Sia $F: U \subseteq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ (U aperto) definita con:

1) $(q,\tilde{q}) \longmapsto F(q,\tilde{q})$

2) $\det D^2 f \neq 0$ (*)

$\Rightarrow$ la condizione (*) assicura che le equazioni

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}(q,\tilde{q}), \quad \tilde{p} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}}(q,\tilde{q})$$

definiscano implicitamente una trasformazione di coordinate $(\tilde{q},\tilde{p}) \longmapsto (q,p) = w(\tilde{q},\tilde{p})$

$\Rightarrow$ dal Teorema della Funzione Implicita, si ha che l'equazione per $\tilde{p}$ si può risolvere rispetto a q:

$$q = u(\tilde{q},\tilde{p})$$

e per sostituzione si ottiene $p = v(\tilde{q},\tilde{p})$

Proposizione:

Tale trasformazione di coordinate è simplettomorfismo

Dim.:

La condizione è $v \cdot du - \tilde{p} \cdot d\tilde{q} = df$:

$$\frac{\partial F}{\partial q}(u(\tilde{q},\tilde{p}),\tilde{q}) \cdot du + \frac{\partial F}{\partial \tilde{q}}(u(\tilde{q},\tilde{p}),\tilde{q}) \cdot d\tilde{q} = dF = df$$

q.e.d.

N.B.

Questo tipo di trasformazione NON comprende i rialzamenti ai momenti dato che u dipende dalle $\tilde{p}$.

Riscriviamo ora la Condizione di Lie:

$$p \cdot dq = -\tilde{q} \cdot d\tilde{p} + dg \quad \text{con} \quad g = f + \tilde{p} \cdot \tilde{q}$$

Consideriamo ora la funzione $S(q, \tilde{p})$ t.c. $\det D_S^2 \neq 0$, allora essa genera (con lo stesso metodo di sopra) una trasf. canonica:

$$p = v(\tilde{q}, \tilde{p}), \quad q = u(\tilde{q}, \tilde{p})$$

mediante le equazioni:

$$\tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}}(q, \tilde{p}), \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, \tilde{p})$$

<u>esercizio</u>:

1) Verificare che Id è generata da $S(q, \tilde{p}) = \tilde{p} \cdot q$.
2) Verificare che il rialzamento ai momenti è generata da $S(q, \tilde{p}) = \tilde{p} \cdot u(\tilde{q})$

<u>esercizio</u>:

Determinare la funzione generatrice S per la trasformazione lineare $(q, p) = (A\tilde{q}, A^{-T}\tilde{p})$ con $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow S(q, \tilde{p}) \text{ t.c. } \det D_S^2 \neq 0 \wedge p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q, \tilde{p}), \; \tilde{q}_i = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_i}(q, \tilde{p})$$

$$\Rightarrow p = A^{-T}\tilde{p} = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \tilde{q} = A^{-1}q = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}}$$

Integriamo l'equazione per $\tilde{q}$:

$$S(q, \tilde{p}) = \tilde{p} \cdot A^{-1}q + f(q)$$

Usando la 1ª equazione si ha:

$$\frac{\partial S}{\partial q}(q, \tilde{p}) = A^{-T}\tilde{p} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q}\left(\tilde{p} \cdot A^{-1}q + f(q)\right) = A^{-T}\tilde{p}$$

$$\Rightarrow A^{-T}\tilde{p} + f'(q) = p = A^{-T}\tilde{p} \Leftrightarrow f'(q) = 0 \Leftrightarrow f(q) = c$$

$$\Rightarrow \text{prendiamo } f(q) = 0 \Rightarrow S(q, \tilde{p}) = \tilde{p} \cdot A^{-1}q$$

esercizio:

Data $H(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + A\frac{p}{q}$ con $(q,p) \in \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^{>0}$, $A \in \mathbb{R}$.

1) Scrivere X_H

2) Det. $\lambda \neq 0$ t.c. $\tilde{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{\lambda} + q^2\right)$, $\tilde{q} = \arctan\left(\frac{\lambda q}{p}\right)$ sia simplettomorfismo

3) Scrivere $\tilde{H}$

4) Det. S funzione generatrice della trasformazione al punto 2 del tipo $S(p,\tilde{q})$

1) X_H:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p + \frac{A}{q}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q + \frac{Ap}{q^2}$$

$$X_H = \left(p + \frac{A}{q},\ -q + \frac{Ap}{q^2}\right)$$

2) Deve essere $\det \mathrm{Jac}\, \mathcal{C} = 1$:

$$\mathrm{Jac}\, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\left(\frac{\lambda q}{p}\right)^2}\cdot\frac{\lambda}{p} & \frac{1}{1+\left(\frac{\lambda q}{p}\right)^2}\cdot\left(-\frac{\lambda q}{p^2}\right) \\ q & \frac{p}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p\lambda}{\lambda^2 q^2 + p^2} & -\frac{\lambda q}{p^2 + \lambda^2 q^2} \\ q & \frac{p}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \mathrm{Jac}\, \mathcal{C} = \frac{p^2}{\lambda^2 q^2 + p^2} + \frac{\lambda q^2}{\lambda^2 q^2 + p^2}$$

$$\Rightarrow \text{deve essere } \frac{p^2 + \lambda q^2}{\lambda^2 q^2 + p^2} = 1 \iff \cancel{p^2} + \lambda q^2 = \lambda^2 q^2 + \cancel{p^2}$$

$$\Rightarrow \lambda q^2 - \lambda^2 q^2 = 0 \iff q^2(\lambda - \lambda^2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$$

3) $\lambda = 1 \Rightarrow H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) + \frac{Ap}{q}$

$$\Rightarrow \tilde{p} = \frac{1}{2}(q^2+p^2), \quad \tan\tilde{q} = \frac{q}{p} \quad \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{1}{\tan\tilde{q}}$$

$$\Rightarrow H(\tilde{q},\tilde{p}) = \tilde{p} + \frac{A}{\tan\tilde{q}}$$

4) $S = S(p,\tilde{q})$ t.c. :

$$\tilde{p} = \frac{1}{2}(q^2+p^2), \quad \tilde{q} = \arctan\frac{q}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} = \tilde{p} = \frac{1}{2}(q^2+p^2), \quad \frac{\partial S}{\partial p} = q = p \cdot \tan\tilde{q}$$

Integriamo la 2ª rispetto a p:

$$S(p,\tilde{q}) = \frac{p^2}{2}\tan\tilde{q} + f(\tilde{q})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} = \frac{p^2}{2}\cdot(\cancel{1} + \tan^2\tilde{q}) + f'(\tilde{q}) = \frac{1}{2}(q^2 + \cancel{p^2})$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{p^2}{2}\tan^2\tilde{q}} + f'(\tilde{q}) = \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}\cancel{(p^2\tan^2\tilde{q})}$$

$$\Rightarrow f'(\tilde{q}) = 0 \quad \Rightarrow f(\tilde{q}) = c, \text{ scegliamo } f(\tilde{q}) = 0$$

$$\Rightarrow S(p,\tilde{q}) = \frac{p^2}{2}\tan\tilde{q}$$

<u>esercizio</u>:

Data $I = \frac{1}{2\omega}(p^2+\omega^2q^2)$, $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega q}{p}\right)$

1) Dim. che è simplettomorfismo

2) Det. una funzione generatrice di tipo $S(p,\varphi)$ di tale simplettomorfismo

1) Usiamo le parentesi di Poisson $\{\}$:

$\{\varphi, I\} = 1$ è l'unico caso significativo

$$\Rightarrow \{\varphi, I\} = \left\{\arctan\left(\frac{\omega q}{p}\right), \frac{1}{2\omega}(p^2+\omega^2q^2)\right\}$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

$$= \underbrace{\frac{\omega}{\cancel{p}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\omega^2q^2}{p^2}}}_{\frac{\partial\varphi}{\partial q}} \underbrace{\frac{\cancel{p}}{\omega}}_{\frac{\partial I}{\partial p}} - \underbrace{\left(-\frac{\omega q}{p^2}\frac{1}{1+\frac{\omega^2q^2}{p^2}}\right)}_{\frac{\partial\varphi}{\partial p}} \underbrace{\omega q}_{\frac{\partial I}{\partial q}}$$

$$= \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{p^2 + \omega^2 q^2} = 1$$

$\Rightarrow$ è simplettomorfismo

Verifichiamo il risultato usando la condizione di Lie:

$$I\, d\varphi - p\, dq = df(q,p)$$

$$\Rightarrow \frac{p^2+\omega^2 q^2}{2\omega} \cdot d\left(\arctan\left(\frac{\omega q}{p}\right)\right) - p\,dq = \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

$$\Rightarrow \frac{p^2+\omega^2 q^2}{2\omega} \left(\frac{\omega}{p} \frac{1}{1+\frac{\omega^2 q^2}{p^2}} dq - \frac{\omega q}{p^2} \frac{1}{1+\frac{\omega^2 q^2}{p^2}} dp \right) =$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{p^2+\omega^2 q^2}}{2\cancel{\omega}} \left(\frac{\cancel{\omega} p}{\cancel{p^2+\omega^2 q^2}} dq - \frac{\cancel{\omega} q}{\cancel{p^2+\omega^2 q^2}} dp \right)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{2} dq - \frac{q}{2} dp - p\,dq = \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

$$\Rightarrow -\frac{p}{2} dq - \frac{q}{2} dp = \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{p}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{q}{2} \end{cases} \Rightarrow f(q,p) = -\frac{pq}{2} + c(q)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial q}(q,p) = -\frac{p}{2} + c'(q) = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow c'(q) = 0$$

$\Rightarrow c(q) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ scegliamo $c = 0$

$\Rightarrow f(q,p) = -\frac{qp}{2} \Rightarrow$ la 1-forma è chiusa

$\Rightarrow$ la trasformazione è simplettomorfa

2) Cerchiamo $S(p, \varphi)$ che generi il simplettomorfismo:
Invertiamo l'espressione di φ scrivendo q in funzione di $p, \varphi \Rightarrow$ $\underbrace{q = \frac{p}{\omega} \tan\varphi}_{\frac{\partial S}{\partial p}} \Rightarrow I = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2\omega}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{p^2 + \cancel{w^2}\frac{p^2}{\cancel{w^2}}\tan^2\varphi}{2w} = \underbrace{\frac{p^2(1+\tan^2\varphi)}{2w}}_{\frac{\partial S}{\partial \varphi}}$$

$\Rightarrow$ Integriamo la prima:

$$S(p,\varphi) = \frac{p^2}{2w}\tan\varphi + f(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{p^2}{2w}(1+\tan^2\varphi) + f'(\varphi) = I$$

$$\Leftrightarrow f'(\varphi) = f(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow S(p,\varphi) = \frac{p^2}{2w}\tan\varphi$$

Schema riassuntivo sulle trasformazioni:

$(q,p) \in M \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, $(\tilde{q},\tilde{p}) \in \tilde{M} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$

1) Rialzamento / Sollevamento:

$$(\tilde{q},\tilde{p}) = (\varphi(q), \mathrm{Jac}\,\varphi(q)\cdot p) \quad \text{con} \quad \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ diffeomorfismo}$$

2) Rialzamento ai momenti:

$$(\tilde{q},\tilde{p}) = (\varphi(q), \mathrm{Jac}\,\varphi(q)^{-T}\cdot p) \quad \text{con} \quad \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ diffeomorfismo}$$

3) Simplettomorfismi:

$\varphi: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ simplettomorfismo se e solo se

1) $\mathrm{Jac}\,\varphi \cdot J \cdot \mathrm{Jac}\,\varphi^T = J$

2) $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 1 \quad \forall i \neq j, \quad i,j = 1,\dots,n$ con

$$\varphi(q,p) = (\varphi_1(q,p), \dots, \varphi_{2n}(q,p))$$

N.B.

In $\mathbb{R}^2$ si ha:

1) Rialzamento:

$$(\tilde{q},\tilde{p}) = (f(q), f'(q)\cdot p) \quad \text{con} \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

2) Rialzamento ai momenti:

$$(\tilde{q}, \tilde{p}) = \left(f(q), \frac{1}{f'(q)} \cdot p \right) \quad \text{con } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

3) $\mathcal{C} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ simplettomorfismo se e solo se:

1) $\det D_{\mathcal{C}} = 1$

2) $\{ \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \} = 1$

Funzioni generatrici:

Tipo F	Tipo S
1) $F(q,\tilde{q}) \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} \\ \tilde{p} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}} \end{cases}$	1) $S(q,\tilde{p}) \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} \\ \tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}} \end{cases}$
2) $F(p,\tilde{p}) \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{\partial F}{\partial p} \\ \tilde{q} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{p}} \end{cases}$	2) $S(\tilde{q},p) \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{\partial S}{\partial p} \\ \tilde{p} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} \end{cases}$