Teste de hipóteses: Duas populações.

Gilberto Pereira Sassi

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

Organização

Duas variáveis ou duas populações:

1. Teste para diferença de médias $\mu_1 - \mu_2$, para distribuição normal com σ^2 conhecido;
2. Teste para razão de variâncias $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, para distribuição normal (teste F);
3. Teste para diferenças de médias $\mu_1 - \mu_2$, para distribuição normal com σ^2 desconhecido;
   3.1 Variâncias das duas populações ou variáveis são iguais;
   3.2 Variâncias das duas populações ou variáveis são diferentes;
4. Teste *t* pareado;
5. Teste para diferença de proporções $p_1 - p_2$, para distribuição Bernoulli quando $n \geq 40$;
6. Teste de associação entre duas variáveis qualitativas;
7. Teste de associação entre duas variáveis quantitativas.

Experimento comparativo: Definições

Queremos testar as médias (ou proporções ou variâncias) de duas populações:

(1) População 1: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Amostra da população 1: $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$;

(2) População 2: $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Amostra da população 1: $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$;

(3) As duas populações são independentes.

Se as amostras foram coletadas aleatoriamente, então temos um experimento completamente aleatório.

As condições (1) e (2) são denominados de tratamentos.

Se decidirmos por H_1, então temos uma relação de causa-e-efeito.

Quando acompanhamos um elemento da população ao longo do tempo e fazemos um experimento comparativo desses elementos no início e no fim do estudo, não temos duas populações independentes e esta configuração não satisfaz as condições (1) e (2). Neste caso, dizemos que temos um estudo observacional e, geralmente, usamos o teste-t pareado.

Comparação de μ_1 e μ_2

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 1 $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;
- σ_1^2 e σ_2^2 são conhecidos;
- α é o nível de significância (estabelecido pelo pesquisador e geralmente $\alpha = 5\%$).

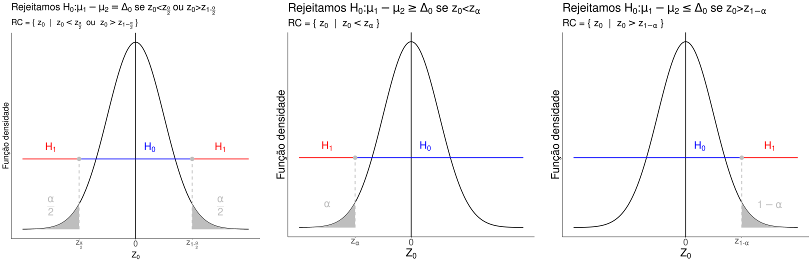
Queremos testar as seguintes hipóteses:

- Teste bilateral: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$;
- Teste unilateral: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$;
- Teste unilateral: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$.

Ideia: Primeiro calculamos a distância padronizada de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ e $\Delta_0 = \mu_1 - \mu_2$: $Z_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$. Então,

- Teste bilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ se $|Z_0|$ for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ se Z_0 for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ se Z_0 for pequeno.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações



(a) Teste bilateral.   **(b)** Teste bilateral.   **(c)** Teste bilateral.

Figura 1: Região crítica para comparar médias de populações normais com variâncias conhecidas.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações

- Na Figura 1a, testamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$, em que $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ e $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$;
- Na Figura 1b, testamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$. Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$, em que $\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$;
- Na Figura 1c, testamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$. Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\alpha}\}$, em que $\Phi\left(z_{\alpha}\right) = \alpha$.

Chamamos z_α, $z_{1-\alpha}$, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ e $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ são chamados de valores críticos.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações

Exemplo

Duas máquinas em uma linha de produção preenchem garrafas *pet* com 600*ml*. Das especificações fornecidas pelos fabricantes das máquinas, sabe-se que o volume das garrafas tem distribuição normal e as máquinas são preenchidas com desvio padrão $\sigma_1 = 5cm^3$ e $\sigma_2 = 10cm^3$. Um membro da equipe de controle de qualidade, suspeita que o volume médio de preenchimento das garrafas são diferentes. Para isso, ele coletou 10 garrafas preenchidas pela máquina 1 e 10 garrafas da máquina 2. Os dados estão na Tabela 1. Ao nível de significância $\alpha = 5\%$, as duas máquinas preenchem, em média, com volume diferente as garrafas?

amostra da máquina 1	599,67	600,74	599,49	600,56	599,65	599,72	600,34	600,17	599,87	599,44
amostra da máquina 2	600,18	599,66	600,36	601,47	600,57	602,25	601,19	601,07	600,81	599,26

Tabela 1: Amostras para as máquinas 1 e 2.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações

Solução

Passo 1) Queremos testar as seguintes hipóteses: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0 = 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0 = 0$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ se $|z_0| = \left|\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right|$ for grande. Ou seja, $RC = \left\{z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z_{1-\frac{\alpha}{2}} < z_0\right\}$;

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,025}\right) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$, então $z_{0,025} = -1,96$;
- $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,975}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $z_{0,975} = 1,96$.

Passo 5) Como $n_1 = 10$, $n_2 = 10$, $\sigma_1 = 5cm^3$, $\sigma_2 = 10cm^3$, $\bar{x}_1 = 599,965$, $\bar{x}_2 = 600,682$, $\Delta_0 = 0$ e $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = -0,20$, então $z_0 \notin RC$ e não rejeitamos H_0.

Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, não temos evidência para afirmar que as médias de volume das garrafas preenchidas pelas duas máquinas são diferentes.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações

Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P\left(|Z| > |z_0| \mid H_0\right) = 2\left[1 - \Phi\left(|z_0|\right)\right],$$

em que $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$.

Como $n_1 = 10$, $n_2 = 10$, $\sigma_1 = 0,6cm^3$, $\sigma_2 = 0,75cm^3$, $\bar{x}_1 = 599,965$, $\bar{x}_2 = 600,682$ e $z_0 = -0,20$, o valor-p é computador por

$$\begin{aligned} p &= 2\left[1 - \Phi\left(|z_0|\right)\right] \\ &= 2\left[1 - \Phi\left(|-0,20|\right)\right] \\ &= 2\left[1 - 0,5793\right] \\ &= 0,8414. \end{aligned}$$

Como $p = 0,8414 \geq \alpha = 0,05$, não rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 5\%$. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, não temos evidência para afirmar que as duas máquinas preenchem as garrafas com volumes diferentes.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações

Exemplo

Uma indústria química está interessada em reduzir o tempo de secagem de uma tinta usada em impressoras de pequeno porte. Duas fórmulas estão em teste: a formulação 1 é o padrão estabelecido na indústria, e a formulação 2 tem potencialmente um tempo de secagem da tinta menor. Da experiência e de informações do órgão regulador, os pesquisadores sabem que a formulação 1 tem tempo de secagem com desvio padrão de 8 segundo, e de uma amostra piloto os pesquisadores sabem que a fórmula 2 tem o desvio padrão de 9 segundos. Dez folhas são impressas com a fórmula 1 e vinte folhas são impressas com a fórmula 2. O tempo médio de secagem na amostra com a fórmula 1 é $\bar{x}_1 = 49,53$ segundos e o tempo médio de secagem na amostra com a fórmula 2 (menos custosa) é $\bar{x}_2 = 39,42$ segundos. Ao nível de significância $\alpha = 5\%$, a tinta da fórmula 2 seca mais rápido?

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações

Solução

Passo 1) Temos as seguintes hipóteses: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0 = 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0 = 0$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ se $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ for pequeno. Ou seja, $RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$;
Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = \Phi\left(z_{0,95}\right) = 1 - \alpha = 0,95$, então $z_{0,95} = 1,65$.

Passo 5) Como $n_1 = 10$, $n_2 = 20$, $\sigma_1 = 8$, $\sigma_2 = 9$, $\bar{x}_2 = 49,53$, $\bar{x}_1 = 39,42$ e $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{49,53 - 39,42}{\sqrt{\frac{8^2}{10} + \frac{9^2}{20}}} = 3,13$, então $3,13 \in RC$ e rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, rejeitamos H_0 e o tempo médio de secagem da tinta da fórmula 2 é menor.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações

Solução (valor-p)

O valor-p é calculado através de

$$p = P\left(Z > z_0 \mid H_0\right) = 1 - \Phi\left(z_0\right),$$

em que $Z \sim N(0,1)$.
Como $n_1 = 10$, $n_2 = 20$, $\sigma_1 = 8$, $\sigma_2 = 9$, $\bar{x}_2 = 49,53$, $\bar{x}_1 = 39,42$ e $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{49,53 - 39,42}{\sqrt{\frac{8^2}{10} + \frac{9^2}{20}}} = 3,13$, o valor-p -e calculado através de

$$\begin{aligned} p &= 1 - \Phi\left(z_0\right) \\ &= 1 - \Phi(3,13) \\ &= 1 - 0,9991 \\ &= 0,0009. \end{aligned}$$

Como $p = 0,0009 < \alpha = 0,05$, rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 5\%$, ou seja, a tinta com a fórmula 2 seca mais rápido ao nível de significância 5%.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações

Exemplo

Imagine que temos duas populações com distribuições normais com variâncias populacionais e que um pesquisador precisa decidir entre as duas hipóteses $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$. Na Tabela 2 colocamos algumas informações sobre o experimento. Complete a Tabela 2. Qual a sua decisão? Calcule o valor-p.

z_0	Decisão	valor-p	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
			$14,2$	$19,7$
n_1	n_2	σ_1	σ_2	Nível de significância α
10	15	10	5	5%

Tabela 2: Algumas informações sobre o experimento.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações

Solução

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0 = 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0 = 0$;
Passo 2) Nível de significância: $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ for pequeno. Ou seja,

$RC = \{z_0 \mid z_0 < z_\alpha\}$;
Passo 4) Vamos encontrar o valor crítico:

- $\Phi(z_\alpha) = \Phi(z_{0,05}) = \alpha = 0,05$, então $z_{0,05} = -1,65$;

Passo 5) Primeiro calculamos a estatística do teste usando as informações da Tabela 2:

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{14,2 - 19,7}{\sqrt{\frac{10^2}{10} + \frac{5^2}{15}}} = -1,61,$$

Como $z_0 \notin RC$ e não rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 5\%$.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações

Solução (valor-p)

Calculamos o valor através de

$$p = P\left(Z_0 < z_0 \mid H_0\right) = \Phi\left(z_0\right).$$

Usando as informações da Tabela 2, temos que $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{14{,}2 - 19{,}7}{\sqrt{\frac{10^2}{10} + \frac{5^2}{15}}} = -1,61$ e o valor-p é dado por:

$$p = \Phi\left(z_0\right) = \Phi\left(-1,61\right) = 0,0537.$$

Como $p = 0,0537 > \alpha = 0,05$, não rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 5\%$.

Intervalo de confiança para $\Delta = \mu_1 - \mu_2$.

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ com σ_1^2 conhecido;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 2 $N(\mu_1, \sigma_2^2)$ com σ_2^2 conhecido;
- as duas populações são independentes;
- $\gamma = 1 - \alpha$ é o coeficiente de confiança. (Geralmente, $\gamma = 95\%$).

Note que $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ e

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha,$$

Então o intervalo de confiança para Δ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ é dado por

$$IC(\Delta, \gamma) = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 ; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \right).$$

Intervalo de confiança para $\Delta = \mu_1 - \mu_2$.

Exemplo

Testes na resistência à tração (quilogramas por milímetros quadrados) em dois tipos distintos de barras de ligas de alumínio usadas na fabricação de asas de um avião comercial foram realizados. De experiência passada na produção de ligas de alumínio, conhecemos os desvios padrões da resistência à tração. Os dados obtidos destes são $n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 87,6$, $\sigma_1 = 1$, $n_2 = 12$, $\bar{x}_2 = 74,5$ e $\sigma_2 = 1,5$. Construa um intervalo de confiança para $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$ e interprete o resultado.

Solução

Primeiro encontramos os quantis da distribuição normal padrão:

- $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,025}\right) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$, então $z_{0,025} = -1,96$;
- $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,975}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $z_{0,975} = 1,96$.

Então

$$IC(\Delta, 95\%) = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} + \bar{x}_1 - \bar{x}_2; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} + \bar{x}_1 - \bar{x}_2\right)$$

$$= \left(-1,96\sqrt{\frac{1^2}{10} + \frac{1,5^2}{12}} + 87 - 74; 1,96\sqrt{\frac{1^2}{10} + \frac{1,5^2}{12}} + 87 - 74\right) = (11,95; 14,05)$$

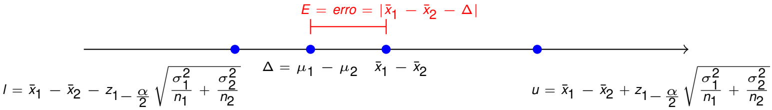
Com coeficiente $\gamma = 95\%$, a diferença da resistência à tração satisfaz a desigualdade $11,95 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 14,05$, ou seja, a liga 1 de alumínio é mais resistência que a liga 2.

Escolha do tamanho da amostra

Precisão da estimativa

Quando usamos $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ para aproximar $\Delta = \mu_1 - \mu_2$, o erro $E = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta|$ é menor ou igual a $z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ com coeficiente de confiança $\gamma = 100(1-\alpha)\%$ conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2: Erro quando usamos $\bar{x}$ para aproximar μ



Note que $z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ aumenta quando aumentamos γ (ou diminuímos α). Dizemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ é a precisão da estimativa de Δ.

Tamanho da amostra

Quando conhecemos o desvio padrão σ da população de distribuição normal e fixamos $\gamma = 1-\alpha$, então, para ter um erro máximo de E ao aproximar μ por $\bar{x}$, o tamanho da amostra precisa ter no mínimo

$$n_1 = n_2 = n = \left\lceil \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2 (\sigma_1^2+\sigma_2^2) \right\rceil,$$

em que $\lceil x \rceil$ é "x é o primeiro inteiro depois de x" e E é o erro máximo tolerável especificado pelo pesquisador.

Intervalo de confiança para $\Delta = \mu_1 - \mu_2$.

Exemplo

Testes na resistência à tração (quilogramas por milímetros quadrados) em dois tipos distintos de barras de ligas de alumínio usadas na fabricação de asas de um avião comercial precisam ser realizadas. De experiência passada na produção de ligas de alumínio, conhecemos os desvios padrões da resistência à tração:$\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = 1,5$. Quantas barras precisam ser testadas em cada tipo de liga de alumínio com coeficiente de confiança 95% para termos um erro máximo de $E = 1,45$ quilogramas por milímetros quadrados?

Solução

Primeiro calculamos o quantil da distribuição normal padrão

- $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,975}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $z_{0,975} = 1,96$.

Então o tamanho ~~mínimo~~ de amostra para cada tipo de liga é

$$n_1 = n_2 = n = \left\lceil \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right\rceil = \left\lceil \left(\frac{1,96}{1,45}\right)^2 (1^2 + 1,5^2) \right\rceil = 6.$$

Comparação de σ_1^2 e σ_2^2

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 1 $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;
- α é o nível de significância (geralmente $\alpha = 5\%$).

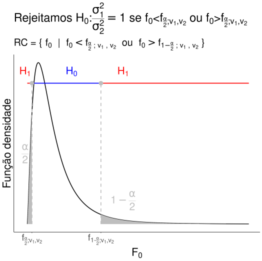
Queremos testar as seguintes hipóteses:

- Teste bilateral: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ e $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$;
- Teste unilateral: $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ e $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$;;
- Teste unilateral: $H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ e $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$;.

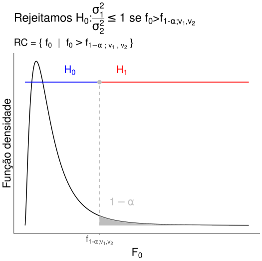
Ideia: Primeiro calculamos a razão $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$. Então,

- Teste bilateral: Rejeitamos $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ se F_0 for grande ou for pequeno;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ se F_0 for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ se F_0 for pequeno.

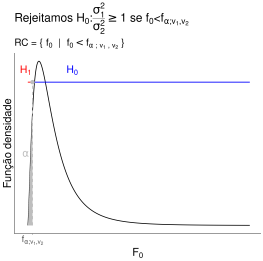
Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.



(a) Teste bilateral.



(b) Teste bilateral.



(c) Teste bilateral.

Figura 3: Região crítica para comparar variâncias de populações normais.

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

- Na Figura 3a, testamos $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ versus $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$. Rejeitamos H_0 se $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} \in RC = \{f_0 \mid f_0 < f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}$ ou $f_0 > f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}\}$, em que $P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}\right) = \frac{\alpha}{2}$ e $P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$;
- Na Figura 3b, testamos $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$ versus $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$. Rejeitamos H_0 se $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} \in RC = \{f_0 \mid f_0 > f_{1-\alpha;n_1-1,n_2-1}\}$, em que $P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{1-\alpha;n_1-1,n_2-1}\right) = 1 - \alpha$;
- Na Figura 3c, testamos $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1$ versus $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$. Rejeitamos H_0 se $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} \in RC = \{f_0 \mid f_0 < f_{\alpha;n_1-1,n_2-1}\}$, em que $P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{\alpha;n_1-1,n_2-1}\right) = \alpha$.

Chamamos $f_{\alpha;n_1-1,n_2-1}$, $f_{1-\alpha;n_1,n_2}$, $f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}$ e $f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}$ são chamados de valores críticos.

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

Exemplo

Um estudo foi realizado para determinar se homens e mulheres diferem na repetibilidade na montagem de componentes em placas de circuito impresso. Amostras de 25 homens e 21 mulheres foram selecionadas, e o tempo de montagem do circuito impresso foi mensurado. O desvio padrão de tempo de montagem foram $s_{\text{homens}} = 1,25$ minutos e $s_{\text{mulheres}} = 0,75$ minutos. Existe evidência estatística de que a repetibilidade entre homens e mulheres são diferentes ao nível de significância de $\alpha = 5\%$? Calcule o valor-p.

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

Solução

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ e $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeito H_0 se $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ for grande ou for pequeno. Ou seja,

$$RC = \left\{ f_0 \mid f_0 < f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} \text{ ou } f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} < f_0 \right\};$$

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $P(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}) = P(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{0,975;24,20}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;24,20} = 2,756$;
- $P(F_{n_2-1,n_1-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}) = P(F_{n_2-1,n_1-1} \leq f_{0,975;20,24}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;20,24} = 2,327$;
- $f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} = f_{0,025;24,20} = \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}} = \frac{1}{2{,}237} = 0,4297.$

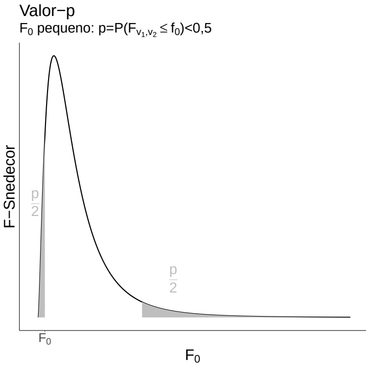
Passo 5) Como $s_1 = 1,25$, $s_2 = 0,75$ e $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1{,}25^2}{0{,}75^2} = 2,7778 \in RC$, então rejeitamos H_0.
Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, homens e mulheres não tem a mesma repetibilidade.

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

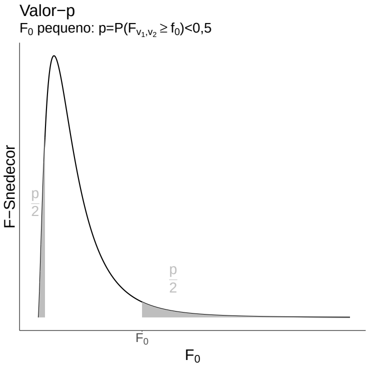
Solução (valor-p)

O valor-p é calculado através de

$$p = 2 \cdot \min\left(P(F_{v_1,v_2} \leq f_0), P(F_{v_1,v_2} \geq f_0)\right).$$



(a) F_0 pequeno



(b) F_0 grande

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

Solução

O valor-p é calculado através de

$$p = 2 \cdot \min\left(P\left(F_{v_1,v_2} \leq f_0\right); P\left(F_{v_1,v_2} \geq f_0\right)\right).$$

Como $n_1 = 25$, $n_2 = 21$, $s_1 = 1,25$, $s_2 = 0,75$ e $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1{,}25^2}{0{,}75^2} = 2,78$, então

- $P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_0\right) = P\left(F_{24,20} \leq 2,78\right) = 0,9883;$
- $P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \geq f_0\right) = 1 - P\left(F_{24,20} \leq 2,78\right) = 1 - 0,9883 = 0,0117.$

Então, o valor-p está calculado através de

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot \min\left(P\left(F_{v_1,v_2} \leq f_0\right); P\left(F_{v_1,v_2} \geq f_0\right)\right) \\ &= 2 \cdot \min(0,9883; 0,0117) \\ &= 0,0234. \end{aligned}$$

Como $p = 0,0234 < 0,05 = \alpha$, rejeitamos H_0 e homens e mulheres não teremos a repetibilidade.

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

Exemplo

Os pontos de fusão de duas ligas usadas na formulação de solda foram investigados por 21 amostras de fusão de cada material. Obtemos $s_1 = 4^\circ F$ e $s_2 = 3^\circ F$. Existe evidência de que a variabilidade do ponto de fusão da segunda liga é menor que a variabilidade do ponto de fusão da primeira liga ao nível de significância $\alpha = 5\%$? Calcule o valor-p.

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

Solução

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$ e $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeitamos H_0 se $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ for grande. Ou seja,
$RC = \{f_0 \mid f_0 > f_{1-\alpha;n_1-1,n_2-1}\}$;

Passo 4) Vamos encontrar o valor crítico:

- $P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{1-\alpha;n_1-1,n_2-1}\right) = P\left(F_{20,20} \leq f_{0,95;20,20}\right) = 1 - \alpha = 0,95$, então $f_{0,95;20,20} = 1,7938$.

Passo 5) Como $s_1 = 4$, $s_2 = 3$ e $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1,78 \notin RC$, e não rejeitamos H_0, ou seja, não existe evidência de que o ponto de fusão da segunda liga é menor de que o ponto de fusão da primeira liga.

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

Solução (valor-p)

O valor-p é calculado através de

$$p = P\left(F_0 > f_0 \mid H_0\right) = 1 - P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_0\right),$$

em que f_0 é o valor observador da estatística.

Como $s_1 = 4$, $s_2 = 3$, $n_1 = n_2 = 21$ e $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{4^2}{3^2} = 1,78$, então

$$\begin{aligned} p &= 1 - P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_0\right) \\ &= 1 - P\left(F_{20,20} \leq 1,78\right) \\ &= 1 - 0,8970 \\ &= 0,103. \end{aligned}$$

Como $p = 0,103 > \alpha = 0,05$, não rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, não existe evidência de variabilidade do ponto de fusão da segunda liga é menor do que o ponto de fusão da primeira liga.

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

Exemplo

Imagine que temos duas variáveis aleatórias contínuas com distribuição normal e independentes. Um pesquisador coletou 26 valores da primeira variável e 21 valores da segunda variável. Algumas informações desse experimento está na Tabela 3. Imagine que queremos decidir entre duas hipóteses $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1$ e $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$. Complete a Tabela 3. Ao nível de significância $\alpha = 5\%$, qual foi a decisão do pesquisador? Calcule o valor-p.

α	f_0	valor-p	s_1
5%			$5,21$
s_2	Decisão	n_1	n_2
$13,38$		26	21

Tabela 3: Algumas informações do experimento.

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

Solução

Passo 1) Queremos testar as seguintes hipóteses: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1$ e $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeito H_0 se $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ for pequeno. Ou seja, $RC = \{f_0 \mid f_0 < f_{\alpha;n_1-1,n_2-1}\}$;

Passo 4) Vamos encontrar o valor crítico. Note que $f_{\alpha;n_1-1,n_2-1} = \frac{1}{f_{1-\alpha;n_2-1,n_1-1}}$, em que

- $P(F_{n_2-1,n_1-1} \leq f_{1-\alpha;n_2-1,n_1-1}) = P(F_{25,20} \leq f_{0,95;20,25}) = 1 - \alpha = 0,95$, então $f_{0,95;20,25} = 2,0075$;

Então, $f_{0,05;25,20} = \frac{1}{2,0075} = 0,4981$.

Passo 5) Como $s_1 = 5,21$, $s_2 = 13,38$ e $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{5,21^2}{13,38^2} = 0,1516 \in RC$, então rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 5\%$.

Comparação de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 de duas populações normais.

Solução (valor-p)

O valor-p é calculado através de

$$p = P\left(F_0 < f_0 \mid H_0\right) = P\left(F_{n_1-1,n_2-1} < f_0\right),$$

em que $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ calculado usando a nossa amostra.

Como $s_1 = 5,21$, $s_2 = 13,38$ e $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{5,21^2}{13,38^2} = 0,1516$, o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= P\left(F_{n_1-1,n_2-1} < f_0\right) \\ &= P\left(F_{25,20} < 0,1516\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $p = 0 < \alpha = 0,05$, rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 5\%$.

Intervalo de confiança para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ com σ_1^2 conhecido;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 2 $N(\mu_1, \sigma_2^2)$ com σ_2^2 conhecido;
- as duas populações são independentes;
- $\gamma = 1 - \alpha$ é o coeficiente de confiança. (Geralmente, $\gamma = 95\%$).

Note que $F = \frac{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}} = \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F_{n_2-1, n_1-1}$ e

$$P\left(f_{\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1} \leq \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}\right) = 1 - \alpha,$$

Então o intervalo de confiança para Δ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ é dado por

$$IC\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}; \gamma\right) = \left(f_{\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1} \frac{s_1^2}{s_2^2}; f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1} \frac{s_1^2}{s_2^2}\right).$$

Intervalo de confiança para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Exemplo

Uma empresa fabrica rotores para uso em motores de turbina a jato. Dois processos de retificação são usados, e ambos processos produzem peças com a mesma rugosidade média. O engenheiro responsável pela linha de produção destes motores deseja escolher o processo de retificação com a menor variabilidade na rugosidade da superfície. Uma amostra com $n_1 = 11$ rotores do processo de produção 1 obteve um desvio padrão amostral $s_1 = 0,00012954$ milímetros e uma amostra com $n_2 = 16$ rotores do processo de produção 2 obteve um desvio padrão amostral $s_2 = 0,00011938$ milímetros. Construa um intervalo de confiança para a razão de variância $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$.

Intervalo de confiança para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Solução

Primeiro encontramos os quantis da distribuição F-Snedecor:

- $P\left(F_{n_2-1,n_1-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}\right) = P\left(F_{15,10} \leq f_{0,975;15,10}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;15,10} = 3,552$;
- $P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}\right) = P\left(F_{10,15} \leq f_{0,975;10,15}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;10,15} = 3,060$;
- $f_{\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1} = f_{0,025;15,10} = \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}} = \frac{1}{f_{0,975;10,15}} = \frac{1}{3,060} = 0,3268.$

Então o intervalo de confiança com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ é dado por

$$IC\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2};\gamma\right) = \left(f_{\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}\frac{s_1^2}{s_2^2};f_{\frac{1-\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}\frac{s_1^2}{s_2^2}\right)$$
$$= \left(0,3268\frac{0,00012954^2}{0,00011938^2};3,552\frac{0,00012954^2}{0,00011938^2}\right) = (0,385;1,147)$$

Como 1 está no intervalo de confiança com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$, não temos evidência para afirmar que a variabilidade na rugosidade dos dois processos de produção são diferentes e recomenda-se usar o processo mais barato.

Comparação de μ_1 e μ_2 (especialmente para $n \leq 40$.)

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 1 $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;
- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ é desconhecida;
- α é o nível de significância (estabelecido pelo pesquisador e geralmente $\alpha = 5\%$).

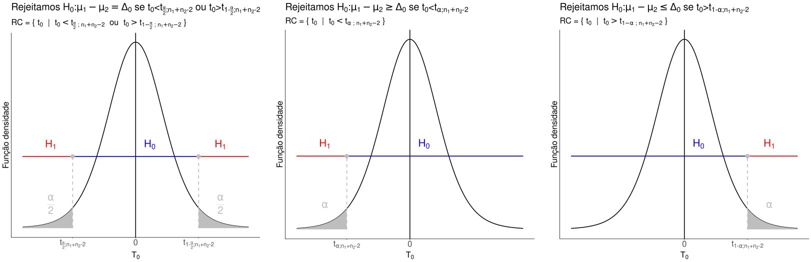
Queremos testar as seguintes hipóteses:

- Teste bilateral: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$;
- Teste unilateral: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$;
- Teste unilateral: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$.

Ideia: Primeiro calculamos a distância padronizada de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ e Δ_0 :
$T_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0)}{S_d\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ em que $S_d = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$. Então,

- Teste bilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ se $|T_0|$ for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0$ se T_0 for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$ se T_0 for pequeno.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações



(a) Teste bilateral. **(b)** Teste bilateral. **(c)** Teste bilateral.

Figura 5: Região crítica para comparar médias de populações normais com variâncias desconhecidas e iguais.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

- Na Figura 5a, testamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$. Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{s_d\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \in RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}$ ou $t_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}\}$, em que $P\left(t_{n_1+n_2-2} \leq t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}\right) = \frac{\alpha}{2}$ e $P\left(t_{n_1+n_2-2} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$;
- Na Figura 5b, testamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$. Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{s_d\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \in RC = \{t_0 \mid t_0 > t_{1-\alpha;n_1+n_2-2}\}$, em que $P\left(t_{n_1+n_2-2} \leq t_{1-\alpha;n_1+n_2-2}\right) = 1 - \alpha$;
- Na Figura 5c, testamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$. Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{s_d\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \in RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\alpha;n_1+n_2-2}\}$, em que $P\left(t_{n_1+n_2-2} \leq t_{\alpha;n_1+n_2-2}\right) = \alpha$.

Note que $s_d^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$ e chamamos $t_{\alpha;n_1+n_2-2}$, $t_{1-\alpha;n_1+n_2-2}$, $t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}$ e $t_{1-\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}$ são chamados de valores críticos.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Exemplo

Dois catalisadores estão em análise para determinar como eles afetam o rendimento médio em um processo químico. Especificamente, o catalisador 1 é o padrão do mercado usado pelo processo químico atualmente; o catalisador 2 é um produto novo e mais barato que poderia ser adotado se não alterar o rendimento médio no processo químico. O engenheiro químico responsável pelo processo químico analisou os dois catalisadores e os dados estão na Tabela 4. Assuma a normalidade para rendimento. O rendimento médio dos dois catalisadores são diferentes ao nível de significância $\alpha = 5\%$? Calcule o valor-p.

Número da observação	Catalisador 1	Catalisador 2
1	91,5	89,2
2	94,2	91,0
3	92,2	90,5
4	95,4	93,2
5	91,8	97,2
6	89,1	97,0
7	94,7	91,1
8	89,2	92,8

Tabela 4: Rendimento para os catalisadores 1 e 2.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Primeiro vamos verificar se as variâncias são iguais.

Passo 1) Queremos testar as seguintes hipóteses: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ e $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeitamos H_0 se $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ for grande ou for pequeno. Ou seja, $RC = \left\{ f_0 \mid f_0 < f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} \text{ ou } f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} < f_0 \right\}$;

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}\right) = P\left(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{0,975;7,7}\right)$, então $f_{0,975;7,7} = 4,995$;
- $P\left(F_{n_2-1,n_1-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}\right) = P\left(F_{n_2-1,n_1-1} \leq f_{0,975;7,7}\right)$, então $f_{0,975;7,7} = 4,995$;
- $f_{0,025;7,7} = \frac{1}{f_{0,975;7,7}} = \frac{1}{4{,}995} = 0,20$.

Passo 5) Como $s_1 = 2,38$, $s_2 = 2,96$, $n_1 = 8$, $n_2 = 8$ e $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0,646 \notin RC$, então não rejeitamos H_0 e podemos assumir que os desvios padrões são iguais.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0 = 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0 = 0$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeito H_0 se $|T_0| = \left| \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{S_d \sqrt{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}}} \right|$ for grande. Ou seja,

$RC = \left\{ t_0 \mid t_0 < t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} \text{ ou } t_0 < t_{1-\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} \right\}$.
Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $P(t_{n_1+n_2-2} \leq t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}) = P(t_{14} \leq t_{0,025;14}) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$, então $t_{0,025;14} = -2,145$;
- $P(t_{n_1+n_2-2} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}) = P(t_{14} \leq t_{0,975;14}) = \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $t_{0,975;14} = 2,145$.

Passo 5) Observe que $\bar{x}_1 = 92,25$, $\bar{x}_2 = 92,73$, $s_1 = 2,39$, $s_2 = 2,98$, $n_1 = n_2 = 8$, $s_d^2 = 2,7$ $\Delta_0 = 0$, $t_0 = -0,36$, então $t_0 \notin RC$ e não temos evidência para rejeitar H_0.
Ou seja, ao nível de significância de $\alpha = 5\%$, não encontramos diferença no rendimento médio entre os dois catalisadores e o engenheiro químico deveria recomendar o uso do catalisador 2 que é mais barato.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução (valor-p)

Como encontrar o valor-p

$$p = P(|T_0| > |t_0| \mid H_0) = 2 \cdot (1 - P(t_{n_1+n_2-2} \leq |t_0|)).$$

Como $\bar{x}_1 = 92,25$, $\bar{x}_2 = 92,73$, $s_1 = 2,39$, $s_2 = 2,98$, $n_1 = n_2 = 8$, $s_d^2 = 2,7$ $\Delta_0 = 0$, $t_0 = -0,36$, então

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot [1 - P(t_{n_1+n_2-2} \leq |t_0|)] \\ &= 2 \cdot [1 - P(t_{22} \leq |-0,36|)] \\ &= 2 \cdot [1 - 0,6389] \\ &= 0,7223. \end{aligned}$$

Como $p = 0,7223 > \alpha = 0,05$, não rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 5\%$, ou seja, o rendimento médio no processo químico para os dois catalisadores são equivalentes.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Exemplo

Um pesquisador está analisando rebolos abrasivos. Os dados sobre a força de moagem com os rebolos abrasivos (em *N*) para dois níveis de vibração, baixa e alta, estão na Tabela 5. Assuma que a força de moagem tem distribuição normal. Existe evidência que vibração mais alta produz uma força de moagem maior ao nível de significância $\alpha = 5\%$? Calcule o valor-p.

Vibração baixa	Vibração alta
224	327
268	352
293	379
190	347
273	335
275	323
243	325
244	422
243	354
233	335
246	337
230	364

Tabela 5: Força de moagem para níveis baixos e altos de vibração.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução

Primeiro verificamos as variâncias da força de moagem são iguais.

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ e $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeitamos H_0 se $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ for grande ou for pequeno. Ou seja,

$$RC = \left\{ f_0 \mid f_0 < f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} \text{ ou } f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} < f_0 \right\};$$

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $P\left(F_{n_1-,n_2-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}\right) = P\left(F_{11,11} \leq f_{0,975;11,11}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;11,11} = 3,474$;
- $P\left(F_{n_2-,n_1-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}\right) = P\left(F_{11,11} \leq f_{0,975;11,11}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;11,11} = 3,474$;
- $f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} = \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}} = \frac{1}{3,474} = 0,2879.$

Passo 5) Como $n_1 = n_2 = 12$, $s_1 = 27,50$, $s_2 = 28,21$ e $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0,951 \notin RC$, então não rejeitamos H_0 e decidimos que as duas variâncias são iguais.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução

Passo 1) Seja μ_1 a média de força de moagem usando vibração baixa e μ_2 a média de força de moagem usando vibração alta. Então, queremos testar as seguintes hipóteses: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0 = 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0 = 0$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeito H_0 se $T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{S_d \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ for pequeno. Ou seja,
$RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\alpha;n_1+n_2-2}\}$;
Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $P(t_{n_1+n_2-2} \leq t_{\alpha;n_1+n_2-2}) = P(t_{22} \leq t_{0,05;22}) = \alpha = 0,05$, então $t_{0,05;22} = -1,717$.

Passo 5) Como $\Delta_0 = 0$, $\bar{x}_1 = 246,83$, $\bar{x}_2 = 350$, $s_1 = 27,50$, $s_2 = 28,21$, $t_0 = -9,07$, então $t_0 \in RC$ e rejeitamos H_0. Ou seja, a força de moagem é maior para vibração mais alta.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução (valor-p)

O valor-p é calculado por

$$p = P(T_0 < t_0 \mid H_0) = P(t_{n_1+n_2-2} \leq t_0).$$

Como $\Delta_0 = 0$, $\bar{x}_1 = 246,83$, $\bar{x}_2 = 350,27$, $s_1 = 28,21$, $s_2 = 27,86$, $n_1 = n_2 = 12$, $t_0 = -9,07$, então

$$\begin{aligned} p &= P(t_{n_1+n_2-2} \leq t_0) \\ &= P(t_{22} \leq -9,07) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $p = 0 < \alpha = 0,05$, então rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 5\%$, ou seja, a força de moagem é maior para a vibração mais alta ao nível de significância $\alpha = 5\%$.

Intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$.

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 2 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$;
- as duas populações são independentes;
- As variâncias σ_1^2 e σ_2^2 são iguais e desconhecidas;
- $\gamma = 1 - \alpha$ é o coeficiente de confiança. (Geralmente, $\gamma = 95\%$).

Note que $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_d\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ e

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} \leq \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_d\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}\right) = 1 - \alpha,$$

Então o intervalo de confiança para Δ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ é dado por

$$IC(\mu_1 - \mu_2; \gamma) = \left(t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} S_d\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + \bar{X}_1 - \bar{X}_2;\, t_{1-\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} S_d\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + \bar{X}_1 - \bar{X}_2\right).$$

Intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$

Exemplo

Os diâmetros de hastes de aço produzidas por duas máquinas diferentes de extrusão que estão sob análise. Uma amostra com $n_1 = 15$ hastes de aço da primeira máquina e uma amostra com $n_2 = 17$ hastes de aço da segunda máquina foram coletadas. Para essas amostras obtemos: $\bar{x}_1 = 8,73$, $\bar{x}_2 = 8,68$, $s_1^2 = 0,35$ e $s_2^2 = 0,40$. Assuma que os diâmetros tem distribuição normal. Construa um intervalo de confiança para diferença de médias com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$.

Intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$

Solução

Primeiro vamos checar se as variâncias são iguais.

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ e $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeitamos H_0 se $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ se for pequeno ou for grande. Ou seja,

$$RC = \left\{ f_0 \mid f_0 < f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} \text{ ou } f_0 < f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} \right\};$$

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos;

- $P(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}) = P(F_{14,16} \leq f_{0,975;14,16}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;14,16} = 2,817$;
- $P(F_{n_2-1,n_1-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}) = P(F_{16,14} \leq f_{0,975;16,14}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;16,14} = 2,923$;
- $f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} = \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}} = \frac{1}{f_{0,975;16,14}} = \frac{1}{2,923} = 0,3421$;

Passo 5) Queremos $n_1 = 15$, $n_2 = 17$, $\bar{s}_1^2 = 0,35$, $\bar{s}_2^2 = 0,40$ e $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0,35^2}{0,40^2} = 0,77 \notin RC$, e não rejeitamos H_0 e podemos assumir que as variâncias são iguais.

Intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$

Solução

Primeiro encontramos os quantis da distribuição t-Student:

- $P(t_{n_1+n_2-2} \leq t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}) = P(t_{30} \leq t_{0,025;30}) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$, então $t_{0,025} = -2,042$;
- $P(t_{n_1+n_2-2} \leq t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}) = P(t_{30} \leq t_{0,975;30}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $t_{0,975} = 2,042$.

Note que $S_d = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = 0,38$. Então, o intervalo de confiança $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ é dado por

$$
\begin{aligned}
IC(\mu_1 - \mu_2, \gamma) &= \left(t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} S_d \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + \bar{x}_1 - \bar{x}_2; +\bar{x}_1 - \bar{x}_2; t_{1-\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} S_d \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + \bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \\
&= \left(-2,042 \cdot 0,38 \cdot \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{17}} + 8,743 - 8,68; 2,042 \cdot 0,38 \cdot \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{17}} + 8,743 - 8,68\right) \\
&= (-0,22; 0,32)
\end{aligned}
$$

Com coeficiente de confiança 95%, a diferença das médias de dos diâmetros está entre $-0,22$ e $0,32$ centímetros e as duas máquinas produzem hastes com diâmetros semelhantes em média ~~pois zero está dentro do intervalo de confiança~~.

Comparação de μ_1 e μ_2 (especialmente para $n \leq 40$.)

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 1 $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;
- Variâncias desconhecidas e diferentes: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$;
- α é o nível de significância (estabelecido pelo pesquisador e geralmente $\alpha = 5\%$).

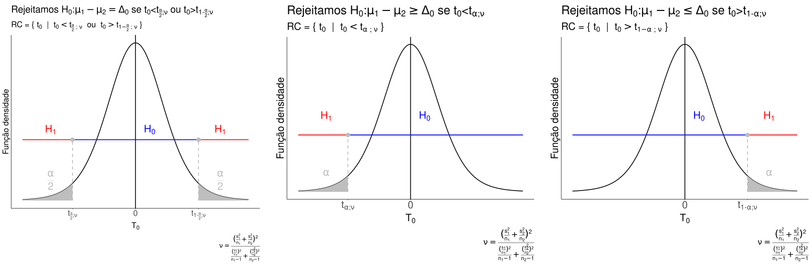
Queremos testar as seguintes hipóteses:

- Teste bilateral: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$;
- Teste unilateral: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$;
- Teste unilateral: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$.

Ideia: Primeiro calculamos a distância padronizada de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ e $\Delta_0 = \mu_1 - \mu_2$: $T_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$. Então,

- Teste bilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ se $|T_0|$ for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ se T_0 for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ se T_0 for pequeno.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações



(a) Teste bilateral. **(b)** Teste bilateral. **(c)** Teste bilateral.

Figura 6: Região crítica para comparar médias de populações normais com variâncias desconhecidas e diferentes.

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$ é chamada de equação de Welch–Satterthwaite.

Se você não sabe se as variâncias das populações são iguais, aconselha-se assumir que as variâncias são diferentes.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

- Na Figura 6a, testamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$. Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \in RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\frac{\alpha}{2};\nu} \text{ ou } t_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}\}$, em que $P\left(t_\nu \leq t_{\frac{\alpha}{2};\nu}\right) = \frac{\alpha}{2}$ e $P\left(t_\nu \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$;
- Na Figura 6b, testamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$. Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \in RC = \{t_0 \mid t_0 > t_{1-\alpha;\nu}\}$, em que $P\left(t_\nu \leq t_{1-\alpha;\nu}\right) = 1 - \alpha$;
- Na Figura 6c, testamos $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$. Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \in RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\alpha;\nu}\}$, em que $P\left(t_\nu \leq t_{\alpha;\nu}\right) = \alpha$.

Note que $\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$ (equação de Welch–Satterthwaite) e $t_{\alpha;\nu}$, $t_{1-\alpha;\nu}$, $t_{\frac{\alpha}{2};\nu}$ e $t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}$ são chamados de valores críticos. Se ν não é um número inteiro, arrendonde ν para o número inteiro mais próximo.
Alguns livros, chamam essa comparação de médias quando as variâncias populacionais distintas de teste de Welch.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Exemplo

A concentração de arsênico no sistema de abastecimento de água é um sério risco para a saúde público. Um estudo em 2001 mediu concentrações de arsênico em partes por bilhão (*ppb*) na região metropolitana de Phoenix nos Estados Unido da América em 10 comunidades urbanas e em 10 comunidades rurais e os dados estão na Tabela 6. Assume que a concentração de arsênico tem distribuição normal. Existe diferença entre o campo e a cidade nas concentrações de arsênico? Use $\alpha = 5\%$ e calcule o valor-p.

Região urbana $\bar{x}_1 = 12,5; s_1 = 7,63$	Região rural $\bar{x}_2 = 27,5, s_2 = 15,3$
Phoenix, 3	Rimrock, 48
Chandler, 7	Goodyear, 44
Gilbert, 25	New River, 40
Glendale, 10	Apache Junction, 38
Mesa, 15	Buckeye, 33
Paradise Valley, 6	Nogales, 21
Peoria, 12	Black Canyon City, 20
Scottsdale, 25	Sedona, 12
Tempe, 15	Payson, 1
Sun City, 7	Casa Grande, 18

Tabela 6: Concentração de arsênico para 20 comunidades na região metropolitana de Phoenix.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução

Primeiro, precisamos checar se as variâncias são iguais.

Passo 1) Queremos decidir entre duas hipóteses: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ e $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$;

Passo 2) Vamos usar $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeitamos H_0 se $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ for pequeno ou grande. Ou seja,

$RC = \left\{ f_0 \mid f_0 < f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} \text{ ou } f_0 < f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} \right\}$;

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $P(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}) = P(F_{9,9} \leq f_{0,975;9,9}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;9,9} = 4,026$;
- $P(F_{n_2-1,n_1-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}) = P(F_{9,9} \leq f_{0,975;9,9}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;9,9} = 4,026$;
- $f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} = \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}} = \frac{1}{4{,}026} = 0,2483$.

Passo 5) Note que $s_1 = 7,63$, $s_2 = 15,3$ e $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0,2487$, então $f_0 \notin RC$ e não rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância de $\alpha = 5\%$, as variâncias da concentração de arsênico nas regiões urbana e rual são iguais.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução

Passo 1) Queremos decidir entre as hipóteses: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0 = 0$ e $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0 = 0$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeitamos H_0 se $|T_0| = \left| \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \right|$ for grande. Ou seja,

$$RC = \left\{ t_0 \mid t_0 < t_{\frac{\alpha}{2};\nu} \text{ ou } t_0 < t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu} \right\}, \text{ em que } \nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}};$$

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $\nu = \dfrac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}} = 13, 22$, usamos $\nu = 13$;
- $P(t_\nu \leq t_{\frac{\alpha}{2};\nu}) = P(t_{13} \leq t_{0,025;13}) = \frac{\alpha}{2} = 0, 025$, então $t_{0,025;13} = -2, 160$;
- $P(t_\nu \leq t_{\frac{\alpha}{2};\nu}) = P(t_{13} \leq t_{0,975;13}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0, 975$, então $t_{0,975;13} = 2, 160$;

Passo 5) Note que $x_1 = 12, 5$, $x_2 = 27, 5$, $s_1 = 7, 63$, $s_2 = 15, 3$, $\Delta_0 = 0$,
$t_0 = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \dfrac{7,63 - 15,3}{\sqrt{\frac{7,63^2}{10} + \frac{15,3^2}{10}}} = -2, 77 \in RC$, então Rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 5\%$.
Ou seja, a concentração de arsênico presente no serviço de fornecimento de água é diferente nas regiões urbanas e rurais.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P(|T_0| > |t_0| \mid H_0) = 2 \cdot [1 - P(T_\nu \leq |t_0|)] \, .$$

Note que $x_1 = 12,5$, $x_2 = 27,5$, $s_1 = 7,63$, $s_2 = 15,3$, $\Delta_0 = 0$,

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{7{,}63 - 15{,}3}{\sqrt{\frac{7{,}63^2}{10} + \frac{15{,}3^2}{10}}} = -2,77 \text{ e } \nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}} = 13,22, \text{ então}$$

o valor é dado por

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot [1 - P(t_\nu \leq |t_0|)] \\ &= 2 \cdot [P(t_{13,22} \leq |-2,77|)] \\ &= 2 \cdot [1 - 0,9921] \\ &= 0,0158. \end{aligned}$$

Como $p = 0,0158 < \alpha = 0,05$, rejeitamos H_0. Ou seja a concentração de arsênico presente no serviço de fornecimento de água é diferente nas comunidades urbanas e rurais.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Exemplo

Um pesquisador tem duas variáveis normais e independentes e ele deseja checar se as médias das duas variáveis normais são iguais. Algumas informações deste experimento estão na Tabela 7. Complete a Tabela 7. A média da população 2 é maior que a média da população 1? Use $\alpha = 5\%$. Calcule o valor-p.

n_1	$\bar{x}_1$	s_1	n_2	$\bar{x}_2$
15	$30,5$	$2,51$	25	$52,6$
s_2	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$?	$\mu_2 - \mu_1 > 0$?	t_0	valor-p
$13,3$				

Tabela 7: Algumas informações do experimento.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução

Primeiro vamos verificar se variâncias populacionais são iguais.

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ e $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeito H_0 se $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ for grande ou pequeno. Ou seja,

$$RC = \left\{ f_0 \mid f_0 < f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} \text{ ou } f_0 < f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} \right\};$$

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $P(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}) = P(F_{14,24} \leq f_{0,975;14,24}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;14,24} = 2,468$;
- $P(F_{n_2-1,n_1-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}) = P(F_{24,14} \leq f_{0,975;24,14}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;24,14} = 2,789$;
- $f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} = f_{0,025;14,24} = \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}} = \frac{1}{f_{0,975;14,24}} = \frac{1}{2,789} = 0,3586.$

Passo 5) Como $s_1 = 2,51$, $s_2 = 13,3$, $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0,04 \in RC$, então rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, as duas variâncias populacionais são distintas.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução

Passo 1) Pelo enunciado, queremos testar as hipóteses:
$H_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \Delta_0 = 0$ e $H_1 : \mu_2 - \mu_1 > \Delta_0 = 0$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeito H_0 se $t_0 = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ for grande. Ou esteja,

$RC = \{t_0 \mid t_0 > t_{1-\alpha,\nu}\}$;
Passo 4) Vamos encontrar o valor crítico:

- $\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}} = 26,77$, então usaremos $\nu = 27$;
- $P(t_\nu \leq t_{1-\alpha;\nu}) = P(t_{27} \leq t_{0,95;27}) = 1 - \alpha = 0,95$, então $t_{0,95;27} = 1,703$.

Passo 5) Como $n_1 = 15$, $\bar{x}_1 = 30,5$, $s_1 = 2,51$, $n_2 = 25$, $\bar{x}_2 = 52,6$, $s_2 = 13,3$ e $\Delta_0 = 0$, então $t_0 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{52,6 - 30,5}{\sqrt{\frac{2,51^2}{15} + \frac{13,3^2}{25}}} = 2,87 \in RC$, então

rejeitamos H_0.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução (valor-p)

O valor-p é calculado através de

$$p = P(T_0 > t_0 \mid H_0) = 1 - P(t_\nu \leq t_0),$$

em que $\nu = \dfrac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$.

Como $n_1 = 15$, $\bar{x}_1 = 30,5$, $s_1 = 2,51$, $n_2 = 25$, $\bar{x}_2 = 52,6$, $s_2 = 13,3$, $t_0 = 2,87$, $\nu = 26,77$, então o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= 1 - P(t_\nu \leq t_0) \\ &= 1 - P(t_{26,77} \leq 2,87) \\ &= 0,004. \end{aligned}$$

Como $p = 0,004 < 0,05 = \alpha$, rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 5\%$.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Exemplo

Dois fornecedores fabricam um material de borracha usados em aplicações automotivas. Esta parte de borracha sofrerá um desgaste abrasivo no uso, e o engenheiro decide comparar as partes. Vinte e cinco partes de cada fornecedor foram coletadas, e o desgaste foi medido depois de 1000 ciclos. Para a companhia 1 a média e o desvio padrão são $x_1 = 20$ e $s_1 = 2$ miligramas por 1000 ciclos , e para a companhia 2 a média e o desvio padrão são $\bar{x}_2 = 15$ e $s_2 = 8$ miligramas por 1000 ciclos. Os dados suportam a hipótese do engenheiro que o desgaste da companhia 2 é menor? Use $\alpha = 5\%$. Calcule o valor-p.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução

Primeiro vamos verificar se variâncias populacionais são iguais.

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ e $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeito H_0 se $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ for grande ou pequeno. Ou seja,

$RC = \left\{ f_0 \mid f_0 < f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} \text{ ou } f_0 < f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} \right\};$

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $P(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}) = P(F_{24,24} \leq f_{0,975;24,24}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;24,24} = 2,269$;
- $P(F_{n_2-1,n_1-1} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1}) = P(F_{24,24} \leq f_{0,975;24,24}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $f_{0,975;24,24} = 2,269$;
- $f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} = f_{0,025;24,24} = \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_2-1}} = \frac{1}{f_{0,975;24,24}} = \frac{1}{2,269} = 0,4407.$

Passo 5) Como $s_1 = 2,51$, $s_2 = 13,3$, $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0,04 \in RC$, então rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, as duas variâncias populacionais são distintas.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \mu_2 - \mu_1 \geq \Delta_0 = 0$ e $H_1 : \mu_2 - \mu_1 < \Delta_0 = 0$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ for pequeno. Ou seja,
$RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\alpha;\nu}\}$;
Passo 4) Vamos encontrar o valor crítico:

- $\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{2^2}{25} + \frac{8^2}{25}\right)^2}{\frac{\left(2^2/25\right)^2}{25-1} + \frac{\left(8^2/25\right)^2}{25-1}} = 26,99$, então vamos usar $\nu = 27$;
- $P(t_\nu \leq t_{\alpha,\nu}) = P(t_{27} \leq t_{0,05;27})$, então $t_{0,05;27} = -1,703$.

Passo 5) Como $n_1 = n_2 = 25$, $\bar{x}_1 = 20$, $\bar{x}_2 = 15$, $s_1 = 2$, $s_2 = 8$ e
$t_0 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{15 - 20 - 0}{\sqrt{\frac{2^2}{25} + \frac{8^2}{25}}} = -2,38 \in RC$, e rejeitamos H_0.
Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, o desgaste da parte de borracha fornecida pela companhia 2 é menor.

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P(T_0 < t_0 \mid H_0) = P(t_\nu < t_0).$$

Note que $n_1 = n_2 = 25$, $\bar{x}_1 = 20$, $\bar{x}_2 = 15$, $s_1 = 2$, $s_2 = 8$ e
$t_0 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{15 - 20 - 0}{\sqrt{\frac{2^2}{25} + \frac{8^2}{25}}} = -2,38$ e

$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{2^2}{25} + \frac{8^2}{25}\right)^2}{\frac{\left(2^2/25\right)^2}{25 - 1} + \frac{\left(8^2/25\right)^2}{25 - 1}} = 26,99$, então o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= P(t_\nu \leq t_0) \\ &= (P_{26,99} \leq -2,38) \\ &= 0,012. \end{aligned}$$

Como $p = 0,013 < \alpha = 0,05$, rejeitamos H_0, ou seja, o desgaste da parte de borracha pela companhia 2 é menor.

Intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$.

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 2 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- as duas populações são independentes;
- As variâncias σ_1^2 e σ_2^2 são diferentes e desconhecidas;
- $\gamma = 1 - \alpha$ é o coeficiente de confiança. (Geralmente, $\gamma = 95\%$).

Note que $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu$, em que $\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$, e

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2};\nu} \leq \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}\right) = 1 - \alpha,$$

Então o intervalo de confiança para Δ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ é dado por

$$IC\left(\mu_1 - \mu_2; \gamma\right) = \left(t_{\frac{\alpha}{2};\nu}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} + \bar{X}_1 - \bar{X}_2;\, t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} + \bar{X}_1 - \bar{X}_2\right).$$

Comparação de médias μ_1 e μ_2 de duas populações.

Exemplo

A concentração de arsênico no sistema de abastecimento de água é um sério risco para a saúde público. Um estudo realizado em 2001 mediu concentrações de arsênico em partes por bilhão (*ppb*) na região metropolitana de Phoenix nos Estados Unido da América em 10 comunidades urbanas e em 10 comunidades rurais e os dados estão na Tabela 8. Assuma que a concentração de arsênico tem distribuição normal com variâncias distintas e desconhecidas. Existe diferença entre o campo e a cidade nas concentrações de arsênico? Use $\alpha = 5\%$ e calcule o valor-p.

Região urbana $\bar{x}_1 = 12,5$; $s_1 = 7,63$	Região rural $\bar{x}_2 = 27,5$, $s_2 = 15,3$
Phoenix, 3	Rimrock, 48
Chandler, 7	Goodyear, 44
Gilbert, 25	New River, 40
Glendale, 10	Apache Junction, 38
Mesa, 15	Buckeye, 33
Paradise Valley, 6	Nogales, 21
Peoria, 12	Black Canyon City, 20
Scottsdale, 25	Sedona, 12
Tempe, 15	Payson, 1
Sun City, 7	Casa Grande, 18

Tabela 8: Concentração de arsênico para 20 comunidades na região metropolitana de Phoenix.

Intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$

Solução

Primeiro encontramos os quantis da distribuição t-Student:

- $\nu = \dfrac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = 13,22$, então vamos usar $\nu = 13$;
- $P(t_\nu \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}) = P(t_{13} \leq t_{0,025;13}) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$, então $t_{0,025} = -2,160$;
- $P(t_\nu \leq t_{\frac{\alpha}{2};\nu}) = P(t_{13} \leq t_{0,975;13}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $t_{0,975} = 2,160$.

Note que $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 12,5 - 27,5 = -15$, $s_1 = 7,63$, $s_2 = 15,3$ e $n = n_1 = n_2 = 10$. Então, o intervalo de confiança $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ é dado por

$$
\begin{aligned}
IC(\mu_1 - \mu_2, \gamma) &= \left(t_{\frac{\alpha}{2};\nu} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} + \bar{x}_1 - \bar{x}_2; +\bar{x}_1 - \bar{x}_2; t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \right) \\
&= \left(-2,160 \cdot \sqrt{\frac{7,63^2}{10} + \frac{15,3^2}{10}} + 12,5 - 27,5; 2,160 \cdot \sqrt{\frac{7,63^2}{10} + \frac{15,3^2}{10}} + 12,5 - 27,5 \right) \\
&= (-26,68; -3,32).
\end{aligned}
$$

Com coeficiente de confiança 95%, a diferença das médias das concentrações de arsênico está entre $-26,68$ e $-3,32$ e a média de concentração de arsênico é menor nas comunidades urbanas.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Quando usar: Cada observação é mensurada ou analisada antes e depois de uma intervenção. Este procedimento é chamado de teste t pareado – estudo observacional completamente aleatório. Imagine que

- $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), \ldots, (x_{1n}, x_{2n})$ valores observados e pareados;
- $x_{11}, \ldots, x_{1n}$ valores observados da população 1 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $x_{21}, \ldots, x_{2n}$ valores observados da população 2 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$;
- Considere $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$;
- $\alpha = 5\%$ é o nível de significância (estabelecido pelo pesquisador e geralmente $\alpha = 5\%$).

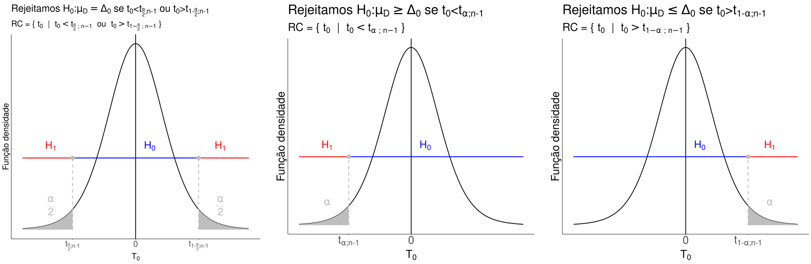
Queremos testar as seguintes hipóteses:

- Teste bilateral: $H_0 : \mu_D = \Delta_0$ e $H_1 : \mu_D \neq \Delta_0$;
- Teste bilateral: $H_0 : \mu_D \leq \Delta_0$ e $H_1 : \mu_D > \Delta_0$;
- Teste bilateral: $H_0 : \mu_D \geq \Delta_0$ e $H_1 : \mu_D < \Delta_0$;

Ideia: Primeiro calculamos a distância padronizada de $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ e $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$:
$T_0 = \frac{(\bar{D}-\mu_D)\sqrt{n}}{S_D}$, em que $S_d = \frac{\sum_{k=1}^{n}(d_j-\mu_D)^2}{n-1}$ e $d_j = x_{1j} - x_{2j}, j = 1, \ldots, n$. Então,

- Teste bilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_D = \Delta_0$ se $|T_0|$ for grande;
- Teste bilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_D \leq \Delta_0$ se T_0 for grande;
- Teste bilateral: Rejeitamos $H_0 : \mu_D \geq \Delta_0$ se T_0 for pequeno.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$



(a) Teste bilateral. **(b)** Teste bilateral. **(c)** Teste bilateral.

Figura 7: Região crítica para o teste-t pareado.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

- Na Figura 7a, testamos $H_0 : \mu_D = \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_D \neq \Delta_0$. Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{(\bar{D}-\Delta_0)\sqrt{n}}{s_D} \in RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ ou $t_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\}$, em que $P\left(t_{n-1} \leq t_{\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = \frac{\alpha}{2}$, $P\left(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $S_D = \frac{\sum_{k=1}^{n}(d_j-\bar{D})^2}{n-1}$, $d_j = x_{1j} - x_{2j}, j = 1, \ldots, n$ e $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$;
- Na Figura 7b, testamos $H_0 : \mu_D \leq \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_D > 0$. Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{(\bar{D}-\Delta_0)\sqrt{n}}{s_D} \in RC = \{t_0 \mid t_0 > t_{1-\alpha;n-1}\}$, em que $P\left(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha;n-1}\right) = 1 - \alpha$, $S_D = \frac{\sum_{k=1}^{n}(d_j-\bar{D})^2}{n-1}$, $d_j = x_{1j} - x_{2j}, j = 1, \ldots, n$ e $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$;
- Na Figura 7c, testamos $H_0 : \mu_D \geq \Delta_0$ versus $H_1 : \mu_D < 0$. Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{(\bar{D}-\Delta_0)\sqrt{n}}{s_D} \in RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\alpha;n-1}\}$, em que $P\left(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha;n-1}\right) = 1 - \alpha$, $S_D = \frac{\sum_{k=1}^{n}(d_j-\bar{D})^2}{n-1}$, $d_j = x_{1j} - x_{2j}, j = 1, \ldots, n$ e $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$.

$t_{\alpha;n-1}$, $t_{1-\alpha;n-1}$, $t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ e $t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$ são chamados de valores críticos.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Exemplo

Um pesquisador deseja comparar dois métodos para predizer a resistência ao cisalhamento das vigas de chapa de aço. Dados dos dois métodos, o procedimento de Karlsruhe e o procedimento de Lehigh, quando aplicados a nove vigas de chapa de aço são mostradas na Tabela 9. Existe diferença entre os dois métodos? Use $\alpha = 5\%$. Calcule o valor-p.

Vigas	Método Karlsruhe	Método Lehigh	Diferença d
Vigas 1	1,19	1,06	0,12
Vigas 2	1,15	0,99	0,16
Vigas 3	1,32	1,06	0,26
Vigas 4	1,34	1,06	0,28
Vigas 5	1,20	1,06	0,14
Vigas 6	1,40	1,18	0,22
Vigas 7	1,36	1,04	0,33
Vigas 8	1,54	1,09	0,45
Vigas 9	1,56	1,05	0,51

Tabela 9: Previsões de resistência para nove vigas de chapa de aço.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Solução

Considere a média populacional μ_1 do cisalhamento do método Karlsruhe e a média populacional μ_2 do método Lehigh.

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \mu_D = \Delta_0 = 0$ e $H_1 : \mu_D \neq \Delta_0 = 0$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{(\bar{D}-\Delta_0)\sqrt{n}}{s_D}$, em que $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$. Ou seja, $RC = \left\{ t_0 \mid t_0 < t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \text{ ou } t_0 < t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \right\}$;

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $P(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = P(t_8 \leq t_{0,975;8}) = 0,975$, então $t_{0,975;8} = 2,306$;
- $P(t_{n-1} \leq t_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = P(t_8 \leq t_{0,025;8}) = 0,025$, então $t_{0,025;8} = -2,306$.

Passo 5) Note que $\bar{d} = 0,274$, $n = 8$, $s_D = 0,135$, $\Delta_0 = 0$ e $t_0 = \frac{(\bar{d}-\Delta_0)\sqrt{n}}{s_D} = \frac{(0,274-0)\sqrt{8}}{0,135} = 6,08$. Como $t_0 \in RC$ e rejeitamos H_0, e as previsões dos dois métodos são distintos.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Solução (valor-p)

O valor-p é calculado através de

$$p = P\left(|T_0| > |t_0| \mid H_0\right) = 2 \cdot \left[1 - P\left(t_{n-1} \leq |t_0|\right)\right].$$

Como $n = 8$, $s_D = 0,135$, $\Delta_0 = 0$, $\bar{d} = 0,274$ e $t_0 = 6,08$, então

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot \left[1 - P\left(t_{n-1} \leq |t_0|\right)\right] \\ &= 2 \cdot \left[1 - P\left(t_8 \leq 6,08\right)\right] \\ &= 0,0003. \end{aligned}$$

Como $p = 0,0003 < \alpha = 0,05$, então rejeitamos H_0 ao nível de significância $\alpha = 0,05$. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, os métodos de previsão são diferentes.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Exemplo

Quinze homens adultos entre 35 e 50 anos participaram em um estudo para avaliar os efeito da dieta e exercício físico no nível de colesterol no sangue. Inicialmente mediu-se o nível de colesterol. Três meses depois de participação do estudo em que fizeram exercícios aeróbicos e uma dieta de baixa gordura, mediu-se novamente o nível de colesterol. Os dados estão na Tabela 10. Ao nível de significância 5%, o nível médio de colesterol diminuiu? Calcule o valor-p.

Sujeito	Antes	Depois
Sujeito 1	265	229
Sujeito 2	240	231
Sujeito 3	258	227
Sujeito 4	295	240
Sujeito 5	251	238
Sujeito 6	245	241
Sujeito 7	287	234
Sujeito 8	314	256
Sujeito 9	260	247
Sujeito 10	279	239
Sujeito 11	283	246
Sujeito 12	240	218
Sujeito 13	238	219
Sujeito 14	225	226
Sujeito 15	247	233

Tabela 10: Nível de colesterol.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Solução

Considere μ_1 o nível de colesterol antes do estudo começar e μ_2 o nível de colesterol depois do estudo finalizado.
Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \mu_D = \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0 = 0$ e $H_1 : \mu_D = \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0 = 0$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{(\bar{D}-\Delta_0)\sqrt{n}}{s_D}$, em que $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$. Ou seja, $RC = \{t_0 \mid t_0 > t_{1-\alpha;n-1}\}$;
Passo 4) Vamos encontrar valor crítico:

- $P\left(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha;n-1}\right) = P\left(t_{14} \leq t_{0,95;14}\right) = 1 - \alpha = 0,95$, então $t_{0,95;14} = 1,761$.

Passo 5) Como $\bar{d} = 26,87$, $s_D = 19,04$, $n = 15$ e $t_0 = 5,47$. Então $t_0 \in RC$ e rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância 5%, o nível colesterol diminuiu depois de três meses de dieta com baixa gordura e exercícios físicos.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Solução (valor-p)

O valor-p pode ser calculado por

$$p = P\left(T_0 > t_0 \mid H_0\right) = 1 - P(t_{n-1} \leq t_0).$$

Como $n = 15$, $\bar{D} = 26,87$, $s_D = 19,04$ e $t_0 = 5,47$, então o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= 1 - P\left(t_{n-1} \leq t_0\right) \\ &= 1 - P\left(t_{14} \leq 5,47\right) \\ &= 0,00004. \end{aligned}$$

Como $p = 0,00004 < \alpha = 0,05$, rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, o nível médio de colesterol depois de três meses com dieta de baixa gordura e exercícios físicos diminuiu.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Exemplo

Considere um estudo observacional completamente aleatório para estudar $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$, em que a população 1 tem distribuição normal com média populacional μ_1 e a população 2 tem distribuição normal com média populacional μ_2. Suponha que o pesquisador deseja decidir entre as hipóteses $H_0 : \mu_D = \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$ e $H_1 : \mu_D = \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$. Na Tabela 11 temos algumas informações sobre o experimento. Complete a Tabela 11. Qual a decisão do pesquisador? Use $\alpha = 5\%$.

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	α	t_0
$15,43$	$20,58$	5%	
Δ_0	n	valor-p	s_D
0	20		$0,43$

Tabela 11: Algumas informações do experimento.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Exemplo

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \mu_D \geq \Delta_0 = 0$ e $H_0 : \mu_D < \Delta_0 = 0$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeitamos H_0 se $t_0 = \frac{(\bar{D}-\Delta_0)\sqrt{n}}{s_D}$ for pequeno. Ou seja, $RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\alpha;n-1}\}$;
Passo 4) Vamos encontrar o valor crítico:

- $P(t_{n-1} \leq t_{\alpha;n-1}) = P(t_{19} \leq t_{0,05;19}) = \alpha = 0,05$, então $t_{0,05;19} = -1,729$;

Passo 5) Note que $\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 15,43 - 20,58 = -5,15$ e $t_0 = \frac{(\bar{D}-\Delta_0)\sqrt{n}}{s_D} = \frac{(-5,15-0)\sqrt{20}}{0,43} = -53,56 \in RC$, então rejeitamos H_0.

Test t pareado para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P(T_0 < t_0 \mid H_0) = P(t_{n-1} \leq t_0).$$

Note que $\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 15,43 - 20,58 = -5,15$ e $t_0 = \frac{(\bar{D}-\Delta_0)\sqrt{n}}{s_D} = \frac{(-5{,}15-0)\sqrt{20}}{0{,}43} = -53,56$. Então, o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= P(t_{n-1} \leq t_0) \\ &= P(t_{19} \leq -53,56) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $p = 0 < \alpha = 0,05$, então rejeitamos H_0.

Intervalo de confiança para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$.

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 2 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $\gamma = 1 - \alpha$ é o coeficiente de confiança. (Geralmente, $\gamma = 95\%$).

Note que $T = \frac{(\bar{D}-\mu_D)\sqrt{n}}{s_D} \sim t_{n-1}$, em que $\hat{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$, e

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \leq \frac{(\bar{D}-\mu_D)\sqrt{n}}{s_D} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1 - \alpha.$$

Então o intervalo de confiança para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ é dado por

$$IC\left(\mu_D; \gamma\right) = \left(t_{\frac{\alpha}{2};n-1}\frac{s_D}{\sqrt{n}} + \bar{D}; t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\frac{s_D}{\sqrt{n}} + \bar{D}\right).$$

Intervalo de confiança para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Exemplo

Um pesquisador deseja comparar dois métodos para predizer a resistência ao cisalhamento das vigas de chapa de aço. Dados dos dois métodos, o procedimento de Karlsruhe e o procedimento de Lehigh, quando aplicados às novas vigas de chapa de aço são mostradas na Tabela 12. Calcule o intervalo de confiança para a diferença de médias populacionais $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$. Use $\gamma = 95\%$.

Vigas	Método Karlsruhe	Método Lehigh	Diferença d
Vigas 1	1,19	1,06	0,12
Vigas 2	1,15	0,99	0,16
Vigas 3	1,32	1,06	0,26
Vigas 4	1,34	1,06	0,28
Vigas 5	1,20	1,06	0,14
Vigas 6	1,40	1,18	0,22
Vigas 7	1,36	1,04	0,33
Vigas 8	1,54	1,09	0,45
Vigas 9	1,56	1,05	0,51

Tabela 12: Previsões de resistência para nove vigas de chapa de aço.

Intervalo de confiança para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Solução

Note que $\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0,274$, $s_D = 0,135$ e $n = n_1 = n_2 = 9$. Primeiro encontramos os quantis da distribuição t-Student:

- $P(t_{n-1} \leq t_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = P(t_8 \leq t_{0,025;8}) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$, então $t_{0,025} = -2,306$;
- $P(t_{n-1} \leq t_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = P(t_8 \leq t_{0,975;8}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $t_{0,975} = 2,306$.

Então, o intervalo de confiança $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ é dado por

$$\begin{aligned} IC(\mu_D, \gamma) &= \left(t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s_D}{\sqrt{n}} + \bar{D}; t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s_D}{\sqrt{n}} + \bar{D} \right) \\ &= \left(-2,306 \cdot \frac{0,135}{3} + 0,274; 2,306 \cdot \frac{0,135}{3} + 0,274 \right) \\ &= (0,17; 0,38) \, . \end{aligned}$$

Com coeficiente de confiança 95%, a diferença das médias das previsões de cisalhamento está entre 0, 17 e 0, 38 e concluímos que os dois métodos de previsão, em média, diferentes.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $x_1 \sim Bernoulli(p_1)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 1 $x_2 \sim Bernoulli(p_2)$;
- Duas populações independentes;
- α é o nível de significância (geralmente $\alpha = 5\%$).

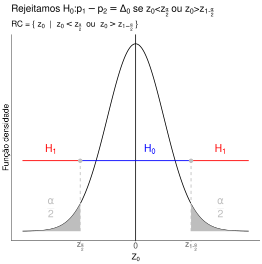
Queremos testar as seguintes hipóteses:

- Teste bilateral: $H_0 : p_1 - p_2 = \Delta_0$ e $H_1 : p_1 - p_2 \neq \Delta_0$;
- Teste unilateral: $H_0 : p_1 - p_2 \leq \Delta_0$ e $H_1 : p_1 - p_2 > \Delta_0$;
- Teste unilateral: $H_0 : p_1 - p_2 \geq \Delta_0$ e $H_1 : p_1 - p_2 < \Delta_0$.

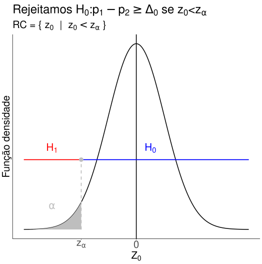
Ideia: Primeiro calculamos a distância padronizada de $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ e $\Delta_0 = \mu_1 - \mu_2$: $Z_0 = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$, em que $\hat{p} = \frac{\hat{p}_1 \cdot n_1 + \hat{p}_2 \cdot n_2}{n_1 + n_2}$. Então,

- Teste bilateral: Rejeitamos $H_0 : p_1 - p_2 = \Delta_0$ se $|Z_0|$ for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : p_1 - p_2 \leq 0$ se Z_0 for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : p_1 - p_2 \geq 0$ se Z_0 for pequeno.

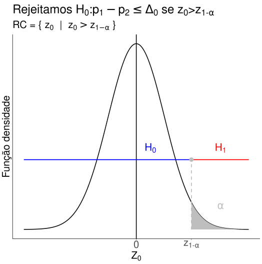
Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).



(a) Teste bilateral.



(b) Teste unilateral.



(c) Teste unilateral.

Figura 8: Região crítica para comparar médias de populações normais com variâncias desconhecidas e diferentes.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

- Na Figura 8a, testamos $H_0 : p_1 - p_2 = \Delta_0$ versus $H_1 : p_1 - p_2 \neq \Delta_0$. Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$, em que $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$, $\Phi\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ e $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$;
- Na Figura 8b, testamos $H_0 : p_1 - p_2 \leq \Delta_0$ versus $H_1 : p_1 - p_2 > \Delta_0$. Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$, em que $\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$ e $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$;
- Na Figura 8c, testamos $H_0 : p_1 - p_2 \geq \Delta_0$ versus $H_1 : p_1 - p_2 < \Delta_0$. Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\alpha}\}$, em que $\Phi\left(z_{\alpha}\right) = \alpha$ e $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$.

Chamamos z_{α}, $z_{1-\alpha}$, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ e $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ de valores críticos.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

Exemplo

A erva-de-são-joão (ou hipérico) tem sido usada para o tratamento de depressão por séculos. Um pesquisador decidiu estudar da erva-de-são-joão e escolheu 200 pacientes com depressão aguda: 100 pacientes foram tratados com erva-de-são-joão e 100 pacientes foram tratados com placebo. A distribuição dos pacientes foram aleatórias. Ao final do estudo, 19 pacientes com placebo se recuperam e 27 pacientes tratados com erva-de-são-joão se recuperaram. Existe evidência que a proporção de pessoas recuperadas com erva-de-são-joão é diferente da proporção de pessoas recuperadas com placebo? Use $\alpha = 5\%$. Calcule o p-valor.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

Solução

Seja p_1 é a proporção de pessoas recuperadas usando erva-de-são-joão e p_2 é a proporção de pessoas recuperadas usando placebo.

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : p_1 - p_2 = \Delta_0 = 0$ e $H_1 : p_1 - p_2 \neq \Delta_0 = 0$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeitamos H_0 se $|z_0| = \left| \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \right|$ for grande, em que $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$. Ou seja,

$RC = \left\{ z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z_0 < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$;

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,025}\right) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$, então $z_{0,025} = -1,96$;
- $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,975}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $z_{0,975} = 1,96$;

Passo 5) Como $\hat{p}_1 = \frac{27}{100} = 0,27$, $\hat{p}_2 = \frac{19}{100} = 0,19$, $n_1 = n_2 = 100$, $\Delta_0 = 0$,

$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2} = \frac{100 \cdot 0,27 + 100 \cdot 0,19}{100+100} = 0,23$ e

$z_0 = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(0,27 - 0,19 - 0)}{\sqrt{0,23(1-0,23)}\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{1}{100}}} = 3,19 \in RC$, então rejeitamos H_0.

Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, a proporção de pacientes recuperados com erva-de-são-joão e placebo são diferentes.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

Solução (valor-p)

O valor-p pode calcular através de

$$p = P\left(|Z_0| > |z_0| \mid H_0\right) = 2 \cdot \left[1 - \Phi(|z_0|)\right].$$

Como $\hat{p}_1 = \frac{27}{100} = 0,27$, $\hat{p}_2 = \frac{19}{100} = 0,19$, $n_1 = n_2 = 100$, $\Delta_0 = 0$,
$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2} = \frac{100 \cdot 0,27 + 100 \cdot 0,19}{100+100} = 0,23$ e
$z_0 = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(0,27-0,19-0)}{\sqrt{0,23(1-0,23)}\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{1}{100}}} = 3,19$, o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= 2\left[1 - \Phi\left(|z_0|\right)\right] \\ &= 2\left[1 - \Phi\left(3,19\right)\right] \\ &= 2\left[1 - 0,9993\right] \\ &= 0,0014. \end{aligned}$$

Como $p = 0,0014 < \alpha = 0,05$, rejeitamos H_0, e a proporção de pacientes recuperados com placebo e erva-de-são-joão são diferentes.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

Exemplo

Um experimento tem o objetivo de avaliar a eficácia de uma cirurgia em homens diagnosticados com câncer de próstata. 347 homens diagnosticados com câncer de próstata tiveram esta cirurgia e 18 destes morreram, e 298 homens diagnosticados com câncer de próstata não tiveram esta cirurgia e 31 morreram. Existe evidência de que esta cirurgia diminui a taxa de mortalidade em homens diagnosticados com câncer próstata? Use $\alpha = 5\%$. Calcule o valor-p.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

Solução

Seja p_1 é a proporção de homens diagnosticados com câncer que fizeram a cirurgia e p_2 é a proporção de homens diagnosticados com câncer que não fizeram a cirurgia.

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : p_1 - p_2 \geq \Delta_0 = 0$ e $H_1 : p_1 - p_2 < \Delta_0 = 0$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeito H_0 se $z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$ for pequeno. Ou seja,

$RC = \{z_0 \mid z_0 < z_\alpha\}$;

Passo 4) Vamos calcular o valor críticos:

- $\Phi(z_\alpha) = \Phi(z_{0,05}) = \alpha = 0,05$, então $z_{0,05} = -1,65$;

Passo 5) Como $n_1 = 347$, $n_2 = 298$, $\hat{p}_1 = \frac{18}{347} = 0,05$, $\hat{p}_2 = \frac{31}{298} = 0,10$, $\Delta_0 = 0$, $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2} = 0,08$ e $z_0 = \frac{0,05-0,10-0}{\sqrt{0,08(1-0,08)\left(\frac{1}{347}+\frac{1}{298}\right)}} = -2,33 \in RC$, então rejeitamos H_0.

Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, a cirurgia diminui a taxa de mortalidade de homens com câncer de próstata.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

Solução (valor-p)

O valor-p é calculado por

$$p = P(Z_0 < z_0 \mid H_0) = \Phi\left(z_0\right).$$

Como $n_1 = 347$, $n_2 = 298$, $\hat{p}_1 = \frac{18}{347} = 0,05$, $\hat{p}_2 = \frac{31}{298} = 0,10$, $\Delta_0 = 0$, $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2} = 0,08$ e $z_0 = \frac{0,05-0,10-0}{\sqrt{0,08(1-0,08)\left(\frac{1}{347}+\frac{1}{298}\right)}} = -2,33$, então o valor-p é dado por

$$p = \Phi\left(-2,33\right) = 0,0099.$$

Como $p = 0,009 < \alpha = 0,05$, então rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, a cirurgia diminui a taxa de mortalidade entre homens com câncer de próstata.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

Exemplo

Um pesquisador deseja comparar duas proporções populacionais,ou seja, este pesquisador deseja decidir entre as hipóteses: $H_0 : p_1 - p_2 \leq \Delta_0 = 0$ e $H_1 : p_1 - p_2 > \Delta_0 = 0$. Algumas informações deste experimento está na Tabela 13. Complete a Tabela 13. Ao nível de significância $\alpha = 5\%$, qual a decisão do pesquisador? Calcule o valor-p.

n_1	n_2	$n_1\hat{p}_1$	$n_2\hat{p}_2$
250	300	147	52
z_0	α	Decisão	valor-p
	5%		

Tabela 13: Algumas informações sobre experimentos.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

Solução

Passo 1) Queremos testar as seguintes hipóteses:
$H_0 : p_1 - p_2 \leq \Delta_0 = 0$ e $H_1 : p_1 - p_2 > \Delta_0 = 0$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$ for grande.
Ou seja, $RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$;
Passo 4) Vamos encontrar o valor crítico:

- $\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = \Phi\left(z_{0,95}\right) = 1 - \alpha = 0,95$, então $z_{0,95} = 1,65$;

Passo 5) Como $n_1 = 250$, $n_2 = 300$, $\hat{p}_1 = \frac{147}{250} = 0,59$,
$\hat{p}_2 = \frac{52}{300} = 0,17$, $p = 0,36$ e
$z_0 = \frac{0,59 - 0,17}{\sqrt{0,36(1-0,36)(1/250 + 1/300)}} = 10,22 \in RC$, então rejeitamos H_0.

Comparação de p_1 e p_2 (especialmente para $n \geq 40$).

Solução (valor-p)

O valor-p é calculado através de

$$p = P\left(Z_0 > z_0 \mid H_0\right) = 1 - \Phi\left(z_0\right).$$

Como $n_1 = 250$, $n_2 = 300$, $\hat{p}_1 = \frac{147}{250} = 0,59$, $\hat{p}_2 = \frac{52}{300} = 0,17$, $p = 0,36$ e $z_0 = \frac{0{,}59 - 0{,}17}{\sqrt{0{,}36(1-0{,}36)(1/250+1/300)}} = 10,22$, então o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= 1 - \Phi\left(z_0\right) \\ &= 1 - \Phi\left(10,22\right) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $p = 0 < \alpha = 0,05$, rejeitamos H_0.

Intervalo de confiança para $p_1 - p_2$.

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $X_1 \sim Bernoulli(p_1)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 2 $X_2 \sim Bernoulli(p_2)$;
- X_1 e X_2 são independentes;
- $\gamma = 1 - \alpha$ é o coeficiente de confiança. (Geralmente, $\gamma = 95\%$).

Note que $Z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$, e

$$1 - \alpha = P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$= P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} + \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \leq p_1 - p_2 \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} + \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \right)$$

Note que $\max\{p_1(1-p_1); p_2(1-p_2)\} \leq \frac{1}{4}$, então o intervalo de confiança para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ é dado por

$$IC(p_1 - p_2; \gamma) = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + \hat{p}_1 - \hat{p}_2; \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \right).$$

Intervalo de confiança para $p_1 - p_2$.

Exemplo

Considere o processo de fabricação de rolamentos do virabrequim e a equipe de controle de qualidade coletou 85 peças com 10 defeituosas. Então, um engenheiro modificou as especificações das máquinas e da linha de produção e coletou outras 85 peças e 8 peças foram defeituosas. Construa um intervalo de confiança para $p_1 - p_2$ com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$. Interprete.

Intervalo de confiança para $p_1 - p_2$.

Solução

Primeiro encontramos os quantis da distribuição normal padrão:

- $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,025}\right) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$, então $z_{0,025} = -1,96$;
- $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,975}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $z_{0,975} = 1,96$.

Note que $n_1 = n_2 = 85$, $\hat{p}_1 = \frac{10}{85} = 0,12$, $\hat{p}_2 = \frac{8}{85} = 0,09$. Então, o intervalo de confiança $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ é dado por

$$IC(p_1 - p_2, \gamma) = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{2}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + \hat{p}_1 - \hat{p}_2; \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + \hat{p}_1 - \hat{p}_2\right)$$

$$= \left(\frac{-1,96}{2}\sqrt{\frac{1}{85} + \frac{1}{85}} + 0,12 - 0,09; \frac{1,96}{2}\sqrt{\frac{1}{85} + \frac{1}{85}} + 0,12 - 0,0\right.$$

$$= (-0,12; 0,18).$$

Como $0 \in IC(p_1 - p_2; 95\%) = (-0,12; 0,18)$, então concluímos que a modificação proposta pelo engenheiro não diminuiu a proporção de rolamentos de virabrequim defeituosos.

Associação entre variáveis qualitativas.

Objetivo

Sejam X e Y duas variáveis qualitativas com valores possíveis:

- X: $A_1, A_2, \cdots, A_r$;
- Y: $B_1, B_2, \cdots, B_s$.

Desejamos estudar a associação entre X e Y.

O que é associação entre X e Y?

Suponha que $f_i \cdot 100\%$ dos elementos da população tenham valor de X igual a A_i. Então, X e Y são

não associados se ao conhecermos o valor de Y para um elemento da população, continuamos com o valor $f_i \cdot 100\%$ de chance do indivíduo ter valor de X igual a A_i;

associados se ao conhecermos o valor de Y para um elemento da população, alteramos o valor $f_i \cdot 100\%$ de chance do indivíduo ter valor de X igual a A_i;

Exemplo de associação

Um pesquisador interessado em estudar a associação entre Câncer e o tabagismo coletou uma amostra com 300 indivíduos e obteve a tabela de distribuição de frequência conforme Tabela 14. Você diria que as duas variáveis estão associadas?

Tabela 14: Tabela de contingência entre Câncer e Tabagismo.

	Câncer		
Tabagismo	Não	Sim	Total
Não-Fumante	200	0	200
Fumante	0	100	100
Total	200	100	300

Exemplo de associação: solução

Precisamos de uma referência e podemos calcular a frequência relativa ao total das colunas ou total das linhas. Neste exemplo, vamos usar o total das linhas.

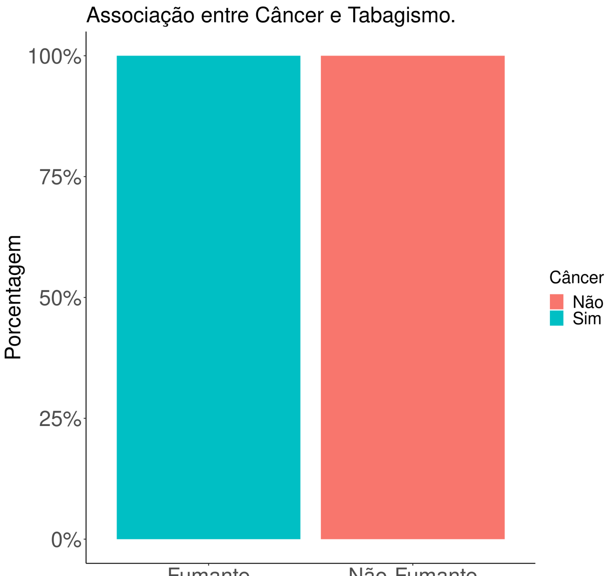
Tabela 15: Tabela de contingência com frequência relativa ao total das linhas.

	Câncer (Y)		
Tabagismo (X)	Não	Sim	Total
Não-Fumante	$\frac{200}{200} \cdot 100 = 100\%$	$\frac{0}{200} \cdot 100 = 0\%$	$\frac{200}{200} \cdot 100 = 100\%$
Fumante	$\frac{0}{100} \cdot 100 = 0\%$	$\frac{100}{100} \cdot 100 = 100\%$	$\frac{100}{100} \cdot 100 = 100\%$
Total	$\frac{200}{300} \cdot 100 = 66,67\%$	$\frac{100}{300} \cdot 100 = 33,33\%$	$\frac{300}{300} \cdot 100 = 100\%$

Note que a probabilidade de um indivíduo ter câncer é $33,33\%$, mas

- Se o valor de Y é igual "Não-Fumante", então a probabilidade do indivíduo ter câncer é 0%;
- Se o valor de Y é igual "Fumante", então a probabilidade do indvíduo ter câncer é 100%.

Exemplo de associação: solução



Exemplo de não associação

Um pesquisador está interessado em estudar a associação entre Gênero e Tabagismo. Para isso, ele coletou uma amostra de 300 de elementos da população e obteve a tabela contingência na Tabela 16.

Tabela 16: Tabela de contingência entre Gênero e Tabagismo.

	Gênero		
Tabagismo	Homem	Mulher	Total
Não-Fumante	80	40	120
Fumante	120	60	180
Total	200	100	300

Exemplo de não-associação: solução

Precisamos de uma referência e podemos calcular a frequência relativa ao total das colunas ou total das linhas. Neste exemplo, vamos usar o total das colunas.

Tabela 17: Tabela de distribuição de frequência relativa ao total das colunas.

	Gênero (Y)		
Tabagismo (X)	Homem	Mulher	Total
Não-Fumante	$\frac{80}{200} \cdot 100 = 40\%$	$\frac{40}{100} \cdot 100 = 40\%$	$\frac{120}{300} \cdot 100 = 40\%$
Fumante	$\frac{120}{200} \cdot 100 = 60\%$	$\frac{60}{100} \cdot 100 = 60\%$	$\frac{180}{300} \cdot 100 = 60\%$
Total	$\frac{200}{200} \cdot 100 = 100\%$	$\frac{100}{100} \cdot 100 = 100\%$	$\frac{300}{300} \cdot 100 = 100\%$

Note que a probabilidade de um indivíduo ser Fumante é 40%, mas

- Se o valor de Y é igual Homem, então a probabilidade do indvíduo ser Fumante é 40%;
- Se o valor de Y é igual Mulher, então a probabilidade do indvíduo ser Fumante é 40%.

Exemplo de associação: solução

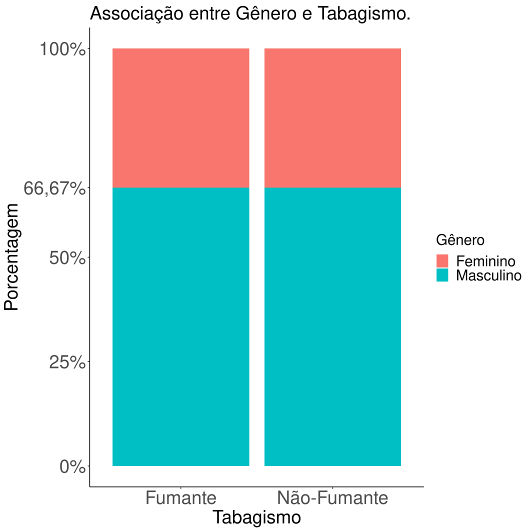


Figura 10: Representação da tabela 17 usando gráfico de barras.

Propriedade de não associação

Tabela 18: Tabela de contingência: frequência observada.

	Gênero		
Tabagismo	Homem	Mulher	Total
Não-Fumante	80	40	120
Fumante	120	60	180
Total	200	100	300

Tabela 19: Tabela de contingência: frequência esperada.

	Gênero		
Tabagismo	Homem	Mulher	Total
Não-Fumante	$\frac{200 \cdot 120}{300} = 80$	$\frac{100 \cdot 120}{300} = 40$	120
Fumante	$\frac{200 \cdot 180}{300} = 120$	$\frac{100 \cdot 180}{300} = 60$	180
Total	200	100	300

Propriedade importante: No contexto de não associação, as tabelas de distribuição de frequência observada e a tabela de distribuição de frequência esperada são iguais.

Associação

Considere um estudo exploratório que estuda a recuperação funcional de pacientes submetidos a uma certa classe de atos cirúrgicos em cinco hospitais. Os hospitais A, B, C, D são hospitais comuns e o hospital E é um hospital de referência que recebe hospitais mais greves. Obtemos a seguinte tabela de contingência descrita Tabela 20. As duas variáveis estão associadas?

Tabela 20: Tabela de contingência.

	Recuperação funcional			
Hospital	Nenhuma	Parcial	Completa	Total
$A + B + C + D$	47	120	118	285
E	43	29	10	82
Total	90	149	128	367

Solução

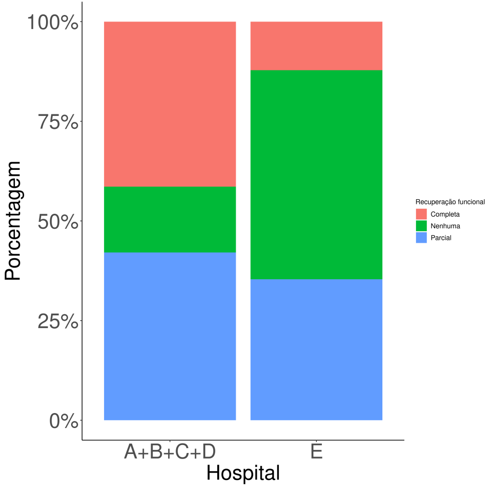
Primeiro, vamos construir a tabela de contingência com frequência relativa em relação ao total das linhas conforme Tabela 21.

Tabela 21: Tabela de contingência relativa ao total das linhas.

	Recuperação funcional			
Hospital	Nenhuma	Parcial	Completa	Total
$A+B+C+D$	16,5%	42,1%	41,4%	100%
E	52,4%	35,4%	12,2%	100%
Total	24,5%	40,6%	34,9%	100%

Solução

Figura 11: Associação entre Recuperação Funcional e Hospital.



Teste de associação

Considere duas variáveis qualitativas X e Y com valores possíveis:

- $X : A_1, A_2, \cdots, A_r$;
- $Y : B_1, B_2, \cdots, B_s$;

com tabela de contingência conforme tabela abaixo

	Y				
X	B_1	B_2	$\cdots$	B_s	Total
A_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1s}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2s}	$n_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	n_{r1}	n_{r2}	$\cdots$	n_{rs}	$n_{r.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$\cdots$	$n_{.s}$	$n_{..}$

em que

- $n_{i.} = n_{i1} + n_{i2} + \cdots + n_{is}, \quad i = 1, 2, \cdots, r$;
- $n_{.j} = n_{1j} + n_{2j} + \cdots + n_{rj}, \quad j = 1, 2, \cdots, s$;
- $n_{..}$ é o tamanho da amostra.

Teste de associação

Desejamos testar se X e Y são independentes, ao nível de significância α.
Passo 1) Vamos testar as hipóteses:

$$H_0 : \text{As duas variáveis não estão associadas;}$$
$$H_1 : \text{As duas variáveis estão associadas.}$$

Passo 2) Nível de significância α fixado pelo pesquisador.
Passo 3) Sob H_0, teríamos a tabela de contingência conforme Tabela 22.

Tabela 22: Tabela de contingência sob H_0.

	Y			
X	B_1	B_2	$\cdots$	B_s
A_1	$n_{11}^\star = \frac{n_{1.} \cdot n_{.1}}{n_{..}}$	$n_{12}^\star = \frac{n_{1.} \cdot n_{.2}}{n_{..}}$	$\cdots$	$n_{1s}^\star = \frac{n_{1.} \cdot n_{.s}}{n_{..}}$
A_2	$n_{21}^\star = \frac{n_{2.} \cdot n_{.1}}{n_{..}}$	$n_{22}^\star = \frac{n_{2.} \cdot n_{.2}}{n_{..}}$	$\cdots$	$n_{2s}^\star = \frac{n_{2.} \cdot n_{.s}}{n_{..}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_r	$n_{r1}^\star = \frac{n_{r.} \cdot n_{.1}}{n_{..}}$	$n_{r2}^\star = \frac{n_{r.} \cdot n_{.2}}{n_{..}}$	$\cdots$	$n_{rs}^\star = \frac{n_{r.} \cdot n_{.s}}{n_{..}}$

Teste de associação

Passo 3) (continuação) Se X e Y são independentes (sob H_0), temos que $n^\star_{ij} = n_{ij}, \quad i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, s$. Note que se,

- Se as distâncias $\dfrac{(n_{ij} - n^\star_{ij})^2}{n \star ij}$ forem pequenas, decidimos por H_0;
- Se as distâncias $\dfrac{(n_{ij} - n^\star_{ij})^2}{n \star ij}$ forem grandes, decidimos por H_1;

então calculamos uma medida chamada qui-quadrado

$$
\begin{aligned}
\chi^2 = & \frac{(n_{11} - n^\star_{11})^2}{n^\star_{11}} + \frac{(n_{12} - n^\star_{12})^2}{n^\star_{12}} + \cdots + \frac{(n_{1s} - n^\star_{1s})^2}{n^\star_{1s}} + \\
& + \frac{(n_{21} - n^\star_{21})^2}{n^\star_{21}} + \frac{(n_{22} - n^\star_{22})^2}{n^\star_{22}} + \cdots + \frac{(n_{2s} - n^\star_{2s})^2}{n^\star_{2s}} + \\
& \vdots \\
& + \frac{(n_{r1} - n^\star_{r1})^2}{n^\star_{r1}} + \frac{(n_{r2} - n^\star_{r2})^2}{n^\star_{r2}} + \cdots + \frac{(n_{rs} - n^\star_{rs})^2}{n^\star_{rs}},
\end{aligned}
$$

e

- Se χ^2 for pequeno ($\chi^2 \leq x_c$), decidimos por H_0;
- Se χ^2 for grande ($\chi^2 > x_c$), decidimos por H_1;

e a região crítica é da forma $RC = \{\chi^2 \mid \chi^2 > x_c\}$.

Teste de associação

Passo 4) Pode-se provar que χ^2 tem distribuição qui-quadrado com $(r-1)\cdot(s-1)$ graus de liberdade.
Precisamos achar o valor crítico:

$$\begin{aligned}\alpha = P(H_1 \mid H_0) &= P(\chi^2_{(r-1)\cdot(s-1)} > \chi^2_{1-\alpha;(r-1)\cdot(s-1)} \mid H_0)\\ &= 1 - P(\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha;(r-1)\cdot(s-1)})\end{aligned}$$

e $P(\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha;(r-1)\cdot(s-1)}) = 1-\alpha$.

Passo 5) Verificar se a $\chi^2 \in RC$ para decidir entre H_0 e H_1.

Valor-p Suponha que o valor de qui-quadrado seja Q e seja X uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com $(r-1)\cdot(s-1)$ graus de liberdade. Calculamos o p-valor através

$$p = P(X > \chi^2 \mid H_0) = 1 - P(\chi^2_{(r-1)\cdot(s-1)} \leq \chi^2).$$

Teste de associação

Exemplo

Considere um estudo exploratório que estuda a recuperação funcional de pacientes submetidos a uma certa classe de atos cirúrgicos em cinco hospitais. Os hospitais A, B, C, D são hospitais comuns e o hospital E é um hospital de referência que recebe hospitais mais greves. Obtemos a seguinte tabela de contingência conforme Tabela 23. As duas variáveis estão associadas ao nível de 5%?

Tabela 23: Tabela de distribuição de frequênia conjunta.

	Recuperação funcional			
Hospital	Nenhuma	Parcial	Completa	Total
$A+B+C+D$	47	120	118	285
E	43	29	10	82
Total	90	149	128	367

Teste de associação

Solução

Passo 1) Desejamos testar as seguintes hipóteses

- H_0 : as duas variáveis não são associadas;
- H_1 : as duas variáveis estão associadas.

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 0,01$.
Passo 3) Rejeitamos H_0 se χ^2 for grande. Ou seja,
$RC = \{\chi^2 \mid \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha;(r-1)\cdot(s-1)}\}$.
Passo 4) Vamos encontrar o valor crítico:

- $P\left(\chi^2_{(r-1)\cdot(s-1)} \leq \chi^2_{1-\alpha;(r-1)\cdot(s-1)}\right) = P\left(\chi^2_{(2-1)\cdot(3-1)} \leq \chi^2_{1-\alpha;(r-1)\cdot(s-1)}\right) = 1 - \alpha = 0,99$, então $\chi^2_{0,99;2} = 9,2103404$

Teste de associação

Passo 5) Agora calculamos a tabela de contingência esperada.

Tabela 24: Tabela de contingência esperada.

	Recuperação funcional			
Hospital	Nenhuma	Parcial	Completa	Total
$A+B+C+D$	$\frac{90 \cdot 285}{367} = 69,89$	$\frac{149 \cdot 285}{367} = 115,71$	$\frac{128 \cdot 285}{367} = 99,40$	185
E	$\frac{90 \cdot 82}{367} = 20,11$	$\frac{149 \cdot 82}{367} = 33,29$	$\frac{128 \cdot 82}{367} = 28,60$	82
Total	90	149	128	367

Então o χ^2 é

$$\chi^2 = \frac{(47-69,89)^2}{69,89} + \frac{(115,71-120)^2}{115,71} + \frac{(99,40-118)^2}{99,40} + \frac{(20,11-43)^2}{20,11} + \frac{(29-33,29)^2}{33,29} + \frac{(28,60-10)^2}{28,60} = 49,84.$$

Como $\chi^2 = 49,84 > \chi^2_{0,99;2} = 9,2103404$, então $\chi^2 \in RC$ e rejeitamos H_0. Então, ao nível de significância 1%, o tipo de hospital e a recuperação estão associadas.

Teste de associação

Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P\left(\chi^2 > \chi^2_{obs} \mid H_0\right) = 1 - P\left(\chi^2_{(r-1)\cdot(s-1)} \leq \chi^2_{obs}\right),$$

em que χ^2_{obs} é o valor observado da medida qui-quadrado da amostra. Note que $\chi^2_{obs} = 49,84$, então o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= 1 - P\left(\chi^2_{(r-1)\cdot(s-1)} \leq \chi^2_{obs}\right) \\ &= 1 - P\left(\chi^2_2 \leq 49,84\right) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $p = 0 < \alpha = 0,01$, e rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 0,01$, as duas variáveis qualitativas estão associadas.

Associação entre variáveis quantitativas.

Objetivo

Checar a associação entre duas variáveis quantitativas estão associadas, usando:

- gráfico de dispersão;
- coeficiente de correlação linear de Pearson;
- teste de associação;
- Intervalo de confiança para o coeficiente de correção linear de Pearson.

Exemplo

Considere uma amostra com 10 funcionários e suponha que coletamos duas variáveis:

- X: Anos de serviços;
- Y: Número de clientes.

Os dados estão mostrados na Tabela 25.

Agente	Anos de serviço (X)	Número de clientes (Y)
A	2	48
B	3	50
C	4	56
D	5	52
E	4	43
F	6	60
G	7	62
H	8	58
I	8	64
J	10	72

Tabela 25: Amostra de 10 corretores de seguros.

Associação entre variáveis quantitativas

Solução

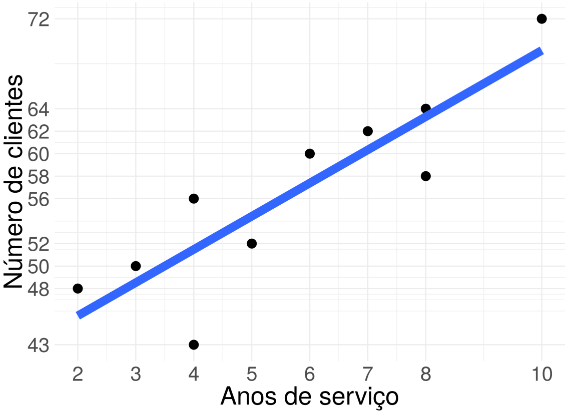


Figura 12: Gráfico de dispersão: associação positiva

Associação entre variáveis quantitativas

Exemplo

Numa pesquisa feita com 10 famílias com renda bruta mensal entre 10 e 60 salários mínimos, mediram-se:

- X renda bruta mensal (expressa em número de salários mínimos);
- Y a porcentagem da renda bruta anual gasta com assistência médica.

Os dados estão na Tabela 26.

Família	X	Y
A	12	7,2
B	16	7,4
C	18	7,0
D	20	6,5
E	28	6,6
F	30	6,7
G	40	6,0
H	48	5,6
I	50	6,0
J	54	5,5

Tabela 26: Renda bruta mensal (X) e porcentagem da renda gasta em saúde (Y) para 10 famílias.

Associação entre variáveis quantitativas

Solução

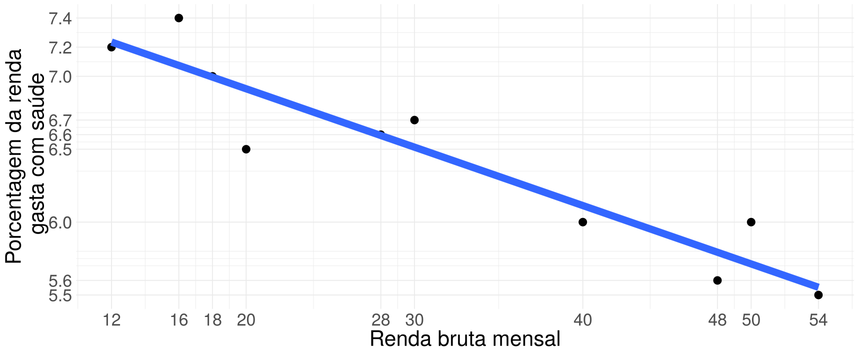


Figura 13: Gráfico de dispersão: associação negativa

Associação entre variáveis quantitativas

Exemplo

Oito indivíduos foram submetidos a um teste sobre conhecimento de língua estrangeira e, em seguida, mediu-se o tmepo gasto para cada um aprender a operar uma determinada máquina. As variáveis medidas foram:

- X resultado obtido no teste (máximo = 100 pontos);
- Y tempo, em minutos, necessário para operar a máquina satisfatoriamente.

Os dados estão na Tabela 27.

Indivíduo	X	Y
A	45	343
B	52	368
C	61	355
D	70	334
E	74	337
F	76	381
G	80	345
H	90	375

Tabela 27: Amostra de famílias.

Associação entre variáveis quantitativas

Solução

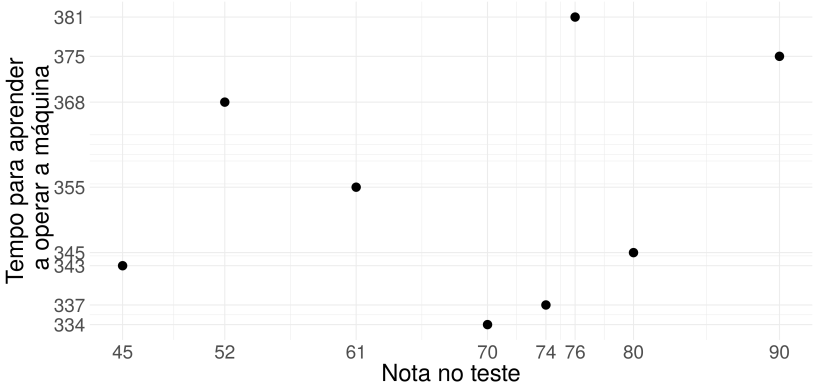
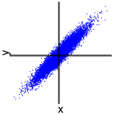


Figura 14: Gráfico de dispersão: associação nula

Coeficiente de correlação de Pearson

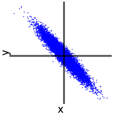
Podemos resumir a associação entre duas variáveis quantitativas em três casos (para variáveis padronizadas – subtrair a média e dividir pelo desvio padrão):

Figura 15: Associação positiva.



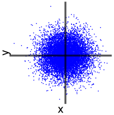
A maioria dos pontos estão no primeiro e no terceiro quadrantes e a maioria das multiplicações das coordenadas destes pontos são positivas.

Figura 16: Associação negativa.



A maioria dos pontos estão no segundo e quarto quadrantes e a maioria das multiplicações das coordenadas destes pontos são negativas.

Figura 17: Associação nula.



Uma igual proporção de pontos estão no primeiro, no segundo e no terceiro quadrantes.

Coeficiente de correlação linear de Pearson

Motivação

Consideramos as variáveis padronizadas $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{dp(X)}, i = 1, \ldots, n$ e $w_i = \frac{y_i - \bar{y}}{dp(Y)}$ e multiplicamos as coordenadas $z_i \cdot w_i, i = 1, \ldots, n$. Se:

- A maioria dos valores $z_i \cdot w_i, i = 1, \ldots, n$ são positivos, então a associação é positiva. Ou seja, se a média dos valores $z_i \cdot w_i, i = 1, \ldots, n$ é positiva, a associação é positiva.
- A maioria dos valores $z_i \cdot w_i, i = 1, \ldots, n$ são negativos, então a associação é negativa. Ou seja, se a média dos valores $z_i \cdot w_i, i = 1, \ldots, n$ é negativa, a associação é negativa.
- Se aproximadamente 50% dos valores $z_i \cdot w_i, i = 1, \ldots, n$ são negativos e 50% dos valores são positivos, então a associação é nula. Ou seja, se a média dos valores $z_i \cdot w_i, i = 1, \ldots, n$ é aproximadamente zero, então a associação é nula.

Definição

Definimos o Coeficiente de Correlação Linear de Pearson por

$$r = Corr(X, Y) = \frac{\frac{x_1 - \bar{X}}{dp(X)} \cdot \frac{y_1 - \bar{Y}}{dp(Y)} + \frac{x_2 - \bar{X}}{dp(X)} \cdot \frac{y_2 - \bar{Y}}{dp(Y)} + \cdots + \frac{x_n - \bar{X}}{dp(X)} \cdot \frac{y_n - \bar{Y}}{dp(Y)}}{n}.$$

Coeficiente de correlação linear de Pearson

Propriedades

- $r = Corr(X, Y) \in [-1, 1]$;
- $r = Corr(X, Y) \approx 0$ se, e somente se, X e Y não estão associadas;
- $r = Corr(X, Y) > 0$ se, e somente se, X e Y estão positivamente associadas;
- $r = Corr(X, Y) < 0$ se, e somente se, X e Y estão negativamente associadas;
- $r = Corr(X, Y) = \dfrac{S_{xy} - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(S_{x^2} - n\bar{x}^2)(S_{y^2} - n\bar{y}^2)}}$ em que
  - $S_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$;
  - $S_{x^2} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$;
  - $S_{y^2} = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$.

Regra de ouro

$Corr(X, Y)$	Tipo de Associação	$Corr(X, Y)$	Tipo de Associação
$(0,8; 1]$	Forte associação positiva	$[-1; -0,8)$	Forte associação negativa
$(0,2; 0,8]$	Associação moderada positiva	$[-0,8; -0,2)$	Associação moderada negativa
$[0; 0,2]$	Associação nula	$[-0,2; 0]$	Associação nula

Coeficiente de correlação de Pearson

Exemplo

Considere as variáveis X: anos de serviço e Y: número de clientes da Tabela 28. Calcule o coeficiente de correlação.

Solução

Note que $\bar{x} = 5,7$, $\bar{y} = 56,5$, $dp(X) = 2,41$ e $dp(Y) = 8,11$.

Agente	X	Y	$Z = \frac{X-\bar{X}}{dp(X)}$	$W = \frac{Y-\bar{Y}}{dp(Y)}$	$Z \cdot W$
A	2	48	-1,54	-1,05	1,61
B	3	50	-1,12	-0,80	0,90
C	4	56	-0,71	-0,06	0,04
D	5	52	-0,29	-0,55	0,16
E	4	43	-0,71	-1,66	1,17
F	6	60	0,12	0,43	0,05
G	7	62	0,54	0,68	0,37
H	8	58	0,95	0,18	0,18
I	8	64	0,95	0,92	0,88
J	10	72	1,78	1,91	3,41
Total	57	565	0	0	8,77

Tabela 28: Cálculo do coeficiente de correlação linear de Pearson.

Então $r = \dfrac{8,77}{10} = 0,88$ e as variáveis X e Y estão positivamente e fortemente associadas.

Coeficiente de correlação linear de Pearson

Exemplo

Está sendo estudado o efeito do teor de ferro na capacidade de vigas de concreto. Os da Tabela 29 apresentam os resultados obtidas em uma amostra. Desenhe o gráfico de dispersão e calcule o coeficiente de correlação entre as duas variáveis.

X: ferro(% peso)	5,4	6,8	6,9	7,3	7,7	8,1	8,2	8,5	8,6	8,9
Y: Carga (ton. / m^2)	2,1	2,2	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,1	3,4	3,5

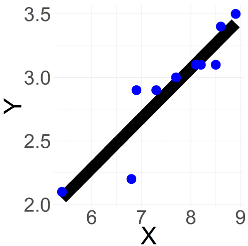
Tabela 29: Amostra com 10 vigas.

Note que $S_x = 76,4$, $S_Y = 29,3$, $S_{x^2} = 593,86$, $S_{y^2} = 87,71$ e $S_{xy} = 227,85$.

Coeficiente de correlação linear de Pearson

Solução

Figura 18: Gráfico de dispersão entre X e Y.



Note que $\bar{x} = \dfrac{S_x}{n} = \frac{76{,}4}{10} = 7,64$ e $\bar{y} = \frac{S_y}{n} = \frac{29{,}3}{10} = 2,93$, então

$$r = \frac{S_{xy} - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(S_{x^2} - n\bar{x})(S_{y^2} - n\bar{y})}}$$

$$= \frac{227,85 - 10 \cdot 7,64 \cdot 2,93}{\sqrt{(593,86 - 10 \cdot 7,64^2)(87,71 - 10 \cdot 2,93^2)}}$$

$$= 0,92.$$

Notamos no gráfico de dispersão que as variáveis X e Y estão positivamente associadas, ou seja, quanto maior a porcentagem de ferro maior a capacidade da viga. Além disso, o coeficiente de correlação linear de Pearson é $0,92$ e temos uma forte associação positiva entre as variáveis.

Teste de hipóteses para ρ.

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 1 $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;
- $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \sim N\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right); \frac{1}{n-3}\right)$, em que ρ é o coeficiente de correlação linear de Pearson populacional;
- $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ é chamada de transformação Z de Fisher;
- α é o nível de significância (geralmente $\alpha = 5\%$).

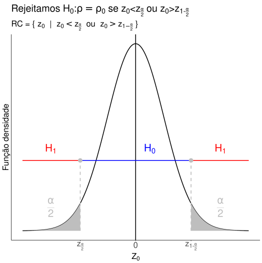
Queremos testar as seguintes hipóteses:

- Teste bilateral: $H_0 : \rho = \rho_0$ e $H_1 : \rho \neq \rho_0$;
- Teste unilateral: $H_0 : \rho \leq \rho_0$ e $H_1 : \rho > \rho_0$;
- Teste unilateral: $H_0 : \rho \geq \rho_0$ e $H_1 : \rho < \rho_0$.

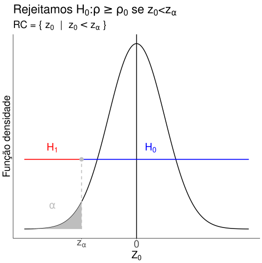
Ideia: Primeiro calculamos $Z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}}$. Então,

- Teste bilateral: Rejeitamos $H_0 : \rho = \rho_0$ se $|Z_0|$ for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : \rho \leq \rho_0$ se Z_0 for grande;
- Teste unilateral: Rejeitamos $H_0 : \rho \geq \rho_0$ se Z_0 for pequeno.

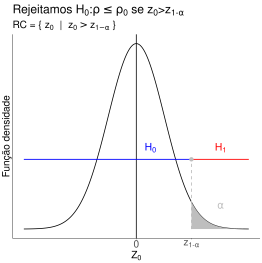
Teste de hipóteses para ρ.



(a) Teste bilateral.



(b) Teste bilateral.



(c) Teste bilateral.

Figura 19: Região crítica para o teste de correlação linear de Pearson.

Teste de hipóteses para ρ.

- Na Figura 19a, testamos $H_0 : \rho = \rho_0$ versus $H_1 : \rho \neq \rho_0$. Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$, em que $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ e $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$;
- Na Figura 19b, testamos $H_0 : \rho \leq \rho_0$ versus $H_1 : \rho > \rho_0$. Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$, em que $\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$;
- Na Figura 19c, testamos $H_0 : \rho \geq \rho_0$ versus $H_1 : \rho < \rho_0$. Rejeitamos H_0 se $z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\alpha}\}$, em que $\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$.

z_{α}, $z_{1-\alpha}$, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ e $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ são chamados de valores críticos.

Teste de hipóteses para ρ.

Exemplo

Está sendo estudado o efeito do teor de ferro na capacidade de vigas de concreto. Os dados da Tabela 30 apresentam os resultados obtidas em uma amostra. As duas variáveis estão correlacionadas? Use $\alpha = 5\%$. Calcule o valor-p.

X: ferro(% peso)	5,4	6,8	6,9	7,3	7,7	8,1	8,2	8,5	8,6	8,9
Y: Carga (ton. / m^2)	2,1	2,2	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,1	3,4	3,5

Tabela 30: Amostra com 10 vigas.

Note que $S_x = 76,4$, $S_Y = 29,3$, $S_{x^2} = 593,86$, $S_{y^2} = 87,71$ e $S_{xy} = 227,85$.

Teste de hipóteses para ρ.

Solução

Passo 1) Queremos testar as seguintes hipóteses: $H_0 : \rho = \rho_0 = 0$ e $H_0 : \rho \neq \rho_0 = 0$;

Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;

Passo 3) Rejeitamos H_0 se $|Z_0| = \left| \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}} \right|$ for grande. Ou seja,

$RC = \left\{ z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z_{1-\frac{\alpha}{2}} < z_0 \right\}$;

Passo 4) Vamos encontrar os valores críticos:

- $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,025}\right) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$, então $z_{0,025} = -1,96$;
- $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,975}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $z_{0,975} = 1,96$.

Passo 5) Como $r = 0,92$, $\rho_0 = 0$, $n = 10$ e $Z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}} =$ $\frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,92}{1-0,92}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right)}{\sqrt{1/10-3}} = 4,20 \in RC$, então rejeitamos H_0.

Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, as duas variáveis estão associadas.

Teste de hipóteses para ρ.

Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P\left(|Z_0| > |z_0|\right) = 2 \cdot \left[1 - \Phi\left(|z_0|\right)\right].$$

Como $r = 0,92$, $\rho_0 = 0$, $n = 10$ e $Z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}} = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,92}{1-0,92}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right)}{\sqrt{1/10-3}} = 4,20$, o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot \left[1 - \Phi\left(|z_0|\right)\right] \\ &= 2 \cdot \left[1 - \Phi(4,20)\right] \\ &= 2 \cdot [1 - 1] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $p = 0 < \alpha = 0,05$, rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, o teor de ferro está associada com a capacidade das vigas de concreto.

Teste de hipóteses para ρ.

Exemplo

Considere uma amostra com 10 funcionários e suponha que coletamos duas variáveis:

- X: Anos de serviços;
- Y: Número de clientes.

Os dados estão mostrados na Tabela 31. O coeficiente de correlação linear de Pearson é maior que $0,5$? Use $\alpha = 5\%$. Calcule o valor-p.

Agente	Anos de serviço (X)	Número de clientes (Y)
A	2	48
B	3	50
C	4	56
D	5	52
E	4	43
F	6	60
G	7	62
H	8	58
I	8	64
J	10	72

Tabela 31: Amostra de 10 corretores de seguros.

Teste de hipóteses para ρ.

Solução

Passo 1) Queremos testar as seguintes hipóteses: $H_0 : \rho \leq \rho_0 = 0,5$ e $H_1 : \rho > \rho_0 = 0,5$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeitamos H_0 se $Z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}}$ for grande. Ou seja, $RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$;
Passo 4) Vamos encontrar o valor crítico:

- $\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = \Phi\left(z_{0,95}\right) = 1 - \alpha = 0,95$, então $z_{0,95} = 1,65$;

Passo 5) Como $r = 0,88$, $\rho_0 = 0,5$, $n = 10$ e $Z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}}$
$\frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,88}{1-0,88}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,5}{1-0,5}\right)}{\sqrt{1/10-3}} = 2,19 \in RC$, então rejeitamos H_0.
Ou seja, o nível de significância $\alpha = 5\%$, a coeficiente de correlação linear de Pearson é maior que $0,5$.

Teste de hipóteses para ρ.

Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P(Z_0 > z_0 \mid H_0) = 1 - \Phi(z_0).$$

Como $r = 0,88$, $\rho_0 = 0,5$, $n = 10$ e $Z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}}$
$\frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,88}{1-0,88}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,5}{1-0,5}\right)}{\sqrt{1/10-3}} = 2,19$, então o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= 1 - \Phi(z_0) \\ &= 1 - \Phi(2,19) \\ &= 1 - 0,9857 \\ &= 0,0143. \end{aligned}$$

Como $p = 0,0143 < \alpha = 0,05$, rejeitamos H_0. Ou seja, a correlação linear de Pearson é maior que $0,5$ ao nível de significância $\alpha = 5\%$.

Teste de hipóteses para ρ.

Exemplo

Imagine que um pesquisador deseja checar se duas variáveis aleatórias – X e Y – com distribuição normal tem associação forte e negativa. Algumas informações estão na Tabela 32. Complete esta tabela. Ao nível de significância $\alpha = 5\%$, as duas variáveis estão fortemente e negativamente associadas? Use $\alpha = 5\%$. Calcule o valor-p.

s_x	s_y	s_x^2	s_y^2	s_{xy}
-0,49	2004,01	942,57	4960,45	-934,66
n	α	Decisão	valor-p	Z_0
1000	0,05			

Tabela 32: Algumas informações do experimento

Teste de hipóteses para ρ.

Solução

Passo 1) Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \rho \geq -0,8$ e $H_1 : \rho < -0,8$;
Passo 2) Nível de significância $\alpha = 5\%$;
Passo 3) Rejeitamos H_0 se $Z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}}$ for pequeno. Ou seja, $RC = \{z_0 \mid z_0 < z_\alpha\}$;
Passo 4) Vamos encontrar o valor crítico:

- $\Phi\left(z_\alpha\right) = \Phi\left(z_{0,05}\right) = \alpha = 0,05$, então $z_{0,05} = -1,65$.

Como, $\bar{x} = -0,049$ $\bar{y} = 200,401$, $r = \frac{s_{xy} - n \cdot \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(s_{x^2} - n \cdot \bar{x}^2)(s_{y^2} - n \cdot \bar{y}^2)}} = \frac{-934,66 - 10 \cdot (-0,049) \cdot (200,401)}{\sqrt{(942,57 - 10 \cdot (-0,049)^2)(4960,45 - 10 \cdot (200,401)^2)}} = -0,9896$, $\rho_0 = -0,8$, $n = 10$ e $Z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}} = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-0,9896}{1+0,9896}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-0,8}{1+0,8}\right)}{\sqrt{1/10-3}} = -4,04 \in RC$, então rejeitamos H_0.
Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, as duas variáveis estão fortemente e negativamente associadas.

Teste de hipóteses para ρ.

Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P\left(Z_0 < z_0 \mid H_0\right) = \Phi(z_0).$$

Como, $\bar{x} = -0,049$ $\bar{y} = 200,401$, $r = \frac{s_{xy} - n\cdot\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(s_{x^2} - n\cdot\bar{x}^2)(s_{y^2} - n\cdot\bar{y}^2)}} = \frac{-934,66 - 10\cdot(-0,049)\cdot(200,401)}{\sqrt{(942,57 - 10\cdot(-0,049)^2)(4960,45 - 10\cdot(200,401)^2)}} = -0,9896$, $\rho_0 = -0,8$, $n = 10$ e $Z_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{1/n-3}} = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-0,9896}{1+0,9896}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-0,8}{1+0,8}\right)}{\sqrt{1/10-3}} = -4,04$, então o valor-p é dado por

$$\begin{aligned} p &= \Phi(z_0) \\ &= \Phi(-4,04) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $p = 0 < \alpha = 0,05$, então rejeitamos H_0. Ou seja, ao nível de significância $\alpha = 0,05$, as duas variáveis estão fortemente e negativamente associadas.

Intervalo de confiança para ρ.

Sejam

- $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}$ valores amostrados da população 1 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ valores amostrados da população 2 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$;
- $\gamma = 1 - \alpha$ é o coeficiente de confiança. (Geralmente, $\gamma = 95\%$).

Note que $Z = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)}{\sqrt{1/n-3}} \sim N(0,1)$, e

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)}{\sqrt{1/n-3}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Então o intervalo de confiança para ρ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ é dado por

$$IC(\rho;\gamma) = \left(\frac{\exp\left[2\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n-3}} + \xi\right)\right] - 1}{\exp\left[2\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n-3}} + \xi\right)\right] + 1}; \frac{\exp\left[2\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n-3}} + \xi\right)\right] - 1}{\exp\left[2\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n-3}} + \xi\right)\right] + 1}\right).$$

em que $\xi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$.

Intervalo de confiança para ρ.

Exemplo

Uma amostra aleatória com $n = 25$ observações no tempo de falha do componente eletrônico e a temperatura no ambiente de aplicação em que os componentes foram usados.Obteve-se $r = 0,83$. Construa um intervalo de confiança para ρ Use $\gamma = 95\%$.

Intervalo de confiança para ρ.

Solução

Note que $r = 0,83$, $n = 25$ e $\xi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 1,19$.

Primeiro vamos encontrar os quantis da distribuição normal padrão:

- $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,025}\right) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$, então $z_{0,025} = -1,96$;
- $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,975}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, então $z_{0,975} = 1,96$.

Então, o intervalo de confiança é dado por

$$
\begin{aligned}
IC(\rho;95\%) &= \left(\frac{\exp\left[2\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n-3}}+\xi\right)\right]-1}{\exp\left[2\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n-3}}+\xi\right)\right]+1};\frac{\exp\left[2\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n-3}}+\xi\right)\right]-1}{\exp\left[2\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n-3}}+\xi\right)\right]+1}\right)\\
&= \left(\frac{\exp\left[2\left(-1,96\sqrt{\frac{1}{25-3}}+1,19\right)\right]-1}{\exp\left[2\left(-1,96\sqrt{\frac{1}{25-3}}+1,19\right)\right]+1};\frac{\exp\left[2\left(1,96\sqrt{\frac{1}{25-3}}+1,19\right)\right]-1}{\exp\left[2\left(1,96\sqrt{\frac{1}{25-3}}+1,19\right)\right]+1}\right)\\
&= (0,65;0,92)\,.
\end{aligned}
$$

Então, o coeficiente de correlação linear de Pearson está entre $0,65$ e $0,92$ com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$.