Qual è la classe di cambi di coordinate che conserva la struttura Hamiltoniana?

<u>esempio</u>:

$H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ liscia qualsiasi, $(q,p) \in \mathbb{R}^2$. Sia $\mathcal{C} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\mathcal{C}(q,p) = (\tilde{q},\tilde{p}) = (q+\beta, p+\alpha)$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

N.B.

$\mathcal{C}$ è diffeomorfismo MA NON è sollevamento

$$\Rightarrow \tilde{H} := \tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p}) = H \circ \mathcal{C}\,(q,p) = H(\underbrace{\tilde{q}-\beta}_{=q}, \underbrace{\tilde{p}-\alpha}_{=p})$$

$\Rightarrow X_{\tilde{H}}$ è:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \\[2ex] \dot{\tilde{p}} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = \dot{p} \end{cases} \qquad \text{(chain rule)}$$

$\Rightarrow$ l'Hamiltoniana trasformata è l'Hamiltoniana del PUSH-FORWARD del campo X_H originale

Siano, in generale, $\mathcal{C} : M \longrightarrow \tilde{M}$ ($M, \tilde{M} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ aperti) un DIFFEOMORFISMO, $H \in C^\infty(M)$, X_H campo Hamiltoniano su M. Sappiamo che $\mathcal{C}_* X_H$ è campo su $\tilde{M}$

Per quali $\mathcal{C} : M \longrightarrow \tilde{M}$ si ha che $\mathcal{C}_* X_H$ è campo Hamiltoniano con funzione Hamiltoniana $\tilde{H} = H \circ \mathcal{C}^{-1}$?

$$\begin{tikzcd} TM = M \times \mathbb{R}^{2n} \arrow[rr, "T\mathcal{C}"] & & \tilde{M} \times \mathbb{R}^{2n} = T\tilde{M} \\ M \arrow[u, "X_H"] \arrow[rr, "\mathcal{C}"] \arrow[dr, "H"'] & & \tilde{M} \arrow[u] \arrow[dl, "\tilde{H}"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ deve essere $X_{\tilde{H}} = \mathcal{C}_* X_H$

<u>Notazione</u>:

Denotiamo come segue i cambi di coordinate:

$$q_i = u_i(\tilde{q}, \tilde{p}, t), \quad p^i = v^i(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \quad i = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow$ in forma vettoriale si ha:

$$q = u(\tilde{q}, \tilde{p}, t), \quad p = v(\tilde{q}, \tilde{p}, t)$$

$$\Rightarrow (q, p) = w(\tilde{q}, \tilde{p}, t)$$

$$\text{con} \quad w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \begin{array}{rcl} \tilde{M} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & M \\ ((\tilde{q}, \tilde{p}), t) & \longmapsto & (q, p) \end{array}$$

<u>Def.</u> (Simplettomorfismo):

Il cambio di coordinate $w : \tilde{M} \longrightarrow M$ con $w(\tilde{q}, \tilde{p}) = (q, p)$ si dice STRETTAMENTE CANONICO o SIMPLETTOMORFISMO se coniuga un campo Hamiltoniano $X_{\tilde{H}}$ su $\tilde{M}$ con un campo Hamiltoniano X_H su M e $\tilde{H} = H \circ w$.

In particolare si ha che $\phi_t^{X_H} \circ w = w \circ \phi_t^{X_{\tilde{H}}}$

<u>esempi</u>:

1) <u>Traslazioni</u>: $(q, p) = (\tilde{q} + \beta, \tilde{p} + \alpha)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) <u>Trasformazioni Lineari</u>:

$$p = \underbrace{(A^T)^{-1} \tilde{p}}_{=: v(\tilde{p})}, \quad q = \underbrace{A\tilde{q}}_{=: u(\tilde{q})} \quad \text{con} \quad A \in GL_n(\mathbb{R})$$

verifichiamo che è un simplettomorfismo:

$$\Rightarrow \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = H \circ w(\tilde{q}, \tilde{p}) = H(A\tilde{q}, (A^T)^{-1}\tilde{p})$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q^s} \frac{\partial u^s(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_i} = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q^s} \frac{\partial (A\tilde{q})^s}{\partial \tilde{q}^i}$$

$$= -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q^s} \frac{\partial A_{sk}\tilde{q}_k}{\partial \tilde{q}^i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q^s} A_{si}$$

$\Rightarrow$ in notazione vettoriale si ha:

$$\boxed{\dot{\tilde{p}} = -A^T \frac{\partial H}{\partial q}}$$

$\Rightarrow$ per q i calcoli sono analoghi

3) Consideriamo $H(q,p) = \frac{1}{2}\omega(p^2+q^2)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $(q,p) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\Rightarrow$ passiamo in coordinate polari, esse sono strettamente canoniche?

$$\Rightarrow \underbrace{(r,\theta)}_{=:(\tilde{q},\tilde{p})} \longmapsto (q,p) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = w(\tilde{q},\tilde{p})$$

$\Rightarrow X_H = (\omega p, -\omega q)^T$, calcoliamo ora $W_* X_H$:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = \omega r \sin\theta \\ \dot{p} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = -\omega r\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \Rightarrow$$ il campo coniugato ad X_H mediante w è $\tilde{X} = (0,\omega)^T$

Calcoliamo $\tilde{H} = H \circ w$ e $X_{\tilde{H}}$:

$$\Rightarrow \tilde{H} = H(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2}\omega r^2$$

$$\Rightarrow X_{\tilde{H}} = (0, -\omega r)^T \Rightarrow X_{\tilde{H}} \neq X_H{}^*$$

$\Rightarrow$ le coordinate polari NON sono SIMPLETTOMORFE !!!

TUTTAVIA:

siano $p = \sqrt{2I}\sin\theta$, $q = \sqrt{2I}\cos\theta$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(p^2+q^2), \quad \theta = \arctan\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{I} = p\dot{p} + q\dot{q} = \sqrt{2I}\sin\theta\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \sqrt{2I}\cos\theta\frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{q\dot{p} - p\dot{q}}{p^2+q^2} = -\frac{\sqrt{2I}\cos\theta}{2I}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\sqrt{2I}\sin\theta}{2I}\frac{\partial H}{\partial p}$$

ponendo $\tilde{H}(I,\theta) = H(\sqrt{2I}\cos\theta, \sqrt{2I}\sin\theta)$, si ha che

$$X_{\tilde{H}} = (0,\omega)^T = \tilde{X}$$

Sappiamo che:

w simplettomorfismo se $X_H \circ w = Jac(w) \circ X_{\tilde{H}}$

$\Leftrightarrow X_H = Jac(w) \circ X_{\tilde{H}} \circ w^{-1} = w_* X_{\tilde{H}}$

$\Leftrightarrow X_{\tilde{H}} = Jac(w^{-1}) X_H \circ w = w^* X_H$ in cui:

$$Jac(w) = \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{q}} u & \nabla_{\tilde{p}} u \\ \nabla_{\tilde{q}} v & \nabla_{\tilde{p}} v \end{pmatrix}, \quad w = (u, v)^T$$

<u>Proposizione</u> (Condizione di stretta canonicità):

$w(\tilde{q}, \tilde{p})$ è simplettomorfismo $\Leftrightarrow$ $Jac(w)$ è t.c.

$$\boxed{Jac(w) \cdot J \cdot Jac(w)^T = J}$$

(dove J è l'unità simplettica)

<u>Dim.</u>:

Sappiamo che $X_H \circ w = J \nabla H \circ w = Jac(w) \cdot (J \nabla \tilde{H})$

Ricordiamo che $\tilde{H}(\tilde{z} = (\tilde{q}, \tilde{p})) = H(w(\tilde{z}))$ da cui si ha:

$$\nabla \tilde{H} = (Jac(w)^T) \cdot (\nabla H \circ w)$$

$\Rightarrow J \cdot (\nabla H \circ w) = Jac(w) J \, Jac(w)^T \cdot (\nabla H \circ w)$

$\Leftrightarrow J = Jac(w) J \, Jac(w)^T$

<u>q.e.d.</u>

<u>Def.</u> (Matrici simplettiche e Gruppo simplettico)

Le matrici W t.c. $J = W J W^T$ si dicono MATRICI SIMPLETTICHE e formano un gruppo rispetto a $\cdot$ detto GRUPPO SIMPLETTICO

Corollario:

I simplettomorfismi preservano il volume euclideo orientato.

Dim.:

$$\det J = 1 \Rightarrow 1 = \det J = \det W J W^T = (\det W)^2$$

q. e. d.

Corollario:

Per il caso 2D, la simpletticitá coincide con la conservazione dell' area

esempio:

$p_i = \alpha_i^{-1} \tilde{p}_i \,, \quad q^i = \alpha_i \tilde{q}^i \quad$ con $\quad i = 1, \dots, n \,, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^{>0}$

verifichiamo che è simplettomorfismo (caso 2D, $n=2$):

$$w(\tilde{q}, \tilde{p}) = (\underbrace{\alpha_1 \tilde{q}^1 , \alpha_2 \tilde{q}^2}_{q \, = \, u(\tilde{q})} , \underbrace{\alpha_1^{-1} \tilde{p}_1 , \alpha_2^{-1} \tilde{p}_2}_{p \, = \, v(\tilde{p})})$$

$$\Rightarrow \mathrm{Jac}\, W = \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{q}} u & \nabla_{\tilde{p}} u \\ \nabla_{\tilde{q}} v & \nabla_{\tilde{p}} v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_1^{-1} & \\ 0 & & & \alpha_2^{-1} \end{pmatrix}$$

applichiamo la condizione algebrica:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_1^{-1} & \\ 0 & & & \alpha_2^{-1} \end{pmatrix}}_{=: \, \mathrm{Jac}\, W} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: \, J} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_1^{-1} & \\ 0 & & & \alpha_2^{-1} \end{pmatrix}^T}_{=: \, \mathrm{Jac}\, W^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: \, J}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_1^{-1} & \\ 0 & & & \alpha_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

esercizio:

Data $w(\tilde{q},\tilde{p}) = (-\tilde{p},\tilde{q})$, verificare che è simplettomorfismo

$\Rightarrow$ si ha $\mathrm{Jac}\, w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Jac}\, w^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J$

$\Rightarrow$ applicando la condizione algebrica si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot Id_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: J$$

$\Rightarrow$ w è simplettomorfismo

Simplettomorfismi e parentesi di Poisson:

Def. (Conservazione delle $\{\ \}$):

Si dice che $w(\tilde{q},\tilde{p}) = (q,p)$ PRESERVA LE PARENTESI DI POISSON $\{\ \}$ se $\forall f,g \in C^\infty(M)$ $(M \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto$)$ si ha:

$$\boxed{\{f,g\}_M \circ w = \{f\circ w, g\circ w\}_{\tilde{M}}}$$

Proposizione:

w preserva $\{\ \}$ $\Leftrightarrow$ w preserva le $\{\ \}$ fondamentali

Teorema:

$w(\tilde{q},\tilde{p}) = (q,p)$ preserva $\{\ \}$ $\Leftrightarrow$ w è simplettomorfismo

Dim:

Siano $\tilde{x} := (\tilde{q},\tilde{p})$, $x := (q,p)$, $\tilde{f} = f\circ w$, $\tilde{g} = g\circ w$, scriviamo la condizione di conservazione delle $\{\}$ in termini di gradienti simplettici:

$$\nabla_{\tilde{x}} \tilde{f} \cdot J \cdot \nabla \tilde{g} = (\nabla_x f \cdot J \nabla_x g) \circ w$$

in cui $\tilde{x} = (\tilde{q}, \tilde{p})$, $x = (q, p)$, $\tilde{f} = f \circ w$, $\tilde{g} = g \circ w$

Sappiamo che:

$$\nabla_{\tilde{x}} \tilde{f} = (\mathrm{Jac}\, w^T \cdot \nabla_x f) \circ w$$

$\Rightarrow$ si ha:

$$(\mathrm{Jac}\, w^T \cdot \nabla_x f \cdot J \cdot \mathrm{Jac}\, w^T \nabla_x g) \circ w$$

$$= (\nabla_x f \cdot \mathrm{Jac}\, w \cdot J \cdot \mathrm{Jac}\, w^T \nabla_x g) \circ w$$

$$= (\nabla_x f \cdot J \nabla_x g) \circ w = \{f, g\} \circ w$$

q.e.d.

Condizione di Lie:

Def. (1-forma di Liouville):

Date $(q, p) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \in M \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ coordinate, la 1-FORMA DI LIOUVILLE è:

$$\boxed{\Theta = p \cdot dq = p_1 dq^1 + \dots + p_n dq^n}$$

Tale 1-forma è definita su tutto M

Def. (Condizione di Lie):

$w(\tilde{q}, \tilde{p}) = (u(\tilde{q}, \tilde{p}), v(\tilde{q}, \tilde{p})) = (q, p)$ PRESERVA DEBOLMENTE la 1-FORMA DI LIOUVILLE se $\exists$ (localmente) $f = f(\tilde{q}, \tilde{p})$ t.c.

$$v \cdot du - \tilde{p} \cdot d\tilde{q} = df \quad (*)$$

N.B.

La conservazione debole della 1-forma di Liouville implica che la 1-forma $v \cdot du - \tilde{p} \cdot d\tilde{q}$ è LOCALMENTE ESATTA ed è quindi CHIUSA. Formalmente tale conservazione si scrive come $p \cdot dq - \tilde{p} \cdot d\tilde{q}$

La conservazione debole della 1-forma di Liouville è equivalente a:

$$u \cdot dv = \tilde{q} \cdot d\tilde{p} + d\bar{f} \quad \text{con} \quad \bar{f} = -f + u \cdot v - \tilde{p} \cdot \tilde{q}$$

Infatti:

$$d\bar{f} = -df + v \cdot du + u \cdot dv - \tilde{p} \cdot d\tilde{q} - \tilde{q} \cdot d\tilde{p}$$

$$\Rightarrow \cancel{u \cdot dv} = \cancel{\tilde{q} \cdot d\tilde{p}} - df + v \cdot du + \cancel{u \cdot dv} - \tilde{p} \cdot d\tilde{q} - \cancel{\tilde{q} \cdot d\tilde{p}}$$

$$\Rightarrow df = v \cdot du - \tilde{p} \cdot d\tilde{q} \quad (**) \checkmark$$

Consideriamo ora $(*) - (**)$:

$$v \cdot du - u \cdot dv = \tilde{p} \cdot d\tilde{q} - \tilde{q} \cdot d\tilde{p} + df - d\bar{f}$$

sia $dg := df - d\bar{f} \iff g := 2f - v \cdot u + \tilde{p} \cdot d\tilde{q}$:

$$\boxed{J w \cdot dw - J\tilde{x} \cdot d\tilde{x} = dg}$$

$$\text{con} \quad w = (u, v), \quad \tilde{x} = (\tilde{q}, \tilde{p})$$

Ciò permette di enunciare il seguente risultato:

Proposizione:

Una trasformazione di coordinate $w(\tilde{q}, \tilde{p}) = (q, p)$ preserva debolmente la 1-forma di Liouville se e solo se è un simplettomorfismo

Dim.:

$$J w \cdot dw - J\tilde{x} \cdot d\tilde{x} = dg \wedge dw = \mathrm{Jac}\, w \cdot d\tilde{x}$$

$$\Rightarrow J w \cdot \mathrm{Jac}\, w \cdot d\tilde{x} - J\tilde{x} \cdot d\tilde{x} = dg$$

$$\Rightarrow (\underbrace{\mathrm{Jac}\, w^T J w - J\tilde{x}}_{=: X}) \cdot d\tilde{x} = dg := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}_i} d\tilde{x}_i$$

$\Rightarrow$ affinché g sia ben definita deve essere:

$$X_i = \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial X_i}{\partial \tilde{x}_s} = \dfrac{\partial X_s}{\partial \tilde{x}_i}$ che è la condizione di chiusura e di locale esattezza di dg

$$\Rightarrow \frac{\partial X_i}{\partial \tilde{x}_s} - \frac{\partial X_s}{\partial \tilde{x}_i} = 2\left(\mathrm{Jac}\, w^T J\, \mathrm{Jac}\, w - J\right)_{is}$$

q.e.d.

Applicazione:

Data $q = u(\tilde{q})$ su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (aperto). Essa si può estendere ad un simplettomorfismo ai momenti coniugati come segue:

$$(\tilde{q}, \tilde{p}) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \longmapsto (q, p) = \left(u(\tilde{q}), \left(\mathrm{Jac}\, u(\tilde{q})^T\right)^{-1} \tilde{p}\right)$$

Infatti si ha:

$$du(\tilde{q}) = \mathrm{Jac}(u(\tilde{q}))\, d\tilde{q}$$

$$v \cdot du = \left(\mathrm{Jac}\, u(\tilde{q})^T\right)^{-1} \tilde{p} \cdot \mathrm{Jac}(u(\tilde{q}))\, d\tilde{q}$$

$$\Leftrightarrow v \cdot du = \mathrm{Jac}\, u(\tilde{q})^T \left(\mathrm{Jac}\, u(\tilde{q})^T\right)^{-1} \tilde{p} \cdot d\tilde{q} = \tilde{p} \cdot d\tilde{q}$$

$\Rightarrow$ (✳) soddisfatto per $f \equiv 0$

esercizio:

Data $H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{2}{3}q^2\right)^2$ con $(q,p) \in \mathbb{R}^2$:

1) Scrivere X_H

2) $f(q,p) = -2p - \frac{1}{3}q$ è I.P.?

3) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -2 & k-1 \end{pmatrix}$$

è simplettica

4) $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $(p,q) = K(\tilde{p},\tilde{q})$ sia simplettomorfismo?
Se sì, chi è X_H?

$\Rightarrow$ 1) $X_H = J\nabla H = J\left(\left(p^2 + \frac{2}{3}q^2\right)\frac{4}{3}q,\ \left(p^2 + \frac{2}{3}q^2\right)2p\right)$

$= \left(2p\left(p^2 + \frac{2}{3}q^2\right),\ -\frac{4}{3}q\left(p^2 + \frac{2}{3}q^2\right)\right)$

2) $f = -2p - \frac{1}{3}q$

$\Rightarrow \{f, H\} = \mathcal{L}_{X_H} f = X_H \cdot \nabla f = X_H \cdot \left(-\frac{1}{3}, -2\right)$

$= -\frac{2}{3}p\left(p^2 + \frac{2}{3}q^2\right) + \frac{8}{3}q\left(p^2 + \frac{2}{3}q^2\right) \neq 0$

$\Rightarrow f$ NON è I.P. di H

3) Si ha:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -2 & k-1 \end{pmatrix} \text{ è simplettica} \iff K^T J K = J$$

Dato che siamo in $\mathbb{R}^2$, K è simplettica se e solo se $\det K = 1$ (deve conservare l'area)

$\Rightarrow k - 1 + 2k = 1 \iff k = \frac{2}{3}$

4) $(\tilde{p},\tilde{q}) \longmapsto K(\tilde{p},\tilde{q})$ è lineare, quindi è simplettomorfismo se K è simplettica $\iff k = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \tilde{H} = H \circ K = \dots$$

Trasformazioni Canoniche Generali:

Def. (Trasformazione Canonica Generale):

La trasformazione di coordinate $w(\tilde{q}, \tilde{p}) : \tilde{M} \longrightarrow M$ si dice CANONICA GENERALE se $\forall H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ $\exists K : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. i campi Hamiltoniani X_H, X_K sono coniugati:

$$w_* X_K = X_H$$

Proposizione:

$w : \tilde{M} \longrightarrow M$ canonica generale $\Rightarrow \exists c \neq 0$ t.c.

$$K = c H \circ w$$

c è detto VALENZA DI w

Condizioni di canonicità in contesto generale:

1) CONDIZIONE ALGEBRICA:

$$c \cdot \mathrm{Jac}\, w \, J \, \mathrm{Jac}\, w^T = J$$

2) CONDIZIONE SULLE $\{\,\}$:

$$c \cdot \{\tilde{f}, \tilde{g}\}_{\tilde{M}} = \{f \circ g\}_M \circ w$$

3) CONDIZIONE DI LIE:

$$c \cdot (p \cdot dq) = \tilde{p} \cdot d\tilde{q} + df$$
