Def. (Flusso di un campo completo):

Dati $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campo COMPLETO, $z_0 \in \Omega$, $z(t)$ soluzione massimale del PdC:

$$\begin{cases} \dot{z} = X \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

si definisce il FLUSSO DEL CAMPO X come la mappa:

$$\begin{aligned} \phi^X : \mathbb{R} \times \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (t, z_0) &\longmapsto z(t, z_0) \end{aligned}$$

La mappa al tempo t del flusso è:

$$\begin{aligned} \phi^X_t : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ z_0 &\longmapsto z(t, z_0) = \phi^X(t, z_0) \end{aligned}$$

esempio:

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ z &\longmapsto Az \end{aligned} \quad \text{con } A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \phi^X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\phi^X(t, z_0) = z_0 \cdot e^{tA}$

Il flusso è certamente ben definito per la teoria sui PdC. Inoltre $\phi^X : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ è liscio se X è liscio (dal Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali)

Proprietà:

1) $\phi^X_0 = Id(\Omega)$
2) $\phi^X_t \circ \phi^X_s = \phi^X_{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$
3) ϕ^X_t è invertibile con $(\phi^X_t)^{-1} = \phi^X_{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

La dim. è semplice:

Dim.:

1) Dato $z_0 \in \Omega$ si ha $\phi_0^X(z_0) = z(0, z_0) = z_0$

2) Dati $z_0 \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$ considero $c_1, c_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$ con:

$$c_1(t) := \phi_t^X(\phi_s^X(z_0)) = z(t, z(s, z_0))$$

$$c_2(t) := \phi_{t+s}^X(z_0) = z(t+s, z_0)$$

$\Rightarrow$ c_1, c_2 sono soluzioni di $\dot{z} = X(z)$ per costruzione, inoltre si ha:

$$c_1(0) = z(s, z_0) = c_2(0)$$

$\Rightarrow$ per unicità $c_1 = c_2$ $\forall t \in \mathbb{R}$

3) $\phi_t^X \circ \phi_s^X = \phi_{t+s}^X$ $\forall t, s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ prendo $s = -t$ e ottengo:

$$\phi_t^X \circ \phi_{-t}^X = \phi_0^X = Id(\Omega)$$

$$\Rightarrow (\phi_t^X)^{-1} = \phi_{-t}^X \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

q.e.d.

N.B.
Tali proprietà valgono perché si tratta di sistemi AUTONOMI!!! Se ci fosse dipendenza da t, questa teoria andrebbe ritrattata.

Def. (Diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$)

Dati $\Omega, \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, una mappa $\mathcal{C} : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$ si dice DIFFEOMORFISMO se $\mathcal{C} \in C^\infty$, $\exists\, \mathcal{C}^{-1} : \tilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$ con $\mathcal{C}^{-1} \in C^\infty$

Proprietà:

$\phi_t^X : \Omega \longrightarrow \Omega$ è un diffeomorfismo $\forall t \in \mathbb{R}$

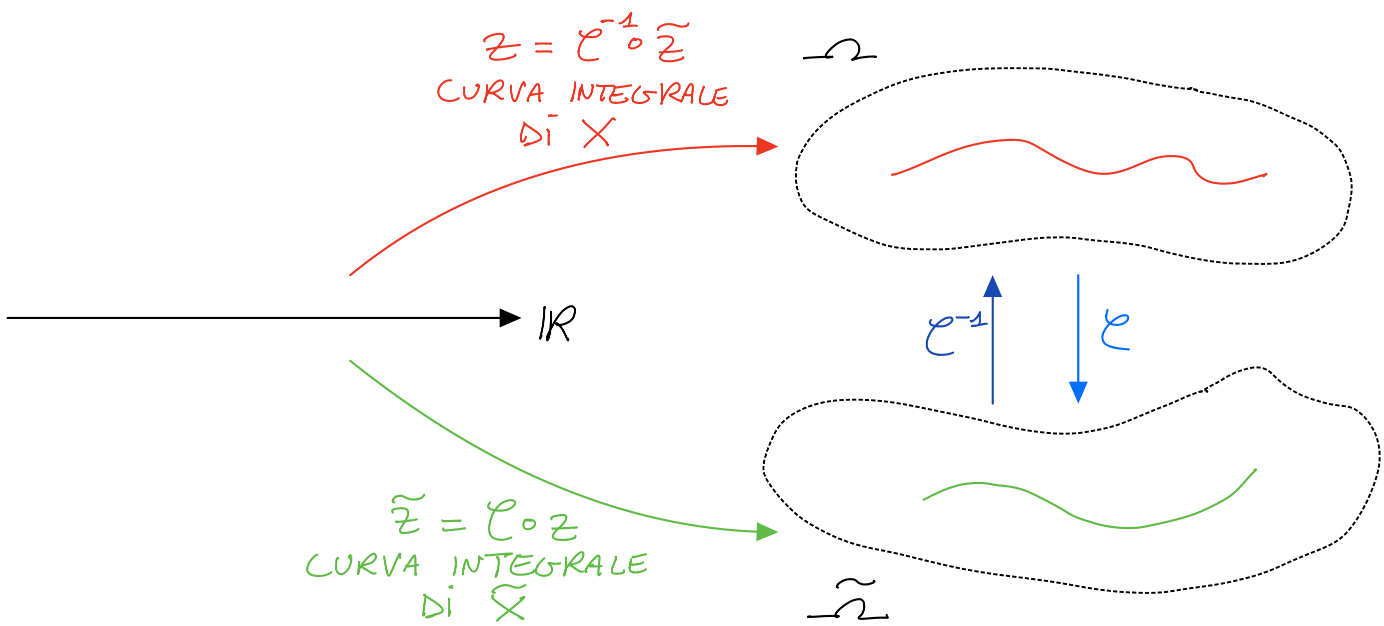
Assumeremo sempre, da qui in poi, che i campi trattati siano COMPLETI. Vogliamo ora analizzare l'operazione di cambio di variabile in un sistema di ODE

Coniugazione di campi vettoriali:

Dati $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campi COMPLETI e $\mathcal{C} : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$ un diffeomorfismo (ovvero, praticamente, un cambio di coordinate) si hanno le seguenti:

Def. (Campi coniugati):

Si dice che $X, \tilde{X}$ sono CONIUGATI dal diffeomorfismo $\mathcal{C}$ quando le curve integrali di $\tilde{X}$ sono TUTTE e SOLE le immagini, mediante $\mathcal{C}$, delle curve integrali di X e viceversa.



$\Longrightarrow X, \tilde{X}$ sono coniugati da $\mathcal{C}$ quando si ha:

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto z(t) \in \Omega \text{ è soluzione di } \dot{z} = X(z)$$

$$\Updownarrow$$

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \tilde{z}(t) = (\mathcal{C} \circ z)(t) \in \tilde{\Omega} \text{ è soluzione di}$$
$$\dot{z} = \tilde{X}(z)$$

Equivalentemente, $X, \tilde{X}$ sono coniugati da $\mathcal{C}$ quando il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\phi_t^X"] \arrow[d, "\mathcal{C}"'] & \Omega \arrow[d, "\mathcal{C}"] \\ \tilde{\Omega} \arrow[r, "\phi_t^{\tilde{X}}"'] & \tilde{\Omega} \end{tikzcd}$$

ovvero quando vale:

$$\mathcal{C} \circ \phi_t^X = \phi_t^{\tilde{X}} \circ \mathcal{C} \iff \boxed{\phi_t^{\tilde{X}} = \mathcal{C} \circ \phi_t^X \circ \mathcal{C}^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

<u>Proposizione</u> (Formula del Push-Forward):

Dati $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, essi sono coniugati dal diffeomorfismo $\mathcal{C}$ se e solo se vale:

$$\boxed{\tilde{X} = ((D\mathcal{C})X) \circ \mathcal{C}^{-1}}$$

dove il membro di destra è detto il PUSH-FORWARD di X mediante $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}_* X := ((D\mathcal{C})X) \circ \mathcal{C}^{-1}$$

N.B.

Per coniugare 2 campi NON BASTA effettuare la composizione

Vale ovviamente anche la formula simmetrica:

<u>Proposizione</u> (Formula del Pull-Back):

Dati $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, essi sono coniugati dal diffeomorfismo φ se e solo se vale:

$$\boxed{X = \left((D\varphi^{-1}) \tilde{X} \right) \circ \varphi}$$

dove il membro di destra è detto il PULL-BACK di $\tilde{X}$ mediante φ:

$$\varphi^* \tilde{X} := \left((D\varphi^{-1}) \tilde{X} \right) \circ \varphi$$

<u>Dim.</u>:

($\Rightarrow$): $X, \tilde{X}$ coniugati mediante φ con φ diffeomorfismo:

sia $t \in \mathbb{R} \longmapsto z(t)$ curva integrale di X, allora

$t \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi \circ z(t)$ è curva integrale di $\tilde{X}$, ovvero:

$$\tilde{X}(\varphi \circ z(t)) = \frac{d}{dt} (\varphi \circ z)(t) = D\varphi(z(t)) \cdot \dot{z}(t)$$

tuttavia z è soluzione di $\dot{z} = X(z)$, quindi:

$$\Rightarrow \tilde{X}(\varphi \circ z) = D\varphi(z) \cdot X(z)$$

preso $t \in \mathbb{R}$ e definita $w = \varphi(z(t))$ ottengo:

$$\tilde{X}(w) = D\varphi(\varphi^{-1}(w)) \cdot X(\varphi^{-1}(w))$$

Dato che le orbite di X coprono Ω, tale formula vale $\forall w \in \tilde{\Omega}$

q.e.d.

Conviene, nella pratica, applicare la formula seguendo la dimostrazione, piuttosto che direttamente.

<u>esempi</u>:

1) $X : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X(z) = z^2$

$\varphi : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ diffeomorfismo con $\varphi(z) = z^3$

troviamo il coniugato di X mediante φ:

$$\Rightarrow \dot{z} = X(z) = z^2 \, , \quad w = \varphi(z) = z^3$$

Derivo lungo le curve integrali di X:

$$\dot{w} = \frac{d}{dt}(z^3) = 3z^2 \cdot \dot{z} = 3z^4 = 3w^{\frac{4}{3}}$$

$\Rightarrow$ il coniugato di X mediante φ è:

$$\varphi_* X : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longmapsto 3w^{\frac{4}{3}}$$

2) Dati:

$\Omega = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 \neq 0 \}$,

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $X(z) = z$

$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$ con $\varphi(z) = \begin{pmatrix} 2z_1 \\ z_1 \cdot z_2 \end{pmatrix}$

verificare che φ è diffeomorfismo e trovare il push-forward di X mediante φ.

$$\Rightarrow \varphi \in C^\infty(\Omega) \wedge \exists \varphi^{-1}(\Omega) \in C^\infty \left(z_1 \neq 0 \Rightarrow \varphi(z)_1 \neq 0 \right):$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2z_1 \\ w_2 = z_1 z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} w_1 \\ z_2 = \frac{2w_2}{w_1} \end{cases} \Rightarrow \varphi^{-1}(w) = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{2} \\ 2\frac{w_2}{w_1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \tau^{-1}$ è ben definita su Ω $(z_1 \neq 0 \Rightarrow w_1 \neq 0)$ ed è liscia

$\Rightarrow \tau$ è diffeomorfismo su Ω

$\Rightarrow$ Troviamo il push-forward di X mediante τ:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 \\ \dot{z}_2 = z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2z_1 \\ w_2 = z_1 z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{w}_1 = 2\dot{z}_1 \\ \dot{w}_2 = \dot{z}_1 z_2 + \dot{z}_2 z_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{w}_1 = 2z_1 = w_1 \\ \dot{w}_2 = z_1 z_2 + z_1 z_2 = 2w_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau_* X(w) = \begin{pmatrix} w_1 \\ 2w_2 \end{pmatrix}$$

3) Dato il sistema di ODE $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x \end{cases}$, scriverlo (in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) in coordinate polari:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ v = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{con } \rho \geq 0, \ \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\sin\theta\cdot\dot{\theta} = v = \rho\sin\theta \\ \dot{v} = \dot{\rho}\sin\theta + \rho\cos\theta\cdot\dot{\theta} = -x = -\rho\cos\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ esplicitiamo $\dot{\rho}, \dot{\theta}$:

(1) $\cos\theta$ + (2) $\sin\theta$

$$\Rightarrow \dot{\rho}\cos^2\theta - \rho\cancel{\sin\theta\cos\theta}\cdot\dot{\theta} + \dot{\rho}\sin^2\theta + \rho\cancel{\cos\theta\sin\theta}\cdot\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} = 0$$

(1) $(-\sin\theta)$ + (2) $\cos\theta$

$$\Rightarrow \rho\dot{\theta} = -\rho \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad =: \text{ sistema scritto in coordinate polari}$$

Cambiamento di variabili per ODE del 2° ordine:

Consideriamo l'esempio precedente: il sistema originale era associato ad un'equazione del 2° ordine, MA il suo Push-Forward tramite il cambiamento di coordinate polari NON LO È (ha "distrutto la struttura del 2° ordine").

Quali sono i cambiamenti di coordinate che preservano la struttura delle ODE al 2° ordine?

Proposizione:

Dati $C \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $X : C \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ associato ad un sistema di ODE al 2° ordine, ovvero:

$$X(x,v) = \begin{pmatrix} v \\ Y(x,v) \end{pmatrix}$$

e dato il diffeomorfismo $\tau : C \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \tilde{C} \times \mathbb{R}^n$ della forma:

$$\tau(x,v) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x,v) \end{pmatrix}$$

si ha che $\tau_* X$ è ancora associato ad un sistema del 2° ordine se e solo se vale la seguente condizione su τ:

$$g(x,v) = Df(x) \cdot v \qquad \forall (x,v) \in C \times \mathbb{R}^n$$

Dim.:

Considero una generica curva integrale di X:

$$t \longmapsto (x(t), v(t))$$

Definiamo $\tilde{x}(t) := f(x(t))$, $\tilde{v} := g(x(t), v(t))$, ovvero:

$$(\tilde{x}(t), \tilde{v}(t)) = \tau(x(t), v(t))$$

Affinché $(\tilde{x}, \tilde{v})$ sia associato ad un sistema al 2° ordine deve essere:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{v} \iff \dot{\tilde{x}} = \frac{d}{dt}(f(x(t))) = Df(x(t))\,\dot{x}(t) = Df(x)\,v \quad (\dot{x} = v)$$

$$\dot{\tilde{v}} = g(x, v) \iff g(x, v) = Df(x)\cdot v \quad \forall (x, v) \in C \times \mathbb{R}^n$$

Osservo che dato $f: C \to \tilde{C}$ diffeomorfismo, la mappa $(x, v) \longmapsto (f(x), Df(x)v)$ è un diffeomorfismo da $C \times \mathbb{R}^n$ in $\tilde{C} \times \mathbb{R}^n$ con inversa $(\tilde{x}, \tilde{v}) \longmapsto (f^{-1}(\tilde{x}), Df^{-1}(\tilde{x})\tilde{v})$

q.e.d.

N.B.

Dato un diffeomorfismo $f: C \to \tilde{C}$, il diffeomorfismo dato $\tau: C \times \mathbb{R}^n \to \tilde{C} \times \mathbb{R}^n$ della forma:

$$\tau(x, v) = \begin{pmatrix} f(x) \\ Df(x)\cdot v \end{pmatrix}$$

è detto SOLLEVAMENTO DI f allo spazio delle fasi oppure MAPPA TANGENTE di f.

esempi:

1) $\begin{cases} \ddot{x} = -Kx \\ \ddot{y} = -Ky \end{cases}$, $K \neq 0$ $\Rightarrow$ configurazione di equilibrio in $z = (0,0)$

Cambiamento di coordinate (in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{O}\}$) in coordinate polari:

per determinare il sollevamento allo spazio delle fasi derivo lungo le curve integrali

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{\rho}\cos\theta - \dot{\rho}\dot{\theta}\sin\theta - (\dot{\rho}\dot{\theta}\sin\theta + \rho\ddot{\theta}\sin\theta + \rho\dot{\theta}^2\cos\theta) \\ \ddot{y} = \ddot{\rho}\sin\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\cos\theta + \rho\ddot{\theta}\cos\theta - \rho\dot{\theta}^2\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{\rho}\cos\theta - 2\dot{\rho}\dot{\theta}\sin\theta - \rho\ddot{\theta}\sin\theta - \rho\dot{\theta}^2\cos\theta = -K\rho\cos\theta \\ \ddot{y} = \ddot{\rho}\sin\theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\cos\theta + \rho\ddot{\theta}\cos\theta - \rho\dot{\theta}^2\sin\theta = -K\rho\sin\theta \end{cases}$$

Per esplicitare $\ddot{\rho}$, $\ddot{\theta}$ considero:

$$(1)\cos\theta + (2)\sin\theta$$

$$-(1)\sin\theta + (2)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -K\rho \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{\rho} = \rho\dot{\theta}^2 - K\rho \\ \ddot{\theta} = -2\frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{\theta} \end{cases}$$