es. 1) Classificare le seguenti curve:

1) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \begin{cases} (\cos t, \sin t) & \text{se } t \in [0, \pi] \\ (-1, 0) & \text{se } t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \begin{cases} (-\sin t, \cos t) & \text{se } t \in (0, \pi) \\ \underbrace{(0,0)}_{\to \text{ punti singolari}} & \text{se } t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$\Rightarrow \gamma$ non è immersione locale.

2) $\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto (\cos 2\pi t, t^2 - t, \sin 2\pi t)$$

$\Rightarrow$ mostriamo che γ_2 è immersione locale MA NON immersione:

$$\dot{\gamma}_2(t) = (-2\pi \sin 2\pi t, 2t - 1, 2\pi \cos 2\pi t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [0, 1]$$

$\Rightarrow \gamma_2$ è immersione locale

$\Rightarrow \gamma_2$ non è iniettiva:

$$\gamma_2(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\pi t_1 = \cos 2\pi t_2 \\ t_1^2 - t_1 = t_2^2 - t_2 \\ \sin 2\pi t_1 = \sin 2\pi t_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \gamma_2(0) = \gamma_2(1) = (1, 0, 0) \Rightarrow \gamma_2$ non è una immersione.

3) $\gamma_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^2} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}_3(t) = \left(\frac{1 + t^4 - t \cdot 4t^3}{(1+t^4)^2}, \frac{1 + t^2 - 2t^2}{(1+t^2)^2} \right) = \left(\frac{1 - 3t^4}{(1+t^4)^2}, \frac{1 - t^2}{(1+t^2)^2} \right)$$

⇒ Punti singolari:

$$\begin{cases} 3t^4 = 1 \\ t^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \text{ soluzione}$$

⇒ γ_3 è immersione locale

⇒ iniettività:

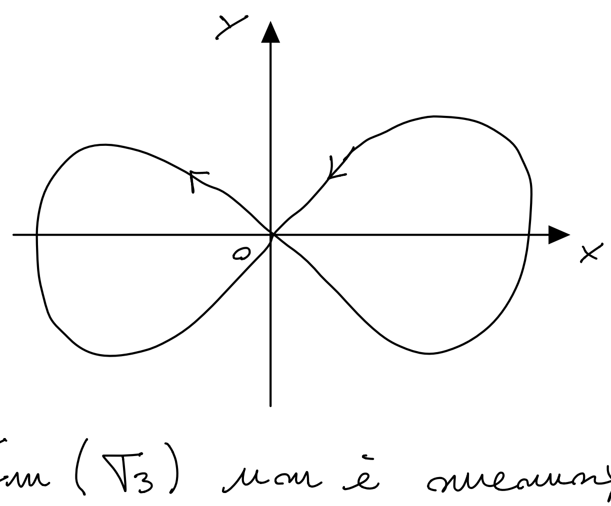
$$\begin{cases} \dfrac{t_1}{1+t_1^2} = \dfrac{t_2}{1+t_2^2} \\[2ex] \dfrac{t_1}{1+t_1^4} = \dfrac{t_2}{1+t_2^4} \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 - t_2 = t_1 t_2 (t_1 - t_2) \\ t_1 - t_2 = t_1 t_2 (t_1^3 - t_2^3) \end{cases}$$

$$\underset{t_1 \neq t_2}{\Rightarrow} \begin{cases} t_1 t_2 = 1 \\ t_1 t_2 \cdot (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) \end{cases} \Rightarrow t_1^2 + 1 + t_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow t_1^2 + t_2^2 = 0 \iff t_1 = t_2 = 0 \ \lightning \ (t_1 \neq t_2)$$

⇒ γ_3 è immersione.

⇒ Omeomorfismo:



$t \to +\infty \quad \gamma_3(t) \to (0,0)$

$t \to -\infty \quad \gamma_3(t) \to (0,0)$

⇒ $\mathrm{Im}(\gamma_3)$ non è omeomorfo ad $\mathbb{R}$ ⇒ γ_3 NON è una immersione regolare.

es. 2) Calcolare la parametrizzazione ad ascissa curvilinea:

1) Retta percorsa a velocità costante:

$$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto v_0 + t v_1 \quad \text{con } v_0, v_1 \in \mathbb{R}^n, \ v_1 \neq \vec{0}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = v_1 \Rightarrow s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau = t\|v_1\|$$

$$\Rightarrow t = \frac{s}{\|v_1\|} \Rightarrow \gamma(s) = v_0 + \frac{v_1}{\|v_1\|} s$$

2) Elica:

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at) \quad \text{con } r>0, \ a \neq 0$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = (-r\sin t, r\cos t, a)$$
$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{r^2+a^2}$$
$$\Rightarrow s(t) = t\sqrt{r^2+a^2} \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}$$
$$\Rightarrow \gamma(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+r^2}}\right), r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+r^2}}\right), \frac{as}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)$$

3) Catenaria:

$$\gamma(t) = (t, \cosh(t)) \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = (1, \sinh(t))$$
$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1+\sinh^2 t}$$
$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t \sqrt{1+\sinh^2\tau}\, d\tau = \int_0^t \cosh\tau\, d\tau = \sinh t \Rightarrow t = \operatorname{arcsinh} s$$

$$\Rightarrow t = \dots = \log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)$$
$$\Rightarrow \cosh\left(\log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\right) = \dots = \frac{\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)^2+1}{2\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)}$$

$= \sqrt{1+s^2} \Rightarrow \Gamma(s) = \left(\log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right), \sqrt{1+s^2}\right)$

es. 3) Calcolare la curvatura

1) Circonferenza:

$$\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \Gamma(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)$$

$$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \ r > 0$$

$$\Rightarrow \|\dot{\Gamma}(t)\| = r \Rightarrow t = \frac{s}{r}$$

$$\Rightarrow \Gamma(s) = \left(x_0 + r\cos\frac{s}{r}, y_0 + r\sin\frac{s}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\Gamma}(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right) \Rightarrow \|\dot{\Gamma}(s)\| = 1 \ \forall s$$

$$\Rightarrow \ddot{\Gamma}(s) = \frac{1}{r}\left(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}\right)$$

$$\Rightarrow K(s) = \|\ddot{\Gamma}(s)\| = \frac{1}{r} \Rightarrow \rho(s) = r$$

2) Elica:

$$\Rightarrow \Gamma(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right), r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right), \frac{a\,s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\Gamma}(s) = \left(-\frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right), \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\Gamma}(s) = -\frac{r}{a^2+r^2}\left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right), 0\right)$$

$$\Rightarrow K(s) = \|\ddot{\Gamma}(s)\| = \frac{r}{a^2+r^2} \quad \text{costante (NON dipende da } s)$$

es. 4)

Sia $\Gamma(t) = \left(\sin t, \cos t + \log\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)$ con $t \in (0, \pi)$

1) Determinare i punti regolari di Γ

2) Verificare che la lunghezza del segmento sulla tangente a Γ compreso tra il punto di tangenza

e l'asse y è sempre 1

$\Rightarrow$ 1) $\dot{\gamma}(t) = \left(\cos t, -\sin t + \frac{\cancel{\cos\frac{t}{2}}}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^{\cancel{2}}\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right)$

$= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)$

$= \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos t = 0 \\ \frac{\cos^2 t}{\sin t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \gamma(\frac{\pi}{2}) = (1, 0)$ è l'unico punto singolare di γ.

$\Rightarrow$ 2) Trovo la retta tangente a γ:

$\Rightarrow$ sia $t_0 \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma(t_0) + \lambda \cdot \dot{\gamma}(t_0)$ è la scrittura parametrica della retta tangente a γ in $\gamma(t_0)$

$\Rightarrow r: \left(\sin t_0 + \lambda \cos t_0, \cos t_0 + \log\left(\tan\frac{t_0}{2}\right) + \lambda \frac{\cos^2 t_0}{\sin t_0}\right)$

$\Rightarrow$ l'intersezione di r con l'asse y è per $x = 0$

$\Rightarrow \sin t_0 + \lambda \cos t_0 = 0 \Rightarrow \lambda = -\tan t_0$

$\Rightarrow r \cap y: \gamma(t_0) - \tan t_0 \cdot \dot{\gamma}(t_0)$

$\Rightarrow$ il segmento è $\| \cancel{\gamma(t_0)} - (\cancel{\gamma(t_0)} - \tan t_0 \dot{\gamma}(t_0)) \|$

$= \| \tan t_0 \dot{\gamma}(t_0) \|$

$= \| \tan t_0 \left(\cos t_0, \frac{\cos^2 t_0}{\sin t_0}\right) \|$

$= \| (\sin t_0, \cos t_0) \| = 1 \quad \forall t_0$

$\Rightarrow \gamma$ è detta "curva trattrice".

es. 5) Dimostrare che $\gamma: (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da
$\gamma(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$ è contenuta in un piano.

$\Rightarrow$ deve essere $b(t) \equiv$ costante (oppure $\tau \equiv 0$)

$$\Rightarrow \tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{\| \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \|^2} \Rightarrow \dot{\gamma} = \left(1, -\frac{1}{t^2}, -\frac{1}{t^2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma} = \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right), \quad \dddot{\gamma} = \left(0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4}\right)$$

$\Rightarrow$ deve essere $(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma} = 0$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^2} - 1 \\ 0 & \frac{2}{t^3} & \frac{2}{t^3} \\ 0 & -\frac{6}{t^4} & -\frac{6}{t^4} \end{pmatrix} = -\frac{12}{t^7} + \frac{12}{t^7} = 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow \tau \equiv 0 \quad \forall t \Rightarrow \gamma(t)$ è piana.

es. 6) Calcolare la lunghezza della curva $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
con $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

$$\Rightarrow \gamma(0) = (0, 0), \quad \gamma(2\pi) = (2\pi, 0)$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \|(1 - \cos t, \sin t)\| \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} \, dt = \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \, dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = 4 \left(-\cos \frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = 8$$

$\Rightarrow \gamma$ si dice "CICLOIDE"