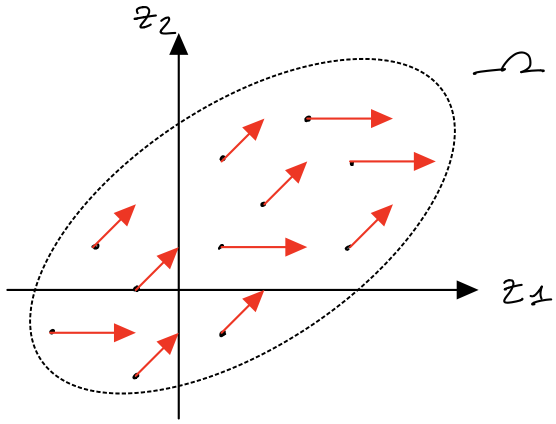
Def. (Campo Vettoriale):

Un CAMPO VETTORIALE su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è una mappa $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

es.: $n = 2$



Tutti i campi da noi trattati saranno sempre C^∞

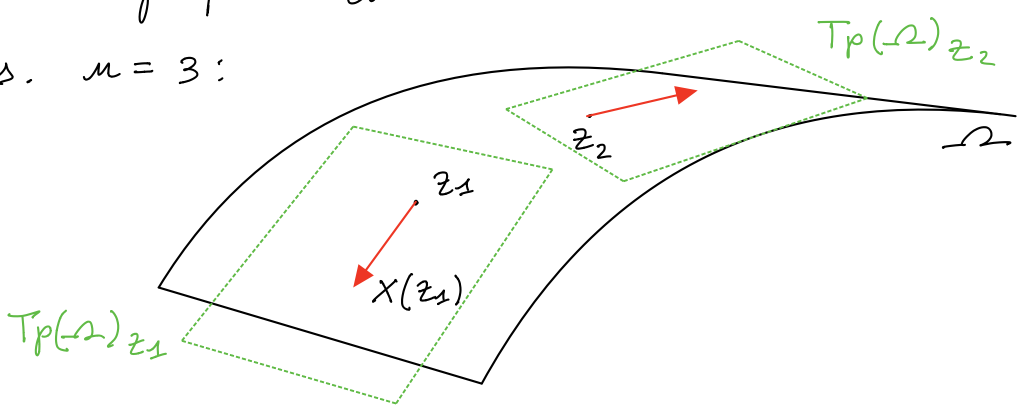
Oss.

Più precisamente, un campo vettoriale è definito come una mappa

$$\begin{aligned} X: \Omega &\longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n \\ z &\longmapsto (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{PUNTO DI APPLICAZIONE}}}{z}, X(z)) \end{aligned}$$

Tale approccio è utile, per esempio, nel caso Ω fosse una superficie curva:

es. $n = 3$:



$\Rightarrow$ In tal caso, si indica $\tilde{X}: M \longrightarrow TM$ dove TM è il FIBRATO TANGENTE di M (unione di tutti i piani tangenti di M).

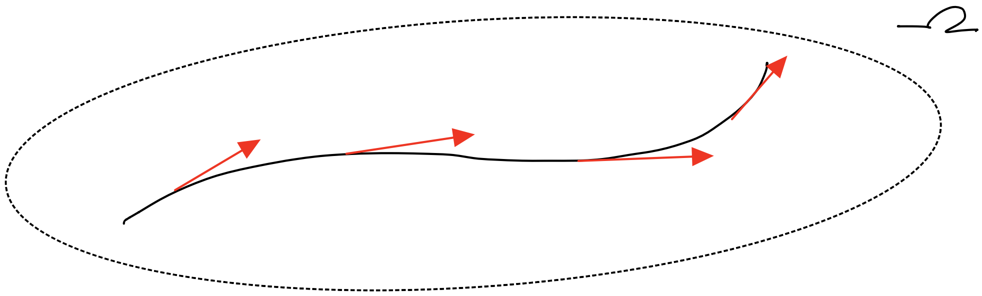
Associamo ora ad un campo vettoriale il sistema di ODE
$\dot{z} = X(z)$ con $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

<u>Def.</u> (Curva Integrale):

Una CURVA INTEGRALE del campo X è una funzione differenziabile $z : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$ t.c. $\dot{z} = X(z)$ $\forall t \in I$

<u>N.B.</u>

Una curva integrale è semplicemente una SOLUZIONE del sistema di ODE $\dot{z} = X(z)$, quindi z è in ogni punto, TANGENTE A X.



<u>N.B.</u>

X (ovvero il sistema $\dot{z} = X(z)$) è un SISTEMA AUTONOMO (non dipende esplicitamente da t), di conseguenza, se $z : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$ è una curva integrale e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora anche $w(t) := z(t - t_0)$ è una curva integrale (INVARIANZA PER TRASLAZIONI TEMPORALI)

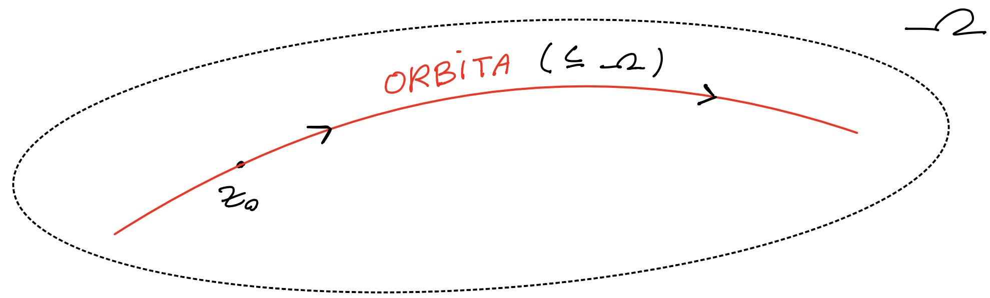
Si dice che Ω è lo SPAZIO DELLE FASI per $\dot{z} = X(z)$

<u>Def.</u> (Orbita):

Un' ORBITA del campo X è l'immagine di una curva integrale orientata nel verso dei tempi crescenti.

L'insieme di tutte le orbite è detto **Ritratto in Fase del campo X.**

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \implies z : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$$

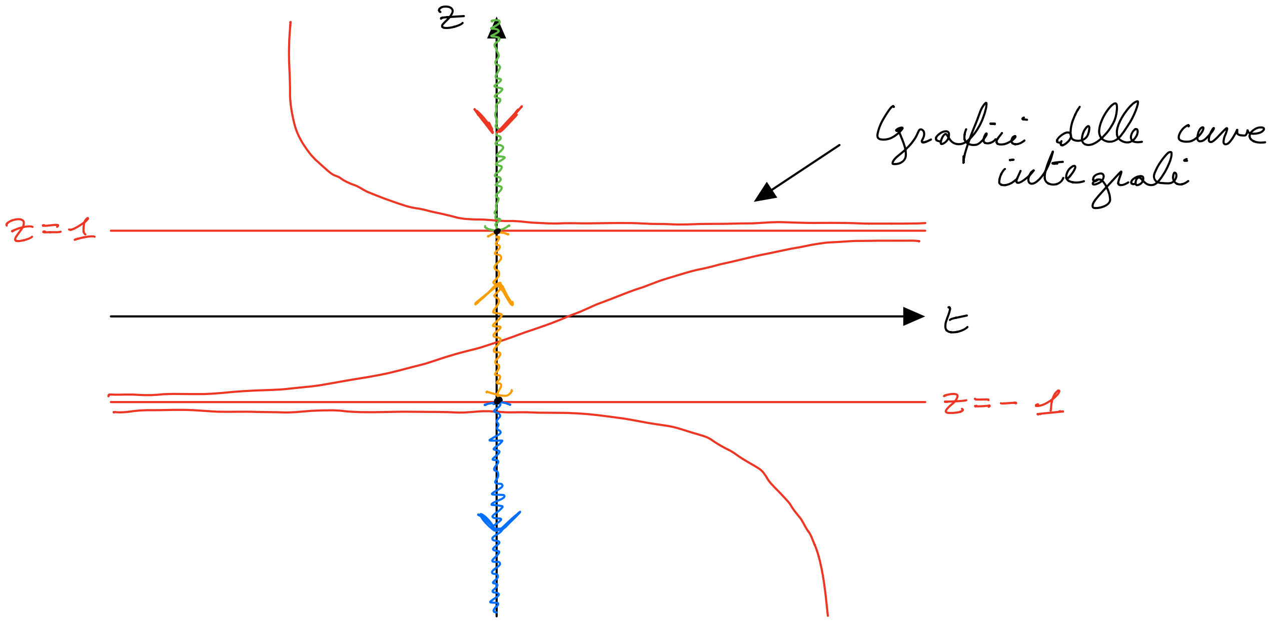


Ad ogni orbita si associa l'orientazione concorde con quella della curva integrale z.

<u>esempio:</u> studi qualitativi vs. ritratto in fase

$$\Omega = \mathbb{R}, \quad X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad X(z) = 1 - z^2$$

$$\implies \dot{z} = 1 - z^2$$



Quali sono le orbite del sistema?

$$\Big\{ \underbrace{\{1\}, \{-1\}}_{\text{equilibri}}, \underbrace{(-\infty, -1)}_{z_0 < -1}, \underbrace{(1, +\infty)}_{z_0 > 1}, \underbrace{(-1, 1)}_{-1 < z_0 < 1} \Big\} = \text{Ritratto in fase}$$

$\Rightarrow$ Il ritratto in fase VIVE SOLO SULL'ASSE z!!!

Proposizione:

Il ritratto in fase di un sistema di ODE costituisce una partizione dello spazio delle fasi Ω, ovvero:

$\forall z_0 \in \Omega \quad \exists!\, O$ ORBITA di $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $z_0 \in O$

Dim.:

1) $\exists$: sia $z_0 \in \Omega$, considero il PdC

$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ per il Teorema di $\exists!$ locale di Cauchy-Lipschitz $\exists\, z : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$ soluzione del PdC

$\Rightarrow$ tale z è curva integrale passante per z_0, quindi $Im(z) \subseteq \Omega$ è un'orbita contenente z_0

2) $!$: supponiamo di avere O_1, O_2 t.c. $z_0 \in O_1 \cap O_2$

$\Rightarrow \exists\, z_1, z_2$ curve integrali definite su I_1, I_2 rispettivamente t.c. $z_1(t_1) = z_2(t_2) = z_0$ per certi $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$

$\Rightarrow$ definisco $w_1 = z_1 + t_1$, $w_2 = z_2 + t_2$

$\Rightarrow$ tali $w_{1,2}$ sono soluzioni del sistema (invarianza per traslazione temporale) e si ha

$w_1(0) = z_0 = w_2(0)$ $\lightning$ (per il Teorema di $\exists!$ locale)

q.e.d.

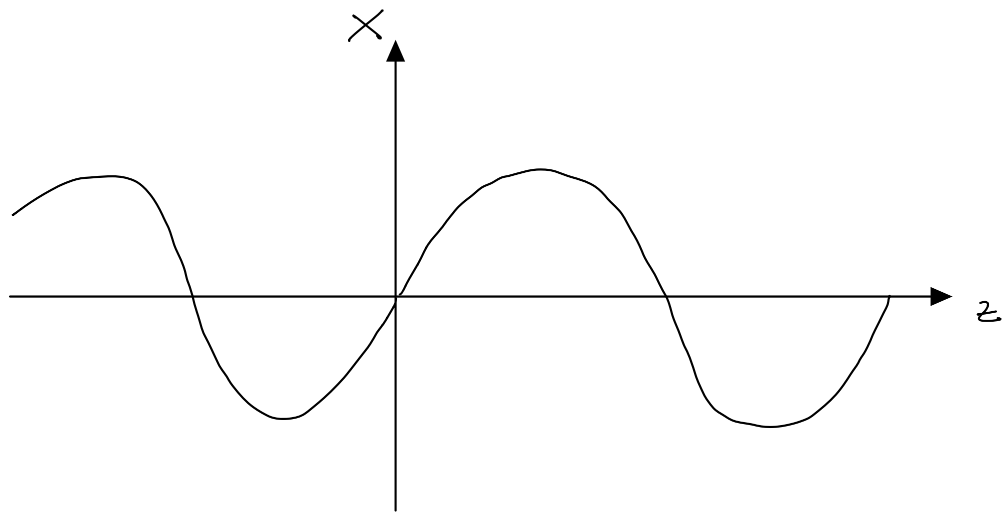
⇒ Per ogni punto passa 1 e 1 sola orbita!

Inoltre, grazie alla proposizione, si ha che curve integrali con uguale orbita differiscono per traslazione in t

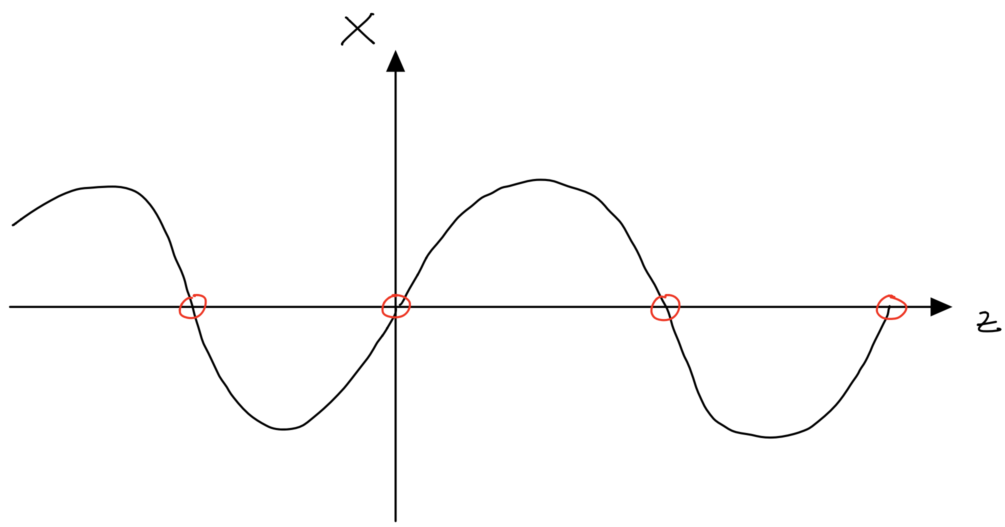
<u>esempio</u> (ritratto in fase 1D):

$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\dot{X} = \sin z$

1) Traccio il grafico di $f(z) = \sin z$:



2) Gli equilibri sono gli zeri di $f(z) = \sin z$:

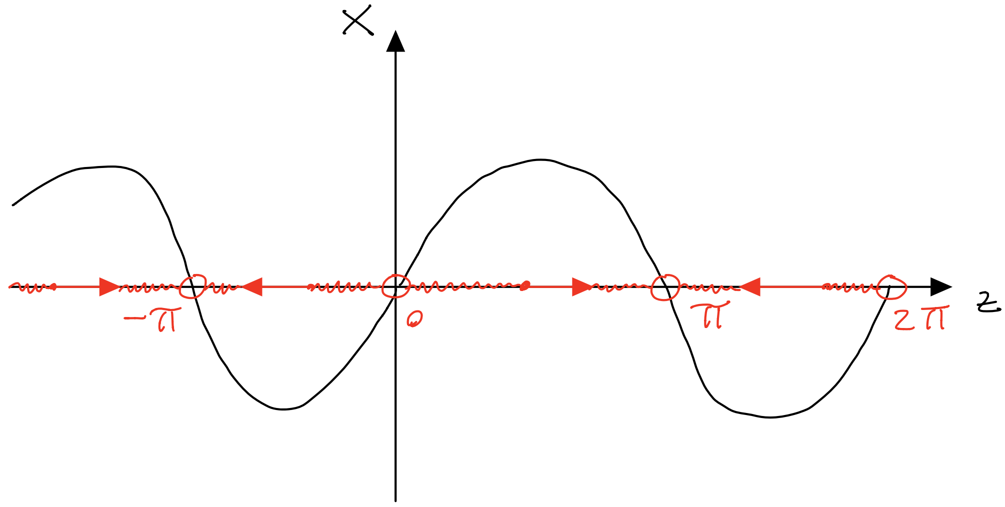


$\Rightarrow \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ = insieme degli equilibri.

3) Stabilisco il verso di percorrenza:

⇒ sarà verso dx se $\sin z > 0$, verso sx se $\sin z < 0$

quindi si ha:



$\Rightarrow$ l'orbita parte da 0 e arriva fino a π perché in tale intervallo la "velocità" $\dot{z} = \sin z$ è sempre positiva

$\Rightarrow$ $O_1 = (0, \pi)$

$\Rightarrow$ analogamente $O_2 = (-2\pi, -\pi)$

$\Rightarrow$ in $(\pi, 2\pi)$ accade la stessa cosa, ma il verso è opposto (verso sx) perché in tale intervallo la "velocità" $\dot{z} = \sin z$ è sempre negativa

$\Rightarrow$ le orbite sono quindi:
$(0, \pi), (\pi, 2\pi), \dots, (k\pi, (k+1)\pi)$ con orientazione concorde con il segno di $\sin z$

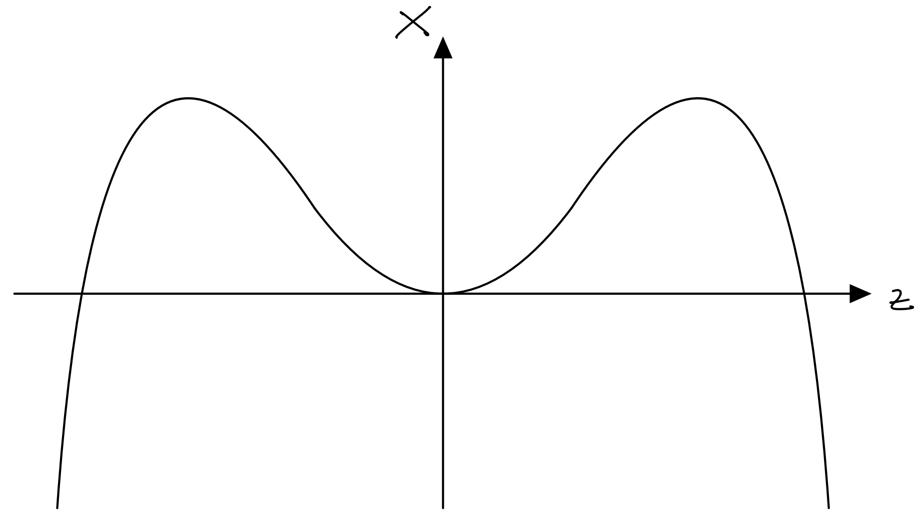
$\Rightarrow$ Si nota chiaramente che ci sono 2 tipi di equilibri: ATTRATTIVI (es. $\{-\pi\}, \{\pi\}$) e REPULSIVI (es. $\{0\}, \{2\pi\}$)

$\Rightarrow$ equilibri attrattivi sono della forma $\{k\pi\}$ con k dispari

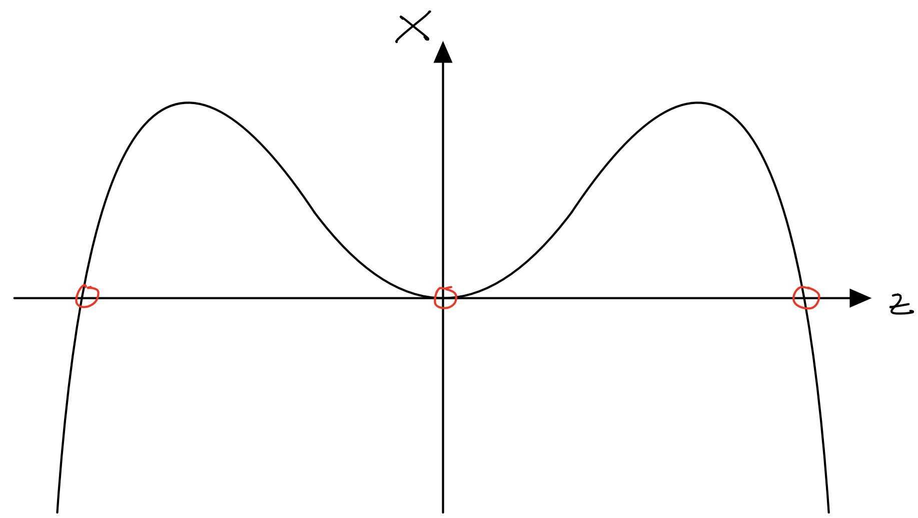
$\Rightarrow$ equilibri repulsivi sono della forma $\{k\pi\}$ con k pari.

es.: disegnare il ritratto in fase di $X(z) = z^2 - z^4$

1) Traccio il grafico di $f(z) = z^2 - z^4$:

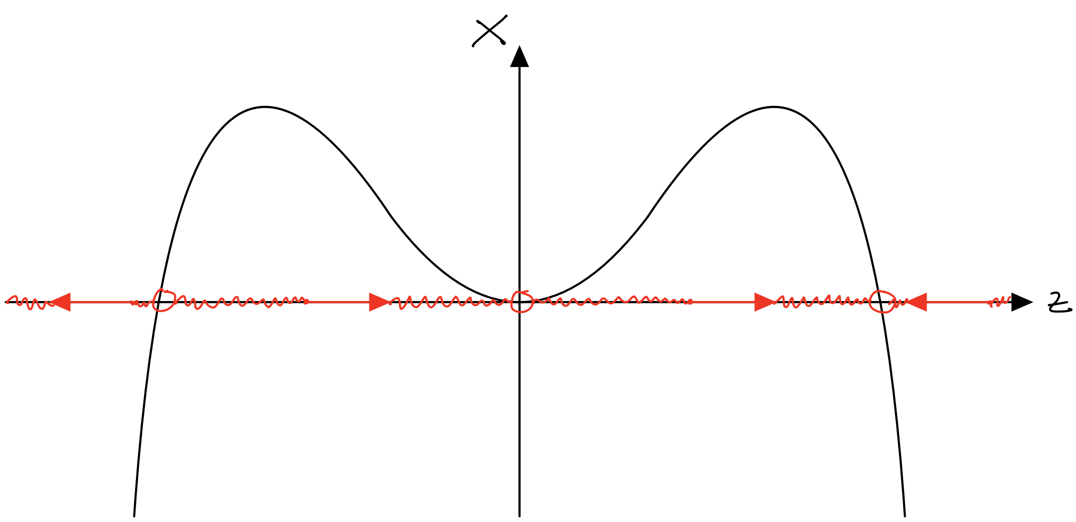


2) Gli equilibri sono gli zeri di $f(z) = z^2 - z^4$:



$\Rightarrow \{\{-1\}, \{0\}, \{1\}\}$ = insieme degli equilibri

3) Stabilisco il verso di percorrenza:



Orbite $= \{\{-1\}, \{0\}, \{1\}, (-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, +\infty)\}$

Equilibri ATTRATTIVI : $\{1\}$

Equilibri REPULSIVI : $\{-1\}$

$\Rightarrow \{0\}$ NON è né attrattivo né repulsivo

Def. (Campo Vettoriale Completo)

Un campo vettoriale $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice COMPLETO se tutte le sue curve integrali massimali sono globali

es.:

1) $X = \sin z \Rightarrow$ tutte le soluzioni massimali sono globali $\Rightarrow X$ è COMPLETO

2) $X = z \Rightarrow z = z_0 \cdot e^t$ e sono sempre soluzioni globali $\Rightarrow X$ è COMPLETO

3) se $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è a crescita al più lineare, ovvero se $\|X\| \leq C(1 + \|z\|)$ $\forall z \in \mathbb{R}^n$, allora X è COMPLETO per il Teorema di $\exists$ globale

4) $X = z^2$ NON è COMPLETO ($\exists$ soluzione massimale non globale)

Proposizione:

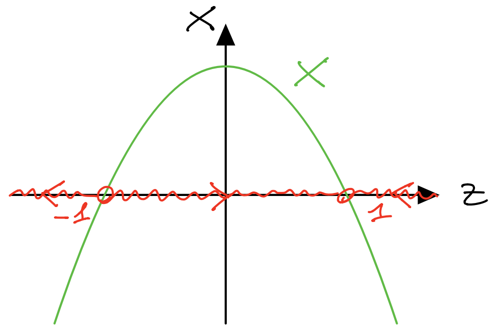
$\forall X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale, $\exists \tilde{X} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale COMPLETO con le stesse orbite di X.

N.B.

$\tilde{X}$ NON ha le stesse soluzioni di X, bensì le stesse ORBITE!

es.:

$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $X = 1 - z^2 \Rightarrow X$ non è completo (∃ soluzione massimale non globale). Il suo ritratto in fase è:



$$\Rightarrow \{\{-1\}, \{1\}, (-\infty, -1), (1, +\infty)\}$$

$\Rightarrow \exists \tilde{X} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.:

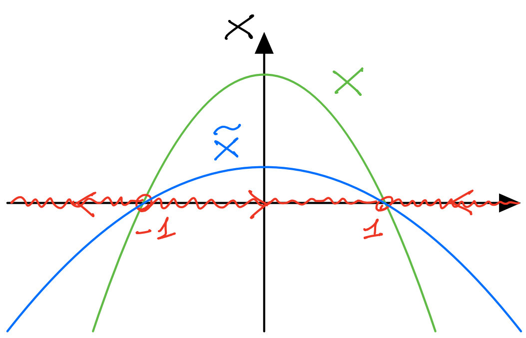
$$\tilde{X} = 0 \iff z = \pm 1 \quad \wedge$$

$$\tilde{X} > 0 \quad \forall z \in (-1, 1)$$

$$\tilde{X} < 0 \quad \forall z \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$\Rightarrow$ Richiedo, per esempio, che $\tilde{X} \sim -|z|$ per $|z| \longrightarrow +\infty$

$\Rightarrow \tilde{X}$ è COMPLETO perché è di crescita al più lineare (asintotico ad una retta)



$\Rightarrow$ il ritratto in fase di $\tilde{X}$ è uguale a quello di X