

MODELLI CON RITARDO

In generale, sono modelli del tipo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau))$$

con dato iniziale t.c. $x(s) = \phi(s)$, $s \in [-\tau, 0]$.

Esempio:

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2\tau} x(t-\tau)$$

\Rightarrow verificare che la soluzione è data da:

$$x(t) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right)$$

\Rightarrow aumentando τ si accentuerà il comportamento periodico della soluzione.

Modello di Hutchinson [logistica con ritardo]:

$$\dot{x} = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{q}\right), \quad r, q, \tau > 0$$

Nasce dallo studio della crescita di una popolazione di insetti

equilibri:

si calcolano nel seguente modo:

$$f(x(t), x(t-\tau)) = 0 \Rightarrow f(x^*, x^*) = 0$$

$$\Rightarrow x^* = 0 \vee x^* = q$$

stabilità lineare per DDE:

consideriamo:

$$\partial_{x(t)} f \Big|_{x^*, x^*} = J_0^*(x^*) = r \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{q}\right) \Big|_{x^*}$$

$$\Rightarrow J_0^*(0) = r, \quad J_0^*(q) = 0$$

$$\partial_{x(t-\tau)} f \Big|_{x^*, x^*} = \Im_\tau^*(x^*) = -\frac{\nu}{q} x^*$$

$$\Rightarrow \Im_0^*(0) = 0, \quad \Im_\tau^*(q) = -\nu$$

Consideriamo la linearizzazione di $\dot{x}(t)$:

$$f(x(t), x(t-\tau)) = (\partial_{x(t)} f \quad \partial_{x(t-\tau)} f) \cdot \begin{pmatrix} x(t) - x^* \\ x(t-\tau) - x^* \end{pmatrix}$$

\Rightarrow sia $s(t) := x(t) - x^*$, si ha quindi il DDE linearizzatore:

$$s'(t) = \Im_0^* \cdot s(t) + \Im_\tau^* \cdot s(t-\tau)$$

Consideriamo la perturbazione $s(t) = ce^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, otteniamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda - \Im_0^* - \Im_\tau^* \cdot e^{-\lambda \tau} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

che equivale (se consideriamo $\lambda = \mu + i\nu$) al seguente sistema:

$$\begin{cases} \mu - \Im_0^* - \Im_\tau^* e^{-\mu \tau} \cos(\nu \tau) = 0 \\ \nu + \Im_\tau^* e^{-\mu \tau} \sin(\nu \tau) = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow l'equilibrio sarà linearmente stabile (al variare di $\tau > 0$) se $\operatorname{Re}(\lambda) = \mu(\tau) < 0$

Nel modello di Hutchinson si ha:

$$\mu(0) - \Im_0^*(x^*) - \Im_\tau^*(x^*) = 0,$$

$$x^* = 0:$$

$$\Rightarrow \mu(0) - \nu = 0 \Rightarrow \mu(0) = \nu > 0$$

$$x^* = q :$$

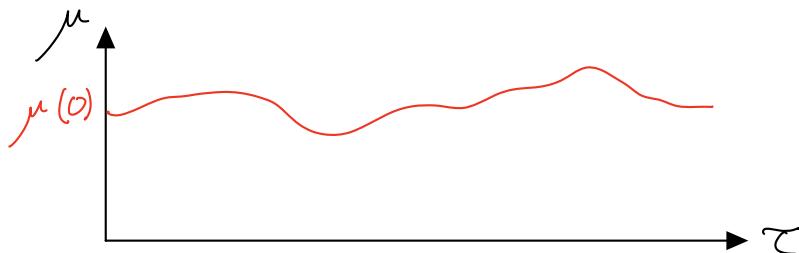
$$\Rightarrow \mu(0) + v = 0 \Rightarrow \mu(0) = -v < 0$$

$$\begin{cases} \mu - \zeta_0^* - \zeta_\tau^* e^{-\mu\tau} \cos(v\tau) = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow -\zeta_0^* - \zeta_\tau^* \cos(v\tau) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(v\tau) = -\frac{\zeta_0^*}{\zeta_\tau^*}, \quad \zeta_\tau^* \neq 0$$

$$x^* = 0 :$$

$$\Rightarrow \zeta_\tau^* = 0 \wedge \zeta_0^* = v \Rightarrow -v = 0 \quad \leftarrow$$



$$x^* = q :$$

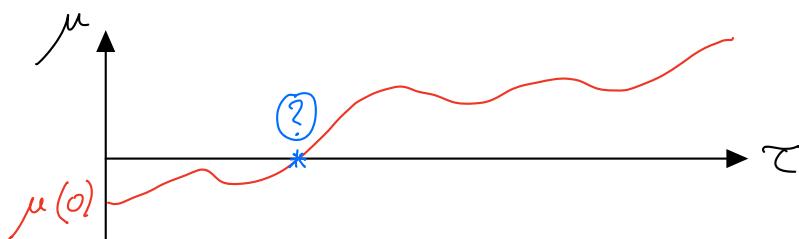
$$\Rightarrow \zeta_0^* = 0 \wedge \zeta_\tau^* = v \Rightarrow \cos(v\tau) = 0 \Leftrightarrow v\tau = \frac{\pi}{2} + N\pi$$

\Rightarrow il ritardo critico è dato da $v\tau^* = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow v^* + \zeta_\tau^* e^{-\mu\tau} \sin(v^*\tau) = 0$$

$$\Rightarrow \left(v\tau = \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow v^* - v \cdot 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow v^* = v$$

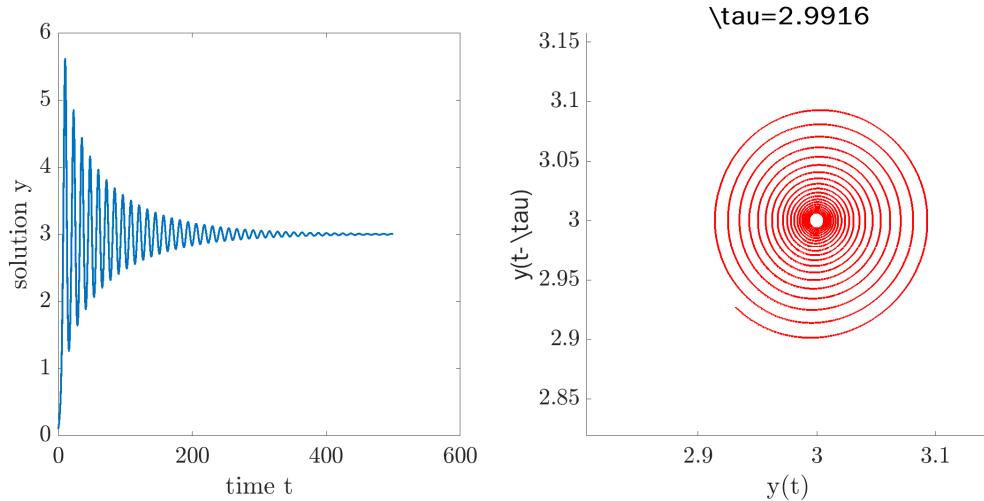
$$\Rightarrow \boxed{\tau^* = \frac{\pi}{2v}}$$



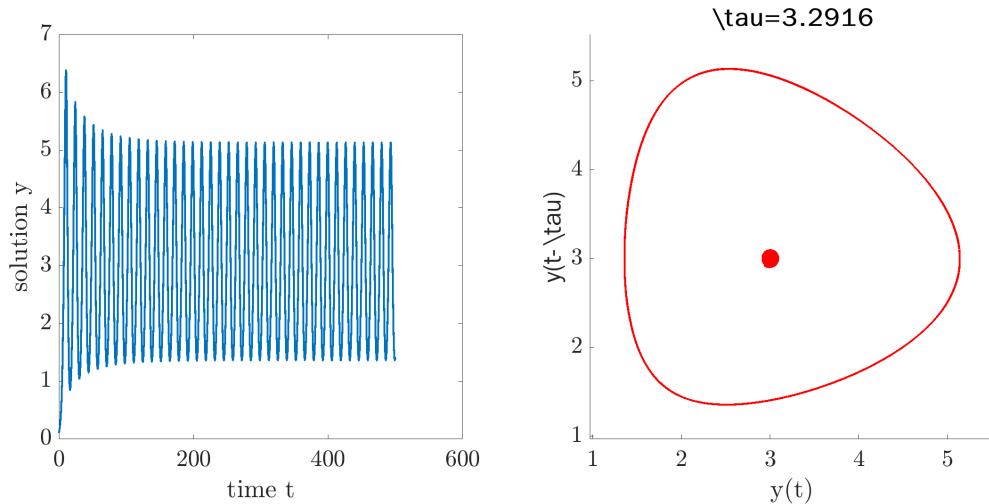
Osservazione:

Per $\tau^* = \frac{\pi}{2v}$, nel Modello di Hutchinson si ha una biforcazione di tipo Hopf.

$$\nu = 0.5, \quad q = 3, \quad \tau = \frac{\pi}{2\nu} - 0.15$$



$$\nu = 0.5, \quad q = 3, \quad \tau = \frac{\pi}{2\nu} + 0.15$$



MODELLO S.I.R. CON RITARDO:

Sia τ un ritardo t.c. $\tau \in (0, 1)$, $\tau \ll 1$.

Introducendo τ nel modello S.I.R. si ha un nuovo modello:

$$\begin{cases} s' = -\beta \cdot s(t-\tau) \cdot i(t-\tau) \\ i' = \beta \cdot s(t-\tau) \cdot i(t-\tau) - \gamma \cdot i(t) \\ r' = \gamma \cdot i(t) \end{cases}$$

N.B.

- 1) Si tratta di equazioni **funzionali**
- 2) Va definito un dato iniziale compatibile nell' intervallo $[-\tau, 0]$

Notiamo che, se $\tau \lll 1$, il modello si può approssimare a:

$$\begin{cases} s' = -\beta \cdot s \cdot i + \tau \cdot \phi(s, i, \tau) \cdot s \cdot i \\ i' = \beta \cdot s \cdot i - \tau \cdot \phi(s, i, \tau) \cdot s \cdot i - \gamma \cdot i \end{cases}$$

con:

$$\phi(s, i, \tau) = \frac{\beta(\beta(s-i) - \gamma)}{s + \tau \cdot \beta \cdot (s-i)}$$

(tramite sviluppo di Taylor:

$$i(t-\tau) \cdot s(t-\tau) \approx is + o(is)', (is)' = \dots$$

Controllo della produzione di globuli bianchi

(McKay-Glass - 1977):

⇒ si ha:

$$\frac{dC}{dt} = + (C(t-\tau)) - g C$$

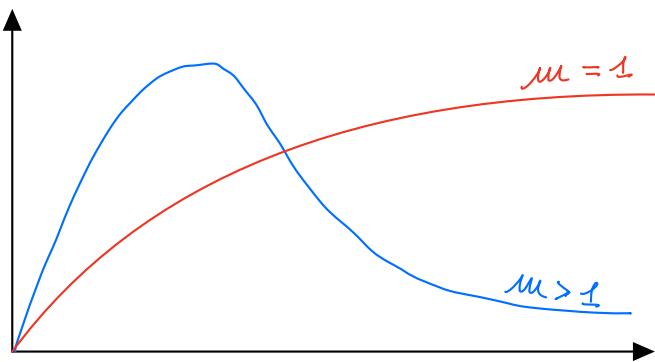
con:

$+ =$ produzione di cellule $[\frac{\text{cell}}{\text{mm}^3}]$

$g =$ tasso di mortalità delle cellule $[\text{giorni}^{-1}]$

solitamente si ha $+ (C) = \frac{\lambda_0 \alpha^m C}{\alpha^m + C^m}$, $\lambda_0, \alpha > 0$

$[\alpha] = \frac{\text{cell}}{\text{mm}^3}$, $[\lambda_0] = \text{giorni}^{-1}$ ($=:$ **funzione di Hill**):



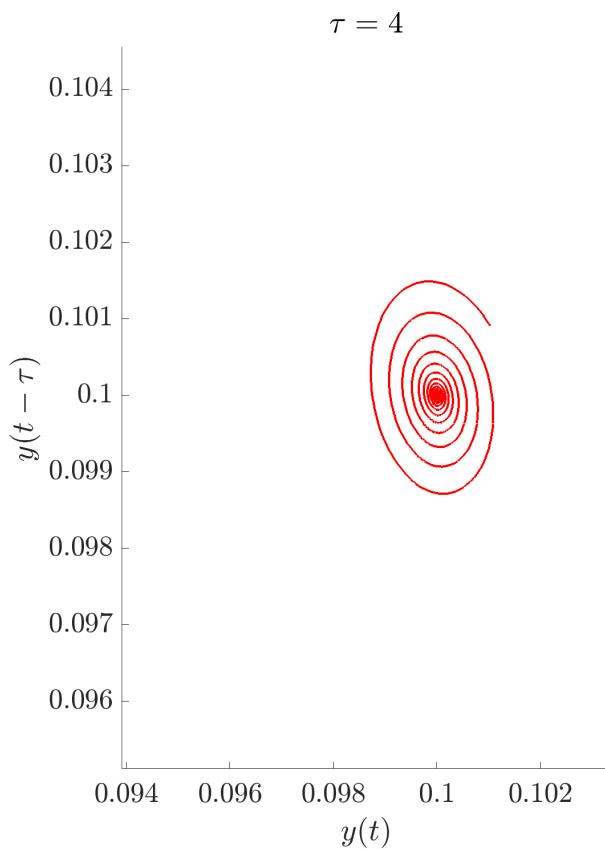
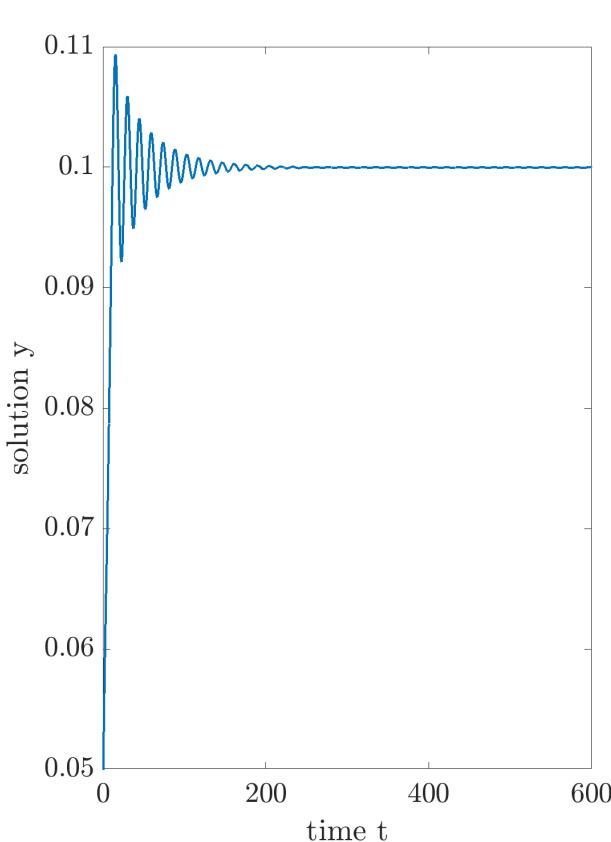
\Rightarrow la scelta di τ è data da funzioni di Hill usate per descrivere l'assorbimento dell'ossigeno nel corpo.

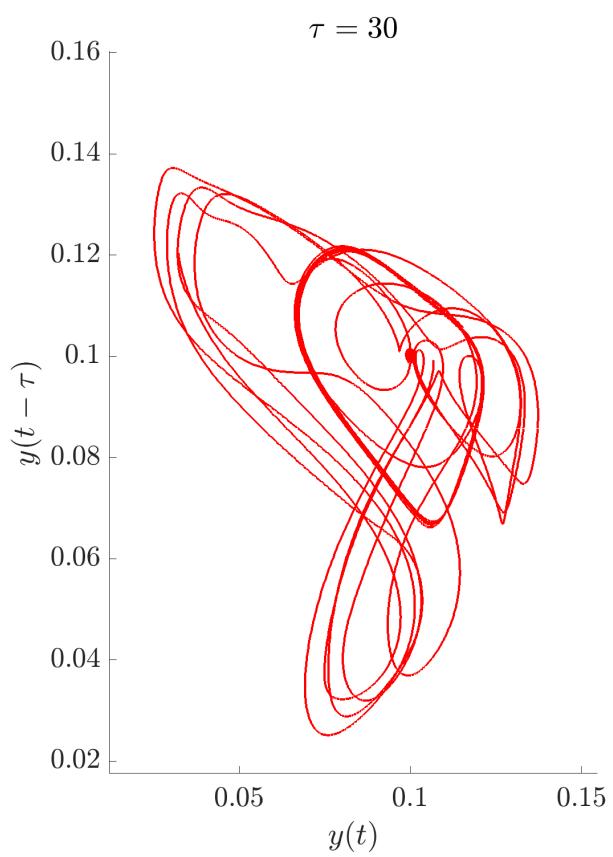
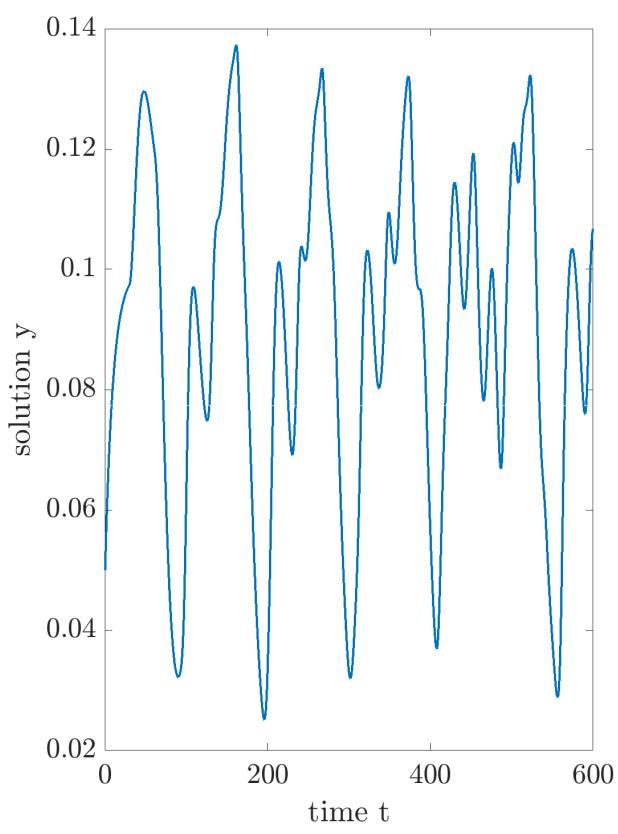
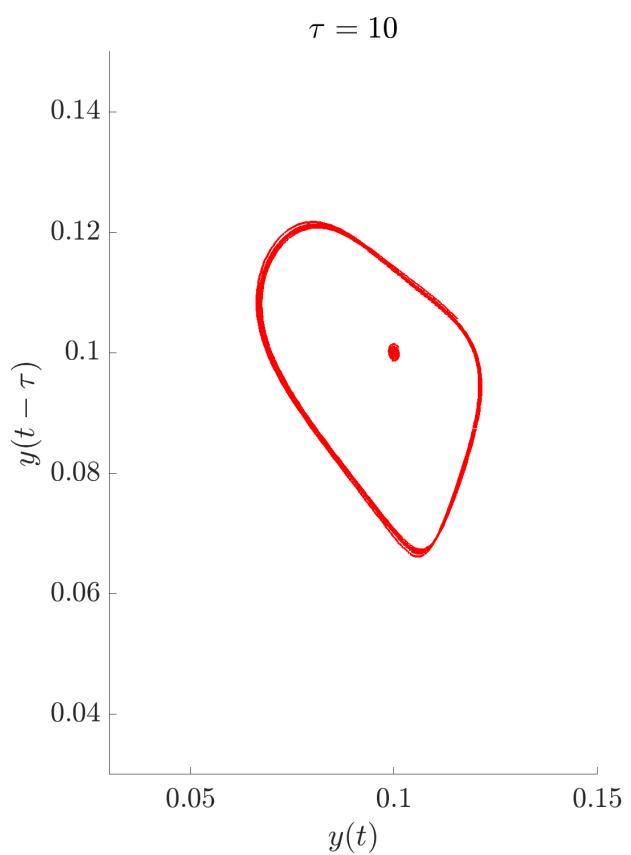
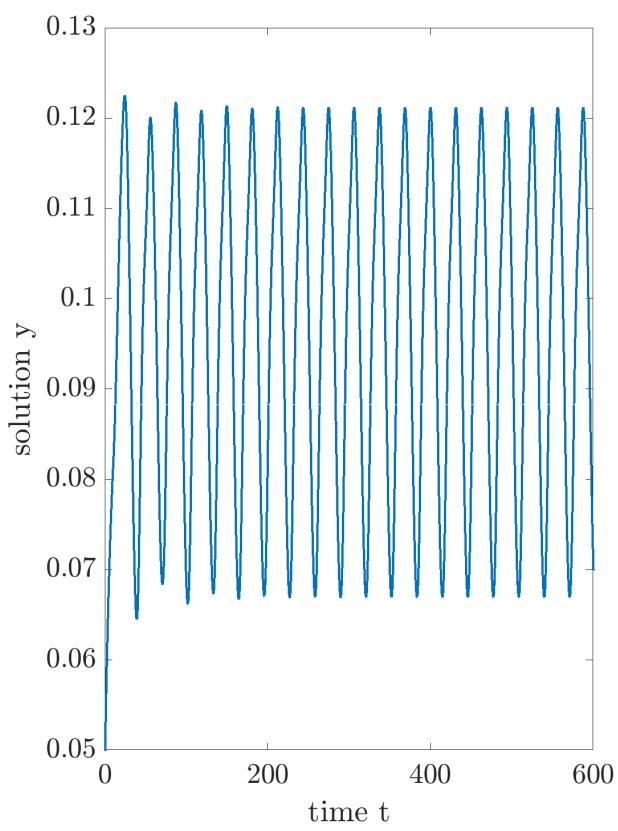
Adimensionalizzazione:

$$x = \frac{C}{a}, \quad \bar{E} = g t, \quad \bar{\tau} = g \tau, \quad \gamma = \frac{\lambda_0}{g}$$

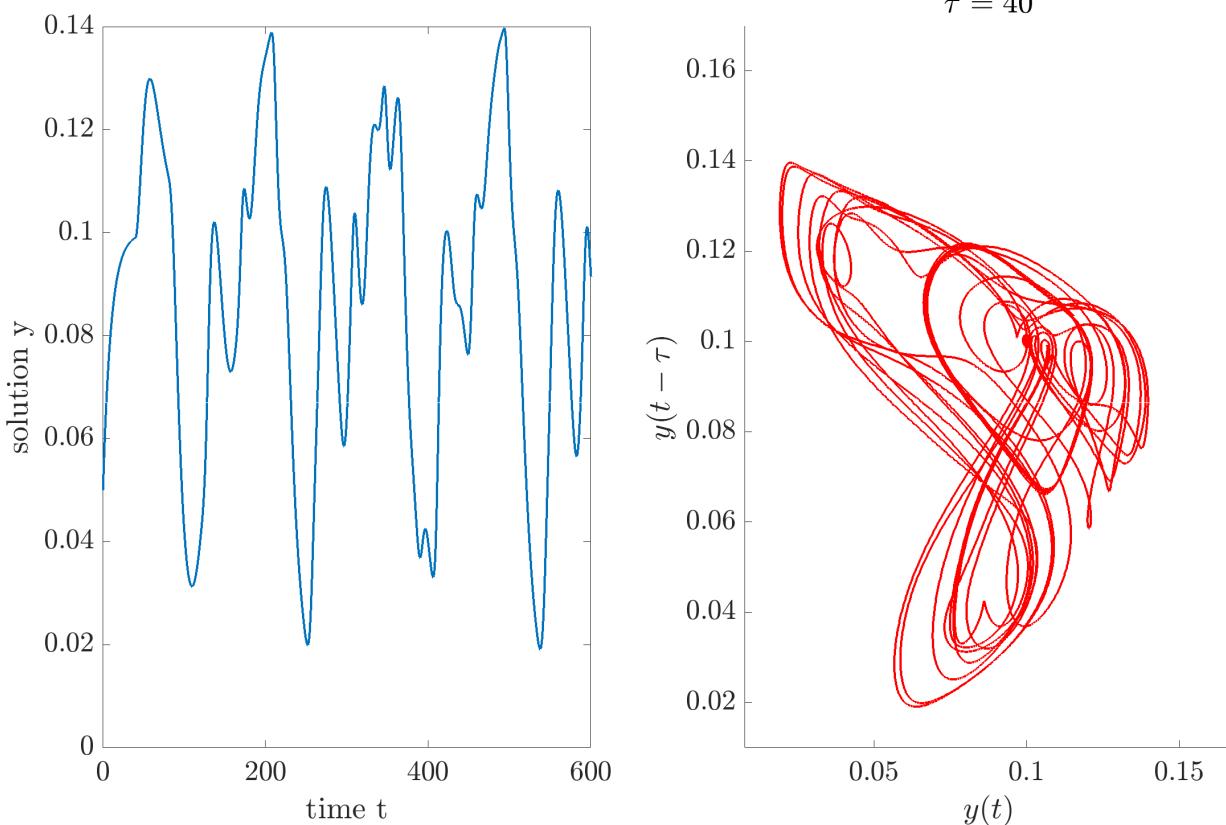
\Rightarrow il modello diventa:

$$\dot{x} = \gamma \frac{x(\bar{E} - \bar{\tau})}{1 + x^m(\bar{E} - \bar{\tau})} - x(t)$$





CAOS



Osservazioni:

Il ritardo considerato finora è costante e uico $\tau > 0$. In generale, si può pensare a modelli in cui $\tau = \tau(t, x(t))$ oppure in cui vi sono ritardi multipli ($\dot{x} = f(t, x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m))$). Inoltre, il limite di questi modelli è che il ritardo è valutato ad un determinato punto dell'asse temporale.

I MODELLI INTEGRO DIFFERENZIALI (es. Equazioni di Volterra) introducono una distribuzione di ritardo, ovvero "pesano" la storia con un kernel $K(s) \geq 0$ t.c. $\int_0^{+\infty} K(s) ds = 1 \wedge \int_0^{+\infty} s K(s) ds = \tau$

Esempio (Lotka - Volterra integrodifferenziale - 1903):

$$\frac{dx}{dt} = v x \left(1 - \frac{1}{q} \int_{-\infty}^t x(s) K(t-s) ds \right)$$

