DINAMICHE DI POPOLAZIONI INTERAGENTI

Ci concentriamo su modelli a 2 popolazioni del tipo:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = g(x,y), & y(0) = y_0 \end{cases}}$$

Caratterizzeremo tali modelli nei seguenti ambiti:

1) Predazione
2) competizione
3) simbiosi

MODELLO LOTKA-VOLTERRA [Predazione]:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN - \underbrace{cNP}_{\text{Predazione di tipo 1}}, & N(0) = N_0 \\ \dfrac{dP}{dt} = bNP - \mu P, & P(0) = P_0 \end{cases} \qquad r, c, b, \mu > 0}$$

tasso di mortalità

con:

N = prede al tempo t

P = predatori al tempo t

$\Rightarrow$ ri-parametrizziamo:

$$x = \frac{N}{\mu/b}, \quad y = \frac{P}{r/c} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = rx(1-y) \\ \dot{y} = \mu y(x-1) \end{cases}$$

$$t = \frac{\tau}{r} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = x(1-y) \\ \dot{y} = \frac{\mu}{r} y(x-1) \end{cases}$$

Consideriamo il modello con 2 parametri:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu x(1-y) \\ \dot{y} = \mu y(x-1) \end{cases}$$

<u>Equilibri</u>:

$$F(x,y,\nu,\mu) = 0 \iff \begin{cases} \nu x(1-y) = 0 \\ \mu y(x-1) = 0 \end{cases}$$

1) $E_0^* = (x_0^*, y_0^*) = (0,0)$ (equilibrio banale)

2) $E_1^* = (x_1^*, y_1^*) = (1,1)$

$\Rightarrow$ Calcoliamo:

$$D_F(x,y,\nu,\mu)\Big|_{(x^*,y^*)} = \begin{pmatrix} \nu(1-y^*) & -\nu x^* \\ \mu y^* & \mu(x^*-1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_F(E_0^*,\nu,\mu) = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} > 0$$

$\Rightarrow E_0^*$ é INSTABILE

$$\Rightarrow D_F(E_1^*,\nu,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + \nu\mu = 0$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\nu\mu} \Rightarrow$ procedendo con l'analisi si trova che anche E_1^* é INSTABILE

Calcoliamo ora le traiettorie $y(x)$:

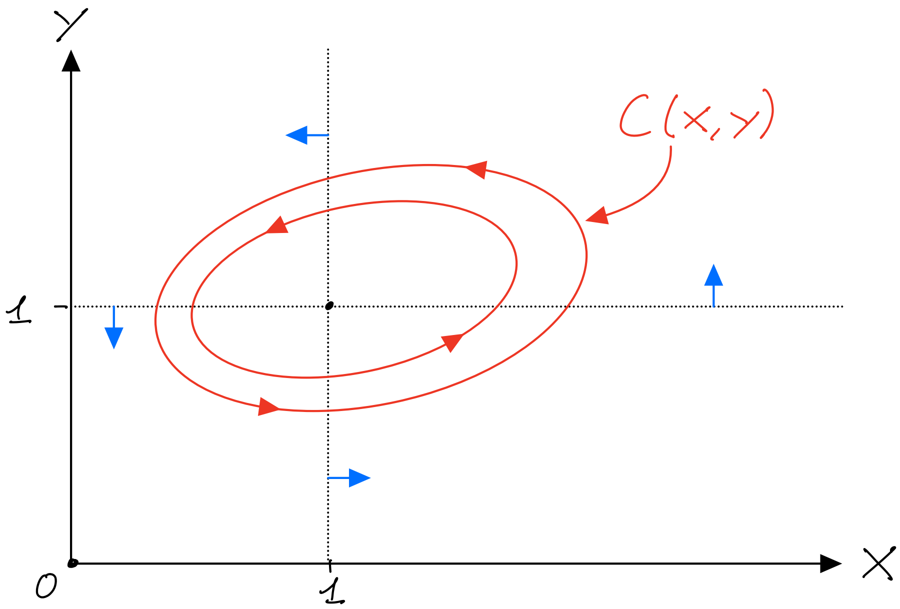
$$\begin{cases} \dot{x} = \nu x(1-y) \\ \dot{y} = \mu y(x-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\mu y(x-1)}{\nu x(1-y)}$$

$$\Rightarrow \frac{\nu}{y}(1-y)\,dy = \frac{\mu}{x}(x-1)\,dx$$

$\Rightarrow$ integrando si ha:

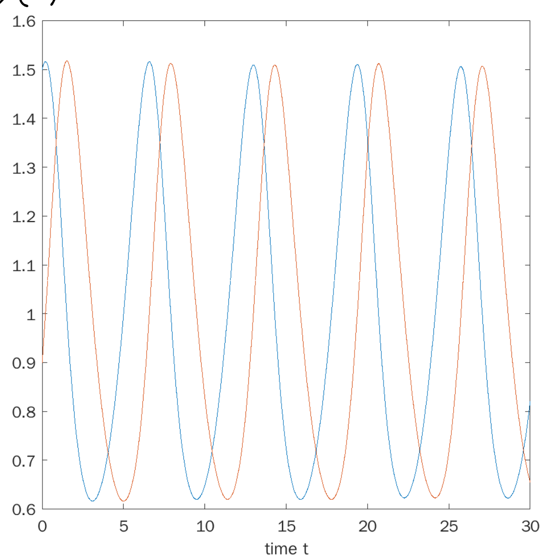
$$r(\log y - y) + m(\log x - x) = C(x,y)$$

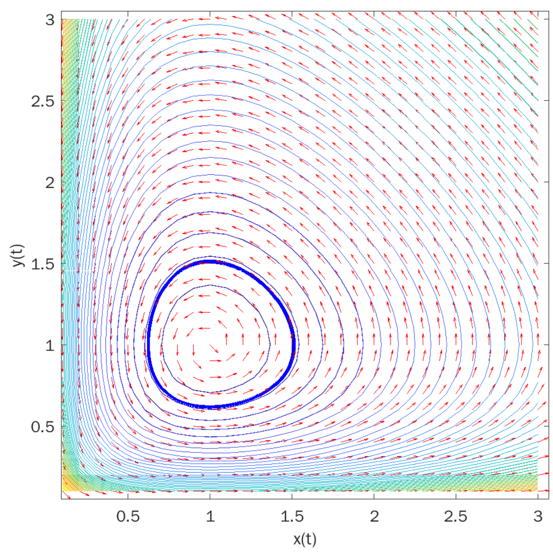
dove $C(x,y)$ é determinato dalle condizioni iniziali



$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) = (1.5, 0.9)$:

$x(t), y(t)$



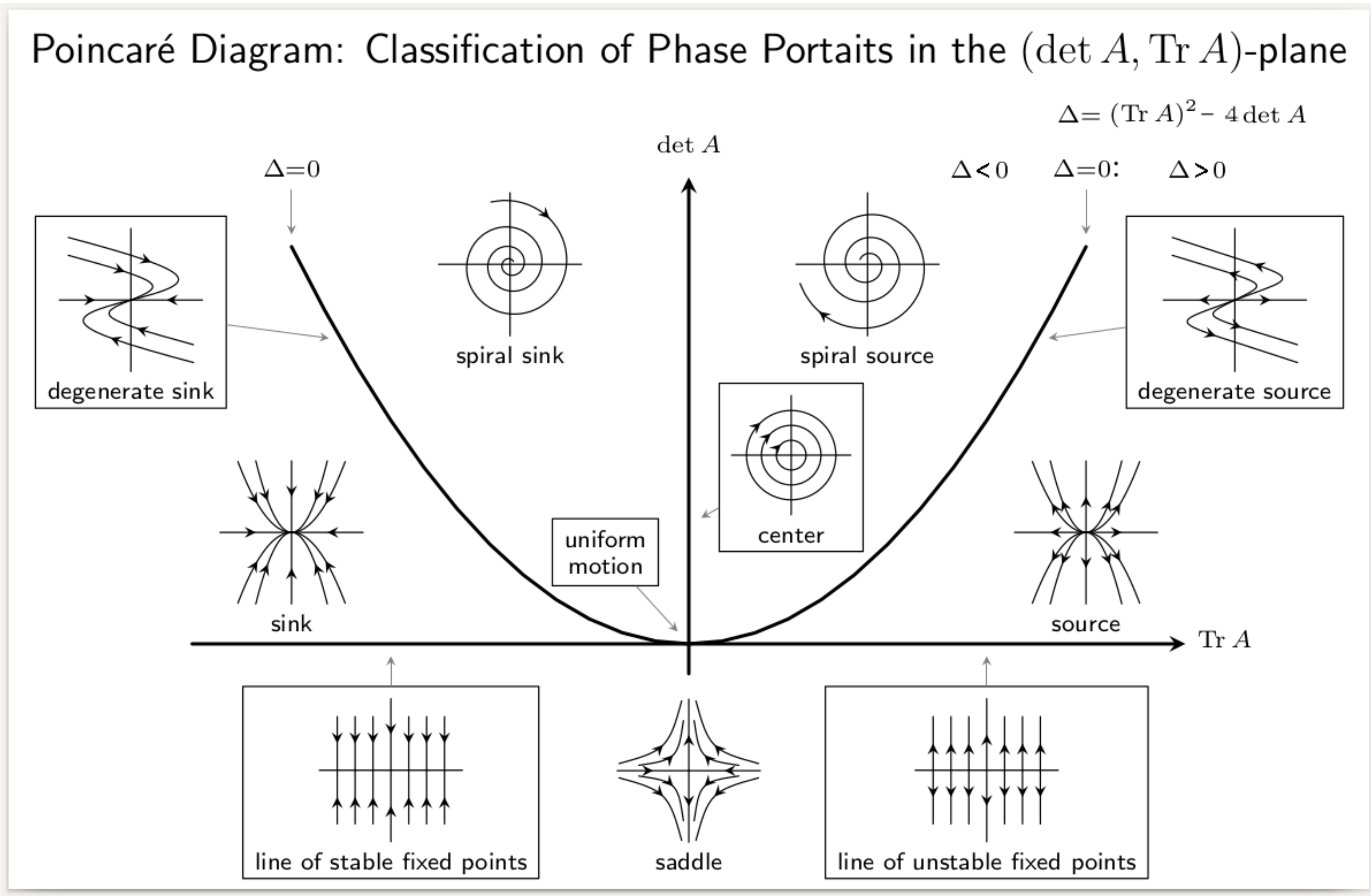


RICHIAMO SULLA STABILITÁ DEGLI EQUILIBRI (SISTEMA PLANARE)

Dato il sistema di ODE $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$, e dato

(x_0, y_0) un suo equilibrio, si ha

$$\xrightarrow[\text{LINEARIZZAZIONE}]{} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix}}_{A} (x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$



Modelli Lotka - Volterra generalizzati

Sia:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{q}\right) - c \cdot \phi(N) \cdot P \\ \dot{P} = a\,\phi(N) \cdot P - b \cdot P \end{cases}}$$

Con:

$\phi(N) :=$ Risposta funzionale che assumiamo essere già a-dimensionalizzata.

$[N] = [P] = [q] :=$ # individui

$[t] :=$ tempo

$[r] = [a] = [b] = [c] = [t]^{-1}$

<u>Caso predazione di tipo 1:</u>

$$\boxed{\begin{cases} \dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{q}\right) - c \cdot \gamma \cdot N \cdot P \\ \dot{P} = a \cdot \gamma \cdot N \cdot P - b \cdot P \end{cases}}$$

con $r, a, b, c, q > 0$, $[\gamma] = [N]^{-1}$.

$\Rightarrow \exists$ riparametrizzazione t.c. il modello diventi:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - xy \\ \dot{y} = \alpha xy - \beta y \end{cases}, \quad \alpha, \beta > 0$$

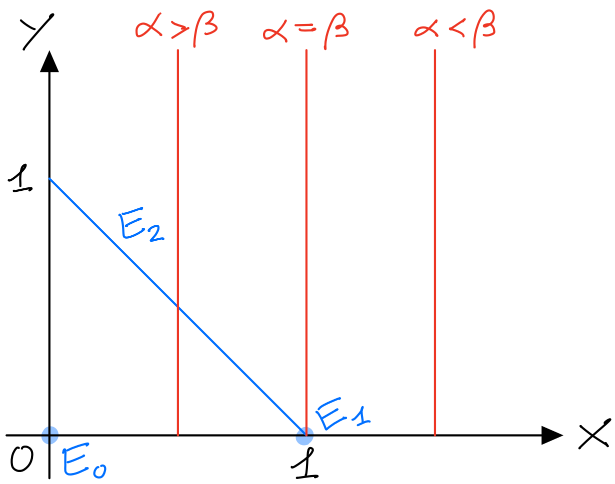
- <u>Equilibri:</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-y-x) = 0 \\ \dot{y} = y(\alpha x - \beta) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow E_0 = (0,0)$ banale

$\Rightarrow E_1 = (1,0)$, $E_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow$ nel piano x,y si ha quindi:



- Stabilità:

$$D(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2x-y & -x \\ \alpha y & \alpha x - \beta \end{pmatrix}$$

1) $D(E_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \Rightarrow E_0$ é punto di sella

$\Rightarrow E_0$ é instabile

2) $D(E_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \alpha-\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \det = \beta - \alpha, \ \mathrm{tr} = \alpha - \beta - 1$

$\Rightarrow$ se $\beta > \alpha$, E_1 é stabile

$\Rightarrow$ se $\beta < \alpha$, E_1 é punto di sella ($\Rightarrow$ instabile)

3) $D(E_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} & -\frac{\beta}{\alpha} \\ \alpha-\beta & 0 \end{pmatrix}$ (solo nel caso $\beta < \alpha$!!!)

$\Rightarrow \det = \frac{\beta}{\alpha}(\alpha-\beta), \ \mathrm{tr} = -\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow E_2$ é stabile

MA caratterizzando gli equilibri si nota che:

1) $\frac{\beta}{\alpha} > 4(\alpha-\beta) \Rightarrow$ punto stabile

2) $\frac{\beta}{\alpha} < 4(\alpha-\beta) \Rightarrow$ spirale stabile

Caso predazione di tipo 2:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{N} = rN\left(1-\frac{N}{q}\right) - c\cdot\frac{N}{h+N}\cdot P \\ \dot{P} = \frac{a\cdot N\cdot P}{h+N} - d\cdot P \end{cases}}$$

con $r, a, h, c, q > 0$, $[h] = [N]$.

($h :=$ # prede aggiuntive per i predatori)

1) $r > a$ (le prede crescono più rapidamente dei predatori)

2) $d < a$ (la mortalità dei predatori è minore della loro riproduzione)

3) $h < q$ (le risorse disponibili per le prede sono maggiori di quelle dei predatori)

$\Rightarrow$ riparametrizzazione:

$$x = \frac{N}{q}, \quad y = \frac{P_c}{rq}, \quad \tau = at, \quad \beta = \frac{h}{q}, \quad \gamma = \frac{d}{a}, \quad \varepsilon = \frac{a}{r}$$

$\Rightarrow$ si ha:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{\varepsilon}\left(1 - x - \frac{y}{\beta + x}\right) \\ \dot{y} = y\left(\frac{x}{\beta + x} - \gamma\right) \end{cases}}$$

MODELLO DI ROSENZWIG – MC ARTHUR

con $\gamma, \beta < 1$, $\varepsilon \ll 1$ (il tasso di riproduzione delle prede è molto elevato)

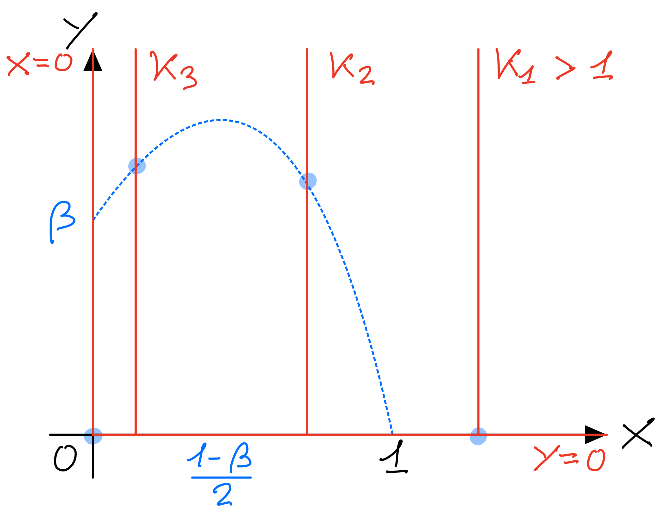
Equilibri e isocrine:

$y = 0,$

$x = 0,$

$y = (1 - x)(\beta + x),$

$$x = \frac{\beta \gamma}{1 - \gamma} =: K$$



$K > 1$:

$$E_0 = (0,0), \quad E_1 = (1,0)$$

$0 < K < 1$:

$$E_2 = \left(K, \frac{\beta}{(1-\gamma)^2}(1-\gamma-\beta\gamma)\right)$$

<u>Stabilità:</u>

$\Rightarrow$ Riscriviamo il sistema introducendo:

$$F(x) = \frac{x}{\beta + x}, \quad G(x) = (1-x)(\beta+x)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{F(x)}{\varepsilon}(G(x) - y) \\ \dot{y} = y(F(x) - y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D(x,y) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\varepsilon}(F'(x)(G(x)-y) + F(x)\cdot G'(x)) & -\frac{1}{\varepsilon}F(x) \\ \hline yF'(x) & F'(x) - \gamma \end{array}\right)$$

1) E_0:

$$D(E_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow E_0 \text{ é punto di sella (instabile)}$$

2) E_1:

$$D(E_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)} \\ 0 & \frac{(1-\gamma)(1-K)}{1+\beta} \end{pmatrix}$$

1) $K > 1 \Rightarrow E_1$ é stabile

2) $K < 1 \Rightarrow E_1$ é punto di sella (instabile)

3) $E_2 = (K, G(K))$ $(K < 1)$:

$$D(E_2) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\varepsilon}G'(K) & -\frac{\gamma}{\varepsilon} \\ G(K)F'(K) & 0 \end{pmatrix}$$

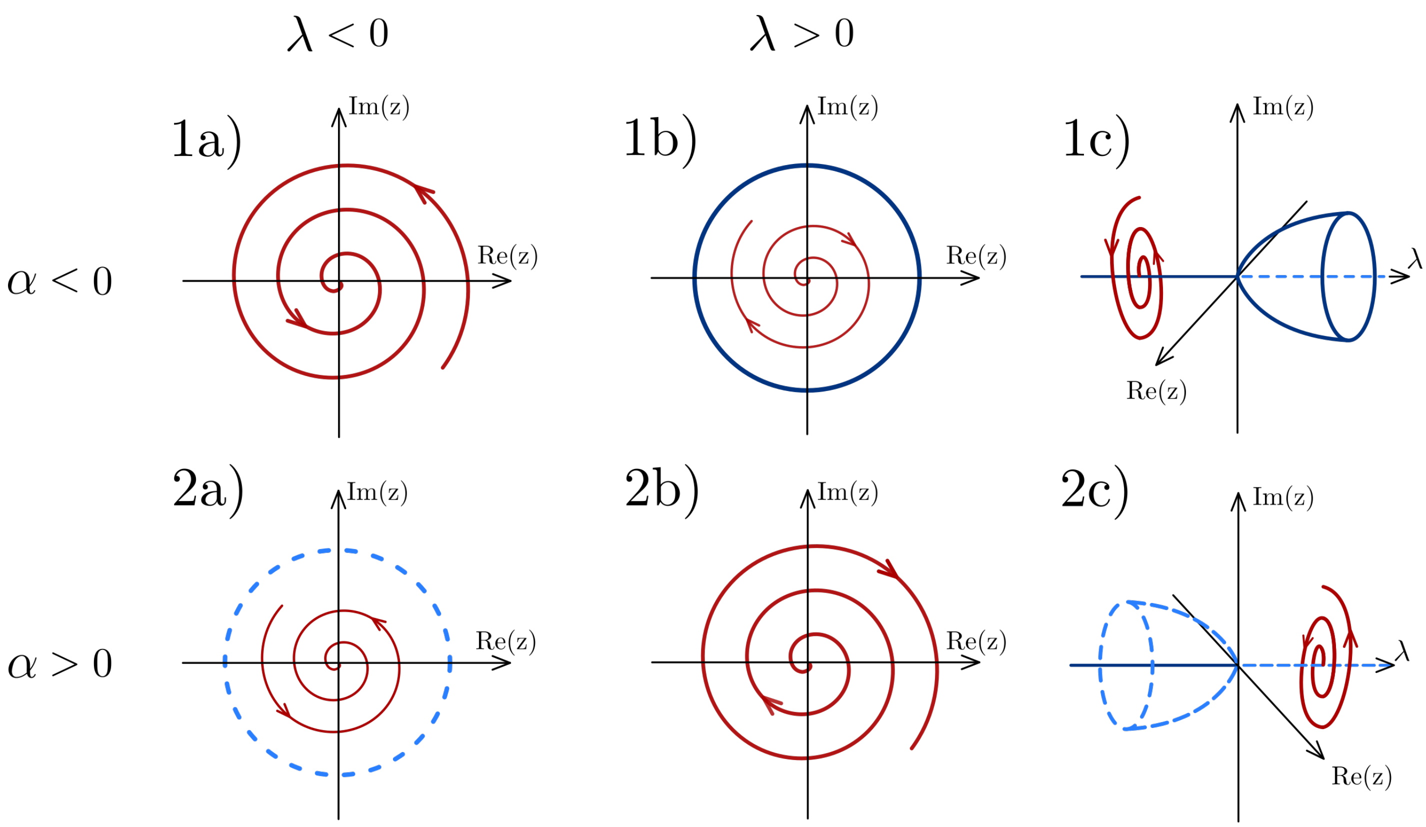
$$\Rightarrow \det = \frac{\gamma}{\varepsilon}G'(K)F'(K) > 0,$$

$$t_V = \frac{1}{\varepsilon}\gamma G'(K) = \frac{1}{\varepsilon}\gamma(1-\beta-2K)$$

1) $K > \frac{1}{2}(1-\beta) \Rightarrow E_2$ é stabile
2) $K = \frac{1}{2}(1-\beta) \Rightarrow$ si ha una biforcazione di Hopf
3) $K < \frac{1}{2}(1-\beta) \Rightarrow E_2$ é instabile

BIFORCAZIONI DI HOPF:

Data J_0 la Jacobiano di un sistema dinamico valutata ad un equilibrio $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e dati i primi $n-2$ autovalori con parte reale <0 ($Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-2$) e λ_{n-1}, λ_n t.c. $\lambda_{n-1} = i\beta$, $\lambda_n = -i\beta$, si ha che emerge una biforcazione di Hopf al variare dei parametri del sistema quando λ_n, λ_{n-1} attraversano l'asse immaginario.



Def (Biforcazione di Hopf e forma canonica):

Dato $\dot{x} = f(x, \mu)$ un sistema dinamico di $\dim = n \geq 2$ con parametro μ, e dato (x_0, μ_0) t.c.:

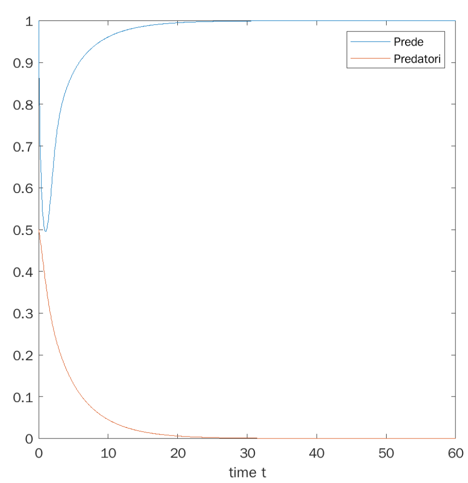
1) $f(x_0, \mu_0) = 0$
2) $D_f(x_0, \mu_0)$ ha una coppia di autovalori $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ e nessun altro autovalore con parte reale nulla
3) $\left.\frac{d}{d\mu} Re(\lambda_{1,2})\right|_{\mu=\mu_0} \neq 0$

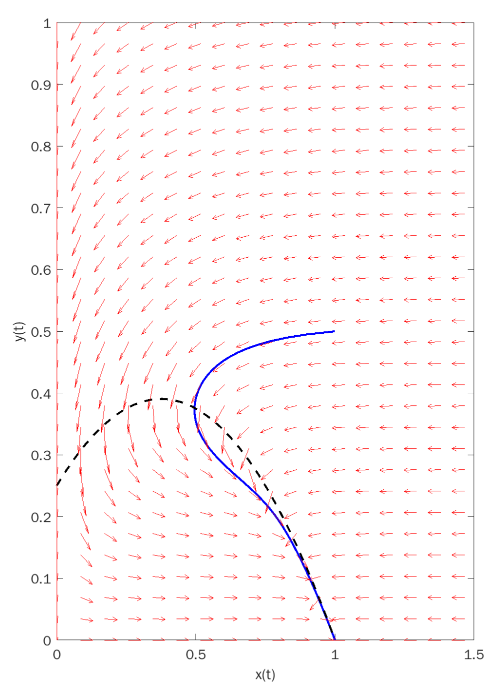
Si ha che in (x_0, μ_0) nasce un ciclo limite con ampiezza iniziale nulla e periodo $\frac{2\pi}{\beta}$ e tale punto è detto BIFORCAZIONE DI HOPF. La sua forma canonica è:

$$\boxed{\begin{gathered}\dot{z} = z\left((\lambda + i) + (\alpha + i\beta)|z|^2\right) \\ \text{con } z \in \mathbb{C},\ \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\end{gathered}}$$

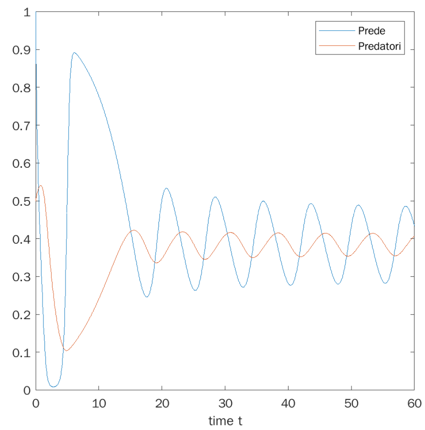
$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) = (1, \frac{1}{2})$

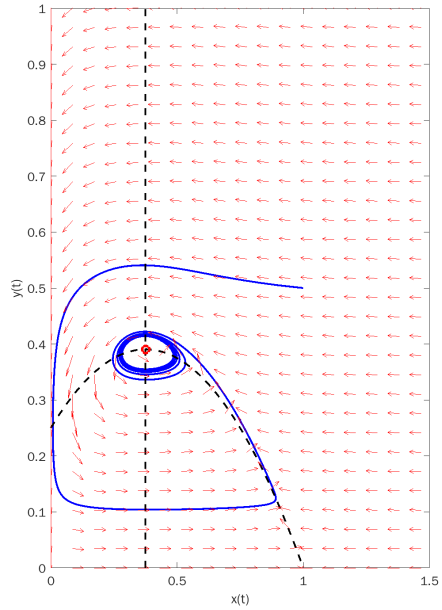
$\varepsilon = 0.2,\ \beta = 0.25,\ \gamma = 1$



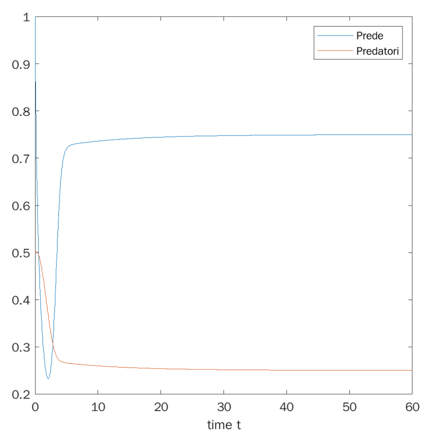


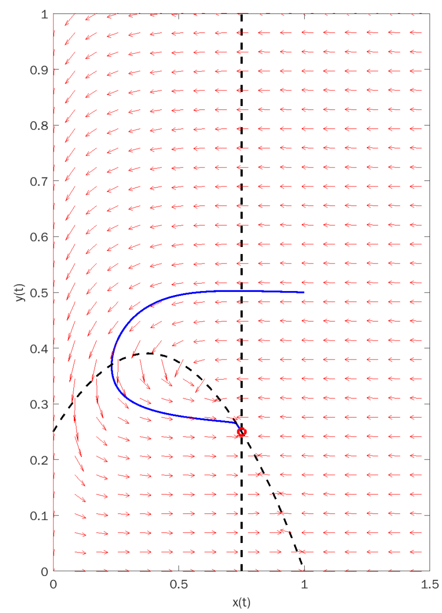
$$(X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0) = \left(1, \tfrac{1}{2}\right)$$
$$\varepsilon = 0.2, \quad \beta = 0.25, \quad \gamma = 0.6$$



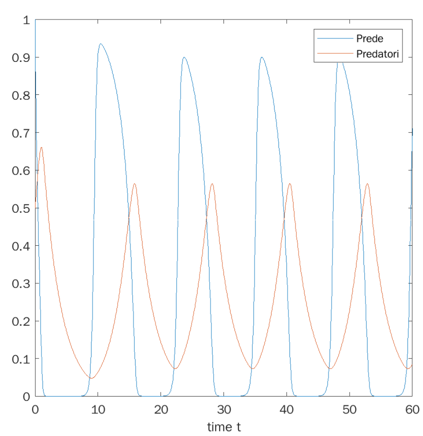


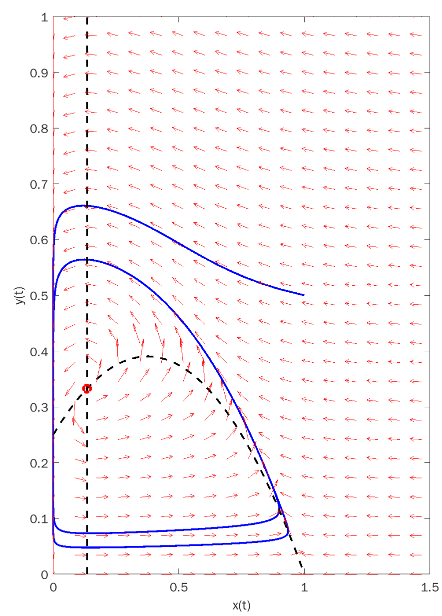
$$(X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0) = \left(1, \tfrac{1}{2}\right)$$
$$\varepsilon = 0.2, \quad \beta = 0.25, \quad \gamma = 0.75$$





$$(X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0) = \left(1, \tfrac{1}{2}\right)$$
$$\varepsilon = 0.2, \quad \beta = 0.25, \quad \gamma = 0.35$$





Modelli di Competizione / Cooperazione

Si tratta dei seguenti modelli:

1) Modello di Competizione:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N}{K_1} - b_1 \frac{P}{K_1}\right) \\ \frac{dP}{dt} = r_2 P \left(1 - \frac{P}{K_2} - b_2 \frac{N}{K_2}\right) \end{cases}$$

2) Modello di Cooperazione:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N}{K_1} + c_1 \frac{P}{K_1}\right) \\ \frac{dP}{dt} = r_2 P \left(1 - \frac{P}{K_2} + c_2 \frac{N}{K_2}\right) \end{cases}$$

Modelli di Kolmogorov

I modelli a 2 specie visti fino ad ora hanno la seguente struttura:

$$\begin{cases} \dot{x} = x\, f(x,y) \\ \dot{y} = y\, g(x,y) \end{cases}$$

Più in generale si denotano come Dinamiche di tipo Kolmogorov i modelli con n popolazioni della forma:

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$
$$\dot{x}_i = x_i\, f_i(\vec{x}) =: F_i(\vec{x})$$

con $f_i(\cdot) :=$ tassi di crescita (possono essere modellizzati come predazione / competizione / cooperazione)

Equilibri:

1) $\vec{x}_0 = \vec{0}$ (equilibrio banale, sempre presente)

2) $F_i(\vec{x}) = 0$

Stabilità lineare:

Dato un equilibrio $\vec{x}_*$ si ha:

$\Rightarrow D_* = \nabla\vec{F}(\vec{x}_*) \Rightarrow \dot{x} = D_* \cdot (\vec{x} - \vec{x}_*)$

$\Rightarrow$ la stabilità è data da $\lambda_i(D_*)$, $i = 1, \dots, n$:

1) se $\lambda_i(D_*) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$, $\vec{x}_*$ è STABILE

2) Il raggio spettrale fornisce informazioni rilevanti sugli autovalori.