Consideriamo 2 popolazioni che, se isolate, evolvono LOGISTICAMENTE e che interagiscono a la LOTKA-VOLTERRA:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{N}_1 = R_1 N_1 (K_1 - N_1 - E_2 N_2) \\ \dot{N}_2 = R_2 N_2 (K_2 - N_2 - E_1 N_1) \end{cases}}$$

dove:

1) N_1, N_2 sono le 2 popolazioni
2) R_1, R_2 sono i tassi di riproduzione delle 2 popolazioni N_1, N_2 se isolate
3) K_1, K_2 sono gli equilibri logistici (equilibri ai quali tendono N_1, N_2 se isolate)
4) E_1, E_2 sono i tassi di sostituzione che N_1 ha su N_2 / N_2 ha su N_1: se ogni individuo di N_2/N_1 sottrae risorse a E_2/E_1 individui di N_1/N_2, il tasso di crescita di N_1/N_2 diminuisce di $E_2 N_2 / E_1 N_1$.

Tali parametri R_i, K_i, E_i $(i = 1,2)$ possono assumere qualsiasi valore, quindi al loro variare si hanno CAMBIAMENTI NELLA DINAMICA (BIFORCAZIONI).

⇒ Per prima cosa, cerchiamo di RIDURRE IL NUMERO DI PARAMETRI (6 parametri sono estremamente complicati da trattare).

⇒ le 2 tecniche per la riduzione dei parametri senza modifica qualitativa della dinamica sono i cambi

di variabile e le riparametrizzazioni in tempo.
Applicandole al modello si ha:

$$\begin{cases} N_i \longmapsto u_i = \dfrac{N_i}{K_i} & (i = 1, 2) \\ t \longmapsto \tau = R_1 K_1 t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si ottiene il seguente modello semplificato:

$$(*) \quad \boxed{\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 (1 - u_1 - \beta_2 u_2) \\ \dot{u}_2 = \alpha u_2 (1 - u_2 - \beta_1 u_1) \end{cases}}$$

dove:

$$\alpha = \frac{R_2 K_2}{R_1 K_1}, \quad \beta_1 = \frac{E_1 K_1}{K_2}, \quad \beta_2 = \frac{E_2 K_2}{K_1}$$

1) Consideriamo il caso in cui $\beta_1 \beta_2 = 1$:
(*) si riscrive come:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 (1 - u_1 - \beta u_2) \\ \dot{u}_2 = \alpha u_2 \left(1 - u_2 - \frac{1}{\beta} u_1\right) \end{cases}} \quad \text{con } \alpha, \beta := \beta_2 > 0$$

2) Assumiamo WLOG che si abbia $K_2 > K_1 \Rightarrow \beta > 1$

N.B.
Con tale scelta di parametri, la popolazione N_2 si dice POPOLAZIONE "AVVANTAGGIATA" dato che $E_1 < 1 < E_2$

$\Rightarrow$ abbiamo ora questo sistema di ODE:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 (1 - u_1 - \beta u_2) \\ \dot{u}_2 = \alpha u_2 \left(1 - u_2 - \frac{1}{\beta} u_1\right) \end{cases}$$

⇒ cerchiamo gli equilibri:

$$\begin{cases} 0 = u_1(1-u_1-\beta u_2) \\ 0 = \alpha u_2\left(1-u_2-\frac{1}{\beta}u_1\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \mathcal{E}_0 = (0,0) \\ \mathcal{E}_1 = (1,0) \\ \mathcal{E}_2 = (0,1) \end{cases}$$

N.B.
Notare come gli equilibri $\mathcal{E}_{0,1,2}$ NON DIPENDONO DA NESSUN PARAMETRO !!!

⇒ le popolazioni agiscono separatamente in maniera logistica, quindi gli assi coordinati sono INSIEMI INVARIANTI !!!

⇒ la DINAMICA è SEMPRE contenuta nel 1° quadrante

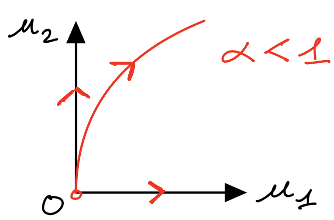
⇒ studiamo il LINEARIZZATO del modello in un intorno degli equilibri:

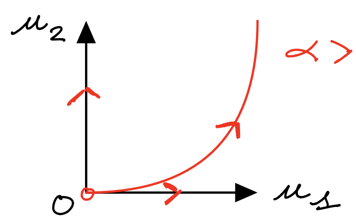
$$D_X(\mathcal{E}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad D_X(\mathcal{E}_1) = \begin{pmatrix} -1 & -\beta \\ 0 & \alpha\left(1-\frac{1}{\beta}\right) \end{pmatrix},$$

$$D_X(\mathcal{E}_2) = \begin{pmatrix} 1-\beta & 0 \\ -\frac{\alpha}{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$$

1) $\mathcal{E}_0$:

⇒ se $\alpha \neq 1$, $\mathcal{E}_0$ è un NODO INSTABILE, gli autovettori sono $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi per $t \longrightarrow +\infty$ le orbite tendono a disporsi tangenzialmente a $(1,0)$ se $\alpha > 1$ e a $(0,1)$ se $\alpha < 1$

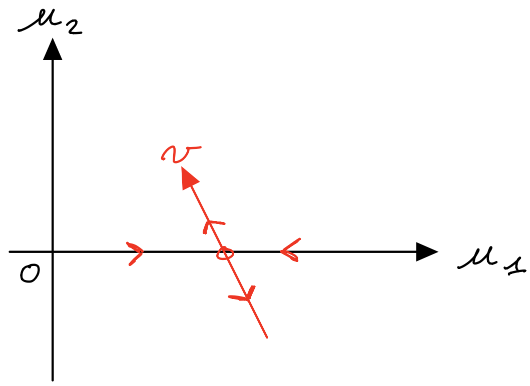




2) $\mathcal{E}_1$:

$\Rightarrow$ $\lambda_{1,2} = -1, \alpha\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$, $\lambda_2 > 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_1$ è linearmente una sella :

$\Rightarrow$ la linearizzazione ha l'asse u_1 come sottospazio stabile, mentre l'autospazio instabile è generato dall'autovettore $v = (-\beta^2, \beta+\alpha\beta+\alpha)^T$. Si verifica che v è diretto verso sinistra nel 1° quadrante.

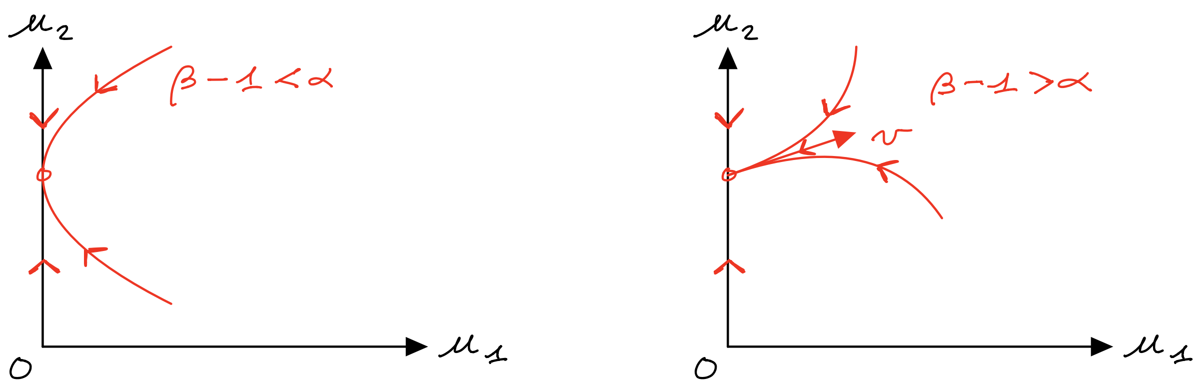


3) $\mathcal{E}_2$:

$\Rightarrow$ $\lambda_{1,2} = 1-\beta, -\alpha < 0$ $\Rightarrow$ se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mathcal{E}_2$ è un NODO STABILE

$\Rightarrow$ un autospazio è l'asse u_2, l'altro ha direzione variabile al variare di α, β.

$\Rightarrow$ per $t \longrightarrow +\infty$ le orbite tendono a disporsi tangenzialmente a u_2 se $\beta - 1 < \alpha$ e viceversa:



N.B.

Trascuriamo i casi degeneri !!!

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}_{0,1,2}$ sono 3 equilibri iperbolici, quindi si applica il Teorema di Grobman-Hartman che assicura che NESSUNA SOLUZIONE del 1° quadrante (assi esclusi) tende asintoticamente a $(0,0)$ o $(1,0)$ per $t \longrightarrow +\infty$

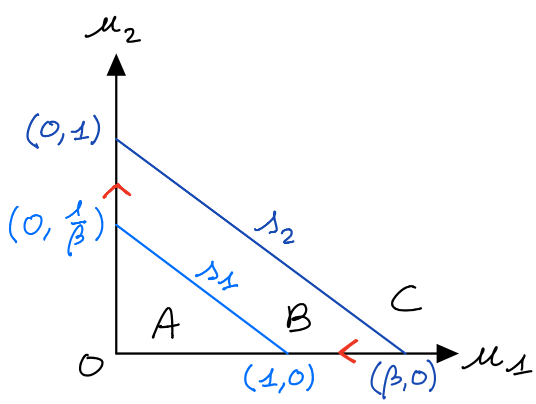
$\Rightarrow$ $\exists$ BACINO DI ATTRAZIONE di $(0,1)$!!! Proviamo a capire come è fatto tale bacino di attrazione:

$$\begin{cases} X_1 = u_1 (1 - u_1 - \beta u_2) \\ X_2 = \alpha u_2 (1 - u_2 - \frac{1}{\beta} u_1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^*_{>0} \times \mathbb{R}^*_{>0}\}$

$\Rightarrow$ X_1 si annulla in un segmento s_1 di estremi $(0, \frac{1}{\beta})$ e $(1,0)$. Il suo segno è determinato da $1 - u_1 - \beta u_2$

$\Rightarrow$ X_2 si annulla in un segmento s_2 di estremi $(0,1)$ e $(\beta, 0)$. Il suo segno è determinato da $1 - u_2 - \frac{1}{\beta} u_1$



$\Rightarrow$ U si divide in 3 regioni A, B, C separate da

s_1, s_2.

$\Rightarrow$ in ∂B, X è nullo (nei 2 equilibri), tangente agli assi oppure punta verso l'interno di B, quindi B è POSITIVAMENTE INVARIANTE.

Lemma:

$\forall \alpha > 0$, $\beta > 1$, tutte le soluzioni $t \longmapsto u(t)$ di $(*)$ con dato iniziale u_0 in U sono definite $\forall t > 0$ e:

1) se $u_0 \in A$, $\exists T > 0$ t.c. $u(T) \in s_1$

2) se $u_0 \in C$, $-T > 0$ t.c. $u(T) \in s_2$

3) se $u_0 \in \overline{B}$ (tranne l'asse u_1) allora:

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = (0, 1)$$

Dim.:

La 1ª parte del Lemma deriva dal Teorema di Fuga dai Compatti. Sia ora $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto t.c. ∂A sia una curva semplice chiusa (senza autointersezioni). Se un campo è nullo, tangente a ∂A o diretto verso l'interno sui punti di ∂A, allora $A, \overline{A}$ sono invarianti per il flusso di tale campo. Consideriamo ora l'insieme $A \cup B$: è positivamente invariante. Inoltre, poiché $\overline{A \cup B}$ è compatto, le soluzioni con dato iniziale u_0 in $A \cup B$ sono definite $\forall t > 0$. Nell'insieme C le componenti x_1, x_2 del campo X sono ovunque negative, quindi possiamo considerare i rettangoli $0 \leq u_1 \leq v_1$, $0 \leq u_2 \leq v_2$

con $v_1 > \beta$, $v_2 \geq 1$: essi sono positivamente invarianti.

$\Rightarrow$ ogni soluzione in C è definita e vincolata a questi settangoli $\forall t > 0$

$\Rightarrow$ si ha quindi:

1) Supponiamo per assurdo che una soluzione con dato iniziale $u_0 \in A$ rimanga in A $\forall t > 0$.

Sappiamo che $\dot{u}_1(t) > 0$, $\dot{u}_2(t) > 0$ $\forall t > 0$

$\Rightarrow$ $t \longmapsto u_1(t)$ e $t \longmapsto u_2(t)$ sono monotone crescenti, ma anche limitate!

$\Rightarrow$ u_1, u_2 ammettono limite finito $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ per $t \to +\infty$ in $\bar{A}$

$\Rightarrow$ $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ è equilibrio di X, tuttavia gli unici equilibri di X contenuti in $\bar{A}$ sono $(0,0)$ (repulsivo $\forall t > 0$) e $(1,0)$ (sella con varietà stabile l'asse u_1 $\forall t > 0$) $\lightning$

$\Rightarrow$ $\exists\, T > 0$ t.c. $u(T) \in S_1$ e quindi $t \longmapsto u(t)$ lascia A in tempo finito

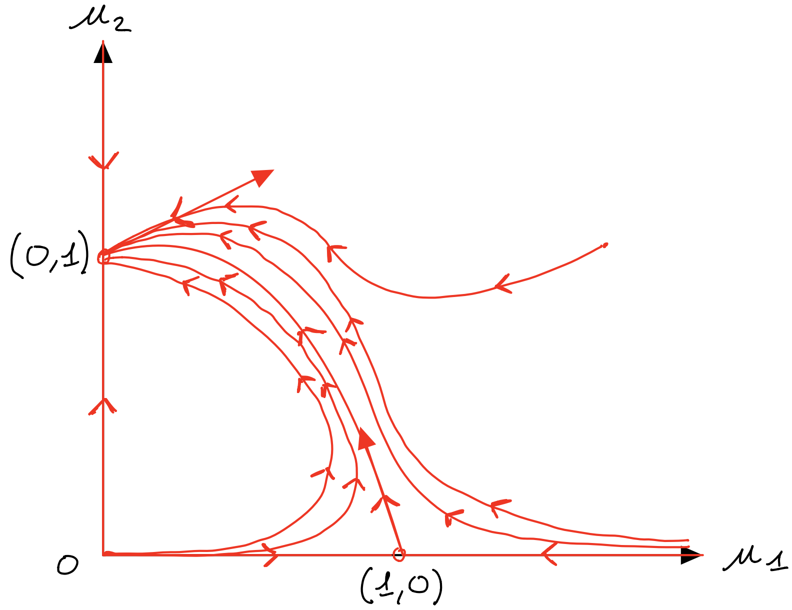
2) Analogo a quello sopra.

3) Ricordiamo che B è positivamente invariante e $X_1 < 0$, $X_2 > 0$, quindi ogni $t \longmapsto u_1(t)$, $t \longmapsto u_2(t)$ con dato iniziale $u_0 \in B$ ha limite $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$

$\Rightarrow$ $\bar{u} \in \partial B$ ed è un equilibrio $\Rightarrow$ $\bar{u} = (0, 1)$

q.e.d.

Possiamo ora disegnare le orbite significative del sistema:



$\Rightarrow$ Dal ritratto in fase si evince che la popolazione svantaggiata (u_1) si estinguerà SEMPRE, eccezion fatta nel caso in cui sia l'unica popolazione presente