

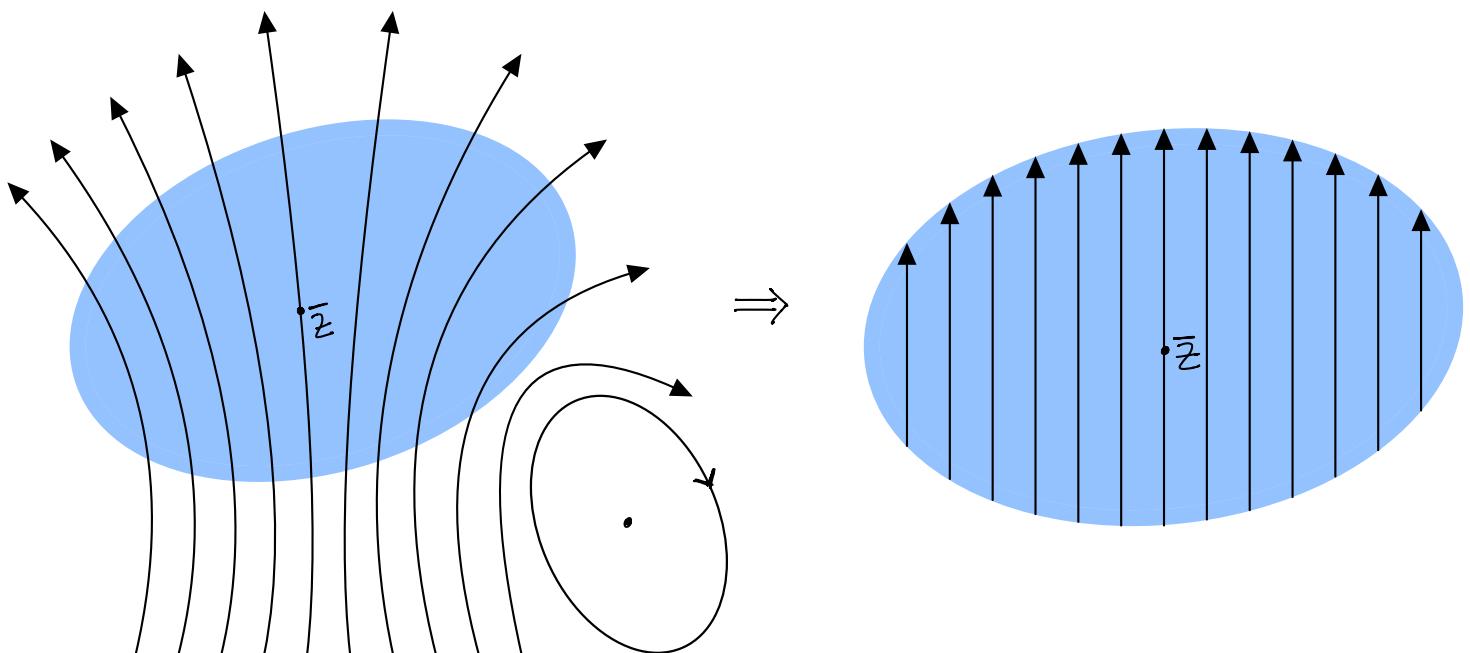
## Teorema (Rettificazione Locale):

Dati  $X: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  campo liscio,  $\bar{z} \in \Omega$  un punto non di equilibrio ( $\Leftrightarrow X(\bar{z}) \neq \vec{0}$ ) si ha che  $\exists$  sistema di coordinate  $(u_1, \dots, u_{m-1}, \tau)$  definito in un intorno di  $\bar{z}$  t.c. il sistema  $\dot{z} = X(z)$  sia coniugato a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_1 = 0 \\ \vdots \\ \dot{u}_{m-1} = 0 \\ \dot{\tau} = 1 \end{array} \right.$$

localmente in un intorno di  $\bar{z}$ .

$\Rightarrow$  le orbite del sistema  $\dot{u}_1 = 0 = \dots = \dot{u}_{m-1}, \dot{\tau} = 1$  sono rette parallele e le curve integrali le percorrono a velocità costante.



N.B.

Vale solo se  $\bar{z}$  non è equilibrio !!!

## Riparametrizzazioni in tempo:

Proposizione:

Dati  $X: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  campo liscio (non necessariamente completo) e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  liscia t.c.  $f(z) \neq 0$   $\forall z \in \Omega$ , consideriamo il campo  $\tilde{X}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  t.c.  $\tilde{X}(z) := f(z)X(z)$ . Allora  $\tilde{X}$  possiede le stesse orbite di  $X$ . Le soluzioni di  $\dot{z} = X(z)$ ,  $\tilde{z} = \tilde{X}(\tilde{z})$  sono diverse MA HANNO LE STESSE IMMAGINI, inoltre si potrebbe mostrare che le soluzioni  $\tilde{z}$  sono tutte delle riparametrizzazioni nel tempo  $t$  delle soluzioni  $z$  del campo originario:

$$\tilde{z}(t) = z(\gamma(t)) \text{ con } \gamma: (t_0, t_1) \rightarrow (s_0, s_1)$$

N.B.

È INDISPENSABILE che sia  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$ !!! (altrimenti  $\tilde{X}$  potrebbe avere degli equilibri che  $X$  non aveva, che sarebbero gli zeri di  $f$ )

Esempio:

1) Tracciare il ritratto in fase del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{y^2 + \cos x} \cdot x + 2y e^{y^2 + \cos x} \\ \dot{y} = 2x e^{y^2 + \cos x} + e^{y^2 + \cos x} \cdot y \end{cases}$$

$\Rightarrow$  dato che  $f(x,y) = e^{y^2 + \cos x} \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ , il ritratto in fase equivale a quello del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$\Rightarrow \vec{e} = \vec{0} \text{ è PUNTO DI SELLA}$

$\Rightarrow$  autovettori:

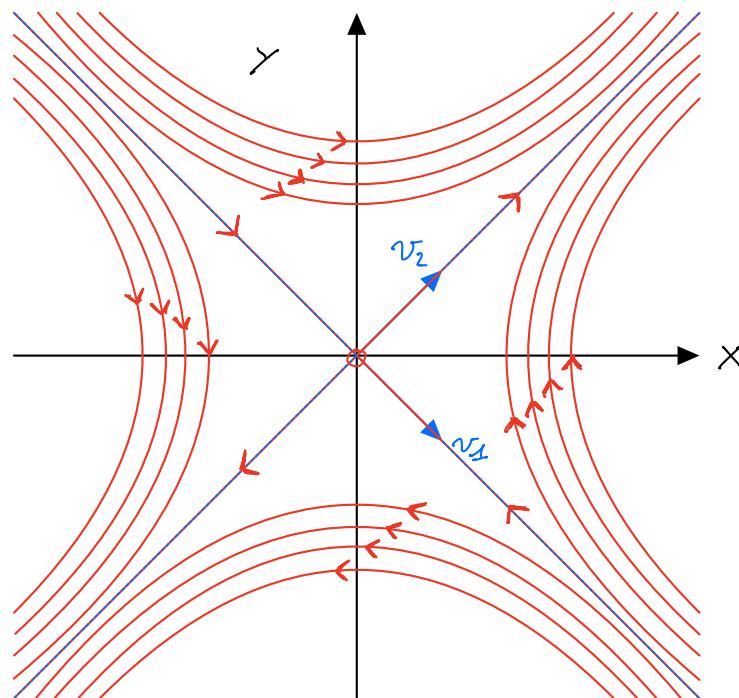
$$E_A(3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y \Rightarrow E_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle v_2 \rangle$$

$$E_A(-1) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -y \Rightarrow E_A(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle v_1 \rangle$$

Ritratto in fase:



2) Consideriamo le equazioni di Newton per un punto materiale in  $\mathbb{R}^3$  di massa  $m > 0$  in un campo di forze  $F$   
 $\Rightarrow F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow m \ddot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$

Scrivere il sistema in coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \theta \\ x_2 = \rho \sin \theta \\ x_3 = z \end{cases} \quad (\text{Cambiamento di coordinate nello spazio delle configurazioni})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x}_2 = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{x}_3 = \dot{z} \end{cases} \quad (\text{Sallevamento allo spazio delle fasi})$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{\rho} \cos \theta - 2\dot{\rho} \dot{\theta} \cos \theta - \rho \ddot{\theta} \sin \theta - \rho \dot{\theta}^2 \cos \theta = \frac{F_1(x)}{m} \\ \ddot{x}_2 = \ddot{\rho} \sin \theta + 2\dot{\rho} \dot{\theta} \sin \theta + \rho \ddot{\theta} \cos \theta - \rho \dot{\theta}^2 \sin \theta = \frac{F_2(x)}{m} \\ \ddot{x}_3 = \ddot{z} = \frac{F_3(x)}{m} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  per esplicitare  $\ddot{\rho}, \ddot{\theta}$  consideriamo:

$$\begin{aligned} (1) \cos \theta + (2) \sin \theta \\ - (1) \sin \theta + (2) \cos \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = \frac{1}{m} (F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta) \\ 2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} = \frac{1}{m} (-F_1 \sin \theta + F_2 \cos \theta) \\ \ddot{z} = \frac{F_3(x)}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} = \frac{1}{m} (F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta) + \rho \dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{m\rho} (-F_1 \sin \theta + F_2 \cos \theta) - \frac{2\dot{\rho}\dot{\theta}}{\rho} \\ \ddot{z} = \frac{F_3(x)}{m} \end{cases}$$

## Integrali primi:

Notiamo che  $A \subseteq \Omega$  è invariante se e solo se si ha  $\phi_t^X(A) \subseteq A \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

### Esempi:

- 1) le orbite di  $X$ , e tutte le loro unioni, sono invarianti
- 2) sottospazi invarianti stabili / instabili / centrali.

## Def. (Integrale primo):

Data  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , si dice che  $f$  è **INTEGRALE PRIMO** di  $X$  se tutti gli insiemi di livello di  $f$  sono insiemi invarianti per il flusso di  $X$ .

$\Rightarrow$  si ha:

$f$  è I.P. di  $X \iff \forall t \mapsto z(t)$  curva integrale di  $X$ , si ha  $t \mapsto f(z(t))$  è costante.

$\iff f$  è costante lungo tutte le soluzioni di  $\dot{z} = X(z)$

$$\iff f \circ \phi_t^X = f \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

### Esempi (banali):

- 1) le funzioni costanti sono I.P. di ogni campo  $X$
- 2) dati  $X: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{z} \in \Omega$  non di EQUILIBRIO ( $X(\bar{z}) \neq 0$ ), sappiamo che localmente (in un intorno di  $\bar{z}$ ) il sistema si scrive come:

$$\dot{z}_1 = \dots = \dot{z}_{n-1} = 0, \quad \dot{z}_n = 1 \quad (\text{Teorema rettificazione totale})$$

$\Rightarrow u_1, \dots, u_{n-1}$  sono I.P. locali di  $X$ , inoltre sono "indipendenti"

Studieremo gli I.P. NON COSTANTI e GLOBALI (definiti su tutto  $\Omega$ ).

Def. (Derivata di Lie):

Data  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  DIFFERENZIABILE, si definisce la DERIVATA DI LIE DI  $f$  (rispetto al campo  $X$ ) come la funzione  $\mathcal{L}_X f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  t.c. :

$$\mathcal{L}_X f(z) := X(z) \cdot \nabla f(z) = \sum_{s=1}^n X_s(z) \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial z_s}$$

Proposizione:

Dati  $X: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  DIFFERENZIABILE, vale:

1)  $\forall t \mapsto z(t)$  curva integrale di  $X$ , si ha che :

$$\frac{d}{dt} f(z(t)) = \mathcal{L}_X f(z(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovvero, equivalentemente :

$$\frac{d}{dt} (f \circ \phi_t^X) = (\mathcal{L}_X f) \circ \phi_t^X \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2)  $f$  è I.P. di  $X \Leftrightarrow \mathcal{L}_X f = 0$  su tutto  $\Omega$

Dim.:

1) Data  $t \mapsto z(t)$  soluzione di  $\dot{z} = X(z)$ , calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(z(t)) &= \nabla f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) = \nabla f(z(t)) \cdot X(z(t)) \\ &= \mathcal{L}_X f(z(t)) \end{aligned}$$

2)  $f$  è I.P. di  $X \Leftrightarrow \forall z(t)$  curva integrale si ha che

$$f(z(t)) = \text{costante} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} f(z(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}_X f(z(t)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_X f = 0 \text{ su tutto } \Sigma$$

q.e.d.

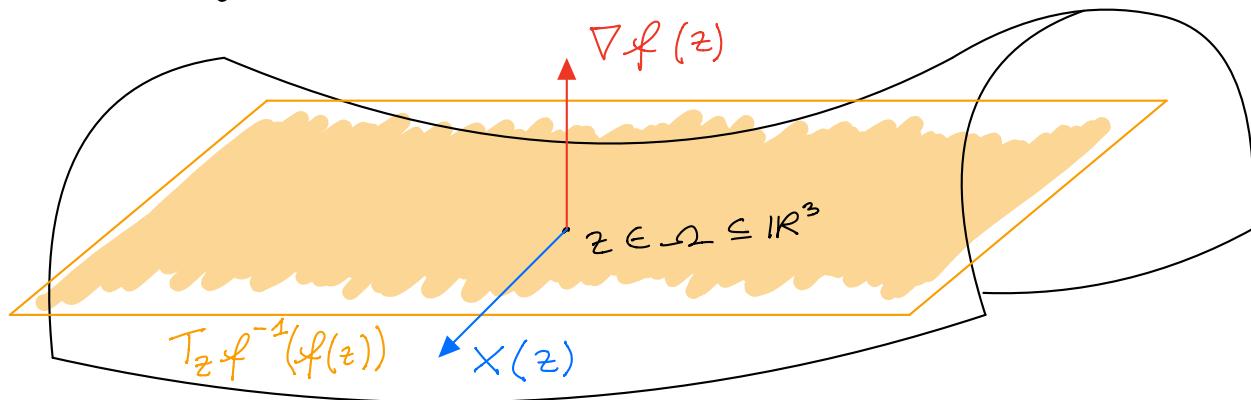
Interpretazione geometrica:

Supponiamo di avere un I.P. di un campo  $X$  in dimensione 3, gli insiemi di livello saranno, generalmente, SUPERFICI di dim. 2 e possiederanno un piano tangente nel punto  $z \in \Sigma$ , si avrà quindi:

$$f \text{ è I.P. di } X \Leftrightarrow \mathcal{L}_X f = X \cdot \nabla f = 0 \text{ su } \Sigma$$

$$\Leftrightarrow X \text{ è tangente alle superfici di livello di } f$$

in ogni punto di  $\Sigma$ .



Esempi (significativi):

1) Dati  $m > 0$ ,  $K > 0$ , consideriamo  $m \ddot{x} = -Kx$ ,  $x \in \mathbb{R}$   
(equazione dell'oscillatore armonico)

$\Rightarrow$  possiamo separare il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{K}{m}x \end{cases}$$

$\Rightarrow$  si scriverà, d'ora in poi,  $\dot{x}$  per denotare NON SOLO la

derivata di una soluzione, bensì anche come variabile indipendente nello spazio delle fasi (che sarà il piano  $x, \dot{x}$ )

$\Rightarrow$  il campo associato è  $X(x, \dot{x}) = (\dot{x}, -\frac{k}{m}x)^T$

$\Rightarrow$  consideriamo la **FUNZIONE ENERGIA** del sistema:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$  mostriamo che  $E$  è l.p. di  $X$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X E(x, \dot{x}) &= X \cdot \nabla E = \dot{x} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{k}{m}x \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} \\ &= \dot{x}(kx) - \frac{k}{m}x(m\dot{x}) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow E$  è l.p. di  $X$

$\Rightarrow$  insiem di livello di  $E$ :

$$1) E^{-1}(c) = \emptyset \quad \forall c < 0$$

$$2) E^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$$

$$3) E^{-1}(c) = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = c\}$$

ellissi centrate in  $(0, 0)$

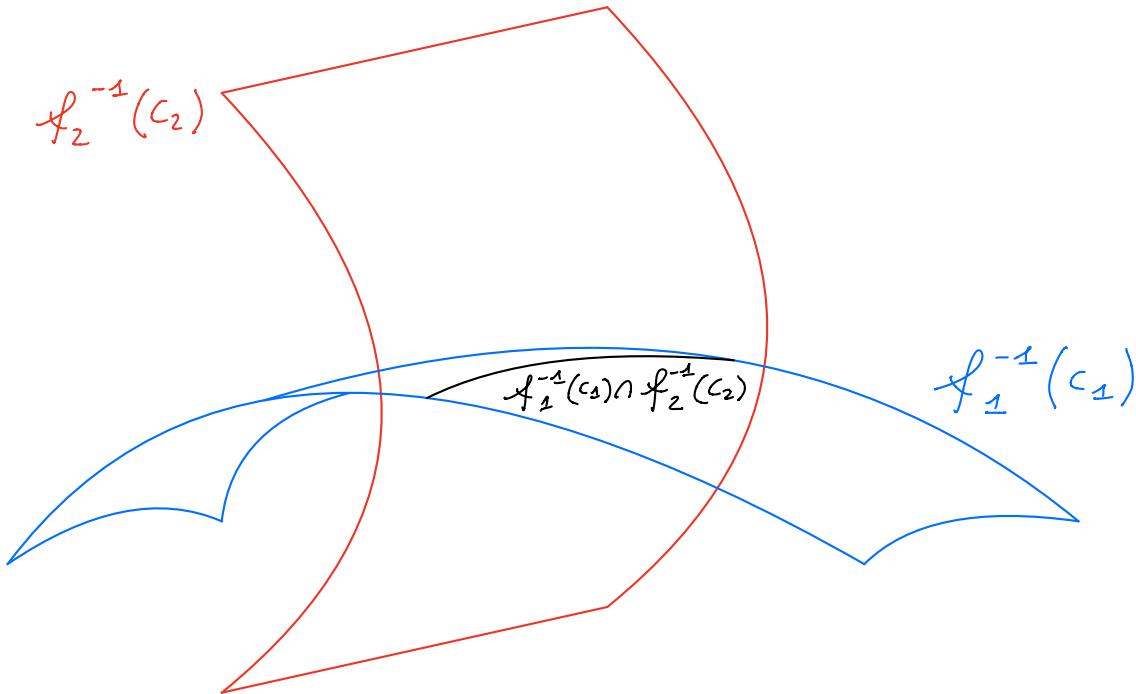
$\Rightarrow$  in questo esempio, conoscere gli insiem di livello di  $E$  consente di tracciare il ritratto in fase.

Def. (Indipendenza funzionale):

Date  $f_1, \dots, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  DIFFERENZIABILI, esse si dicono **FUNZIONALMENTE INDEPENDENTI** se  $\nabla f_1(z), \dots, \nabla f_k(z)$  sono linearmente indipendenti  $\forall z \in \Omega$

Se  $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e si hanno  $n-1$  l.p. indipendenti  $f_1, \dots, f_{n-1}$ , allora le intersezioni degli insiem di

livello  $f_1^{-1}(c_1) \cap \dots \cap f_{n-1}^{-1}(c_{n-1})$  ( $c_i \in \mathbb{R}$ ) sono curve regolari (oggetti di dim. 1 in dim.  $n$ ) (fusioni indipendenti + Teorema della Funzione Implicita) e determinano il ritratto in fase. In tal caso si dice che il sistema è **INTEGRABILE PER QUADRATURE**.



Esempio:

Dati  $m > 0$ ,  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$ , considera:

$$m\ddot{x} = -\nabla V(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

(equazioni di Newton per un p.m. in dim. 3 in un campo di forze conservativa  $F = -\nabla V$ )

1)  $E: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 + V(x)$

mostrare che  $E$  è l.p. di  $\dot{x}$

2)  $\ell_3: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ell_3(x, \dot{x}) = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1$

mostrare che  $\ell_3$  è l.p. di  $\dot{x}$  se  $V(x) = V(|x|)$

3) mostrare che  $E, \ell_3$  sono funzionalmente indipendenti quasi ovunque.

$$\Rightarrow 1) \begin{cases} \dot{x} = v \\ \ddot{v} = \dot{\dot{x}} = -\frac{\nabla V(x)}{m} \end{cases} \Rightarrow X(x, \dot{x}) = (\dot{x}, -\frac{\nabla V(x)}{m})^T$$

$$\Rightarrow E(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 + V(x), \quad (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_X E = X \cdot \nabla E = \dot{x} \cdot \nabla_x E - \frac{\nabla V(x)}{m} \cdot \nabla_{\dot{x}} E \\ \stackrel{!}{=} \dot{x} \cdot \nabla V(x) - \frac{\nabla V(x)}{m} \cdot m \dot{x} = 0$$

$\Rightarrow E$  è l.p. di  $X$

$\Rightarrow 2)$  Suppongo  $V(x) = V(|x|)$ . Calcoliamo:

$$l_3 = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1$$

$$\Rightarrow \nabla V(x) = V'(|x|) \cdot \nabla(|x|) = V'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}$$

$$\Rightarrow X(x, \dot{x}) = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, -\frac{1}{m} V'(|x|) \frac{x_1}{|x|}, \\ -\frac{1}{m} V'(|x|) \frac{x_2}{|x|}, -\frac{1}{m} V'(|x|) \frac{x_3}{|x|})^T$$

$$\Rightarrow \nabla l_3(x, \dot{x}) = (\dot{x}_2, -\dot{x}_1, 0, -x_2, x_1, 0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_X l_3 = X \cdot \nabla l_3 = \dot{x}_1 \cancel{\dot{x}_2} - \cancel{\dot{x}_2} \dot{x}_1 + \frac{1}{m} V' \cancel{\frac{x_1 x_2}{|x|}} - \frac{1}{m} V' \cancel{\frac{x_2 x_1}{|x|}}$$

$\Rightarrow l_3$  è l.p. di  $X$

$\Rightarrow 3)$  Calcoliamo:

$$\nabla E = (\partial_{x_1} V(x), \partial_{x_2} V(x), \partial_{x_3} V(x), m \dot{x}_1, m \dot{x}_2, m \dot{x}_3)$$

$$\nabla l_3 = (\dot{x}_2, -\dot{x}_1, 0, -x_2, x_1, 0)$$

$\Rightarrow$  per il Teorema di Kronecker si ha:

$$\det \begin{pmatrix} m \dot{x}_2 & m \dot{x}_3 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} = -m x_1 \dot{x}_3 \neq 0 \Leftrightarrow x_1 \neq 0 \neq \dot{x}_3$$

$\Rightarrow E, l_3$  indipendenti su  $\mathcal{D}$  eccetto che sull'insieme  
 $x_1 = 0 \vee \dot{x}_3 = 0$  (unione di 2 iperspazi di dim. 5)

$\Rightarrow E, l_3$  sono indipendenti quasi ovunque.

Esempio:

Consideriamo il sistema in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -2x^2 \end{cases}$$

Dato  $f = \alpha x^2 + \beta y^2$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

- 1) trovare  $\alpha, \beta$  t.c.  $f$  sia l.p.
- 2) disegnare il ritratto in fase del sistema.

$$\Rightarrow 1) \mathcal{L}_X f = \nabla f \cdot X = 2\alpha x^2 y - 4\beta x^2 y = x^2 y (2\alpha - 4\beta)$$

$$\Rightarrow \text{dove essere } 2\alpha - 4\beta = 0 \iff \alpha = 2\beta$$

$$\Rightarrow f = \beta(2x^2 + y^2) \text{ è l.p. di } X$$

$\Rightarrow 2)$  Ritratto in fase:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -2x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  il sistema è di dim. 2 e ha 1 l.p., ciò è sufficiente a tracciare il ritratto in fase.

$\Rightarrow$  scelgo  $\alpha = 2, \beta = 1$  e ottengo:

$f(x, y) = 2x^2 + y^2$  è l.p., gli insiem di livello sono:

$$f^{-1}(c) = \phi \quad \forall c < 0$$

$$f^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$$

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = c\} \quad \forall c > 0$$

sono ellissi centrate in  $(0, 0)$  e aventi semiasse  $(0, \sqrt{c}), (\sqrt{\frac{c}{2}}, 0)$

$\Rightarrow$  tali ellissi sono invarianti per il flusso e le orbite sono al loro interno.

Equilibri del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -2x^2 \end{cases} \Rightarrow \text{equilibri: } \bar{z} = (0, y), y \in \mathbb{R}$$

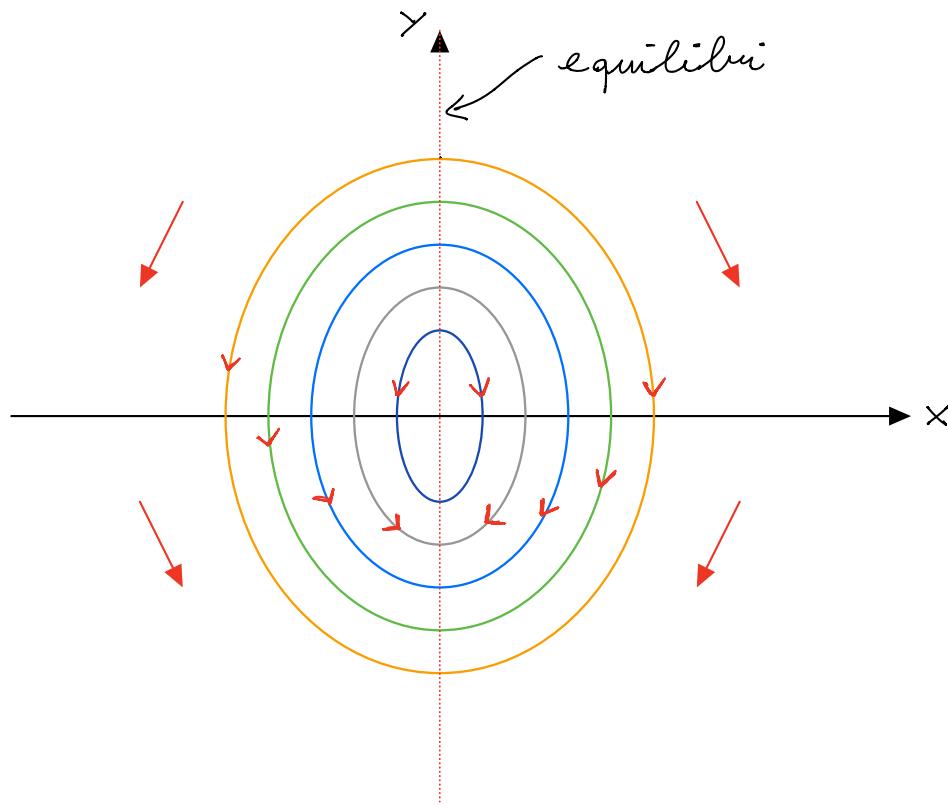
$\Rightarrow$  l'asse  $y$  è formato da equilibri (distinti)

$\Rightarrow$  le orbite non di equilibrio non intersecano gli equilibri, quindi potranno percorrere al massimo metà dell'ellisse MA saranno obbligate comunque a "sfiorare" gli equilibri

Orientamento delle orbite:

$$X = (xy, -2x^2) \Rightarrow -2x^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow X$  PUNTA SEMPRE verso il basso



## Proposizione:

Dato  $X: \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  campo vettoriale e  $\bar{z} \in \mathcal{S}$  un equilibrio attrattivo, si ha che ogni I.P. continuo di  $X$  è costante in un intorno di  $\bar{z}$ .  
(REPULSIVO)

Dim.:

Per def. di equilibrio attrattivo,  $\exists V \subseteq \mathcal{S}$  intorno di  $\bar{z}$   
(REPULSIVO)

t.c. ogni curva integrale di  $X$  con  $z(0) \in V$  soddisfa  
 $\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (t \rightarrow -\infty)}} z(t) = \bar{z}$ . Sia  $z_0 \in V$  e sia  $z(t)$  soluzione del PdC

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \Rightarrow \text{sia } f \text{ I.P. di } X \text{ continuo.}$$

Considera  $\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (t \rightarrow -\infty)}} f(z(t)) = f(\bar{z})$  (limite di una costante),

tuttavia, dato che  $f$  è continua:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (t \rightarrow -\infty)}} f(z(t)) = f\left(\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (t \rightarrow -\infty)}} z(t)\right) = f(\bar{z})$$

$$\Rightarrow f(z_0) = f(\bar{z}) \Rightarrow f \text{ è costante in } V$$

q.e.d.

$\Rightarrow$  se un campo  $X$  ammette un I.P. continuo e NON costante (neanche a tratti), allora tale  $X$  NON HA EQUILIBRI ATTRATTIVI. Per esempio, l'equazione  $m\ddot{x} = -\nabla V(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^3$ ) ammette I.P.  $E(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 + V(x)$  che è continua e non costante anche localmente (neanche se  $V(x)$  fosse costante, quindi  $m\ddot{x} = -\nabla V(x)$  NON HA equilibri attrattivi, per nessuna scelta di  $V(x)$  (e neanche equilibri repulsivi))