CATENE DI MARKOV A TEMPO CONTINUO

Setting:

1) E spazio degli stati FINITO, ma i risultati si estendono al caso numerabile
2) $(X_t)_{t\geq 0}$ famiglia di v.a. definite sullo stesso sp. di prob. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e indicizzate da $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ (PROCESSO STOCASTICO A TEMPO CONTINUO)

DEF. (Catena di Markov a tempo continuo):
Sia $(X_t)_{t\geq 0}$ un processo stocastico a tempo continuo e a valori in E. $\forall t \geq 0$ denotiamo con $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : s \leq t)$ la σ-algebra generata dal processo fino al tempo t. $(X_t)_{t\geq 0}$ é una CATENA DI MARKOV se $\forall s,t$ con $0 \leq s < t$, $\forall y \in E$ vale la proprietá di Markov (PM):

$$\boxed{\mathbb{P}(X_t = y \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t = y \mid X_s)}$$

se la prob. condizionale, ovvero $\mathbb{P}(X_t = y \mid \mathcal{F}_s)$, dipende da s,t solo attraverso $t-s$, allora $(X_t)_{t\geq 0}$ si dice OMOGENEA

N.B.
(PM) equivale alla seguente:
$\forall n \geq 0$, $\forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n < t$, $s > 0$, $x_1, \dots, x_n, x, y \in E$ si ha

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = y \mid X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n, X_t = x) = \mathbb{P}(X_{t+s} = y \mid X_t = x)$$

SEMIGRUPPO:
Se lavoriamo con una CMO, allora $\forall s \geq 0$ possiamo definire la matrice seguente:

$$P_s := (\mathbb{P}_s(x,y))_{x,y \in E}$$

con $\mathbb{P}_s(x,y) = \mathbb{P}(X_{t+s} = y \mid X_t = x)$

La matrice P_s, insieme alla distr. iniziale μ (cioé la distr. iniziale di X_0) permette di ricostruire le distr. finito-dimensionali del processo. Infatti, fissati $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, la distr. congiunta di $(X_0, \dots, X_n)$ é dato da:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n) = \mu(x_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k) \quad \forall x_0, \dots, x_n \in E$$

Dim.

Induzione:

1) passo base $(n=0) \Rightarrow$ ovvio

2) passo induttivo $(n \rightsquigarrow n+1)$:

usiamo la def. di prob. cond. e (PM), otteniamo:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n+1} = x_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n) \cdot \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n)$$

$$= \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n) \cdot \mu(x_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k)$$

(PM) + ipotesi induttiva

$$= \mathbb{P}_{t_{n+1} - t_n}(x_n, x_{n+1}) \cdot \mu(x_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k)$$

$$= \mu(x_0) \cdot \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k)$$

$\square$

Proposizione:

La famiglia di matrici $(P_s)_{s \geq 0}$ è un semigruppo, ovvero:

1) $P_0 = Id$

2) $\forall\, 0 < s, t \quad P_{t+s} = P_t \cdot P_s = P_s \cdot P_t$

Dim.:

1) segue dalla def. di P_s

2) $P_{t+s}(x,y) = \mathbb{P}(X_{t+s} = y \mid X_0 = x) = \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = y, X_t = z \mid X_0 = x)$

$$= \sum_{z \in E} \underbrace{\mathbb{P}(X_{t+s} = y \mid X_t = z, X_0 = x)}_{= \mathbb{P}(X_{t+s} = y \mid X_t = z) \ (PM)} \cdot \mathbb{P}(X_t = z \mid X_0 = x)$$

$$= \sum_{z \in E} P_s(z,y) P_t(x,z) = (P_t P_s)(x,y)$$

$\square$

Esempio:

famiglia $(X_t)_{t \geq 0}$ di v.a. i.i.d. con distrib. π su E. Per indipendenza si ha:

$$P_t(x,y) = \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x) = \mathbb{P}(X_t = y) = \pi(y) \quad \forall t \geq 0$$

Caso patologico:

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sp. di prob. dove sono def. le v.a. X_t. Si può trovare $V \in \mathcal{A}$ di misura 1 t.c. la mappa $t \longmapsto X_t(\omega)$ non è misurabile $\forall \omega \in V$. Introduciamo una condizione sul processo che permetta di evitare che in un intervallo di tempo finito la catena passa cambiare stato infinite volte

Def. (Regolarità):

Una CM omogenea si dice REGOLARE se il suo semigruppo P_t, $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, è continuo in 0, ovvero se $\lim_{h\to 0} P_h = Id$

Proposizione:

Sia $(P_t)_{t\geq 0}$ semigruppo di una CMR (catena di Markov regolare). Allora $t \mapsto P_t$ è derivabile con continuità in t. Quindi:

$$\exists \frac{d}{dt} P_t(x,y) \quad \forall x,y \in E \text{ ed è continua}$$

Dim.:

1) Continuità di P_t:

1) Continuità a destra:

$$\lim_{h\to 0} P_{t+h} = \lim_{h\to 0} P_t P_h = P_t \lim_{h\to 0} P_h = P_t \, Id = P_t$$

2) Continuità a sinistra:

osservazioni:

1) det è funzione continua delle entrate di una matrice

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \det P_h = \det Id = 1$

$\Rightarrow$ se h è piccolo, P_h è invertibile dato che $\det P_h \neq 0$

2) L'inversione di matrice è funzione continua delle entrate della matrice

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} P_h^{-1} = (\lim_{h\to 0} P_h)^{-1} = Id$

Si ha quindi:

$$\lim_{h\to 0} (P_{t-h} - P_t) = \lim_{h\to 0} P_h^{-1} P_h (P_{t-h} - P_t) = \lim_{h\to 0} P_h^{-1} (P_t - P_{t+h})$$
$$= Id \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

2) Derivabilità:

definiamo $V_t(x,y) := \int_0^t P_s(x,y)\,ds$ e scriviamo in forma matriciale $V_t = \int_0^t P_s\,ds$. Poiché P_s è continua, possiamo usare il teorema della media integrale e scrivere:

$$\lim_{h\to 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t P_s\,ds = \lim_{t\to 0} P_{x_0(t)}, \quad x_0(t) \in [0,t]$$
$$= P_0 = Id$$

Usando come sopra la continuità del det, segue che se t_0 è piccolo, V_{t_0} è invertibile. Allora:

$$P_t = V_{t_0}^{-1} V_{t_0} P_t = V_{t_0}^{-1} \int_0^t P_s P_t \, ds = V_{t_0}^{-1} \int_0^t P_{t+s} \, ds$$
$$= V_{t_0}^{-1} \int_t^{t_0+t} P_s \, ds = V_{t_0}^{-1} \left(V_{t_0+t} - V_t \right)$$

che è una funzione derivabile in t, in quanto funzione di funzioni integrali di una funzione continua.

$\square$

DEF. (Generatore):

La matrice $A := \frac{d}{dt} P_t \big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{P_t - Id}{t}$ (G) si dice GENERATORE del semigruppo $(P_t)_{t \geq 0}$.

PROPRIETÀ:

1) da (G) si nota che, se $x \neq y$, si ha $A(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{P_t}{t} \geq 0$

$\Leftrightarrow P_t(x,y) = A(x,y) \cdot t + o(t)$

$A(x,y)$ è detta intensità di salto

2) P_t, Id sono matrici stocastiche (le righe sommano a 1), quindi per (G) si ha:

$$\sum_{y \in E} A(x,y) = 0 \quad \text{(le righe di } A \text{ sommano a } 0\text{)}$$

In particolare, $A(x,x) = -\sum_{y \neq x} A(x,y) \leq 0$

TEOREMA:

Se P_t è semigruppo di una CMR e A è il suo generatore, allora:

$$P_t = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

DIM.:

Usando la proprietà di semigruppo otteniamo:

$$\frac{d}{dt} P_t = \lim_{h \to 0} \frac{P_{t+h} - P_t}{h} = \begin{cases} = \lim_{h\to 0} \frac{P_t P_h - P_t}{h} = P_t \lim_{h \to 0} \frac{P_h - Id}{h} = P_t A \\[2ex] = \lim_{h\to 0} \frac{P_h P_t - P_t}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{P_h - Id}{h} P_t = A P_t \end{cases}$$

quindi P_t è sol. del PdC

$$\begin{cases} \dot{P}_t = A P_t \\ P_0 = Id \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $P_t = e^{tA}$

$\square$

Nella dim. abbiamo ottenuto l'equazione $\dot{P}_t = AP_t = P_t A$ detta Equazione di Kolmogorov (EK). Essa ha 2 formulazioni:

1) Equazioni Kolmogorov Forward
(equazioni di Fokker-Planck):
se π_t è la distrib. di $(X_t)_{t\geq 0}$, intesa come vettore riga, allora, come nel caso discreto, vale la seguente:

$$\pi_t = \pi_0 P_t$$

$\Rightarrow$ derivando in t e usando (EK) si ottiene:

$$\dot{\pi}_t = \pi_0 \dot{P}_t = \pi_0 P_t A = \pi_t A$$

quindi si ha:

$$\boxed{\dot{\pi}_t = \pi_t A}$$

2) Equazioni Kolmogorov Backward:
Consideriamo una funzione generica $F: E \to \mathbb{R}$ intesa come vettore colonna $(F(x)), x \in E$. Allora si ha:

$$(P_t F)(x) = \sum_{y \in E} P_t(x,y) F(y) = \mathbb{E}_x(F(X_t)) \quad (*)$$

(media condizionata a $X_0 = x$ di $F(X_t)$ rispetto alla distrib. della catena)

Usando (EK) si ottiene:

$$\boxed{(\dot{P}_t F) = A(P_t F)}$$

Formula di Dynkin:
Da $(*)$ ricaviamo:

$$\pi_0 P_t F = \sum_{x \in E} \pi_0(x)(P_t F)(x) = \mathbb{E}(F(X_t))$$

Utilizzando (EK) otteniamo:

$$\dot{\mathbb{E}}(F(X_t)) = \pi_0 (\dot{P}_t F) = \pi_0 P_t A F = \mathbb{E}(AF(X_t))$$

quindi:

$$\boxed{\dot{\mathbb{E}}(F(X_t)) = \mathbb{E}(AF(X_t))}$$

dove AF è il generatore applicato ad una funzione F.
Notiamo che:

$$(AF)(x) = \sum_{y \neq x} A(x,y)[F(y) - F(x)]$$

Infatti si ha:

$$(AF)(x) = \sum_{y \in E} A(x,y)F(y) = \underbrace{A(x,x)F(x)}_{-\sum_{y\neq x} A(x,y)} + \sum_{y \neq x} A(x,y)F(y)$$

$$= \sum_{y \neq x} A(x,y)[F(y) - F(x)]$$

TEOREMA:

Sia E insieme finito, $A = (A(x,y))_{x,y \in E}$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) $\exists$ CMR a valori in E il cui semigruppo è $P_t = e^{tA}$
2) gli elementi di A sono t.c. $A(x,y) \geq 0 \quad \forall x \neq y$.
Inoltre $\sum_{y \in E} A(x,y) = 0 \quad \forall x \in E$

esercizio:

Si consideri la CM a tempo continuo con generatore

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \text{ con } \lambda, \mu > 0$$

$\Rightarrow$ calcolare il semigruppo associato

Sol.:

Identifichiamo lo spazio degli stati con $E = \{0, 1\}$. Calcoliamo $P_t(0,1)$, $P_t(1,0)$, gli altri elementi rimarranno determinati dal vincolo di stocasticità della matrice P_t. Usando (EK) si ha:

$$\dot{P}_t = P_t A \Rightarrow \dot{P}_t(0,1) = \lambda \underbrace{P_t(0,0)}_{= 1 - P_t(0,1)} - \mu P_t(0,1) = \lambda - (\lambda+\mu)P_t(0,1)$$

se $x_t = P_t(0,1)$, dobbiamo risolvere:

$$\begin{cases} \dot{x}_t = \lambda - (\lambda+\mu)x_t \\ x_0 = P_0(0,1) = Id(0,1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_t = P_t(0,1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

$$\Rightarrow P_t(0,0) = 1 - P_t(0,1) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

$\Rightarrow$ per simmetria si ha $P_t(1,0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$

e quindi $P_t(1,1)=\frac{1}{\lambda+\mu}\left(\lambda+\mu e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$

Distribuzioni Stazionarie:

Def. (*Distribuzione stazionaria*):
Una distrib. π su E si dice STAZIONARIA per la CM con semigruppo $(P_t)_{t\geq 0}$ se:

$$\pi=\pi P_t \quad \forall t\geq 0$$

Proposizione:
Sia A generatore di una CMR. Una distrib. π é stazionaria se e solo se $\pi A=\vec{0}$

Dim.:
Sia $(P_t)_{t\geq 0}$ il semigruppo della CMR. π é stazionaria se $\pi=\pi P_t \Leftrightarrow \dot{\pi}=0=\pi\dot{P}_t \Leftrightarrow (EK)\ 0=\pi A P_t \Leftrightarrow \pi A=0$
(per t piccolo P_t é invertibile)

$\square$

Per garantire $\exists!$ di π ci riduciamo al caso discreto.
Siano $C:=\max_{x\in E}|A(x,x)|$, $c\in(0,\frac{1}{C})$. Definiamo la matrice

$$P=Id+cA$$

1) tutte le entrate di P sono NON negative
2) gli elementi diagonali di P sono tutti >0
3) le righe di P sommano a 1

P é matrice di transizione per una CM a tempo discreto aperiodica. Inoltre $\pi=\pi P \Leftrightarrow \pi A=0$ cioé le distrib. staz. della CM con generatore A coincidono con le distr. staz. della CM a tempo discreto con matrice di transizione P.

Ricordiamo che P irriducibile $\Leftrightarrow \forall x,y\in E$ con $x\neq y\ \exists\ x=x_0,\dots,x_n=y$ t.c. $\forall 0\leq i\leq n-1\ x_i\neq x_{i+1} \wedge P(x_i,x_{i+1})>0$

Osservazione:
$P(x_i,x_{i+1})=c\cdot A(x_i,x_{i+1})$ se $x_i\neq x_{i+1}$

Proposizione:
Ogni CMR a stati finiti ammette almeno una distrib. staz.
Se il generatore A é irriducibile, la distrib. staz. é unica.

Concludiamo con la nozione di reversibilità che fornisce una condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché una distr. π sia stazionaria.

Notiamo che $\forall x, y \in E$, usando la def. di P e quella di reversibilità relativa al caso discreto, si ottiene:

$$\pi(x) P(x,y) = \pi(y) P(y,x) \iff \underbrace{\pi(x) A(x,y) = \pi(y) A(y,x)}_{\text{Def. di reversibilità per CM a tempo continuo}}$$

N.B.

Si ha sempre reversibilita $\Rightarrow$ stazionarietà MA NON IL VICEVERSA !!!