Dati (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) consideriamo $X_1 \times X_2$. Come definisco una topologia che combini τ_1, τ_2 per ottenere una topologia su $X_1 \times X_2$?

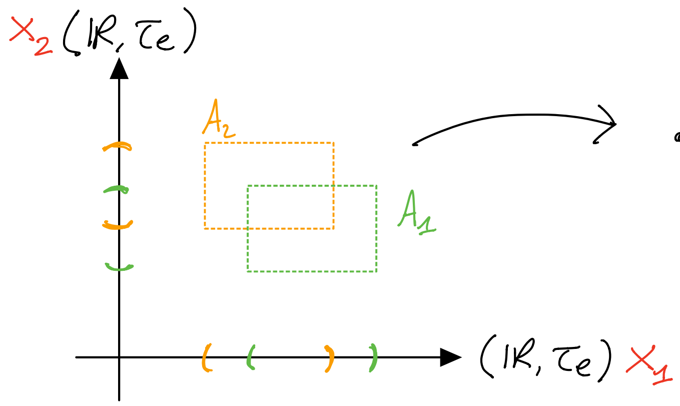
N.B. Non si può semplicemente definire la topologia del prodotto come il prodotto delle topologie:

$$A \in \tau_{X_1 \times X_2} \text{ se } \cancel{A = A_1 \times A_2} \text{ con } A_1 \in \tau_1,\ A_2 \in \tau_2$$

Perché non funziona?

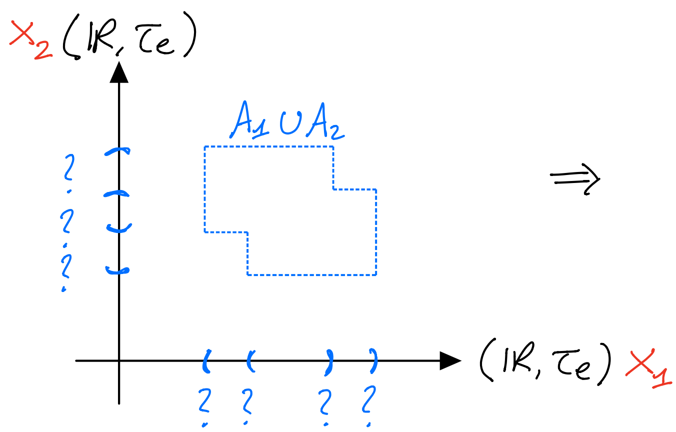
$\Rightarrow$ es. in $(\mathbb{R}, \tau_e)$, $(\mathbb{R}, \tau_e)$

$\Rightarrow$ $X_1 \times X_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ MA:



per le proprietà degli aperti anche la loro unione deve essere un aperto

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $A_1 \cup A_2$ NON è ottenibile come prodotto di aperti di X_1 e X_2 !!!

$\Rightarrow$ É necessario introdurre il concetto di topologia prodotto in maniera differente:

Def. (Topologia Prodotto):

Dati (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) spazi topologici, definiamo la famiglia $\mathcal{B}_{X_1 \times X_2} = \{ A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2 \}$.

Si ha che $\mathcal{B}_{X_1 \times X_2}$ è una BASE di APERTI per $X_1 \times X_2$ e si definisce come TOPOLOGIA PRODOTTO su $X_1 \times X_2$ la topologia $\tau_{X_1 \times X_2} = \tau(\mathcal{B}_{X_1 \times X_2})$

N.B.

$\mathcal{B}_{X_1 \times X_2}$ è BASE DI APERTI DI $X_1 \times X_2$, NON TOPOLOGIA DI $X_1 \times X_2$!!!! La topologia prodotto $\tau_{X_1 \times X_2}$ contiene, oltre agli elementi di $\mathcal{B}_{X_1 \times X_2}$, anche TUTTE LE LORO POSSIBILI UNIONI !!!!

Verifico che effettivamente $\mathcal{B}_{X_1 \times X_2}$ è base di aperti:

1) $\mathcal{B}_{X_1 \times X_2}$ è ricoprimento di $X_1 \times X_2$? Ovvio:

$$X_1 \in \tau_1 \ , \ X_2 \in \tau_2 \ \Rightarrow \ X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}_{X_1 \times X_2} \ \checkmark$$

2) Dati:

$$A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}_{X_1 \times X_2} \ , \ A_1' \times A_2' \in \mathcal{B}_{X_1 \times X_2}$$

$$\Rightarrow (A_1 \times A_2) \cap (A_1' \times A_2') = (A_1 \cap A_1') \times (A_2 \cap A_2')$$

con $A_1, A_1' \in \tau_1$, $A_2, A_2' \in \tau_2$

$$\Rightarrow A_1 \cap A_1' \in \tau_1 \ , \ A_2 \cap A_2' \in \tau_2$$

$$\Rightarrow (A_1 \times A_2) \cap (A_1' \times A_2') \in \mathcal{B}_{X_1 \times X_2} \ \checkmark$$

Problema:

Data $f: Y \to (X, \tau)$, come posso assegnare una topologia su Y t.c. f risulti continua? É possibile farlo?

$\Rightarrow$ se $\tau_Y = \tau_{discreta}$, f è sempre continua $\forall \tau$ su X, $\forall f$.

$\Rightarrow$ cambiamo leggermente il problema:

Data $f: Y \to (X, \tau)$, qual è la topologia MENO FINE su Y che renda f continua?

$\Rightarrow$ definiamo $T(f) = \{ \tau' \mid f(Y, \tau') \to (X, \tau) \text{ CONTINUA} \}$

$\Rightarrow T(f) \neq \emptyset$ (sicuramente $\tau_{discreta} \in T(f)$)

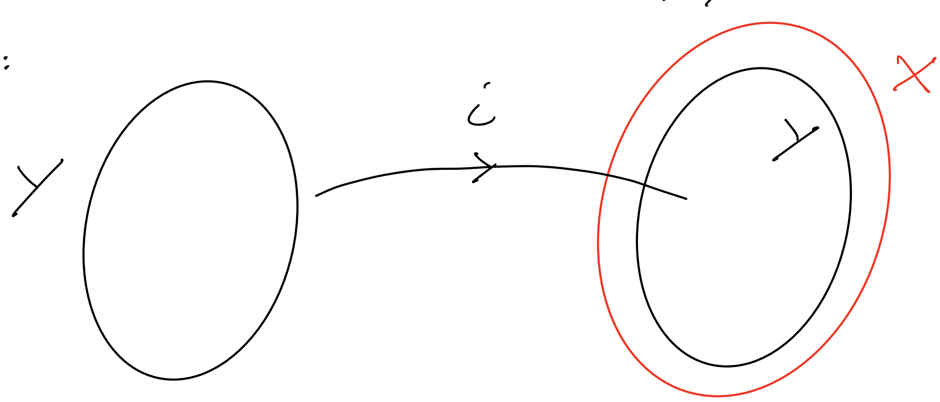
$\Rightarrow$ Mostriamo che $\exists$ la topologia MENO FINE di $T(f)$ e che essa è definita come segue:

$$\tau_f = \{ A \subseteq Y \mid \exists \tilde{A} \in \tau \text{ t.c. } f^{-1}(\tilde{A}) = A \}$$

$\Rightarrow$ data tale τ_f, ovviamente f è continua (per definizione $f^{-1}(A) \in \tau_f \ \forall A \in \tau$)

$\Rightarrow \tau_f$ è anche, ovviamente, la meno fine che renda f continua (affinché f sia continua, deve contenere tutte le controimmagini degli aperti di τ, tuttavia τ_f NON contiene nessun'altro aperto oltre a questi, quindi è la meno fine che rendo continua f)

Siano $Y \subseteq (X, \tau)$, $i: Y \hookrightarrow X$ l'IMMERSIONE di Y in X:
$$y \longmapsto y$$



$\Rightarrow$ chi è τ_i ?

$$\Rightarrow \tau_i = \{A \subseteq Y \mid \exists \tilde{A} \in \tau \text{ t.c. } i^{-1}(\tilde{A}) = A\}$$
$$= \{A \subseteq Y \mid \exists \tilde{A} \in \tau \text{ t.c. } A = \tilde{A} \cap Y\}$$
$$= \text{TOPOLOGIA INDOTTA SU } Y \subseteq X \text{ DA } \tau \text{ !!!}$$

Siano:

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1 \qquad \pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$$
$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 \qquad (x_1, x_2) \mapsto x_2$$

le proiezioni di $X_1 \times X_2$ su X_1 e X_2 rispettivamente

<u>Proposizione</u>:

Dati $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ spazi topologici e $X_1 \times X_2$ spazio prodotto, si ha che la topologia prodotto $\tau_{X_1 \times X_2}$ è la MENO FINE tra le topologie su $X_1 \times X_2$ che rendono continue le 2 proiezioni π_1, π_2

<u>Dim.</u>

1) $\tau_{X_1 \times X_2}$ rende continue π_1, π_2:

$$A_1 \in \tau_1 \Rightarrow \pi_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2 \in \tau_{X_1 \times X_2}$$
$$A_2 \in \tau_2 \Rightarrow \pi_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2 \in \tau_{X_1 \times X_2}$$
✓

2) Mostro che se τ rende continue π_1, π_2 allora $\tau \geq \tau_{X_1 \times X_2}$:

$\Rightarrow \tau$ rende continue $\pi_1, \pi_2 \Rightarrow \forall A_1 \in \tau_1 \ \pi_1^{-1}(A_1) \in \tau$

$\Rightarrow \forall A_2 \in \tau_2 \ \pi_2^{-1}(A_2) \in \tau \Rightarrow (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2) \in \tau$

$\Rightarrow A_1 \cap X_1 = A_1, \; A_2 \cap X_2 = A_2 \Rightarrow A_1 \times A_2 \in \tau$

$\Rightarrow \tau \geq \tau_{X_1 \times X_2}$

q.e.d.

N.B. In questo caso π_1, π_2 sono aperte, ma non necessariamente chiuse

---

Sia ora $f : (X, \tau) \to Y$. Come posso dare una topologia su Y che renda f continua?

$\Rightarrow$ se $\tau_Y = \tau_{banale}$, f è sempre continua $\forall \tau$ su X, $\forall f$.

$\Rightarrow$ cambiamo leggermente il problema:

Data $f : (X, \tau) \to Y$, qual è la topologia PIÚ FINE su Y che renda f continua?

$\Rightarrow$ Se tale τ_Y esiste, la chiamo τ_f, essa deve avere la seguente proprietá:

$$A \subseteq Y \wedge A \in \tau_f \Rightarrow f^{-1}(A) \in \tau$$

$\Rightarrow \tau_f = \{ A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \tau \}$

$\Rightarrow$ si verifica facilmente che τ_f è una topologia e che è sicuramente la più fine che renda f continua (se togliessi anche solo un aperto, f non sarebbe più continua)

N.B. Se f NON è suriettiva si ha che:

$A \cap \mathrm{Im}(f) = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(A) = \emptyset$

Cioè al di fuori dell'immagine di f qualunque sottoinsieme di Y è aperto in τ_f

$\Rightarrow$ posso quindi assumere f suriettiva

$\Rightarrow$ se f è suriettiva, allora posso definire una relazione di equivalenza naturale su X:

$$x_1 \underset{f}{\sim} x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

$\Rightarrow$ Considero quindi $X/\underset{f}{\sim} = Y$!!!

(gli elementi di Y li posso vedere come rappresentanti delle classi di equivalenza di $\underset{f}{\sim}$)

$\Rightarrow$ $[x] \longrightarrow f(x)$

$\Rightarrow$ sia $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ con $\sim$ relazione di
$\qquad x \longmapsto \pi(x) = [x]$ equivalenza su X

la proiezione di X su $X/\sim$. Qual è la topologia più fine su $X/\sim$ che renda continua π?

$$\Rightarrow \quad \tau_\pi = \{ A \in X/\sim \mid \pi^{-1}(A) \in \tau \}$$

Tale τ_π viene detta TOPOLOGIA QUOZIENTE

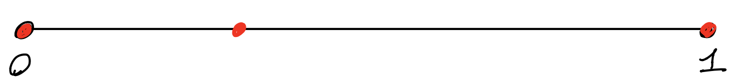
esempi:

$([0,1], \tau_e)$

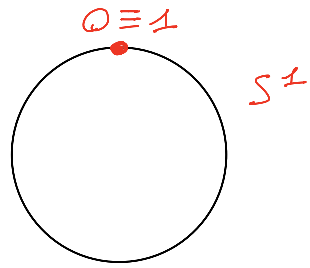
$\Rightarrow$ definisco $\sim$ t.c.:

$$x \sim y \iff x = y \vee \big((x,y) = (0,1) \vee (x,y) = (1,0) \big)$$

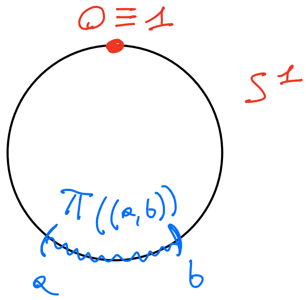
$\Rightarrow$

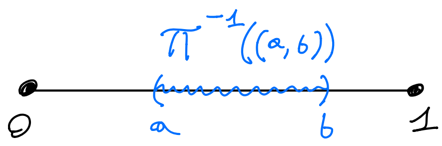


$\Rightarrow$ $[0,1]/\sim$:

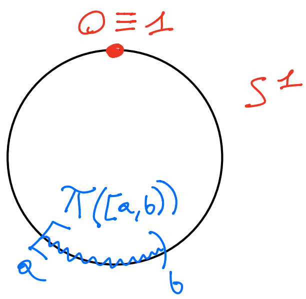


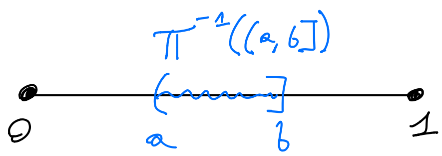
$\Rightarrow$ Quali sono gli aperti nel quoziente $[0,1]/\sim$?

$\Rightarrow$ 

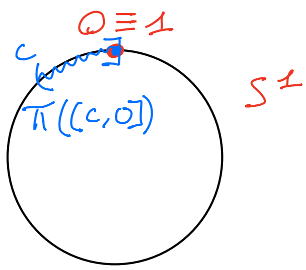
$\Rightarrow$ 

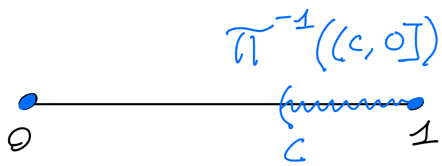
$\in \tau_e$

$\Rightarrow$ 

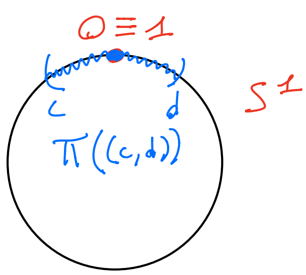
$\Rightarrow$ 

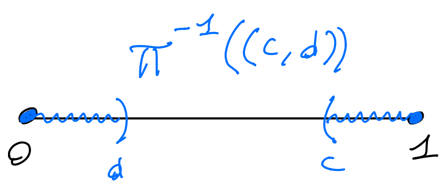
$\notin \tau_e$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 

$\notin \tau_e$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 

$\in \tau_e$

$\Rightarrow$ Gli aperti di $[0,1]/\sim$ sono unioni di archi di circonferenza con gli estremi esclusi

$\Rightarrow$ $(S^1, \tau_e) \subseteq (\mathbb{R}^2, \tau_e)$ e $(S^1, \tau_{quoziente})$ con $S_1 = [0,1]/\sim$ sono omeomorfi !!!

APERTI COMPLETI:

Sia:

$\pi : (X, \tau) \longrightarrow (X/\sim, \tau_\pi)$ è continua, ma non è detto che sia aperta.

es.

$X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\phi, X, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{d\}\}$

$\sim$:

$$x \sim y \iff x = y \vee (x, y \in \{a, b, c\} \vee x, y \in \{d\})$$

$$\Rightarrow X/\sim = \{x, y\} \Rightarrow \pi(a) = \pi(b) = \pi(c) = x$$

$$\Rightarrow \pi(d) = y$$

$\Rightarrow \pi : X \to X/\sim \Rightarrow \tau_\pi = \{\phi, \{x, y\}, \{y\}\}$

$\Rightarrow \tau_\pi$ è la topologia quoziente su $X/\sim$

$\Rightarrow \pi$ NON è aperta dato che $\pi(\{a, b\}) = \{x\} \notin \tau_\pi$

In generale si ha:

$\pi : (X, \tau) \longrightarrow (X/\sim, \tau_\pi)$ t.c.:

$$A \in \tau \Rightarrow \pi(A) \begin{cases} \in \tau_\pi \\ \notin \tau_\pi \end{cases}$$

(come nell'esempio sopra)

$\Rightarrow$ Sia $A \in \tau$ t.c. $\pi(A) \in \tau_\pi$. Cosa si può dire di $\pi^{-1}(\pi(A))$?

$\Rightarrow$ Sicuramente $A \subseteq \pi^{-1}(\pi(A))$, tuttavia potrebbe contenere qualcosa di più!

es.

Come sopra:

$$X = \{a, b, c, d\}, \quad \tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{d\}\}$$

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee (x, y \in \{a, b, c\} \vee x, y \in \{d\})$$

$$\tau_\pi = \{\emptyset, \{x, y\}, \{y\}\} \Rightarrow \pi^{-1}(\pi(\{a, b, d\})) = X$$

Def. (Aperti Completi):

Si dicono APERTI COMPLETI quelli per cui se $A \in \tau$ allora $\pi(A) \in \tau_\pi \wedge \pi^{-1}(\pi(A)) = A$