TD de probabilités
ENSAE
1A

Gabriel Romon

Version du 22 janvier 2018 à 18:06

1. Loi de probabilité, Espérance et Fonction de répartition

Exercice 1

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de densité donnée par

$$f(x,y) = \frac{1}{x} e^{-x} \mathbb{1}_D(x,y) \quad \text{avec } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < x\}$$

On pose $U = X$ et $V = \frac{Y}{X}$.

1. Loi marginale de X.
2. Avec la formule de changement de variables montrer que (U, V) est un couple aléatoire continu et donner sa densité.
3. Déterminer la loi de U et celle de V. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

1. Le couple (X, Y) étant continu, X et Y sont également continues, et la densité de X est donnée par

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f(x,y) d\lambda(y) = \int \frac{1}{x} e^{-x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \mathbb{1}_{(0,x)}(y) d\lambda(y) = \frac{1}{x} e^{-x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \int_0^x d\lambda(y) \\ &= e^{-x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \end{aligned}$$

Donc X suit une loi exponentielle de paramètre 1.

2. On définit $\varphi = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto (x, \frac{y}{x}) \end{cases}$

• $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, son complémentaire $\{0\} \times \mathbb{R}$ étant clairement fermé.

• φ est bijective de réciproque $\varphi^{-1} = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto (x, xy) \end{cases}$

• $\varphi_1 \colon (x,y) \mapsto x$ et $\varphi_2 \colon (x,y) \mapsto \frac{y}{x}$. Les dérivées partielles de φ_1 et φ_2 existent et sont continues donc φ est C^1 avec

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

• $\varphi_1^{-1} \colon (x,y) \mapsto x$ et $\varphi_2^{-1} \colon (x,y) \mapsto xy$. Les dérivées partielles de φ^{-1} existent et sont continues donc φ^{-1} est C^1 avec

$$\mathrm{Jac}(\varphi^{-1})(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

• $$\begin{aligned} P_{(X,Y)}(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}) = P_X(\mathbb{R} \setminus \{0\}) &= \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} e^{-x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) d\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-x} d\lambda(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Alors $(U, V) = \varphi(X, Y)$ est un vaR continu de densité donnée par

$$\begin{aligned} g(u,v) &= f(\varphi^{-1}(u,v)) \cdot |\det \mathrm{Jac}(\varphi^{-1})(u,v)| \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}}(u,v) \\ &= f(u, uv) \cdot |u| \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(u) \\ &= e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0,u)}(uv) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(u) \\ &= e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(v) \end{aligned}$$

3. En tant que marginales, U et V sont des var continus de densités

$$\begin{aligned} g_U(u) &= \int e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(v) d\lambda(v) \\ &= e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \int \mathbb{1}_{(0,1)}(v) d\lambda(v) \\ &= e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_V(v) &= \int e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(v) d\lambda(u) \\ &= \mathbb{1}_{(0,1)}(v) \int e^{-u} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) d\lambda(u) \\ &= \mathbb{1}_{(0,1)}(v) \end{aligned}$$

U suit donc la loi exponentielle de paramètre 1 et V la loi uniforme sur $(0,1)$. On remarque que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = g_U(u) g_V(v)$ donc U et V sont P-indépendants.

Exercice 2

Soient X et Y deux var continues indépendantes de loi respective $\Gamma(a,1)$ et $\Gamma(b,1)$.
Soient $S = X + Y$ et $Z = \frac{X}{X+Y}$

1. Avec la formule de changement de variables montrer que (S, Z) est un couple aléatoire continu et donner sa densité.
2. Déterminer la loi de S et celle de Z. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

1. X et Y étant des var continus indépendants, (X,Y) est un vaR continu de densité donnée par $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$.

On définit $B = \{(a,-a),\ a \in \mathbb{R}\}$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus B$, $V = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ et

$$\varphi = \begin{cases} U & \longrightarrow V \\ (x,y) & \longmapsto (x+y, \frac{x}{x+y}) \end{cases}$$

• B est fermé car il est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $(x,y) \mapsto x+y$. U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant que complémentaire de B.
• V est ouvert (cf exo précédent).
• φ est bijective de réciproque $\varphi^{-1} = \begin{cases} V & \longrightarrow U \\ (x,y) & \longmapsto (xy, x - xy) \end{cases}$
• $\varphi_1 \colon (x,y) \mapsto x+y$ et $\varphi_2 \colon (x,y) \mapsto \frac{x}{x+y}$. Les dérivées partielles de φ_1 et φ_2 existent et sont continues donc φ est C^1 avec

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{(x+y)^2} & -\frac{x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

• $\varphi_1^{-1} \colon (x,y) \mapsto xy$ et $\varphi_2^{-1} \colon (x,y) \mapsto x - xy$. Les dérivées partielles de φ^{-1} existent et sont continues donc φ^{-1} est C^1 avec

$$\mathrm{Jac}(\varphi^{-1})(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{pmatrix}$$

• $P_{(X,Y)}(U) = 1 - P_{(X,Y)}(B)$. Or $((X,Y) \in B) \subset (X \leq 0) \cup (Y \leq 0)$ donc
$P_{(X,Y)}(B) \leq P(X \leq 0) + P(Y \leq 0) = 0 + 0$. La dernière égalité vient du fait que X et Y suivent des lois hypergéométriques dont le support est $(0, \infty)$.

Donc $P_{(X,Y)}(U) = 1$.
Alors $(S,T) = \varphi(X,Y)$ est un vaR continu de densité donnée par

$$\begin{aligned} g(s,t) &= f_{(X,Y)}(st, s-st)\cdot |s| \cdot \mathbb{1}_V(st, s-st) \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(a)}(st)^{a-1}e^{-st}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(st)\right)\left(\frac{1}{\Gamma(b)}(s-st)^{b-1}e^{-(s-st)}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(s-st)\right)|s|\mathbb{1}_{R\setminus\{0\}}(st) \end{aligned}$$

Or $\begin{cases} st > 0 \\ s - st > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s > 0 \\ 1 > t > 0 \end{cases}$ d'où

$$g(s,t) = \frac{1}{\Gamma(a+b)}s^{a+b-1}e^{-s}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(s)\cdot\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(t)$$

2. En tant que marginales, S et T sont des var continues de densités

$$\begin{aligned} g_S(s) &= \int g(s,t)d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(a+b)}s^{a+b-1}e^{-s}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(s)\underbrace{\int\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(t)d\lambda(t)}_{\text{masse de la densité d'une loi } \beta(a,b)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a+b)}s^{a+b-1}e^{-s}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(s) \\ g_T(t) &= \int g(s,t)d\lambda(s) \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(t)\underbrace{\int\frac{1}{\Gamma(a+b)}s^{a+b-1}e^{-s}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(s)d\lambda(s)}_{\text{masse de la densité d'une loi } \Gamma(a+b,1)} \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(t) \end{aligned}$$

Donc S suit une loi $\Gamma(a+b,1)$ et T une loi $\beta(a,b)$. On remarque que pour tout $(s,t)\in\mathbb{R}^2$, $g(s,t) = g_S(s)g_T(t)$ donc S et T sont P-indépendants.

Exercice 3

Soit (X,Y) deux var continues, indépendantes, de loi respective $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(0,\tau^2)$.
Déterminer la loi de $Z = \frac{X}{Y}$.

La démarche est similaire à celle de l'exercice 1.
On définit $\varphi = \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ (x,y) & \longmapsto (\frac{x}{y}, y) \end{cases}$
$\varphi(X,Y)$ admet pour densité

$$\begin{aligned} g(u,v) &= f(uv,v)\cdot|v|\cdot\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}}e^{-\frac{v^2}{2}(\frac{1}{\tau^2}+\frac{u^2}{\sigma^2})}\cdot|v|\cdot\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(v) \end{aligned}$$

En tant que marginale, Z est continue et de densité donnée par

$$\begin{aligned} g_Z(u) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}}\int_0^\infty ve^{-\frac{v^2}{2}(\frac{1}{\tau^2}+\frac{u^2}{\sigma^2})}d\lambda(v) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}}\left[-\frac{2}{2\left(\frac{u^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)}e^{-\frac{v^2}{2}(\frac{1}{\tau^2}+\frac{u^2}{\sigma^2})}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\frac{\sigma}{\tau}}{u^2+\frac{\sigma^2}{\tau^2}} \end{aligned}$$

Z suit donc une loi de Cauchy de paramètre $\frac{\sigma}{\tau}$.

Exercice 4

Soit (X, Y) un couple de var de loi $P_{(X,Y)}$ admettant une densité par rapport à $N \otimes \lambda$, N étant la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$. Cette densité est donnée par

$$f(x, y) = (1-p)\frac{(py)^{x-1}}{(x-1)!}e^{-y}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

1. Soit $A \in (\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
P_X(A) = P_{(X,Y)}(A \times \mathbb{R}) &= \int \mathbb{1}_{A\times\mathbb{R}}(u)f(u)dN \otimes \lambda(u) \\
&= \int \mathbb{1}_A(x)f(x,y)d(N\otimes\lambda)(x,y) = \int \delta_{\{x\}}(A)\left(\int f(x,y)d\lambda(y)\right)dN(x) \\
&= \int \delta_{\{x\}}(A)(1-p)\frac{p^{x-1}}{(x-1)!}\Gamma(x)dN(x) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{N}^*}(1-p)p^{x-1}\delta_{\{x\}}(A)
\end{aligned}$$

Donc X suit une loi géométrique de paramètre $1-p$.
Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\int \mathbb{1}_B(y)dP_Y(y) = P_Y(B) &= P_{(X,Y)}(\mathbb{N}^* \times B) \\
&= \int \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*\times B}(x,y)f(x,y)d(N\otimes\lambda)(x,y) \\
&= \int \mathbb{1}_B(y)\left(\int f(x,y)dN(x)\right)d\lambda(y) \quad \text{Fubini positif} \\
&= \int \mathbb{1}_B(y)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)(1-p)e^{-y}e^{py}d\lambda(y) \\
&= \int \mathbb{1}_B(y)\underbrace{\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)(1-p)e^{-(1-p)y}}_{:=f_Y(y)}d\lambda(y)
\end{aligned}$$

- f_Y est dans $\mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$
- $\int f_Y(y)d\lambda(y) = 1$

Donc Y est continue et admet f_Y pour densité de probabilité. On reconnait la densité d'une loi exponentielle de paramètre $1-p$.

2. Supposons par l'absurde que X et Y sont indépendantes. On dispose alors de $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un négligeable tel que $\forall (x,y) \in M^c$, $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ ce qui équivaut à

$$\frac{y^{x-1}}{(x-1)!}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) = (1-p)e^{py}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

Or, pour $x = 1$, il existe un unique y_1 tel que $1 = (1-p)e^{py_1}$.
Par conséquent, $(\{1\} \times \{y_1\}^c) \subset M$, or
$$\begin{aligned}
N \otimes \lambda(\{1\} \times \{y_1\}^c) &= N(\{1\})\lambda(\{y_1\}^c) \\
&= 1 \cdot \infty \\
&= \infty
\end{aligned}$$
Or M est négligeable, ce qui est absurde.

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var indépendantes et de même loi uniforme sur $\{-1,1\}$ ie

$$\forall n \geq 1, P_{X_n} = \frac{1}{2}\delta_{\{-1\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{1\}}$$

On note τ la var définie par $\tau = \inf\{n \geq 1, X_n = 1\}$

1. Calculer $\tau(\Omega)$. Que pouvez-vous en déduire ?
2. Montrer que $P(\tau < \infty) = 1$.
3. Déterminer la loi de τ.

1. $\tau(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ donc τ est une var discrète.

2. $P(\tau < \infty) = P(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}(\tau = n)) = \sum_{n=1}^{\infty}(\tau = n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(X_1 = -1 \cap \ldots \cap X_{n-1} = -1 \cap X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$$

3. $P(\tau = n) = P(X_1 = -1 \cap \ldots \cap X_{n-1} = -1 \cap X_n = 1) = \frac{1}{2^n}$
donc

$$P_\tau = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\delta_{\{n\}}$$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer la loi de $Z = \frac{X+|X|}{2}$.
2. Montrer que P_Z n'est ni discrète ni continue.

1. On note que Z prend des valeurs ≥ 0. Pour $w \in \Omega$, si $X(w) \geq 0$ alors $Z(w) = X(w)$ et si $X(w) < 0$, alors $Z(w) = 0$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
P_Z(A) &= P((Z \in A) \cap (X < 0)) + P((Z \in A) \cap (X \geq 0)) \\
&= P((0 \in A) \cap (X < 0)) + P((X \in A) \cap (X \geq 0)) \\
&= \mathbb{1}_A(0)P(X < 0) + \mathbb{1}_{A^c}(0)P(\emptyset) + P((X \in A) \cap (X \geq 0)) \\
&= \frac{1}{2}\delta_{\{0\}}(A) + P_X(A \cap [0,\infty))
\end{aligned}$$

2. D'après 1., pour $a \in \mathbb{R}$,
si $a < 0$, $P_Z(\{a\}) = 0$
si $a = 0$, $P_Z(\{a\}) = \frac{1}{2}$
si $a > 0$, $P_Z(\{a\}) = 0$
L'ensemble des atomes de P_Z est donc réduit à $\{0\}$, avec $P_Z(\{0\}) = \frac{1}{2} \neq 1$, donc P_Z n'est pas discrète. De plus, P_Z charge ce singleton, donc elle n'est pas continue.

Exercice 7

Soit X une var continue de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
Soit S une var discrète de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ indépendante de X et $Y = XS$.

1. Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de X.
2. En déduire la loi de Y.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $D_S = \{-1, 1\}$ le support de S.

$$\begin{aligned}
P(Y \leq a) &= P(XS \leq a) \\
&= P((XS \leq a) \cap (S \in D_S)) + \underbrace{P((XS \leq a) \cap S \in D_S^c)}_{\leq P(S \in D_S^c) = 0} \\
&= P((X \leq a) \cap (S = 1)) + P((-X \leq a) \cap (S = -1)) \\
&= P(X \leq a)P(S = 1) + P(-X \leq a)P(S = -1) \quad \text{par indépendance} \\
&= \frac{1}{2}F_X(a) + \frac{1}{2}(1 - P(X < -a)) \\
&= \frac{1}{2}F_X(a) + \frac{1}{2}(1 - P(X \leq -a)) \quad \text{car X continue} \\
&= \frac{1}{2}F_X(a) + \frac{1}{2}(1 - F_X(-a))
\end{aligned}$$

2. En développant l'expression précédent on fait apparaitre la fonction de répartition d'une loi de Laplace de paramètre θ.
Donc Y suit une loi de Laplace de paramètre θ.

Exercice 8

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$.
Soit F la fonction de répartition associée à une mesure de probabilité μ. On pose

$$\forall u \in (0,1), F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R},\ F(t) \geq u\}$$

1. Montrer que $\{u \in (0,1),\ F^{-1}(u) \leq t\} = \{u \in (0,1),\ u \leq F(t)\}$
2. Justifier que $F^{-1}(U)$ est une var.
3. Déterminer la fonction de répartition de $F^{-1}(U)$ puis sa loi.
4. Construire une var de loi exponentielle de paramètre θ.
5. Construire une var de loi de Bernoulli de paramètre p.
6. Construire une var de loi géométrique de paramètre p.

1. • F^{-1} est bien définie : soit $u \in (0,1)$. Comme $F \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $F(t) \geq u$. D'autre part, $\{t \in \mathbb{R},\ F(t) \geq u\}$ est minoré car F tend vers 0 en $-\infty$
• Lemme : $F(F^{-1}(u)) \geq u$: en considérant t_n une suite de $\{t \in \mathbb{R},\ F(t) \geq u\}$ qui tend en décroissant vers $F^{-1}(u)$, on a $F(t_n) \geq u$ pour tout n, et la continuité à droite de F donne $F(F^{-1}(u)) \geq u$.
• On fixe $t \in \mathbb{R}$.
$\subset$: soit $u \in (0,1)$ tel que $F^{-1}(u) \leq t$. Par croissance de F et le lemme, $u \leq F(F^{-1}(u)) \leq F(t)$.
$\supset$: soit $u \in (0,1)$ tel que $u \leq F(t)$. Par définition de $F^{-1}(u)$, on a $F^{-1}(u) \leq t$.

2. Il suffit de montrer que $F^{-1} \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Il suffit encore de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\left(F^{-1}\right)^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
On a
$$\begin{aligned}\left(F^{-1}\right)^{-1}((-\infty, a]) &= \{u \in (0,1),\ F^{-1}(u) \in (-\infty, a]\} \\ &= \{u \in (0,1),\ F^{-1}(u) \leq a\} \\ &= \{u \in (0,1),\ u \leq F(a)\} \\ &= (-\infty, F(a)] \cap (0,1) \\ &\in \mathcal{B}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

3. Pour $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}P(F^{-1}(U) \leq a) &= P\left(U^{-1}\left[\left(F^{-1}\right)^{-1}((-\infty, a])\right]\right) \\ &= P\left(U^{-1}\left[(-\infty, F(a)] \cap (0,1)\right]\right) \\ &= \begin{cases} P\left(U^{-1}(\emptyset)\right) & \text{si } F(a) = 0 \\ P\left(U^{-1}((0, F(a)])\right) & \text{si } 0 < F(a) < 1 \\ P\left(U^{-1}((0,1))\right) & \text{si } F(a) = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } F(a) = 0 \\ F(a) & \text{si } 0 < F(a) < 1 \\ 1 & \text{si } F(a) = 1 \end{cases} \\ &= F(a)\end{aligned}$$

La fonction de répartition de $F^{-1}(U)$ est donc F et $F^{-1}(U)$ est en égal en loi à μ.

4. Dans ce cas, $F^{-1} : u \mapsto -\frac{\ln(1-u)}{\theta}$

5. Dans ce cas, $F^{-1} : u \mapsto \mathbb{1}_{(1-p,1]}(u)$

6. Dans ce cas, $F^{-1} : u \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\mathbb{1}_{((1-p)^n p, (1-p)^{n+1} p]}(u)$

Exercice 9

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une var sur Ω.
Pour tout $t > 0$, on note $B_t = \{w \in \Omega,\ X(w) > t\}$.
On suppose que $P(X > 0) > 0$ et pour tout $t, s > 0$, $P(B_{t+s}) = P(B_t)P(B_s)$.

1. Montrer que $\forall t > 0, P(B_t) > 0$.
2. Montrer que $P(B_1) < 1$.
3. Soit $m : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, t \mapsto \ln(P(B_t))$. Montrer que $\forall t > 0, m(t) = m(1)t$.
4. En déduire la fonction de répartition de X sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-$. Quelle est la loi de X ?

1. Supposons par l'absurde qu'il existe $t > 0$ tel que $P(B_t) = 0$. Considérons alors $A = \{t > 0/\ P(B_t) = 0\}$ et $t_0 = \inf A$. Comme $P(B_t) = 1 - F_X(t)$, $t \mapsto P(B_t)$ est continue à droite et en considérant $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui décroit vers t_0, on a $t_0 \in A$. Comme $0 < P(X > 0) = P(\cup(X > \frac{1}{n})) = \lim_n P(X > \frac{1}{n})$ on dispose de $\varepsilon_0 := \frac{1}{n_0}$ tel que $P(B_{\varepsilon_0}) > 0$. Or $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \implies B_{\varepsilon_0} \subset B_\varepsilon$, donc pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $P(B_\varepsilon) > 0$. Soit $\delta = \frac{\min(t_0, \varepsilon_0)}{2}$ alors $0 = P(B_{t_0}) = P(B_{t_0 - \delta}) \underbrace{P(B_\delta)}_{>0}$ donc $P(B_{t_0-\delta}) = 0$ avec $0 < t_0 - \delta < t_0$. Absurde.

2. Supposons $P(B_1) = 1$. Alors pour tout $t > 0$, $P(B_{t+1}|B_1) = P(B_{t+1})$, donc $P(B_{t+1}) = P(B_t)$ pour tout $t > 0$. On démontre alors par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $P(B_n) = P(B_1)$, donc $P(B_n) = 1$. Or B_n est une suite décroissante d'événements avec $\cap_n B_n = \emptyset$ (car X ne prend que des valeurs finies). Par conséquent, $0 = P(\emptyset) = P(\cap_n B_n) = \lim_n P(B_n) = 1$ ce qui est absurde.

3. L'hypothèse de départ se réécrit

$$\forall t, s > 0,\ m(t+s) = m(t) + m(s)$$

En fixant $s = 1$, on a pour tout $t > 0$, $m(t+1) = m(t) + m(1)$ et une récurrence montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m(n) = m(1)n$.
Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. On note que $m(1) = m(q\frac{1}{q})$. On montre par ailleurs par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ m(n\frac{1}{q}) = nm(\frac{1}{q}) \quad (*)$$

Donc $m(1) = m(q\frac{1}{q}) = qm(\frac{1}{q})$, et $m(\frac{1}{q}) = \frac{m(1)}{q}$.
De même $(*)$ donne

$$m(\frac{p}{q}) = m(p\frac{1}{q}) = pm(\frac{1}{q}) = m(1)\frac{p}{q}$$

Donc pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $m(r) = m(1)r$.
Comme $\forall t > 0, P(B_t) = 1 - F_X(t)$, m est continue à droite en tout point.
Soit $t > 0$. Soit t_n une suite de rationnels qui tend en décroissant vers t. On a

$$m(t) = \lim_n m(t_n) = \lim_n (m(1)t_n) = m(1) \lim t_n = m(1)t$$

Le résultat est donc prouvé.

4. Pour $t > 0$ on a donc $F_X(t) = 1 - e^{m(1)t}$. Rappelons que $m(1) = \ln(P(B_1)) < 0$. F_X est continue à droite en 0, donc

$$P(X \leq 0) = F_X(0) = \lim_n F_X(\frac{1}{n}) = 1 - \lim_n e^{\frac{m(1)}{n}} = 0$$

En particulier, si $a \leq 0$, $(X \leq a) \subset (X \leq 0)$, donc $P(X \leq a)) \leq P((X \leq 0)) = 0$ et $F_X(a) = 0$.
La fdr de X est donnée par

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{m(1)t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

qui est la fdr d'une loi exponentielle de paramètre $-m(1)$. X suit donc une loi exponentielle de paramètre $-m(1)$.

Exercice 10

Soit $T = (U_1, \ldots, U_n)$ un vaR constitué de var indépendantes et iid. On note F la fonction de répartition de U_1. Soit h et p_k les applications telles que

$$\forall t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,\ h(t) = (t_{(1)}, \ldots, t_{(n)}) \quad \text{avec } t_{(1)} \leq \ldots \leq t_{(n)}$$

$$\forall t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,\ p_k(t) = t_k$$

1. Déterminer la fonction de répartition de la var $Y = (p_k \circ h)(T)$.
2. On suppose que $S = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty,c]}(U_i)$ pour c fixé.
   (a) Etablir un lien entre $S^{-1}(\{k\})$ et $Y^{-1}((-\infty, c])$.
   (b) En déduire la loi de S.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. $P(Y \leq y) = P(\bigcup_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I| \geq k}} \bigcap_{i \in I} (U_i \leq y))$

$$= P(\bigsqcup_{j=k}^{n} \bigsqcup_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I| = j}} \bigcap_{i \in I} (U_i \leq y) \cap \bigcap_{i \in I^c} (U_i > y))$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I| = j}} P(\bigcap_{i \in I} (U_i \leq y) \cap \bigcap_{i \in I^c} (U_i > y))$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I| = j}} (F(y))^j (1 - F(y))^{n-j} \quad \text{indépendance}$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(y))^j (1 - F(y))^{n-j}$$

2. a) On a $S^{-1}(\{k\}) = ((p_k \circ h)(T) \leq c) \cap ((p_{k+1} \circ h)(T) > c)$
$\subset ((p_k \circ h)(T) \leq c)$
$= Y^{-1}((-\infty, c])$

b) Chaque indicatrice $\mathbb{1}_{(-\infty,c]}(U_i)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $F(c)$, les indicatrices sont indépendantes par composition, donc S suit une loi binomiale de paramètre $(n, F(c))$.

Exercice 11

Soit X une var de loi P_X et de fonction de répartition F_X telle que $P(X \geq 0) = 1$.

1. Avec Fubini, établir que
$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^+} (1 - F_X(t)) d\lambda(t)$$
2. On suppose que P_X est une loi discrète de support $\mathbb{N}$. Exprimer $E(X)$ en fonction de F_X dans ce cas.

1. X étant ≥ 0 Pps, $E(X)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+}(1-F_X(t))d\lambda(t) &= \int_{\mathbb{R}^+} P(X>t)d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^*_+} P(X>t)d\lambda(t)\\
&= \int \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\int \mathbb{1}_{(t,\infty)}(u)dP_X(u)d\lambda(t)\\
&= \int\int \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\mathbb{1}_{(t,\infty)}(u)dP_X(u)d\lambda(t)\\
&= \int\int \mathbb{1}_D((t,u))dP_X(u)d\lambda(t) \quad \text{où } D=\{(t,u)\in\mathbb{R}^2, 0<t<u\ \}
\end{aligned}$$

or D est l'intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, donc ouvert, donc $D\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathbb{1}_D\in\mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. D'après Fubini positif,

$$\begin{aligned}
\int\int \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\mathbb{1}_{(t,\infty)}(u)dP_X(u)d\lambda(t) &= \int\int \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\mathbb{1}_{(t,\infty)}(u)d\lambda(t)dP_X(u)\\
&= \int\int \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u)\mathbb{1}_{(0,u)}(t)d\lambda(t)dP_X(u)\\
&= \int \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u)u\ dP_X(u)\\
&= \int \mathbb{1}_{[0,\infty)}(u)u\ dP_X(u) \quad \text{car } 1_{(0,\infty)}(u)u = 1_{[0,\infty)}(u)u\\
&= \int \mathbb{1}_{[0,\infty)}(X(w))X(w)\ dP(w) \quad \text{transfert pour fonction positive}\\
&= \int X(w)\ dP(w) \quad \text{car } \mathbb{1}_{[0,\infty)}(X)=1\ P\text{-p.s}\\
&= E(X)
\end{aligned}$$

2. Dans ce cas, en notant N la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-F_X(n)) &= \int(1-F_X(n))dN(n)\\
&= \int P_X((n,\infty))dN(n)\\
&= \int\int \mathbb{1}_{(n,\infty)}(t)dP_X(t)dN(n)\\
&= \int\int \mathbb{1}_{(n,\infty)}(t)dN(n)dP_X(t)\\
&= \int\left(\int \mathbb{1}_{(-\infty,t)}(n)dN(n)\right)dP_X(t)\\
&= \sum_{t\in\mathbb{N}} P_X(\{t\}) \sum_{n<t,n\in\mathbb{N}} 1\\
&= \sum_{t\in\mathbb{N}} P_X(\{t\})t\\
&= E(X)
\end{aligned}$$

Exercice 12

Soit X une var de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, calculer l'espérance et la variance de $U=e^{tX}$.
2. Pour quelles valeurs de $a>0$, la variable $V=e^{aX^2}$ est-elle de carré intégrable ? Dans ce cas, calculer sa variance.

1. $x \mapsto e^{tx}$ est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable (car continue), positive et P_X est continue, donc :

$$\begin{aligned}\int e^{tx} dP_X(x) &= \int e^{tx} f_X(x) d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{tx} e^{-x^2/2} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{t^2/2} e^{-(x-t)^2/2} d\lambda(x) \\ &= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} d\lambda(x) \\ &= e^{t^2/2}\end{aligned}$$

Donc U admet une espérance finie donnée par $E(U) = e^{t^2/2}$.

Comme $U^2 = e^{2tX}$, un calcul similaire en remplaçant t par $2t$ montre que U admet un moment d'ordre 2 avec $E(U^2) = e^{(2t)^2/2} = e^{2t^2}$.
Donc $V(U) = e^{2t^2} - (e^{t^2/2})^2 = e^{2t^2} - e^{t^2}$.

2. Soit $a > 0$. $x \mapsto e^{ax^2}$ est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable (car continue), positive et P_X est continue, donc :

$$\begin{aligned}\int e^{ax^2} dP_X(x) &= \int e^{ax^2} f_X(x) d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ax^2} e^{-x^2/2} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2(\frac{1}{2}-a)} d\lambda(x)\end{aligned}$$

V admet une espérance si et seulement si l'intégrale précédente est finie, ie $a < \frac{1}{2}$.
Dans ce cas, $E(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2(\frac{1}{2}-a)} d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2a}}$.

Comme $V^2 = e^{2aX^2}$, en reprenant le calcul précédent avec $2a$ au lieu de a, V admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $2a < \frac{1}{2}$ ie $a < \frac{1}{4}$ et dans ce cas $E(V^2) = \frac{1}{\sqrt{1-4a}}$.
La variance de V est donnée par $\dfrac{1}{\sqrt{1-4a}} - \dfrac{1}{1-2a}$

Exercice 13

Soit Z une var continue de loi de Laplace de paramètre θ.
Soient $U = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(Z) - \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(Z)$ et $T = |Z|$.

1. Montrer que U est une var discrète de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
2. Montrer que T est une var continue de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$
3. Montrer que U et T sont indépendantes (critère utilisant les espérances).

1. $U(w) = 1$ ssi $Z(w) \geq 0$ et $U(w) = -1$ ssi $Z(w) < 0$. U est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ donc discrète. $P(U = 1) = P(Z \geq 0) = \int_0^\infty \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|} d\lambda(x) = \frac{1}{2}$. De même $P(U = -1) = \frac{1}{2}$, donc $P_U = \frac{1}{2}\delta_{\{-1\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{1\}}$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$, $P(T \leq a) = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Si } a \geq 0,\ P(T \leq a) = P(Z \in [-a, a]) &= \int_{-a}^{a} \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|} d\lambda(x) \\ &= 1 - e^{-\theta a}\end{aligned}$$

On peut aussi écrire $P(Z \in [-a, a]) = F_Z(a) - F_Z(-a) = (1 - e^{-\theta a}) \mathbb{1}_{a \in (0,\infty)}$.
La fdr de T est donc celle d'une loi exponentielle de paramètre θ, donc T suit la loi exponentielle de paramètre θ.

Autre méthode : pour h mesurable positive,

$$\begin{aligned}
E(h(T)) &= \int h(|z|) f_Z(z) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^-} h(-z) f_Z(z) dz + \int_{\mathbb{R}^+} h(z) f_Z(z) dz \\
&= \int h(z) \underbrace{(f_Z(z) + f_Z(-z)) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(z)}_{\text{densité de } T} dz
\end{aligned}$$

3. Montrons que pour tout $h, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $E(h(U)g(T)) = E(h(U))E(g(T))$.
On a $E(h(U))E(g(T)) = \left(\frac{h(1)}{2} + \frac{h(-1)}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^+} g(t)\theta e^{-\theta t} dt$
et $E(h(U)g(T)) = E(h(\text{sign}(Z))g(|Z|))$

$$\begin{aligned}
&= \int h(\text{sign}(z)) g(|z|) \frac{\theta}{2} e^{-\theta |z|} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^-} h(-1) g(-z) \frac{\theta}{2} e^{\theta z} dz + \int_{\mathbb{R}^+} h(1) g(z) \frac{\theta}{2} e^{-\theta z} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} h(-1) g(t) \frac{\theta}{2} e^{-\theta t} dt + \int_{\mathbb{R}^+} h(1) g(z) \frac{\theta}{2} e^{-\theta z} dz \\
&= \left(\frac{h(1)}{2} + \frac{h(-1)}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^+} g(t)\theta e^{-\theta t} dt
\end{aligned}$$

Exercice 14

Soit X une var de loi uniforme sur $(0, 1)$ et Y définie par $Y = \mathbb{1}_{(0,p)}(X)$ avec $p \in (0, 1)$.

1. Loi de Y.
2. Soit $Z = X + Y$. Loi de Z.
3. Montrer de deux manières que X et Y ne sont pas indépendantes.

1. Y est à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc discrète, avec $P(Y = 1) = P(X \in (0, p)) = p$.
Donc X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a \leq 0$, $P(X + Y \leq a) = 0$. Si $a \geq 0$,

$$\begin{aligned}
P(X + Y \leq a) &= P((X + 1 \leq a) \cap X \in (0, p)) + P((X \leq a) \cap X \in (p, 1)) \\
&= P(X \in (0, a - 1) \cap (0, p)) + P(X \in (0, a) \cap (p, 1)) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } a \in (0, p) \\ a - p & \text{si } a \in (p, 1) \\ a - p & \text{si } a \in (1, 1 + p) \\ 1 & \text{si } a > 1 + p \end{cases}
\end{aligned}$$

La fdr de $X + Y$ est donc celle de la loi uniforme sur $(p, 1 + p)$, donc Z suit la loi uniforme sur $(p, 1 + p)$.

3. On a $V(X + Y) = V(Z) = \frac{1}{12}$ et $V(X) + V(Y) = \frac{1}{12} + p(1 - p)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

$$\begin{aligned}
\text{Autrement, } E(XY) &= E(X\mathbb{1}_{(0,p)}(X)) \\
&= \int x\mathbb{1}_{(0,p)}(x)f_X(x)d\lambda(x) \\
&= \int_0^p xd\lambda(x) \\
&= \frac{p^2}{2}
\end{aligned}$$

et $E(X)E(Y) = \frac{1}{2}p$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

2. Espérance conditionnelle

Exercice 1

Soient X_1 et X_2 deux var indépendantes de loi binomiale de paramètre respectif (n_1, p) et (n_2, p).
Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$.
En déduire $E(X_1|X_1 + X_2)$.

• X_1 et X_2 étant des var indépendants et discrets, (X_1, X_2) est un var discret de loi

$$P_{(X_1,X_2)} = \sum_{(x,y)\in[\![0,n_1]\!]\times[\![0,n_2]\!]} \binom{n_1}{x}\binom{x_2}{y} p^{x+y}(1-p)^{n_1+n_2-(x+y)}$$

• Déterminons $P_{(X_1+X_2,X_1)}$.
⋆ Soit $\varphi : (x, y) \mapsto (x + y, x)$. φ est continue donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Donc $\varphi(X_1, X_2)$ est discret et

$$P_{(X_1+X_2,X_1)} = \sum_{(t,u)\in\varphi([\![0,n_1]\!]\times[\![0,n_2]\!])} P_{(X_1,X_2)}(\varphi^{-1}((t,u)) \cap [\![0,n_1]\!] \times [\![0,n_2]\!])$$

⋆ On a
$$\begin{aligned}\varphi([\![0,n_1]\!] \times [\![0,n_2]\!]) &= \{(t+u,t),\ t \in [\![0,n_1]\!] \text{ et } u \in [\![0,n_2]\!]\} \\ &= \{(x,y),\ y \in [\![0,n_1]\!] \text{ et } x \in [\![y, y+n_2]\!]\} \\ &= \{(x,y),\ x \in [\![0,n_1+n_2]\!] \text{ et } y \in [\![\max(0,x-n_2), \min(n_1,x)]\!]\}\end{aligned}$$
⋆ Pour $(t,u) \in \varphi([\![0,n_1]\!] \times [\![0,n_2]\!])$, on a

$$\begin{aligned}P_{(X_1,X_2)}(\varphi^{-1}((t,u)) \cap [\![0,n_1]\!] \times [\![0,n_2]\!]) &= P(\{w \in \Omega,\ \varphi(X_1(w),X_2(w)) = (t,u) \text{ et } (X_1(w),X_2(w)) \in [\![0,n_1]\!] \times [\![0,n_2]\!]\}) \\ &= P(\{w \in \Omega,\ X_1(w) = u \text{ et } X_2(w) = t-u\}) \quad \text{car } t \in [\![u, u+n_2]\!] \\ &= P((X_1 = u) \cap (X_2 = t-u)) \\ &= P(X_1 = u)P(X_2 = t-u) \\ &= \binom{n_1}{u}\binom{n_2}{t-u} p^t(1-p)^{n_1+n_2-t}\end{aligned}$$

⋆ Donc

$$P_{(X_1+X_2,X_1)} = \sum_{\substack{t\in[\![0,n_1+n_2]\!] \\ u\in[\![\max(0,t-n_2),\min(n_1,t)]\!]}} \binom{n_1}{u}\binom{n_2}{t-u} p^t(1-p)^{n_1+n_2-t}\delta_{\{(t,u)\}}$$

• Déterminons $P_{X_1+X_2}$.
Par projection,

$$\begin{aligned}P_{X_1+X_2} &= \sum_{t\in[\![0,n_1+n_2]\!]} \left(\sum_{\substack{(t,u) \\ u\in[\![\max(0,t-n_2),\min(n_1,t)]\!]}} P_{(X_1+X_2,X_1)}(\{(t,u)\}) \right) \delta_{\{t\}} \\ &= \sum_{t\in[\![0,n_1+n_2]\!]} \left(\sum_{u\in[\![\max(0,t-n_2),\min(n_1,t)]\!]} \binom{n_1}{u}\binom{n_2}{t-u} p^t(1-p)^{n_1+n_2-t} \right) \delta_{\{t\}} \\ &= \sum_{t\in[\![0,n_1+n_2]\!]} \binom{n_1+n_2}{t} p^t(1-p)^{n_1+n_2-t}\delta_{\{t\}}\end{aligned}$$

• Déterminons la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Ces deux vaR sont discrets.
⋆ pour $t \in [\![0, n_1 + n_2]\!]$,
$$\begin{aligned}\mathcal{U}_t &= \{u,\ P_{(X_1+X_2,X_1)}(t,u) > 0\} \\ &= [\![\max(0,t-n_2), \min(n_1,t)]\!]\end{aligned}$$
De sorte que

$$P_{X_1}^{X_1+X_2=t} = \sum_{u\in\mathcal{U}_t} \frac{\binom{n_1}{u}\binom{n_2}{t-u}p^t(1-p)^{n_1+n_2-t}}{\binom{n_1+n_2}{t}p^t(1-p)^{n_1+n_2-t}}\delta_{\{u\}} = \sum_{u\in\mathcal{U}_t} \frac{\binom{n_1}{u}\binom{n_2}{t-u}}{\binom{n_1+n_2}{t}}\delta_{\{u\}}$$

$\star$ pour $t \notin [\![0, n_1 + n_2]\!]$ on pose $P_{X_1}^{X_1+X_2=t} = P_{X_1}$.

• Déterminons $E(X_1|X_1 + X_2)$.
Posons $h : (t, u) \mapsto u$. h est continue donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Alors $h(X_1+X_2, X_1) \in \mathcal{M}^+(B(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= \int h(t,u) dP_{X_1}^{X_1+X_2=t}(u) \\
&= \begin{cases} \sum_{u \in \mathcal{U}_t} u \frac{\binom{n_1}{u}\binom{n_2}{t-u}}{\binom{n_1+n_2}{t}} & \text{si } t \in [\![0, n_1+n_2]\!] \\ \sum_{u \in [\![0,n_1]\!]} u \binom{n_1}{u} p^u (1-p)^{n_1-u} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{tn_1}{n_1+n_2} & \text{si } t \in [\![0, n_1+n_2]\!] \\ n_1 p & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
E(X_1|X_1+X_2) &= \frac{n_1}{n_1+n_2}(X_1+X_2)\mathbb{1}_{[\![0,n_1+n_2]\!]}(X_1+X_2) + n_1 p \underbrace{\mathbb{1}_{[\![0,n_1+n_2]\!]^c}(X_1+X_2)}_{=0 \ P\text{-p.s}} \\
&= \frac{n_1}{n_1+n_2}(X_1+X_2) \quad P\text{-p.s}
\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de densité

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}(y+x)} \mathbb{1}_{(\mathbb{R}_+^*)^2}(x,y)$$

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X.
2. Déterminer $E(Y|X)$.

1. (X, Y) étant continu, X est continu de densité $f_X(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}(y+x)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) d\lambda(y)$ Le support de

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

X est $(0, \infty)$.
$\star$ Pour $x \in (0, \infty)$, $P_Y^{X=x}$ est une loi continue de densité

$$y \mapsto \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}y}$$

ie une loi exponentielle de paramètre $\frac{x}{2}$.
$\star$ Pour $x \leq 0$, on pose $P_Y^{X=x} = P_Y$.

2. Posons $h : (x, y) \mapsto y$. h est continue donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. D'après la forme de la densité f, Y est ≥ 0 P-p.s, de sorte que $h(X, Y) \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \Psi(x) &= \begin{cases} \int y \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}y} d\lambda(y) & \text{si } x > 0 \\ \int y f_Y(y) d\lambda(y) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x > 0 \\ \int y f_Y(y) d\lambda(y) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $P(X > 0) = 1$,

$$E(Y|X) = \frac{2}{X} \quad P\text{-p.s}$$

Exercice 3

Soit (X,Y) un couple aléatoire continu de densité $f(x,y)=e^{-y}\mathbb{1}_D(x,y)$ avec $D=\{(x,y),\ 0<x<y\}$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant Y.
2. Soit $h\in\mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déterminer $E(h(\frac{X}{Y})|Y)$.
3. Sans calculer la loi de $(\frac{X}{Y},Y)$, montrer que $\frac{X}{Y}$ et Y sont indépendantes.

1. (X,Y) étant continu, Y est continu de densité
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int e^{-y}\mathbb{1}_D(x,y)d\lambda(x)\\ &= \int e^{-y}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)\mathbb{1}_{(0,y)}(x)d\lambda(x)\\ &= ye^{-y}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)\end{aligned}$$
Le support de Y est $(0,\infty)$.
⋆ Pour $y>0$, $P_X^{Y=y}$ est une loi continue de densité $x\mapsto \frac{1}{y}\mathbb{1}_{(0,y)}(x)$.
⋆ Pour $y\leq 0$, on pose $P_X^{Y=y}=P_X$.

2. Soit $h\in\mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Posons $g:(x,y)\mapsto h(\frac{x}{y})$. g est mesurable positive.
$$\begin{aligned}\text{On a } \Psi(y) &= \begin{cases}\int h(\frac{x}{y})\frac{1}{y}\mathbb{1}_{(0,y)}(x)d\lambda(x) & \text{si } y>0\\ \int h(\frac{x}{y})dP_X(x) & \text{sinon}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\int h(u)\mathbb{1}_{(0,1)}(u)d\lambda(u) & \text{si } y>0\\ \int h(\frac{x}{y})dP_X(x) & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$
Comme $P(Y>0)=1$,
$$E(h(\frac{X}{Y})|Y)=\int h(u)\mathbb{1}_{(0,1)}(u)d\lambda(u)\quad P\text{-p.s}$$

3. On fait appel au critère des espérances. Soient $g,h\in\mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
$$\begin{aligned} E\left[g(Y)h(\frac{X}{Y})\right] &= E\left[E\left(g(Y)h(\frac{X}{Y})\middle|Y\right)\right]\\ &= E\left[g(Y)E\left(h(\frac{X}{Y})\middle|Y\right)\right] \quad \text{car } g(Y)\in\mathcal{M}(\sigma(Y),\mathcal{B}(\mathbb{R}))\\ &= E\left[g(Y)\int\dots\right] \quad \text{d'après 2.}\\ &= \left(\int\dots\right)E\left(g(Y)\right) \quad \text{l'intégrale est une constante}\\ &= E\left(\int\dots\right)E\left(g(Y)\right) \quad \text{l'intégrale est une constante}\\ &= E\left[E\left(h(\frac{X}{Y})\middle|Y\right)\right]E\left(g(Y)\right) \quad \text{d'après 2.}\\ &= E\left(h(\frac{X}{Y})\right)E\left(g(Y)\right)\end{aligned}$$
Donc $\frac{X}{Y}$ et Y sont indépendantes.

Exercice 4

Soit (X,Y) un couple aléatoire continu de densité

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}-xy+y^2)}$$

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X.
2. Montrer que $Y-\frac{X}{2}$ est indépendant de X et préciser sa loi.

1. (X,Y) étant continu, X est continu de densité
$$f_X(x)=\frac{1}{4\pi}\int e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{x}{2})^2}e^{-\frac{x^2}{8}}d\lambda(y) = \frac{e^{-x^2/8}\sqrt{2\pi}}{4\pi}$$

Le support de X est $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P_Y^{X=x}$ est une loi continue de densité

$$y\mapsto \frac{\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}-xy+y^2)}}{\frac{e^{-x^2/8}\sqrt{2\pi}}{4\pi}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{x}{2})^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

qui est la densité d'une loi normale de paramètres $(\frac{x}{2},1)$.

2. Soit $h\in\mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Posons $\varphi:(x,y)\mapsto h(y-\frac{x}{2})$. φ étant mesurable positive, on a pour $x\in\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\Psi(x)&=\int\varphi(x,y)dP_Y^{X=x}(y)\\ &=\int h(y-\frac{x}{2})\frac{e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{x}{2})^2}}{\sqrt{2\pi}}d\lambda(y)\\ &=\int h(y)\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}}d\lambda(y)\\ &=C_h\end{aligned}$$
De sorte que $E\left(h(Y-\frac{X}{2})\middle|X\right)=C_h\quad P$-p.s

Soit $g\in\mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On a
$$\begin{aligned}E\left[g(X)h(Y-\frac{X}{2})\right]&=E\left[E\left(g(X)h(Y-\frac{X}{2})\middle|X\right)\right]\\ &=E\left[g(X)E\left(h(Y-\frac{X}{2})\middle|X\right)\right]\\ &=E[g(X)C_h]\\ &=C_hE[g(X)]\\ &=E(C_h)E[g(X)]\\ &=E\left[E\left(h(Y-\frac{X}{2})\middle|X\right)\right]E[g(X)]\\ &=E\left(h(Y-\frac{X}{2})\right)E(g(X))\end{aligned}$$
Donc X et $Y-\frac{X}{2}$ sont indépendants.

Par ailleurs,
$$\begin{aligned}\int h(u)dP_{Y-\frac{X}{2}}(u)=E(h(Y-\frac{X}{2}))&=E\left[E\left(h(Y-\frac{X}{2})\middle|X\right)\right]\\ &=E(C_h)\\ &=C_h\\ &=\int h(y)\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}}d\lambda(y)\end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout h, $Y-\frac{X}{2}$ admet une densité par rapport à λ donnée par $y\mapsto\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}}$.

Donc $Y - \frac{X}{2}$ suit la loi normale de paramètres $(0, 1)$.

Exercice 5

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de loi $P_{(X,Y)}$ admettant une densité par rapport à $N \otimes \lambda$, N étant la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Cette densité est donnée par

$$f(x, y) = \frac{y^{p+x-1}}{x!} \frac{\theta^p}{(p-1)!} e^{-(\theta+1)y} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\theta > 0$.

1. Calculer P_X.
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X.
3. Calculer $E(Y|X)$.

1. X est la marginale d'un couple à densité, de sorte que

$$f_X(x) = \int f(x, y) d\lambda(y) = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x) \binom{p+x-1}{x} \frac{\theta^p}{(\theta+1)^{p+x}}$$

Alors $P_X(\{x\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x\}}(k) f_X(k)$. X est donc discrète, de support $\mathbb{N}$, de loi

$$P_X = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_X(k) \delta_{\{k\}}$$

2. On a pour $(A, B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^2$,

$$P_{(X,Y)}(A, B) = P_{(X,Y)}(A \cap \mathbb{N}, B) + P_{(X,Y)}(A \cap \mathbb{N}^c, B)$$

Avec

$$\begin{aligned} P_{(X,Y)}(A \cap \mathbb{N}, B) &= \int_{A \cap \mathbb{N}} f_X(x) \left(\frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} \int_{B \cap \mathbb{R}_+^*} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} d\lambda(y) \right) dN(x) \\ &= \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x) \frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} \int_{B \cap \mathbb{R}_+^*} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} d\lambda(y) \, dP_X(x) \end{aligned}$$

$P_{(X,Y)}(A \cap \mathbb{N}^c, B) \leq P_{(X,Y)}(\mathbb{N}^c, \mathbb{R}) = P_X(\mathbb{N}^c) = 0$, donc

$$P_{(X,Y)}(A, B) = \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x) \frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} \int_{B \cap \mathbb{R}_+^*} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} d\lambda(y) \, dP_X(x)$$

$$\begin{aligned} \text{On pose donc } N(x, B) &= \begin{cases} \frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} \int_{B \cap \mathbb{R}_+^*} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} d\lambda(y) & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ P_y(B) & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_B \frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y) d\lambda(y) & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ P_y(B) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{N}$, $N(x, \cdot)$ admet une densité par rapport à λ donnée par

$$\frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)$$

On reconnait la densité d'une loi $\Gamma(p+x, \theta+1)$.

3. Posons $h : (x, y) \mapsto y$. h est continue donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. D'après la forme de la densité f, Y est ≥ 0 P-p.s, de sorte que $h(X, Y) \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Donc $\Psi(x) = \begin{cases} \int y \frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y) d\lambda(y) & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ \int y dP_y(y) & \text{sinon} \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{p+x}{\theta+1} & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ \int y dP_y(y) & \text{sinon} \end{cases}$

Comme $P(X \in \mathbb{N}) = 1$,

$$E(Y|X) = \frac{p+X}{\theta+1}$$

Exercice 6

Soient U une var de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et X une variable positive P-p.s, indépendante de U. Calculer $E(\inf(X,U)|X)$.

Comme X et U sont indépendants, la loi conditionnelle de U sachant X est simplement $P_U^{X=x} = P_U$.
Par ailleurs, $\inf(X,U) = X\mathbb{1}_{X \leq U} + U\mathbb{1}_{U<X}$, de sorte que

$$\begin{aligned} E(\inf(X,U)|X) &= E(X\mathbb{1}_{X\leq U} + U\mathbb{1}_{U<X}|X) \\ &= E(X\mathbb{1}_{X\leq U}|X) + E(U\mathbb{1}_{U<X}|X) \\ &= XE(\mathbb{1}_{X\leq U}|X) + E(U\mathbb{1}_{U<X}|X) \end{aligned}$$

$(x,u) \mapsto \mathbb{1}_{x\leq u}$ est mesurable positive (il s'agit de $(x,u) \mapsto \mathbb{1}_D(x,u)$ avec $D = \{(x,u),\ u \geq x\}$ qui est fermé donc borélien), et $(x,u) \mapsto u\mathbb{1}_{u<x}$ est mesurable comme produit de $(x,u) \mapsto u$ et $(x,u) \mapsto \mathbb{1}_D(x,u)$ où $D = \{(x,u),\ x > u\}$ qui est ouvert donc borélien). De plus, U est ≥ 0 P-p.s, donc $U\mathbb{1}_{U<X} \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. En calculant les deux intégrales correspondantes (en passant par la densité de U),

$$E(\mathbb{1}_{X\leq U}|X) = 1_{\mathbb{R}_-^*}(X) + 1_{\mathbb{R}_+}(X)e^{-\lambda X}$$

et

$$E(U\mathbb{1}_{U<X}|X) = 1_{\mathbb{R}_+}(X)\left(-Xe^{-\lambda X} + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda X}}{\lambda}\right)$$

Comme $X \geq 0$ P-p.s, $E(\mathbb{1}_{X\leq U}|X) = e^{-\lambda X}$ et

$$E(U\mathbb{1}_{U<X}|X) = -Xe^{-\lambda X} + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda X}}{\lambda}$$

Finalement,

$$E(\inf(X,U)|X) = \frac{1-e^{-\lambda X}}{\lambda}$$

Exercice 7

Soit N une var discrète de loi P_N de support $[\![0,n]\!]$ donnée par

$$P_N = \sum_{k\in[\![0,n]\!]} \alpha_k \delta_{\{k\}}$$

Soit (X_n) une suite de var indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0,1)$.
On suppose que N et les X_n sont indépendants.
Soit S la var définie par $S = \sum_{k=0}^{N} X_k$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de S sachant N.
2. Calculer $E(S|N)$ et $E(S^2|N)$. En déduire $E(S)$ et $E(S^2)$ en fonction de $E(N)$ et $E(N^2)$.
3. Déterminer la loi de (N,S).
4. Soit $q \in (0,1)$. Déterminer la loi de N pour que la loi conditionnelle de N sachant $S=0$ soit la loi binomiale de paramètre (n,q)

1. • $X_0, \dots, X_n, N$ étant discrets et indépendants, $(X_0, \dots, X_n, N)$ est un vaR discret. Par ailleurs, $S = \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \le N} X_k$. Or $\varphi : (x_0, \dots, x_n, m) \mapsto (p, \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \le m} x_k)$ est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+2}), \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$-mesurable, de sorte que (N, S) est un var discret, de support $[\![0,n]\!] \times \varphi(\{0,1\}^{n+1} \times [\![0,n]\!]) = [\![0,n]\!] \times [\![0,n+1]\!]$.

• Déterminons, pour $(m,s) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,n+1]\!]$, $P_{(N,S)}(\{(m,s)\}) = P((N=m) \cap (S=s))$

$$= P((N=m) \cap \left(\sum_{k=0}^m X_k = s\right))$$

Or à m fixé, $X_1, \dots X_m, N$ sont indépendantes, et d'après le lemme des coalitions, $\sum_{k=1}^m X_k$ et N sont indépendantes, de sorte que

$$\begin{aligned}
P_{(N,S)}(\{(m,s)\}) &= P((N=m) \cap \left(\sum_{k=0}^m X_k = s\right)) \\
&= P(N=m)P(\underbrace{\sum_{k=0}^m X_k}_{\text{suit une loi } \mathcal{B}(m+1,p)} = s) \\
&= \alpha_m \binom{m+1}{s} p^s (1-p)^{m+1-s}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P_{(N,S)} = \sum_{(m,s) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,n+1]\!]} \alpha_m \binom{m+1}{s} p^s (1-p)^{m+1-s} \delta_{\{(m,s)\}}$$

• Déterminons la loi conditionnelle de S sachant N. N et S sont discrets.
On a pour $m \in [\![0,n]\!]$, $U_m = \{s \in \mathbb{R},\ P_{(N,S)}(\{(m,s)\} > 0)\}$
$= [\![0, m+1]\!]$

⋆ Pour $m \in [\![0,n]\!]$, $P_S^{N=m} = \sum_{s \in U_m} \frac{P_{(N,S)}(\{(m,s)\}}{P_N(\{m\})} \delta_{\{s\}}$

$$= \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m+1}{s} p^s (1-p)^{m+1-s} \delta_{\{s\}}$$

⋆ Pour $m \notin [\![0,n]\!]$, on pose $P_S^{N=m} = P_S$.

2. S est un var positif, donc $E(S|N)$ est bien défini et vaut

$$\begin{aligned}
E(S|N) &= E(\sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \le N} X_k | N) \\
&= \sum_{k=0}^n E(\mathbb{1}_{k \le N} X_k | N) \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \le N} E(X_k | N) \quad \text{car } 1_{k \le N} \in \mathcal{M}(\sigma(N), \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \le N} E(X_k) \quad \text{par indépendance} \\
&= p \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \le N} \\
&= p(N+1)
\end{aligned}$$

On a $S^2 = (\mathbb{1}_{[\![0,n]\!]}(N) + \underbrace{\mathbb{1}_{[\![0,n]\!]^c}(N)}_{=0P\text{-p.s.}})S^2 = \mathbb{1}_{[\![0,n]\!]}(N)S^2$

$$= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{j\}}(N) \left(\sum_{k=0}^{j} X_k \right)^2$$

De sorte que

$$E(S^2|N) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{j\}}(N) E\left[\left(\sum_{k=0}^{j} X_k \right)^2 \right]$$

Or à j fixé, $Y_j := \sum_{k=0}^{j} X_k$ suit une loi binomiale de paramètres $(j+1, p)$, de sorte que

$$E\left[\left(\sum_{k=0}^{j} X_k \right)^2 \right] = V(Y_j) + E(Y_j)^2 = (j+1)p(1-p) + (j+1)^2p^2 = p(j+1)(jp+1)$$

D'où $E(S^2|N) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{j\}}(N)p(j+1)(jp+1) = p(N+1)(pN+1) = p(pN^2 + (p+1)N + 1)$

Par conséquent, $E(S) = p(E(N)+1)$ et $E(S^2) = p(pE(N^2) + (p+1)E(N) + 1)$

3. cf 1.

4. Avec des calculs similaires à 1, $P_N^{S=0} = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m \delta_{\{m\}} = P_N$. $P_N^{S=0}$ suit $\mathcal{B}(n,q)$ si et seulement si $P_N = \mathcal{B}(n,q)$.

Exercice 8

Soit (X_n) une suite de va intégrables, indépendantes et de même loi. Pour tout $n \geq 1$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, calculer $E(S_n|X_i)$.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $P_{(X_1,S_n)} = P_{(X_k,S_n)}$
3. En déduire que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $E(X_1|S_n) = E(X_k|S_n)$.
4. Calculer $E(S_n|S_n)$. En déduire $E(X_1|S_n)$.

1. On montre facilement que S_n est intégrable, donc $E(S_n|X_i)$ existe. On a
$$\begin{aligned} E(S_n|X_i) &= E\left(\sum_{k=1}^n X_k \middle| X_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^n E(X_k|X_i) \\ &= E(X_i|X_i) + \sum_{k\neq i} E(X_k|X_i) \\ &= X_i + (n-1)E(X_1) \end{aligned}$$

2. Par indépendance de $X_1, \ldots, X_n$, $P_{(X_1,\ldots,X_n)} = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n}$. Comme les variables sont identiquement distribuées, $P_{X_1} = P_{X_2}$, de sorte que

$$\begin{aligned} P_{(X_1,\ldots,X_n)} &= P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n} \\ &= P_{X_2} \otimes P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n} \\ &= P_{(X_2,X_1\ldots,X_n)} \end{aligned}$$

Considérons $\varphi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \sum_{k=1}^n x_k)$. φ est continue, donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$-mesurable. L'égalité en loi est préservée : $P_{\varphi(X_1,\ldots,X_n)} = P_{\varphi(X_2,\ldots,X_n)}$ ie

$$P_{(X_1,S_n)} = P_{(X_2,S_n)}$$

On procède de même avec $k > 2$.

3. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Considérons $C \in \sigma(S_n)$. On dispose de $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $C = S_n^{-1}(B)$. Alors

$$\begin{aligned} E(\mathbb{1}_C E(X_1|S_n)) = E(\mathbb{1}_C X_1) &= E(\mathbb{1}_B(S_n)X_1) \\ &= \int x 1_B(s) dP_{(X_1,S_n)}(x, s) \quad \text{transfert justifié par} \\ &\int |X_1(w)| 1_B(S_n(w)) dP(w) \leq \int |X_1(w)| dP(w) < \infty \\ &= \int x 1_B(s) dP_{(X_k,S_n)}(x, s) \\ &= E(\mathbb{1}_C X_k) \\ &= E(\mathbb{1}_C E(X_k|S_n)) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $C \in \sigma(S_n)$, on a $E(X_1|S_n) = E(X_k|S_n)$

4. On a par linéarité
$$\begin{aligned} E(S_n|S_n) &= \sum_{k=1}^n E(X_k|S_n) \\ &= nE(X_1|S_n) \quad \text{par 3.} \end{aligned}$$
Or $S_n \in \mathcal{M}(\sigma(S_n), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donc $E(S_n|S_n) = S_n$. En conclusion :

$$E(X_1|S_n) = \frac{S_n}{n}$$

3. Fonction caractéristique

Exercice 1

Déterminer la fonction caractéristique des lois suivantes

1. Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.
2. Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
3. Loi géométrique de paramètre $p \in (0,1)$.
4. Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
5. Loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
6. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n var discrètes, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0,1)$. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Dans chaque cas on applique le théorème de transfert, ce qui est licite car $x \mapsto e^{itx}$ est bornée.

1. $\phi_X(t) = e^{it\cdot 1}p + e^{it\cdot 0}(1-p) = 1-p+pe^{it}$

2. $\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda+\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

3. $\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk}(1-p)^{k-1}p = pe^{it}\sum_{k=0}^{\infty}((1-p)e^{it})^k = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$

4. $$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^{it})^k(1-p)^{n-k}$$
$$= (1-p+pe^{it})^n$$

5. $$\phi_X(t) = \int e^{itx}\theta e^{-\theta x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)d\lambda(x) = \int_{(0,\infty)}\theta e^{x(-\theta+it)}d\lambda(x)$$
$$= \frac{\theta}{\theta - it}$$

6. $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes et de même loi,
$$\phi_{S_n}(t) = (\phi_{X_1}(t))^n = (1-p+pe^{it})^n$$

Exercice 2

On admet que la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{C}(1)$ est $\forall t,\ \phi(t) = e^{-|t|}$.
Soient $X_1, \ldots, X_n$ n var continues, indépendantes, et de même loi $\mathcal{C}(1)$.

1. Calculer la fonction caractéristique de $X_1 + X_2$ et celle de $2X_1$. Que constatez-vous ?
2. Soient ϕ_U et ϕ_V les fonctions caractéristiques respectives de deux var U et V qui vérifient $\phi_{U+V} = \phi_U\phi_V$. Cela implique-t-il que U et V sont indépendantes ?
3. Calculer la loi de $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

1. Par indépendance, $\phi_{X_1+X_2}(t) = (\phi_{X_1}(t))^2 = e^{-2|t|}$. Par ailleurs,
$$\phi_{2X_1}(t) = E(e^{it2X_1}) = \phi_{X_1}(2t) = e^{-2|t|}$$
Par injectivité, $2X_1 \sim X_1 + X_2$.

2. Non. On a $\phi_{X_1+X_1} = \phi(X_1)^2$, pourtant X_1 n'est pas indépendant de X_1. Sinon,
$$P(X_1 \geq 0) = P((X_1 \geq 0) \cap (X_1 \geq 0)) = P(X_1 \geq 0)^2$$
donc $P(X_1 \geq 0) \in \{0,1\}$, or $P(X_1 \geq 0) = \frac{1}{2}$, absurde.

3. $$\phi_{\overline{X}_n}(t) = E(e^{it\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}) = E(\prod_{k=1}^n e^{i\frac{t}{n}X_i}) = \prod_{k=1}^n E(e^{i\frac{t}{n}X_i}) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_i}(\frac{t}{n})$$
$$= (\phi_{X_1}(\frac{t}{n}))^n = e^{-|t|}$$

Par injectivité, $\overline{X}_n$ suit $\mathcal{C}(1)$.

Exercice 3

Soit X une var ayant une fonction caractéristique du type $\phi(t) = e^{At^2+Bt+C}$ avec $A, B, C \in \mathbb{C}^3$.
Montrer que X suit une loi normale et en déterminer les paramètres.

ϕ étant une fonction caractéristique, $\phi(0) = 1$, donc $e^C = 1$, de sorte que $\phi(t) = e^{At^2+Bt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Lemme : Si $z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
En effet,

$$\begin{aligned}\overline{e^z} &= \overline{\exp(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)} = \overline{\exp(\operatorname{Re} z)\exp(i \operatorname{Im} z)} = \exp(\operatorname{Re} z)\exp(-i \operatorname{Im} z) \\ &= e^{\overline{z}}\end{aligned}$$

ϕ étant une fonction caractéristique, $\overline{\phi(t)} = \phi(-t)$ ie $e^{\overline{A}t^2+\overline{B}t} = e^{At^2-Bt}$ soit encore $e^{(A-\overline{A})t^2} = e^{(B+\overline{B})t}$ ie $e^{2i \operatorname{Im} At^2} = e^{2 \operatorname{Re} Bt} \quad (*)$.
Le membre de droite est réel, de sorte que pour t,

$$\operatorname{Im} e^{2i \operatorname{Im} At^2} = 0$$

donc $\sin(2 \operatorname{Im} At^2) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Donc $\operatorname{Im} A = 0$. $(*)$ devient $e^{2 \operatorname{Re} Bt} = 1$ pout tout $t \in \mathbb{R}$, donc $\operatorname{Re} B = 0$.

Donc $\phi(t) = e^{\operatorname{Re} At^2 + i \operatorname{Im} Bt}$. Comme ϕ est une fonction caractéristique, $|\phi| \leq 1$, donc $\operatorname{Re} A \leq 0$.

- Si $\operatorname{Re} A = 0$, $\phi(t) = e^{i \operatorname{Im} Bt}$. Par injectivité, X est constante presque-sûrement (égale à $\operatorname{Im} B$).
- Si $\operatorname{Re} A < 0$, $\phi(t) = e^{i \operatorname{Im} Bt - t^2 \frac{(\sqrt{-2 \operatorname{Re} A})^2}{2}}$

Par injectivité, X suit la loi normale de paramètre $(\operatorname{Im} B, -2 \operatorname{Re} A)$

Culture : Si $e^{P(t)}$ est une fonction caractéristique (où P est un polynôme), alors $\deg P \leq 2$. (théorème de Marcinkiewicz 1933)

Exercice 4

Soit X une var continue de loi de Laplace de paramètre 1.

1. Montrer que X a des moments à tout ordre. Calculer $E(X^{2n+1})$ et $E(X^{2n})$.
2. Montrer que la fonction caractéristique de X est donnée par $\phi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
3. En déduire que $\forall t \in (-1, 1),\ \phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$.
4. On admet que $\phi^{(k)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n t^{2n}\right]^{(k)}$. Déterminer $\phi^{(2n)}(0)$. En déduire $E(X^{2n})$.

1. La densité de X par rapport à λ est donnée par $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |x|^n dP_X(x) = \int |x|^n f_X(x) d\lambda(x) = \frac{1}{2} \int |x|^n e^{-|x|} d\lambda(x) < \infty$$

par un argument asymtotique. Donc $E(|X|^n) < \infty$ et X admet des moments à tout ordre.
Par ailleurs, $E(X^{2n+1}) = \frac{1}{2} \int \underbrace{x^{2n+1} e^{-|x|}}_{\text{impaire}} d\lambda(x) = 0$ et

$$E(X^{2n}) = \frac{1}{2} \int x^{2n} e^{-|x|} d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^+} x^{2n} e^{-x} d\lambda(x) = \Gamma(2n+1) = (2n)!$$

2. La fonction caractéristique de X est donnée par

$$\begin{aligned}\phi(t) = E(e^{itX}) &= \int e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}d\lambda(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^-} e^{itx}e^{x}d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}^+} e^{itx}e^{-x}d\lambda(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^-} e^{x(1+it)}d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}^+} e^{x(-1+it)}d\lambda(x)\right) \\ &= \frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

3. En développant en série entière le résultat obtenu, on a pour $t \in (-1,1)$,

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$

4. On a $\phi^{(k)}(t) = \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k 2k(2k-1)\dots(2k-(2n-1))t^{2k-2n}$
donc $\phi^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$. D'après le cours, $\phi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$, donc

$$E(X^{2n}) = (2n)!$$

Exercice 5

Soit (X_n) une suite de var indépendantes et de même loi μ symétrique. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi μ.

1. Montrer que ϕ la fonction caractéristique associée à μ est paire et réelle.
2. Trouver une relation de récurrence sur ϕ.
3. Montrer par l'absurde que $\forall t \in \mathbb{R},\ \phi(t) > 0$.
4. On pose $\forall t \in \mathbb{R},\ p(t) = \ln(\phi(t))$.
   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{N},\ p(t) = tp(1)$.
   (b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{Q}^+,\ p(t) = tp(1)$.
   (c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ p(t) = tp(1)$.
   (d) En déduire $p(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (e) Montrer que $p(1) \leq 0$.
   (f) En déduire ϕ et μ.

1. μ étant symétrique, $P_{X_1} = P_{-X_1}$, donc d'après le cours, ϕ est paire et réelle.

2. Pour $n \geq 1$, $\overline{X}_n$ et X_1 ont même loi, donc même fonction caractéristique, de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{\overline{X}_n}(t) = \phi(t)$ donc $E(\prod_{i=1}^{n} e^{i\frac{t}{n}X_i}) = \phi(t)$ et par indépendance, $\phi(\frac{t}{n})^n = \phi(t)$.

3. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(t_0) = 0$. Alors pour tout $n \geq 1$, $0 = \phi(t_0) = \phi(\frac{t_0}{n})^n$ donc $\phi(\frac{t_0}{n}) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Or $\lim_n \frac{t_0}{n} = 0$ et ϕ est continue en 0 avec $\phi(0) = 1$. Donc $0 = \lim_n \phi(\frac{t_0}{n}) = \phi(0) = 1$. Absurde.

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, et ne s'annule pas, donc garde un signe constant. Or $\phi(0) = 1$. Donc $\phi > 0$.

4. a) L'égalité de 2. se réécrit $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, \phi(t)^n = \phi(nt)$ et en passant au log ($\phi > 0$ par 3.), on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0,\ p(nt) = np(t) \quad (*)$$

Avec $t = 1$ on a bien $p(n) = np(1)$ pour tout $n \geq 0$.

b) • Pour $b \in \mathbb{N}^*$, avec $t = \frac{1}{b}$ dans $(*)$, on a $p(1) = p(b \cdot \frac{1}{b}) = bp(\frac{1}{b})$, de sorte que

$$p(\frac{1}{b}) = \frac{p(1)}{b}$$

• Pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, $p(\frac{a}{b}) = p(a \cdot \frac{1}{b}) = ap(\frac{1}{b}) = a\frac{p(1)}{b} = \frac{a}{b}p(1)$
Donc pour tout $t \in \mathbb{Q}^+$, $p(t) = tp(1)$.

c) ϕ et ln étant continus, p est continue sur $\mathbb{R}$. On étend l'égalité précédente à $\mathbb{R}^+$ par densité des rationnels.

d) Par parité, on a pour tout $t \leq 0$, $p(t) = p(-t) = (-t)p(1) = |t|p(1)$, donc $p(t) = |t|p(1)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

e) On a $0 < \phi(t) \leq |\phi(t)| \leq 1$, donc $p(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $p(1) \leq 0$.

f) Si $p(1) = 0$, pour tout t, $\phi(t) = 1 = E(e^{it0})$ et par injectivité, X est presque sûrement constante, égale à 0.
Si $p(1) < 0$, pour tout t, $\phi(t) = e^{-|t|(-p(1))}$ donc μ est la loi de Cauchy de paramètre $-p(1)$.

Exercice 6

Soient X et Y des var indépendantes, de même loi, de carré intégrable et telles que $E(X) = 0$, $V(X) = 1$. On note ϕ la fonction caractéristique de X.

1. On suppose que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et X ont même loi.
   (a) Calculer $\phi'(0)$, $\phi''(0)$ et montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \phi\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$
   (b) En déduire une relation de récurrence satisfaite par ϕ puis donner la loi de X.
2. On suppose que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
   (a) Calculer les fonctions caractéristiques de $X + Y$, $X - Y$ et $2X$.
   (b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R},\ \phi(2t)\phi(-2t) = [\phi(t)\phi(-t)]^4$ puis une relation de récurrence sur ϕ.
   (c) Montrer que ϕ ne s'annule pas.
   (d) Notons $p(t) = \frac{\phi(t)}{\phi(-t)}$. Montrer que $p(2t) = p(t)^2$ et établie une relation de récurrence sur p.
   (e) Montrer que $p(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (f) En déduire une relation de récurrence sur ϕ.
   (g) Déterminer ϕ puis la loi de X.

1. a) X admet un moment d'ordre 2. D'après le cours on a $\phi'(0) = iE(X) = 0$ et $\phi''(0) = -E(X^2) = -1$.
$\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et X ont même loi, donc même fonction caractéristique : pour $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{\frac{X+Y}{\sqrt{2}}}(t) = \phi_X(t)$ ie $E(e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}X}e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}Y}) = \phi_X(t)$ et par indépendance, $E(e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}X})E(e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}Y}) = \phi_X(t)$. Comme X et Y ont même loi, on obtient

$$\phi(t) = \phi\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$$

b) L'égalité précédente se réécrit $\phi(\sqrt{2}t) = \phi^2(t)$ ie $\phi(2^{1/2}t) = \phi^{2^1}(t)$.
En remplaçant t par $\sqrt{2}t$, $\phi(2t) = \phi^2(\sqrt{2}t) = \phi^4(t)$ ie $\phi(2^1t) = \phi^{2^2}(t)$.
En remplaçant t par $\sqrt{2}t$, $\phi(2^{3/2}t) = \phi^4(\sqrt{2}t) = \phi^8(t) = \phi^{2^3}(t)$.
On conjecture et on prouve facilement par récurrence que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1,\ \phi(2^{n/2}t) = \phi^{2^n}(t)$$

ce qui se réécrit encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1,\ \phi(t) = \phi^{2^n}(\frac{t}{2^{n/2}})$$

ce qui implique

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1,\ \phi(t) = \phi^{2^{2n}}(\frac{t}{2^n})$$

D'après le cours, ϕ est C^2 et on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ où le terme d'erreur est **potentiellement complexe**. On dispose alors de $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et nulle en 0 telle que pour tout t,

$$\phi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t^2)$$

On fixe $t \in \mathbb{R}$ et on a

$$\phi^{2^{2n}}(\frac{t}{2^n}) = \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}} + \frac{t^2}{2^{2n}}\varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right)^{2^{2n}}$$

On dispose de N_0 tel que $n \geq N_0 \implies 1 - \frac{t^2}{2^{2n+1}} \geq 0$. Pour $n \geq N_0$,

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}} + \frac{t^2}{2^{2n}}\varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right)^{2^{2n}} &= \sum_{k=0}^{2^{2n}} \binom{2^{2n}}{k}\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}}\right)^k \left[\frac{t^2}{2^{2n}}\varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right]^{2^{2n}-k} \\
&= \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \binom{2^{2n}}{k}\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}}\right)^k \left[\frac{t^2}{2^{2n}}\varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right]^{2^{2n}-k}
\end{aligned}$$

Or $\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}}$ est une sous-suite de $(1 - \frac{t^2/2}{n})^n$. Cette suite converge (moyennant un développement asymptotique classique) vers $e^{-t^2/2}$. Il suffit donc de prouver que

$$\sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \binom{2^{2n}}{k}\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}}\right)^k \left[\frac{t^2}{2^{2n}}\varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right]^{2^{2n}-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \binom{2^{2n}}{k}\underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}}\right)^k}_{\geq 0} \left[\frac{t^2}{2^{2n}}\varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right]^{2^{2n}-k}\right| &\leq \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \binom{2^{2n}}{k}\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}}\right)^k \left[\frac{t^2}{2^{2n}}\left|\varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right|\right]^{2^{2n}-k} \\
&= \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}} + \frac{t^2}{2^{2n}}\left|\varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right|\right)^{2^{2n}} - \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}} \\
&= \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)^{2^{2n}} - \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)^{2^{2n}} - \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}} &= \exp\left[2^{2n}\ln\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)\right] - e^{-t^2/2} + o(1) \\
&= \exp\left[2^{2n}\left(-\frac{t^2}{2}\frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)\right] - e^{-t^2/2} + o(1) \\
&= \exp\left(-\frac{t^2}{2} + o(1)\right) - e^{-t^2/2} + o(1) \\
&= e^{-t^2/2} + o(1) - e^{-t^2/2} + o(1) \\
&= o(1)
\end{aligned}$$

Donc $\lim_n \phi^{2^{2n}}(\frac{t}{2^n}) = e^{-t^2/2}$ ie $\phi(t) = e^{-t^2/2}$ et par injectivité X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

2. a) Par indépendance de X et Y et égalité des lois, $\phi_{X+Y}(t) = \phi^2(t)$, $\phi_{X-Y}(t) = \phi(t)\phi(-t)$ et $\phi_{2X}(t) = \phi(2t)$.

b) Par indépendance de $X+Y$ et $X-Y$,

$$\phi_{2X}(t) = \phi_{(X+Y)+(X-Y)}(t) = \phi_{X+Y}(t)\phi_{X-Y}(t) = \phi^3(t)\phi(-t)$$

donc $\phi(2t) = \phi^3(t)\phi(-t)$. En remplaçant t par $-t$, $\phi(-2t) = \phi(t)\phi^3(-t)$ et en multipliant les deux égalités, il vient
$$\phi(2t)\phi(-2t) = (\phi(t)\phi(-t))^4$$
En posant $\psi : t \mapsto \phi(t)\phi(-t)$, on a $\psi(2t) = \psi^4(t)$, donc (récurrence immédiate) pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\psi(2^n t) = \psi^{2^{2n}}(t)$ ou encore $\psi(t) = \psi^{2^{2n}}(\frac{t}{2^n})$.

c) En supposant l'existence de t_0 tel que $\phi(t_0) = 0$, on a $\psi(t_0) = 0$ donc pour tout n, $\psi^{2^{2n}}(\frac{t_0}{2^n}) = 0$ ie $0 = \psi(\frac{t_0}{2^n}) = \phi(\frac{t_0}{2^n})\phi(-\frac{t_0}{2^n})$. On dispose alors de $t_n \to 0$ telle que pour tout n, $\phi(t_n) = 0$, ce qui contredit la continuité de ϕ en 0.

d) On a $p(2t) = \dfrac{\phi(2t)}{\phi(-2t)} = \dfrac{\phi^3(t)\phi(-t)}{\phi^3(-t)\phi(t)} = \dfrac{p(t)^3}{p(t)} = p(t)^2$
On en déduit par récurrence immédiate que pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$,
$$p(2^n t) = p^{2^n}(t)$$
ou encore
$$p(t) = p^{2^n}(\frac{t}{2^n})$$
e) Par ailleurs, $p(t) = \dfrac{\phi(t)}{\phi(-t)} = \dfrac{1 - t^2/2 + o(t^2)}{1 - t^2/2 + o(t^2)} = \left(1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\left(1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\right)$ où $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue
$= 1 + o(t^2) = 1 + t^2\varepsilon(t^2)$
et nulle en 0.
De même que précédemment, $p(t) = \lim_n p^{2^n}(\frac{t}{2^n}) = 1$.

f) ϕ est donc réelle, avec $\phi(2t) = \phi^4(t)$, donc $\phi(2^n t) = \phi^{2^{2n}}(t)$ et $\phi(t) = \phi^{2^{2n}}(\frac{t}{2^n})$

g) ϕ ne s'annule pas donc $\phi > 0$. On peut directement faire le développement asymptotique et obtenir $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.

Exercice 7

Soit ϕ la fonction caractéristique d'une var X.

1. Supposons qu'il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\phi(t_0) = 1|$.
   (a) Montrer qu'il existe θ tel que $P(\cos(t_0 X - \theta) = 1) = 1$.
   (b) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(X \in \{a + nb,\ n \in \mathbb{Z}\}) = 1$. Que pouvez-vous en déduire sur la nature de P_X ?
2. Réciproquement, si $P_X(\{a + nb,\ n \in \mathbb{Z}\}) = 1$, que peut-on en déduire de sa fonction caractéristique ?

1. a)Comme $|\phi(t_0)| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(t_0) = e^{i\theta}$. Alors $E(e^{i(t_0 X - \theta)}) = 1$ ie $E(\cos(t_0 X - \theta)) + iE(\sin(t_0 X - \theta)) = 1$, donc $E(\cos(t_0 X - \theta)) = 1$ ou encore $E(1 - \cos(t_0 X - \theta)) = 0$.
Or $1 - \cos(t_0 X - \theta) \geq 0$, donc $1 - \cos(t_0 X - \theta) = 0$ P-p.s, donc
$$P(\cos(t_0 X - \theta) = 1) = 1$$
b) Pour $\omega \in \Omega$ on a l'équivalence
$$\cos(t_0 X(w) - \theta) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ X(w) = \frac{2\pi}{t_0}k + \frac{\alpha}{t_0}$$
de sorte que $1 = P(\cos(t_0 X - \theta) = 1) = P(X \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\alpha}{t_0} + k\frac{2\pi}{t_0}\right))$.
Notons A l'ensemble obtenu. A est dénombrable et $P_X(A) = 1$. Montrons que X est discret. Notons D_X le support de X. On a
$$1 = P_X(A) = P_X(A \cap D_X) + P_X(A \cap D_X^c) = P_X(A \cap D_X)$$

car $A \cap D_X^c$ est dénombrable ($\subset A$) et que si $t \in D_X^c$, $P_X(\{t\}) = 0$, de sorte que $P_X(A \cap D_X^c) \leq \sum_{t \in A \cap D_X^c} P_X(\{t\}) = 0$.
De l'égalité $P_X(A \cap D_X) = 1$ on déduit $P_X(D_X) = 1$ et X discret.
Par ailleurs on prouve facilement que $D_X \subset A$, donc
$P_X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_X(\{a+nb\})\delta_{\{a+nb\}}$.

2. Réciproquement, on a encore $D_X \subset A$, donc $P_X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_X(\{a+nb\})\delta_{\{a+nb\}}$.

$$\begin{aligned}\text{Alors } \phi(t) = \int e^{itx} dP_X(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{it(a+nb)} P_X(\{a+nb\}) \\ &= e^{ita} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{itnb} P_X(\{a+nb\})\end{aligned}$$

et $|\phi(t)| = \left|\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{itnb} P_X(\{a+nb\})\right|$ qui est $\frac{2\pi}{b}$-périodique si $b \neq 0$ et constant égal à 1 sinon. Dans les deux cas, il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\phi(t_0)| = 1$.

Exercice 8

Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des var indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Soit $Y = \det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $E(e^{itX_1X_4}|X_4)$.
2. En déduire la fonction caractéristique de X_4.
3. Déterminer la fonction caractéristique de Y puis la loi de Y.

1. $e^{itX_1X_4}$ étant bornée, elle est intégrable par rapport à n'importe quelle mesure de probabilité donc $E(e^{itX_1X_4}|X_4)$ existe. Soit $h : (x,y) \mapsto e^{itxy}$. h est bornée, donc élément de $\mathscr{L}^1(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{C}), P_{(X_1,X_4)})$. Par conséquent, $E(e^{itX_1X_4}|X_4) = \Psi(X_4)$ où $\Psi(y) = \int e^{itxy} dP_{X_1}^{X_4=y}(x)$. Comme X_1 et X_4 sont indépendantes, $P_{X_1}^{X_4=y} = P_{X_1}$, donc $\Psi(y) = \displaystyle\int e^{itxy} dP_{X_1}(x) = E(e^{ityX}) = \phi(ty) = e^{-(ty)^2/2}$
et $E(e^{itX_1X_4}|X_4) = \Psi(X_4) = e^{-t^2X_4^2/2}$.

$$\begin{aligned}\text{2.On a } \phi_{X_1X_4}(t) = E(e^{itX_1X_4}) = E[E(e^{itX_1X_4}|X_4)] = E[e^{-t^2X_4^2/2}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-t^2x^2/2} e^{-t^2/2} d\lambda(x) \\ = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-u^2/2} d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\end{aligned}$$

3. X_1, X_2, X_3, X_4 étant indépendantes, X_1X_4 et X_2X_3 sont indépendantes par coalition, de sorte que

$$\phi_Y(t) = E(e^{it(X_1X_4 - X_2X_3)}) = \phi_{X_1X_4}(t)\phi_{X_2X_3}(-t) = \frac{1}{1+t^2}$$

donc Y suit la loi de Laplace de paramètre 1.

Exercice 9

Soit N une var de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit (X_n) une suite de var indépendantes, de même loi et indépendantes de N. Soit $S = \sum_{k=0}^N X_k$. Calculer la fonction caractéristique de S en fonction de celle de X_1.

On a l'égalité $e^{itS} = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(N)e^{itS} + \mathbb{1}_{\mathbb{N}^c}(N)e^{itS}$ et comme N est discrète de support $\mathbb{N}$, $\mathbb{1}_{\mathbb{N}^c}(N)e^{itS}$ est nulle P-p.s de sorte que $e^{itS} = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(N)e^{itS}$ P-p.s.
Or $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(N)e^{itS} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{j\}}(N)e^{it\sum_{k=0}^j X_j}$. Considérons

$$Y_n = \sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\{j\}}(N)e^{it\sum_{k=0}^j X_j}$$

On a • chaque Y_n est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-mesurable.
• $|Y_n| \leq \sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{j\}}(N) = 1$ avec $\int 1 dP(\omega) = P(\Omega) = 1 < \infty$.
• (Y_n) converge simplement vers $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{j\}}(N) e^{it\sum_{k=0}^{j} X_j}$.
Par convergence dominée, $\int Y_n(\omega) dP(\omega) \to \int \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{j\}}(N(\omega)) e^{it\sum_{k=0}^{j} X_j(\omega)} dP(\omega)$ ie

$$\sum_{j=0}^{n} \int \mathbb{1}_{\{j\}}(N(\omega)) e^{it\sum_{k=0}^{j} X_j(\omega)} dP(\omega) \to \int \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(N) e^{itS(\omega)} dP(\omega) = \int e^{itS(\omega)} dP(\omega) = E(e^{itS})$$

Or $\sum_{j=0}^{n} \int \mathbb{1}_{\{j\}}(N(\omega)) e^{it\sum_{k=0}^{j} X_j(\omega)} dP(\omega) = \sum_{j=0}^{n} E(1_{\{j\}}(N) e^{it\sum_{k=0}^{j} X_j})$.
Donc $\sum_{j=0}^{\infty} E(1_{\{j\}}(N) e^{it\sum_{k=0}^{j} X_j}) = E(e^{itS}) \quad (*)$
Par ailleurs, pour $n \geq 0$, $X_0, \ldots, X_n, N$ sont indépendants, donc par coalition, $\sum_{j=0}^{n} X_k$ et N sont indépendants. De plus, $x \mapsto \mathbb{1}_n(x)$ est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable (car $n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), donc $\sum_{j=0}^{n} X_k$ et $1_{\{n\}}(N)$ sont indépendants.

$$\begin{aligned}
(*) \text{ devient } E(e^{itS}) &= \sum_{j=0}^{\infty} E(1_{\{j\}}(N)) E(e^{it\sum_{k=0}^{j} X_j}) = \sum_{j=0}^{\infty} P(N=j)(\phi_{X_1}(t))^{j+1} \\
&= \phi_{X_1}(t) e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} (\phi_{X_1}(t))^j \\
&= \phi_{X_1}(t) e^{-\lambda} e^{\lambda \phi_{X_1}(t)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\phi_S(t) = \phi_{X_1}(t) e^{\lambda(\phi_{X_1}(t) - 1)}$$

Exercice 10

Soit P_1 la loi de probabilité continue de densité f_1 par rapport à λ et de fonction caractéristique ϕ_1.
On suppose que ϕ_1 est réelle, positive sur $\mathbb{R}$ et intégrable par rapport à λ.
Soit

$$P_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \frac{1}{\|\phi_1\|_1} \int_A \phi_1(t) d\lambda(t)$$

1. Montrer que P_2 est une loi de probabilité continue.
2. Exprimer la fonction caractéristique associée à P_2 en fonction de f_1.
3. On suppose que P_1 est la loi de Laplace de paramètre 1. En déduire ϕ_2. Quelle est cette loi ?

1. Montrons que P_2 est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
P_2 est à valeurs dans $[0,1]$, $P_2(\mathbb{R}) = \frac{\|\phi_1\|_1}{\|\phi_1\|_1} = 1$ et pour (A_i) une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la suite de fonctions mesurables positives
$f_n : t \mapsto \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^{n} A_i}(t)\phi_1(t)$ tend en croissant vers $t \mapsto \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}(t)\phi_1(t)$, donc par convergence monotone :

$$\begin{aligned}
P_2(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \frac{1}{\|\phi_1\|_1} \int \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}(t)\phi_1(t) d\lambda(t) \\
&= \lim_n \frac{1}{\|\phi_1\|_1} \int \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^{n} A_i}(t)\phi_1(t) d\lambda(t) \\
&= \lim_n \frac{1}{\|\phi_1\|_1} \int \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(t)\phi_1(t) d\lambda(t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\phi_1\|_1} \int_{A_i} \phi_1(t) d\lambda(t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_2(A_i)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $P_2(A) = \displaystyle\int_A \frac{\phi_1(t)}{\|\phi_1\|_1} d\lambda(t)$, avec $t \mapsto \frac{\phi_1(t)}{\|\phi_1\|_1}$ mesurable positive, donc P_2 est continue, de densité

$$f_2(x) = \frac{\phi_1(x)}{\|\phi_1\|_1}$$

2. On a $\displaystyle\phi_2(t) = \int e^{itx} dP_2(x) = \int e^{itx} \frac{\phi_1(x)}{\|\phi_1\|_1} d\lambda(x)$

$$= \frac{2\pi}{\|\phi_1\|_1} \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(-t)x} \phi_1(x) d\lambda(x)$$

$$= \frac{2\pi}{\|\phi_1\|_1} f_1(-t)$$

3. Dans le cas d'une Laplace 1, $f_1(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$ et $\|\phi_1\|_1 = \int \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t) = \pi$, donc $\phi_2(t) = e^{-|t|}$. P_2 est donc la loi associée à $\mathcal{C}(1)$.