OSSERVAZIONI:

1) Se $f : \mathbb{C} \setminus \underbrace{\{z_i\}_{i=1}^{n}}_{\text{numero finito di singolarità isolate}} \to \mathbb{C}$ olomorfa, allora $\sum_{i=1}^{n} \text{Res}(f, z_i) + \text{Res}(f, \infty) = 0$ $\underbrace{}_{\text{Teorema dei Residui}}$

Quindi, se è noto il residuo in n singolarità, si può calcolare facilmente la $(n+1)$sima restante usando tale uguaglianza. Si usa in particolare per $\text{Res}(f, \infty)$, che andrebbe altrimenti calcolato con:

$$\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot \frac{1}{z^2}, z=0\right) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_R} f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}dz$$

con $R>0$ sufficientemente piccolo.

2) Se $f : \mathbb{C} \setminus \{z_i\}_{i=1}^{n} \to \mathbb{C}$ olomorfa è PARI $(f(z) = f(-z))$ e $z_1 = 0$, allora $\text{Res}(f, z_1=0) = 0$. Infatti:

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k \overset{(*)}{=} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ k \text{ pari}}} a_k z^k + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ k \text{ dispari}}} a_k z^k \\ f(-z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k (-z)^k \overset{(*)}{=} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ k \text{ pari}}} a_k z^k - \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ k \text{ dispari}}} a_k z^k \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k \text{ dispari}}} a_k z^k = 0$$

$f(z) = f(-z)$

$$\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k \text{ dispari} \Rightarrow \text{Res}(f, 0) = a_{-1} = 0$$

(*) la serie converge TOTALMENTE !!! Quindi $\forall z$ nell'intorno si ha una serie a termini complessi che converge ASSOLUTAMENTE $\Rightarrow$ INCONDIZIONATAMENTE (Teorema di Riemann per le serie) e quindi è possibile scambiare l'ordine degli addendi !!!

ESERCIZI:

1) $\forall w \in \mathbb{R}$, calcolare $\text{V.P.}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{} e^{iwx}dx := \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}e^{iwx}dx$

assolutamente $\mathcal{L}^1$-sommabile su $[-1, 1]$ (0 è singolarità eliminabile) MA NON SU $\mathbb{R}$!!!

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{|x|}dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}}\frac{|\sin x|}{|x|}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{|x|}dx = 2\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{|x|}dx \geq \frac{4}{\pi}\Big(\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k}}_{=+\infty} - 1\Big)$$

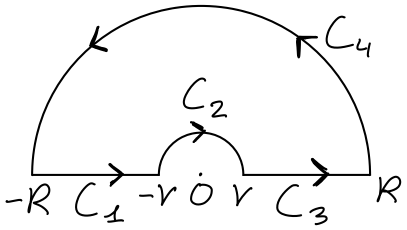
Calcoliamo:

$$\frac{\sin x}{x}e^{iwx} = \frac{1}{2i}\frac{(e^{ix}-e^{-ix})e^{iwx}}{x} = \frac{1}{2i}\frac{e^{ix(w+1)}-e^{ix(w-1)}}{x}$$

$$\Rightarrow \text{V.P.}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x}e^{iwx}dx = \frac{1}{2i}\left(I(w+1) - I(w-1)\right) \text{ con } I(\mu) := \text{V.P.}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\mu x}}{x}dx$$

con $\mu\in\mathbb{R}$

Sia $f(x) := \frac{e^{i\mu x}}{x}$, allora $\tilde{f}(z) := \frac{e^{i\mu z}}{z}$ è il prolungamento analitico di f e ha un POLO SEMPLICE REALE in $z=0$. Sia C curva di Jordan che NON contiene singolarità di $\tilde{f}$:



$$\Rightarrow \oint_C \tilde{f}(z)\,dz = \int_{C_1}\tilde{f} + \oint_{C_2}\tilde{f} + \int_{C_3}\tilde{f} + \oint_{C_4}\tilde{f} = 0$$

Cauchy

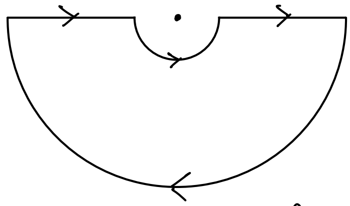
$$\Rightarrow \int_{C_1\cup C_3}\tilde{f} \xrightarrow[R\to+\infty]{r\to 0^+} I(\mu),$$

$$\Rightarrow \oint_{C_2}\tilde{f} \xrightarrow{r\to 0^+} i\,\mathrm{Res}(\tilde{f},0)\cdot(0-\pi) = -i\pi$$ (Lemma del cerchio piccolo)

$$\Rightarrow \oint_{C_4}\frac{e^{i\mu z}}{z}\,dz \xrightarrow{R\to+\infty} 0 \quad \forall \mu>0$$ (Lemma di Jordan applicato a $\frac{1}{z}$. NON si può applicare il Lemma del Cerchio grande alla funzione $\frac{e^{i\omega z}}{z}$!!!)

$$\Rightarrow I(\mu) = i\pi \quad \forall\mu>0$$

Analogamente, se $\mu<0$, si costruisce C come segue:



OPPURE, si osserva che $\forall\mu<0$ si ha:

$$I(-\mu) = V.P.\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\mu x}}{x}dx \underset{(t=-x)}{=} V.P.\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{i\mu t}}{t}dt = -I(\mu) \text{ ovvero}$$

$I:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ è funzione DISPARI $\Rightarrow I(\mu) = -i\pi \quad \forall\mu<0$

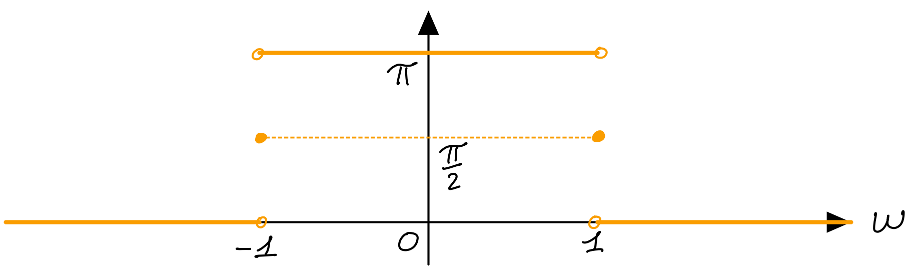
Rimane da calcolare $I(0)$:

$$\Rightarrow I(0) = V.P.\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{x} := \lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to 0^+}}\left(\int_{-R}^{r}\frac{dx}{x} + \int_{r}^{R}\frac{dx}{x}\right) = 0$$ ($\frac{1}{x}$ è DISPARI)

Quindi si ha:

$$\hat{h}(\omega) := V.P.\int_{\mathbb{R}}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=:h(x)}e^{-i\omega x}dx = \begin{cases} 0 & \text{se } |\omega|>1\\ \frac{\pi}{2} & \text{se } |\omega|=1\\ \pi & \text{se } |\omega|<1\end{cases}$$

$\hat{h}(\omega)$ è la TRASFORMATA DI FOURIER (INVERSA) di $h(x) = \frac{\sin x}{x}$



Notare che $h(x) := \begin{cases} \sin x \cdot \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è analitica su $\mathbb{R}$:

$$h(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \quad (\text{con } 0^0 = 1)$$

$\Rightarrow h \in C^\omega(\mathbb{R})$, ma $h \notin L^1(\mathbb{R})$. Invece $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ ma $\hat{h} \notin C^\omega$

2) Calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$:

N.B. No V.P., è un integrale alla Lebesgue classico!!! Infatti:

1) $\frac{\sin^2 x}{x^2} \in L^1((0,a])$ $\forall a > 0$ $(\sin^2 x \sim x^2$ per $x \to 0^+)$

2) $\frac{\sin^2 x}{x^2} \in L^1([a,+\infty))$ $\forall a > 0$ $\left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \wedge \frac{1}{x^2} \in L^1([a,+\infty))\right)$

$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{x^2} \in L^1((0,+\infty))$

Si ha:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos 2x}{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\mathrm{Re}(e^{i2x})}{x^2}\,dx = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{i2x}}{x^2}dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{Re}(I) \text{ con } I := \int_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{i2x}}{x^2}dx$$

Sia $f := \frac{1-e^{i2x}}{x^2}$, $\tilde{f}$ il suo prolungamento analitico che ha 1 sola singolarità in $z=0$:

$$\lim_{|z|\to 0} \left|\frac{1-e^{i2z}}{z^2}\right| = \lim_{|z|\to 0} \frac{2|z|}{|z|^2} = +\infty \Rightarrow z=0 \text{ POLO SEMPLICE REALE}$$

$\Rightarrow$ applichiamo il Lemma del Cerchio piccolo (C di Jordan come sopra):

$$\oint_C \tilde{f} = \int_{C_1} \tilde{f} + \oint_{C_2} \tilde{f} + \int_{C_3} \tilde{f} + \oint_{C_4} \tilde{f} = 0 \quad (\text{Cauchy})$$

$$\int_{C_1 \cup C_3} \tilde{f} \xrightarrow[R\to+\infty]{r\to 0^+} I, \quad \int_{C_2} \tilde{f} \xrightarrow{r\to 0^+} -i\pi\,\mathrm{Res}(\tilde{f},0) = -i\pi(-2i) = -2\pi$$

$$f(z) = \frac{1-(1+i2z+\mathcal{O}(z^2))}{z^2} = -\frac{2i}{z} + \mathcal{O}(1)$$

Per calcolare il contributo su C_4 usiamo il Lemma del Cerchio Grande:

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} z\tilde{f}(z) = \lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} \frac{1-e^{i2z}}{z} = \lim_{\substack{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty \\ y\geq 0}} \left|\frac{1-e^{-2y}e^{i2x}}{x+iy}\right|$$

$$\leq \lim_{\substack{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty \\ y\geq 0}} \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \left(|1-e^{-2y}e^{i2x}| \leq 1+|e^{-2y}e^{-i2x}| = 1+|e^{-2y}|\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} z\tilde{f}(z) = 0 \Rightarrow \int_{C_4} \tilde{f} = i\pi\cdot 0 = 0 \Rightarrow I = 2\pi$$

$$\Rightarrow Re(I) = 2\pi \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

3) Data $f(x) := \frac{\sqrt{x}\log x}{x^2-1}$, calcolare $\int_0^{+\infty} f$:

1) $f \in L^1((0,+\infty))$?

se $x \to 0^+$, $f \sim -\sqrt{x}\log x \to 0^+ \Rightarrow f \in L^1((0,a])$ con $0<a<1$

se $x \to 1$, $f \sim \frac{\log((x-1)+1)}{2(x-1)} \to \frac{1}{2} \Rightarrow f \in L^1((0,a])$ con $a>0$

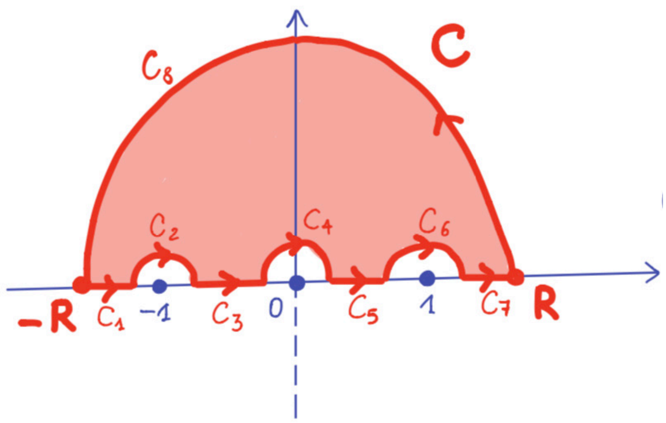
se $x \to +\infty$, $f \sim \frac{\sqrt{x}\log x}{x^2} = \frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f \in L^1((0,+\infty))$

$\int_0^{+\infty} \frac{\log^\beta x}{x^\alpha}\,dx$ CONVERGE se $\alpha > 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$

Quindi $\int_0^{+\infty} f$ è da intendersi come integrale di Lebesgue classico.

Si hanno 2 metodi:

1) Si costruisce il circuito C come segue:



$\Rightarrow$ dato che f ha un logaritmo, il suo prolungamento analitico deve avere un logaritmo principale. Scegliamo quindi $Arg: \mathbb{C}\setminus\{iy : y \leq 0\} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$. In ogni caso, 0 rimarrà sempre una singolarità NON isolata di Arg

$\Rightarrow Log: \mathbb{C}\setminus\{iy : y\leq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ t.c. $Log\, z = \log|z| + i\,Arg\, z$

Con questa scelta si ha:

$\tilde{f} = \frac{e^{\frac{1}{2}Log\, z}\, Log\, z}{z^2-1}$ prolungamento analitico di f a $\mathbb{C}\setminus\{iy : y \leq 0\}$

$$\Rightarrow \oint_C \tilde{f} = \underbrace{\int_{C_1\cup C_3}}_{\text{integrale nel senso del V.P. di Cauchy}} + \underbrace{\int_{C_5\cup C_7}}_{\text{Integrale nel senso di Lebesgue (conv. dominata)}} + \underbrace{\int_{C_2} + \int_{C_4} + \int_{C_6}}_{\text{Lemma del cerchio piccolo / stime dall'alto}} + \underbrace{\int_{C_8}}_{\text{Lemma del cerchio grande o stime dall'alto}} = 0 \ (\text{Cauchy})$$

SIAMO INTERESSATI A QUESTO QUI !!!

1) $C_1 \cup C_3$:

$$\int_{C_1\cup C_3}\tilde{f} = \int_{C_1\cup C_3} \frac{e^{\frac{1}{2}\log|z| + \frac{i}{2}\pi}\cdot(\log|z|+i\pi)}{z^2-1}\,dz = i\int_{C_1\cup C_3}\frac{\sqrt{-x}\,(\log(-x)+i\pi)}{x^2-1}$$

se $x \to -1$, $\dfrac{\sqrt{-x}\,(\log(-x)+i\pi)}{x^2-1} \sim \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1} \Rightarrow -1$ é polo semplice reale

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0}\tilde{f}$ é nel senso del V.P. di Cauchy, quindi:

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{0}\tilde{f} = \lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to 0^+}}\left(\int_{-R}^{-1-r} + \int_{-1+r}^{-r}\right) = -\pi\int_{-\infty}^{0}\frac{\sqrt{-x}}{x^2-1}\,dx + i\int_{-\infty}^{0}\frac{\sqrt{-x}\,\log(-x)}{x^2-1}\,dx$$

$$= \pi\int_{+\infty}^{0}\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx - i\int_{+\infty}^{0}\frac{\sqrt{x}\,\log x}{x^2-1}\,dx = -\pi\underbrace{\int_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx}_{=:\,J} + i\int_{0}^{+\infty}f$$

2) C_2:

-1 é polo semplice reale, quindi usiamo il Lemma del Cerchio Piccolo:

$$\int_{C_2}\tilde{f} \xrightarrow[r\to 0^+]{} i(-\pi)\,\mathrm{Res}(\tilde{f},-1) = -\frac{\pi^2}{2}i$$

3) C_4:

0 é singolarità non isolata $\Rightarrow$ non si può usare il Lemma del Cerchio Piccolo $\Rightarrow$ va cercata una stima dall'alto

$$\left|\int_{C_4}\tilde{f}\right| \leq \pi r\,\|\tilde{f}\|_{\infty, C_4} \leq \frac{\pi r\cdot\sqrt{r}\cdot(|\log r|+\pi)}{|r^2-1|} = \frac{\pi r^{\frac{3}{2}}\cdot(|\log r|+\pi)}{|r^2-1|} \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$$

$|z^2-1| \geq |z|^2-1 \Rightarrow \dfrac{1}{|z^2-1|} \leq \dfrac{1}{||z|^2-1|}$

$$\Rightarrow \int_{C_4}\tilde{f} \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$$

4) C_6:

1 é singolarità eliminabile $\Rightarrow$ si può usare il Lemma del Cerchio Piccolo

$$\int_{C_6}\tilde{f} \xrightarrow[r\to 0^+]{} i(-\pi)\,\mathrm{Res}(\tilde{f},1) = 0$$

5) C_8:

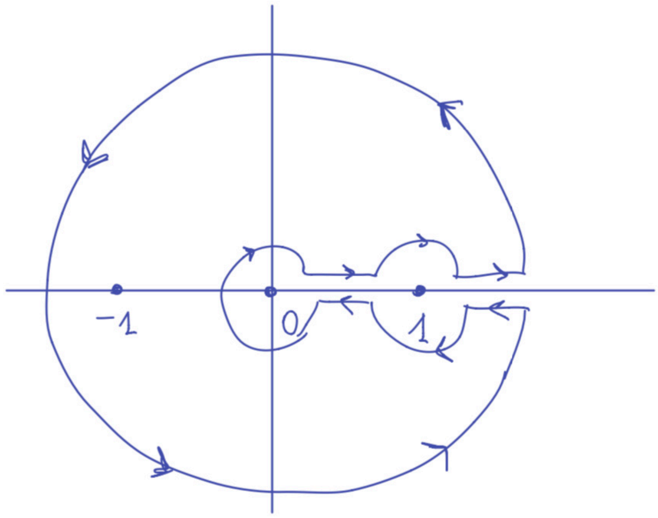
si usa il Lemma del Cerchio Grande

$$\int_{C_8}\tilde{f} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Si ha quindi $0 = -\pi J + i\int_0^{+\infty}f + \int_0^{+\infty}f - \dfrac{\pi^2}{2}i$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}f - \pi J = \int_0^{+\infty}f - \dfrac{\pi^2}{2} = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty}f = \dfrac{\pi^2}{2} \wedge J = \dfrac{\pi}{2}$

2) Un metodo alternativo é il seguente:
si costruisce il circuito Keyhole come segue



e si sceglie $Arg \in (0, 2\pi)$ ...