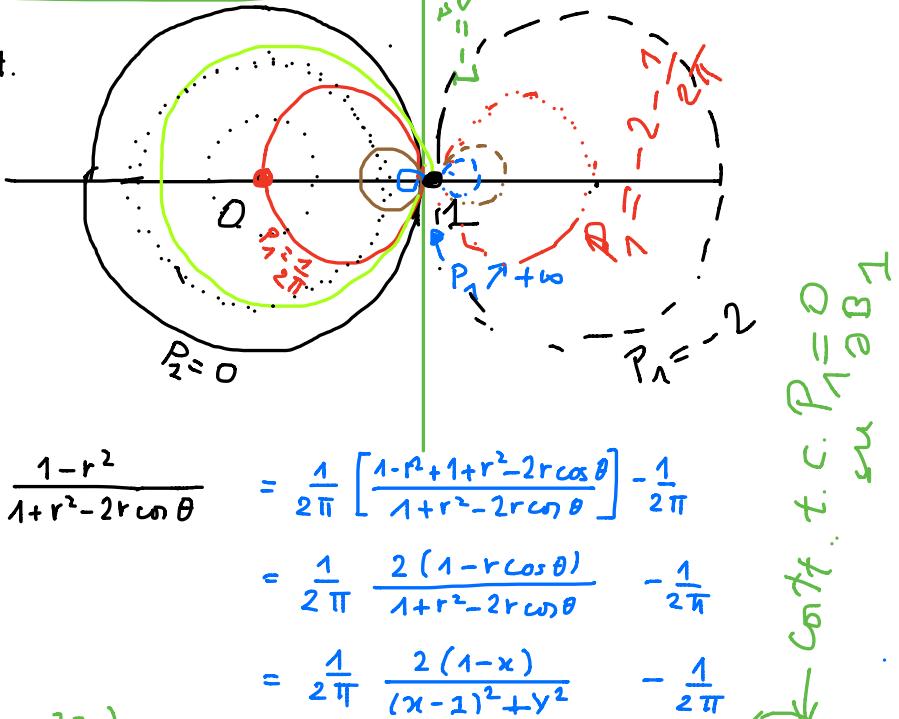


**INTERPRETAZIONE
FISICA DEL NUCLEO DI POISSON**

$$P_1(r, \theta, 0) = \text{cont.} \\ (\varphi_0)$$



$$P_1(r, \theta, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1-r^2+1+r^2-2r\cos\theta}{1+r^2-2r\cos\theta} \right] - \frac{1}{2\pi} \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{2(1-r\cos\theta)}{1+r^2-2r\cos\theta} - \frac{1}{2\pi} \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{2(1-x)}{(x-1)^2+y^2} - \frac{1}{2\pi} \\ = \underbrace{\frac{2}{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \log[(x-1)^2+y^2] \right]}_{\text{Potenziale generato da un doppio polo in } (1;0)} - \frac{1}{2\pi}$$

$\left(\frac{1}{2\pi} \log[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] \right)$
= potenziale generato
da una carica (filo in \mathbb{R}^3)
in (x_0, y_0)



$$\Delta x \rightarrow 0 \\ (1,0) (1+\Delta x, 0)$$

OSS: $\frac{1}{2\pi} \log(x^2+y^2) = \frac{1}{2\pi} \log r^2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}(\log z)$

e' detta SOL. FONDAMENTALE DEL LAPLACIANO in \mathbb{R}^2

C corrisponde al potenziale elettrico generato da una carica unitaria concentrata in $(0;0)$ (in realtà, filo rettilineo \perp piano)

Sol. radiale di $-\Delta G = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
In realtà $-\Delta G = \delta_0$.

$$(\mu=2) \quad G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log(x^2 + y^2) = \frac{1}{2\pi} \log r^2 = \frac{1}{\pi} \log r$$

$$\Rightarrow -\Delta G = 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

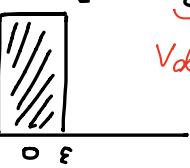
**SOLUZIONE FONDAMENTALE
DEL LAPLACIANO in \mathbb{R}^n** (n ≥ 3)

corrisponde ad una funzione armonica radiale avente una singolarità in 0 (in \mathbb{R}^3 : potenziale elettrostatico / gravitazionale generato da una carica/massa unitaria concentrata in 0, ovvero la MASSA di DIRAC δ_0)

$$(\mu=3) \quad G(x, y, z) = G(r) = \frac{1}{r^2} \quad \text{con} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sia $G(x) = G(|x|) = G(r)$ funzione armonica per $r > \varepsilon$ radiale

Supponiamo G sia il potenziale generato da una distribuzione di carica/massa unitaria uniforme su B_ε ovvero $f_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon^n \omega^n}$ per $r < \varepsilon$; $f_\varepsilon(r) = 0$ per $r > \varepsilon$



$\text{vol. } B_\varepsilon \text{ in } \mathbb{R}^n$

$\int_{B_\varepsilon} f = \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^n \omega^n} = \frac{\varepsilon^n \omega^n}{\varepsilon^n \omega^n} = 1$

massa/carica tot.=1

$$-\operatorname{div}(\Delta G) = f_\varepsilon \quad \text{Legge di Gauss}$$

G risolve l'equazione

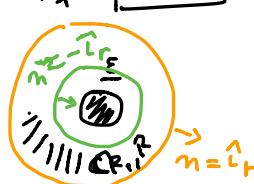
$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta G = f_\varepsilon \quad \text{su } \mathbb{R}^n \\ G = 0 \quad \text{per } r \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

ed avrà simmetria radiale imponiamo per fissare la costante a meno della quale è definito il potenziale

dato che f_ε lo è

In particolare:

$$\int_{C_{R_1, R}} \Delta G = 0 \quad \text{per } C_{R_1, R} = B_R \setminus B_{R_1} \quad [R_1 > \varepsilon]$$

$$\int_{C_{R_1, R}} \operatorname{div}(\nabla G) = \int_{\partial C_{R_1, R}} \frac{\partial G}{\partial n} = \int_{\partial B_R} \frac{\partial G}{\partial n} - \int_{\partial B_{R_1}} \frac{\partial G}{\partial n} = 0$$


D'altra parte, su ∂B_R $\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial G}{\partial r}(R)$ e su ∂B_{R_1} $\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial G}{\partial r}(R_1)$

$\Rightarrow R^{\frac{n-1}{n}} \omega_n \cdot \frac{\partial G}{\partial r}(R) = R_1^{n-1} n \cdot \omega_n \frac{\partial G}{\partial r}(R_1) \quad \forall R, R_1 \Rightarrow$

$r \mapsto r^{n-1} \frac{\partial G}{\partial r}(r) = \text{cost.}$
per $r \geq \varepsilon$

per $R_1 = \varepsilon$ si ha inoltre $\int_{B_\varepsilon} -\Delta G = \int_{B_\varepsilon} f_\varepsilon = 1$

$$\Rightarrow - \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial r} = 1 = - n \omega_n \varepsilon^{n-1} \frac{\partial G}{\partial r}(\varepsilon) = - n \omega_n \varepsilon^{n-1} \frac{\partial G}{\partial r}(r)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial r}(r) = - \frac{1}{n \omega_n r^{n-1}} = \frac{1}{(n-2)|\partial B_1|} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right)$$

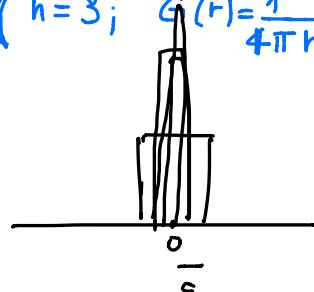
$$G(r) = \frac{1}{(n-2)|\partial B_1|} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \quad (n=3; \quad G(r) = \frac{1}{4\pi r})$$

mandando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f_\varepsilon(x) dx \rightarrow \delta_0$$

$\mu_\varepsilon \rightarrow \delta_0$
nel senso delle funzioni di

ripartizione $(\mu_\varepsilon(E) \rightarrow \delta_0(E) \quad \forall E \text{ misurabile} \text{ di } \mathbb{R}^n)$



si ottiene che

$$G(r) = \frac{1}{(n-2)|\partial B_1|} \cdot \frac{1}{r^{n-2}}$$

$r > 0$

e' soluzione di $\{-\Delta G = \delta_0\}$ in \mathbb{R}^n

SOLUZIONE FONDAMENTALE $\rightarrow \begin{cases} -\Delta G = \delta_0 \\ G \rightarrow 0 \end{cases} \text{ per } |x| \rightarrow +\infty$

(serve per costruire sol. del pb. non omogeneo $\Delta u = f$)

$$\Rightarrow f \approx \sum_i q_i \delta_{p_i} \Rightarrow -\Delta u = f \approx \sum_i q_i \delta_{p_i} \Rightarrow u = \sum_i q_i G(|x - p_i|)$$

METODI DI ENERGIA
PER L'UNICITÀ del PL. di DIRICHLET

in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

Identità di Green: per $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\bullet) \operatorname{div}(u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v \quad \text{aperto, limitato}$$

$$(\text{TEOREMA DELLA DIVERGENZA}) \bullet) \int_{\Omega} \operatorname{div}(u \nabla v) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{misura di superficie su } \partial\Omega \\ \text{normale esterna} \end{matrix} \quad \text{e } \partial\Omega \text{ di classe } C^1 \quad (\text{e } C^2 \text{ a tratti.})$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \quad (*)$$

$$\nabla u \cdot \nabla v - \operatorname{div}(u \nabla v) \quad \nabla v \cdot \nabla u - \operatorname{div}(v \nabla u)$$

e

$$(*) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} u \Delta u = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \quad \begin{matrix} (u=v) \\ \downarrow \\ \operatorname{div}(u \nabla u) = |\nabla u|^2 + u \Delta u \end{matrix}$$

Da (*) si ricava che se u_1, u_2 risolvono $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{sul } \partial\Omega \end{cases}$

posto $u = u_1 - u_2$ ($\Rightarrow \Delta u = 0$ in Ω ; $u = 0$ su $\partial\Omega$)

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} u \Delta u = \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = 0 \Rightarrow |\nabla u|^2 = 0 \text{ su } \Omega$$

$$\Rightarrow \nabla u = 0 \text{ su } \Omega \Rightarrow u = \text{cost.} \Rightarrow u = u_1 \underset{(\Omega \text{ connesso})}{=} 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

OSS:

Analogamente, si dimostra $u_1 - u_2 = \text{cost.}$ per il PL di Neumann

$$\begin{matrix} u_1, u_2 \\ \text{sol. di} \end{matrix} \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

OSS: con questi metodi si ottengono anche stime di stabilità in L^2 per gradienti della sol. al pb. di Dirichlet o Neumann

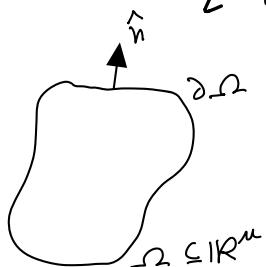
RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DELLA

SOLUZIONE DEL PB. DI DIRICHLET - FUNZIONE DI GREEN (NUCLEO)

Da (*) si può ricavare una formula di rappresentazione integrale per sol. u del prob. di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = g \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

Ω aperto limitato
con classe C^1 a tratti
 $f \in C^0(\Omega)$ $g \in C^0(\partial\Omega)$



$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) \nabla_y G(x,y) \cdot \hat{n} d\sigma(y) + \int_{\Omega} f(y) G(x,y) dy$$

- $\underbrace{G(x,y)}_{\text{Green Kernel}} = \text{FUNZIONE DI GREEN}$ per il dominio Ω

OSS: nel caso del cerchio, si riottiene la formula integrale di Poisson (se fzo)

Idea: da (*) si ha, detta u la sol. di $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

$$\int_{\Omega} u \Delta v + \int_{\Omega} f \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \quad \forall v !!!$$

cerchiamo v tale che $v=0$ su $\partial\Omega$ e $\int_{\Omega} u \Delta v = u(x)$
 $(v(x,\cdot))$
 $v_x(y) \equiv v(x,y)$

$$\approx \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon(x)} u(y) dy$$

Affinché $\int_{\Omega} u(y) \Delta v(y) dy = u(x)$ possiamo scegliere $v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon$

$$\text{con } \Delta v_\varepsilon(y) = \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \cdot \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} (y) \Rightarrow \int_{\Omega} u(y) \Delta v_\varepsilon(y) dy = \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} u(y) dy$$

THM. MEDIA INTEGRALE \downarrow per $\varepsilon \rightarrow 0$
 $u(x)$

Remember La sol. fondam. (approssimata)

$$"v_\varepsilon(x,y)" = \Gamma_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{(n-2)|B_1|} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \quad \text{per } |x-y| \geq \varepsilon$$

$$\text{che risolve} \quad \begin{cases} -\Delta_y \Gamma_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}(y) \\ \Gamma_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{per } |y| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\text{Se costruiamo } v_\varepsilon(x,y) = \Gamma_\varepsilon(x,y) + w_\varepsilon(x,y)$$

$$\text{in modo tale che } \Delta_y v_\varepsilon = \Delta_y \Gamma_\varepsilon = \frac{1}{|B_\varepsilon|} \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}$$

$$(ossia \Delta_y w_\varepsilon(x,y) = 0)$$

$$\text{e } w_\varepsilon(x,y) = 0 \quad \forall y \in \partial\Omega \quad (\text{ossia } w_\varepsilon(x,y) = -\Gamma_\varepsilon(x,y) \text{ su } \partial\Omega)$$

e passiamo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo la formula

di rappresentazione; pertanto, dato che per $x \in \Omega$

$$\text{per } \varepsilon \text{ piccolo, } B_\varepsilon(x) \subset \Omega \quad (B_\varepsilon(x) \cap \partial\Omega = \emptyset)$$

$$\text{e fuori da } B_\varepsilon(x) \quad \Gamma_\varepsilon(x,y) = \Gamma(x,y)$$

$$\text{si avra' } w_\varepsilon = w \quad \text{sol. di} \quad \begin{cases} -\Delta_y w(x,y) = 0 \quad \text{in } \Omega \\ w(x,\cdot) = -\Gamma(x,\cdot) \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e quindi:

$$v(x,y) = G(x,y) = \Gamma(x,y) + w(x,y)$$

FUNZIONE DI GREEN per Ω (Pb di Dir)

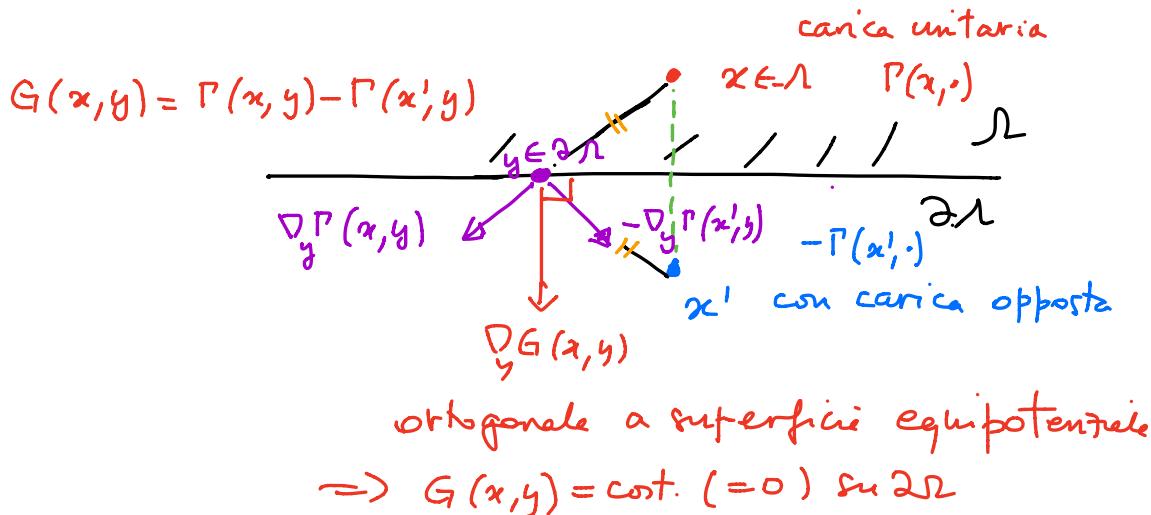
1 particolare b.b.
di Dirichlet su Ω

carica in $x \in \Omega$
potenziale = 0 su $\partial\Omega$

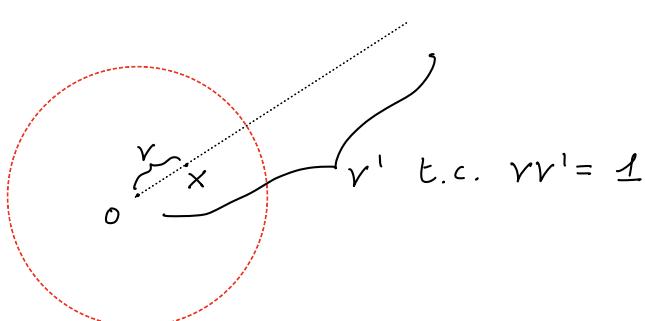
OSS: La funzione di Green per il Pb di Dirichlet si costruisce a partire dal potenziale generato da una carica/massa puntiforme in $x \in \Omega$ "aggiustato" in modo tale da rendere equipotenziale la superficie $\partial\Omega$.

Per certe geometrie "semplici" (ad es. semispazi, semipiani, rettangoli, parallelepipedi, ...) si usa la tecnica delle "cariche immaginarie".

ad es.: SEMIPIANO / SEMISPazio



SFERA:



PARELLELEPIPEDO:

**PRINCIPIO DEL MASSIMO
PER FUNZIONI SUB-ARMONICHE
IN R^N - STIME DI STABILITÀ PER IL PB. DI DIRICHLET**

Sia $u \in C^2(\Omega)$ $\Omega \subset R^N$ aperto limitato

supponiamo u SUB-ARMONICA in Ω ovvero

$$-\Delta u < 0 \text{ in } \Omega \quad (\Delta u > 0 \quad \forall x \in \Omega)$$

Allora $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$, ovvero il massimo di u
e' raggiunto sulla frontiera $\partial\Omega$.

Prova: sia $x_0 \in \Omega$ p.t.o di \max_{Ω} per u ; allora

(interno)

x_0 e' p.t.o critico ($\Rightarrow \nabla u(x_0) = 0$) e $D^2u(x_0)$ e' SEMIDEFINITA NEGATIVA

ovvero $\text{tr}(D^2u(x_0)) = \text{somma autovalori} \leq 0$

$$\stackrel{\text{II}}{\Delta u(x_0)} > 0 \quad \text{CONTRADIZIONE}$$

□

OSS: Analogamente si ha un princ. del minimo per funzioni $u \in C^2(\Omega)$ SUPER-ARMONICHE ($-\Delta u > 0$ in Ω)
 $(\Delta u < 0$ in Ω)

OSS: sia $u \in C^2(\Omega)$ ARMONICA ($-\Delta u = 0$) in Ω .

allora $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$ e' SUB-ARMONICA

$$-\Delta u_\varepsilon = -\Delta u - \varepsilon \Delta |x|^2 = -\varepsilon \cdot 2n < 0$$

$$\Delta(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2) = 2n$$

$$\Rightarrow \sup_{\bar{\Omega}} u \leq \sup_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon = \sup_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \sup_{\partial\Omega} u + \varepsilon M^2$$

per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha $\boxed{\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u}$

$(n < B_M)$
limitato

(P' implicazione inversa è ovvia) PRINC. del MAX.
per funzioni ARMONICHE

Analogamente si estende allo funzioni armoniche il principio del minimo.

OSS: Qui il princ. del max (n/n) non è stato dedotto dalla proprietà della media per le funzioni armoniche che pure vale in \mathbb{R}^n , non solo in \mathbb{R}^2 .

STABILITÀ del Pb. di DIRICHLET in \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{sulla} \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Omega \text{ aperto limitato in } \mathbb{R}^n \\ \partial\Omega \text{ di classe } C \text{ a tratti.} \end{array}$$

Supponiamo f, g limitate $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = M$,

$$\text{Considero } v(x) = u(x) + M|x|^2$$

$$\begin{cases} -\Delta v = f(x) - 2nM < 0 \text{ in } \Omega \\ v = g(x) + M|x|^2 \text{ sulla} \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow v \text{ è SUB-ARMONICA !!!}$$

$$\Rightarrow \sup_{\bar{\Omega}} |u| \leq \sup_{\bar{\Omega}} |v| \leq \sup_{\partial\Omega} |v| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + M \cdot (\sup_{\partial\Omega} |x|^2)$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot C(\Omega)$$

(stima norm OTTIMALE!)

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i & \text{in } \Omega \\ u_i = g_i & \text{sulla} \partial\Omega \end{cases} \quad i=1,2$$

$$\Rightarrow \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + C(\Omega) \|f_1 - f_2\|_{L^\infty(\Omega)}$$

