Esercizio 3

Usare il risultato dell'Esercizio 1 per dimostrare per induzione su n che l'area orientata di un poligono di n vertici $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ che sia semplice ma non necessariamente convesso si puo' calcolare in tempo $O(n)$ mediante la formula:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i-1} - x_{i+1})$$

dove i vertici si intendono orientati circolarmente in senso antiorario e quindi $x_{i-1} = x_{n-1}$ quando $i = 0$ e $x_{i+1} = x_0$ quando $i = n - 1$

Caso Base $(n = 3)$

$$A = \frac{1}{2}\left[(x_0 - x_1)(y_0 + y_1) + (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_0)(y_0 + y_2)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\cancel{x_0y_0} + x_0y_1 - x_1y_0 - \cancel{x_1y_1} + \cancel{x_1y_1} + x_1y_2 - x_2y_1 - \cancel{x_2y_2} + \cancel{x_2y_2} + x_2y_0 - x_0y_2 - \cancel{x_0y_0}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[x_0y_1 - x_1y_0 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_0 - x_0y_2\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[y_0(x_2 - x_1) + y_1(x_0 - x_2) + y_2(x_1 - x_0)\right]$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} y_i(x_{i-1} - x_{i+1})$$

Ipotesi Induttiva

$$A(p_0, p_1, \ldots, p_{n-2}) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-2} y_i(x_{i-1} - x_{i+1})$$

Passo Induttivo $(n - 1) \rightarrow n$

$$A(p_0, p_1, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1}) = A(p_0, p_{n-2}, p_{n-1}) + A(p_0, p_1, \ldots, p_{n-2})$$

$$\frac{1}{2}\left[y_0(x_{n-1} - x_{n-2}) + y_{n-2}(x_0 - x_{n-1}) + y_{n-1}(x_{n-2} - x_0) + y_0(x_{n-2} - x_0) + \left(\sum_{i=0}^{n-3} y_i(x_{i-1} - x_{i+1})\right) + y_{n-2}(x_{n-3} - x_0)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[y_0(x_{n-1} - \cancel{x_{n-2}} + \cancel{x_{n-2}} - x_1) + y_{n-2}(\cancel{x_0} - x_{n-1}x_{n-3} - \cancel{x_0}) + y_{n-1}(x_{n-2} - x_0) + \left(\sum_{i=1}^{n-3} y_i(x_{i-1} - x_{i+1})\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[y_0(x_{n-1} - x_1) + \left(\sum_{i=1}^{n-3} y_i(x_{i-1} - x_{i+1})\right) + y_{n-2}(x_{n-3} - x_{n-1}) + y_{n-1}(x_{n-2} - x_0)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i-1} - x_{i+1})$$