13. Problema di Dirichlet nel cerchio

Mostriamo l'esistenza di una sol. classica del PdD nel cerchio $B_R = \{ z = x + iy \mid x^2 + y^2 < R \}$:

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R \\ u = g & \text{su } \partial B_R \end{cases}}$$

con $g \in C^0(\partial B_R)$

Assumiamo $u = \operatorname{Re}(f)$ con $f : \overline{B_R} \to \mathbb{C} \in \mathcal{O}(B_R)$. In B_R si ha:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \underset{\substack{\uparrow \\ z = re^{i\theta},\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n e^{in\theta}$$

Per $r = R$ (ovvero su ∂B_R) si avrà $f(Re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n c_n e^{in\theta}$.

Posto $c_n = a_n - i b_n$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$ si ha:

$$\operatorname{Re}(c_n e^{in\theta}) = \operatorname{Re}((a_n - ib_n)(\cos n\theta + i \sin n\theta))$$
$$= a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

Quindi imponiamo:

$$g(Re^{i\theta}) = g(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

Se $g \in L^1(\partial B_R)$ allora $A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) \cos n\phi \, d\phi$, $B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) \sin n\phi \, d\phi$ (t.c. $|B_n|, |A_n| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |g(\phi)| \, d\phi = \frac{1}{\pi} \|g\|_1$) definiscono la serie di Fourier di g:

$$S(g)(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

In particolare, ponendo $a_0 = \frac{A_0}{2}$, $a_n = \frac{A_n}{R^n}$, $b_n = \frac{B_n}{R^n}$, si ottiene come soluzione candidata:

$$\underset{\substack{\| \\ u(x,y) \equiv u(r,\theta)}}{u(re^{i\theta})} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta]$$

$\Rightarrow$ Verifichiamo che u è sol. del PdD in B_R:

1) $r < R$:

$$|u(re^{i\theta})| \leq \frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (|A_n| + |B_n|)$$
$$\leq \frac{1}{\pi} \|g\|_1 \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n\right] < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie che definisce u converge ad una funzione che è necessariamente armonica in quanto parte reale di una funzione f olomorfa (N.B. si può dim. direttamente che $|f(z)| < +\infty$ per $z = re^{i\theta}$, $r < R$)

2) Affinché si abbia convergenza di $u(re^{i\theta})$ al dato al bordo $g(\theta) \equiv g(Re^{i\theta})$ per $re^{i\phi} \to Re^{i\theta}$ dobbiamo supporre $g \in C^0(\partial B_R) \cap L^1(\partial B_R)$, che la serie che definisce u converga su $\overline{B_R}$ e che su ∂B_R converga a g

CONDIZIONE SUFFICIENTE:

Convergenza uniforme della serie su $\overline{B_R}$ soddisfatta sotto l'ipotesi $g(\theta) \in C^0(\partial B_R) \equiv C^0([0,2\pi]) \Rightarrow g'(\theta) \in L^2(\partial B_R) \equiv L^2([0,2\pi])$

Sotto queste ipotesi si ha convergenza uniforme su $\partial B_R \equiv [0,2\pi]$ di $S_N(u)(Re^{i\theta}) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \to g(\theta) \equiv g(Re^{i\theta})$ dato che:

$$|S_N(u)(Re^{i\theta})| \leqslant \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(|A_n| + |B_n|)}{n} \leqslant \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + n^2(|A_n|^2 + |B_n|^2)$$

$\forall N$

$\Rightarrow$ CONVERGENZA TOTALE ($\Rightarrow$ CONVERGENZA UNIFORME)

ovvero la serie che definisce u su ∂B_R converge uniformemente a g su ∂B_R. D'altra parte, $|S_N(u)(re^{i\theta})| \leqslant \frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (|A_n| + |B_n|) < \frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} |A_n| + |B_n| < +\infty$ $\forall N$, quindi la serie che definisce u su $\overline{B_R}$ converge totalmente ($\Rightarrow$ uniformemente su $\overline{B_R}$) ad una funzione $u \in C^0(\overline{B_R})$, armonica (e quindi analitica $\Rightarrow$ effetto regolarizzante del Δ) su B_R, che coincide con g su ∂B_R. In particolare $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ è SOL. CLASSICA del PdD (N.B.: $g \in C^0(\partial B_R)$, $g' \in L^2(\partial B_R)$)

Example. Solve

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & \text{for } r < 1 = R, \\ u(1, \theta) = \cos^2\theta. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \\ u = x^2 & \text{su } \partial B_1 \end{cases}$$

$(x = r\cos\theta,\ r = 1)$

$$g(\theta) = \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta.$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2 \cos 2\theta.$$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

Osservazione

Dalla convergenza totale si ottiene una stima uniforme dell'errore $\|u_N - u\|_{L^\infty(\overline{B_R})}$ con $u_N = S_N(u)$ somma parziale N-sima

Rappresentazione integrale della sol.

$\Rightarrow$ Più efficace per la trattazione numerica:

$$S_N(u)(re^{i\theta}) \equiv S_N(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\,d\phi + \frac{1}{\pi}\sum_1^N \frac{r^n}{R^n}\Bigg[\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\cos n\theta \cos n\phi\, d\phi}^{A_n \cos n\theta} + \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\sin n\theta \sin n\phi n\phi}^{B_n \sin n\theta}\Bigg]$$

— Caso $R=1$
— Caso $R>0$ $\Big\}\Rightarrow$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\left[\frac{1}{2} + \sum_1^N \frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta-\phi)\right]d\phi.$$

Per $r \leqslant R' < R$ la serie converge totalmente $\forall R' < R$ (N.B. $g \in L^1(\partial B_R)$ infatti $\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{R'}{R}\right)^n (|A_n| + |B_n|) \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{R'}{R}\right)^n \|g\|_1 < +\infty \ \forall R' < R$), pertanto, per $N \longrightarrow +\infty$ sotto l'$\int$, si ha:

$$u(re^{i\theta}) \equiv u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\underbrace{\left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta-\phi)\right]}_{P_R(r,\theta,\phi)}d\phi$$

per $\frac{r}{R} < 1$

Nucleo di Poisson per il cerchio

$$\Rightarrow u(re^{i\theta}) \equiv u(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P_R(r,\theta,\phi)\, g(\phi)\, d\phi \quad \text{in } B_R$$

con $r < R$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Formula esplicita per il Nucleo di Poisson su B_R:

Per $s = \frac{r}{R}$ ($\Rightarrow s \in [0,1)$) si ha:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} s^n \cos(n(\theta-\varphi)) = \frac{1}{2} + Re\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \zeta^n\right) = \frac{1}{2} + Re\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)$$

$\zeta = s \cdot e^{i(\theta-\varphi)}$

$1-\overline{\zeta} = 1 - s\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi)$

$$= \frac{1}{2} - 1 + Re\left(\frac{1}{1-\zeta}\right) = -\frac{1}{2} + Re\left(\frac{1-\overline{\zeta}}{|1-\zeta^2|}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1 - s\cos(\theta-\varphi)}{1 + s^2 - 2s\cos(\theta-\varphi)}$$

$|1 - s\cos(\theta-\varphi) - i s \sin(\theta-\varphi)|^2$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2 - 2s\cos(\theta-\varphi) - 1 - s^2 + 2s\cos(\theta-\varphi)}{1 + s^2 - 2s\cos(\theta-\varphi)}$$

da cui si deduce:

$$\boxed{P_R(r,\theta,\phi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1-\frac{r^2}{R^2}}{1+\frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R^2}\cos(\theta-\varphi)}} \quad \boxed{R=1} \quad \boxed{R>0}$$

PROPRIETÀ DEL NUCLEO DI POISSON:

1) $P_R(r,\theta,\varphi)$ è definito per $r<R \wedge 0\leqslant\theta,\varphi\leqslant 2\pi$

2) $P_R(r,\theta,\varphi)>0$

3) Dipende da $(\theta-\varphi)$ (Invarianza per traslazioni angolari)

4) P_R è ARMONICA in r,θ con $\varphi\equiv$ costante (o in (r,φ) con $\theta\equiv$ costante) dato che $P_R = Re\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-s}\right)\in\mathcal{O}(|s|<1)$

5) $\int_{-\pi}^{\pi} P_R(r,\theta,\phi)\,d\phi = 1 \Rightarrow P_R$ è densità di probabilità su ∂B_R $\forall r<R$

(Infatti $u\equiv 1$ è l'unica sol. di $\begin{cases}\Delta u = 0 & \text{in } B_R\\ u = 1 = g(\phi) & \text{su } \partial B_R\end{cases}$ quindi:

$1\equiv u(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_R(r,\theta,\phi)\cdot 1\,d\phi$)

$\Rightarrow$ u È MEDIA PESATA DI g !!!

6) $P_R(0,\theta,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\,d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} u(Re^{i\theta})\,d\phi$

(PROPRIETÀ DELLA MEDIA DELLE FUNZIONI ARMONICHE)

7) Effetto regolarizzante dell'equazione di Laplace:

$u\in C^\omega(B_R)$ dato che u è armonica sugli aperti $D\subseteq\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{C}$

(infatti $\forall(x_0,y_0)\in D\ \exists\ \overline{B_\delta(x_0,y_0)}\subseteq D$ e $u|_{B_\delta(x_0,y_0)}$ si rappresenta con la formula integrale di Poisson per l'unicità

$\Rightarrow u\in C^\omega(B_\delta)\ \forall B_\delta\subseteq D$)

8) Stime di Cauchy per le derivate della sol. del PdD in funzione di $\|g\|_{L^1(\partial B_R)}$:

Si ha $|D^\mu u|\leqslant \frac{1}{\delta^\mu}\int|g(\phi)|\,d\phi$

SOLUZIONE GENERALIZZATA DEL PdD

Per $g\in L^1(\partial B_R)$ sappiamo che la soluzione u in B_R è:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\frac{r^2}{R^2}}{1+\frac{r^2}{R^2}-2\frac{r}{R}\cos(\theta-\phi)}\,d\phi$$

In che senso $u(re^{i\theta})\longrightarrow g(Re^{i\theta_0})$ per $re^{i\theta}\longrightarrow Re^{i\theta_0}$?

$\Rightarrow$ se $Re^{i\theta_0}$ è un punto di continuità per g allora:

$$\lim_{\substack{r \to R \\ \theta \to \theta_0}} u(re^{i\theta}) = g(Re^{i\theta_0})$$

(u si "attacca bene" al dato al bordo nei punti di continuità)

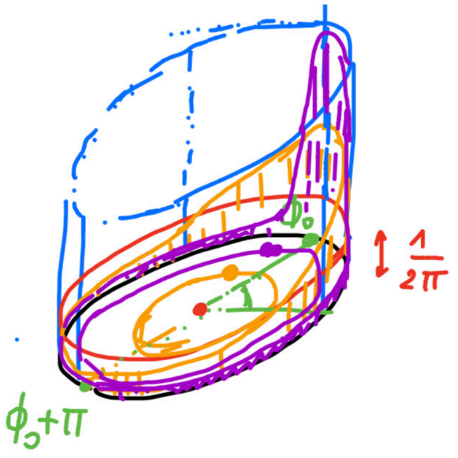
$\Rightarrow$ se $Re^{i\theta_0}$ è un punto di discontinuità di tipo salto (ovvero $\exists\, g^- = \lim_{\theta \to \theta_0^-} g(Re^{i\theta}) \lessgtr \lim_{\theta \to \theta_0^+} g(Re^{i\theta}) = g^+$) allora:

$$g^- := \liminf_{\substack{r \to R \\ \theta \to \theta_0}} u(re^{i\theta}) \lessgtr \limsup_{\substack{r \to R \\ \theta \to \theta_0}} u(re^{i\theta}) =: g^+$$

Queste proprietà derivano dal fatto che P_R è una densità di probabilità e pertanto u risulta una media pesata di g: ponendo $s = \frac{r}{R}$, $P_R(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-s^2}{1+s^2-2s\cos(\theta-\phi)} \equiv P(s, \theta, \phi)$ con $s \in [0,1)$. Fissato $\phi = \phi_0$, per $|\theta - \phi_0| > \delta$ si ha:

$$P(s, \theta, \phi_0) < \frac{1-s^2}{1+s^2-2s\cos\delta} \xrightarrow[s \to 1]{} 0 \text{ uniformemente}$$

mentre per $\theta \equiv \phi_0$, $s \to 1$ si ha $P(s, \phi_0, \phi_0) \longrightarrow +\infty$



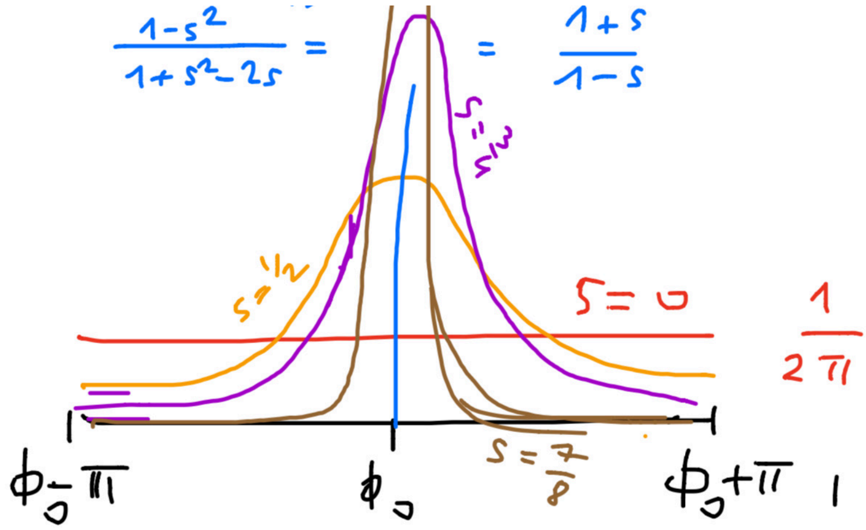


grafico di $P_R(r, \theta, \phi_0) \equiv P(s, \theta, \phi_0)$

PROPOSIZIONE:

Se g è continua in θ_0 allora $|g(\theta) - g(\theta_0)| < \varepsilon$ per $|\theta - \theta_0| < \delta$.

DIM.:

$$\left|u(re^{i\theta}) - \underset{g(\theta_0)}{\underset{\shortparallel}{g(Re^{i\theta_0})}}\right| = \left|\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-s^2}{1+s^2-2s\cos(\theta-\phi)}\right](g(\phi) - g(\theta_0))\, d\phi\right|$$

$$\leq \int_{\{|\phi-\theta| \geq \delta\}} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-s^2}{1+s^2-2s\cos\delta}\right](|g(\phi)| + |g(\theta_0)|)\, d\phi + \int_{\{|\phi-\theta|<\delta\}} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-s^2}{1+s^2-2s\cos(\theta-\phi)}\right] \cdot$$

$s-1 < \delta'$

$$[|g(\phi) - g(\theta)| + |g(\theta) - g(\theta_0)|]\, d\phi \leq \varepsilon\Big[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |g(\phi)|\, d\phi}_{<+\infty} + g(\theta_0)\Big] +$$

$$2\varepsilon \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{1-s^2}{1+s^2-2s\cos(\theta-\phi)}\, d\phi}_{=1} \leq \varepsilon \left[\|g\|_{L^1(\partial B_R)} + g(\theta_0) + 2 \right] \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{s \to 1} 0$$

$\square$

Comportamento del nucleo P_R per $r \longrightarrow R$

$\theta \longmapsto P_R(r, \theta, \phi_0)$ converge puntualmente a 0 per $r \longrightarrow R$. D'altra parte, possiamo considerare la misura di probabilità

$$\mu_{r,\theta}(E) := \int_E P_R(r, \theta, \phi)\, d\phi$$

associata alla densità $P_R(r, \theta, \phi)\, d\phi$. Si ha, per $r \to R$, $\theta \to \theta_0$:

$$\mu_{r,\theta}(E) \longrightarrow \mu_{\theta_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } \theta_0 \in E \\ 0 & \text{se } \theta_0 \notin E \end{cases}$$

misura di probabilità "concentrata" in θ_0

$\Rightarrow$ $\mu_{\theta_0} \equiv \delta_{\theta_0} :=$ Delta (o Massa) di Dirac in θ_0

($\equiv$ distribuzione di massa unitaria concentrata in θ_0)

Le misure di probabilità associate al nucleo di Poisson con $\phi = \theta_0$ fissato convergono nel senso delle funzioni di ripartizione ad una delta di Dirac su ∂B_R.

Osservazione:

L'informazione codificata nelle misure non si perde quando $r \to R$ (ovvero sul bordo di B_R) mentre la convergenza puntuale della densità di probabilità NON conserva questa informazione