es. 1)

$$\begin{cases} \dot{y} = 1 - y^2 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

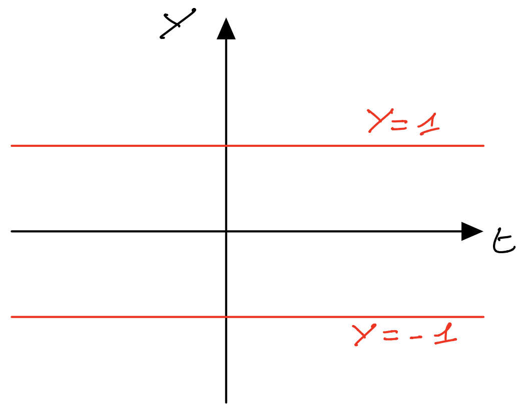
1) <u>$f(t,y)$:</u>

$\Rightarrow f(t,y) := 1 - y^2 \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

2) <u>Equilibri del PdC</u> (:= soluzioni costanti):

$\Rightarrow \dot{y} = 1 - y^2 = 0 \iff y^2 = 1 \iff y = \pm 1$

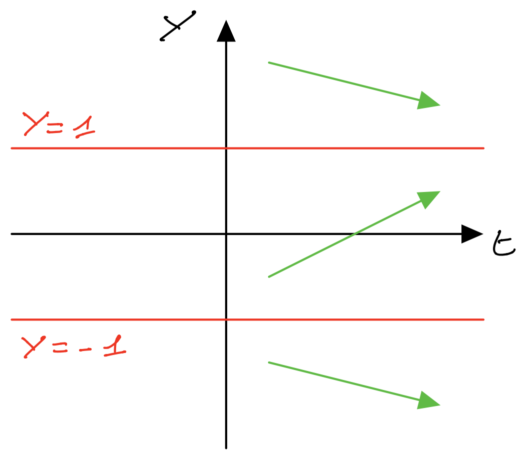


3) <u>Segno di f:</u>

$f > 0 \iff 1 - y^2 > 0 \iff y^2 < 1 \iff -1 < y < 1$

$\Rightarrow f < 0 \iff y < -1 \vee y > 1$

$\Rightarrow$ se $-1 < y < 1$, y è crescente, mentre se $y < -1 \vee y > 1$, y è decrescente.



4) Caso $-1 < y_0 < 1$:

Per l'unicità, $-1 < y < 1 \quad \forall t \in I$ ($\exists!$ Cauchy-Lip.)
e so che in tale intervallo y è crescente

4.1) $\exists$ globale:

$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \wedge y$ limitato $\Rightarrow y$ sol. globale

$\Rightarrow I = \mathbb{R} \Rightarrow y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

4.2) Limiti agli estremi di I:

$\Rightarrow L := \lim\limits_{t \to +\infty} y \Rightarrow$ sicuramente $\exists L$ (y sol. globale e MONOTONA) e $L \leq 1$ (y limitata)

$\Rightarrow$ applicando il Teorema dell'asintoto si ha:

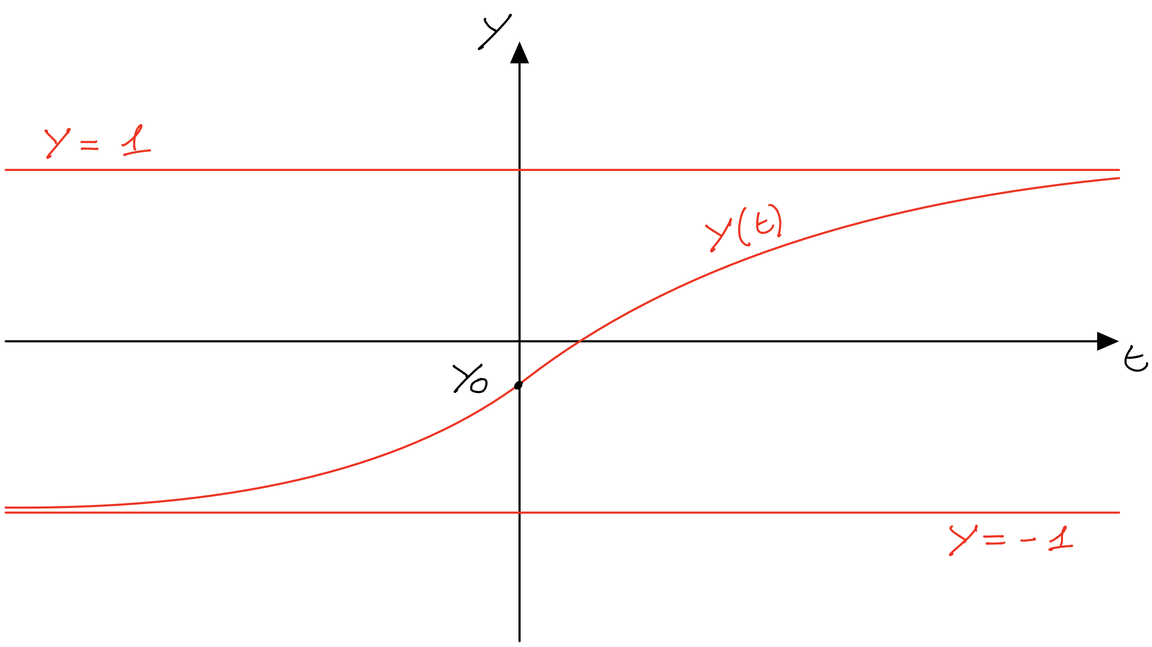
$$\dot{y} = 1 - y^2 \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1 - L^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 - L^2 = 0$$

$\Rightarrow L = \pm 1$, ma NON PUÓ essere $L = -1$ (y crescente)

$\Rightarrow L := \lim\limits_{t \to +\infty} y = 1$

$\Rightarrow$ analogamente si trova $\lim\limits_{t \to -\infty} y = -1$

Possiamo quindi graficare la soluzione per $-1 < y_0 < 1$:
si tratta di una SIGMOIDE:



5) <u>Caso $y_0 > 1$:</u>

Per l'unicità, $y > 1 \quad \forall t \in I$ ($\exists!$ Cauchy-Lipschitz)

$\Rightarrow$ sappiamo che per $y > 1 \quad \dot{y} < 0$, quindi y decrescente.

5.1) <u>Caso $t > 0$:</u>

5.1.1) <u>$\exists$ globale:</u>

$\Rightarrow 1 < y < y_0 \quad \forall t > 0 \in I \Rightarrow y$ LIMITATA $\Rightarrow y$ globale

$\Rightarrow \exists y \quad \forall t \in (0, +\infty)$

5.1.2) <u>Limiti agli estremi di I:</u>

$\Rightarrow$ Applicando il Teorema dell'asintoto si trova:

$$\lim_{t \to +\infty} y = 1 \quad \text{(procedimento come sopra)}$$

5.2) <u>Caso $t < 0$:</u>

5.2.1) <u>$\exists$ globale:</u>

Non sappiamo nulla su y (limitatezza, $\exists$ globale ecc.) tranne che è decrsecente. Applichiamo il Teorema del Confronto:

$\Rightarrow y$ decrescente, quindi per $t < 0$ si ha $y > y_0$

$$\Rightarrow \frac{y}{y_0} > 1 \Rightarrow \frac{y^2}{y_0^2} > 1 \Rightarrow \dot{y} = 1 - y^2 \leq \frac{y^2}{y_0^2} - y^2$$

$$= -y^2\left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right) = -y^2 \cdot K, \quad K > 0 \quad (y_0 > 1)$$

$\Rightarrow$ Per $t < 0$ si ha:

$$\dot{y} \leq -K y^2$$

$\Rightarrow$ Applichiamo il Teorema del Confronto:

u sol. massimale di:

$$\begin{cases} \dot{u} = -K u^2 \\ u(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\dot{u}}{u^2} = -K \Rightarrow \int_{y_0}^{u(t)} \frac{ds}{s^2} = -K \cdot t$$

$$= -\frac{1}{s}\Big|_{y_0}^{u(t)} = \left[-\frac{1}{u(t)} + \frac{1}{y_0}\right] \Rightarrow \frac{1}{u(t)} = kt + \frac{1}{y_0}$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{y_0}} = \frac{1}{\frac{kty_0 + 1}{y_0}} = \frac{y_0}{kty_0 + 1}$$

$\Rightarrow u(t) = \dfrac{y_0}{ky_0 t + 1}$ ha un asintoto verticale per

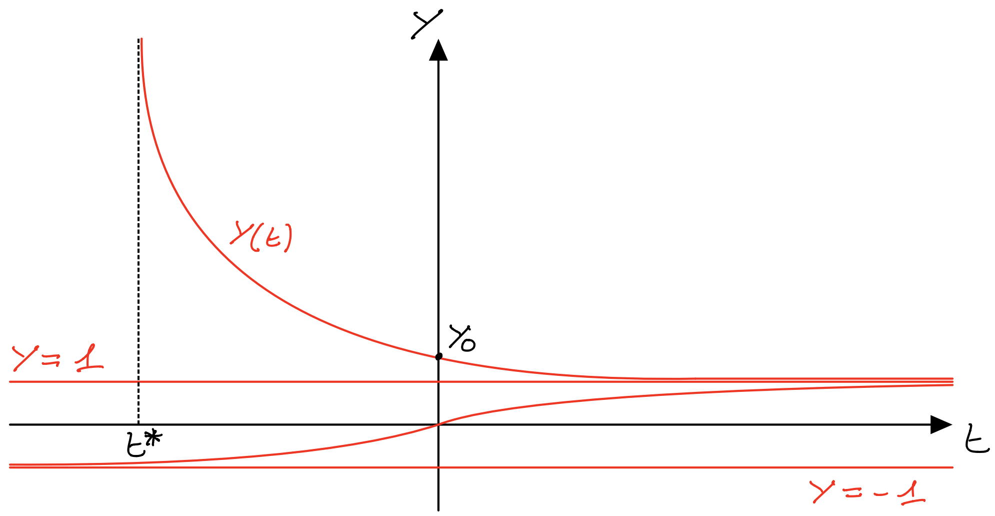
$$ky_0 t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{ky_0} < 0 \quad (k>0,\ y_0 > 1)$$

$\Rightarrow y \geq u \quad \forall t < 0$ (Teorema del Confronto)

$\Rightarrow y$ ha un asintoto verticale per $t = t^* < 0$

$\Rightarrow y$ non è sol. globale $\wedge$ y non è limitata.

Passiamo ora graficare la soluzione y per $y_0 > 1$:



6) <u>Caso $y_0 < -1$:</u>

Si può ripetere il procedimento adottato per il caso $y_0 > 1$ oppure sfruttare le simmetrie del PdC:

$\Rightarrow y_0 < -1 \wedge y$ decrescente $\Rightarrow y < -1 \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow$ c'è la possibilità che le 2 soluzioni per $y_0 > 1$, $y_0 < -1$ siano simmetriche rispetto all' origine.

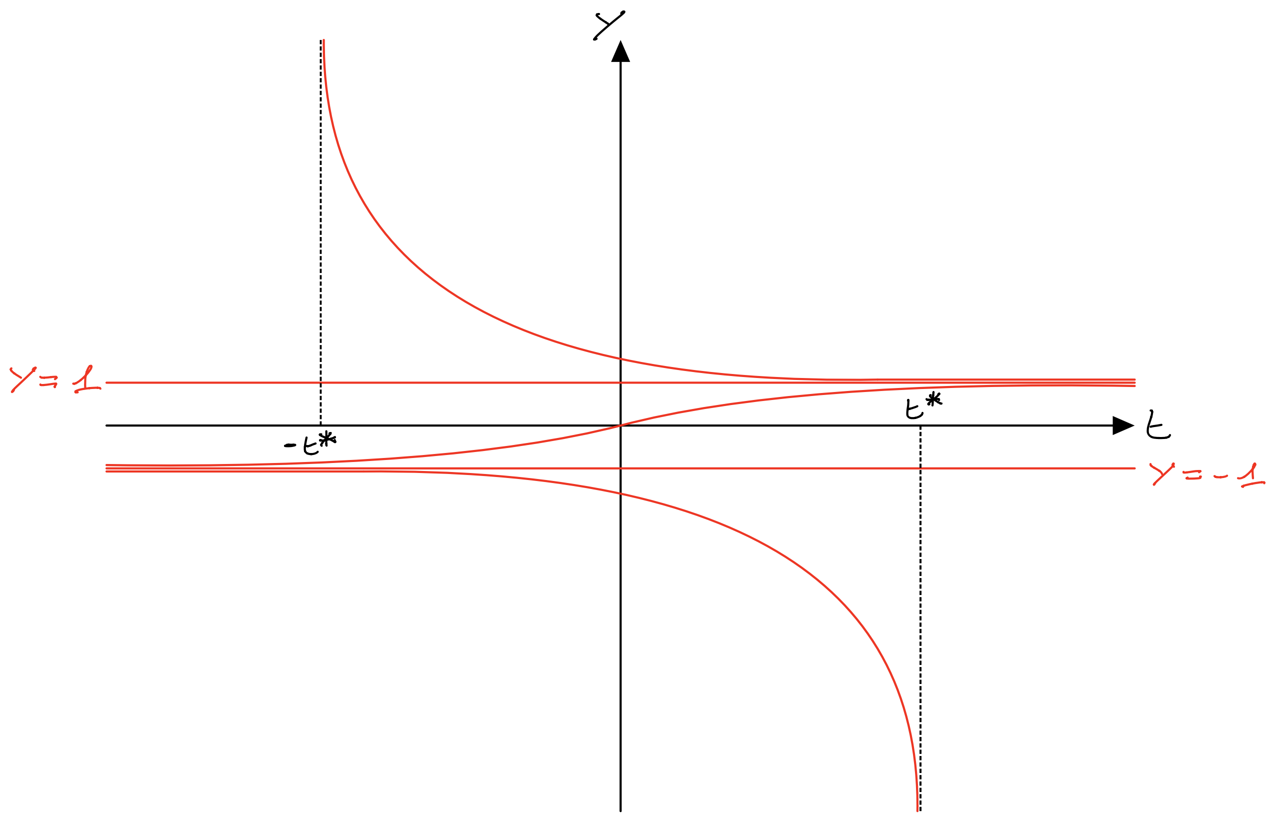
$\Rightarrow$ sia y soluzione del PdC per $y_0 > 1$

$\Rightarrow$ sia $V = -y(-t)$ la simmetrica di y rispetto all' origine

$\Rightarrow \dot{V} = \dot{y}(-t) \Rightarrow \dot{y}(-t) = 1 - y(-t)^2 = 1 - (-y(-t))^2$
$= 1 - V^2 \Rightarrow \dot{V} = 1 - V^2 \Rightarrow V$ risolve il PdC

$\Rightarrow$ per l'unicità, tutte le soluzioni per $y_0 < -1$ si ottengono in questo modo (simmetria rispetto all' origine), si può fare perché $f(t,y)$ DIPENDE SOLO DA y ed è PARI !!!

$\Rightarrow$ possiamo quindi graficare le soluzioni del PdC $\forall y_0 \in \mathbb{R}$.



es. 2)

$$\begin{cases} \dot{y} = \sin y \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

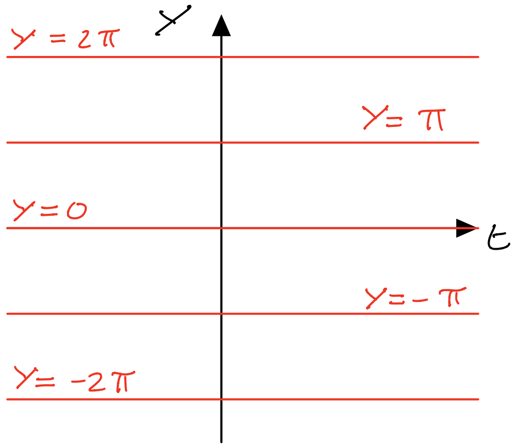
1) $f(t,y)$:

$\Rightarrow f(t,y) = \sin y \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

2) Equilibri del PdC:

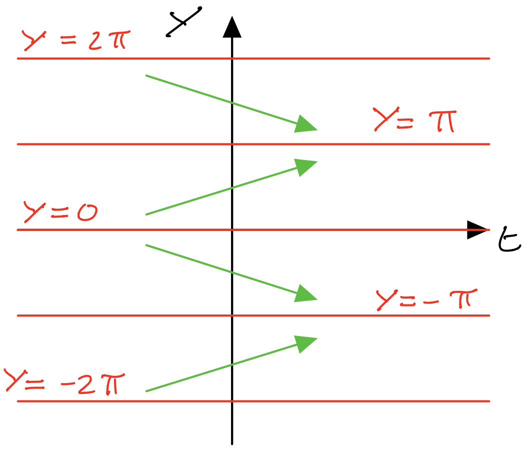
$\dot{y} = 0 = \sin y \iff y = k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$



3) Segno di f:

$f > 0 \iff \sin y > 0 \iff k\pi < y < (k+1)\pi$ con k pari

$\Rightarrow$ se $k\pi < y < (k+1)\pi$ con k pari, y è crescente, altrimenti è decrescente.



4) Caso $0 < y_0 < \pi$:

$\Rightarrow$ per unicità $0 < y < \pi \quad \forall t \in I \wedge y$ crescente

4.1) $\exists$ globale:

$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \wedge y$ limitata $\Rightarrow y$ sol. globale

$\Rightarrow I = \mathbb{R} \Rightarrow y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

4.2) Limiti agli estremi di I:

$\Rightarrow L_+ := \lim_{t \to +\infty} y \in \mathbb{R}$ (y MONOTONA $\wedge$ y limitata)

$\Rightarrow$ Teorema dell'asintoto:

$$\dot{y} = \sin y \xrightarrow[t \to +\infty]{} \sin L_+ \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin L_+ = 0 \Leftrightarrow L_+ = k\pi$$

$\Rightarrow$ in $0 < y < \pi$, $L_+ = 0 \vee L_+ = \pi$

$\Rightarrow$ NON PUÓ essere $L_+ = 0$ (y crescente) $\Rightarrow L_+ = \lim_{t \to +\infty} y = \pi$

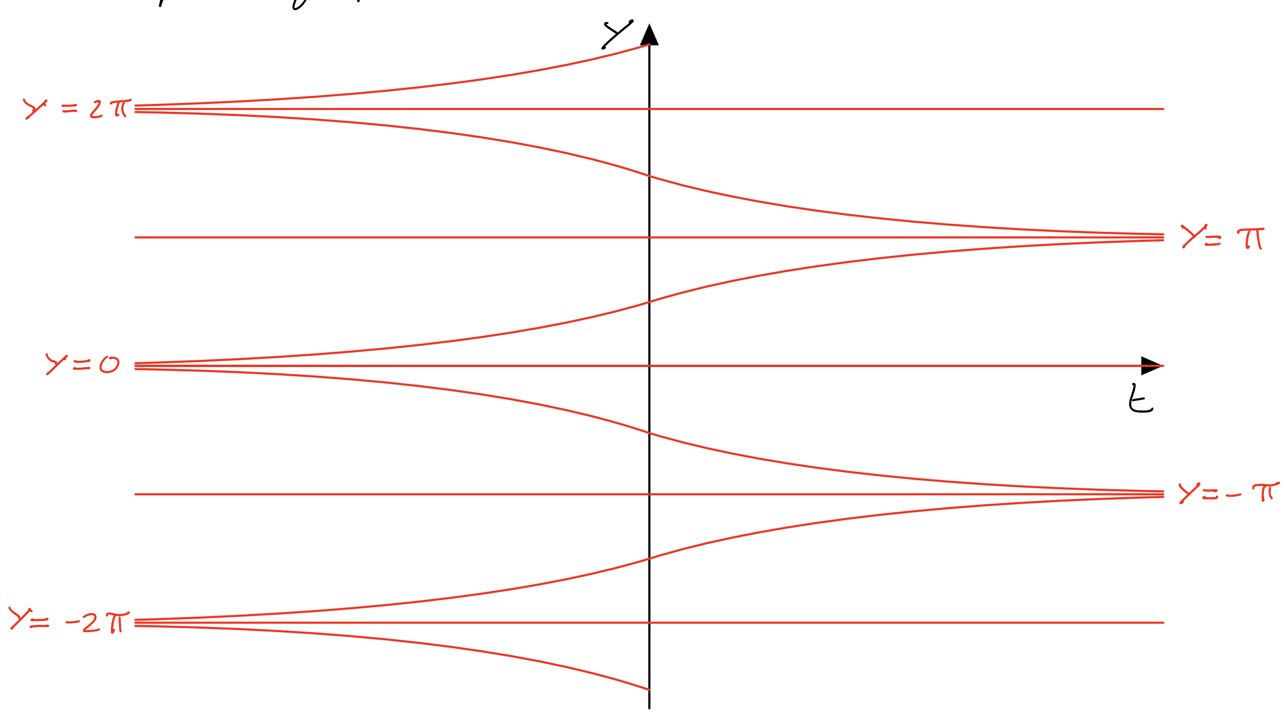
$\Rightarrow$ allo stesso modo si trova $\lim_{t \to -\infty} y = 0$ $(0 < y < \pi)$

5) Caso $-\pi < y_0 < 0$:

$\Rightarrow$ per simmetria ($f(t,y) \equiv f(y) \wedge f$ DISPARI) si conclude che se y è sol. del PdC, allora lo è anche $v = -y$

$\Rightarrow$ per unicitá, tutte le soluzioni tra gli equilibri si ottengono allo stesso modo.

Possiamo quindi graficare le soluzioni del PdC $\forall y_0 \in \mathbb{R}$



es. 3)

$$\begin{cases} \dot{y} = y e^{y} \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

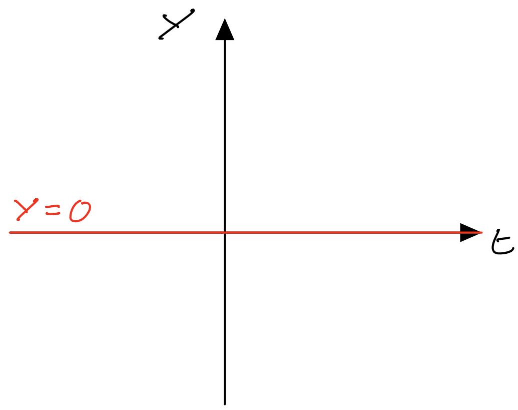
1) <u>$f(t,y)$:</u>

$\Rightarrow f(t,y) = y e^{y} \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

2) <u>Equilibri del PdC:</u>

$\dot{y} = 0 = y e^{y} \iff y = 0$

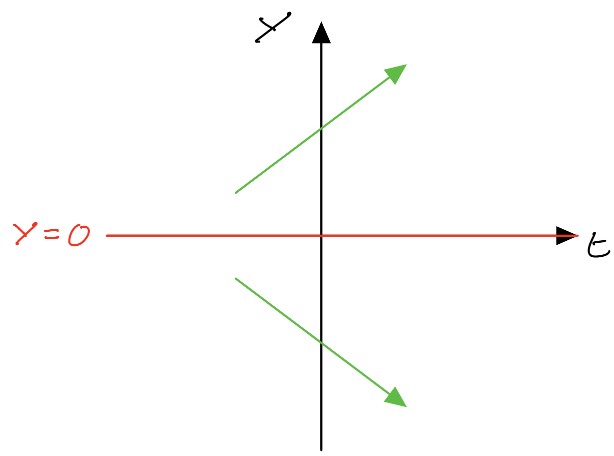


3) <u>Segno di f:</u>

$f > 0 \iff y e^{y} > 0 \iff y > 0$

$f < 0 \iff y < 0$

$\Rightarrow$ se $y > 0$, y crescente, se $y < 0$, y decrescente.



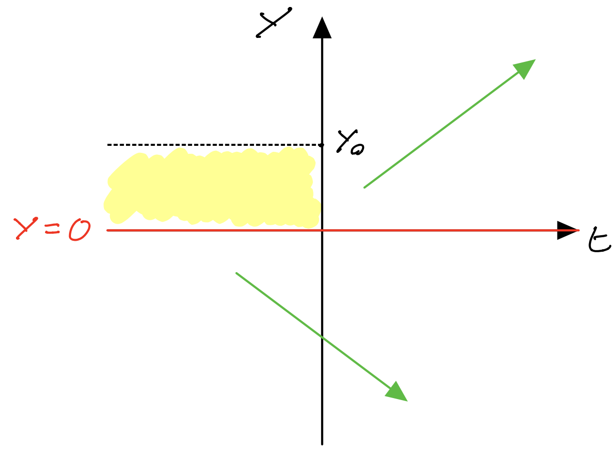
4) <u>Caso $y_0 > 0$:</u>

$\Rightarrow$ Per unicità, $y>0 \quad \forall t \in I \wedge y$ crescente.

4.1) $\exists$ globale:

4.1.1) Caso $t<0$:

$\Rightarrow y$ crescente $\wedge$ $y>0 \quad \forall t \in I \Rightarrow$ per $t<0$ si ha $\quad 0<y<y_0 \Rightarrow y$ LIMITATA $\Rightarrow y$ sol. globale su $(-\infty, 0)$



4.1.2) Limiti agli estremi di I (per $t<0$):

$\Rightarrow y$ MONOTONA $\wedge$ y LIMITATA $\Rightarrow \exists L_- := \lim_{t \to -\infty} y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Per il Teorema dell'asintoto si ha:

$$\dot{y} = y e^y \xrightarrow[t \to -\infty]{} L_- e^{L_-} \in \mathbb{R} \Rightarrow L_- e^{L_-} = 0$$

$$\Leftrightarrow L_- = 0 = \lim_{t \to -\infty} L_-$$

4.1.3) Caso $t>0$:

$\Rightarrow$ Non sappiamo nulla su y (limitatezza, $\exists$ globale, ecc.) tranne che è crescente

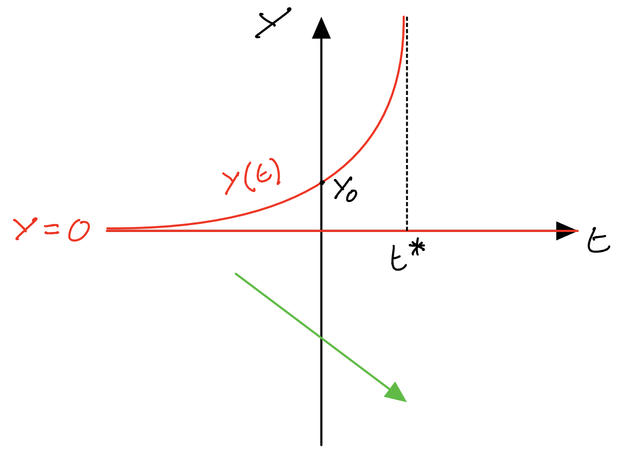
$\Rightarrow$ Applichiamo il Teorema del Confronto:

$\dot{y} = y e^y \geq c \cdot y^2 \Rightarrow$ il PdC $\dot{u} = c u^2$ ha un asintoto verticale per $t = \bar{t} > 0$

$\Rightarrow$ per il teorema del confronto $(t>0)$ $y > u$

$\Rightarrow$ y ha un asintoto verticale in $t^* > 0$

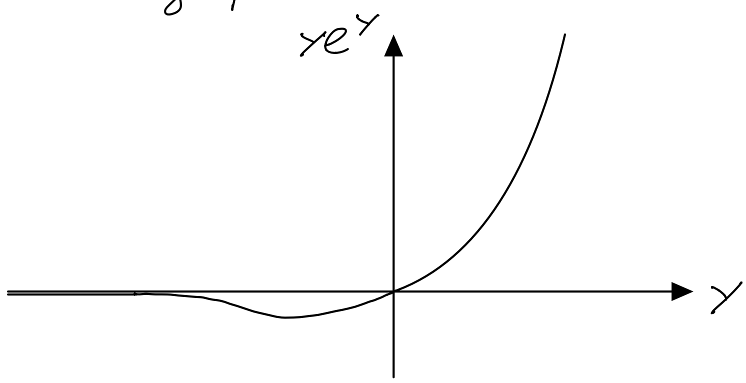
$\Rightarrow$ y NON è soluzione globale.



5) Caso $y_0 < 0$:

$\Rightarrow$ Per unicità, $y < 0$ $\forall t \in I$ $\wedge$ y decrescente.

$\Rightarrow$ ricordiamo il grafico di ye^y:

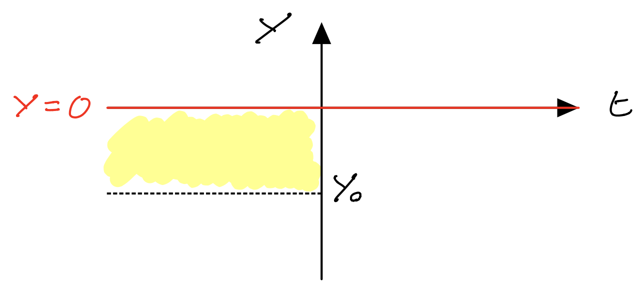


$\Rightarrow$ $\exists\, c^* < 0$ t.c. $ye^y \geq c^*$ $\forall y \in \mathbb{R}$

5.1) $\exists$ globale:

5.1.1) Caso $t < 0$:

$\Rightarrow$ y decrescente $\wedge$ $y < 0$ $\forall t \in I$ $\Rightarrow$ per $t < 0$ si ha $y_0 < y < 0$ $\Rightarrow$ y LIMITATA $\Rightarrow$ y sol. globale su $(-\infty, 0)$



5.1.2) <u>Limiti agli estremi di I</u> (per $t<0$):

$\Rightarrow$ y MONOTONA $\wedge$ y LIMITATA $\Rightarrow$ $\exists\, L_- := \lim_{t\to-\infty} y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Per il Teorema dell'asintoto si ha:

$$\dot{y} = y e^{y} \xrightarrow[t\to-\infty]{} L_- e^{L_-} \in \mathbb{R} \Rightarrow L_- e^{L_-} = 0$$

$$\Leftrightarrow L_- = 0 = \lim_{t\to-\infty} L_-$$

5.1.3) <u>Caso $t>0$:</u>

$\Rightarrow$ Non sappiamo nulla su y (limitatezza, $\exists$ globale, ecc.) tranne che è crescente

$\Rightarrow$ Applicando il Teorema del Confronto si ha:

$\dot{y} \geq c^* \quad \forall y<0$

$\Rightarrow$ considero:

$$\begin{cases} \dot{u} = c^* \\ u(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow u(t) = y_0 + c^* t \quad \text{con } c^*<0$$

$\Rightarrow$ $y \geq u \quad \forall t>0$ $\Rightarrow$ y NON PUÓ avere asintoti verticali

$\Rightarrow$ supponiamo che y abbia asintoto orizzontale, allora $\lim_{t\to+\infty} y = c \wedge \lim_{t\to+\infty} \dot{y} = ce^{c}$ entrambi $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ per il Teorema dell'asintoto dovrebbe essere:

$$ce^{c} = 0 \Leftrightarrow c = 0 = \lim_{t\to+\infty} y \quad \lightning$$

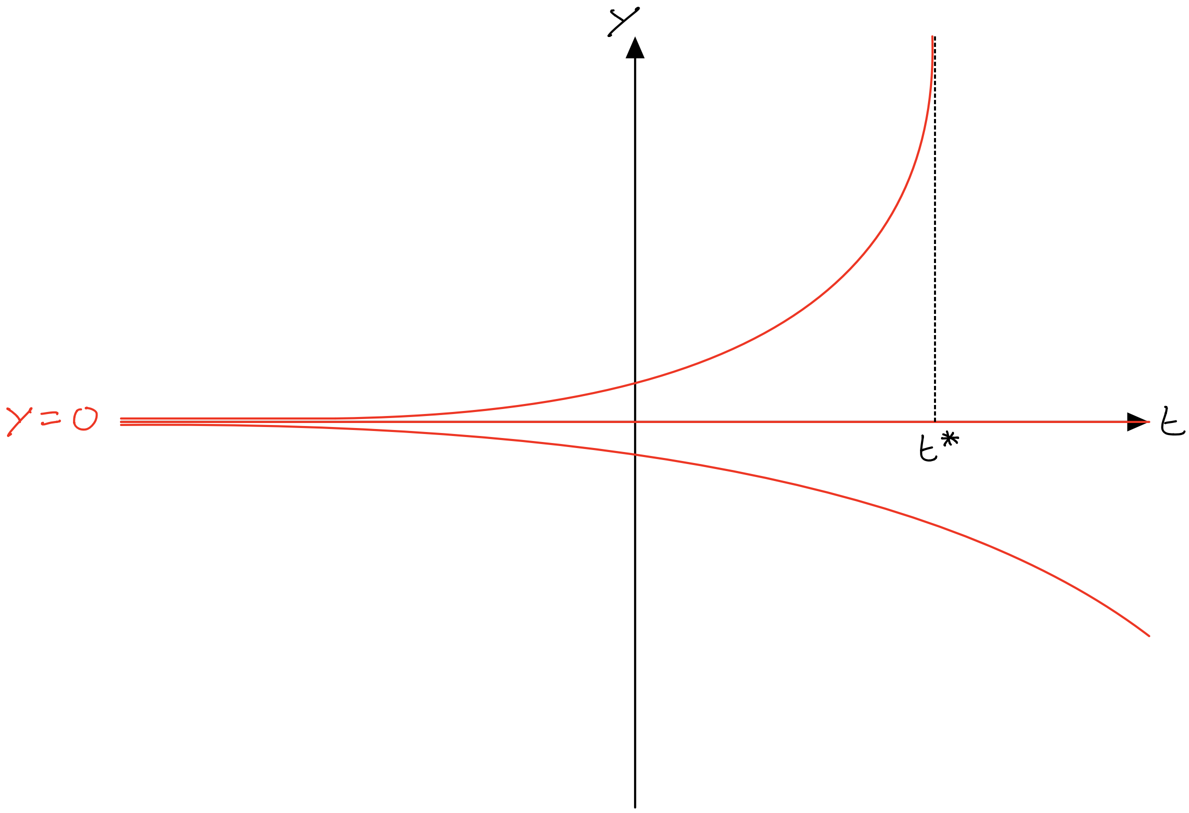
$\Rightarrow$ c NON può essere 0 perché $y<0 \wedge y$ decrescente.

$\Rightarrow$ y non ha asintoti orizzontali

$\Rightarrow$ si ha quindi:

$$\lim_{t\to+\infty} y = -\infty, \quad \lim_{t\to-\infty} y = 0$$

Possiamo quindi graficare le soluzioni del PdC $\forall y_0 \in \mathbb{R}$



es. 4)

$$\begin{cases} \dot{y} = yt^2 + y^3 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

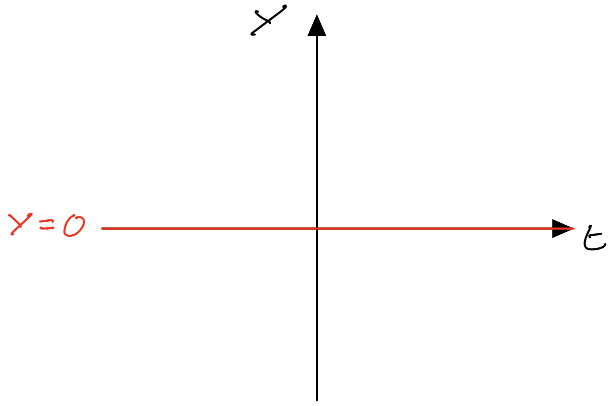
1) <u>$f(t,y)$:</u>

$\Rightarrow f(t,y) = yt^2 + y^3 \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

2) <u>Equilibri del PdC</u>:

$\dot{y} = 0 = yt^2 + y^3 = y(t^2 + y^2) \Longleftrightarrow y = 0$

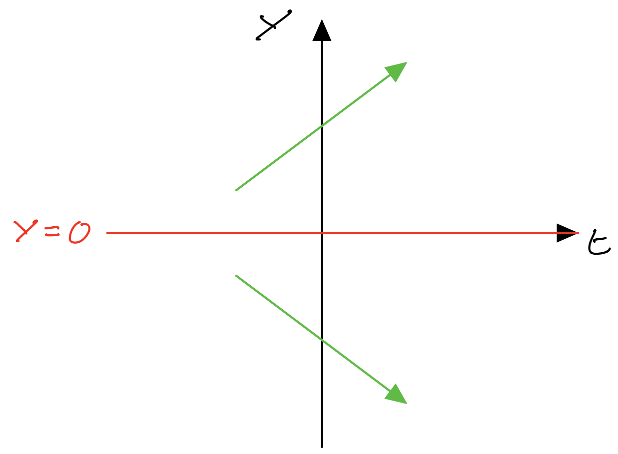


3) <u>Segno di f:</u>

$f > 0 \iff y(y^2+t^2) > 0 \iff y>0$

$f < 0 \iff y < 0$

$\Rightarrow$ se $y>0$, y crescente, se $y<0$, y decrescente.



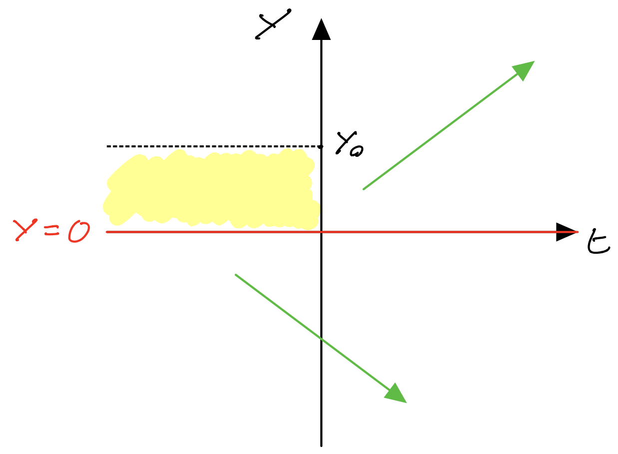
4) <u>Caso $y_0 > 0$:</u>

$\Rightarrow$ Per unicità, $y>0 \quad \forall t \in I \wedge y$ crescente.

4.1) <u>$\exists$ globale:</u>

4.1.1) <u>Caso $t<0$:</u>

$\Rightarrow y$ crescente $\wedge\ y>0 \quad \forall t \in I \Rightarrow$ per $t<0$ si ha $0<y<y_0 \Rightarrow y$ LIMITATA $\Rightarrow y$ sol. globale su $(-\infty, 0)$



4.1.2) <u>Limiti agli estremi di I</u> (per $t<0$):

$\Rightarrow y$ MONOTONA $\wedge\ y$ LIMITATA $\Rightarrow \exists\, L_- := \lim_{t\to-\infty} y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Per il Teorema dell'asintoto si ha:

$$\dot{y} = ye^{y} \xrightarrow[t \to -\infty]{} L_- e^{L_-} \in \mathbb{R} \Rightarrow L_- e^{L_-} = 0$$

$$\Leftrightarrow L_- = 0 = \lim_{t \to -\infty} L_-$$

4.1.3) <u>Caso $t > 0$:</u>

$\Rightarrow$ Non sappiamo nulla su y (limitatezza, $\exists$ globale, ecc.) tranne che è crescente

$\Rightarrow$ Applichiamo il Teorema del Confronto:

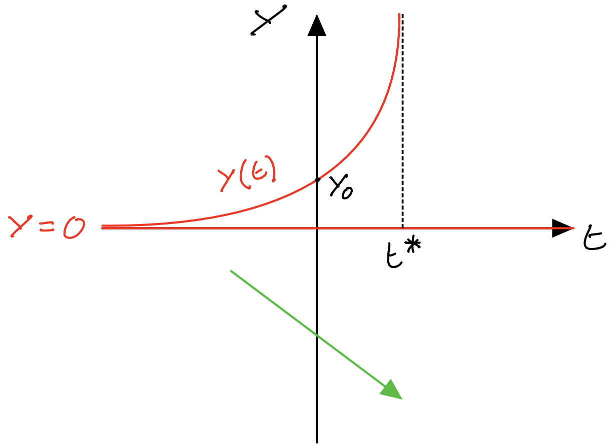
$$\dot{y} = yt^2 + y^3 \geq y_0 \cdot y^2 \quad (y > y_0 \quad \forall t \in I)$$

$\Rightarrow$ considero:

$$\begin{cases} \dot{u} = y_0 \cdot u^2 \\ u(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow u \text{ ha un asintoto verticale per } t = \bar{t} > 0$$

$\Rightarrow y \geq u \Rightarrow y$ ha un asintoto verticale per $t^* > 0$

$\Rightarrow y$ NON è soluzione globale.



5) <u>Caso $y_0 < 0$:</u>

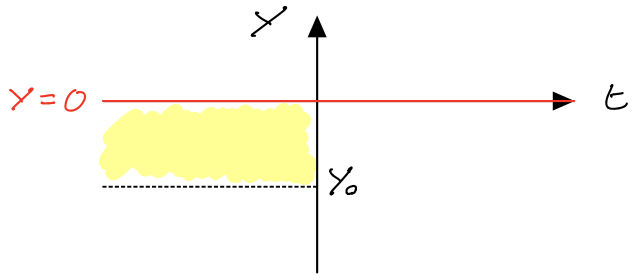
$\Rightarrow$ Per unicità, $y < 0 \quad \forall t \in I \land y$ decrescente.

$\Rightarrow$ ricordiamo il grafico di ye^{y}:

5.1) <u>$\exists$ globale:</u>

5.1.1) <u>Caso $t < 0$:</u>

$\Rightarrow$ y decrescente $\wedge$ $y<0$ $\forall t \in I$ $\Rightarrow$ per $t<0$ si ha $y_0 < y < 0$ $\Rightarrow$ y LIMITATA $\Rightarrow$ y sol. globale su $(-\infty, 0)$



5.1.2) Limiti agli estremi di I (per $t<0$):

$\Rightarrow$ y MONOTONA $\wedge$ y LIMITATA $\Rightarrow$ $\exists L_- := \lim_{t\to-\infty} y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Per il Teorema dell'asintoto si ha:

$$\dot{y} = y e^{y} \xrightarrow[t\to-\infty]{} L_- e^{L_-} \in \mathbb{R} \Rightarrow L_- e^{L_-} = 0$$

$$\Leftrightarrow L_- = 0 = \lim_{t\to-\infty} L_-$$

5.1.3) Caso $t>0$:

$\Rightarrow$ Non sappiamo nulla su y (limitatezza, $\exists$ globale, ecc.) tranne che è crescente. Possiamo applicare il Teorema del Confronto (come per $y_0>0 \wedge t>0$) oppure sfruttare le simmetrie del PdC:

y soluzione per $y_0>0$ $\Rightarrow$ sia $v=-y$

$\Rightarrow \dot{v} = -\dot{y} = -(y(y^2+t^2)) = v(v^2+t^2)$

$\Rightarrow$ v è anch'essa soluzione del PdC

$\Rightarrow$ si ha che le soluzioni del PdC sono a 2 a 2 simmetriche rispetto all'asse t

$\Rightarrow$ per unicità, tutte le soluzioni sono della stessa forma.

Possiamo quindi graficare le soluzioni del PdC $\forall y_0 \in \mathbb{R}$