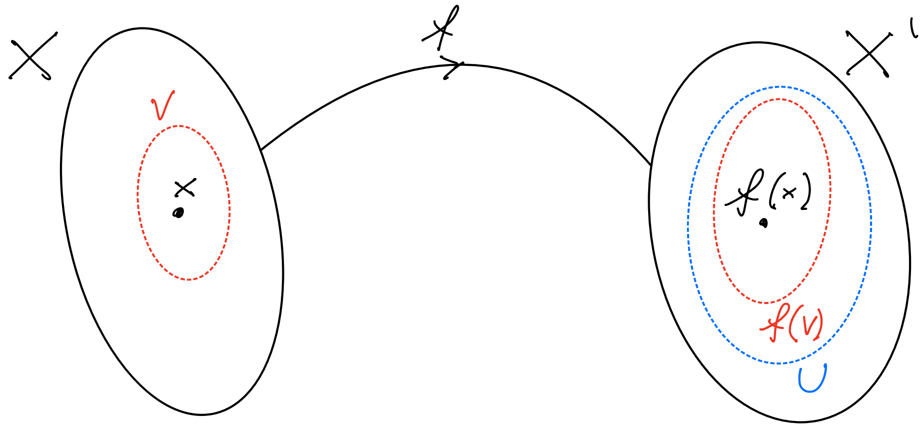
Siano (X, τ), (X', τ') spazi topologici e sia $f: X \to X'$

Def. (Continuità locale):

Si dice che f è CONTINUA in $x \in X$ se vale la seguente proprietà:

$$\forall U \in \mathcal{U}_{f(x)} \ \exists V \in \mathcal{U}_x \ \text{t.c.} \ f(x) \in f(V) \subseteq U$$



Diremo che f è CONTINUA se è continua $\forall x \in X$

Def. (Continuità globale):

f si dice CONTINUA se $\forall A \in \tau'$ $f^{-1}(A) \in \tau$

Teorema:

la definizione locale e la definizione globale sono equivalenti

Dim.

Come per gli spazi metrici

N.B. Tipicamente si utilizza la definizione globale.

N.B.

Nel caso in cui τ sia generato da una base $\mathcal{B}$, il controllo va effettuato non più su tutti gli aperti di τ, bensì solo sugli elementi della base $\mathcal{B}$!!!

$\Rightarrow$ se $f: (X, \tau(\mathcal{B})) \longrightarrow (X', \tau(\mathcal{B}'))$ è continua e $B' \in \mathcal{B}'$, $f^{-1}(B') \in \tau(\mathcal{B})$?

es.

$$Id: (\mathbb{R}^2, \tau_e) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \tau_e)$$

generata da $B_r(p)$ — generata da $D_r(p)$

$\Rightarrow$ Id è continua perché $\forall B' \in \mathcal{B}'$ $f^{-1}(B') \in \tau_e$

Proposizione:

f è continua $\Leftrightarrow$ $\forall B' \in \mathcal{B}'$ $f^{-1}(B') \in \tau(\mathcal{B})$

Dim.

$\Leftarrow$ ovvio (B' è aperto, $f^{-1}(B')$ è aperto)

$\Rightarrow$ Sia $A' \in \tau(\mathcal{B}')$. Devo dimostrare che $f^{-1}(A') \in \tau(\mathcal{B})$.

$\Rightarrow A' = \bigcup_{i \in I} B_i'$ per certi $B_i' \in \mathcal{B}'$

$\Rightarrow f^{-1}(A') = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i') = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i')$

$\Rightarrow$ l'unione di aperti è aperto ✓

q.e.d.

Teorema:

Una funzione $f: (X, \tau) \to (X', \tau')$ è continua se e solo se $\forall C' \in \mathcal{T}' \; f^{-1}(C') \in \mathcal{T}$

Dim.

$(\Rightarrow)$ f è continua $\Rightarrow C' \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{C}_{X'}(C') \in \tau'$

$\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}_{X'}(C')) \in \tau \Rightarrow \mathcal{C}_X(f^{-1}(C')) \in \tau$

$\Rightarrow f^{-1}(C') \in \mathcal{T}$

$(\Leftarrow)$ $\forall C' \in \mathcal{T}' \; f^{-1}(C') \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow U' \in \tau', \; \mathcal{C}_{X'}(U') \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}_{X'}(U')) \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_X(f^{-1}(U')) \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}(U') \in \tau$

q.e.d.

N.B.

Non è vero, in generale, che dato $A \in \tau$, $f(A) \in \tau'$ con $f: (X, \tau) \to (X', \tau')$

es.

$$\begin{aligned} f: (\mathbb{R}, \tau_e) &\to (\mathbb{R}, \tau_e) \\ x &\longmapsto 1 \end{aligned} \Rightarrow f \text{ è continua}$$

MA:

$$f(\underset{\substack{\cap \\ \tau_e}}{(0,2)}) = \{1\} \notin \tau_e$$

Def. (Funzione Aperta):

Una funzione per cui l'immagine di ogni aperto è aperta si dice FUNZIONE APERTA.

Def. (Funzione Chiusa):
Una funzione per cui l'immagine di ogni chiuso è chiusa si dice FUNZIONE CHIUSA.

esempi:

1) $Id: (X, \tau_{discreta}) \longrightarrow (X, \tau_{banale})$ con $|X| \geq 2$

$$x \longmapsto x$$

$\Rightarrow \forall A \in \tau_{discreta}$ $Id(A) = A$, quindi se $A \neq \emptyset, X$ si ha $f(A) \notin \tau_{banale}$

$\Rightarrow f$ NON è aperta né chiusa (ragionamento analogo)

$\Rightarrow$ tuttavia, f è continua.

2) $f: (\{a,b\}, \tau_{discreta}) \longrightarrow (\{a,b\}, \{\emptyset, \{a,b\}, \{a\}\})$

$$x \longmapsto a$$

$\Rightarrow f$ È aperta, perché $\forall A \in \tau_{discreta}$ $f(A) = \{a\} \vee f(A) = \emptyset$ (se $A = \emptyset$) entrambi aperti.

$\Rightarrow f$ NON è chiusa:

$\{a\} \notin \mathcal{T}$ sullo spazio di arrivo dato che $C_{\{a,b\}}(\{a\}) = \{b\} \notin \tau$

$\Rightarrow \{a\} \in \mathcal{T}$ in $(\{a,b\}, \tau_{discreta})$ e $f(\{a\}) \notin \mathcal{T}$

3) $f: (\{a,b\}, \tau_{discreta}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$

$$a \longmapsto 0$$
$$b \longmapsto 1$$

le possibili immagini sono $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$
che sono tutti chiusi in $(\mathbb{R}, \tau_e)$

$\Rightarrow f(C) \in \mathcal{T} \ \forall C \in \mathcal{T}$ su $(\{a,b\}, \tau_{discreta})$

$\Rightarrow f$ É chiusa.

$\Rightarrow \{0\} \notin \tau_e \wedge f(\{a\}) = \{0\}$ con $\{a\} \in \tau_{discreta}$

$\Rightarrow f$ Non è aperta.

4) $Id : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ con τ topologia qualunque su X.
$\quad x \longmapsto x$

$\Rightarrow f$ è CHIUSA e APERTA (banale)

Teorema:

Siano X, Y, Z spazi topologici. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono funzioni continue, allora LA COMPOSIZIONE $h = g \circ f : X \longrightarrow Z$ è CONTINUA

Def. (Omeomorfismo):

Siano $(X, \tau), (X', \tau')$ spazi topologici. Si dice OMEOMORFISMO di (X, τ) e (X', τ') ogni applicazione $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ t.c.

1) f è biettiva
2) f, f^{-1} sono continue
(ovvero f è aperta e continua)

N.B. $Id : (\mathbb{R}, \tau_{discreta}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{banale})$ è biettiva

MA non è APERTA, quindi NON è un omeomorfismo.

Proposizione:

La composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo

Dim.

1) f, g omeomorfismi $\Rightarrow$ f, g biettivi $\Rightarrow$ $h = g \circ f$ biettiva ✓

2) f, g, f^{-1}, g^{-1} continue $\Rightarrow$ h, h^{-1} continue

$\Rightarrow$ $h = g \circ f$ è omeomorfismi

q.e.d.

N.B.

La TOPOLOGIA studia gli spazi topologici A MENO DI OMEOMORFISMI

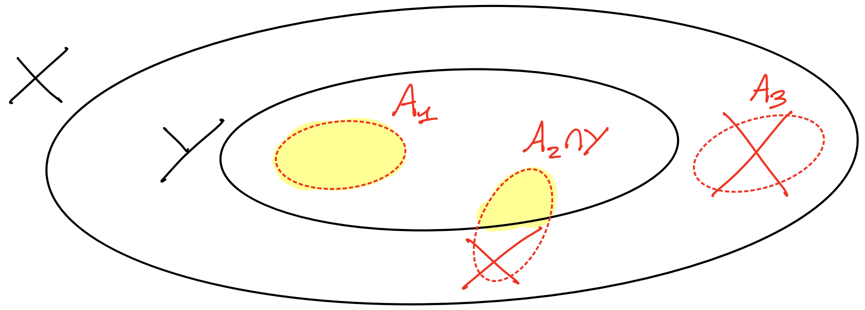
Def. (Invariante Topologico):

Un INVARIANTE TOPOLOGICO è una qualunque proprietà di uno spazio topologico che è preservata dagli omeomorfismi

es.

Connessione, compattezza, proprietà di separazione ecc.

Topologia Indotta:



Def. (Topologia Indotta)

Sia $Y \subseteq (X, \tau)$, la TOPOLOGIA su Y INDOTTA da τ è definita come la famiglia di sottoinsiemi di Y della forma $A \cap Y$ con $A \in \tau$ (A aperto in X).

$$\Rightarrow \tau_Y = \{A \cap Y \mid A \in \tau\}$$

Verifico che τ_Y indotta da τ su Y è effettivamente una topologia:

1) $\emptyset, Y \in \tau_Y$: $\quad \emptyset = \emptyset \cap Y$ con $\emptyset \in \tau$ ✓

$\quad Y = X \cap Y$ con $X \in \tau$ ✓

2) $A_1, A_2 \in \tau_Y \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau_Y$

$\Rightarrow A_1 = A_1' \cap Y$, $A_2 = A_2' \cap Y$ con $A_1', A_2' \in \tau$

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = (A_1' \cap Y) \cap (A_2' \cap Y) = (A_1' \cap A_2') \cap Y$

$\Rightarrow (A_1' \cap A_2') \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau_Y$ ✓

3) $\{A_s \cap Y\}_{s \in S} \subseteq \tau_Y$ con $A_s \in \tau$

$\Rightarrow \bigcup_{s \in S} \{A_s \cap Y\} = \left(\bigcup_s A_s\right) \cap Y$ con $\bigcup_s A_s \in \tau$

$\Rightarrow \bigcup_{s \in S} \{A_s \cap Y\} \subseteq \tau_Y$ ✓

N.B. Un aperto di Y NON è necessariamente aperto di X

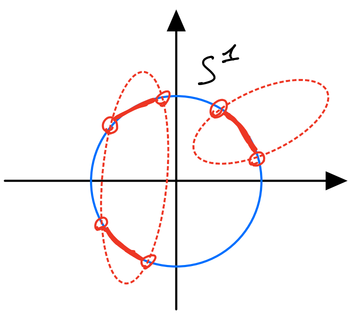
$A \in \tau_Y \not\Rightarrow A \in \tau$

es. $X = \mathbb{R}$, $\tau = \tau_e$, $Y = [0, 1]$

$\Rightarrow Y \notin \tau \wedge Y \in \tau_Y$

<u>Def.</u> (Sottospazio Topologico):
Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ dotato di topologia indotta si dice Sottospazio Topologico di X.

<u>es.</u>
$(\mathbb{R}^2, \tau_e)$, $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \partial B_1((0,0))$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ una base per la topologia indotta da τ_e su S^1 è l'insieme di tutti gli archi di circonferenza di S^1 con gli estremi esclusi

<u>Proposizione:</u>
Dato lo spazio topologico (X, τ), $Y \subseteq X$.
1) $Y \in \tau \Rightarrow \forall A \in \tau_Y,\ A \in \tau$
2) $Y \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall C \in \mathcal{T}_Y,\ C \in \mathcal{T}$

<u>Dim.</u>
1) $Y \in \tau \Rightarrow A \in \tau_Y \Rightarrow A = U \cap Y$ con $U \in \tau$
$\Rightarrow U \in \tau \wedge Y \in \tau \Rightarrow A = U \cap Y \in \tau$ ✓

2) Analoga a quella sopra:
$Y \in \mathcal{T} \Rightarrow C \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow C = U \cap Y$ con $U \in \mathcal{T}$
$\Rightarrow U \in \mathcal{T} \wedge Y \in \mathcal{T} \Rightarrow C = U \cap Y \in \mathcal{T}$ ✓

q.e.d.