

TD de probabilités
ENSAE
1A

Gabriel Romon

Version du 26 janvier 2019 à 19:45

Ce document rédigé pendant l'année scolaire 2016-2017 contient les corrections personnelles des chapitres 1 à 3 du cours de Théorie des Probabilités, enseigné alors par Sandie Souchet.

La dernière version du document est disponible à l'adresse

<https://github.com/gabsens/TDProba/raw/master/main.pdf>

Vous êtes évidemment invités à contribuer au repo Github <https://github.com/gabsens/TDProba/>.

Ce document ne se substitue pas à la présence ou à la participation active aux séances de TD.

1. Loi de probabilité, Espérance et Fonction de répartition

Exercice 1

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de densité donnée par

$$f(x, y) = \frac{1}{x} e^{-x} \mathbb{1}_D(x, y) \quad \text{avec } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < x\}$$

On pose $U = X$ et $V = \frac{Y}{X}$.

1. Loi marginale de X .
2. Avec la formule de changement de variables montrer que (U, V) est un couple aléatoire continu et donner sa densité.
3. Déterminer la loi de U et celle de V . Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

1. Le couple (X, Y) étant continu, X et Y sont également continues, et la densité de X est donnée par

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f(x, y) d\lambda(y) = \int \frac{1}{x} e^{-x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \mathbb{1}_{(0, x)}(y) d\lambda(y) = \frac{1}{x} e^{-x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \int_0^x d\lambda(y) \\ &= e^{-x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \end{aligned}$$

Donc X suit une loi exponentielle de paramètre 1.

2. On définit $\varphi = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto (x, \frac{y}{x}) \end{cases}$

• $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 , son complémentaire $\{0\} \times \mathbb{R}$ étant clairement fermé.

• φ est bijective de réciproque $\varphi^{-1} = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto (x, xy) \end{cases}$

• $\varphi_1: (x, y) \mapsto x$ et $\varphi_2: (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$. Les dérivées partielles de φ_1 et φ_2 existent et sont continues donc φ est C^1 avec

$$\text{Jac}(\varphi)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

• $\varphi_1^{-1}: (x, y) \mapsto x$ et $\varphi_2^{-1}: (x, y) \mapsto xy$. Les dérivées partielles de φ^{-1} existent et sont continues donc φ^{-1} est C^1 avec

$$\text{Jac}(\varphi^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bullet P_{(X, Y)}(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}) &= P_X(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} e^{-x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) d\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-x} d\lambda(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Alors $(U, V) = \varphi(X, Y)$ est un vaR continu de densité donnée par

$$\begin{aligned} g(u, v) &= f(\varphi^{-1}(u, v)) \cdot |\det \text{Jac}(\varphi^{-1})(u, v)| \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}}(u, v) \\ &= f(u, uv) \cdot |u| \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(u) \\ &= e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0, u)}(uv) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(u) \\ &= e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0, 1)}(v) \end{aligned}$$

3. En tant que marginales, U et V sont des var continus de densités

$$\begin{aligned} g_U(u) &= \int e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(v) d\lambda(v) \\ &= e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \int \mathbb{1}_{(0,1)}(v) d\lambda(v) \\ &= e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_V(v) &= \int e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(v) d\lambda(u) \\ &= \mathbb{1}_{(0,1)}(v) \int e^{-u} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) d\lambda(u) \\ &= \mathbb{1}_{(0,1)}(v) \end{aligned}$$

U suit donc la loi exponentielle de paramètre 1 et V la loi uniforme sur $(0, 1)$. On remarque que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = g_U(u)g_V(v)$ donc U et V sont P -indépendants.

Exercice 2

Soient X et Y deux var continues indépendantes de loi respective $\Gamma(a, 1)$ et $\Gamma(b, 1)$.
Soient $S = X + Y$ et $Z = \frac{X}{X+Y}$

1. Avec la formule de changement de variables montrer que (S, Z) est un couple aléatoire continu et donner sa densité.
2. Déterminer la loi de S et celle de Z . Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

1. X et Y étant des var continus indépendants, (X, Y) est un vaR continu de densité donnée par $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

On définit $B = \{(a, -a), a \in \mathbb{R}\}$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus B$, $V = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ et

$$\varphi = \begin{cases} U & \longrightarrow V \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, \frac{x}{x+y}) \end{cases}$$

• B est fermé car il est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$. U est un ouvert de \mathbb{R}^2 en tant que complémentaire de B .

• V est ouvert (cf exo précédent).

• φ est bijective de réciproque $\varphi^{-1} = \begin{cases} V & \longrightarrow U \\ (x, y) & \longmapsto (xy, x - xy) \end{cases}$

• $\varphi_1: (x, y) \mapsto x + y$ et $\varphi_2: (x, y) \mapsto \frac{x}{x+y}$. Les dérivées partielles de φ_1 et φ_2 existent et sont continues donc φ est C^1 avec

$$\text{Jac}(\varphi)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{(x+y)^2} & -\frac{x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

• $\varphi_1^{-1}: (x, y) \mapsto xy$ et $\varphi_2^{-1}: (x, y) \mapsto x - xy$. Les dérivées partielles de φ^{-1} existent et sont continues donc φ^{-1} est C^1 avec

$$\text{Jac}(\varphi^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 - y & -x \end{pmatrix}$$

• $P_{(X,Y)}(U) = 1 - P_{(X,Y)}(B)$. Or $((X, Y) \in B) \subset (X \leq 0) \cup (Y \leq 0)$ donc

$P_{(X,Y)}(B) \leq P(X \leq 0) + P(Y \leq 0) = 0 + 0$. La dernière égalité vient du fait que X et Y suivent des lois hypergéométriques dont le support est $(0, \infty)$.

Donc $P_{(X,Y)}(U) = 1$.

Alors $(S, T) = \varphi(X, Y)$ est un vaR continu de densité donnée par

$$\begin{aligned} g(s, t) &= f_{(X,Y)}(st, s - st) \cdot |s| \cdot \mathbb{1}_V(st, s - st) \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(a)} (st)^{a-1} e^{-st} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(st) \right) \left(\frac{1}{\Gamma(b)} (s - st)^{b-1} e^{-(s-st)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s - st) \right) |s| \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(st) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \begin{cases} st > 0 \\ s - st > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s > 0 \\ 1 > t > 0 \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$g(s, t) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} s^{a+b-1} e^{-s} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s) \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(t)$$

2. En tant que marginales, S et T sont des var continues de densités

$$\begin{aligned} g_S(s) &= \int g(s, t) d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(a+b)} s^{a+b-1} e^{-s} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s) \underbrace{\int \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(t) d\lambda(t)}_{\text{masse de la densité d'une loi } \beta(a,b)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a+b)} s^{a+b-1} e^{-s} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s) \\ g_T(t) &= \int g(s, t) d\lambda(s) \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(t) \underbrace{\int \frac{1}{\Gamma(a+b)} s^{a+b-1} e^{-s} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s) d\lambda(s)}_{\text{masse de la densité d'une loi } \Gamma(a+b,1)} \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(t) \end{aligned}$$

Donc S suit une loi $\Gamma(a+b, 1)$ et T une loi $\beta(a, b)$. On remarque que pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $g(s, t) = g_S(s)g_T(t)$ donc S et T sont P -indépendants.

Exercice 3

Soit (X, Y) deux var continues, indépendantes, de loi respective $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(0, \tau^2)$.
Déterminer la loi de $Z = \frac{X}{Y}$.

La démarche est similaire à celle de l'exercice 1.

$$\text{On définit } \varphi = \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (x, y) & \longmapsto \left(\frac{x}{y}, y \right) \end{cases}$$

$\varphi(X, Y)$ admet pour densité

$$\begin{aligned} g(u, v) &= f(uv, v) \cdot |v| \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} e^{-\frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{u^2}{\sigma^2} \right)} \cdot |v| \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(v) \end{aligned}$$

En tant que marginale, Z est continue et de densité donnée par

$$\begin{aligned} g_Z(u) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \int_0^\infty v e^{-\frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{u^2}{\sigma^2} \right)} d\lambda(v) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \left[-\frac{2}{2 \left(\frac{u^2}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} \right)} e^{-\frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{u^2}{\sigma^2} \right)} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\sigma}{\tau}}{u^2 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \end{aligned}$$

Z suit donc une loi de Cauchy de paramètre $\frac{\sigma}{\tau}$.

Exercice 4

Soit (X, Y) un couple de var de loi $P_{(X,Y)}$ admettant une densité par rapport à $N \otimes \lambda$, N étant la mesure de comptage sur \mathbb{N}^* . Cette densité est donnée par

$$f(x, y) = (1 - p) \frac{(py)^{x-1}}{(x-1)!} e^{-y} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y)$$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y .
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

1. Soit $A \in (\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} P_X(A) &= P_{(X,Y)}(A \times \mathbb{R}) = \int \mathbb{1}_{A \times \mathbb{R}}(u) f(u) dN \otimes \lambda(u) \\ &= \int \mathbb{1}_A(x) f(x, y) d(N \otimes \lambda)(x, y) = \int \delta_{\{x\}}(A) \left(\int f(x, y) d\lambda(y) \right) dN(x) \\ &= \int \delta_{\{x\}}(A) (1 - p) \frac{p^{x-1}}{(x-1)!} \Gamma(x) dN(x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{N}^*} (1 - p) p^{x-1} \delta_{\{x\}}(A) \end{aligned}$$

Donc X suit une loi géométrique de paramètre $1 - p$.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \int \mathbb{1}_B(y) dP_Y(y) &= P_Y(B) = P_{(X,Y)}(\mathbb{N}^* \times B) \\ &= \int \mathbb{1}_{\mathbb{N}^* \times B}(x, y) f(x, y) d(N \otimes \lambda)(x, y) \\ &= \int \mathbb{1}_B(y) \left(\int f(x, y) dN(x) \right) d\lambda(y) \quad \text{Fubini positif} \\ &= \int \mathbb{1}_B(y) \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) (1 - p) e^{-y} e^{py} d\lambda(y) \\ &= \int \mathbb{1}_B(y) \underbrace{\mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) (1 - p) e^{-(1-p)y}}_{:= f_Y(y)} d\lambda(y) \end{aligned}$$

- f_Y est dans $\mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$
- $\int f_Y(y) d\lambda(y) = 1$

Donc Y est continue et admet f_Y pour densité de probabilité. On reconnait la densité d'une loi exponentielle de paramètre $1 - p$.

2. Supposons par l'absurde que X et Y sont indépendantes. On dispose alors de $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un négligeable tel que $\forall (x, y) \in M^c$, $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ ce qui équivaut à

$$\frac{y^{x-1}}{(x-1)!} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) = (1 - p) e^{py} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y)$$

Or, pour $x = 1$, il existe un unique y_1 tel que $1 = (1 - p) e^{py_1}$.

Par conséquent, $(\{1\} \times \{y_1\}^c) \subset M$, or $N \otimes \lambda(\{1\} \times \{y_1\}^c) = N(\{1\}) \lambda(\{y_1\}^c)$

$$= 1 \cdot \infty$$

$$= \infty$$

Or M est négligeable, ce qui est absurde.

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de var indépendantes et de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ ie

$$\forall n \geq 1, P_{X_n} = \frac{1}{2}\delta_{\{-1\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{1\}}$$

On note τ la var définie par $\tau = \inf\{n \geq 1, X_n = 1\}$

1. Calculer $\tau(\Omega)$. Que pouvez-vous en déduire ?
2. Montrer que $P(\tau < \infty) = 1$.
3. Déterminer la loi de τ .

1. $\tau(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ donc τ est une var discrète.

$$\begin{aligned} 2. P(\tau < \infty) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tau = n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 = -1 \cap \dots \cap X_{n-1} = -1 \cap X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \end{aligned}$$

3. $P(\tau = n) = P(X_1 = -1 \cap \dots \cap X_{n-1} = -1 \cap X_n = 1) = \frac{1}{2^n}$
donc

$$P_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{\{n\}}$$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer la loi de $Z = \frac{X+|X|}{2}$.
2. Montrer que P_Z n'est ni discrète ni continue.

1. On note que Z prend des valeurs ≥ 0 . Pour $w \in \Omega$, si $X(w) \geq 0$ alors $Z(w) = X(w)$ et si $X(w) < 0$, alors $Z(w) = 0$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} P_Z(A) &= P((Z \in A) \cap (X < 0)) + P((Z \in A) \cap (X \geq 0)) \\ &= P((0 \in A) \cap (X < 0)) + P((X \in A) \cap (X \geq 0)) \\ &= \mathbb{1}_A(0)P(X < 0) + \mathbb{1}_{A^c}(0)P(\emptyset) + P((X \in A) \cap (X \geq 0)) \\ &= \frac{1}{2}\delta_{\{0\}}(A) + P_X(A \cap [0, \infty)) \end{aligned}$$

2. D'après 1., pour $a \in \mathbb{R}$,

si $a < 0$, $P_Z(\{a\}) = 0$

si $a = 0$, $P_Z(\{a\}) = \frac{1}{2}$

si $a > 0$, $P_Z(\{a\}) = 0$

L'ensemble des atomes de P_Z est donc réduit à $\{0\}$, avec $P_Z(\{0\}) = \frac{1}{2} \neq 1$, donc P_Z n'est pas discrète. De plus, P_Z charge ce singleton, donc elle n'est pas continue.

Exercice 7

Soit X une var continue de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

Soit S une var discrète de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ indépendante de X et $Y = XS$.

1. Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de X .

2. En déduire la loi de Y .

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $D_S = \{-1, 1\}$ le support de S .

$$\begin{aligned} P(Y \leq a) &= P(XS \leq a) \\ &= P((XS \leq a) \cap (S \in D_S)) + \underbrace{P((XS \leq a) \cap S \in D_S^c)}_{\leq P(S \in D_S^c)=0} \\ &= P((X \leq a) \cap (S = 1)) + P((-X \leq a) \cap (S = -1)) \\ &= P(X \leq a)P(S = 1) + P(-X \leq a)P(S = -1) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{2}F_X(a) + \frac{1}{2}(1 - P(X < -a)) \\ &= \frac{1}{2}F_X(a) + \frac{1}{2}(1 - P(X \leq -a)) \quad \text{car } X \text{ continue} \\ &= \frac{1}{2}F_X(a) + \frac{1}{2}(1 - F_X(-a)) \end{aligned}$$

2. En développant l'expression précédent on fait apparaître la fonction de répartition d'une loi de Laplace de paramètre θ .

Donc Y suit une loi de Laplace de paramètre θ .

Exercice 8

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$.

Soit F la fonction de répartition associée à une mesure de probabilité μ . On pose

$$\forall u \in (0, 1), F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq u\}$$

1. Montrer que $\{u \in (0, 1), F^{-1}(u) \leq t\} = \{u \in (0, 1), u \leq F(t)\}$
2. Justifier que $F^{-1}(U)$ est une var.
3. Déterminer la fonction de répartition de $F^{-1}(U)$ puis sa loi.
4. Construire une var de loi exponentielle de paramètre θ .
5. Construire une var de loi de Bernoulli de paramètre p .
6. Construire une var de loi géométrique de paramètre p .

1. • F^{-1} est bien définie : soit $u \in (0, 1)$. Comme $F \xrightarrow{+\infty} 1$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $F(t) \geq u$. D'autre part, $\{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq u\}$ est minoré car F tend vers 0 en $-\infty$

• Lemme : $F(F^{-1}(u)) \geq u$: en considérant t_n une suite de $\{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq u\}$ qui tend en décroissant vers $F^{-1}(u)$, on a $F(t_n) \geq u$ pour tout n , et la continuité à droite de F donne $F(F^{-1}(u)) \geq u$.

• On fixe $t \in \mathbb{R}$.

\subset : soit $u \in (0, 1)$ tel que $F^{-1}(u) \leq t$. Par croissance de F et le lemme, $u \leq F(F^{-1}(u)) \leq F(t)$.

\supset : soit $u \in (0, 1)$ tel que $u \leq F(t)$. Par définition de $F^{-1}(u)$, on a $F^{-1}(u) \leq t$.

2. Il suffit de montrer que $F^{-1} \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Il suffit encore de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(F^{-1})^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a $(F^{-1})^{-1}((-\infty, a]) = \{u \in (0, 1), F^{-1}(u) \in (-\infty, a]\}$

$$\begin{aligned} &= \{u \in (0, 1), F^{-1}(u) \leq a\} \\ &= \{u \in (0, 1), u \leq F(a)\} \\ &= (-\infty, F(a)] \cap (0, 1) \\ &\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

3. Pour $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(U) \leq a) &= P\left(U^{-1}\left[(F^{-1})^{-1}((-\infty, a])\right]\right) \\ &= P\left(U^{-1}[(-\infty, F(a)] \cap (0, 1)]\right) \\ &= \begin{cases} P(U^{-1}(\emptyset)) & \text{si } F(a) = 0 \\ P(U^{-1}((0, F(a)])) & \text{si } 0 < F(a) < 1 \\ P(U^{-1}((0, 1))) & \text{si } F(a) = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } F(a) = 0 \\ F(a) & \text{si } 0 < F(a) < 1 \\ 1 & \text{si } F(a) = 1 \end{cases} \\ &= F(a) \end{aligned}$$

La fonction de répartition de $F^{-1}(U)$ est donc F et $F^{-1}(U)$ est en égal en loi à μ .

4. Dans ce cas, $F^{-1} : u \mapsto -\frac{\ln(1-u)}{\theta}$

5. Dans ce cas, $F^{-1} : u \mapsto \mathbb{1}_{(1-p, 1]}(u)$

6. Dans ce cas, $F^{-1} : u \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \mathbb{1}_{((1-p)^n p, (1-p)^{n+1} p]}(u)$

Exercice 9

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une var sur Ω .

Pour tout $t > 0$, on note $B_t = \{w \in \Omega, X(w) > t\}$.

On suppose que $P(X > 0) > 0$ et pour tout $t, s > 0$, $P(B_{t+s}) = P(B_t)P(B_s)$.

1. Montrer que $\forall t > 0, P(B_t) > 0$.

2. Montrer que $P(B_1) < 1$.

3. Soit $m : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \ln(P(B_t))$. Montrer que $\forall t > 0, m(t) = m(1)t$.

4. En déduire la fonction de répartition de X sur \mathbb{R}_+^* puis sur \mathbb{R}_- . Quelle est la loi de X ?

1. Supposons par l'absurde qu'il existe $t > 0$ tel que $P(B_t) = 0$. Considérons alors $A = \{t > 0 / P(B_t) = 0\}$ et $t_0 = \inf A$. Comme $P(B_t) = 1 - F_X(t)$, $t \mapsto P(B_t)$ est continue à droite et en considérant $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui décroît vers t_0 , on a $t_0 \in A$. Comme $0 < P(X > 0) = P(\cup_n (X > \frac{1}{n})) = \lim_n P(X > \frac{1}{n})$ on dispose de $\varepsilon_0 := \frac{1}{n_0}$ tel que $P(B_{\varepsilon_0}) > 0$. Or $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \implies B_{\varepsilon_0} \subset B_\varepsilon$, donc pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $P(B_\varepsilon) > 0$. Soit $\delta = \frac{\min(t_0, \varepsilon_0)}{2}$ alors $0 = P(B_{t_0}) = P(B_{t_0-\delta}) \underbrace{P(B_\delta)}_{>0}$ donc $P(B_{t_0-\delta}) = 0$ avec $0 < t_0 - \delta < t_0$. Absurde.

2. Supposons $P(B_1) = 1$. Alors pour tout $t > 0$, $P(B_{t+1}|B_1) = P(B_{t+1})$, donc $P(B_{t+1}) = P(B_t)$ pour tout $t > 0$. On démontre alors par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $P(B_n) = P(B_1)$, donc $P(B_n) = 1$. Or B_n est une suite décroissante d'événements avec $\cap_n B_n = \emptyset$ (car X ne prend que des valeurs finies). Par conséquent, $0 = P(\emptyset) = P(\cap_n B_n) = \lim_n P(B_n) = 1$ ce qui est absurde.

3. L'hypothèse de départ se réécrit

$$\forall t, s > 0, m(t+s) = m(t) + m(s)$$

En fixant $s = 1$, on a pour tout $t > 0$, $m(t+1) = m(t) + m(1)$ et une récurrence montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m(n) = m(1)n$.

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. On note que $m(1) = m(q\frac{1}{q})$. On montre par ailleurs par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, m(n\frac{1}{q}) = nm(\frac{1}{q}) \quad (*)$$

Donc $m(1) = m(q\frac{1}{q}) = qm(\frac{1}{q})$, et $m(\frac{1}{q}) = \frac{m(1)}{q}$.

De même $(*)$ donne

$$m(\frac{p}{q}) = m(p\frac{1}{q}) = pm(\frac{1}{q}) = m(1)\frac{p}{q}$$

Donc pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $m(r) = m(1)r$.

Comme $\forall t > 0, P(B_t) = 1 - F_X(t)$, m est continue à droite en tout point.

Soit $t > 0$. Soit t_n une suite de rationnels qui tend en décroissant vers t . On a

$$m(t) = \lim_n m(t_n) = \lim_n (m(1)t_n) = m(1) \lim_n t_n = m(1)t$$

Le résultat est donc prouvé.

4. Pour $t > 0$ on a donc $F_X(t) = 1 - e^{m(1)t}$. Rappelons que $m(1) = \ln(P(B_1)) < 0$. F_X est continue à droite en 0, donc

$$P(X \leq 0) = F_X(0) = \lim_n F_X(\frac{1}{n}) = 1 - \lim_n e^{\frac{m(1)}{n}} = 0$$

En particulier, si $a \leq 0$, $(X \leq a) \subset (X \leq 0)$, donc $P(X \leq a) \leq P((X \leq 0)) = 0$ et $F_X(a) = 0$.

La fdr de X est donnée par

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{m(1)t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

qui est la fdr d'une loi exponentielle de paramètre $-m(1)$. X suit donc une loi exponentielle de paramètre $-m(1)$.

Exercice 10

Soit $T = (U_1, \dots, U_n)$ un vaR constitué de var indépendantes et iid. On note F la fonction de répartition de U_1 . Soit h et p_k les applications telles que

$$\forall t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, h(t) = (t_{(1)}, \dots, t_{(n)}) \quad \text{avec } t_{(1)} \leq \dots \leq t_{(n)}$$

$$\forall t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, p_k(t) = t_k$$

1. Déterminer la fonction de répartition de la var $Y = (p_k \circ h)(T)$.
2. On suppose que $S = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, c]}(U_i)$ pour c fixé.
 - (a) Etablir un lien entre $S^{-1}(\{k\})$ et $Y^{-1}((-\infty, c])$.
 - (b) En déduire la loi de S .

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Soit } y \in \mathbb{R}. P(Y \leq y) &= P\left(\bigcup_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |I| \geq k}} \bigcap_{i \in I} (U_i \leq y)\right) \\
 &= P\left(\bigcup_{j=k}^n \bigcup_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |I|=j}} \bigcap_{i \in I} (U_i \leq y) \cap \bigcap_{i \in I^c} (U_i > y)\right) \\
 &= \sum_{j=k}^n \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |I|=j}} P\left(\bigcap_{i \in I} (U_i \leq y) \cap \bigcap_{i \in I^c} (U_i > y)\right) \\
 &= \sum_{j=k}^n \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |I|=j}} (F(y))^j (1 - F(y))^{n-j} \quad \text{indépendance} \\
 &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (F(y))^j (1 - F(y))^{n-j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ a) On a } S^{-1}(\{k\}) &= ((p_k \circ h)(T) \leq c) \cap ((p_{k+1} \circ h)(T) > c) \\
 &\subset ((p_k \circ h)(T) \leq c) \\
 &= Y^{-1}((-\infty, c])
 \end{aligned}$$

b) Chaque indicatrice $\mathbb{1}_{(-\infty, c]}(U_i)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $F(c)$, les indicatrices sont indépendantes par composition, donc S suit une loi binomiale de paramètre $(n, F(c))$.

Exercice 11

Soit X une var de loi P_X et de fonction de répartition F_X telle que $P(X \geq 0) = 1$.

1. Avec Fubini, établir que

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^+} (1 - F_X(t)) d\lambda(t)$$

2. On suppose que P_X est une loi discrète de support \mathbb{N} . Exprimer $E(X)$ en fonction de F_X dans ce cas.

1. X étant ≥ 0 Pps, $E(X)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+} (1 - F_X(t)) d\lambda(t) &= \int_{\mathbb{R}^+} P(X > t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+^*} P(X > t) d\lambda(t) \\
&= \int \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \int \mathbb{1}_{(t, \infty)}(u) dP_X(u) d\lambda(t) \\
&= \int \int \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \mathbb{1}_{(t, \infty)}(u) dP_X(u) d\lambda(t) \\
&= \int \int \mathbb{1}_D((t, u)) dP_X(u) d\lambda(t) \quad \text{où } D = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2, 0 < t < u\}
\end{aligned}$$

or D est l'intersection de deux ouverts de \mathbb{R}^2 , donc ouvert, donc $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathbb{1}_D \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
D'après Fubini positif,

$$\begin{aligned}
\int \int \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \mathbb{1}_{(t, \infty)}(u) dP_X(u) d\lambda(t) &= \int \int \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \mathbb{1}_{(t, \infty)}(u) d\lambda(t) dP_X(u) \\
&= \int \int \mathbb{1}_{(0, \infty)}(u) \mathbb{1}_{(0, u)}(t) d\lambda(t) dP_X(u) \\
&= \int \mathbb{1}_{(0, \infty)}(u) u dP_X(u) \\
&= \int \mathbb{1}_{[0, \infty)}(u) u dP_X(u) \quad \text{car } \mathbb{1}_{(0, \infty)}(u) u = \mathbb{1}_{[0, \infty)}(u) u \\
&= \int \mathbb{1}_{[0, \infty)}(X(w)) X(w) dP(w) \quad \text{transfert pour fonction positive} \\
&= \int X(w) dP(w) \quad \text{car } \mathbb{1}_{[0, \infty)}(X) = 1 \text{ } P\text{-p.s} \\
&= E(X)
\end{aligned}$$

2. Dans ce cas, en notant N la mesure de comptage sur \mathbb{N} ,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - F_X(n)) &= \int (1 - F_X(n)) dN(n) \\
&= \int P_X((n, \infty)) dN(n) \\
&= \int \int \mathbb{1}_{(n, \infty)}(t) dP_X(t) dN(n) \\
&= \int \int \mathbb{1}_{(n, \infty)}(t) dN(n) dP_X(t) \\
&= \int \left(\int \mathbb{1}_{(-\infty, t)}(n) dN(n) \right) dP_X(t) \\
&= \sum_{t \in \mathbb{N}} P_X(\{t\}) \sum_{n < t, n \in \mathbb{N}} 1 \\
&= \sum_{t \in \mathbb{N}} P_X(\{t\}) t \\
&= E(X)
\end{aligned}$$

Exercice 12

Soit X une var de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer l'espérance et la variance de $U = e^{tX}$.
2. Pour quelles valeurs de $a > 0$, la variable $V = e^{aX^2}$ est-elle de carré intégrable ? Dans ce cas, calculer sa variance.

1. $x \mapsto e^{tx}$ est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable (car continue), positive et P_X est continue, donc :

$$\begin{aligned}\int e^{tx} dP_X(x) &= \int e^{tx} f_X(x) d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{tx} e^{-x^2/2} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{t^2/2} e^{-(x-t)^2/2} d\lambda(x) \\ &= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} d\lambda(x) \\ &= e^{t^2/2}\end{aligned}$$

Donc U admet une espérance finie donnée par $E(U) = e^{t^2/2}$.

Comme $U^2 = e^{2tX}$, un calcul similaire en remplaçant t par $2t$ montre que U admet un moment d'ordre 2 avec $E(U^2) = e^{(2t)^2/2} = e^{2t^2}$.

Donc $V(U) = e^{2t^2} - (e^{t^2/2})^2 = e^{2t^2} - e^{t^2}$.

2. Soit $a > 0$. $x \mapsto e^{ax^2}$ est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable (car continue), positive et P_X est continue, donc :

$$\begin{aligned}\int e^{ax^2} dP_X(x) &= \int e^{ax^2} f_X(x) d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ax^2} e^{-x^2/2} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2(\frac{1}{2}-a)} d\lambda(x)\end{aligned}$$

V admet une espérance si et seulement si l'intégrale précédente est finie, ie $a < \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, $E(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2(\frac{1}{2}-a)} d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2a}}$.

Comme $V^2 = e^{2aX^2}$, en reprenant le calcul précédent avec $2a$ au lieu de a , V admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $2a < \frac{1}{2}$ ie $a < \frac{1}{4}$ et dans ce cas $E(V^2) = \frac{1}{\sqrt{1-4a}}$.

La variance de V est donnée par $\frac{1}{\sqrt{1-4a}} - \frac{1}{1-2a}$

Exercice 13

Soit Z une var continue de loi de Laplace de paramètre θ .

Soient $U = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(Z) - \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(Z)$ et $T = |Z|$.

1. Montrer que U est une var discrète de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
2. Montrer que T est une var continue de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$
3. Montrer que U et T sont indépendantes (critère utilisant les espérances).

1. $U(w) = 1$ ssi $Z(w) \geq 0$ et $U(w) = -1$ ssi $Z(w) < 0$. U est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ donc discrète. $P(U = 1) = P(Z \geq 0) = \int_0^\infty \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|} d\lambda(x) = \frac{1}{2}$. De même $P(U = -1) = \frac{1}{2}$, donc $P_U = \frac{1}{2}\delta_{\{-1\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{1\}}$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$, $P(T \leq a) = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Si } a \geq 0, P(T \leq a) &= P(Z \in [-a, a]) = \int_{-a}^a \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|} d\lambda(x) \\ &= 1 - e^{-\theta a}\end{aligned}$$

On peut aussi écrire $P(Z \in [-a, a]) = F_Z(a) - F_Z(-a) = (1 - e^{-\theta a})\mathbb{1}_{a \in (0, \infty)}$.

La fdr de T est donc celle d'une loi exponentielle de paramètre θ , donc T suit la loi exponentielle de paramètre θ .

Autre méthode : pour h mesurable positive,

$$\begin{aligned} E(h(T)) &= \int h(|z|) f_Z(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^-} h(-z) f_Z(z) dz + \int_{\mathbb{R}^+} h(z) f_Z(z) dz \\ &= \int h(z) \underbrace{(f_Z(z) + f_Z(-z)) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(z)}_{\text{densité de } T} dz \end{aligned}$$

3. Montrons que pour tout $h, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $E(h(U)g(T)) = E(h(U))E(g(T))$.

On a $E(h(U))E(g(T)) = \left(\frac{h(1)}{2} + \frac{h(-1)}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^+} g(t) \theta e^{-\theta t} dt$

et $E(h(U)g(T)) = E(h(\text{sign}(Z))g(|Z|))$

$$\begin{aligned} &= \int h(\text{sign}(z)) g(|z|) \frac{\theta}{2} e^{-\theta|z|} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^-} h(-1) g(-z) \frac{\theta}{2} e^{\theta z} dz + \int_{\mathbb{R}^+} h(1) g(z) \frac{\theta}{2} e^{-\theta z} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} h(-1) g(t) \frac{\theta}{2} e^{-\theta t} dt + \int_{\mathbb{R}^+} h(1) g(z) \frac{\theta}{2} e^{-\theta z} dz \\ &= \left(\frac{h(1)}{2} + \frac{h(-1)}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^+} g(t) \theta e^{-\theta t} dt \end{aligned}$$

Exercice 14

Soit X une var de loi uniforme sur $(0, 1)$ et Y définie par $Y = \mathbb{1}_{(0,p)}(X)$ avec $p \in (0, 1)$.

1. Loi de Y .
2. Soit $Z = X + Y$. Loi de Z .
3. Montrer de deux manières que X et Y ne sont pas indépendantes.

1. Y est à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc discrète, avec $P(Y = 1) = P(X \in (0, p)) = p$.
Donc X suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a \leq 0$, $P(X + Y \leq a) = 0$. Si $a \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq a) &= P((X + 1 \leq a) \cap X \in (0, p)) + P((X \leq a) \cap X \in (p, 1)) \\ &= P(X \in (0, a - 1) \cap (0, p)) + P(X \in (0, a) \cap (p, 1)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } a \in (0, p) \\ a - p & \text{si } a \in (p, 1) \\ a - p & \text{si } a \in (1, 1 + p) \\ 1 & \text{si } a > 1 + p \end{cases} \end{aligned}$$

La fdr de $X + Y$ est donc celle de la loi uniforme sur $(p, 1 + p)$, donc Z suit la loi uniforme sur $(p, 1 + p)$.

3. On a $V(X + Y) = V(Z) = \frac{1}{12}$ et $V(X) + V(Y) = \frac{1}{12} + p(1 - p)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

$$\begin{aligned}
\text{Autrement, } E(XY) &= E(X \mathbb{1}_{(0,p)}(X)) \\
&= \int x \mathbb{1}_{(0,p)}(x) f_X(x) d\lambda(x) \\
&= \int_0^p x d\lambda(x) \\
&= \frac{p^2}{2}
\end{aligned}$$

et $E(X)E(Y) = \frac{1}{2}p$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

2. Espérance conditionnelle

Exercice 1

Soient X_1 et X_2 deux var indépendantes de loi binomiale de paramètre respectif (n_1, p) et (n_2, p) .
 Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$.
 En déduire $E(X_1 | X_1 + X_2)$.

- X_1 et X_2 étant des var indépendants et discrets, (X_1, X_2) est un var discret de loi

$$P_{(X_1, X_2)} = \sum_{(x, y) \in \llbracket 0, n_1 \rrbracket \times \llbracket 0, n_2 \rrbracket} \binom{n_1}{x} \binom{n_2}{y} p^{x+y} (1-p)^{n_1+n_2-(x+y)}$$

- Déterminons $P_{(X_1+X_2, X_1)}$.

★ Soit $\varphi : (x, y) \mapsto (x+y, x)$. φ est continue donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Donc $\varphi(X_1, X_2)$ est discret et

$$P_{(X_1+X_2, X_1)} = \sum_{(t, u) \in \varphi(\llbracket 0, n_1 \rrbracket \times \llbracket 0, n_2 \rrbracket)} P_{(X_1, X_2)}(\varphi^{-1}((t, u)) \cap \llbracket 0, n_1 \rrbracket \times \llbracket 0, n_2 \rrbracket)$$

- ★ On a $\varphi(\llbracket 0, n_1 \rrbracket \times \llbracket 0, n_2 \rrbracket) = \{(t+u, t), t \in \llbracket 0, n_1 \rrbracket \text{ et } u \in \llbracket 0, n_2 \rrbracket\}$
 $= \{(x, y), y \in \llbracket 0, n_1 \rrbracket \text{ et } x \in \llbracket y, y+n_2 \rrbracket\}$
 $= \{(x, y), x \in \llbracket 0, n_1+n_2 \rrbracket \text{ et } y \in \llbracket \max(0, x-n_2), \min(n_1, x) \rrbracket\}$

★ Pour $(t, u) \in \varphi(\llbracket 0, n_1 \rrbracket \times \llbracket 0, n_2 \rrbracket)$, on a

$$\begin{aligned} P_{(X_1, X_2)}(\varphi^{-1}((t, u)) \cap \llbracket 0, n_1 \rrbracket \times \llbracket 0, n_2 \rrbracket) &= P(\{w \in \Omega, \varphi(X_1(w), X_2(w)) = (t, u) \text{ et } (X_1(w), X_2(w)) \in \llbracket 0, n_1 \rrbracket \times \llbracket 0, n_2 \rrbracket\}) \\ &= P(\{w \in \Omega, X_1(w) = u \text{ et } X_2(w) = t-u\}) \quad \text{car } t \in \llbracket u, u+n_2 \rrbracket \\ &= P((X_1 = u) \cap (X_2 = t-u)) \\ &= P(X_1 = u)P(X_2 = t-u) \\ &= \binom{n_1}{u} \binom{n_2}{t-u} p^t (1-p)^{n_1+n_2-t} \end{aligned}$$

★ Donc

$$P_{(X_1+X_2, X_1)} = \sum_{\substack{t \in \llbracket 0, n_1+n_2 \rrbracket \\ u \in \llbracket \max(0, t-n_2), \min(n_1, t) \rrbracket}} \binom{n_1}{u} \binom{n_2}{t-u} p^t (1-p)^{n_1+n_2-t} \delta_{\{(t, u)\}}$$

- Déterminons $P_{X_1+X_2}$.

Par projection,

$$\begin{aligned} P_{X_1+X_2} &= \sum_{t \in \llbracket 0, n_1+n_2 \rrbracket} \left(\sum_{\substack{(t, u) \\ u \in \llbracket \max(0, t-n_2), \min(n_1, t) \rrbracket}} P_{(X_1+X_2, X_1)}(\{(t, u)\}) \right) \delta_{\{t\}} \\ &= \sum_{t \in \llbracket 0, n_1+n_2 \rrbracket} \left(\sum_{u \in \llbracket \max(0, t-n_2), \min(n_1, t) \rrbracket} \binom{n_1}{u} \binom{n_2}{t-u} p^t (1-p)^{n_1+n_2-t} \right) \delta_{\{t\}} \\ &= \sum_{t \in \llbracket 0, n_1+n_2 \rrbracket} \binom{n_1+n_2}{t} p^t (1-p)^{n_1+n_2-t} \delta_{\{t\}} \end{aligned}$$

- Déterminons la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Ces deux var sont discrets.

★ pour $t \in \llbracket 0, n_1+n_2 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_t &= \{u, P_{(X_1+X_2, X_1)}(t, u) > 0\} \\ &= \llbracket \max(0, t-n_2), \min(n_1, t) \rrbracket \end{aligned}$$

De sorte que

$$P_{X_1}^{X_1+X_2=t} = \sum_{u \in \mathcal{U}_t} \frac{\binom{n_1}{u} \binom{n_2}{t-u} p^t (1-p)^{n_1+n_2-t}}{\binom{n_1+n_2}{t} p^t (1-p)^{n_1+n_2-t}} \delta_{\{u\}} = \sum_{u \in \mathcal{U}_t} \frac{\binom{n_1}{u} \binom{n_2}{t-u}}{\binom{n_1+n_2}{t}} \delta_{\{u\}}$$

★ pour $t \notin \llbracket 0, n_1 + n_2 \rrbracket$ on pose $P_{X_1}^{X_1+X_2=t} = P_{X_1}$.

• Déterminons $E(X_1|X_1 + X_2)$.

Posons $h : (t, u) \mapsto u$. h est continue donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. Alors $h(X_1 + X_2, X_1) \in \mathcal{M}^+(B(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de sorte que

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \int h(t, u) dP_{X_1}^{X_1+X_2=t}(u) \\ &= \begin{cases} \sum_{u \in \mathcal{U}_t} u \frac{\binom{n_1}{u} \binom{n_2}{t-u}}{\binom{n_1+n_2}{t}} & \text{si } t \in \llbracket 0, n_1 + n_2 \rrbracket \\ \sum_{u \in \llbracket 0, n_1 \rrbracket} u \binom{n_1}{u} p^u (1-p)^{n_1-u} & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{tn_1}{n_1+n_2} & \text{si } t \in \llbracket 0, n_1 + n_2 \rrbracket \\ n_1 p & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} E(X_1|X_1 + X_2) &= \frac{n_1}{n_1 + n_2} (X_1 + X_2) \mathbb{1}_{\llbracket 0, n_1+n_2 \rrbracket}(X_1 + X_2) + n_1 p \underbrace{\mathbb{1}_{\llbracket 0, n_1+n_2 \rrbracket^c}(X_1 + X_2)}_{= 0 \text{ } P\text{-p.s}} \\ &= \frac{n_1}{n_1 + n_2} (X_1 + X_2) \quad P\text{-p.s} \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de densité

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}(y+x)} \mathbb{1}_{(\mathbb{R}_+^*)^2}(x, y)$$

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X .
2. Déterminer $E(Y|X)$.

1. (X, Y) étant continu, X est continu de densité $f_X(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}(y+x)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x, y) d\lambda(y)$ Le support de

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$$

X est $(0, \infty)$.

★ Pour $x \in (0, \infty)$, $P_Y^{X=x}$ est une loi continue de densité

$$y \mapsto \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}y}$$

ie une loi exponentielle de paramètre $\frac{x}{2}$.

★ Pour $x \leq 0$, on pose $P_Y^{X=x} = P_Y$.

2. Posons $h : (x, y) \mapsto y$. h est continue donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. D'après la forme de la densité f , Y est ≥ 0 P -p.s, de sorte que $h(X, Y) \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \Psi(x) &= \begin{cases} \int y \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}y} d\lambda(y) & \text{si } x > 0 \\ \int y f_Y(y) d\lambda(y) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x > 0 \\ \int y f_Y(y) d\lambda(y) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $P(X > 0) = 1$,

$$E(Y|X) = \frac{2}{X} \quad P\text{-p.s}$$

Exercice 3

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de densité $f(x, y) = e^{-y} \mathbb{1}_D(x, y)$ avec $D = \{(x, y), 0 < x < y\}$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant Y .
2. Soit $h \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déterminer $E(h(\frac{X}{Y})|Y)$.
3. Sans calculer la loi de $(\frac{X}{Y}, Y)$, montrer que $\frac{X}{Y}$ et Y sont indépendantes.

$$\begin{aligned}
 1. (X, Y) \text{ étant continu, } Y \text{ est continu de densité } f_Y(y) &= \int e^{-y} \mathbb{1}_D(x, y) d\lambda(x) \\
 &= \int e^{-y} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) \mathbb{1}_{(0, y)}(x) d\lambda(x) \\
 &= y e^{-y} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y)
 \end{aligned}$$

Le support de Y est $(0, \infty)$.

★ Pour $y > 0$, $P_X^{Y=y}$ est une loi continue de densité $x \mapsto \frac{1}{y} \mathbb{1}_{(0, y)}(x)$.

★ Pour $y \leq 0$, on pose $P_X^{Y=y} = P_X$.

2. Soit $h \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Posons $g : (x, y) \mapsto h(\frac{x}{y})$. g est mesurable positive.

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \Psi(y) &= \begin{cases} \int h(\frac{x}{y}) \frac{1}{y} \mathbb{1}_{(0, y)}(x) d\lambda(x) & \text{si } y > 0 \\ \int h(\frac{x}{y}) dP_X(x) & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \int h(u) \mathbb{1}_{(0, 1)}(u) d\lambda(u) & \text{si } y > 0 \\ \int h(\frac{x}{y}) dP_X(x) & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Comme $P(Y > 0) = 1$,

$$E(h(\frac{X}{Y})|Y) = \int h(u) \mathbb{1}_{(0, 1)}(u) d\lambda(u) \quad P\text{-p.s.}$$

3. On fait appel au critère des espérances. Soient $g, h \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

$$\begin{aligned}
 E \left[g(Y) h\left(\frac{X}{Y}\right) \right] &= E \left[E \left(g(Y) h\left(\frac{X}{Y}\right) \middle| Y \right) \right] \\
 &= E \left[g(Y) E \left(h\left(\frac{X}{Y}\right) \middle| Y \right) \right] \quad \text{car } g(Y) \in \mathcal{M}(\sigma(Y), \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\
 &= E \left[g(Y) \int \dots \right] \quad \text{d'après 2.} \\
 &= \left(\int \dots \right) E(g(Y)) \quad \text{l'intégrale est une constante} \\
 &= E \left(\int \dots \right) E(g(Y)) \quad \text{l'intégrale est une constante} \\
 &= E \left[E \left(h\left(\frac{X}{Y}\right) \middle| Y \right) \right] E(g(Y)) \quad \text{d'après 2.} \\
 &= E \left(h\left(\frac{X}{Y}\right) \right) E(g(Y))
 \end{aligned}$$

Donc $\frac{X}{Y}$ et Y sont indépendantes.

Exercice 4

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de densité

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - xy + y^2)}$$

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X .
2. Montrer que $Y - \frac{X}{2}$ est indépendant de X et préciser sa loi.

$$\begin{aligned} 1. (X, Y) \text{ étant continu, } X \text{ est continu de densité } f_X(x) &= \frac{1}{4\pi} \int e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{x}{2})^2} e^{-\frac{x^2}{8}} d\lambda(y) \\ &= \frac{e^{-x^2/8} \sqrt{2\pi}}{4\pi} \end{aligned}$$

Le support de X est \mathbb{R} .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_Y^{X=x}$ est une loi continue de densité

$$y \mapsto \frac{\frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - xy + y^2)}}{\frac{e^{-x^2/8} \sqrt{2\pi}}{4\pi}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{x}{2})^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

qui est la densité d'une loi normale de paramètres $(\frac{x}{2}, 1)$.

2. Soit $h \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Posons $\varphi : (x, y) \mapsto h(y - \frac{x}{2})$. φ étant mesurable positive, on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \int \varphi(x, y) dP_Y^{X=x}(y) \\ &= \int h(y - \frac{x}{2}) \frac{e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{x}{2})^2}}{\sqrt{2\pi}} d\lambda(y) \\ &= \int h(y) \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} d\lambda(y) \\ &= C_h \end{aligned}$$

De sorte que $E(h(Y - \frac{X}{2})|X) = C_h$ P -p.s

$$\begin{aligned} \text{Soit } g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R})). \text{ On a } E\left[g(X)h(Y - \frac{X}{2})\right] &= E\left[E\left(g(X)h(Y - \frac{X}{2})\right)|X\right] \\ &= E\left[g(X)E\left(h(Y - \frac{X}{2})|X\right)\right] \\ &= E[g(X)C_h] \\ &= C_h E[g(X)] \\ &= E(C_h)E[g(X)] \\ &= E\left[E\left(h(Y - \frac{X}{2})|X\right)\right] E[g(X)] \\ &= E\left(h(Y - \frac{X}{2})\right) E(g(X)) \end{aligned}$$

Donc X et $Y - \frac{X}{2}$ sont indépendants.

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs, } \int h(u) dP_{Y-\frac{X}{2}}(u) &= E(h(Y - \frac{X}{2})) = E\left[E\left(h(Y - \frac{X}{2})|X\right)\right] \\ &= E(C_h) \\ &= C_h \\ &= \int h(y) \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} d\lambda(y) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout h , $Y - \frac{X}{2}$ admet une densité par rapport à λ donnée par $y \mapsto \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}}$.

Donc $Y - \frac{X}{2}$ suit la loi normale de paramètres $(0, 1)$.

Exercice 5

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de loi $P_{(X,Y)}$ admettant une densité par rapport à $N \otimes \lambda$, N étant la mesure de comptage sur \mathbb{N} . Cette densité est donnée par

$$f(x, y) = \frac{y^{p+x-1}}{x!} \frac{\theta^p}{(p-1)!} e^{-(\theta+1)y} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x) \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y)$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\theta > 0$.

1. Calculer P_X .
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X .
3. Calculer $E(Y|X)$.

1. X est la marginale d'un couple à densité, de sorte que

$$f_X(x) = \int f(x, y) d\lambda(y) = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x) \binom{p+x-1}{x} \frac{\theta^p}{(\theta+1)^{p+x}}$$

Alors $P_X(\{x\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x\}}(k) f_X(k)$. X est donc discrète, de support \mathbb{N} , de loi

$$P_X = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_X(k) \delta_{\{k\}}$$

2. On a pour $(A, B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^2$,

$$P_{(X,Y)}(A, B) = P_{(X,Y)}(A \cap \mathbb{N}, B) + P_{(X,Y)}(A \cap \mathbb{N}^c, B)$$

Avec

$$\begin{aligned} P_{(X,Y)}(A \cap \mathbb{N}, B) &= \int_{A \cap \mathbb{N}} f_X(x) \left(\frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} \int_{B \cap \mathbb{R}_+^*} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} d\lambda(y) \right) dN(x) \\ &= \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x) \frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} \int_{B \cap \mathbb{R}_+^*} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} d\lambda(y) dP_X(x) \end{aligned}$$

$P_{(X,Y)}(A \cap \mathbb{N}^c, B) \leq P_{(X,Y)}(\mathbb{N}^c, \mathbb{R}) = P_X(\mathbb{N}^c) = 0$, donc

$$P_{(X,Y)}(A, B) = \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x) \frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} \int_{B \cap \mathbb{R}_+^*} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} d\lambda(y) dP_X(x)$$

$$\begin{aligned} \text{On pose donc } N(x, B) &= \begin{cases} \frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} \int_{B \cap \mathbb{R}_+^*} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} d\lambda(y) & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ P_y(B) & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_B \frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y) d\lambda(y) & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ P_y(B) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{N}$, $N(x, \cdot)$ admet une densité par rapport à λ donnée par

$$\frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)$$

On reconnait la densité d'une loi $\Gamma(p+x, \theta+1)$.

3. Posons $h : (x, y) \mapsto y$. h est continue donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. D'après la forme de la densité f , Y est ≥ 0 P -p.s, de sorte que $h(X, Y) \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \Psi(x) &= \begin{cases} \int y \frac{(\theta+1)^{p+x}}{(p+x-1)!} y^{p+x-1} e^{-(\theta+1)y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y) d\lambda(y) & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ \int y dP_y(y) & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{p+x}{\theta+1} & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ \int y dP_y(y) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $P(X \in \mathbb{N}) = 1$,

$$E(Y|X) = \frac{p+X}{\theta+1}$$

Exercice 6

Soient U une var de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et X une variable positive P -p.s, indépendante de U . Calculer $E(\inf(X, U)|X)$.

Comme X et U sont indépendants, la loi conditionnelle de U sachant X est simplement $P_U^{X=x} = P_U$. Par ailleurs, $\inf(X, U) = X \mathbb{1}_{X \leq U} + U \mathbb{1}_{U < X}$, de sorte que

$$\begin{aligned} E(\inf(X, U)|X) &= E(X \mathbb{1}_{X \leq U} + U \mathbb{1}_{U < X}|X) \\ &= E(X \mathbb{1}_{X \leq U}|X) + E(U \mathbb{1}_{U < X}|X) \\ &= X E(\mathbb{1}_{X \leq U}|X) + E(U \mathbb{1}_{U < X}|X) \end{aligned}$$

$(x, u) \mapsto \mathbb{1}_{x \leq u}$ est mesurable positive (il s'agit de $(x, u) \mapsto \mathbb{1}_D(x, u)$ avec $D = \{(x, u), u \geq x\}$ qui est fermé donc borélien), et $(x, u) \mapsto u \mathbb{1}_{u < x}$ est mesurable comme produit de $(x, u) \mapsto u$ et $(x, u) \mapsto \mathbb{1}_D(x, u)$ où $D = \{(x, u), x > u\}$ qui est ouvert donc borélien). De plus, U est ≥ 0 P -p.s, donc $U \mathbb{1}_{U < X} \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. En calculant les deux intégrales correspondantes (en passant par la densité de U),

$$E(\mathbb{1}_{X \leq U}|X) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(X) + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(X) e^{-\lambda X}$$

et

$$E(U \mathbb{1}_{U < X}|X) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(X) \left(-X e^{-\lambda X} + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda X}}{\lambda} \right)$$

Comme $X \geq 0$ P -p.s, $E(\mathbb{1}_{X \leq U}|X) = e^{-\lambda X}$ et

$$E(U \mathbb{1}_{U < X}|X) = -X e^{-\lambda X} + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda X}}{\lambda}$$

Finalement,

$$E(\inf(X, U)|X) = \frac{1 - e^{-\lambda X}}{\lambda}$$

Exercice 7

Soit N une var discrète de loi P_N de support $\llbracket 0, n \rrbracket$ donnée par

$$P_N = \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \alpha_k \delta_{\{k\}}$$

Soit (X_n) une suite de var indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0, 1)$.

On suppose que N et les X_n sont indépendants.

Soit S la var définie par $S = \sum_{k=0}^N X_k$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de S sachant N .
2. Calculer $E(S|N)$ et $E(S^2|N)$. En déduire $E(S)$ et $E(S^2)$ en fonction de $E(N)$ et $E(N^2)$.
3. Déterminer la loi de (N, S) .
4. Soit $q \in (0, 1)$. Déterminer la loi de N pour que la loi conditionnelle de N sachant $S = 0$ soit la loi binomiale de paramètre (n, q)

1. • X_0, \dots, X_n, N étant discrets et indépendants, (X_0, \dots, X_n, N) est un vaR discret. Par ailleurs, $S = \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \leq N} X_k$. Or $\varphi : (x_0, \dots, x_n, m) \mapsto (p, \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \leq m} x_k)$ est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+2}), \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ -mesurable, de sorte que (N, S) est un var discret, de support $\llbracket 0, n \rrbracket \times \varphi(\{0, 1\}^{n+1} \times \llbracket 0, n \rrbracket) = \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

• Déterminons, pour $(m, s) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $P_{(N,S)}(\{(m, s)\}) = P((N = m) \cap (S = s))$

$$= P((N = m) \cap \left(\sum_{k=0}^m X_k = s \right))$$

Or à m fixé, X_1, \dots, X_m, N sont indépendantes, et d'après le lemme des coalitions, $\sum_{k=1}^m X_k$ et N sont indépendantes, de sorte que

$$\begin{aligned} P_{(N,S)}(\{(m, s)\}) &= P((N = m) \cap \left(\sum_{k=0}^m X_k = s \right)) \\ &= P(N = m) P\left(\underbrace{\sum_{k=0}^m X_k}_{\text{suit une loi } \mathcal{B}(m+1, p)} = s \right) \\ &= \alpha_m \binom{m+1}{s} p^s (1-p)^{m+1-s} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P_{(N,S)} = \sum_{(m,s) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n+1 \rrbracket} \alpha_m \binom{m+1}{s} p^s (1-p)^{m+1-s} \delta_{\{(m,s)\}}$$

• Déterminons la loi conditionnelle de S sachant N . N et S sont discrets.

On a pour $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $U_m = \{s \in \mathbb{R}, P_{(N,S)}(\{(m, s)\} > 0)\}$

$$= \llbracket 0, m+1 \rrbracket$$

★ Pour $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_S^{N=m} = \sum_{s \in U_m} \frac{P_{(N,S)}(\{(m, s)\})}{P_N(\{m\})} \delta_{\{s\}}$

$$= \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m+1}{s} p^s (1-p)^{m+1-s} \delta_{\{s\}}$$

★ Pour $m \notin \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_S^{N=m} = P_S$.

2. S est un var positif, donc $E(S|N)$ est bien défini et vaut

$$\begin{aligned} E(S|N) &= E\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \leq N} X_k | N\right) \\ &= \sum_{k=0}^n E(\mathbb{1}_{k \leq N} X_k | N) \quad \text{par linéarité} \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \leq N} E(X_k | N) \quad \text{car } \mathbb{1}_{k \leq N} \in \mathcal{M}(\sigma(N), \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \leq N} E(X_k) \quad \text{par indépendance} \\ &= p \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{k \leq N} \\ &= p(N+1) \end{aligned}$$

On a $S^2 = (\mathbb{1}_{\llbracket 0, n \rrbracket}(N) + \underbrace{\mathbb{1}_{\llbracket 0, n \rrbracket^c}(N)}_{=0 \text{ P-p.s.}})S^2 = \mathbb{1}_{\llbracket 0, n \rrbracket}(N)S^2$

$$= \sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\{j\}}(N) \left(\sum_{k=0}^j X_k \right)^2$$

De sorte que

$$E(S^2|N) = \sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\{j\}}(N) E \left[\left(\sum_{k=0}^j X_k \right)^2 \right]$$

Or à j fixé, $Y_j := \sum_{k=0}^j X_k$ suit une loi binomiale de paramètres $(j+1, p)$, de sorte que

$$E \left[\left(\sum_{k=0}^j X_k \right)^2 \right] = V(Y_j) + E(Y_j)^2 = (j+1)p(1-p) + (j+1)^2 p^2 = p(j+1)(jp+1)$$

D'où $E(S^2|N) = \sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\{j\}}(N) p(j+1)(jp+1) = p(N+1)(pN+1) = p(pN^2 + (p+1)N + 1)$

Par conséquent, $E(S) = p(E(N) + 1)$ et $E(S^2) = p(pE(N^2) + (p+1)E(N) + 1)$

3. cf 1.

4. Avec des calculs similaires à 1, $P_N^{S=0} = \sum_{m=0}^n \alpha_m \delta_{\{m\}} = P_N$. $P_N^{S=0}$ suit $\mathcal{B}(n, q)$ si et seulement si $P_N = \mathcal{B}(n, q)$.

Exercice 8

Soit (X_n) une suite de v.a. intégrables, indépendantes et de même loi. Pour tout $n \geq 1$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $E(S_n|X_i)$.
2. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $P_{(X_1, S_n)} = P_{(X_k, S_n)}$.
3. En déduire que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $E(X_1|S_n) = E(X_k|S_n)$.
4. Calculer $E(S_n|S_n)$. En déduire $E(X_1|S_n)$.

$$\begin{aligned}
 1. \text{ On montre facilement que } S_n \text{ est intégrable, donc } E(S_n|X_i) \text{ existe. On a } E(S_n|X_i) &= E\left(\sum_{k=1}^n X_k \middle| X_i\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n E(X_k|X_i) \\
 &= E(X_i|X_i) + \sum_{k \neq i} E(X_k|X_i) \\
 &= X_i + (n-1)E(X_1)
 \end{aligned}$$

2. Par indépendance de X_1, \dots, X_n , $P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$. Comme les variables sont identiquement distribuées, $P_{X_1} = P_{X_2}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
 P_{(X_1, \dots, X_n)} &= P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n} \\
 &= P_{X_2} \otimes P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n} \\
 &= P_{(X_2, X_1, \dots, X_n)}
 \end{aligned}$$

Considérons $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \sum_{k=1}^n x_k)$. φ est continue, donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ -mesurable. L'égalité en loi est préservée : $P_{\varphi(X_1, \dots, X_n)} = P_{\varphi(X_2, \dots, X_n)}$ ie

$$P_{(X_1, S_n)} = P_{(X_2, S_n)}$$

On procède de même avec $k > 2$.

3. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Considérons $C \in \sigma(S_n)$. On dispose de $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $C = S_n^{-1}(B)$. Alors

$$\begin{aligned}
 E(\mathbb{1}_C E(X_1|S_n)) &= E(\mathbb{1}_C X_1) = E(\mathbb{1}_B(S_n) X_1) \\
 &= \int x \mathbb{1}_B(s) dP_{(X_1, S_n)}(x, s) \quad \text{transfert justifié par} \\
 &\int |X_1(w)| \mathbb{1}_B(S_n(w)) dP(w) \leq \int |X_1(w)| dP(w) < \infty \\
 &= \int x \mathbb{1}_B(s) dP_{(X_k, S_n)}(x, s) \\
 &= E(\mathbb{1}_C X_k) \\
 &= E(\mathbb{1}_C E(X_k|S_n))
 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $C \in \sigma(S_n)$, on a $E(X_1|S_n) = E(X_k|S_n)$

$$\begin{aligned}
 4. \text{ On a par linéarité } E(S_n|S_n) &= \sum_{k=1}^n E(X_k|S_n) \\
 &= nE(X_1|S_n) \quad \text{par 3.}
 \end{aligned}$$

Or $S_n \in \mathcal{M}(\sigma(S_n), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donc $E(S_n|S_n) = S_n$. En conclusion :

$$E(X_1|S_n) = \frac{S_n}{n}$$

3. Fonction caractéristique

Exercice 1

Déterminer la fonction caractéristique des lois suivantes

1. Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
2. Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
3. Loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$.
4. Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
5. Loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
6. Soient X_1, \dots, X_n n var discrètes, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0, 1)$. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Dans chaque cas on applique le théorème de transfert, ce qui est licite car $x \mapsto e^{itx}$ est bornée.

1. $\phi_X(t) = e^{it \cdot 1} p + e^{it \cdot 0} (1 - p) = 1 - p + pe^{it}$
2. $\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda + \lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$
3. $\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} (1 - p)^{k-1} p = pe^{it} \sum_{k=0}^{\infty} ((1 - p)e^{it})^k = \frac{pe^{it}}{1 - (1 - p)e^{it}}$
4. $\phi_X(t) = \sum_{k=0}^n e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1 - p)^{n-k} = (1 - p + pe^{it})^n$
5. $\phi_X(t) = \int e^{itx} \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) d\lambda(x) = \int_{(0, \infty)} \theta e^{x(-\theta + it)} d\lambda(x) = \frac{\theta}{\theta - it}$
6. X_1, \dots, X_n étant indépendantes et de même loi,

$$\phi_{S_n}(t) = (\phi_{X_1}(t))^n = (1 - p + pe^{it})^n$$

Exercice 2

On admet que la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{C}(1)$ est $\forall t, \phi(t) = e^{-|t|}$.

Soient X_1, \dots, X_n n var continues, indépendantes, et de même loi $\mathcal{C}(1)$.

1. Calculer la fonction caractéristique de $X_1 + X_2$ et celle de $2X_1$. Que constatez-vous ?
2. Soient ϕ_U et ϕ_V les fonctions caractéristiques respectives de deux var U et V qui vérifient $\phi_{U+V} = \phi_U \phi_V$. Cela implique-t-il que U et V sont indépendantes ?
3. Calculer la loi de $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Par indépendance, $\phi_{X_1+X_2}(t) = (\phi_{X_1}(t))^2 = e^{-2|t|}$. Par ailleurs,

$$\phi_{2X_1}(t) = E(e^{it2X_1}) = \phi_{X_1}(2t) = e^{-2|t|}$$

Par injectivité, $2X_1 \sim X_1 + X_2$.

2. Non. On a $\phi_{X_1+X_1} = \phi(X_1)^2$, pourtant X_1 n'est pas indépendant de X_1 . Sinon,

$$P(X_1 \geq 0) = P((X_1 \geq 0) \cap (X_1 \geq 0)) = P(X_1 \geq 0)^2$$

donc $P(X_1 \geq 0) \in \{0, 1\}$, or $P(X_1 \geq 0) = \frac{1}{2}$, absurde.

3. $\phi_{\bar{X}_n}(t) = E(e^{it \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}) = E(\prod_{k=1}^n e^{i \frac{t}{n} X_i}) = \prod_{k=1}^n E(e^{i \frac{t}{n} X_i}) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_i}(\frac{t}{n}) = (\phi_{X_1}(\frac{t}{n}))^n = e^{-|t|}$

Par injectivité, \overline{X}_n suit $\mathcal{C}(1)$.

Exercice 3

Soit X une var ayant une fonction caractéristique du type $\phi(t) = e^{At^2+Bt+C}$ avec $A, B, C \in \mathbb{C}^3$.
Montrer que X suit une loi normale et en déterminer les paramètres.

ϕ étant une fonction caractéristique, $\phi(0) = 1$, donc $e^C = 1$, de sorte que $\phi(t) = e^{At^2+Bt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Lemme : Si $z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

En effet,

$$\begin{aligned}\overline{e^z} &= \overline{\exp(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)} = \overline{\exp(\operatorname{Re} z) \exp(i \operatorname{Im} z)} = \exp(\operatorname{Re} z) \exp(-i \operatorname{Im} z) \\ &= e^{\overline{z}}\end{aligned}$$

ϕ étant une fonction caractéristique, $\overline{\phi(t)} = \phi(-t)$ ie $e^{\overline{At^2+Bt}} = e^{At^2-Bt}$ soit encore $e^{(A-\overline{A})t^2} = e^{(B+\overline{B})t}$ ie $e^{2i \operatorname{Im} At^2} = e^{2 \operatorname{Re} Bt}$ (*).

Le membre de droite est réel, de sorte que pour t ,

$$\operatorname{Im} e^{2i \operatorname{Im} At^2} = 0$$

donc $\sin(2 \operatorname{Im} At^2) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Donc $\operatorname{Im} A = 0$. (*) devient $e^{2 \operatorname{Re} Bt} = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $\operatorname{Re} B = 0$.

Donc $\phi(t) = e^{\operatorname{Re} At^2 + i \operatorname{Im} Bt}$. Comme ϕ est une fonction caractéristique, $|\phi| \leq 1$, donc $\operatorname{Re} A \leq 0$.

• Si $\operatorname{Re} A = 0$, $\phi(t) = e^{i \operatorname{Im} Bt}$. Par injectivité, X est constante presque-sûrement (égale à $\operatorname{Im} B$).

• Si $\operatorname{Re} A < 0$, $\phi(t) = e^{i \operatorname{Im} Bt - t^2 \frac{(\sqrt{-2 \operatorname{Re} A})^2}{2}}$

Par injectivité, X suit la loi normale de paramètre $(\operatorname{Im} B, -2 \operatorname{Re} A)$

Culture : Si $e^{P(t)}$ est une fonction caractéristique (où P est un polynôme), alors $\deg P \leq 2$. (théorème de Marcinkiewicz 1933)

Exercice 4

Soit X une var continue de loi de Laplace de paramètre 1.

1. Montrer que X a des moments à tout ordre. Calculer $E(X^{2n+1})$ et $E(X^{2n})$.
2. Montrer que la fonction caractéristique de X est donnée par $\phi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
3. En déduire que $\forall t \in (-1, 1)$, $\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$.
4. On admet que $\phi^{(k)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n t^{2n}]^{(k)}$. Déterminer $\phi^{(2n)}(0)$. En déduire $E(X^{2n})$.

1. La densité de X par rapport à λ est donnée par $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |x|^n dP_X(x) = \int |x|^n f_X(x) d\lambda(x) = \frac{1}{2} \int |x|^n e^{-|x|} d\lambda(x) < \infty$$

par un argument asymptotique. Donc $E(|X|^n) < \infty$ et X admet des moments à tout ordre.

Par ailleurs, $E(X^{2n+1}) = \frac{1}{2} \int \underbrace{x^{2n+1} e^{-|x|}}_{\text{impaire}} d\lambda(x) = 0$ et

$$E(X^{2n}) = \frac{1}{2} \int x^{2n} e^{-|x|} d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^+} x^{2n} e^{-x} d\lambda(x) = \Gamma(2n+1) = (2n)!$$

2. La fonction caractéristique de X est donnée par

$$\begin{aligned}\phi(t) &= E(e^{itX}) = \int e^{itx} \frac{1}{2} e^{-|x|} d\lambda(x) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^-} e^{itx} e^x d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}^+} e^{itx} e^{-x} d\lambda(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^-} e^{x(1+it)} d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}^+} e^{x(-1+it)} d\lambda(x) \right) \\ &= \frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

3. En développant en série entière le résultat obtenu, on a pour $t \in (-1, 1)$,

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

4. On a $\phi^{(k)}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k 2k(2k-1) \dots (2k-(2n-1)) t^{2k-2n}$
donc $\phi^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)!$. D'après le cours, $\phi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$, donc

$$E(X^{2n}) = (2n)!$$

Exercice 5

Soit (X_n) une suite de var indépendantes et de même loi μ symétrique. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ suit la loi μ .

1. Montrer que ϕ la fonction caractéristique associée à μ est paire et réelle.
2. Trouver une relation de récurrence sur ϕ .
3. Montrer par l'absurde que $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) > 0$.
4. On pose $\forall t \in \mathbb{R}, p(t) = \ln(\phi(t))$.
 - (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{N}, p(t) = tp(1)$.
 - (b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{Q}^+, p(t) = tp(1)$.
 - (c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+, p(t) = tp(1)$.
 - (d) En déduire $p(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 - (e) Montrer que $p(1) \leq 0$.
 - (f) En déduire ϕ et μ .

1. μ étant symétrique, $P_{X_1} = P_{-X_1}$, donc d'après le cours, ϕ est paire et réelle.

2. Pour $n \geq 1$, \bar{X}_n et X_1 ont même loi, donc même fonction caractéristique, de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{\bar{X}_n}(t) = \phi(t)$ donc $E(\prod_{i=1}^n e^{i \frac{t}{n} X_i}) = \phi(t)$ et par indépendance, $\phi(\frac{t}{n})^n = \phi(t)$.

3. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(t_0) = 0$. Alors pour tout $n \geq 1$, $0 = \phi(t_0) = \phi(\frac{t_0}{n})^n$ donc $\phi(\frac{t_0}{n}) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Or $\lim_n \frac{t_0}{n} = 0$ et ϕ est continue en 0 avec $\phi(0) = 1$. Donc $0 = \lim_n \phi(\frac{t_0}{n}) = \phi(0) = 1$. Absurde.

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, et ne s'annule pas, donc garde un signe constant. Or $\phi(0) = 1$. Donc $\phi > 0$.

4. a) L'égalité de 2. se réécrit $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, \phi(t)^n = \phi(nt)$ et en passant au log ($\phi > 0$ par 3.), on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, p(nt) = np(t) \quad (*)$$

Avec $t = 1$ on a bien $p(n) = np(1)$ pour tout $n \geq 0$.

b) • Pour $b \in \mathbb{N}^*$, avec $t = \frac{1}{b}$ dans (*), on a $p(1) = p(b \cdot \frac{1}{b}) = bp(\frac{1}{b})$, de sorte que

$$p(\frac{1}{b}) = \frac{p(1)}{b}$$

• Pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, $p(\frac{a}{b}) = p(a \cdot \frac{1}{b}) = ap(\frac{1}{b}) = a\frac{p(1)}{b} = \frac{a}{b}p(1)$
Donc pour tout $t \in \mathbb{Q}^+$, $p(t) = tp(1)$.

c) ϕ et \ln étant continus, p est continue sur \mathbb{R} . On étend l'égalité précédente à \mathbb{R}^+ par densité des rationnels.

d) Par parité, on a pour tout $t \leq 0$, $p(t) = p(-t) = (-t)p(1) = |t|p(1)$, donc $p(t) = |t|p(1)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

e) On a $0 < \phi(t) \leq |\phi(t)| \leq 1$, donc $p(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $p(1) \leq 0$.

f) Si $p(1) = 0$, pour tout t , $\phi(t) = 1 = E(e^{it0})$ et par injectivité, X est presque sûrement constante, égale à 0.

Si $p(1) < 0$, pour tout t , $\phi(t) = e^{-|t|(-p(1))}$ donc μ est la loi de Cauchy de paramètre $-p(1)$.

Exercice 6

Soient X et Y des var indépendantes, de même loi, de carré intégrable et telles que $E(X) = 0$, $V(X) = 1$. On note ϕ la fonction caractéristique de X .

1. On suppose que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et X ont même loi.

- (a) Calculer $\phi'(0)$, $\phi''(0)$ et montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \phi\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$
- (b) En déduire une relation de récurrence satisfaite par ϕ puis donner la loi de X .

2. On suppose que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.

- (a) Calculer les fonctions caractéristiques de $X + Y$, $X - Y$ et $2X$.
- (b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(2t)\phi(-2t) = [\phi(t)\phi(-t)]^4$ puis une relation de récurrence sur ϕ .
- (c) Montrer que ϕ ne s'annule pas.
- (d) Notons $p(t) = \frac{\phi(t)}{\phi(-t)}$. Montrer que $p(2t) = p(t)^2$ et établir une relation de récurrence sur p .
- (e) Montrer que $p(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (f) En déduire une relation de récurrence sur ϕ .
- (g) Déterminer ϕ puis la loi de X .

1. a) X admet un moment d'ordre 2. D'après le cours on a $\phi'(0) = iE(X) = 0$ et $\phi''(0) = -E(X^2) = -1$.
 $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et X ont même loi, donc même fonction caractéristique : pour $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{\frac{X+Y}{\sqrt{2}}}(t) = \phi_X(t)$ ie $E(e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}X} e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}Y}) = \phi_X(t)$ et par indépendance, $E(e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}X})E(e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}Y}) = \phi_X(t)$. Comme X et Y ont même loi, on obtient

$$\phi(t) = \phi\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$$

b) L'égalité précédente se réécrit $\phi(\sqrt{2}t) = \phi^2(t)$ ie $\phi(2^{1/2}t) = \phi^{2^1}(t)$.

En remplaçant t par $\sqrt{2}t$, $\phi(2t) = \phi^2(\sqrt{2}t) = \phi^4(t)$ ie $\phi(2^1t) = \phi^{2^2}(t)$.

En remplaçant t par $\sqrt{2}t$, $\phi(2^{3/2}t) = \phi^4(\sqrt{2}t) = \phi^8(t) = \phi^{2^3}(t)$.

On conjecture et on prouve facilement par récurrence que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \phi(2^{n/2}t) = \phi^{2^n}(t)$$

ce qui se réécrit encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \phi(t) = \phi^{2^n}\left(\frac{t}{2^{n/2}}\right)$$

ce qui implique

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \phi(t) = \phi^{2^{2^n}}\left(\frac{t}{2^n}\right)$$

D'après le cours, ϕ est C^2 et on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ où le terme d'erreur est **potentiellement complexe**. On dispose alors de $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et nulle en 0 telle que pour tout t ,

$$\phi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t^2)$$

On fixe $t \in \mathbb{R}$ et on a

$$\phi^{2^{2n}}\left(\frac{t}{2^n}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}} + \frac{t^2}{2^{2n}} \varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right)^{2^{2n}}$$

On dispose de N_0 tel que $n \geq N_0 \implies 1 - \frac{t^2}{2^{2n+1}} \geq 0$. Pour $n \geq N_0$,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}} + \frac{t^2}{2^{2n}} \varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right)^{2^{2n}} &= \sum_{k=0}^{2^{2n}} \binom{2^{2n}}{k} \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}}\right)^k \left[\frac{t^2}{2^{2n}} \varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right]^{2^{2n}-k} \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \binom{2^{2n}}{k} \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}}\right)^k \left[\frac{t^2}{2^{2n}} \varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right]^{2^{2n}-k} \end{aligned}$$

Or $\left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}}$ est une sous-suite de $(1 - \frac{t^2/2}{n})^n$. Cette suite converge (moyennant un développement asymptotique classique) vers $e^{-t^2/2}$. Il suffit donc de prouver que

$$\sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \binom{2^{2n}}{k} \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}}\right)^k \left[\frac{t^2}{2^{2n}} \varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right]^{2^{2n}-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \binom{2^{2n}}{k} \underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}}\right)^k}_{\geq 0} \left[\frac{t^2}{2^{2n}} \varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right]^{2^{2n}-k} \right| &\leq \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \binom{2^{2n}}{k} \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}}\right)^k \left[\frac{t^2}{2^{2n}} \left|\varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right|\right]^{2^{2n}-k} \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}} + \frac{t^2}{2^{2n}} \left|\varepsilon\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right|\right)^{2^{2n}} - \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}} \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)^{2^{2n}} - \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)^{2^{2n}} - \left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}} &= \exp\left[2^{2n} \ln\left(1 - \frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)\right] - e^{-t^2/2} + o(1) \\ &= \exp\left[2^{2n} \left(-\frac{t^2}{2} \frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)\right] - e^{-t^2/2} + o(1) \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2} + o(1)\right) - e^{-t^2/2} + o(1) \\ &= e^{-t^2/2} + o(1) - e^{-t^2/2} + o(1) \\ &= o(1) \end{aligned}$$

Donc $\lim_n \phi^{2^{2n}}\left(\frac{t}{2^n}\right) = e^{-t^2/2}$ ie $\phi(t) = e^{-t^2/2}$ et par injectivité X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

2. a) Par indépendance de X et Y et égalité des lois, $\phi_{X+Y}(t) = \phi^2(t)$, $\phi_{X-Y}(t) = \phi(t)\phi(-t)$ et $\phi_{2X}(t) = \phi(2t)$.

b) Par indépendance de $X + Y$ et $X - Y$,

$$\phi_{2X}(t) = \phi_{(X+Y)+(X-Y)}(t) = \phi_{X+Y}(t)\phi_{X-Y}(t) = \phi^3(t)\phi(-t)$$

donc $\phi(2t) = \phi^3(t)\phi(-t)$. En remplaçant t par $-t$, $\phi(-2t) = \phi(t)\phi^3(-t)$ et en multipliant les deux égalités, il vient

$$\phi(2t)\phi(-2t) = (\phi(t)\phi(-t))^4$$

En posant $\psi : t \mapsto \phi(t)\phi(-t)$, on a $\psi(2t) = \psi^4(t)$, donc (récurrence immédiate) pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\psi(2^n t) = \psi^{2^{2n}}(t)$ ou encore $\psi(t) = \psi^{2^{2n}}(\frac{t}{2^n})$.

c) En supposant l'existence de t_0 tel que $\phi(t_0) = 0$, on a $\psi(t_0) = 0$ donc pour tout n , $\psi^{2^{2n}}(\frac{t_0}{2^n}) = 0$ ie $0 = \psi(\frac{t_0}{2^n}) = \phi(\frac{t_0}{2^n})\phi(-\frac{t_0}{2^n})$. On dispose alors de $t_n \rightarrow 0$ telle que pour tout n , $\phi(t_n) = 0$, ce qui contredit la continuité de ϕ en 0.

d) On a $p(2t) = \frac{\phi(2t)}{\phi(-2t)} = \frac{\phi^3(t)\phi(-t)}{\phi^3(-t)\phi(t)} = \frac{p(t)^3}{p(t)} = p(t)^2$

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$p(2^n t) = p^{2^n}(t)$$

ou encore

$$p(t) = p^{2^n}(\frac{t}{2^n})$$

e) Par ailleurs, $p(t) = \frac{\phi(t)}{\phi(-t)} = \frac{1 - t^2/2 + o(t^2)}{1 - t^2/2 + o(t^2)} = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \left(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)$ où $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue
 $= 1 + o(t^2) = 1 + t^2 \varepsilon(t^2)$

et nulle en 0.

De même que précédemment, $p(t) = \lim_n p^{2^n}(\frac{t}{2^n}) = 1$.

f) ϕ est donc réelle, avec $\phi(2t) = \phi^4(t)$, donc $\phi(2^n t) = \phi^{2^{2n}}(t)$ et $\phi(t) = \phi^{2^{2n}}(\frac{t}{2^n})$

g) ϕ ne s'annule pas donc $\phi > 0$. On peut directement faire le développement asymptotique et obtenir $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.

Exercice 7

Soit ϕ la fonction caractéristique d'une var X .

1. Supposons qu'il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\phi(t_0)| = 1$.

(a) Montrer qu'il existe θ tel que $P(\cos(t_0 X - \theta) = 1) = 1$.

(b) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(X \in \{a + nb, n \in \mathbb{Z}\}) = 1$. Que pouvez-vous en déduire sur la nature de P_X ?

2. Réciproquement, si $P_X(\{a + nb, n \in \mathbb{Z}\}) = 1$, que peut-on en déduire de sa fonction caractéristique ?

1. a) Comme $|\phi(t_0)| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(t_0) = e^{i\theta}$. Alors $E(e^{i(t_0 X - \theta)}) = 1$ ie $E(\cos(t_0 X - \theta)) + iE(\sin(t_0 X - \theta)) = 1$, donc $E(\cos(t_0 X - \theta)) = 1$ ou encore $E(1 - \cos(t_0 X - \theta)) = 0$.

Or $1 - \cos(t_0 X - \theta) \geq 0$, donc $1 - \cos(t_0 X - \theta) = 0$ P-p.s, donc

$$P(\cos(t_0 X - \theta) = 1) = 1$$

b) Pour $\omega \in \Omega$ on a l'équivalence

$$\cos(t_0 X(\omega) - \theta) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, X(\omega) = \frac{2\pi}{t_0} k + \frac{\alpha}{t_0}$$

de sorte que $1 = P(\cos(t_0 X - \theta) = 1) = P(X \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\alpha}{t_0} + k \frac{2\pi}{t_0}\right))$.

Notons A l'ensemble obtenu. A est dénombrable et $P_X(A) = 1$. Montrons que X est discret. Notons D_X le support de X . On a

$$1 = P_X(A) = P_X(A \cap D_X) + P_X(A \cap D_X^c) = P_X(A \cap D_X)$$

car $A \cap D_X^c$ est dénombrable ($\subset A$) et que si $t \in D_X^c$, $P_X(\{t\}) = 0$, de sorte que $P_X(A \cap D_X^c) \leq \sum_{t \in A \cap D_X^c} P_X(\{t\}) = 0$.

De l'égalité $P_X(A \cap D_X) = 1$ on déduit $P_X(D_X) = 1$ et X discret.

Par ailleurs on prouve facilement que $D_X \subset A$, donc

$$P_X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_X(\{a + nb\}) \delta_{\{a + nb\}}.$$

2. Réciproquement, on a encore $D_X \subset A$, donc $P_X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_X(\{a + nb\}) \delta_{\{a + nb\}}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \phi(t) &= \int e^{itx} dP_X(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{it(a + nb)} P_X(\{a + nb\}) \\ &= e^{ita} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{itnb} P_X(\{a + nb\}) \end{aligned}$$

et $|\phi(t)| = |\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{itnb} P_X(\{a + nb\})|$ qui est $\frac{2\pi}{b}$ -périodique si $b \neq 0$ et constant égal à 1 sinon. Dans les deux cas, il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\phi(t_0)| = 1$.

Exercice 8

Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des var indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Soit $Y = \det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $E(e^{itX_1X_4} | X_4)$.
2. En déduire la fonction caractéristique de X_4 .
3. Déterminer la fonction caractéristique de Y puis la loi de Y .

1. $e^{itX_1X_4}$ étant bornée, elle est intégrable par rapport à n'importe quelle mesure de probabilité donc $E(e^{itX_1X_4} | X_4)$ existe. Soit $h : (x, y) \mapsto e^{itxy}$. h est bornée, donc élément de $\mathcal{L}^1(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{C}), P_{(X_1, X_4)})$. Par conséquent, $E(e^{itX_1X_4} | X_4) = \Psi(X_4)$ où $\Psi(y) = \int e^{itxy} dP_{X_1}^{X_4=y}(x)$. Comme X_1 et X_4 sont indépendantes, $P_{X_1}^{X_4=y} = P_{X_1}$, donc $\Psi(y) = \int e^{itxy} dP_{X_1}(x) = E(e^{ityX}) = \phi(ty) = e^{-(ty)^2/2}$ et $E(e^{itX_1X_4} | X_4) = \Psi(X_4) = e^{-t^2X_4^2/2}$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ On a } \phi_{X_1X_4}(t) &= E(e^{itX_1X_4}) = E[E(e^{itX_1X_4} | X_4)] = E[e^{-t^2X_4^2/2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-t^2x^2/2} e^{-t^2/2} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-u^2/2} d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

3. X_1, X_2, X_3, X_4 étant indépendantes, X_1X_4 et X_2X_3 sont indépendantes par coalition, de sorte que

$$\phi_Y(t) = E(e^{it(X_1X_4 - X_2X_3)}) = \phi_{X_1X_4}(t) \phi_{X_2X_3}(-t) = \frac{1}{1+t^2}$$

donc Y suit la loi de Laplace de paramètre 1.

Exercice 9

Soit N une var de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit (X_n) une suite de var indépendantes, de même loi et indépendantes de N . Soit $S = \sum_{k=0}^N X_k$. Calculer la fonction caractéristique de S en fonction de celle de X_1 .

On a l'égalité $e^{itS} = \mathbb{1}_N(N) e^{itS} + \mathbb{1}_{N^c}(N) e^{itS}$ et comme N est discrète de support \mathbb{N} , $\mathbb{1}_{N^c}(N) e^{itS}$ est nulle P -p.s de sorte que $e^{itS} = \mathbb{1}_N(N) e^{itS}$ P -p.s.

Or $\mathbb{1}_N(N) e^{itS} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{j\}}(N) e^{it \sum_{k=0}^j X_k}$. Considérons

$$Y_n = \sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\{j\}}(N) e^{it \sum_{k=0}^j X_k}$$

On a • chaque Y_n est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ -mesurable.

• $|Y_n| \leq \sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\{j\}}(N) = 1$ avec $\int 1dP(\omega) = P(\Omega) = 1 < \infty$.

• (Y_n) converge simplement vers $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{j\}}(N)e^{it \sum_{k=0}^j X_k}$.

Par convergence dominée, $\int Y_n(\omega)dP(\omega) \rightarrow \int \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{j\}}(N(\omega))e^{it \sum_{k=0}^j X_k(\omega)}dP(\omega)$ ie

$$\sum_{j=0}^n \int \mathbb{1}_{\{j\}}(N(\omega))e^{it \sum_{k=0}^j X_k(\omega)}dP(\omega) \rightarrow \int \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(N)e^{itS(\omega)}dP(\omega) = \int e^{itS(\omega)}dP(\omega) = E(e^{itS})$$

Or $\sum_{j=0}^n \int \mathbb{1}_{\{j\}}(N(\omega))e^{it \sum_{k=0}^j X_k(\omega)}dP(\omega) = \sum_{j=0}^n E(\mathbb{1}_{\{j\}}(N)e^{it \sum_{k=0}^j X_k})$.

Donc $\sum_{j=0}^{\infty} E(\mathbb{1}_{\{j\}}(N)e^{it \sum_{k=0}^j X_k}) = E(e^{itS})$ (*)

Par ailleurs, pour $n \geq 0$, X_0, \dots, X_n, N sont indépendants, donc par coalition, $\sum_{j=0}^n X_k$ et N sont indépendants. De plus, $x \mapsto \mathbb{1}_n(x)$ est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable (car $n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), donc $\sum_{j=0}^n X_k$ et $\mathbb{1}_{\{n\}}(N)$ sont indépendants.

$$\begin{aligned} (*) \text{ devient } E(e^{itS}) &= \sum_{j=0}^{\infty} E(\mathbb{1}_{\{j\}}(N))E(e^{it \sum_{k=0}^j X_k}) = \sum_{j=0}^{\infty} P(N=j)(\phi_{X_1}(t))^{j+1} \\ &= \phi_{X_1}(t)e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} (\phi_{X_1}(t))^j \\ &= \phi_{X_1}(t)e^{-\lambda} e^{\lambda \phi_{X_1}(t)} \end{aligned}$$

Donc

$$\phi_S(t) = \phi_{X_1}(t)e^{\lambda(\phi_{X_1}(t)-1)}$$

Exercice 10

Soit P_1 la loi de probabilité continue de densité f_1 par rapport à λ et de fonction caractéristique ϕ_1 .

On suppose que ϕ_1 est réelle, positive sur \mathbb{R} et intégrable par rapport à λ .

Soit

$$P_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \frac{1}{\|\phi_1\|_1} \int_A \phi_1(t)d\lambda(t)$$

1. Montrer que P_2 est une loi de probabilité continue.
2. Exprimer la fonction caractéristique associée à P_2 en fonction de f_1 .
3. On suppose que P_1 est la loi de Laplace de paramètre 1. En déduire ϕ_2 . Quelle est cette loi ?

1. Montrons que P_2 est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

P_2 est à valeurs dans $[0, 1]$, $P_2(\mathbb{R}) = \frac{\|\phi_1\|_1}{\|\phi_1\|_1} = 1$ et pour (A_i) une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la suite de fonctions mesurables positives

$f_n : t \mapsto \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^n A_i}(t)\phi_1(t)$ tend en croissant vers $t \mapsto \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}(t)\phi_1(t)$, donc par convergence monotone :

$$\begin{aligned} P_2(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \frac{1}{\|\phi_1\|_1} \int \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}(t)\phi_1(t)d\lambda(t) \\ &= \lim_n \frac{1}{\|\phi_1\|_1} \int \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^n A_i}(t)\phi_1(t)d\lambda(t) \\ &= \lim_n \frac{1}{\|\phi_1\|_1} \int \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(t)\phi_1(t)d\lambda(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\phi_1\|_1} \int_{A_i} \phi_1(t)d\lambda(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_2(A_i) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $P_2(A) = \int_A \frac{\phi_1(t)}{\|\phi_1\|_1} d\lambda(t)$, avec $t \mapsto \frac{\phi_1(t)}{\|\phi_1\|_1}$ mesurable positive, donc P_2 est continue, de densité

$$f_2(x) = \frac{\phi_1(x)}{\|\phi_1\|_1}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ On a } \phi_2(t) &= \int e^{itx} dP_2(x) = \int e^{itx} \frac{\phi_1(x)}{\|\phi_1\|_1} d\lambda(x) \\ &= \frac{2\pi}{\|\phi_1\|_1} \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(-t)x} \phi_1(x) d\lambda(x) \\ &= \frac{2\pi}{\|\phi_1\|_1} f_1(-t) \end{aligned}$$

3. Dans le cas d'une Laplace 1, $f_1(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$ et $\|\phi_1\|_1 = \int \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t) = \pi$, donc $\phi_2(t) = e^{-|t|}$. P_2 est donc la loi associée à $\mathcal{C}(1)$.