CONVERGENZA

Daremo ora condizioni affinché $\forall \mu_0$ t.c. $\mu_n = \mu_0 Q^n = \mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = \cdot)$ si abbia $\lim_{n \to +\infty} \mu_n(x) = \pi(x)$ $\forall x$. Per avere tale convergenza, basterà considerare il caso $\mu_0 = \delta_x$ ovvero $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$. In questo caso si ha $\mu_n(y) = Q^n(x,y) = \mathbb{P}_x(X_n = y) = 1$. Infatti se $\lim_{n \to +\infty} Q^n(x,y) = \pi(y)$, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_0 Q^n(y) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{x \in E} \mu_0(x) Q^n(x,y) \underset{|E|<+\infty}{=} \sum_{x \in E} \mu_0(x) \lim_{n \to +\infty} Q^n(x,y)$$

$$= \sum_{x \in E} \mu_0(x) \pi(y) = \pi(y).$$

<u>Teorema</u> (di Convergenza):

Data $(X_n)_{n \geq 0}$ CM irriducibile aperiodica, $|E| < +\infty$, si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\mathbb{P}_x(X_n = y)}_{Q^n(x,y)} = \pi(y) \quad \forall x, y \in E$$

Più precisamente, $\exists\, C, c > 0$ t.c.:

$$\sum_{y \in E} |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \pi(y)| \leq C e^{-cn}$$

<u>Dim.</u>:

La dim. è basata su 2 concetti chiave:

1) se (X_n) è una CM irriducibile, $y \in E$, allora $\exists\, C, c > 0$ t.c. $\mathbb{P}_x(T_y > n) \leq C e^{-cn}$ $\forall x \in E$

2) Accoppiamento:

considero 2 CM $(X_n)_{n \geq 0}$, $(Y_n)_{n \geq 0}$ ind. con la stessa matrice di transizione Q

Notiamo che $(X_n, Y_n)_{n \geq 0}$ é una CM a valori in $E \times E$ con matrice di transizione:

$$\tilde{Q}((x,x'),(y,y')) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y, Y_{n+1} = y' \mid X_n = x, Y_n = x')$$
$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)\mathbb{P}(Y_{n+1} = y' \mid Y_n = x')$$
$$= Q(x,y)\,Q(x',y)$$

Similmente, $\tilde{Q}^n((x,x'),(y,y')) = Q^n(x,y)\,Q^n(x',y')$.

Va mostrato che $(X_n, Y_n)_{n \geq 0}$ é irriducibile. Ció segue dal seguente risultato:

<u>Lemma</u>:

Se Q é matrice di transizione di una CM irriducibile aperiodica allora $\exists N > 0$ t.c. $Q^n(x,y) > 0$ $\forall x,y \in E$ $\forall n \geq N$

Dal lemma segue che se $n \geq N$ si ha:

$$\tilde{Q}^n((x,x'),(y,y')) = Q^n(x,y)\,Q^n(x',y') > 0$$

e quindi $(X_n, Y_n)_{n \geq 0}$ é irriducibile.

Fissato $z \in E$, sia $T_{(z,z)}$ il tempo d'ingresso nello stato (z,z). Si ha:

$$\exists\, C, c > 0 \quad \text{t.c.} \quad \mathbb{P}_{(x,x')}(T_{(z,z)} > n) \leq C e^{-cn}$$

Osserviamo che:

$$\mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y,\ T_{(z,z)} \leq n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y,\ T_{(z,z)} = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y \mid T_{(z,z)} = k)}_{\mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y \mid X_k = z,\ Y_k = z,\ (X_s, Y_s) \neq (z,z)\ \forall s = 1,\dots,k-1)} \mathbb{P}_{(x,x')}(T_{(z,z)} = k)$$

$= \mathbb{P}(X_n = y \mid X_k = z) = Q^{n-k}(z,y)$

$= \sum_{k=1}^{n} Q^{n-k}(z,y)\,\mathbb{P}_{(x,x')}(T_{(z,z)} = k)$

Allo stesso risultato si arriva partendo da $\mathbb{P}_{(x,x')}(Y_n = y,\ T_{(z,z)} \leqslant n)$ e pertanto si ha:

$$\mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y,\ T_{(z,z)} \leqslant n) = \mathbb{P}_{(x,x')}(Y_n = y,\ T_{(z,z)} \leqslant n)$$

Ne segue che:

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) = \mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y,\ T_{(z,z)} \leqslant n) + \mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y,\ T_{(z,z)} > n)$$

$$= \mathbb{P}_{(x,x')}(Y_n = y,\ T_{(z,z)} \leqslant n) + \mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y,\ T_{(z,z)} > n)$$

$$\leqslant \mathbb{P}_{x'}(Y_n = y) + \mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y,\ T_{(z,z)} > n)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_x(X_n = y) - \mathbb{P}_{x'}(Y_n = y) \leqslant \mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y,\ T_{(z,z)} > n)$$

Ripetendo l'argomento scambiando X_n e Y_n si ha:

$$\mathbb{P}_{x'}(Y_n = y) - \mathbb{P}_x(X_n = y) \leqslant \mathbb{P}_{(x,x')}(Y_n = y,\ T_{(z,z)} > n)$$

$$\Rightarrow |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mathbb{P}_{x'}(Y_n = y)| \leqslant \mathbb{P}_{(x,x')}(Y_n = y,\ T_{(z,z)} > n) + \mathbb{P}_{(x,x')}(X_n = y,\ T_{(z,z)} > n)$$

$$\Rightarrow \sum_y |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mathbb{P}_{x'}(Y_n = y)| \leqslant 2\,\mathbb{P}(T_{(z,z)} > n) \leqslant 2c\,e^{-cn}$$

Quindi:

$$\sum_y |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \pi(y)| = \sum_y |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mathbb{P}_\pi(Y_n = y)|$$

$$= \sum_y \Big|\mathbb{P}_x(X_n = y) - \sum_{x' \in E} \pi(x')\,\mathbb{P}_{x'}(Y_n = y)\Big|$$

$$= \sum_y \Big|\sum_{x' \in E} \pi(x')\big[\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mathbb{P}_{x'}(Y_n = y)\big]\Big|$$

$$\leqslant \sum_{x' \in E} \pi(x') \sum_y |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mathbb{P}_{x'}(Y_n = y)| \leqslant \sum_{x' \in E} \pi(x')\, 2c\,e^{-cn}$$

$$= 2c\,e^{-cn}$$

$\square$

Avviso:

Se E è infinito numerabile e $(X_n)_{n\geq 0}$ è una CM irriduci-
bile su E, allora:

1) Non necessariamente $\exists$ una distribuzione stazionaria
2) se $\exists$ una distribuzione stazionaria, allora è unica e $\pi(x) > 0 \ \forall x \in E$

ESEMPIO:

Passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $q(x, x+1) = q(x, x-1) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ è irriducibile MA NON ha distribuzione stazionaria

APPLICAZIONI del Teorema di Convergenza:

1) **Fila di Attesa:**

Una fila di attesa può contenere al più n persone. Ad ogni istante:

1) 1 nuovo cliente arriva con probabilità $\alpha \in (0, 1)$ (se la fila è piena, sparisce) oppure,
2) 1 cliente in fila viene servito ed esce dalla fila con probabilità $\beta \in (0, 1)$
3) Entrata/Uscita dalla fila avvengono indipendentemente.

La matrice Q è data da:

$$q(i, i+1) = \alpha(1-\beta) \qquad i = 0, \dots, N-1$$

$$q(i, i-1) = (1-\alpha)\beta \qquad i = 1, \dots, N$$

$$q(i, i) = 1 - \alpha(1-\beta) - (1-\alpha)\beta \qquad i = 1, \dots, N-1$$

$$q(0, 0) = 1 - \alpha(1-\beta)$$

$$q(N, N) = 1 - (1-\alpha)\beta$$

$\Rightarrow$ la CM è irriducibile e aperiodica $\left(q(i, i) = 1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta\right)$

$\Rightarrow$ cerchiamo una distribuzione reversibile:

$$\pi(i)\, q(i, i+1) = \pi(i+1)\, q(i+1, i) \qquad i = 0, \dots, N-1$$

$$\Leftrightarrow \pi(i+1) = \frac{q(i, i+1)}{q(i+1, i)}\pi(i) = \frac{\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha)\beta}\pi(i) =: \theta\pi(i)$$

dove $Q = \frac{\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha)\beta}$ $\Rightarrow \pi(i+1) = \theta\pi(i) \Rightarrow \pi(i) = \theta^i \pi(0)$

1) Se $\theta = 1$ $(\alpha = \beta)$ allora $\pi(i) = \frac{1}{N+1}$, $i = 0, \dots, N+1$

2) Se $\theta \neq 1$, troviamo $\pi(0)$ impostando:

$$1 = \sum_{i=0}^{N} \pi_i = \sum_{i=0}^{N} \theta^i \pi(0) = \frac{1-\theta^{N+1}}{1-\theta} \pi(0)$$

$$\Rightarrow \pi(0) = \frac{1-\theta}{1-\theta^{N+1}} \Rightarrow \pi(i) = \theta^i \cdot \frac{1-\theta}{1-\theta^n}$$

In particolare, per il Teorema di Convergenza si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \pi(i)$$

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum i \mathbb{P}(X_n = i) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu_N = \sum_{i=0}^{N} i \pi(i)$$

Studiamo μ_N con N grande:

$$\mu_N = \sum_{i=0}^{N} i \theta^i \cdot \frac{1-\theta}{1-\theta^{N+1}} = \frac{1-\theta}{1-\theta^{N+1}} \theta + \sum_{i=0}^{N} i \theta^{i-1}$$

$$= \frac{1-\theta}{1-\theta^{N+1}} \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sum_{i=0}^{N} \theta^i \right) = \frac{1-\theta}{1-\theta^{N+1}} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1-\theta^{N+1}}{1-\theta} \right)$$

(se $\theta \neq 1$)

Se $\theta = 1$, $\mu_N = \frac{N}{2}$

Se $\theta < 1$, $\mu_N \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\theta}{1-\theta}$

Se $\theta > 1$:

$$\mu_N = N + 1 + \underbrace{\frac{N+1}{\theta^{N+1} - 1}}_{\xrightarrow[\theta \to +\infty]{} 0} = \frac{\theta}{\theta - 1}$$

Quindi $N = \mu_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{\theta}{\theta - 1} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\theta - 1}$

2) Teorema del Rinnovo:

In una catena di produzione una componente viene cambiata non appena si rotta. Il tempo di vita di una componente ha una distribuzione assegnata in $\{1, \dots, N\}$ e i tempi di vita di componenti distinte sono indipendenti

TEOREMA (del Rinnovo):

Si ha che:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\text{al giorno } n \text{ va cambiata la componente}) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$$

dove X ha distribuzione del tempo di vita di una componente, assumendo $\mathbb{P}(X=1)>0$

Dim.

Sia X_k tempo di vita della k-sima componente. $(X_k)_{k\geq 1}$ è succ. di v. i.i.d. con densità p_X. Dobbiamo calcolare:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1 \text{ t.c. } X_1+\dots+X_k = n)$$

Definiamo Y_n = numero di giorni che mancano alla prossima sostituzione

$\Rightarrow (Y_n)_{n\geq 0}$ con $Y_0 = 0$ è CM su $\{0,1,\dots,N-1\}$ con probabilità di transizione:

$$p(i, i-1) = 1 \qquad i>0$$
$$p(0,s) = p_X(s+1)$$

$\Rightarrow$ si ha $\{\exists k\geq 1 \text{ t.c. } X_1+\dots+X_k = n\} = \{Y_n = 0\}$, quindi ciò che va dimostrato è:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$$

$\Rightarrow$ Dato che $\mathbb{P}(X=1), \mathbb{P}(X=N)>0$, (Y_n) è CM irriducibile e aperiodica con un unica distribuzione stazionaria π e, per il Teorema di Convergenza, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Y_n=0) = \pi(0)$.

Va trovata π e verificare che $\pi(0) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$. Sappiamo che:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} p_X(1) & \cdots & \cdots & p_X(N) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ N-1 \end{array}$$

$\Rightarrow \pi Q = \pi$

$\Rightarrow$ se $i = 0,\dots,N-2$,

$$\pi(i) = \pi(0)p_X(i+1) + \pi(i+1)$$
$$\pi(N-1) = \pi(0)p_X(N)$$
$$\pi(N-2) = \pi(0)p_X(N-1) + \pi(N-1) \overset{!}{=} \pi(0)(p_X(N-1)+p_X(N))$$

Per induzione all'indietro, si trova $\pi(i) = \pi(0)\sum_{s=i+1}^{N} p_X(s) = \pi(0)\mathbb{P}(X>i)$. Supponiamo ora

$$1 = \sum_{i=0}^{N-1}\pi(i) = \pi(0)\sum_{i=0}^{N-1}\mathbb{P}(X>i) = \pi(0)\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>i) = \pi(0)\mathbb{E}(X)$$

$\square$