3. FUNZIONI ELEMENTARI

Definiamo ora le seguenti funzioni elementari complesse:

1) <u>Esponenziale</u>:

$$f(z) := e^z = \underbrace{e^x}_{=e^{Re(z)}} \cdot \underbrace{e^{iy}}_{=e^{Im(z)}} \Rightarrow y = Im(z) = arg(e^z)$$

proprietà:

- $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $e^z = e^{z+2k\pi i} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ (PERIODICITÀ)
- è suriettiva su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $(e^z)' = e^z \neq 0 \Rightarrow e^z$ è LOCALMENTE INVERTIBILE (la sua inversa locale è $\log(z)$)

N.B. e^z NON È GLOBALMENTE INVERTIBILE !!!

2) <u>Logaritmo Complesso</u>:

$$f(z) := \log(z) = \log|z| + i\,arg(z)$$

(infatti:

$$\log(\rho e^{i\theta}) = \log \rho + \log e^{i\theta} = \log \rho + i\theta + 2k\pi i\ )$$

Tale definizione è corretta dato che si ha:

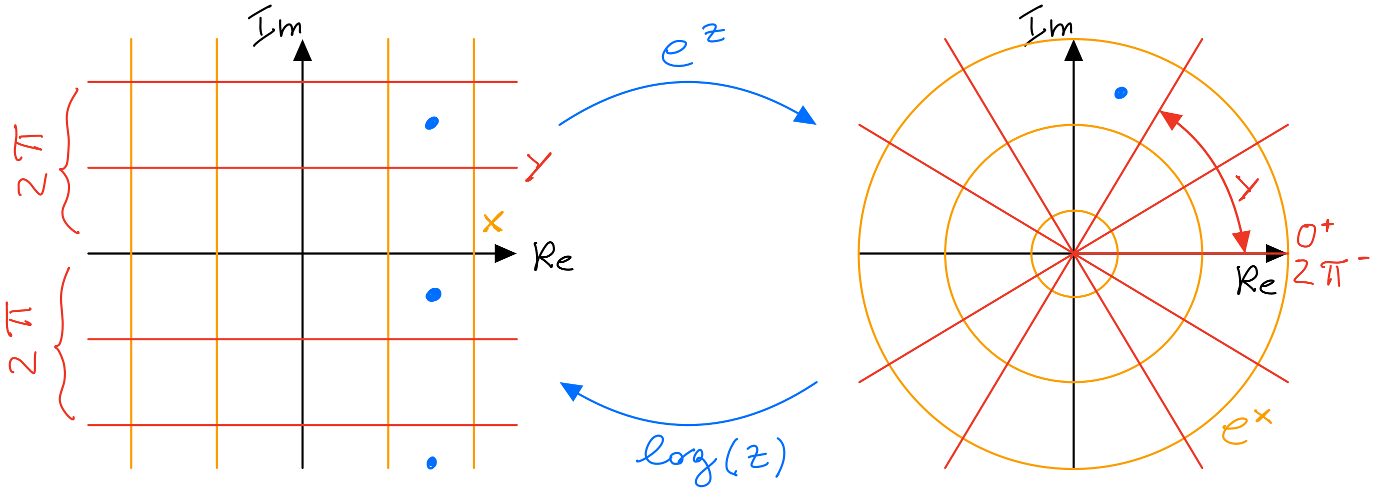
$$e^{\log z} = e^{\log|z| + i\,arg(z)} = |z| e^{i\,arg(z)} = z$$

proprietà:

- $\log z$ è una FUNZIONE MULTIVOCA (o POLIDROMA) a causa di $arg(z)$ nella definizione.

- $\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\log(e^z) = z + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Rappresentiamo graficamente l'andamento di e^z, $\log z$:



É possibile definire una funzione a partire da $\log z$:

3) <u>Logaritmo Principale:</u>

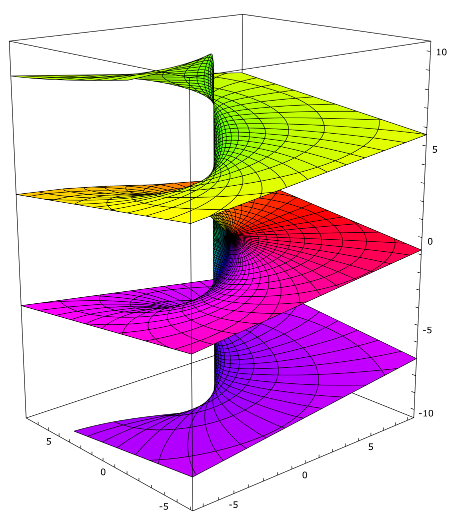
$$f(z) := \text{Log}(z) = \log|z| + i\,\text{Arg}(z)$$

Il logaritmo principale perde la proprietà della somma dei logaritmi.

Si può creare una superficie che renda iniettiva e^z preservando le nozioni di derivabilità e continuità:

SUPERFICIE DI RIEMANN DEL LOGARITMO

(si tratta di una superficie di Riemann a ∞ fogli)



Applichiamo lo stesso ragionamento alla radice complessa:

$f(z) = z^2$ NON É GLOBALMENTE INVERTIBILE,

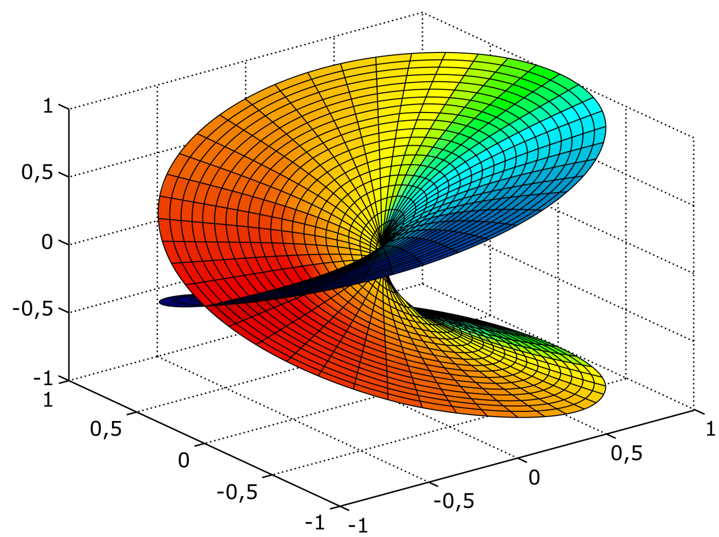
tuttavia:

$$\dot{f}(z) = 2z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow f$ è LOCALMENTE INVERTIBILE su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ tuttavia, l'inversa è definita in modo ambiguo, si fa quindi uso delle superfici di Riemann:

SUPERFICIE DI RIEMANN DELLA RADICE



4) <u>Potenza Complessa</u>:

$f(z) := z^{\omega}$ con $z, \omega \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

$\Rightarrow$ si pone:

$$z = e^{\log z} \Rightarrow z^{\omega} := e^{\omega \log z}$$

proprietà:

- z^{ω} è una FUNZIONE MULTIVOCA (o POLIDROMA)

esempio:

$$i^{i} = e^{i \log i} \underset{\uparrow}{=} e^{i \cdot i \frac{\pi}{2} + 2k\pi i \cdot i} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\log i = \log e^{i\frac{\pi}{2}} = i\frac{\pi}{2}\right)$$

FUNZIONI ARMONICHE

Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa su A (A aperto).
Poniamo $f = u + iv$ con $u, v : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, allora sappiamo che u, v soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \nabla v = J \nabla u \quad \text{con} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Supponiamo $f \in C^2$ (ipotesi NON NECESSARIA in virtù del Teorema Fondamentale dell'Analisi Complessa). Derivando parzialmente le equazioni di Cauchy-Riemann si ha:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema di} \\ \text{Schwarz}}}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ovvero:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &:= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta v &:= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right. \quad \text{su } A$$

dove Δf è il Laplaciano di f. L'equazione

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0}$$

è detta EQUAZIONE DI LAPLACE e le sue soluzioni sono dette FUNZIONI ARMONICHE. Si ha quindi:

f olomorfa su $A \Rightarrow u, v$ sono funzioni armoniche su A

N.B.
Siano $\varphi, \psi : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armoniche su A.
SE si ha $\nabla \psi = J \nabla \varphi$ ($\Leftrightarrow \psi, \varphi$ verificano le condizioni di Cauchy - Riemann $\Leftrightarrow f = \varphi + i\psi$ è olomorfa su $A \subseteq \mathbb{C}$) allora si dicono CONIUGATE

N.B.
L'equazione di Laplace è estremamente importante in quanto descrive fenomeni di equilibrio e di diffusione (es. concentrazione di sostanze chimiche in un ambiente) probabilistici / stocastici e deterministici