Sistemi NON autonomi:

Sono del tipo $\dot{z} = X(t, z)$ (*) (ovvero il sistema dipende esplicitamente anche dalla variabile indipendente t) con $X: \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ La teoria fin qui studiata NON si applica ad equazioni di questo tipo, tuttavia vi è un "TRUCCO":

Introduciamo la nuova variabile $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\dot{\tau} = 1$

$\Rightarrow$ associo all'equazione originale il sistema:

$$(**) \begin{cases} \dot{\tau} = 1 \\ \dot{z} = X(\tau, z) \end{cases} \Rightarrow (*) \text{ e } (**) \text{ sono equivalenti:}$$

$t \mapsto z(t)$ è soluzione di (*) se e solo se $t \mapsto (t, z(t))$ è soluzione di (**)

$\Rightarrow$ il sistema (**) è della forma $\begin{pmatrix} \dot{\tau} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \tilde{X}(\tau, z)$ con $\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ X(\tau, z) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Sistemi Lineari:

Sono sistemi della forma $\dot{z} = Az$ con:

$$z \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M(\mathbb{R})^{n \times n}$$

$\Rightarrow$ il campo associato al sistema è $X = Az$ ovvero un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in se stesso

N.B.

Per sistema lineare intenderemo sempre un sistema lineare OMOGENEO A COEFFICIENTI COSTANTI

Il campo associato al sistema $\dot{z} = Az$ $(z \in \mathbb{R}^n, A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ è $z \in \mathbb{R}^n \longmapsto Az$ ed è completo. La soluzione è:

$$z = e^{tA} \cdot z_0 \quad \text{dove} \quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

Proprietà della matrice esponenziale:

1) $e^{\vec{0}} = Id_{n\times n}$ con $\vec{0} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$
2) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$
3) $\forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R} \quad e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$
4) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$
5) $\exists P^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow e^{tPAP^{-1}} = P e^{tA} P^{-1}$
6) $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow e^{tA} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$

esempio:

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha\, Id + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}}_{=:\, B}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = e^{\alpha t Id + tB} = e^{\alpha t Id} e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} e^{tB}$$

$$= e^{\alpha t} \cdot e^{tB}$$

Calcolo e^{tB} con la definizione:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta^3 \\ \beta^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} \beta^4 & 0 \\ 0 & \beta^4 \end{pmatrix} = \beta^4 \cdot Id \Rightarrow B^5 = B^4 B = \beta^4 B = \begin{pmatrix} 0 & \beta^5 \\ -\beta^5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^6 = B^4 B^2 = \beta^4 B^2 = \begin{pmatrix} -\beta^6 & 0 \\ 0 & -\beta^6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tB} = Id + tB + \frac{t^2B^2}{2} + \frac{t^3B^3}{3!} + \frac{t^4B^4}{4!} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2\beta^2}{2} + \frac{t^4\beta^4}{4!} - \dots & t\beta - \frac{t^3\beta^3}{3!} + \frac{t^5\beta^5}{5!} - \dots \\ -t\beta + \frac{t^3\beta^3}{3!} - \frac{t^5\beta^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{t^2\beta^2}{2} + \frac{t^4\beta^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = e^{\alpha t} \cdot e^{tB} = \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{DILATAZIONE / COMPRESSIONE DI FATTORE } e^{\alpha t}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}}_{\text{MATRICE DI ROTAZIONE DI ANGOLO } -\beta t}$$

Linearizzazione di un campo attorno ad un equilibrio:

Sia $X: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo qualsiasi (non necessariamente lineare) e sia $\bar{z} \in \Omega$ un suo equilibrio. ($\Longleftrightarrow X(\bar{z}) = 0$). Vogliamo studiare il comportamento LOCALE delle soluzioni in un intorno di $\bar{z}$, effettuiamo quindi il seguente cambio di variabile:

$$u = z - \bar{z} \Rightarrow \dot{u} = \dot{z} \quad (\dot{\bar{z}} = 0) \Rightarrow \dot{u} = X(u + \bar{z})$$

Dato che (per assunzione) $X \in C^\infty(\Omega)$, possiamo calcolare lo sviluppo di Taylor al 1° ordine del sistema:

$$\dot{u} = X(\bar{z}) + \operatorname{Jac} X(\bar{z})\, u + O(\|u\|^2)$$

dove $\operatorname{Jac} X(z) = DX(z) = \left(\frac{\partial X_i}{\partial z_j}\right)(z) \quad i,j = 1,\dots,n$

$\Rightarrow$ dato che $\bar{z}$ è un equilibrio, si ha:

$$\dot u = \text{Jac}\,X(\bar z)\cdot u + O(\|u\|^2)$$

$\Rightarrow$ volendo studiare il comportamento locale vicino a $\bar z$, possiamo assumere $\|u\|$ piccolo e scartare quindi $O(\|u\|^2)$.

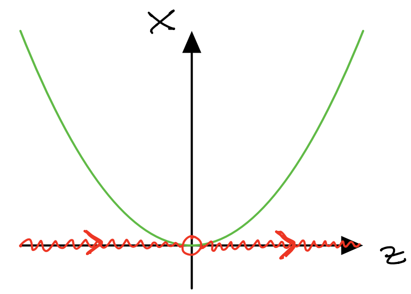
<u>Def.</u> (Sistema Linearizzato di un campo X):
Dati $X:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ un campo qualsiasi (non necessariamente lineare), $\bar z\in\Omega$ un suo equilibrio ($\iff X(\bar z)=0$), si definisce il SISTEMA LINEARIZZATO DI X IN $\bar z$ come:

$$\dot u = A u \quad \text{con} \quad A = \text{Jac}\,X(\bar z)\in M(\mathbb{R})^{n\times n}$$

o, equivalentemente:

$$\dot z = A\cdot(z-\bar z) \quad \text{con } A \text{ come sopra}$$

<u>esempio</u>:
$X:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ con $X=z^2$ $\Rightarrow$ $\bar z=0$ è equilibrio



$\Rightarrow$ $\dot X(\bar z)=0$ $\Rightarrow$ il LINEARIZZATO DI X in $\bar z=0$ è:

$$\dot u = \dot X(\bar z)u = 0$$

$\Rightarrow$ il sistema linearizzato non fornisce alcuna informazione riguardo al sistema originario.

es.:
$X(x,y)=\begin{pmatrix}x^2-yx\\ y^2-x\end{pmatrix}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, trovare gli equilibri di X e il suo linearizzato per ciascun equilibrio.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - yx = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \vee x = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 0 \\ \vee \\ x = y = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 2 equilibri : $(0,0)$, $(1,1)$

$\Rightarrow$ calcolo Jac X:

$$\text{Jac}\, X = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \\ -1 & 2y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ il Linearizzato in $(0,0)$ è:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ il Linearizzato in $(1,1)$ è:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (z - (1,1)) \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

<u>Osservazione</u> (Linearizzazione di sistemi del 2° ordine):

Dati $C \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $Y : C \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\ddot{x} = Y(x, \dot{x})$ sappiamo che possiamo associare un sistema al 1° ordine. Sia $\bar{x} \in C$ configurazione di equilibrio ($\iff Y(\bar{x}, 0) = \vec{0}$) Per linearizzare il sistema attorno ad $\bar{x}$ si scrive il sistema al 1° ordine associato all'equazione:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = Y(x, v) \end{cases} \iff \dot{z} = X(z) \text{ con } z = (x, v) \in C \times \mathbb{R}^n,$$

$$X : C \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} v \\ Y(x,v) \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $(\bar{x}, 0)$ è equilibrio di X. Linearizzo X attorno ad $(\bar{x}, 0)$:

$$\mathrm{Jac}\, X = \left(\begin{array}{c:c} 0_{n\times n} & Id_{n\times n} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(x,v)_{n\times n} & \frac{\partial Y}{\partial v}(x,v)_{n\times n} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \mathrm{Jac}\, X(\bar{x},0)\cdot(z-(\bar{x},0))$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \mathrm{Jac}\, X(\bar{x},0)\begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{\partial Y}{\partial x}(\bar{x},0)_{n\times n}\cdot(x-\bar{x}) + \frac{\partial Y}{\partial v}(\bar{x},0)_{n\times n}\cdot v \end{cases}$$

che è il Linearizzato nell'equilibrio $(\bar{x},0)$

$\Rightarrow$ tornando ad una notazione di un'equazione del 2° ordine si ha:

$$\ddot{x} = \frac{\partial Y}{\partial x}(\bar{x},0)_{n\times n}\cdot(x-\bar{x}) + \frac{\partial Y}{\partial v}(\bar{x},0)_{n\times n}\cdot \dot{x}$$

<u>esercizio:</u>

Linearizzare l'equazione $\ddot{x} = -2(x+2)(2x^2+2x-1)$ nella configurazione di equilibrio $\bar{x} = -2$

$\Rightarrow \dot{x} = v \Rightarrow \dot{v} = \ddot{x}$, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -2(x+2)(2x^2+2x-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} v \\ -2(x+2)(2x^2+2x-1) \end{pmatrix} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ l'equilibrio richiesto è $(-2,0)$

Linearizzazione:

$$\mathrm{Jac}\, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\left[(2x^2+2x-1) + (x+2)(4x+2)\right] & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Jac}\, X(-2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot (z - (-2,0)) \quad \text{con} \quad z = (x, v)$$