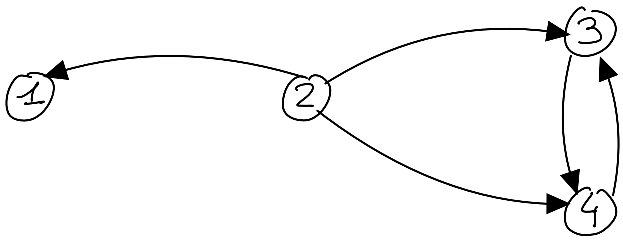
CATENE DI MARKOV RIDUCIBILI

N.B.

Quanto riportato di seguito, salvo diverso avviso, vale anche per stati numerabili

ESEMPIO:



$\Rightarrow$ classi di equivalenza della relazione $\longleftrightarrow$:

$\{1\}, \{2\}, \{3,4\}$

DEF (Stato Transitorio / Stato Ricorrente):

Diciamo che $x \in E$ è

1) TRANSITORIO (o TRANSIENTE) se $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) < 1$
2) RICORRENTE se $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1$

Sappiamo che su una CM irriducibile a stati finiti tutti gli stati sono ricorrenti

PROPOSIZIONE:

Sia $x \in E$. Se $\exists y \in E$ t.c. $x \to y \wedge y \not\to x$ allora x è transitorio

DIM.

Se $x \to y$, allora $\exists$ "cammino" $x = x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = y$ t.c. $q(x_i, x_{i+1}) > 0$ $\forall i = 0, \dots, m-1$. Non è restrittivo supporre $x_i \neq x$ $\forall i > 0$. Quindi $\mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \dots, X_m = y) = \prod_{i=0}^{m-1} q(x_i, x_{i+1}) > 0$.

$\Rightarrow \mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \dots, X_{m-1} \neq x, X_m = y) > 0$. Si ha quindi:

$$\mathbb{P}_x(T_x = +\infty) = \mathbb{P}_x(X_n \neq x \ \ \forall n \geq 1)$$

$$\geq \mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \dots, X_{m-1} \neq x, X_m = y, X_{m+s} \neq x \ \ \forall s \geq 1)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \dots, X_{m-1} \neq x, X_m = y, X_{m+1} \neq x, \dots, X_{m+n} \neq x)$$

(continuità dall'alto)

$$= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_y(X_1 \neq x, \dots, X_n \neq x) \cdot \mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \dots, X_{m-1} \neq x, X_m = y)$$

(proprietà di Markov generalizzata)

$\Rightarrow$ dato che $y \not\to x$, $\mathbb{P}_y(X_1 \neq x, \dots, X_n \neq x) = 1 \; \forall n$, quindi si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_y(X_1 \neq x, \dots, X_n \neq x) \cdot \mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = y) > 0$$

$\square$

DEF (Stato / Insieme Assorbente):

Uno stato $x \in E$ si dice ASSORBENTE se $q(x,x) = 1$. Quindi, se x è assorbente, $y \neq x$ e $x \leftrightarrow y$, allora y è transitorio.

Più in generale, $A \subsetneq E$ si dice ASSORBENTE se $\sum_{y \in A} q(x,y) = 1 \; \forall x \in A$

Definiamo, per $x \in E$, la seguente:

$$N_x := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}}$$

il numero di volte in cui la CM passa per x. Vale la seguente:

PROPOSIZIONE:

$\forall x \in E$, $k \geq 0$ vale la seguente:

$$\mathbb{P}_x(N_x > k) = \mathbb{P}_x(T_x < +\infty)^k$$

In particolare:

1) se x è ricorrente, $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 1$
2) se x è transitorio, $N_x \sim Geo(\mathbb{P}_x(T_x = +\infty))$

DIM.

$$\{N_x > k\} = \bigcup_{0 < \dots < n_k} \underbrace{\bigcap_{j=1}^{k} A_j}_{B_{n_1, \dots, n_k}} \quad \text{con} \quad A_j = \{X_{n_{j-1}+1} \neq x, \dots, X_{n_j - 1} \neq x, X_{n_j} = x\}$$

$\Rightarrow$ Gli eventi $B_{n_1, \dots, n_k}$ sono disgiunti

$\Rightarrow \mathbb{P}_x(N_x > k) = \sum_{0 < \dots < n_k} \mathbb{P}_x(B_{n_1, \dots, n_k}) \Rightarrow$ calcoliamo:

$$\mathbb{P}_x(B_{n_1, \dots, n_k}) = \mathbb{P}_x\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) = \mathbb{P}_x\left(A_k \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right) \cdot \mathbb{P}_x\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right)$$

$$= \mathbb{P}_x(X_{n_{k-1}+1} \neq x, \dots, X_{n_k - 1} \neq x, X_{n_k} = x \mid X_{n_{k-1}} = x, \dots) \cdot \mathbb{P}_x\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right)$$

$$= \mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \dots, X_{n_k - n_{k-1} - 1} \neq x, X_{n_k - n_{k-1}} = x) \cdot \mathbb{P}_x\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right)$$

$$= \mathbb{P}_x(T_x = n_k - n_{k-1}) \cdot \mathbb{P}_x\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right)$$

$$= \dots = \mathbb{P}_x(T = n_k - n_{k-1}) \, \mathbb{P}_x(T = n_{k-1} - n_{k-2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_x(T_x = n_1)$$

Quindi $\mathbb{P}_x(N_x > k) = \sum_{0 < \dots < n_k} \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}_x(T_x = n_j - n_{j-1})$ (con $n_0 = 0$)

$\Rightarrow$ sia $m_j = n_j - n_{j-1}$, si ha $\mathbb{P}_x(N_x > k) = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_k \\ \geq 1}} \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}_x(T_x = m_j)$

$= \left(\sum_{m \geq 1} \mathbb{P}_x(T_x = m) \right)^k = \left(\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) \right)^k$

$\square$

COROLLARIO:

Sia $x \in E$. Allora:

1) x ricorrente $\Rightarrow N_x = +\infty$ q.c.

2) x transitorio $\Rightarrow N_x \sim Geo(\mathbb{P}_x(T_x = +\infty))$, $\mathbb{E}_x(N_x) = \dfrac{1}{\mathbb{P}_x(T_x = +\infty)}$

PROPOSIZIONE:

Data N_x come sopra, si ha $\mathbb{E}_x(N_x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n(x,x)$ dove Q é la matrice di transizione.

DIM.

$N_x := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}} \Rightarrow \mathbb{E}_x(N_x) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}}\right)$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{\{X_n = x\}})$ (Convergenza Monotona)

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n(x,x)$

$\square$

COROLLARIO (Caratterizzazione degli stati transitori):

x é transitorio $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n(x,x) < +\infty$

PROPOSIZIONE:

Se $x \longleftrightarrow y$ allora:

$$x \text{ transitorio} \Leftrightarrow y \text{ transitorio}$$

DIM.

Supponiamo x ricorrente $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n(x,x) = +\infty$. Se mostriamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} Q^n(y,y) = +\infty$ segue che y é ricorrente. Per simmetria x ricorrente $\Leftrightarrow y$ ricorrente. Sappiamo che:

$\exists k, \ell$ t.c. $Q^k(x,y) > 0 \wedge Q^\ell(y,x) > 0$

$\Rightarrow Q^{n+k+\ell}(y,y) \geq Q^\ell(y,x)\, Q^n(x,x)\, Q^k(x,y)$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n(y,y) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} Q^{n+k+\ell}(y,y)$

$\geq Q^\ell(y,x) \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n(x,x)\, Q^k(x,y) = +\infty$

$\square$

Abbiamo visto che $\mathbb{P}_x(N_x > k) = \mathbb{P}_x(T_x < +\infty)^k$. Tale formula si generalizza alla seguente:

$$\forall x \neq z \quad \mathbb{P}_z(N_x > k) = \mathbb{P}_z(T_x < +\infty) \cdot \mathbb{P}_x(T_x < +\infty)^k$$

Quindi, se x é transitorio, si ha $\mathbb{E}_z(N_x) < +\infty$

ESEMPIO (Passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$):

si ha $q(x, x+1) = q(x, x-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ essendo irriducibile, si ha che $\forall x \in \mathbb{Z}$ x é ricorrente oppure x é transitorio. Notare che $(X_n)_{n \geq 0}$ ammette la seguente rappresentazione:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k + X_0$$

dove $(Z_k)_{k \geq 1}$ sono i.i.d., ind. da X_0 e t.c. $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \frac{1}{2}$.

Quindi $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$. É chiaro che $Q^n(x,x) = 0$ $\forall n$ dispari. Calcoliamo:

$$Q^{2n}(x,x) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} Z_k = 0\right) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{2n} \frac{Z_k + 1}{2}}_{\mathrm{Bin}(2n, \frac{1}{2})} = n\Big) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$$

Usiamo la Formula di Stirling:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Si ha:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} = 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} Q^{2n}(x,x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty$$

$\Rightarrow$ Nella passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$ tutti gli stati sono ricorrenti. Tuttavia si può dim. che:

$$\mathbb{E}_x(T_x) = +\infty$$

$$\left(\mathbb{P}_x(T_x = n) \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

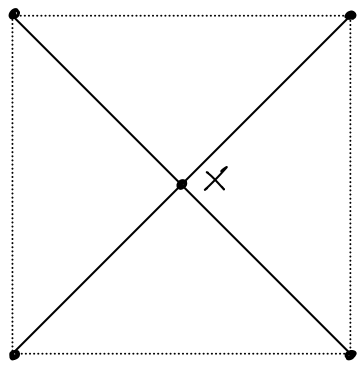
ESEMPIO:

siano $X^{(1)}, \dots, X^{(d)}$ copie ind. della passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$ e poniamo $X_n = (X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(d)}) \Rightarrow (X_n)_{n \geq 0}$ é CM su $\mathbb{Z}^d$ e, se $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$, si ha:

$$Q_d(x,y) = \prod_{i=1}^{d} q(x_i, y_i)$$

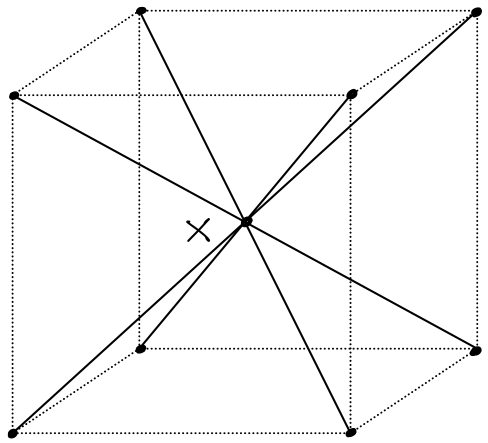
dove $q(\cdot,\cdot)$ sono le probabilità di transizione della passeggiata su $\mathbb{Z}$.

d = 2)



$\Rightarrow$ QUADRATO

d = 3)



$\Rightarrow$ CUBO

Si ha:

$$Q_d^{2n}(x,x) = \left(\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\right)^d \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^d \sim \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} Q_d^n(x,x) < +\infty \iff d \geq 3$$

$\Rightarrow$ la CM è transitoria per $d \geq 3$

CM RIDUCIBILI A STATI FINITI

Ricordiamo che $x \longleftrightarrow y \iff \exists\, n, m \geq 0$ t.c. $Q^n(x,y)>0$, $Q^m(y,x)>0$ è rel. d'equivalenza. Se $|E|<+\infty$, $E = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, con $C_i :=$ classi di equivalenza di $\longleftrightarrow$

DEF (*Classe di equivalenza chiusa*)

Una classe di equivalenza C si dice CHIUSA se $\forall x \in C$, $y \in E$ si ha $x \longrightarrow y \Rightarrow y \in C$

OSSERVAZIONE

C non è chiusa $\Rightarrow \exists\, x \in C$, $y \notin C$ t.c. $x \longrightarrow y \Rightarrow y \not\longrightarrow x$ $(y \notin C) \Rightarrow x$ è transitorio $\Rightarrow$ tutti gli elementi di C sono transitori

Sia C classe di equivalenza chiusa. Ordiniamo gli elementi di E in modo t.c. gli elementi di C siano i "primi". Si ha:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} \hat{Q} & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

Notare anche che:

$$Q^n = \left(\begin{array}{c|c} \hat{Q}^n & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

Quindi, se $x \in C$, tutte le probabilità $\mathbb{P}_x(X_n = y)$ dipendono SOLO DA $\hat{Q}$ e sono nulle se $y \notin C$. Quindi è possibile considerare la restrizione della catena a C. In questo modo si ottiene una CM con spazio degli stati C irriducibile.
Quindi, se $x \in C$:

$$\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1 \Rightarrow x \text{ è ricorrente}$$

Ricapitolando:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ C \text{ chiusa } \Rightarrow \forall x \in C \quad x \text{ è RICORRENTE} \\ 2)\ C \text{ NON chiusa } \Rightarrow \forall x \in C \quad x \text{ è TRANSITORIO} \end{array}}$$

Discutiamo ora le distribuzioni stazionarie. L'analisi si basa sulle seguenti osservazioni:

1) x transitorio $\Rightarrow \mathbb{P}_y(X_n = x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall y \in E$

$\Rightarrow$ se π è una distribuzione stazionaria (ds) allora si ha $\pi = \pi Q^n \ \forall n$. Se x è transitorio, $\pi(x) = \sum_{y \in E} \pi(y) \underbrace{Q^n(y,x)}_{\mathbb{P}_y(X_n = x)}$ $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \pi(x) = 0 \quad \forall x$ transitorio

2) se tutti gli stati fossero transitori avremmo:

$$1 = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x(X_n = y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \lightning$$

$\Rightarrow \exists$ stati ricorrenti

3) $C_1, \dots, C_k$ chiuse $\wedge$ $C_{k+1}, \dots, C_n$ NON chiuse $\Rightarrow$ denotiamo con $\tilde{\pi}_i$ $i = 1, \dots, k$ l'unica ds della CM ristretta a C_i e denotiamo con π_i la ds su E la cui restrizione a

C_i è l'unica ds della CM ristretta e t.c. $\pi_i(y)=0$ $\forall y \notin C_i$. Allora le ds della CM sono tutte e sole quelle della forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_i$ con $\alpha_i \geq 0$ t.c. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

PROBABILITÁ DI ASSORBIMENTO

Se $(X_n)_{n\geq 0}$ è una CM su E finito, denotiamo con $R_1, \dots, R_n$ le classi chiuse (o ricorrenti) e assumiamo $E \setminus (R_1 \cup \dots \cup R_n)$ sia NON vuoto. Vogliamo calcolare, su ogni stato $x \in E$, la prob. che la CM che parte da x sia "assorbita" dalla classe R_i, cioè:

$$\mathbb{P}_x(T_{R_i} < +\infty) \quad \text{con} \quad T_{R_i} := \min\{n : X_n \in R_i\}$$

Poniamo $u_x^{(i)} := \mathbb{P}_x(T_{R_i} < +\infty)$. Ovviamente si ha:

$$x \in R_i \Rightarrow u_x^{(i)} = 1$$
$$x \in R_j \Rightarrow u_x^{(i)} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Quindi le uniche incognite sono le $u_x^{(i)}$ per $x \in E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} R_i\right)$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{P}_x(T_{R_i} > n)} &= \mathbb{P}_x(X_1 \notin R_i, \dots, X_n \notin R_i) \\
&= \sum_{y \notin R_i} \mathbb{P}_x(X_1 = y, X_2 \notin R_1, \dots, X_n \notin R_i) \\
&= \sum_{y \notin R_i} \mathbb{P}_x(X_2 \notin R_i, \dots, X_n \notin R_i \mid X_1 = y) \cdot \mathbb{P}_x(X_1 = y) \\
&= \sum_{y \notin R_i} \mathbb{P}_y(X_1 \notin R_i, \dots, X_n \notin R_i)\, q(x,y) \\
&= \underline{\sum_{y \notin R_i} q(x,y) \cdot \mathbb{P}_y(T_{R_i} > n-1)}
\end{aligned}$$

Per $n \to +\infty$ si ha:

$$\mathbb{P}_x(T_{R_i} = +\infty) = \sum_{y \notin R_i} q(x,y)\, \mathbb{P}_y(T_{R_i} = +\infty)$$

cioè:

$$1 - u_x^{(i)} = \sum_{y \notin R_i} q(x,y)(1 - u_y^{(i)}) = \sum_{y \in E} q(x,y)(1 - u_y^{(i)})$$

$x \in R_i \Rightarrow u_y^{(i)} = 1$

$\Rightarrow \boxed{u_x^{(i)} = \sum_{y \in E} q(x,y)\, u_y^{(i)}}$ Equazione fondamentale delle probabilità di assorbimento

Si può dim. che tale sistema di equazioni ha una soluzione unica

ESEMPIO (Rovina del giocatore):

Siano $E = \{0, 1, \dots, N\}$, $q(x, x+1) = p \in (0,1)$ $\forall x = 1, \dots, N-1$, $q(x, x-1) = 1-p$ $\forall x = 1, \dots, N-1$, $q(0,0) = q(N,N) = 1$

$\Rightarrow$ si ha che la classe $\{1, \dots, N-1\}$ è transitoria, mentre $\{0\}, \{N\}$ sono classi ricorrenti.

Sia $u(x) := \mathbb{P}_x(T_N < +\infty)$, sappiamo che $u(N) = 1$, $u(0) = 0$

$\Rightarrow u(x) = (1-p)\, u(x-1) + p\, u(x+1)$

$\Rightarrow p[u(x+1) - u(x)] = (1-p)[u(x) - u(x-1)]$

$\Rightarrow u(x+1) - u(x) = \frac{1-p}{p}[u(x) - u(x-1)]$

Se $p = \frac{1}{2}$, $u(x+1) - u(x) = \text{cost.}$

Poiché $u(0) = 0$, $u(N) = 1$ necessariamente $u(x+1) - u(x) = \frac{1}{N}$

cioè $u(x) = \frac{x}{N}$ $\forall x = 0, \dots, N$.

Se $p \neq \frac{1}{2}$, $u(x+1) - u(x) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^x [u(1) - u(0)]$

$\Rightarrow u(x) = \sum_{i=0}^{x-1} (u(i+1) - u(i)) = [u(1) - u(0)] \sum_{i=0}^{x-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^i$

$= [u(1) - \cancel{u(0)}] \dfrac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)}$

$u(1)$ si trova imponendo $u(N) = 1$. Si ha $u(1) = \dfrac{1 - \frac{1-p}{p}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$

e quindi:

$$u(x) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$$