Fermats Letzter Satz

Tobias Gurdan

Seminar Wissenschaftler und Ethik

„Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.“

„Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.“

Vorstellung

- Informatik (B.Sc.), 6. Semester
- Weitgefächerte Interessen
- Derzeitiges Hauptaugenmerk auf
  - Graphentheorie
  - Theoretische Informatik
  - Computer Vision und Graphik

Übersicht

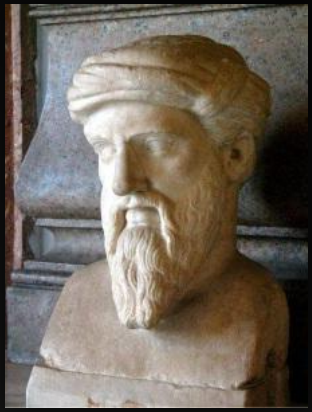
Übersicht

1. Wie alles begann
   1) Pythagoras und Diophantos
   2) Pierre de Fermat
2. Die Suche nach dem heiligen Gral
   1) 1600 – 1900
   2) 1900 – 1990
3. Beweis durch Widerspruch
   1) Die zwei Welten
   2) Duell mit dem Unendlichen
4. Die Zeit danach

Wie alles begann

1) Pythagoras und Diophantos

Pythagoras von Samos



- Lebte um 600 v. Chr.
- Begründer der Zahlentheorie
- Erstes goldene Zeitalter der Mathematik
- Sammelte sein Wissen auf Reisen durch die antike Welt
- Kehrt nach 20 Jahren nach Samos zurück …
- … das inzwischen vom Tyrann Polycrates besetzt ist
- Verlässt das Land und geht nach Kroton, Süditalien
- Gründet den “Pythagoreischen Bund”

“Alles ist Zahl.”

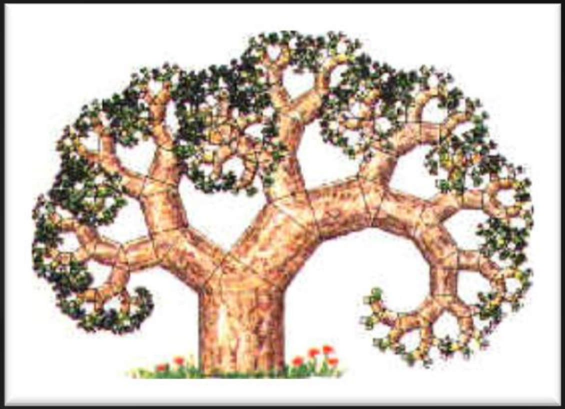
Der Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras

„In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten.“

$$x^2 + y^2 = z^2$$

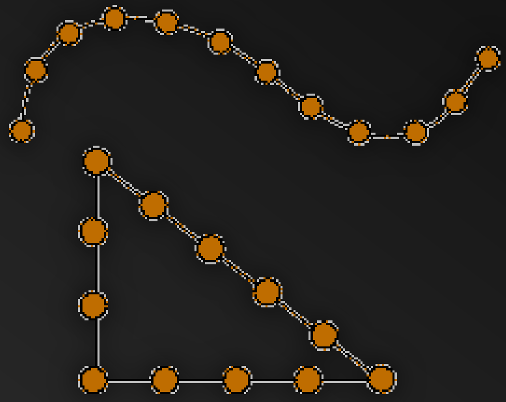
- Wegbereiter der Mathematik
- Beweis mit 100 Ochsen gewürdigt



Pythagoreische Tripel

- Ganzzahlige Lösungen des Satzes von Pythagoras
- Bereits 1800 v. Chr. gab es bis zu 5-stellige Lösungen (Keilschrifttafel Plimpton 322)
- Zwölfknotenschnur (3, 4, 5)
- Allgemeine Lösung, u.a. von Euklid (360 v. Chr.):

$$\forall u, v \in \mathbb{N}.\, u > v > 0.$$
$$x = u^2 - v^2$$
$$y = 2uv$$
$$z = u^2 + v^2$$



Diophantos von Alexandria

- Lebte um 250 n. Chr.
- Beschäftigte sich mit Rätseln und Gleichungen ganzzahliger Lösungen (auch heute noch *diophantische Gleichungen* genannt)
- Sein größtes Werk, die 13-teilige *Arithmetica …*
- … wurde verbrannt
- Erst im 16. Jh. sind sechs Bände wieder aufgetaucht


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Wie alles begann

2) Pierre de Fermat

Pierre de Fermat

- Geboren am 20. August 1601 in Beaumont de Lomagne
- Sohn eines wohlhabenden Lederhändlers
- Schulbildung im Franziskanerkloster Grandselve
- Studium an der Universität Toulouse
- Ab 1631 Hofrat und Richter
- Mathematik als leidenschaftliches Hobby
- Der “Fürst der Amateure”

Pierre de Fermat

- Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitstheorie (zusammen mit Blaise Pascal)
- Wegbereiter der Differentialrechnung

“Im Herbst 1972 verkündete Präsident Nixon, die Beschleunigungsrate der Inflation nehme ab. Dies war das erste Mal, dass ein amtierender Präsident zugunsten seiner Wiederwahl eine dritte Ableitung ins Feld führte.”

- Größte Leidenschaft: Zahlentheorie

Fermats letzter Satz

- Fermat machte ausgiebige Notizen an den Rändern seiner Ausgabe der *Arithmetica*
- Verallgemeinert den Satz des Pythagoras:

$$x^n + y^n = z^n$$

- Behauptet, es gäbe keine ganzzahligen, positiven Lösungen $\forall n \in \mathbb{N}. n > 2$
- Heute auch bekannt als „großer Fermat“
- Im Englischen „Fermat‘s Last Theorem (FLT)“

Fermats letzter Satz

- Neben Problem 8 notierte er seine Behauptung:

„Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.“

„Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.“

- 1665 erkrankte Fermat und starb

Die Suche nach dem heiligen Gral

1) 1600 – 1900

Fermats letzter Satz

- Fermats Sohn erkannte die Bedeutung seiner Werke
- Veröffentlicht Korrespondenzen und Notizen
- Neuauflage der Arithmetica: *„Diophanti Alexandrini arithmeticorum cum observationibus P. de Fermat“*

Arithmeticorum Liber II. 61

IN QVAESTIONEM VII.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. 16/5 Erit igitur alter quadratorum 256/25. alter verò 144/25 & vtriusque summa est 400/25 seu 16. & vterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrunque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. 16/5 ex

Das Vermächtnis

- Fermat hinterlässt viele fundamentale Erkenntnisse und bedeutende Sätze
- Im Laufe der Jahrhunderte wurde einer nach dem anderen bewiesen (bzw. einige wenige widerlegt)
- Euler zeigte z.B. die Korrektheit des kleinen Fermat
- Nur ein Satz blieb, was ihn berühmt und berüchtig machen sollte ...

Abwärts

- Zur Erinnerung:

$$x^n + y^n = z^n, n > 2$$
$$besitzt\ keine\ positive, ganzzahlige\ Lösung.$$

- Fermat bewies $n = 4$
- „Methode des unendlichen Abstieges“, eine Art des Beweises durch Widerspruch (*reductio ad adsurbum*)

Abwärts

Seien $x, y > 1$ teilerfremd, x ungerade und $x^4 + y^4$ eine Quadratzahl. Dann ist auch $u^4 + v^4$ mit

$$u = \sqrt[2]{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^4 + y^4} + x^2\right)} + x\right)}$$

$$v = \sqrt[2]{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^4 + y^4} + x^2\right)} - x\right)}$$

eine Quadratzahl und $u^4 + v^4 < x^4 + y^4$.

Schritt für Schritt

- 1753: Euler zeigt $n = 3$
- bis 1825: Germain, Dirichlet und Legendre zeigen $n = 5$
- 1839: Lamé zeigt $n = 7$
- 1847-03-01: Lamé und Chauchy kündigen gleichzeitig Beweise an
- 1847-05-24: Ernst Kummer widerlegt beide Beweise

Dr. Paul Wolfskehl

- Darmstädter Industrieller, geb. 1856
- Studierte Medizin und Mathematik
- Wurde von seiner Liebe abgelehnt
- Plante daraufhin akribisch seinen Suizid
- Verpasste den geplanten Termin
- Starb 1906 eines natürlichen Todes
- Setzte in seinem Testament den Großteil seines Vermögens als Preis für das Fermat Problem aus
- Verwaltet durch Göttinger Königliche Gesellschaft der Wissenschaft

Die Suche nach dem heiligen Gral

2) 1900 – 1990

Die Ära der Amateuere

- Prof. Edmund Landau, Leiter des Fachbereichs Mathematik in Göttingen, ist zuständig für Eingaben

Sehr geehrte/r ......,

Ich danke Ihnen für Ihr Manuskript zum Beweis der Fermatschen Vermutung.
Der erste Fehler findet sich auf:
Seite ...... Zeile ......
Ihr Beweis ist daher wertlos.

Professor E. M. Landau

- Beweise wurden in der ganzen Welt verschickt

Neues in der Welt

- 1932: Kurt Gödels Unvollständigkeitssätze
- Ab 1950: Allan Turing und der Vormarsch der Computer
- 1988: Naom Elkies widerlegt Eulers Vermutung

$$a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_{n-1}{}^n = a_n{}^n, n > 2$$

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$$

- $31, 331, 3331, \ldots 333333331$ sind prim
- 3333333331 nicht

Unendlichkeit

„Stell dir eine Stahlkugel vor, die so groß ist wie die Erde, und eine Fliege, die sich einmal in einer Million Jahren darauf niederlässt. Wenn die Stahlkugel durch die damit verbundene Reibung aufgelöst ist, hat die Ewigkeit noch nicht einmal begonnen“

David Lodge, *The Picturegoers*

- Bis 1993: Große Fermat gilt für alle $n < 4000000$
- Beiteiligte Zahlen müssen selbst größer n^n sein

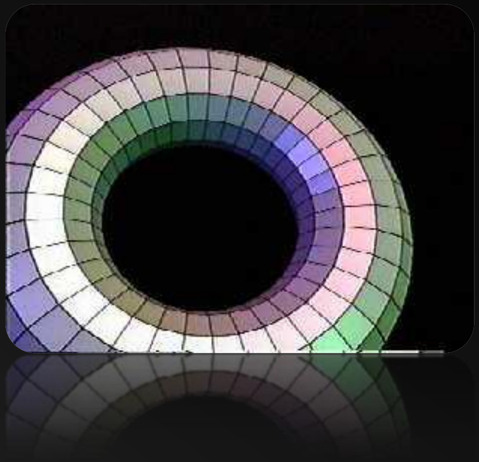
Beweis durch Widerspruch

1) Die zwei Welten

Andrew Wiles

- 1953 in Cambridge geboren
- Schon immer begeistert an der Mathematik
- Entdeckt Satz des Fermat mit 10 in einer Bibliothek
- Studium und Dissertation in Cambridge bei John Coates
- Befasst sich mit elliptischen Kurven

Elliptische Kurven



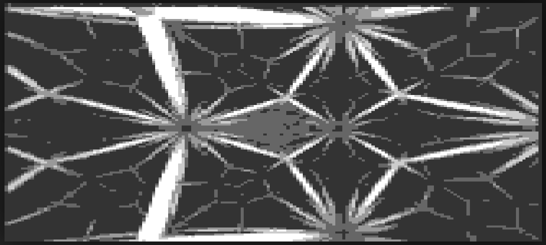
- Gleichungen der Form

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

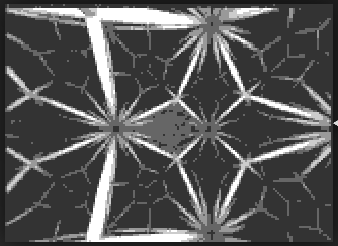
- Interessant: Ganzzahlige Lösungen
- Schon Diophantos und Fermat beschäftigten sich damit
- Vereinfachung durch Betrachten von Lösungen über Restklassenringen
- L-Reihe ist Liste der Anzahl an Lösungen je Klasse

Taniyama-Shimura-Vermutung

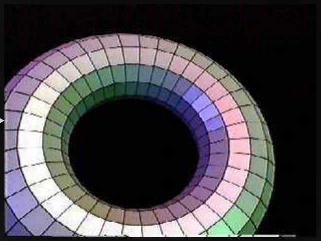
- Shimura und Taniyama treffen sich 1954 in Tokio
- Beschäftigen sich mit Modulformen
- Modulformen leben im hyperbolischen Raum und sind in höchstem Maße symmetrisch
- Beschreibung einer Modulform durch M-Reihen



Taniyama-Shimura-Vermutung



Taniyama-Shimura



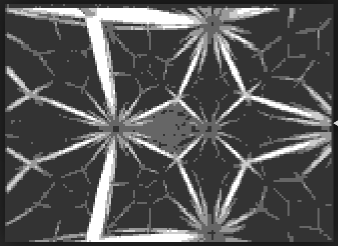
$$M_1 = \cdots$$
$$M_2 = \cdots$$
$$M_3 = \cdots$$
$$\vdots$$

$$L_1 = \cdots$$
$$L_2 = \cdots$$
$$L_3 = \cdots$$
$$\vdots$$

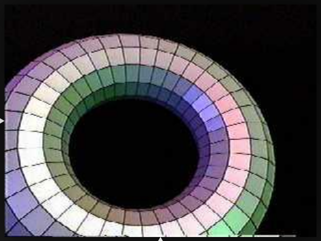
Gerhard Frey

- Deutscher Mathematiker
- 1984 stellt Gerhard Frey im Mathematischen Institut Oberwolfach eine Idee vor

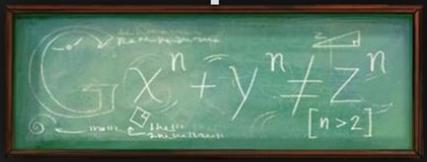
Gerhard Frey



Taniyama-Shimura



Frey



Fermat

Gerhard Frey

- Deutscher Mathematiker
- 1984 stellt Gerhard Frey im Mathematischen Institut Oberwolfach seine Idee vor
- Bekannt als „Epsilon-Conjecture“
- 1986 von Kenneth Ribbet bewiesen
- Tamiyama-Shimura als fehlendes Glied

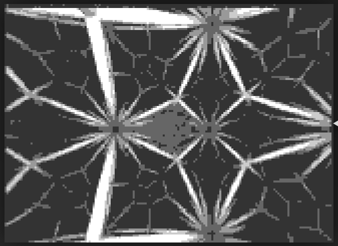
Beweis durch Widerspruch

2) Duell mit dem Unendlichen

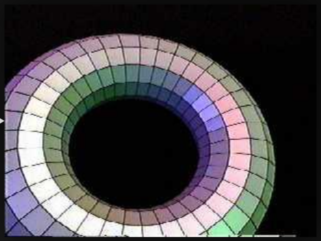
Duell mit dem Unendlichen

- Wiles beginnt sofort mit seinem Beweis
- Arbeitet allein und im Geheim
- Seine Idee: Mengengleichheit durch Abzählen

Duell mit dem Unendlichen



Taniyama-Shimura



$M_1 = \cdots$
$M_2 = \cdots$
$M_3 = \cdots$
$\vdots$

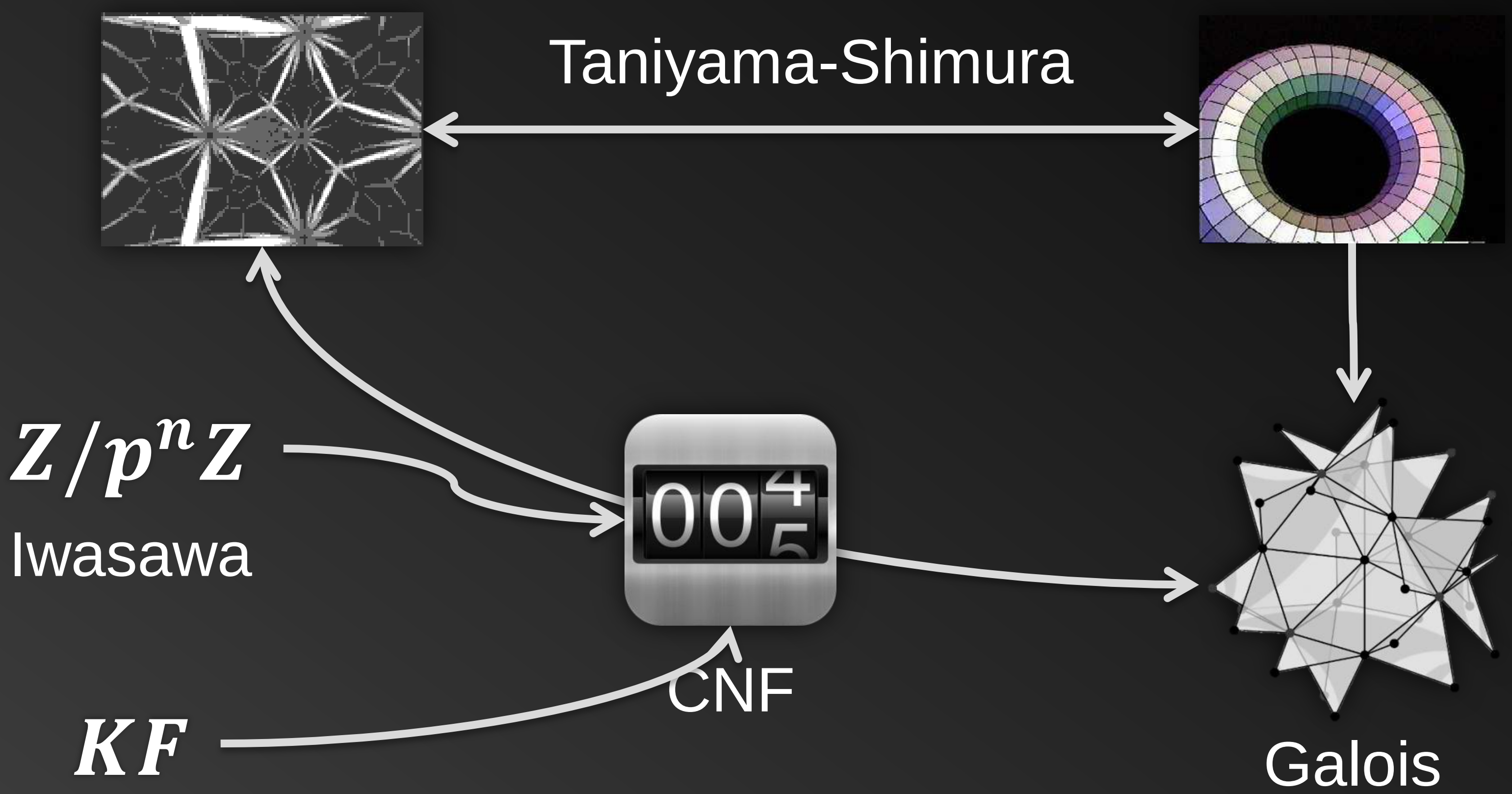
$L_1 = \cdots$
$L_2 = \cdots$
$L_3 = \cdots$
$\vdots$

Duell mit dem Unendlichen

Die letzten Schritte

- Fünf Jahre sind bereits vergangen
- 1991: Neuer Ansatz

Die letzten Schritte



Die letzten Schritte

- Fünf Jahre sind bereits vergangen
- 1991: Neuer Ansatz mit Kolywagin-Flach Methode
- Stück für Stück vervollständigt er seinen Beweis
- Zum Prüfen weiht er seinen Freund Prof. Nick Katz ein
- Vorlesung „Calculations on Eliptic Curves“

Der Vortrag des Jahrhunderts

- Am 23. Juni 1993 stellte Wiles seinen Beweis im Rahmen einer Tagung in Cambridge vor
- Titel: „Elliptic and Modular Forms“
- Es folgt unglaublicher Pressetrubel und Ehrungen, u.a. New York Times, Guardian, People

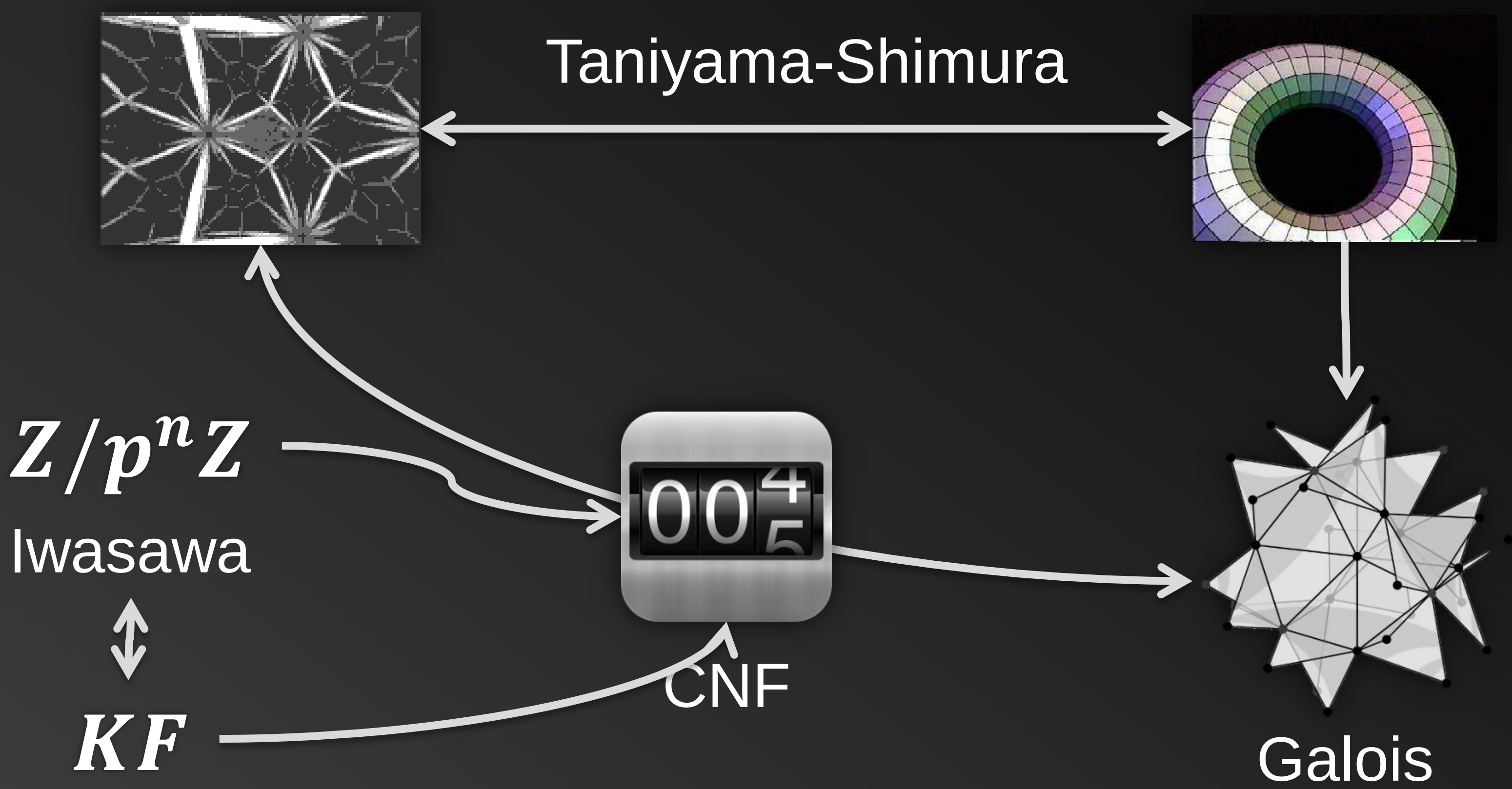
Das Komitee

- Genaue Prüfung des Beweises über mehrere Monate
- 23. Aug. 1993: Nick Katz entdeckt einen grundlegenden Fehler in der Anwendung der Kolywagin-Flach Methode
- Wiles versucht, den Beweis zu flicken
- Nach einem Jahr steht er kurz vor der Aufgabe

Der Teppichflicker

- 19. Sep. 1994: Eine Einbegung

Der Teppichflicker



Der Teppichflicker

- 19. Sep. 1994: Eine Einbegung.
- Kolywagin-Flach ergänzte sich perfekt mit seinem ursprünglichen Ansatz, der Iwasawa-Theorie

„Aus der Asche der Kolywagin-Flach-Methode tauchte also gleichsam die wahre Antwort auf das Problem auf."

- Am 25. Okt. 1994 veröffentlicht er das Beweismanuskript
- 27. Jun. 1997 erhält Wiles den Wolfskehl-Preis

Die Zeit danach

Auswirkungen

- Fermats letzter Satz als schlicht interessantes Problem
- Beweis des Letzten Satz des Fermat als großartige Leistung vieler
- Katalysator für sehr viel weitergehende Forschung
- Anwendung in z.B. Theoretischer Physik und Kryptologie

Offene Probleme

- Gibt es unendlich viele Primzahlen der Form $n^2 + 1$?
- Wie lauten alle gannzahligen Lösung von $x^3 - y^3 = 7$?
- Gibt es in der Fibonacci-Folge mehr als zwei Quadratzahlen?
- $P = NP$?
- Riemannsche Vermutung

„Cuius orationis finem mirabilem sane detexi. Hanc folii exiguitas non caperet.“

„Ich habe für diesen Vortrag ein wahrhaft wunderbares Ende gefunden, doch ist diese Folie zu schmal, es zu fassen.“

Diskussion

- Computer als Beweismittel (4-Farben Problem)?
- Preise für Individuen?