Analisi Matematica

Giovanni Spadaccini

Settembre 2021

Contents

Chapter 1

1. Introduzione

Insegnante: Marco Maghetti

marco.maghetti@unibi.it

Materiale

1.1. Requisiti

- algebra elementare
- equazioni algebriche
- disequazioni di primo e secondo grado
- disequazioni frazionarie
- equazioni e disequazioni goniometriche elementari
- equazioni e disequazioni logaritmiche e esponenziali
- elementi di geometria analitica

1.2. Modulo 1

- Insiemi numerici, e le loro proprietà
- Funzioni elementari (esponenziali,logaritmi,trigonometria)
- successioni numeriche
- Limiti
- Funzioni per la cardinalità
- funzioni derivabili
- grafico di una funzione
- formula ti Taylor per le funzioni regolare

1.3. Modulo 2

1.4. Esame

1. prova scritta (che serve per entrare all'orale) esercizi + alcune domande di teoria
2. prova orale (deve essere passata nella stessa sessione ma anche in appelli differenti)

1.4.1. Sessioni

ci sono quattro sessioni ed ogni sessione ha un gruppo d'appelli (esistono sessioni estive, autunnali e invernali).

il primo analisi ci sarà in giugno 2022.

Chapter 2

2. Insiemi numerici, e le loro proprietà

numeri naturiali : $N = \{1, 2, 3, 4...\}$

numeri interi : i numeri interi hanno la proprietà di avere l'opposto, $Z = \{.. - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

numeri razionali : ogni unmero ha l'opposto e l'inverso, $Q = \{\frac{p}{q} | p \in N, q \in Z, p \neq 0\}$

numeri reali : R

2.1. Notazioni

symbolo	spiegazione
$\in$	Indica che un elemento appartiene ad un insieme
$\notin$	non appartiene
$\forall$	per tutti gli elementi di un insieme
: oppure |	tale che
$\exists$	Esiste almeno un elemento
$\nexists$	Non esiste neanche un elemento
$\exists!$	Esiste un solo elemento
$\subseteq$	$A \subseteq B$ indica che A è un sottoinsieme o uguale a B
$\nsubseteq$	$A \nsubseteq B$ c'è almeno un elemento in A che non è in B
$\cup$	unione tra due iniemi
$\cap$	crea un insieme con gli elementi comuni dei due insiemi
$\emptyset$	insieme vuoto (è un subset di tutti gli insiemi)
$\setminus$	differenza tra insiemi (non è commutativa}

symbolo	spiegazione
υ	inisme universo è un insieme definito per fare il complementare
$C(A)$	diffrerenza tra un insieme universo e l'insieme A
$\wedge$	E logioco (and)
$\vee$	O logioco (or)
$\rightarrow$	è il simbolo di implicazione logica
$\bar{p}$	è la negazione della preposizione p
$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$	sommatoria

TODO:finire di aggiungere le notazioni viste

Chapter 3

3. Insiemistica

un insieme è definito dai suoi elementi, e non dal loro ordine

operazioni

TODO: da finire di aggiungere le operazioni e scrivere la loro definizione

Unione Insiemi: crea un insieme contenente tutti gli elementi comuni a A e B
A,B sono insiemi
$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

Moltiplicazione Insiemi(prodotto cartesiano): associa ogni elemento dell'insieme A tutti gli elementi dell'insieme B creando delle coppie ordinate
A,B sono insiemi
A x $B = \{(a, b) | a \in A \vee b \in B\}$
A x $B \neq B$ x A

Chapter 4

4. Logica

p = proposizione (è un affermazione che può essere o vera o falsa)

$\bar{p}$ = "non p", è la negazione di p

attezione : - la negazione di tutti è esiste almeno un elemento $\bar{\forall} = \exists$
- la negazioni di esiste almeno un elementeo è tutti $\bar{\exists} = \forall$

esempi

es. p = ogni elemento di A è un numero pari
$\forall a \in A :$ a è pari
$\bar{p} = \exists a \in A :$ a non è pari

$p \to q$ = "p implica q" (p si chiama ipotesi e q si chiama tesi)

tabella di verità e equivalenza

$p \leftrightarrow q$ = "p implica q"

significa che $(p \to q) \wedge (q \to q)$

"è sufficiente p affinché q"

tabella di verità | p | q |$p \leftrightarrow q$| |—|—|————————| | V | V | V | | V | F | F | | F | V | F | | F | F | V |

Chapter 5

5. Funzioni

$f : A \to B \ x \overrightarrow{f} f(x)$: - A è il dominio di f - B è il codominio di f - f è la legge di associazione

> f è la legge d'associazione che associa un elemento nell'insieme A in un insieme B (la funzione è definita dal: dominio,codominio e legge di associazione (A, B, f))
> $\forall x \in A, \exists! b \in B : f(x) = b$

$f(a) = b$, b è l'immagine di a tramite f

due funzioni sono uguali se e solo se il dominio il codominio e la legge di associazione sono uguali: $f : A \to B$
$f' : A' \to B'$
$\begin{cases} A = A' \\ B = B' \\ f = f' \end{cases}$

> priopriretà iniettiva (1-1): tutti gli elementi del codominio sono associati a un elemento del codominio diverso $f : A \to B$ se $\forall a \in A, \forall a' \in A : a \neq a' \to f(a) \neq f(a')$
>
> l'inniettività dipenda dal dominio

esempio

$f(n) = n^2$ non è (1-1) perchè $f(-1) = 1 = f(1)$
ma la si può far diventare mettendo come dominio R+

$f(n) = n^3$ è (1-1)

> surrettiva (su) ogni elemento del codominio deve avere un elemento del dominio per cui f(a)=b $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$
>
> la surrettività dipenda dal codominio

esempio

$f : A \to B$
$f(n) = n^2$ non è (su) perché $\forall b \in B, \nexists a \in A : f(a) = b$
ma la si può far diventare mettendo come codominio R+

$f(n) = n^3$ è (su)

> l'immagine di una funzione sono tutti gli elementi di b che sono associati con a

Img$f = \{b \in B | \exists a \in A : f(a) = b\}$
Img$f \subseteq B$

> Una funzione sia surrettiva che invettiva è detta biunivoca e quindi è invertibile

$f : A \to B$ è invertibile $f^{-1} : A \to B$ e vuol dire che: - $\forall a \in A : f^{-1}(f(a)) = a$
- $\forall b \in B : f(f^{-1}(b)) = b$

f è ivertibile $\leftrightarrow$ f è biunivoca

5.1. Cardinalità

perchè vengono estesi i numeri razionali a quelli reali

> la cardinalità di un insieme è il numero di elementi di un insieme

due insiemi sono equipotenti solo se i due insiemi hanno la stessa cardinaltà

due insiemi sono equipotenti se c'è una corrispondenza biunivoca

due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità se hanno una corrispondenza biunivoca

N e Z sono inifiniti $N \subsetneqq Z$

N e Z sono equipotenti

TODO: esercizio

$f(n) = \begin{cases} n/2\text{se n è pari} \\ -\frac{n+1}{2}\text{se n è pari} \end{cases}$

5.2. Numberailità

> un insieme è numberabile se esiste una funzione $f : N \to A$ è biunivoca
>
> lemma: è un piccolo teorema

(Lemma) A è numerabile se è solo se $f_1 : A \rightarrow \mathbb{N}$ è surrettiva
$f_2 : \mathbb{N}_{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \binom{n}{k} = {}^nC_k = C_n^k \rightarrow A$ è surrettiva

si può provare che l'insieme dei numeri razionali è numerabile?

$Q = \{\frac{n}{m} | n \in N, m \in Z \backslash \{0\}, MCD(n, |m|) = 1\}$

Chapter 6

6. Calcolo Combinatorio

fattoriale di un numero

permutazioni: contano l'ordine degli elementi

combinazioni: contano il numero di set diversi

$n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * ... * (n-1) * n, n \in \mathbb{N}$, $0! = 1$

il fattoriale si usa per contare le permutazioni di una lista di elementi diversi.

6.1. Coefficente Binomiale

$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$

$\frac{n!}{k!(n-m)!} = \binom{n}{m} = {}^nC_m = C_n^m$

siamo $n, m \in \mathbb{N} : m <= n$, il binomiale riponde quanti sottoinsiemi partendo di m elementi posso formare partendo da un insieme di n(non contano gli ordini,combinazioni).

Proprietà:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

Prova coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\;k!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k+1)\cdot(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\;k\cdot(k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} \cdot \frac{\cancel{k} + n - \cancel{k} + 1}{(n-k+1)\cdot k} =$$

$$= \frac{n!\cdot(n+1)}{(n-k)!\,(n+1-k)\cdot(k-1)!\cdot k} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!\cdot k!}$$

$$= \frac{n!\cdot(n+1)}{(n-k)!\,(n+1-k)\cdot(k-1)!\cdot k} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!\cdot k!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!\cdot k!} = \binom{n+1}{k}$$

c. v. d. 2

TODO: spiegare il perchè di entrambe le proprietà

Il binomio di Newton

Come si calcola il binomio $(a+b)^n =$?

TODO: spiegare con parole tue come si calcola il coefficente di ogni binomio

Formula del binomio di newton

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} * b^k$

Chapter 7

Teorema di pitagora

dipende dall'assioma che dice che gli angoli del triangolo rettangolo misurano 180°

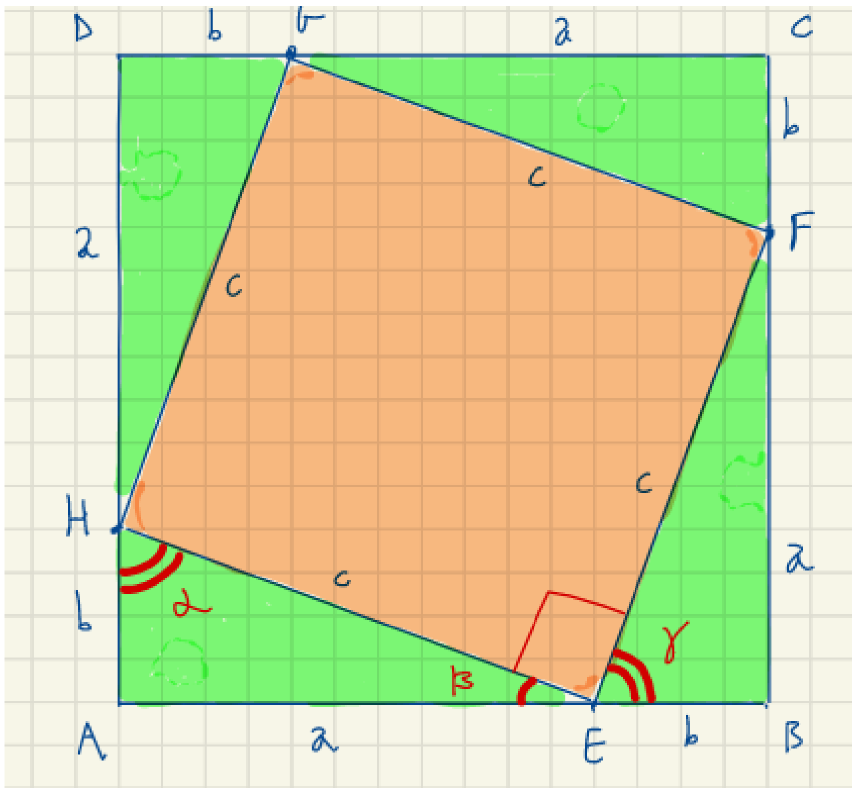

Figure 7.1:

Chapter 8

L'insieme dei numeri razionali

Domanda: esistono tanti numeri razinali quanti punti sulla retta, c'p una funzione biunivoca tra Q e i punti di una retta?

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Dimostrazione per assurdo: TODO: da completare