MODELLI ALLE DERIVATE PARZIALI

Fino ad ora abbiamo studiato modelli dipendenti dalla sola variazione temporale. Introduciamo ora lo studio di sistemi caratterizzati sia da variazioni temporali che da VARIAZIONI SPAZIALI.

Ci concentreremo sulla seguente situazione-tipo:

1) DENSITÁ: $u(x,t)$ con $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$
2) MASSA TOTALE: $U(t) = \int_{\Omega} u(x,t)\,dx$
3) VARIAZIONE DI $u(x,t)$ IN Ω:
   $\Rightarrow$ é data dalla contribuzione di 2 fattori:
   1) TRASPORTO (spostamento della densitá in/da Ω): $J(x,t)$
   2) REAZIONE (nascite/decessi della densitá in Ω): $\sigma(x,t)$

LEGGE DI BILANCIO DELLA MASSA TOTALE:

Al bilancio contribuiscono le nascite, i decessi e gli spostamenti della densitá DALL'ESTERNO IN Ω e viceversa. NON contribuiscono gli spostamenti della densitá all'interno di Ω. Si ha quindi:

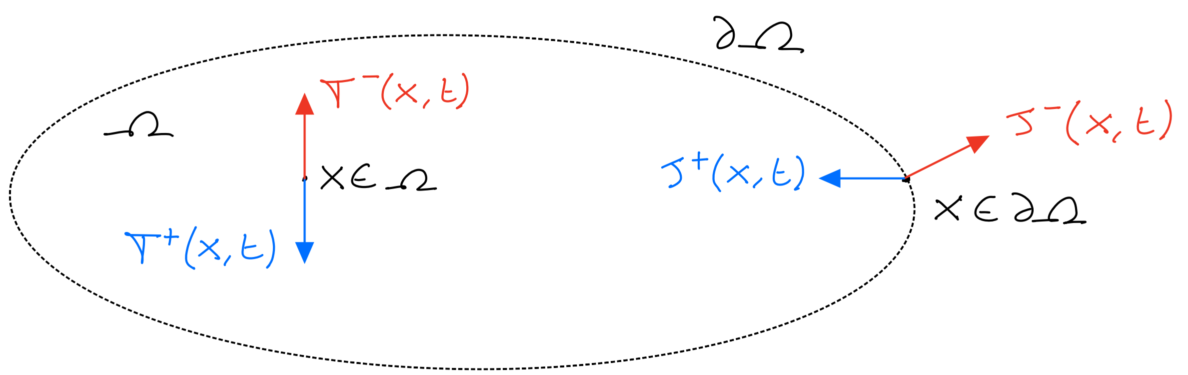
$$\boxed{\frac{dU(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)\,dx = \int_{\Omega} \sigma(x,t)\,dx - \int_{\partial\Omega} J(x,t)\cdot \hat{n}\,d\omega}$$

⇒ sotto opportune ipotesi (teorema della convergenza dominata - limitatezza di u) è possibile applicare il teorema della divergenza; scambiando i segni di derivata / integrale si ottiene:

$$\boxed{\int_\Omega \partial_t u(x,t)\,dx = \int_\Omega \left(-\nabla_x \cdot J(x,t) + \tau(x,t)\right)dx}$$

⇒ Dato che tale relazione deve valere $\forall x \in \Omega$, si ottiene il seguente MODELLO PDE:

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u(x,t) = -\nabla_x \cdot J(x,t) + \tau(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = f(x,t) \end{cases}}$$



MODELLO DI DIFFUSIONE - EQUAZIONE DEL CALORE

Assumiamo $\tau(x,t) \equiv 0$ e la Legge di Fick:

$$J(x,t) \propto -\nabla_x u(x,t)$$

⇒ si ottiene:

$$\partial_t u(x,t) = -\nabla_x \cdot \left(D \cdot \nabla_x u(x,t)\right) = D \cdot \Delta_x u(x,t)$$

dove $\Delta f := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ è il LAPLACIANO

$\Rightarrow$ come dato iniziale prendiamo $u(x,0) = u_0(x)$

$\Rightarrow$ Otteniamo quindi l' EQUAZIONE DEL CALORE:

$$(H) \qquad \boxed{\begin{cases} \partial_t u(x,t) = D \cdot \Delta_x u(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \end{cases}}$$

(H) descrive il processo di diffusione del calore in un mezzo.

Per risolvere (H) ci restringiamo al caso $d=1$ (1D).
In tal caso (H) si riduce al seguente modello:

$$\boxed{\partial_t u(x,t) = D \cdot \partial_{xx} u(x,t)}$$

Si può ora procedere in 2 diversi modi:

1) SEPARAZIONE DI VARIABILI:

Assumiamo $u(x,t) = g(x) \cdot f(t)$. Si ha quindi:

$$f'(t)\, g(x) = D \cdot g''(x)\, f(t)$$
$$\Longleftrightarrow \frac{f'}{f} = D \cdot \frac{g''}{g} = \text{cost} = \lambda$$

Si risolve quindi il sistema formato da:

$$\boxed{\begin{cases} g'' = \frac{\lambda}{D} g \\ f' = \lambda f \end{cases}}$$

(Le soluzioni sono generalmente formate da combinazioni di serie trigonometriche)

2) SOLUZIONI AUTOSIMILARI:

Si cerca una trasformazione di $u(x,t)$ che sia INVARIANTE PER (H) (N.B. le condizioni sono sempre $x \in \mathbb{R}$ SENZA CONTRIBUTI AL BORDO !!!).

Cerchiamo una trasformazione del tipo:

$$\boxed{\begin{gathered} u(x,t) = t^{-q} \cdot F(t^{p} \cdot x) \\ \text{con } q,p \in \mathbb{R} \end{gathered}}$$

(essa equivale ad una DILATAZIONE NEL TEMPO)

$\Rightarrow$ introduciamo il riscalamento di u, x e t:

$$\boxed{z = \varepsilon^{\alpha} x, \quad s = \varepsilon^{\beta} t, \quad v(z,s) = \varepsilon^{\gamma} u(z,s)}$$

siamo interessati ai valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Deve valere (H) quindi si ha:

$$\partial_s v(z,s) = D \cdot \partial_{zz} v(z,s)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^{-\beta} \partial_t (\varepsilon^{\gamma} u(x,t)) = D \cdot \varepsilon^{-2\alpha} \cdot \partial_{xx} (\varepsilon^{\gamma} u(x,t))$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^{\gamma-\beta} \partial_t u(x,t) = D \cdot \varepsilon^{\gamma-2\alpha} \partial_{xx} u(x,t)$$

quindi (H) é verificata se $\cancel{\gamma} - \beta = \cancel{\gamma} - 2\alpha$ ovvero se $\beta = 2\alpha$. Si ha quindi:

$$v(z,s) = \varepsilon^{\gamma} u(\varepsilon^{\alpha} x, \varepsilon^{2\alpha} t)$$

Come ulteriore vincolo utilizziamo il PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA/ENERGIA:

$$E[u](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, dt = cost$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{dt} E[u](t) = 0 = \frac{d}{ds} E[v](s)$$

$$\Rightarrow E[v](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{\gamma} u(\varepsilon^{\alpha} x, \varepsilon^{2\alpha} t)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{\gamma-\alpha} u(z, \varepsilon^{2\alpha} t)\, dz = cost \Rightarrow \gamma = \alpha$$

Si ha quindi:

$$v(z,s) = \varepsilon^{\alpha} u(\varepsilon^{\alpha} x, \varepsilon^{2\alpha} t) = \varepsilon^{\alpha} u(\varepsilon^{\alpha} x, 1)$$

$$= \varepsilon^{\alpha} F(\varepsilon^{\alpha} x) \Rightarrow \varepsilon^{2\alpha} t = 1 \Rightarrow \varepsilon^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow v(z,s) = \frac{1}{\sqrt{t}} F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

Verifichiamo che $v(z,s)$ soddisfi (H):

$$\partial_t v(z,s) = -\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\left(F + \frac{xF'}{\sqrt{t}}\right), \quad \partial_{xx} v(z,s) = \frac{F''}{\sqrt{t^3}}$$

$$\Rightarrow \partial_t v(z,s) = D \cdot \partial_{xx} v(z,s)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\left(F + \frac{xF'}{\sqrt{t}}\right) = \frac{D \cdot F''}{\sqrt{t^3}}$$

$$\Rightarrow 2DF'' + F + \frac{x}{\sqrt{t}} F' = 0$$

$$\Rightarrow 2DF'' + F + \xi F' = 0, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow 2D\partial_{\xi\xi} F + \partial_{\xi}(\xi F) = 0 \Rightarrow \partial_{\xi}\left(\partial_{\xi} F + \frac{\xi}{2D} F\right) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_{\xi}\left(F\left(\frac{\partial_{\xi} F}{F} + \frac{\xi}{2D}\right)\right) = 0 \Rightarrow \partial_{\xi}\left(F\left(\partial_{\xi} \log F + \frac{\xi}{2D}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow F = 0 \vee \partial_{\xi} \log F + \frac{\xi}{2D} = 0$$

Risolviamo e otteniamo:

$$\log F = K - \frac{\xi^2}{4D} \Rightarrow F(\xi) = \underbrace{e^{K}}_{C} e^{-\frac{\xi^2}{4D}}$$

Che riscritta diventa:

$$F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = C e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$\Rightarrow$ C viene identificata dalla massa totale, infine si ha quindi il NUCLEO DI DIFFUSIONE (Heat Kernel):

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{Q}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \\ \text{con } Q &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\,dx \end{aligned}}$$

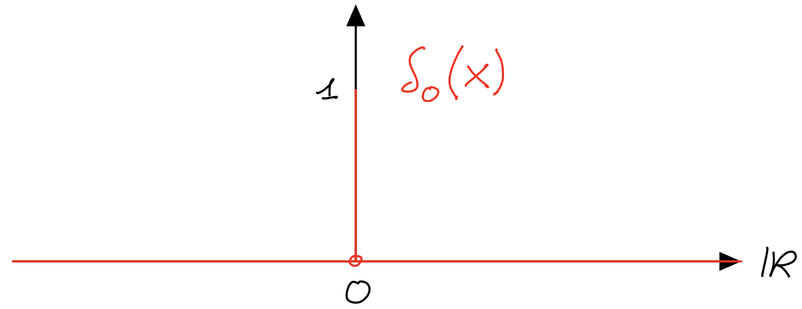
PROPRIETÁ DI $u(x,t)$ SU $\mathbb{R}$

Per prima cosa, notiamo come u sia una simil-gaussiana il cui termine di varianza $\left(e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right)$ é dipendente ANCHE da t ($\Rightarrow$ la distribuzione di $u(x,t)$ rispetto alla media dipende ANCHE dall' istante temporale t).

In generale, se il dato iniziale é $u(x,0) = \phi_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, allora una classe di soluzioni é data da:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(y) \underbrace{\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi D T}}}_{G(x-y)\text{ nucleo di diffusione}} dy = G \underset{\text{convoluzione}}{*} \phi_0(x)$$

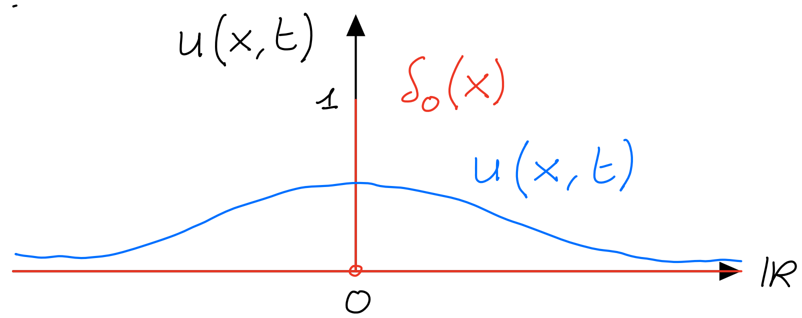
Nel caso sopra $\left(u(x,t) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \text{ con } Q = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\,dx\right)$ si aveva (in maniera tale da avere conservazione della massa) $\phi_0(y) = \delta_0(y) =:$ Delta di Dirac:



$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(y)\, G(x-y)\, dy = G(x)$$

$\Rightarrow$ dal punto di vista modellistico, ciò significa che se al tempo $t=0$ si ha una quantità di calore concentrata in un punto, allora la sua distribuzione nello spazio x al tempo $t = \varepsilon > 0$ sarà data da una gaussiana, e pertanto vi sarà una (minima) quantità di calore in tutto lo spazio ($u(x,t) \neq 0$ $\forall (x, t>0)$), anche a distanza infinita $x = \pm\infty$. Tale fenomeno è detto PARADOSSO DI D'ALAMBERT:

$t > 0$):



Si hanno le seguenti proprietà per $u(x,t)$ sol. di (H):

1) $u(x-y,t)$ è anch'essa sol. di (H) $\forall y \in \mathbb{R}$
2) $\partial_x^k u(x,t)$ è anch'essa sol. di (H) $\forall k \geq 0$
3) $u(\sqrt{\varepsilon}\, x, \varepsilon t)$ è anch'essa sol. di (H) $\forall \varepsilon > 0$
4) Combinazioni lineari di u sono anch'esse sol. di (H)

Modelli di Reazione - Diffusione

Consideriamo modelli del tipo:

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u = f(u) + D\,\partial_{xx} u \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

con:

1) $f(u) :=$ termine di reazione (determina la crescita della popolazione)
2) $D\,\partial_{xx} u :=$ propagazione nello spazio Ω
3) $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$

Modello Malthusiano:

$$\boxed{\partial_t u = \alpha u + D\,\partial_{xx} u, \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

Sol.:

Per determinare una soluzione, osserviamo che:

$\partial_t u - \alpha u = D\,\partial_{xx} u \Rightarrow$ definiamo $v(x,t) := e^{-\alpha t} u(x,t)$

$\Rightarrow \partial_t v = D\,\partial_{xx} v$ quindi, come per l'equazione del calore si avrà $u(x,t) = e^{\alpha t} G(x)$ (con $G(x)$ definita come sopra).

Modello Logistico (Fisher - KPP):

Consideriamo il seguente modello:

$$\boxed{\partial_t u = r u \left(1 - \frac{u}{q}\right) + D\,\partial_{xx} u}$$

$\Rightarrow$ dato che il termine di reazione è l'equazione logistica $f(u) = ru\left(1-\frac{u}{q}\right)$, e dato che $D\partial_{xx}u$ ha l'unico effetto di propagazione di $f(u)$ nello spazio, ci aspettiamo che lo stato stazionario della soluzione sia q (ovvero l'equilibrio logistico) e che $u(x,t)$ tenda a distribuirsi uniformemente a q.

Sol.:

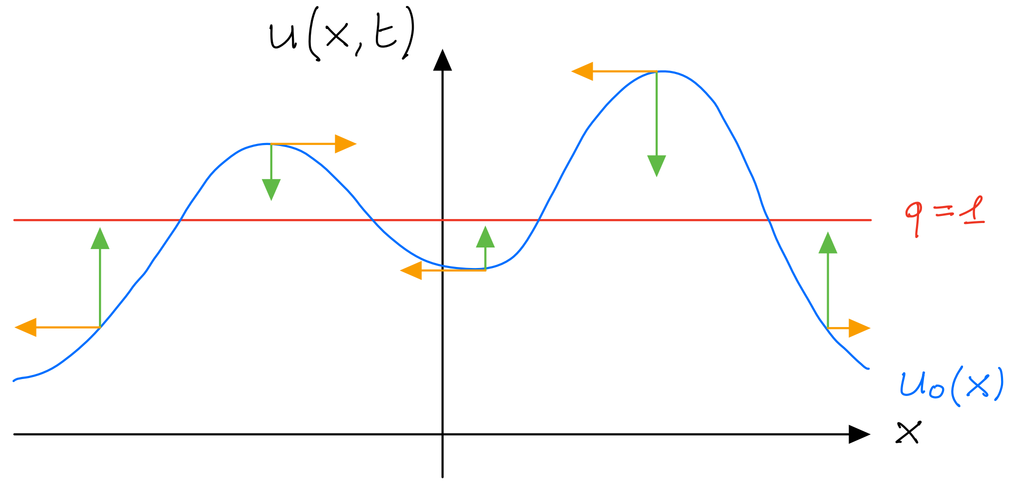
Per semplicità, consideriamo $q = 1$

$$\Rightarrow \partial_t u = ru(1-u) + D\partial_{xx}u$$

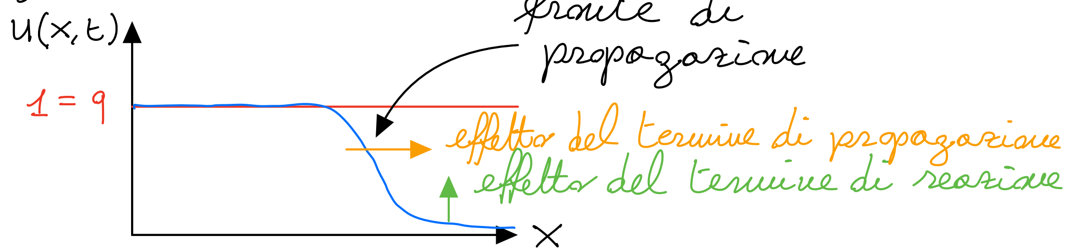
Data la condizione iniziale $u(x,0) = u_0(x)$ ($> 0\ \forall x$), durante la dinamica si avrà che:

1) grazie al termine di reazione $f(u) := ru(1-u)$ la soluzione $u(x,t)$ uniformerà il dato iniziale al livello $u = q = 1$

2) grazie al termine di diffusione $D\partial_{xx}u$ la soluzione $u(x,t)$ si propagherà nello spazio nei punti in cui vi è meno concentrazione di massa

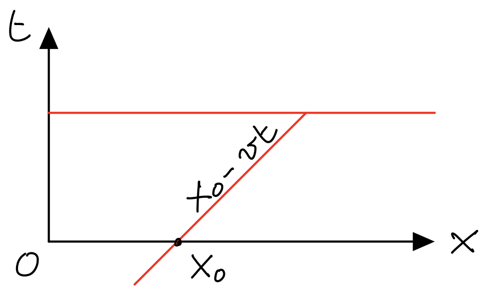


$\Rightarrow$ ci aspettiamo l'esistenza di onde viaggianti (travelling waves):



{Si osservano spesso nei fenomeni di Morfogenesi, Angiogenesi, Chemotassi e nelle Diffusioni Epidemiche}

$\Rightarrow$ cerchiamo soluzioni del tipo $u(x,t) = F(x - vt)$ con $v =$ costante.



$\Rightarrow$ sostituendo nell'equazione si ha:

$$\partial_t u = -v \cdot F', \quad \partial_{xx} u = F''$$

$$\Rightarrow -vF' = r F(1-F) + DF''$$

che è una ODE del 2° ordine !!!

$\Rightarrow$ scrivendo come sistema di ODE al 1° ordine si ha:

$$\begin{cases} F' = G \\ G' = \frac{1}{D}\left(-vG - rF(1-F)\right) \end{cases}$$

<u>Osservazione</u>:

$\exists$ onde viaggianti se $\exists$ eteroclina che congiungono 2 punti di equilibrio. Gli equilibri senza e con diffusione sono $u = 0$, $u = q = 1$

$\Rightarrow$ si ha:

$$z = x - vt \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \exists \text{ onda viaggiante se:} \\ \lim_{z \to \pm\infty} F(z) = 0 \wedge \lim_{z \to \mp\infty} F(z) = 1 \end{array}$$

Studiamo il sistema FKPP:

$$\begin{cases} F' = G \\ G' = \frac{1}{D}\left(-vG - rF(1-F)\right) \end{cases}$$

<u>equilibri</u>:

$$(F,G) = (0,0), \quad (F,G) = (1,0)$$

<u>Stabilità</u>:

$$D_{FKPP}(F,G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{r}{D} + \frac{2rF}{D} & -\frac{v}{D} \end{pmatrix}$$

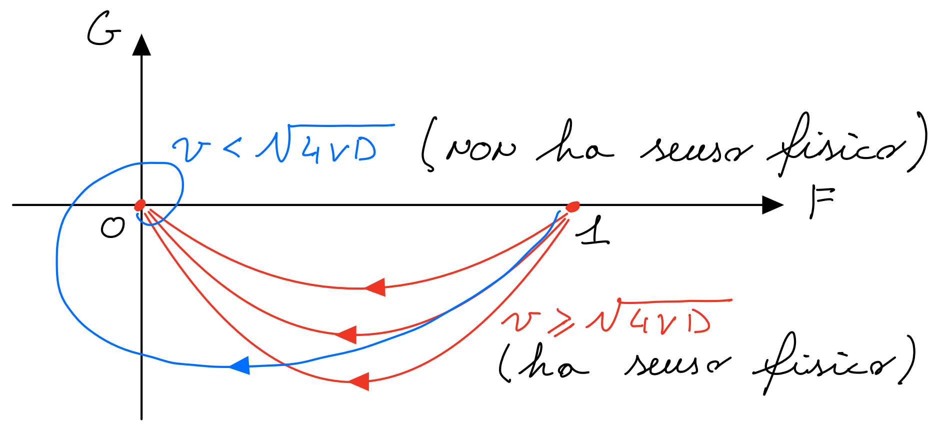
$$\Rightarrow D(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{r}{D} & -\frac{v}{D} \end{pmatrix} \Rightarrow \det = -\frac{r}{D} < 0, \ tr = -\frac{v}{D} < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ è SELLA

$$\Rightarrow D(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{r}{D} & -\frac{v}{D} \end{pmatrix} \Rightarrow \det = \frac{r}{D} > 0, \ tr = -\frac{v}{D} < 0$$

$\Rightarrow (1,0)$ è STABILE

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{v}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{v^2 - 4rD}$$



Teorema (Kolmogorov):

Se $u_0(x) \geq 0$ è t.c.:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq x_1 \\ \text{continua} & \text{se } x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{se } x \geq x_2 \end{cases}$$

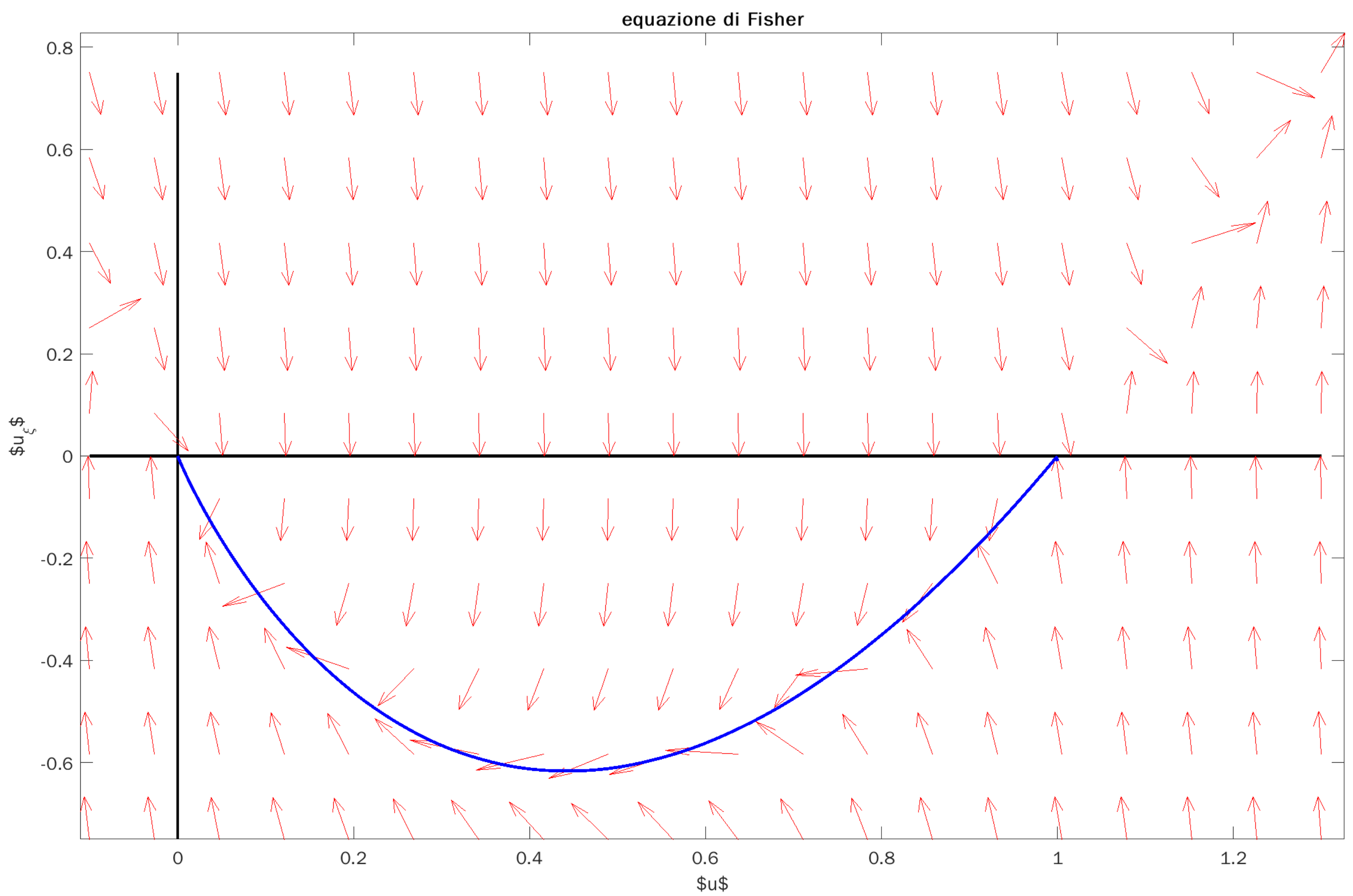
allora la riduzione del modello FKPP evolve ad un'onda viaggiante con velocità pari a

$$v_{MIN} = \sqrt{4rD}$$

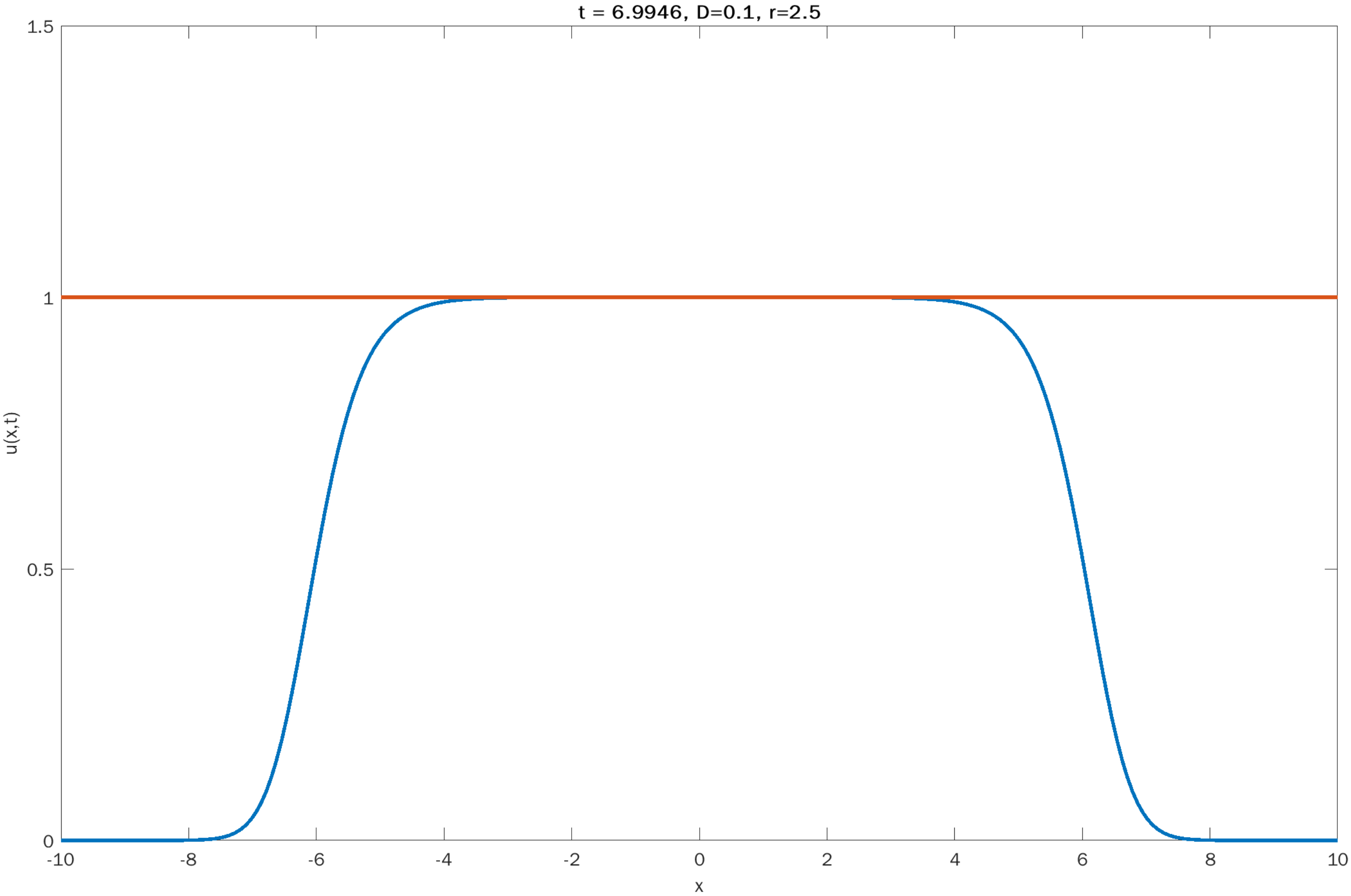
Grafici:

Si è scelto $u_0(x) = \frac{3}{2}x$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (quindi u_0 NON rispetta le ipotesi del Teorema di Kolmogorov).

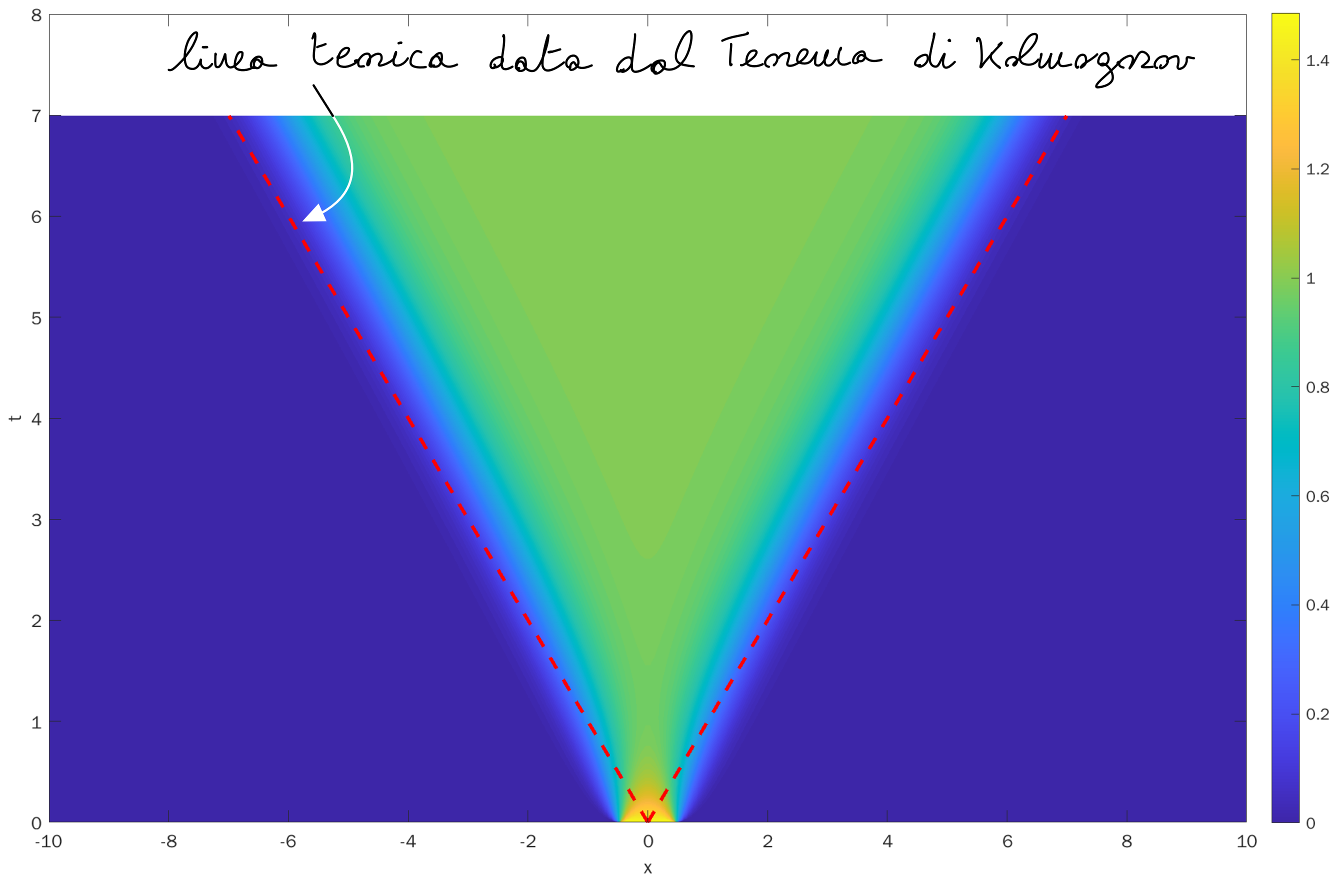
1) Piano delle fasi:



2) Andamento di $u(x,t)$ con $t = T = 7$:



3) Andamento di $u(x,t)$:

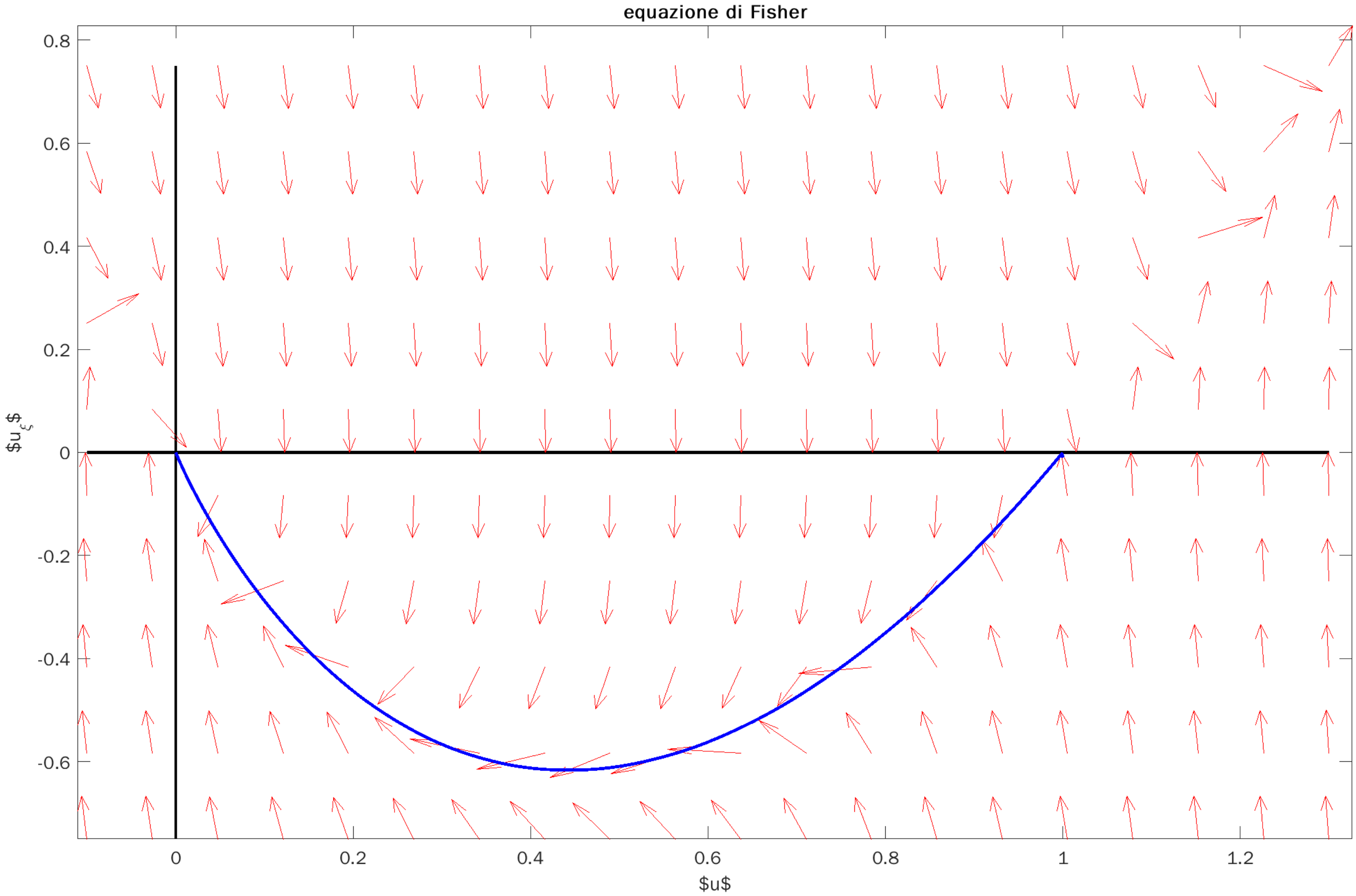


Scegliendo invece come dato iniziale

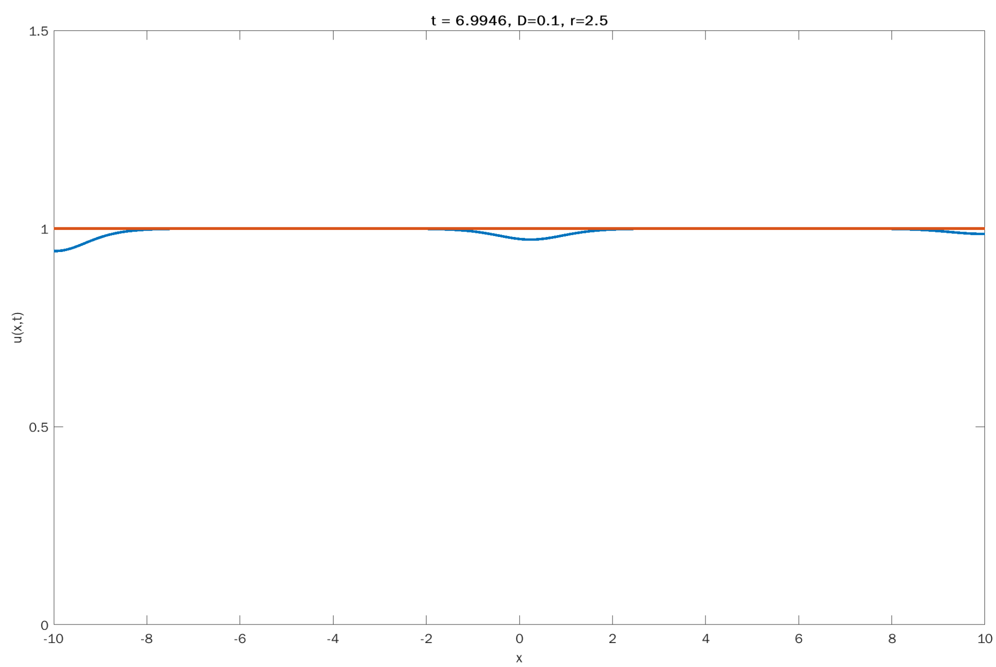
$$u_0(x) = \frac{3}{2}\left(x < \frac{11}{2}\right)\left(x > \frac{11}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(x < -\frac{9}{2}\right)(x > -5)$$

si ha:

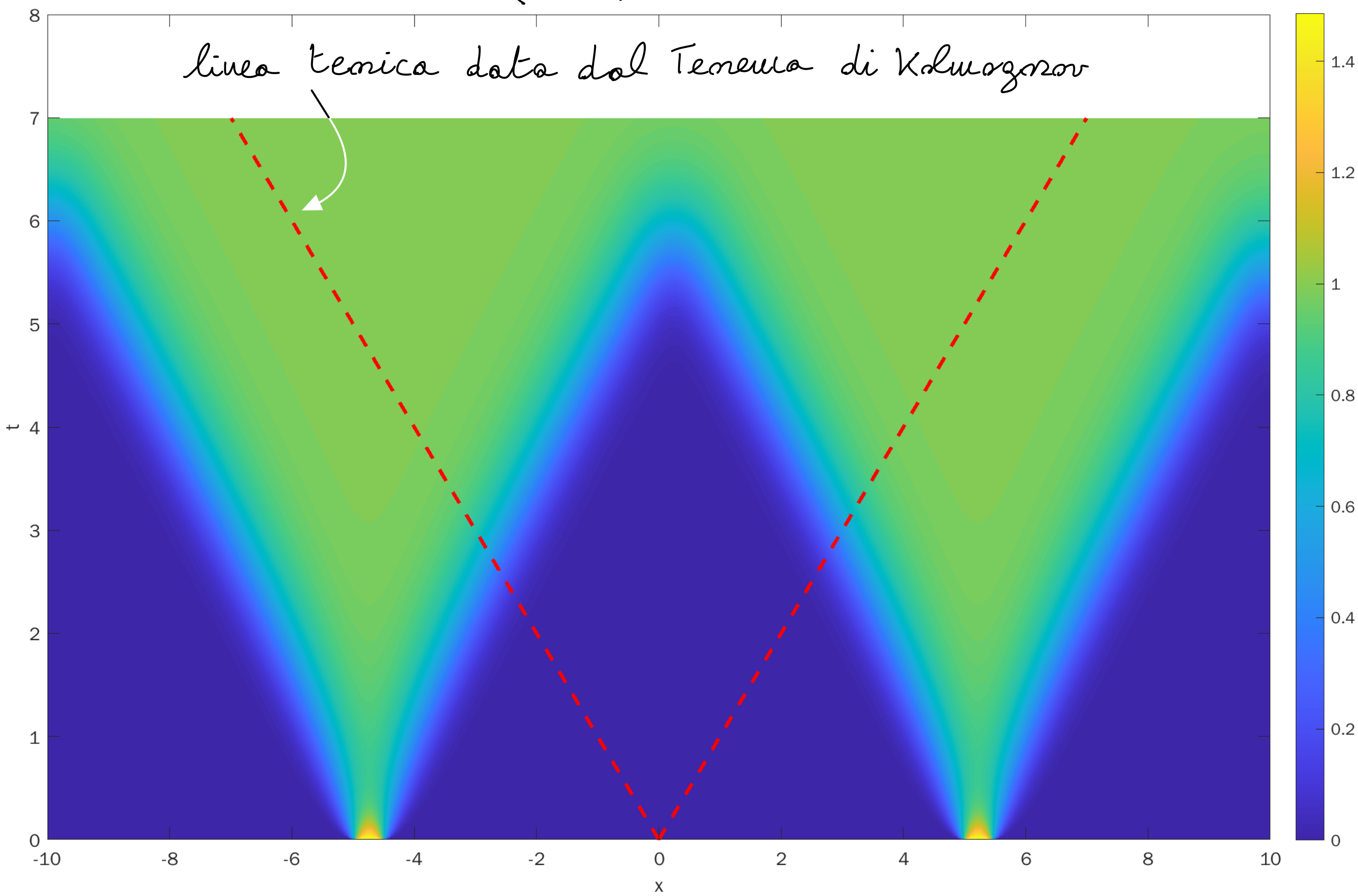
1) Piano delle fasi:



2) Andamento di $u(x,t)$ con $t = T = 7$:



3) Andamento di $u(x,t)$:



<u>Discretizzazione dell'equazione di Fisher-KPP:</u>

$x \in [-2, 2] \Rightarrow x_i = -2 + i\Delta x, \quad i = 0, \dots, N_x$

$t \in [0, T] \Rightarrow t_n = n\Delta t, \quad n = 0, \dots, N_T$

$u(x_i, t_n) = u_i^n$

$$\partial_t u(x_i, t) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

$$\partial_{xx} u(x, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$\Rightarrow$ Quindi la discretizzazione dell'equazione di Fisher-KPP é data da:

$$\boxed{u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot r \cdot u_i^n (1 - u_i^n) + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot D \cdot (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}$$