es. 1)

Sia $\tau = \{\phi\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid A = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

1) Dim. che τ è topologia su $\mathbb{R}^2$:

1) $\phi \in \tau$ ✓

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \phi \in \tau$ ✓

2) $A_1, A_2 \in \tau$

$\Rightarrow A_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \ A_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_t\}$

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_t\} \in \tau$

$\Rightarrow$ se A_1, A_2 sono $\mathbb{R}^2 \setminus \{$numero finito di rette$\}$

vale analogamente

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau \quad \forall A_1, A_2 \in \tau$

3) $\{A_i\} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_i A_i = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_t\} \in \tau$

e lo stesso vale con le rette.

$\Rightarrow \tau$ è topologia.

2) Stabilire se $(\mathbb{R}^2, \tau)$ è T_2, T_1, T_0:

è T_2?

$(\mathbb{R}^2, \tau)$ è $T_2 \iff \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2 \ \exists A_1, A_2 \in \tau$ t.c.

$p_1 \in A_1, p_2 \in A_2 \wedge A_1 \cap A_2 = \phi$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, \tau)$ non è T_2 perché se lo fosse, uno dei 2 aperti (A_1, A_2) dovrebbe avere un'infinità di punti/rette mancanti per non intersecare l'altro

è T_1?

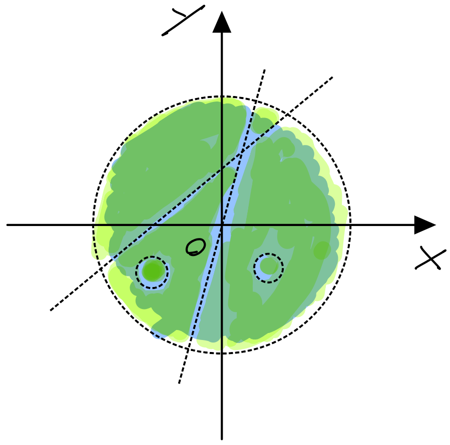
sì: $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2 \ \exists A_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_2\}, A_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1\}$

$\in \tau \Rightarrow p_1 \in A_1 \wedge p_2 \notin A_2 \wedge p_2 \in A_2 \wedge p_1 \notin A_1$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, \tau)$ è T_1, e quindi è anche T_0

3) Stabilire se $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ è compatto in $(\mathbb{R}^2, \tau)$

$\Rightarrow$ $B_1((0,0))$ è compatto se $\forall \mathcal{R}$ ricoprimento aperto $\exists$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{R}$ per $B_1((0,0))$



$\Rightarrow$ Sia $\mathcal{R}$ ricoprimento aperto di $B_1((0,0)) = D$

$\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I} \Rightarrow R_i = D \setminus \{P_i \cup C_i\}$

P_i: punti, C_i: corde

$\Rightarrow$ sia $R_1 = D \setminus \{P_1 \cup C_1\}$ con $|P_1|, |C_1| < +\infty$

$\Rightarrow R_1$ ricopre $D \setminus \{P_1 \cup C_1\}$ con P_1 e C_1 insiemi di cardinalità FINITA

$\Rightarrow$ i punti di P_1 e le corde di C_1 possono sempre essere coperti da al più $|P_1|, |C_1|$ insiemi aperti, che saranno sicuramente in $\mathcal{R}$ dato che $\mathcal{R}$ copre D

$\Rightarrow \exists$ sempre sottoricoprimento finito di $\mathcal{R}$

$\Rightarrow D = B_1((0,0)) \subseteq (\mathbb{R}^2, \tau)$ è compatto.

es. 2)

Considerare $X = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{p}{10^q} \text{ con } p, q \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathbb{R}$ con τ_e (indotta).

Determinare se:

1) X è aperto in $(\mathbb{R}, \tau_e)$ e il suo interno:

$\Rightarrow X$ non è aperto $\Rightarrow \mathring{X} = \emptyset$

2) X è chiuso in $(\mathbb{R}, \tau_e)$ e la sua chiusura:

$\Rightarrow X$ non è chiuso $\Rightarrow \overline{X} = \mathbb{R}$

3) X è compatto in $(\mathbb{R}, \tau_e)$:

$\Rightarrow$ per Heine-Borel non è compatto.

4) X è connesso per archi in $(\mathbb{Q}, \tau_e)$:

X in $(\mathbb{Q}, \tau_e)$ non è connesso:

$\exists A_1, A_2$ t.c. $A_1 \cup A_2 = X \wedge A_1 \cap A_2 = \emptyset$

sia $A_1 = \underbrace{(\underbrace{(-\infty, \pi)}_{\in \tau_e} \cap \mathbb{Q})}_{\in \tau_{\mathbb{Q}}} \cap X \in \tau_X$,

$A_2 = \underbrace{(\underbrace{(\pi, +\infty)}_{\in \tau_e} \cap \mathbb{Q})}_{\in \tau_{\mathbb{Q}}} \cap X \in \tau_X$

$\Rightarrow X = A_1 \cup A_2 \wedge A_1 \cap A_2 \Rightarrow X$ non è connesso

$\Rightarrow X$ non è connesso per archi in $(\mathbb{Q}, \tau_e)$

es. 3)

Sia $\gamma : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ con $\gamma(t) = \left(t, 1+\frac{1}{t}, \frac{1}{t} - t\right)$

1) Stabilire la terna di Frenét in $P = (-1, 0, 0)$

$\Rightarrow t_P = -1 \Rightarrow$ terna di Frenét è $\{\vec{\gamma}, \vec{b}, \vec{n}\}$

con $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\gamma}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \Rightarrow \dot{\gamma} = \left(1, 1 - \frac{1}{t^2}, -\frac{1}{t^2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma} = \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right) \Rightarrow \dot{\gamma}(-1) = (1, 0, -2)$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma}(-1) = (0, -2, -2)$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2)$$

$$\Rightarrow \vec{b} = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{(-4, 2, -2)}{2\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{b} \times \vec{\gamma} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{(-4, -10, -2)}{2\sqrt{5 \cdot 6}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2), \frac{1}{2\sqrt{6}}(-4, 2, -2), \frac{1}{2\sqrt{30}}(-4, -10, -2) \right\}$$

2) Calcolare $K(t)$ in P

$$\Rightarrow K(t) = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} = \frac{2\sqrt{30}}{(\sqrt{5})^3} = \frac{2\sqrt{\cancel{5} \cdot 6}}{\cancel{\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{6}$$

3) Verificare che $\tau(t) \equiv 0 \quad \forall t \neq 0$:

$$\Rightarrow \text{deve essere } \det\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \\ \dddot{\gamma} \end{pmatrix} \equiv 0$$

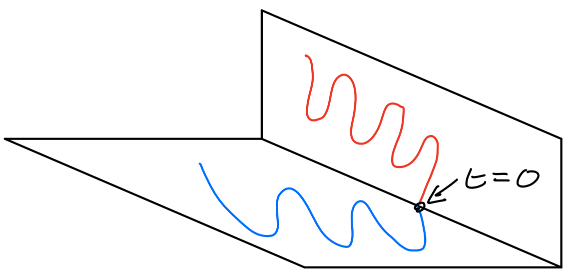
$$\Rightarrow \dddot{\gamma} = \left(0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4}\right)$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \\ \dddot{\gamma} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^2}-1 \\ 0 & \frac{2}{t^3} & \frac{2}{t^3} \\ 0 & -\frac{6}{t^4} & -\frac{6}{t^4} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{12}{t^7} + \frac{12}{t^7} \equiv 0 \quad \forall t \neq 0$$

4) Quanto stabilito al punto precedente è sufficiente per concludere che γ è piana?

No: $\nexists\, \tau(t)$ per $t=0$ potrebbe essere come segue:



$\Rightarrow$ γ non è piana tuttavia $\tau(t) \equiv 0$ $\forall t \neq 0$

$\Rightarrow$ Calcolo il piano osculatore per $t=-1 \wedge t=1$, se i 2 piani coincidono, allora γ è piana, altrimenti non lo è.

$$\Rightarrow \Pi_{-1} = \gamma(-1) + \langle \vec{\dot{\gamma}}(-1), \vec{n}(-1) \rangle$$

$$\Rightarrow \Pi_{1} = \gamma(1) + \langle \vec{\dot{\gamma}}(1), \vec{n}(1) \rangle$$

$$\Rightarrow \Pi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow \gamma(1) = (1, 2, 0) \Rightarrow$ vedo già che $\gamma(1) \notin \Pi_1$

$\Rightarrow \Pi_1 \neq \Pi_1 \Rightarrow \gamma$ non è piana.

es. 4)

$$\varphi(u,v) = \left(u,\ 2u - v,\ -\frac{u^2}{v}\right) \quad \text{con} \quad u \in \mathbb{R},\ v \neq 0$$

1) Determinare i punti regolari di S:

$$X_1 = \left(1,\ 2,\ -\frac{2u}{v}\right),\ X_2 = \left(0,\ -1,\ \frac{u^2}{v^2}\right)$$

$$\Rightarrow X_1 \times X_2 = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -\frac{2u}{v} \\ 0 & -1 & \left(\frac{u}{v}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(2\left(\frac{u}{v}\right)^2 - \frac{2u}{v},\ -\left(\left(\frac{u}{v}\right)^2\right),\ -1\right)$$

$$= \left(\frac{2u^2}{v^2} - \frac{2u}{v},\ -\frac{u^2}{v^2},\ -1\right)$$

$$= \left(\frac{2u}{v}\left(\frac{u}{v} - 1\right),\ -\frac{u^2}{v^2},\ -1\right)$$

$\Rightarrow$ deve essere:

$$\begin{cases} \frac{2u}{v}\left(\frac{u}{v} - 1\right) = 0 \\ -\frac{u^2}{v^2} = 0 \\ -1 = 0 \end{cases} \quad \lightning \text{ impossibile}$$

$\Rightarrow \nexists$ punti singolari di $S \Rightarrow S$ è regolare.

2) Determinare quali degli assi coordinati (escluso eventualmente $(0,0,0)$) stanno in S:

Asse x:

deve essere $y = z = 0,\ x \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u \neq 0 \\ 2u - v = 0 \\ -\frac{u^2}{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \ ⚡ \end{cases} \Rightarrow \text{asse } x \notin S$$

Asse y:

deve essere $x = z = 0,\ y \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ 2u - v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -v \neq 0 \ \checkmark \Rightarrow \text{asse } y \in S \\ -\frac{u^2}{v} = 0 \end{cases}$$

Asse z:

deve essere $x = y = 0,\ z \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ 2u - v = 0 \\ -\frac{u^2}{v} \neq 0 \end{cases} ⚡ \Rightarrow \text{asse } z \notin S$$

L'asse y è l'unica che sta in S.

3) Calcolare K_s di S $\forall (u,v)$

$\Rightarrow K_s = \frac{\ell}{g}$ con:

$$\ell = \frac{\det\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} x_{22} \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^2}{g}$$

$$g = (x_1 \cdot x_1)(x_2 \cdot x_2) - (x_1 \cdot x_2)^2$$

$$\Rightarrow K_s = \frac{\det\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} X_{22} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} X_{12} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}^2}{\left[(X_1 \cdot X_1)(X_2 \cdot X_2) - (X_1 \cdot X_2)^2 \right]^2}$$

$$X_1 = \left(1,\ 2,\ -\frac{2u}{v}\right),\quad X_2 = \left(0,\ -1,\ \frac{u^2}{v^2}\right)$$

$$\Rightarrow (X_1 \cdot X_1) = 1 + 4 + \frac{4u^2}{v^2} = 5 + 4\frac{u^2}{v^2}$$

$$\Rightarrow (X_1 \cdot X_2) = -2 - 2\frac{u^3}{v^3} = -2\left(1 + \frac{u^3}{v^3}\right)$$

$$\Rightarrow (X_2 \cdot X_2) = 1 + \frac{u^4}{v^4}$$

$$\Rightarrow g = \left(5 + 4\frac{u^2}{v^2}\right)\left(1 + \frac{u^4}{v^4}\right) - \left(-2\left(1 + \frac{u^3}{v^3}\right)\right)^2$$

$$= 5 + 5\frac{u^4}{v^4} + 4\frac{u^2}{v^2} + 4\frac{u^6}{v^6} - \left(4\left(1 + \frac{u^6}{v^6} + 2\frac{u^3}{v^3}\right)\right)$$

$$= 5 + 5\frac{u^4}{v^4} + 4\frac{u^2}{v^2} + 4\frac{u^6}{v^6} - \left(4 + 4\frac{u^6}{v^6} + 8\frac{u^3}{v^3}\right)$$

$$= 5 + 5\frac{u^4}{v^4} + 4\frac{u^2}{v^2} + \cancel{4\frac{u^6}{v^6}} - 4 - \cancel{4\frac{u^6}{v^6}} - 8\frac{u^3}{v^3}$$

$$= 1 + 5\frac{u^4}{v^4} - 8\frac{u^3}{v^3} + 4\frac{u^2}{v^2}$$

$$\Rightarrow X_{11} = \left(0,\ 0,\ -\frac{2}{v}\right),\quad X_{12} = \left(0,\ 0,\ \frac{2u}{v^2}\right)$$

$$X_{22} = \left(0,\ 0,\ -\frac{u^2 \cdot 2}{v^3}\right) = \left(0,\ 0,\ -\frac{2u^2}{v^3}\right)$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{v} \\ 1 & 2 & -\frac{2u}{v} \\ 0 & -1 & \frac{u^2}{v^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{v}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2u}{v^2} \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} = -\frac{2u}{v^2}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2u^2}{v^3} \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} = \frac{2u^2}{v^3}$$

$$\Rightarrow K_S(u,v) = \frac{\cancel{\frac{4u^2}{v^4}} - \cancel{\frac{4u^2}{v^4}}}{\ldots} \equiv 0$$

$$\Rightarrow K_S \equiv 0 \quad \forall p \in S.$$