. Die Figur hat keinen Umkreis.

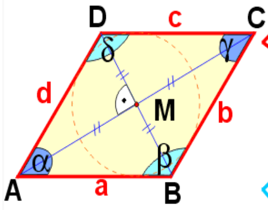
Flächen-Berechnung:



$A = \frac{(a+c)\cdot h}{2}$

Berechnung als halbes Parallelogramm der Länge a+c

Raute



Gegenüberliegende Seiten sind zueinander parallel. Alle Seiten sind gleichlang.

a = b = c = d

$U = 4a$

Gegenüberliegende Winkel sind gleichgroß.

$\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$

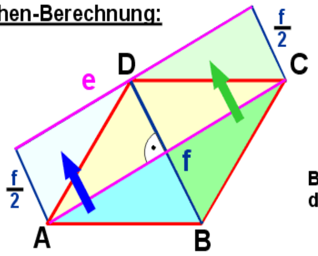
Somit gilt:

$\alpha + \beta = 180°$ und $\gamma + \delta = 180°$

Die Raute hat einen Inkreis.

Die Diagonalen halbieren sich und verlaufen senkrecht zueinander. Die Figur hat keinen Umkreis.

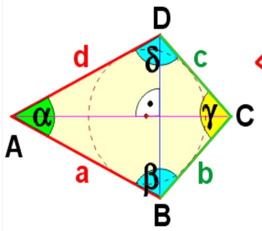
Flächen-Berechnung:



$A = \frac{e \cdot f}{2}$

Berechnung nach der Rechteckformel

Drachen



Der Drachen hat 2 verschiedene Seitenlängen.

$U = 2 \cdot (a + b)$

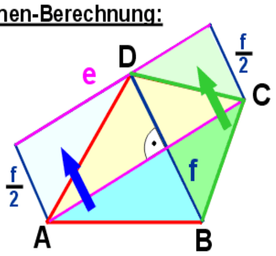
Zwei der Gegenwinkel haben dieselbe Größe

(hier $\beta = \delta$).

Das Drachenviereck hat einen Inkreis.

Eine Diagonale ist Symmetrieachse, die andere wird geteilt. Die Figur hat keinen Umkreis.

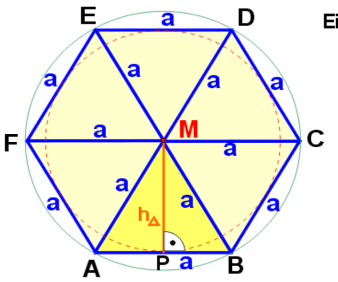
Flächen-Berechnung:



$A = \frac{e \cdot f}{2}$

Berechnung nach der Rechteckformel

Sechseck

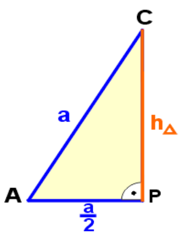


Ein regelmäßiges Sechseck kann man allein mit dem Zirkel und dem Lineal zeichnen, weil alle Seiten gleichlang sind.

Es besteht aus insgesamt 6 gleichseitigen Dreiecken.

Umfangsformel:

$U = 6a$



Umkreisradius: a

Inkreisradius: $h_{\triangle}$

Formel des gleict seitigen Dreiecks

Berechnung der Fläche im Sechseck:

$A_{Sechseck} = 6 \cdot A_{gls\triangle}$

Kongruenzabbildung

Definition: Unter einer **Kongruenzabbildung** (von lat. *congruens* = übereinstimmend, passend) versteht man eine **geometrische Abbildung**, bei der Form und Größe der abgebildeten Objekte gleich bleiben.

Prinzip: Eine **Kongruenzabbildung** ist eine Vorschriften die angibt wie eine Punkt (Original) auf einen neuen Punkt (Bild) abgebildet wird.

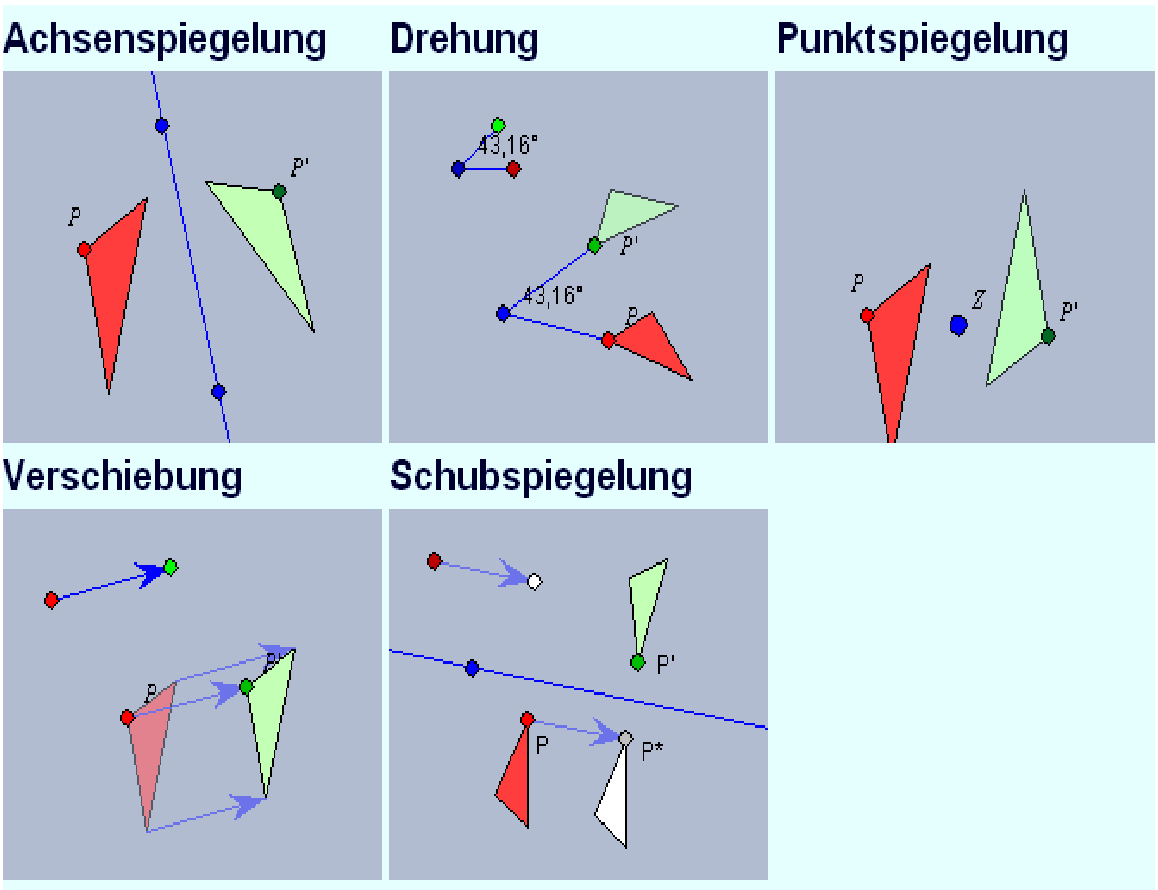
$$P \longrightarrow P'$$

Original → Bild

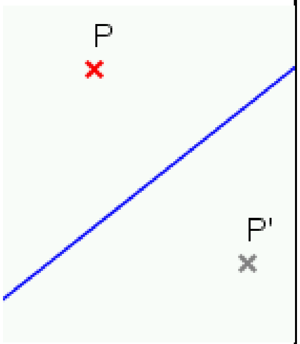
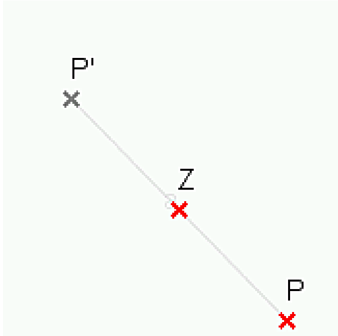
Man unterscheidet folgende Kongruenzabbildung:

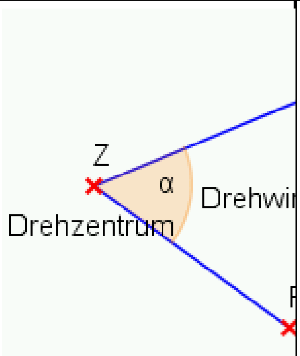
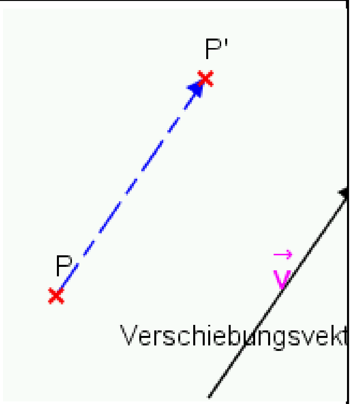
- **Achsenspiegelung**
- **Punktspiegelung**
- **Drehung**
- **Verschiebung**
- **usw.**

Beispiele für Kongruenzabbildungen sind:

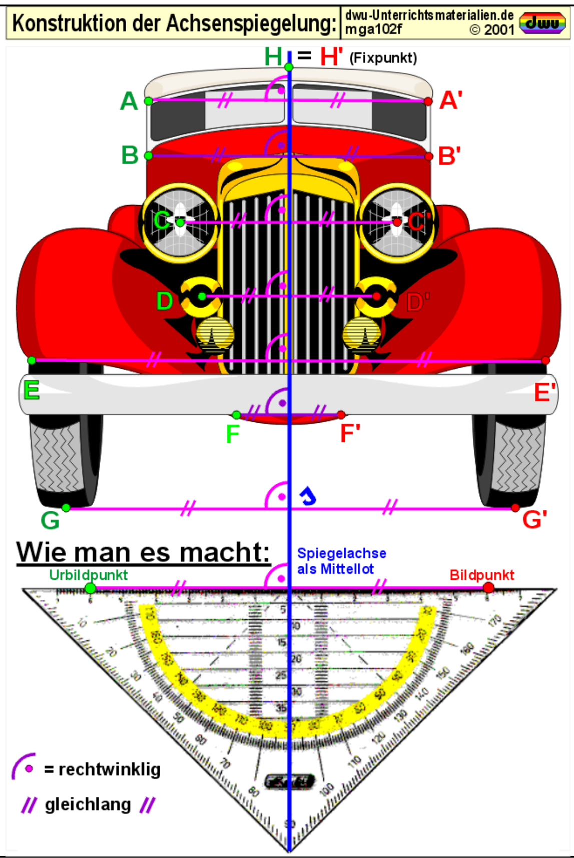


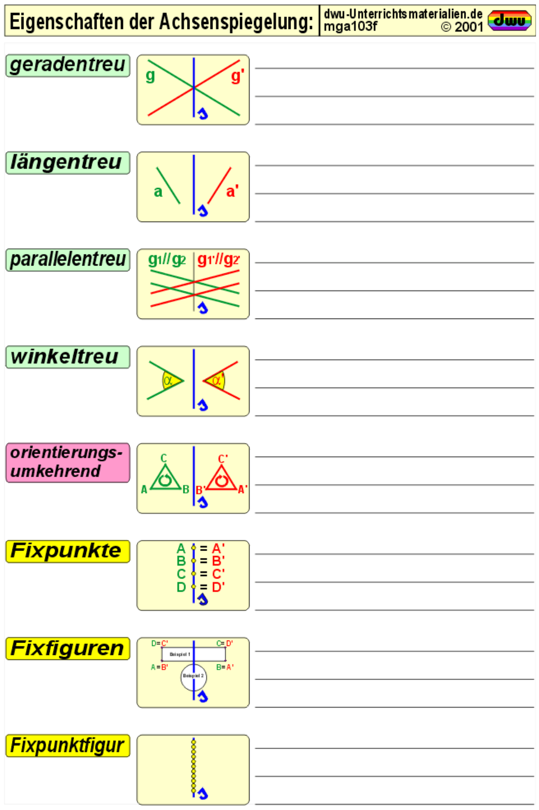
Kongruenzabbildungen Übersicht

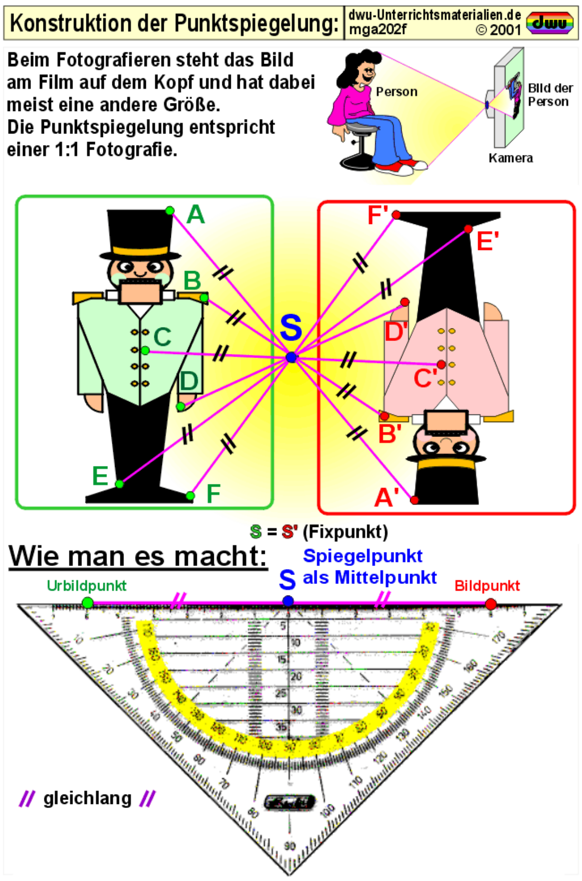
Abbildungen	*Achsenspiegelung*	*Punktspiegelung*
Symmetrie	***Achsensymmetrie***	***Punktsymmetrie***
Bezeichnungsweisen		
Zeichenvorschrift	***g halbiert die Strecke $\overline{PP'}$***	***Z halbiert die Strecke $\overline{PP'}$***
Fixpunkte	***Alle Punkte auf g***	***Zentrum Z***

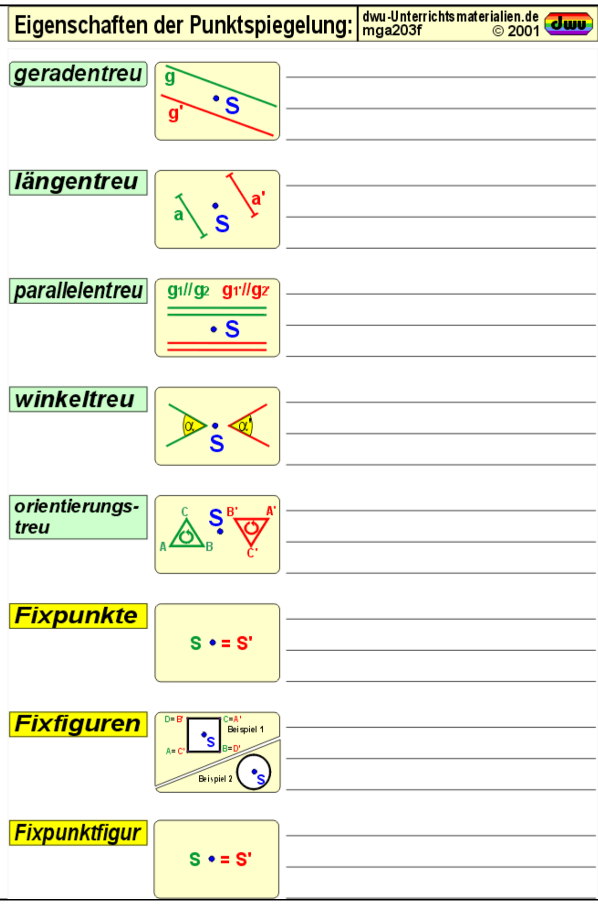
Abbildungen	*Drehung*	*Verschiebung*
Symmetrie	***Drehsymmetrie***	***/***
Bezeichnungsweisen		
Zeichenvorschrift	***Winkel $\angle PZP' = \alpha$*** $\overline{P'Z} = \overline{PZ}$	***$\vec{v}$ entspricht in Länge und Richtung dem Pfeil von P nach P'***
Fixpunkte	***Zentrum Z***	***-***

Im Einzelnen:



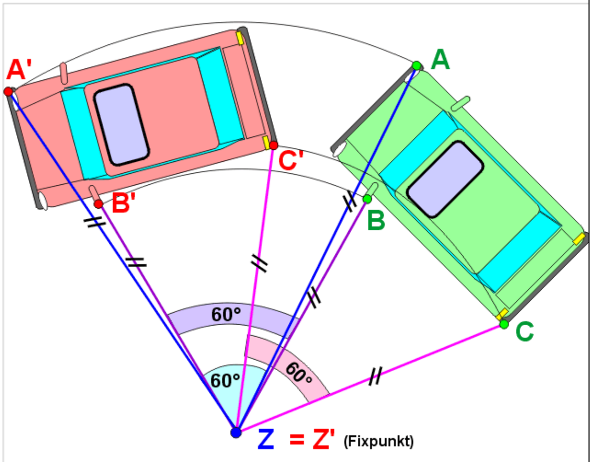




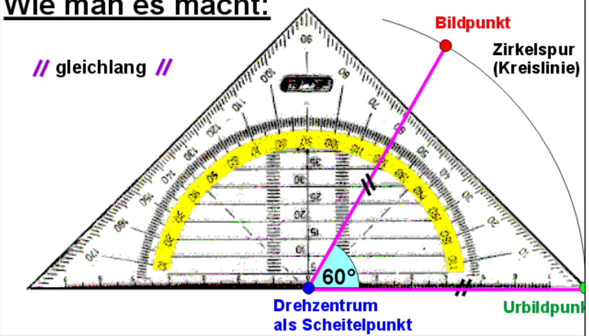


Konstruktion der Drehung:

dwu-Unterrichtsmaterialien.de mga302f © 2001



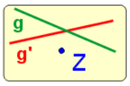
Wie man es macht:



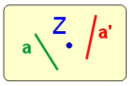
Eigenschaften der Drehung:

dwu-Unterrichtsmaterialien.de mga303f © 2001

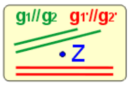
geradentreu



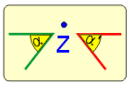
längentreu



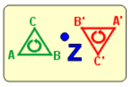
parallelentreu



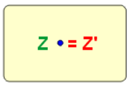
winkeltreu



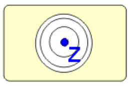
orientierungs-treu



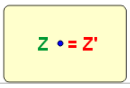
Fixpunkte



Fixfiguren

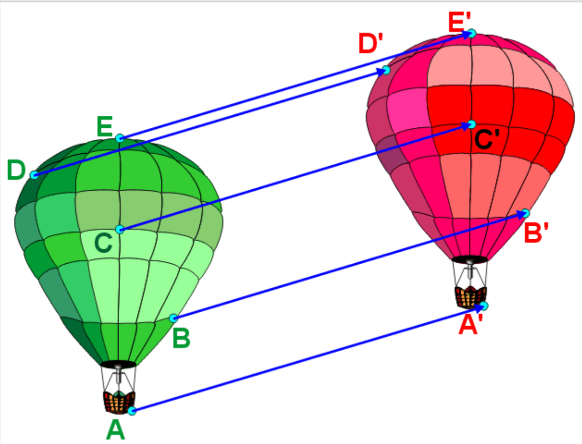


Fixpunktfigur

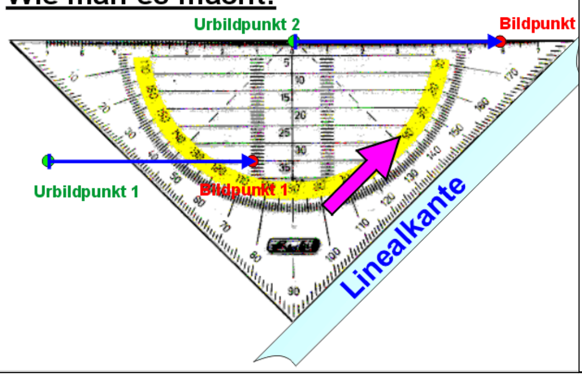


Konstruktion der Verschiebung:

dwu-Unterrichtsmaterialien.de mga402f © 2001



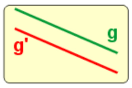
Wie man es macht:



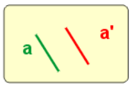
Eigenschaften der Verschiebung:

dwu-Unterrichtsmaterialien.de mga403f © 2001

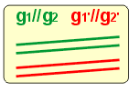
geradentreu



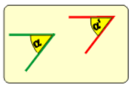
längentreu



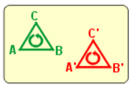
parallelentreu



winkeltreu

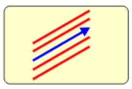


orientierungs-treu



Fixpunkte

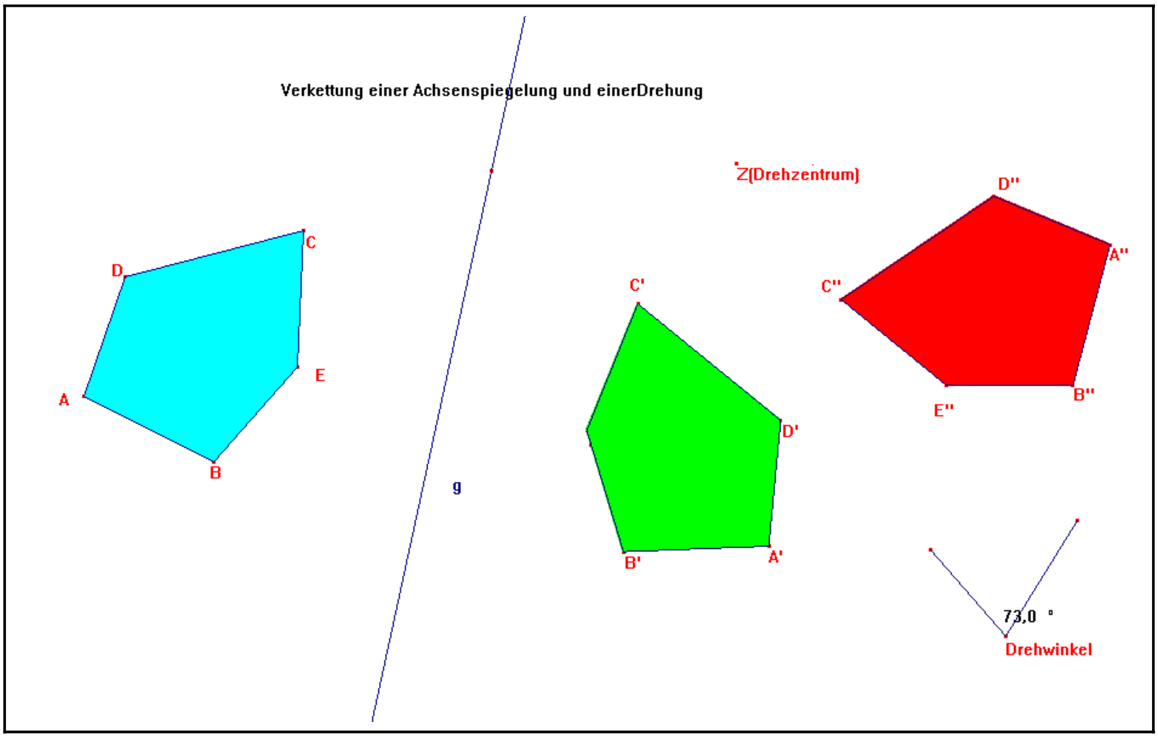
Fixfiguren

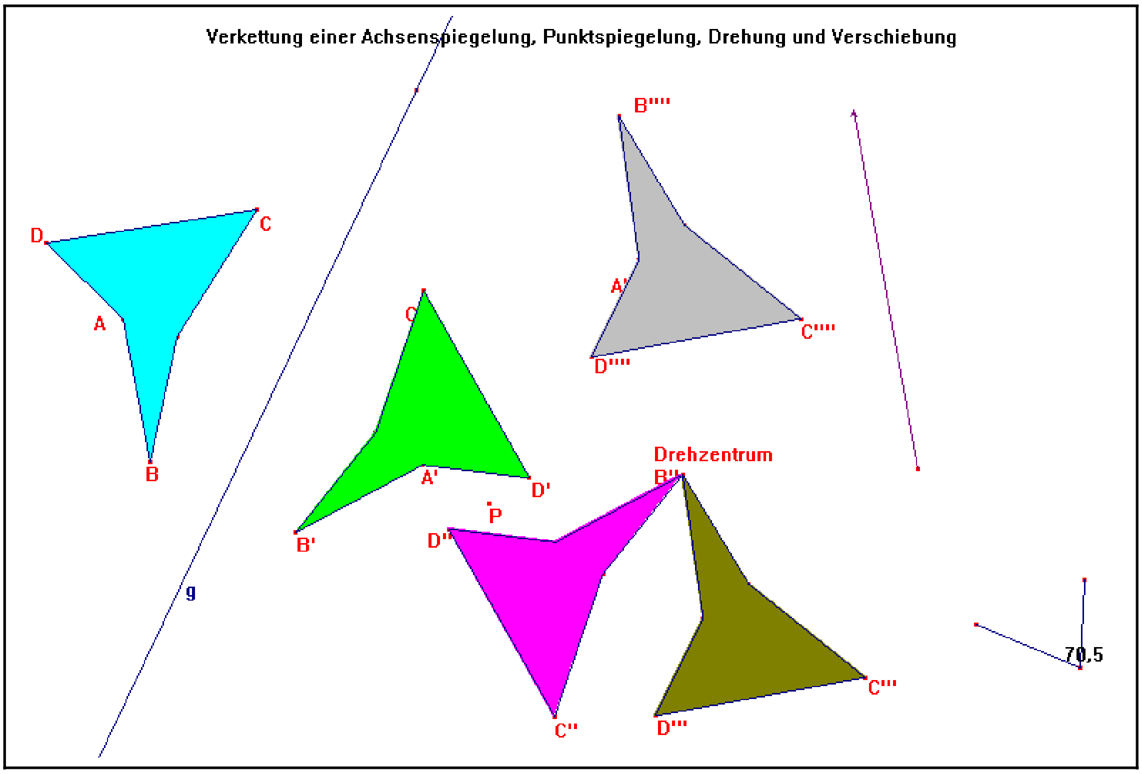


Fixpunktfigur

Verkettung von Kongruenzabbildungen

Führt man zwei oder mehr Abbildungen hintereinander aus, so spricht man von **Verkettungen.**





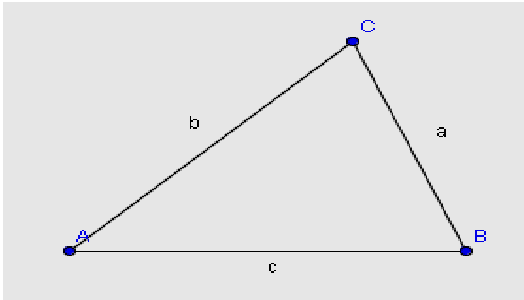
Kongruenzsätze

Zwei Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich), wenn sie in allen drei Seiten(längen) und allen drei Winkeln entsprechend übereinstimmen.

Zwei Dreiecke sind aber auch schon kongruent, wenn bei ihnen nur folgende Größen gleich groß sind:

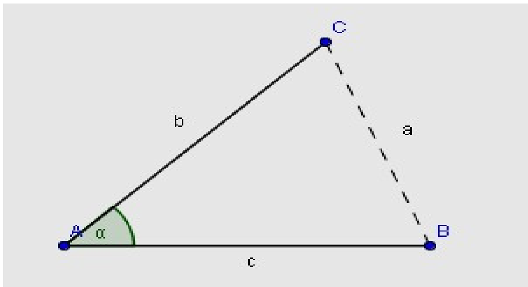
SSS (drei Seiten)

Satz:
Dreiecke sind dann kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen



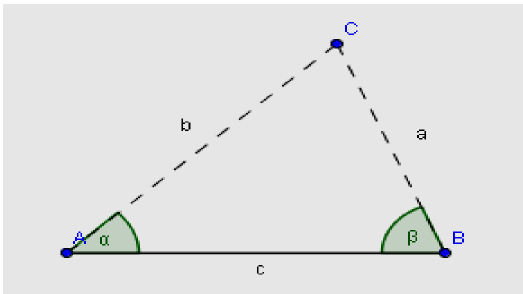
SWS (2 Seiten, 1 eingeschlossener Winkel)

Satz:
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (SWS)



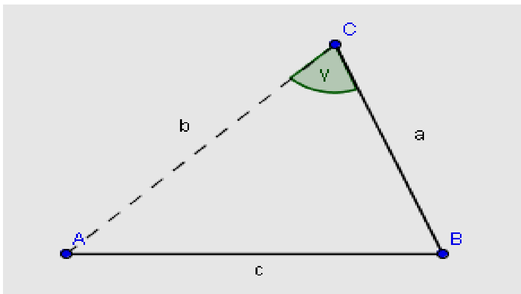
WSW (2 Winkel, 1 Seite)

Satz:
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen (WSW).



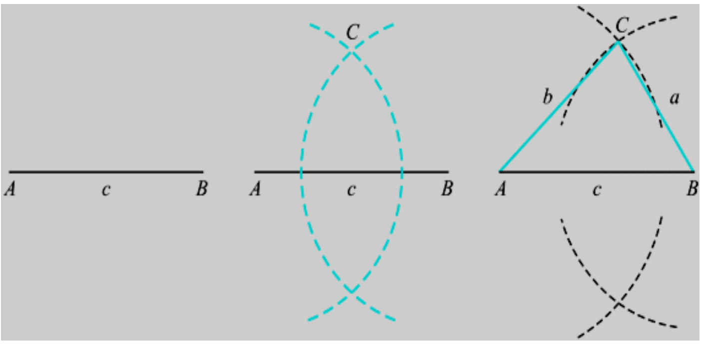
SsW (2 Seiten, 1 Winkel der größeren Seite gegenüberliegend)

Satz:
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen (SSW).

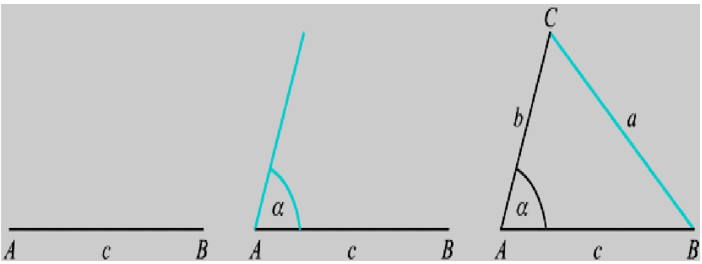


Dreieckskonstruktionen

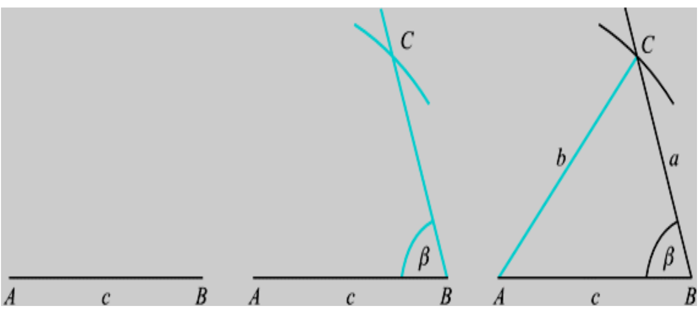
Bei **Dreieckskonstruktionen** versucht man, mit Hilfe gegebener Seiten und Winkel das Dreieck zu konstruieren, also mit Zirkel und Lineal bzw. Geodreieck zu zeichnen. Folgende Dreieckskonstruktionen beruhen auf den Kongruenzsätzen:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Konstruktion eines Dreiecks aus drei Seiten

• SSS

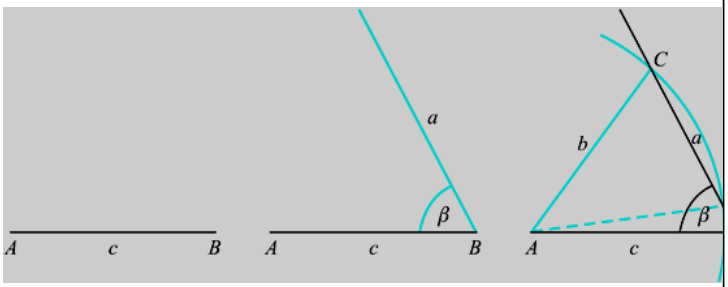
Zeichne eine Seite, z.B. $c = \overline{AB}$.
Zeichne einen Kreis um A mit Radius b.
Zeichne einen Kreis um B mit Radius a.
Der oberhalb c liegende Schnittpunkt der beiden Kreise ist C; verbinde C mit A und B.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel

• SWS

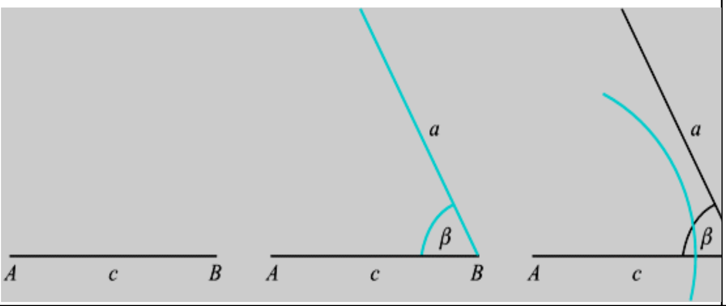
Zeichne eine der beiden Seiten, z.B. $c = \overline{AB}$.
Trage den gegebenen Winkel (α) an seinem Scheitelpunkt (A) an (Umlaufsinn beachten!).
Trage die Länge von b auf dem freien Schenkel ab.
Der Endpunkt dieser Strecke ist C; verbinde C mit B.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem Winkel (gegenüber der längeren Seite)

• SsW

Zeichne die kleinere Seite (c).
Trage den gegebenen Winkel an seinem Scheitel ab (β an B; Umlaufsinn beachten!).
Zeichne einen Kreis um A mit Radius b.
Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem freien Schenkel des Winkels β ist C; verbinde C mit A.
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Fall A</u></td>
<td>Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Sei-</td>
</tr>
</table>

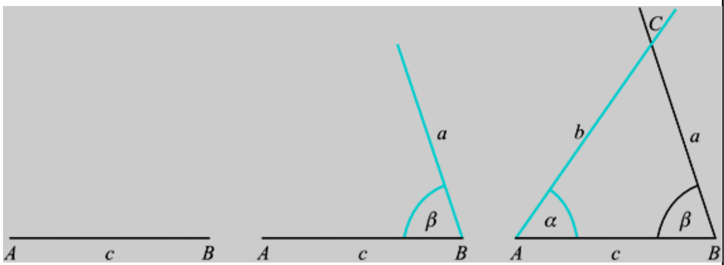


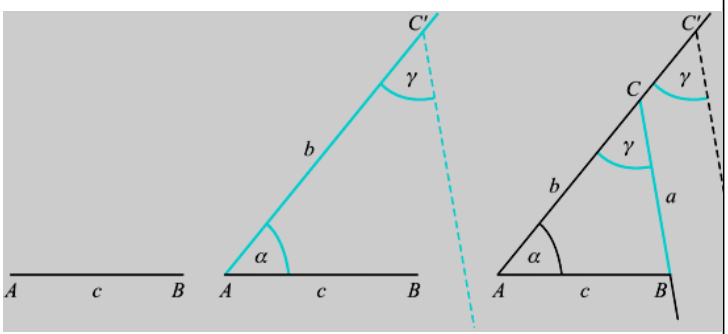
Fall B



ten und einem Winkel (gegenüber der kürzeren Seite)

- **SSW** (Diese Konstruktionsaufgabe ist nicht eindeutig lösbar)
  - Zeichne die größere Seite $c = \overline{AB}$.
  - Trage den gegebenen Winkel an seinem Scheitel ab (β an B; Umlaufsinn beachten!).
  - Zeichne einen Kreis um A mit Radius b.
  - Dieser Kreis schneidet den freien Schenkel entweder zweimal (Fall A) oder gar nicht (Fall B).





Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln

- **WSW** (anliegende Winkel)
  - Zeichne die gegebene Seite $c = \overline{AB}$.
  - Trage die gegebenen Winkel an den Endpunkten ab (Umlaufsinn beachten!).
  - Der Schnittpunkt der freien Schenkel ist C.
- **SWW**
  - Zeichne die gegebene Seite $c = \overline{AB}$.
  - Trage den gegebenen anliegenden Winkel an seinem Scheitel ab (α an A; Umlaufsinn beachten!).
  - Markiere auf dem freien Schenkel des Winkels einen Punkt (C') und trage den zweiten gegebenen Winkel (γ) an diesem Punkt ab.
  - Verschiebe den freien Schenkel des zweiten Winkels so lange parallel, bis er durch den Punkt B verläuft.

-