12. Equazione di Laplace e Problemi al Contorno

In generale, una ODE/PDE può rappresentare un problema ai valori iniziali (es. PdC) oppure ai valori al contorno (es. elettrostatica). Tali problemi si dividono in:

1) PROBLEMI BEN POSTI: sono garantite l'esistenza, l'unicità e la stabilità della soluzione (proprietà fondamentale in analisi numerica)

Continuità del PROBLEMA INVERSO:

$Tu = g \Rightarrow u = T^{-1} g$

$\Rightarrow$ se il problema è ben posto, l'operatore T^{-1} è continuo

2) PROBLEMI MAL POSTI: manca almeno 1 delle caratteristiche (≡ PROBLEMI NON BEN POSTI) dei problemi ben posti. La trattazione consiste nella REGOLARIZZAZIONE (approssimazione di problemi mal posti mediante problemi ben posti)

Problema di Dirichlet:

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato con $\partial\Omega \in C^1$ (o C^1 a tratti) il problema di Dirichlet con il dato al contorno $g \in C^0(\partial\Omega)$ è:

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}}$$

(Eq. di Laplace)

(condizione al contorno di Dirichet)

Problema di Neumann:

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato con $\partial\Omega \in C^1$ (o C^1 a tratti) il problema di Neumann con il dato al contorno $g \in C^0(\partial\Omega)$ è:

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \nabla u \cdot \hat{n} = \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}}$$

(Eq. di Laplace)

(condizione al contorno di Neumann)

N.B.

$\nabla u \cdot \hat{n}$ è il flusso uscente di u

$\Rightarrow$ Il problema di Dirichlet è ben posto. Lo è anche il problema di Neumann, eccetto l'unicità modulo costanti (u sol. del PdN $\Rightarrow u + C$, C = cost sol. del PdN)

Problema di Dirichlet (PdD)

Def (Soluzione Classica del PdD):
u è Soluzione Classica del PdD se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$
ovvero se $\Delta u \in C^0(\Omega)$ e $u(y) \to u(x) = g(x)$ $\forall y \in \Omega, x \in \partial\Omega$
(dato al contorno "preso" con continuità dalla soluzione)

Def (Soluzione Debole del PdD):
u è Soluzione Debole del PdD se deriva dalla formulazione integrale del PdD e, più in generale, ha "senso fisico"

Proposizione (Unicità + Stabilità):
La sol. del PdD è Unica e Stabile (classica e/o debole)

Dim.
Sono conseguenza del Principio del Massimo per funzioni armoniche:

1) Unicità:
date $u_1, u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ sol. del PdD si ha $U := u_1 - u_2$ sol. di $\begin{cases} \Delta U = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0 & \text{in } \Omega \\ U = u_1 - u_2 = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$. Per il Principio del Massimo si ha:

$$\sup_{\Omega} U \leq \sup_{\partial\Omega} U = 0 \Rightarrow U(x) \leq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

Tuttavia $-U = u_2 - u_1$ è sol. di $\begin{cases} \Delta(-U) = 0 & \text{in } \Omega \\ -U = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

Per il Principio del Massimo si ha:

$$\sup_{\Omega}(-U) \leq \sup_{\partial\Omega}(-U) = 0 \Rightarrow -U(x) \leq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

$$\Rightarrow U(x) = 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \Rightarrow u_1 = u_2 \text{ in } \overline{\Omega}$$

2) Stabilità:
u_1 sol. di $\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{in } \Omega \\ u_1 = g_1 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$, u_2 sol. di $\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{in } \Omega \\ u_2 = g_2 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

$\Rightarrow u_1 - u_2$ è sol. di $\begin{cases} \Delta(u_1 - u_2) = 0 & \text{in } \Omega \\ u_1 - u_2 = g_1 - g_2 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

$\Rightarrow$ per il Principio del Massimo si ha $u_1(x) - u_2(x) \leq \sup_{\partial\Omega}(g_1 - g_2)$ $\forall x \in \Omega$

Analogamente, $u_2(x) - u_1(x) \leq \sup_{\partial\Omega}(g_2 - g_1) = -\inf_{\partial\Omega}(g_1 - g_2)$

ovvero $\inf_{\partial\Omega}(g_1 - g_2) \leq u_1(x) - u_2(x) \leq \sup_{\partial\Omega}(g_1 - g_2)$ $\forall x \in \Omega$

In particolare, dato che $\sup_{\partial\Omega}|g_1-g_2| \geq \sup_{\partial\Omega}(g_1-g_2), -\inf_{\partial\Omega}(g_1-g_2)$, si ricava che:

$$|u_1(x)-u_2(x)| \leq \sup_{\partial\Omega}|g_1-g_2| \quad \forall x \in \Omega$$

ovvero:

$$\|u_1-u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g_1-g_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

(STABILITÀ IN L^∞)

□

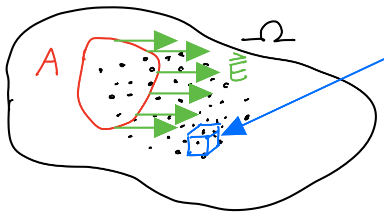
MOTIVAZIONI PER LO STUDIO DEL PdD

⇒ Studio di fenomeni di equilibrio statico e dinamico
(elettrostatica, fluidodinamica, fenomeni di diffusione, processi stocastici, sistemi gradiente, problemi di energia/area minima)

(elettrostatica) se u (a meno del segno) è il potenziale elettrostatico, ∇u è il campo elettrico ed il problema di Dirichlet $\Delta u = f$ in Ω, $u = g$ su $\partial\Omega$ corripsonde al problema fondamentale dell'elettrostatica: assegnata la distribuzione di cariche f in Ω ed il potenziale g sul bordo, determinare il campo elettrico all'interno di Ω. Nel problema di Neumann si assegna il flusso del campo elettrico attraverso $\partial\Omega$.

$\vec{E} = \nabla u$ campo elettrico

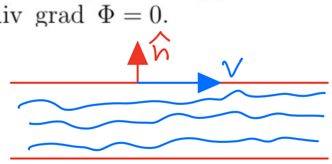
$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = f \\ \int_{\partial A} \nabla u \cdot \hat{n} = \int_A f(x)\,dx \end{cases}$$



distribuzione di cariche
$f(p) = $ #cariche nel volumetto

(fluidodinamica) equazione dei fluidi stazionari incomprimibili: dato un fluido di densità ρ trasportato a velocità V (indipendente dal tempo), dall'equazione di continuità $\rho_t + \operatorname{div}(\rho V) = 0$ si ricava, nel caso ρ costante, la condizione di divergenza nulla $\operatorname{div} V = 0$. Se il campo V è inoltre irrotazionale (non presenta vorticità), allora si ottiene $\Delta V =$[grad div - rot rot]$V = 0$, oppure, considerato che localmente si ha $V = \nabla\Phi$, si ottiene $\Delta\Phi =$div grad $\Phi = 0$.

es. in un CANALE



$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \nabla\phi\cdot\hat{n} = 0 \end{cases} \quad \text{(PdN)}$$

(fenomeni di diffusione) distribuzioni stazionarie di temperatura, concentrazioni di sostanze chimiche in equilibrio in un dato ambiente sono soluzioni dell'equazione del calore (in regime stazionario) $\rho_t - k\Delta\rho = 0$, la quale corrisponde alla versione differenziale della legge di bilancio per la densità di massa ρ (rispettivamente per la temperatura/energia)

$$-\frac{d}{dt}\int_U \rho = \int_{\partial U} \Phi_\rho \cdot n = \int_U \operatorname{div}\Phi_\rho\,,$$

dove per il flusso di massa (rispettivamente il flusso di calore) Φ_ρ uscente dal dominio U si considera la legge di Fourier $\Phi_\rho = -k\nabla\rho$, ovvero si postula che la diffusione della sostanza (risp. del calore) nell'unità di tempo avvenga essenzialmente nella direzione di massima differenza di densità (risp. di temperatura).

La condizione al contorno di Dirichlet consiste nel fissare la densità di massa (risp. la temperatura) al bordo del dominio, mentre la condizione di Neumann consiste nel fissare il flusso di massa (risp. di calore) attraverso il bordo, in particolare la condizione di Neumann.omogenea equivale a considerare il dominio isolato, stagno (risp. isolare termicamente).

Trattandosi di fenomeni di evoluzione, oltre alle condizioni al contorno è naturale considerare il problema ai valori iniziali, fissando un dato iniziale ρ_0 sul dominio.

(elasticità, area minima) [redacted] Il problema di Plateau consiste nel determinare un profilo (grafico di una funzione u) di area minima in un dominio Ω tra tutti quelli aventi un prefissato valore al bordo $\partial\Omega$. Il profilo di area minima corrisponde ad esempio a quello di un film di sapone che insiste su un'armatura in fil di ferro corrispondente al profilo prefissato su $\partial\Omega$. Si tratta di trovare

$$u = \arg\min\{F(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}, \quad u = g \ \text{ su } \partial\Omega\}$$

Sotto ipotesi di piccoli spostamenti (ovvero ∇u piccolo), dallo sviluppo di Taylor $\sqrt{1+\tau^2} \simeq 1 + \frac{\tau^2}{2}$ si ricava il principio di minimo equivalente

INTEGRALE DI DIRICHLET

$$u = \arg\min\{E(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2}, \quad u = g \ \text{ su } \partial\Omega\},$$

dove $E(u)$ è detta l'energia di Dirichlet. Mostriamo che l'equazione di Laplace è verificata dai punti di minimo dell'energia di Dirichlet: si ha infatti che in u, essendo un punto critico di E, si annullano le derivate direzionali di E, ovvero per ogni (direzione, alias funzione test) $\boxed{\phi \in C_c^\infty(\Omega)}$ si ha

$$= \frac{1}{t}\int_\Omega |\nabla u + t\nabla\phi|^2 - |\nabla u|^2 = \cancel{\frac{1}{t}}\int_\Omega \cancel{|\nabla u|^2} + \underbrace{2\cancel{t}\,\nabla u\cdot\nabla\phi}_{} + t^{\cancel{2}}|\nabla\phi|^2 - \cancel{|\nabla u|^2}$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial \phi}(u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(E(u+t\phi) - E(u)\right) = 2\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\phi = -2\int_\Omega \Delta u\cdot\phi\,,$$

Infatti si ha:

1) $\operatorname{div}(\phi\nabla u) = \nabla\phi\cdot\nabla u + \phi\Delta u$

2) $\int_\Omega \operatorname{div}(\phi\nabla u)\,dx = \int_{\partial\Omega} \phi\cdot\nabla u\cdot\hat{n}\,d\tau = 0 \quad \left(\phi|_{\partial\Omega} = 0\right)$

$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\phi = -\int_\Omega \phi\Delta u = 0 \quad \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega)$

Quindi:

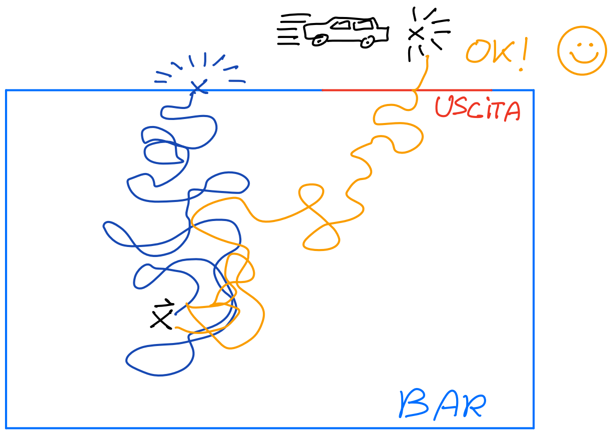
$$\int_\Omega \phi\Delta u = 0 \quad \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow \Delta u(x) = 0 \quad \forall x\in\Omega$$

LEMMA:

Se $f\in L^1(\Omega)$ è t.c. $\int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx = 0 \quad \forall\phi\, C_c^\infty(\Omega)$ allora $f(x) = 0$ q.o.

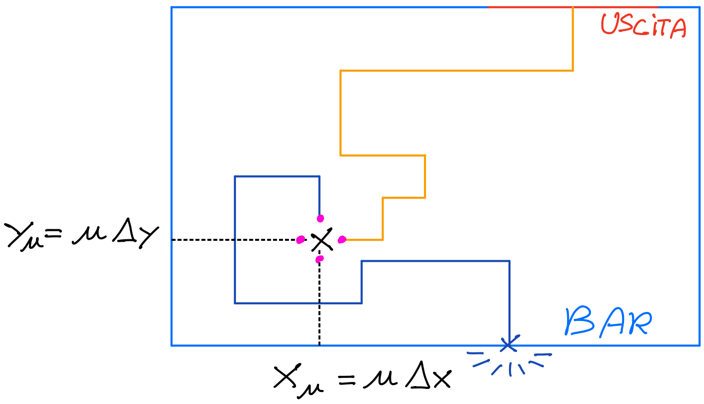
Interpretazione probabilistica dei problemi al contorno ed ai dati iniziali per l'equazione del calore e l'equazione di Laplace, rappresentazione della soluzione come limite di passeggiate casuali, relazione con processi di diffusione e moto browniano. Operatore di Laplace discreto (differenze finite) come operatore di media.

esempio: persona poco sobria che cerca di uscire dal bar



$\Rightarrow$ $u(\vec{x})$ = probabilità di uscire dalla porta partendo da $\vec{x}$

$\Rightarrow$ semplifichiamo le traiettorie mediante un RETICOLO:



$\Rightarrow$ reticolo a passo $\Delta x = k$, $\Delta y = k$

$$\Rightarrow \quad u(x_n, y_n) = \frac{1}{4}\Big(u((n+1)\Delta x, n\Delta y) + u(n\Delta x, (n+1)\Delta y) + u((n-1)\Delta x, n\Delta y) + u(n\Delta x, (n-1)\Delta y)\Big)$$

probabilità di transizione tra (x_n, y_n) e 1 vicino

proprietà della media discreta

$\Rightarrow$ si ha:

$$u((n+1)\Delta x, n\Delta y) - 2u(n\Delta x, n\Delta y) + u((n-1)\Delta x, n\Delta y) + u(n\Delta x, (n+1)\Delta y) - 2u(n\Delta x, n\Delta y) + u(n\Delta x, (n-1)\Delta y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\Delta x)^2}\Big[u((n+1)\Delta x, n\Delta y) - 2u(n\Delta x, n\Delta y) + u((n-1)\Delta x, n\Delta y)\Big] + \frac{1}{(\Delta y)^2}\Big[u(n\Delta x, (n+1)\Delta y) - 2u(n\Delta x, n\Delta y) + u(n\Delta x, (n-1)\Delta y)\Big] = 0$$

$\Rightarrow$ Al limite, si ha:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$$

e, inoltre:

$$u = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \text{USCITA} \\ 0 & \text{se } x \notin \text{USCITA} \end{cases} \Rightarrow u|_{\partial\Omega} \notin C^0$$