Si tratta di un sistema proveniente dalla dinamica di popolazioni. Supponiamo di avere $u(t) :=$ numero di PREDE al tempo t aventi risorse infinite e $p(t) :=$ numero di PREDATORI al tempo t. Supponiamo di approssimare $u, p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Il sistema di Lotka-Volterra è:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{u} = \alpha u - \beta u p \\ \dot{p} = -\gamma p + \delta u p \end{cases}}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono parametri reali >0

Effettuiamo un cambio di variabili per ridurre il numero di parametri del sistema:

$$x := \frac{\delta}{\gamma} u \quad , \quad y := \frac{\beta}{\alpha} p$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \alpha (x - xy) \\ \dot{y} = \gamma (-y + xy) \end{cases} \quad \text{con } \alpha, \gamma > 0$$

$\Rightarrow$ per il Teorema delle riparametrizzazioni in tempo, il ritratto in fase è equivalente al ritratto in fase del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = \frac{\gamma}{\alpha}(-y + xy) \end{cases} \quad \text{con } \frac{\gamma}{\alpha} := K > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = K(-y + xy) \end{cases}} \quad \text{con } K > 0$$

(Equivalentemente si poteva applicare $\tau = \alpha t$)

$\Rightarrow$ i dati iniziali devono essere non negativi:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \geq 0 \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$$

Casi estremi:

1) $x(0) = 0$ (sistema con 0 prede al tempo 0)

$\Rightarrow \ x(t) = 0 \ \Rightarrow \ y(t) = e^{-kt} \cdot y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ il semiasse y positivo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y > 0\}$

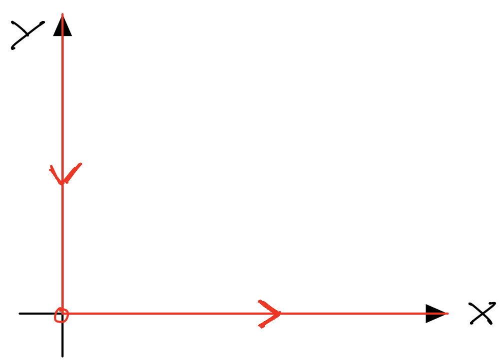
è un'orbita del sistema orientata verso il basso.

2) $y(0) = 0$ (sistema con 0 predatori al tempo 0)

$\Rightarrow \ y(t) = 0 \ \Rightarrow \ x(t) = e^{t} x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ il semiasse x positivo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x > 0\}$

è un'orbita del sistema orientata verso destra.



Caso normale:

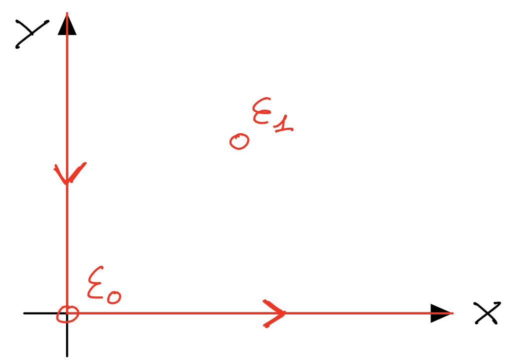
$x_0, y_0 > 0 \ \Rightarrow \ x(t), y(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ per unicità (le orbite sono disgiunte)

$\Rightarrow$ 2 semiassi positivi ed il 1° quadrante aperto sono insiemi invarianti.

Equilibri:

$$\begin{cases} 0 = x - xy \\ 0 = k(-y + xy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \vee \ y = 1 \\ x = 1 \ \vee \ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ \mathcal{E}_0 = (0,0), \ \ \mathcal{E}_1 = (1,1)$

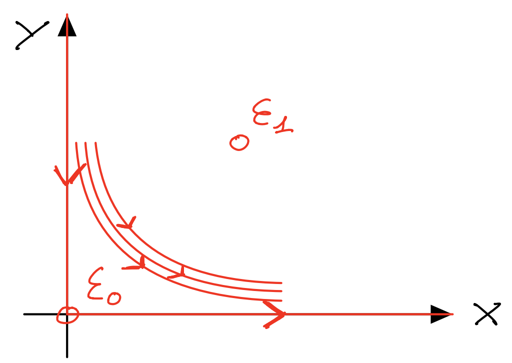


$\Rightarrow$ $\mathcal{E}_0 = (0,0)$ è sicuramente INSTABILE ($\exists$ orbita uscente da $\mathcal{E}_0$ che va a $+\infty$ per $t \to +\infty$)

Si poteva vedere anche applicando il Metodo Spettrale:

$$D_X(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ ky & -k+kx \end{pmatrix} \Rightarrow D_X(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -k < 0 \Rightarrow \mathcal{E}_0$ è INSTABILE e, studiando il linearizzato, si osserva che è un PUNTO DI SELLA. (Teorema di Grobman-Hartman, $\mathcal{E}_0$ è iperbolico)



$\mathcal{E}_1 = (1,1)$:

$$\Rightarrow D_X(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + k$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2}$ sono immaginari puri $\Rightarrow$ NON si applica il

Metodo Spettrale. Tuttavia, il sistema di Lotka-Volterra possiede un I.P NON costante:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - xy \\ \dfrac{dy}{dt} = k(-y+xy) \end{cases} \Rightarrow dt = \frac{dx}{x-xy} = \frac{dy}{k(-y+xy)}$$

escludendo l'insieme dove i 2 denominatori si annullano.

$$\Rightarrow k(-y+xy)dx - (x-xy)dy = 0$$

che NON è una forma esatta. Tuttavia $\exists$ un fattore integrante, dividendo per xy si ottiene:

$$k\left(-\frac{1}{x}+1\right)dx - \left(\frac{1}{y}-1\right)dy = 0$$

che è una forma esatta. Integrando termine a termine si ottiene:

$$d(-k\log x + kx - \log y + y) = 0$$

$\Rightarrow I: (0,+\infty)\times(0,+\infty)$ con

$$\boxed{\begin{array}{c} I(x,y) = -k\log x + kx - \log y + y \\ \text{è un I.P. del sistema di Lotka-Volterra} \end{array}}$$

Proprietà di I:

1) I è strettamente convessa
2) I è coerciva:

$$\lim_{(x,y)\to\partial((0,+\infty)\times(0,+\infty))} I(x,y) = +\infty \quad \text{ovvero:}$$

1) $\lim_{x\to 0} I = +\infty = \lim_{y\to+\infty} I$

2) $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} I = +\infty$

$\Rightarrow$ la coercività assicura l'esistenza di un MINIMO, quindi I ha un minimo

$\Rightarrow \nabla I = \left(K - \frac{K}{x}, 1 - \frac{1}{y}\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,1)$

$\Rightarrow$ l'unico punto critico di I è l'equilibrio $\mathcal{E}_1$ e poiché I è strettamente convessa, $\mathcal{E}_1$ è suo MINIMO STRETTO

$\Rightarrow I$ è I.P. di X, quindi $\mathcal{L}_X I = 0$

$\Rightarrow I$ è una funzione di Lyapunov, quindi $\mathcal{E}_1$ è STABILE PER TUTTI I TEMPI.

<u>Ritratto in fase</u> (nel 1 quadrante)

Si ha I I.P. di X in 2D $\Rightarrow$ le orbite sono gli insiemi di livello di I: dato che I è convessa, i suoi sottolivelli sono convessi.

$\Rightarrow \{(x,y) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty) \mid I(x,y) \leq c\}$ è convesso $\forall c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow I^{-1}(c)$ è convesso $\forall c \in \mathbb{R}$