Catene di Markov a Tempo Continuo - Esercizi

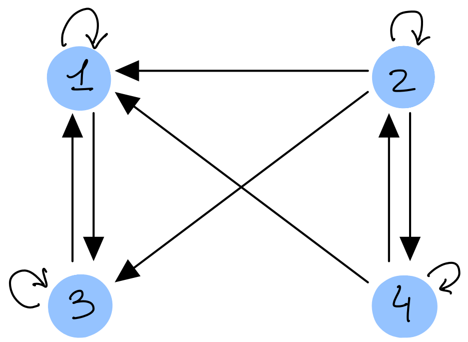
1) Si consideri la CMTC con generatore

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Si dica se è irriducibile e si determinino le distrib. stazionarie

Sol:

Identifichiamo lo sp. degli stati con $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e disegniamo il grafo delle transizioni relativo alla CMTD con matrice di transizione $P = Id + c \cdot A$, $c \in (0, \frac{1}{5})$:



$\Rightarrow$ 2 classi:

1) $\{2, 4\}$ non chiusa $\Rightarrow$ transiente
2) $\{1, 3\}$ chiusa $\Rightarrow$ ricorrente

La CM ristretta a $\{1, 3\}$ è irriducibile e aperiodica, quindi $\exists!$ la distribuzione stazionaria. Complessivamente si trova:

$$\begin{cases} \pi(1) - 2\pi(3) = 0 \\ \pi(1) + \pi(3) = 1 \\ \pi(2) = \pi(4) = 0 \end{cases}$$

(prime due equazioni) $\pi A = 0$ ristretta a $\{1, 3\}$

$\pi(2) = \pi(4) = 0 \Rightarrow$ condizione relativa alla classe transiente $\{2, 4\}$

$\Rightarrow \pi = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right)$

---

2) Dopo essere stata riparata, una stampante funziona per un tempo aleatorio con distr. $Exp(\lambda)$. Appena si rompe, viene riparata con un tempo di riparazione avente distr. $Exp(\mu)$. I tempi di funzionamento e di riparazione sono indipendenti

Definiamo

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{se al tempo } t \text{ la stampante funziona} \\ 0 & \text{se al tempo } t \text{ la stampante è in riparazione} \end{cases}$$

Sappiamo che $(X_t)_{t\geq 0}$ è CMTC omogenea, determinare il generatore e la distribuzione stazionaria.

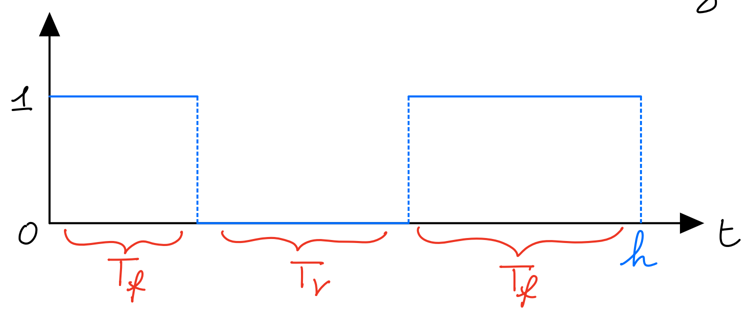
SOL:

Siano T_f, T_r i tempi di funzionamento e riparazione della stampante. Sappiamo che $T_f \sim Exp(\lambda)$, $T_r \sim Exp(\mu)$. Calcoliamo:

$$P_h(1,0) = \mathbb{P}(X_h = 0 \mid X_0 = 1) = \mathbb{P}(T_f \leq h) + o(h)$$
$$P_h(0,1) = \mathbb{P}(X_h = 1 \mid X_0 = 0)$$

Osservazione IMPORTANTE !!!!

La prob. che in un intervallo di tempo $(0, h)$ la catena cambi stato più di una volta è $o(h)$. Se si considera il caso minimo per cui si ha che in $t = h$ la catena sia in riparazione si ottiene la situazione seguente:



$$\Rightarrow \mathbb{P}(T_f \leq h,\ T_r \leq h - T_f) = \iint_D \lambda \mu\, e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\, dx\, dy$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, h],\ y \in [0, h-x]\}$

$$= \int_0^h \int_0^{h-x} \lambda \mu\, e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\, dx\, dy = \ldots = o(h)$$

Quindi si ha:

$$P_h(1,0) = \mathbb{P}(X_h = 0 \mid X_0 = 1) = \mathbb{P}(T_f \leq h) + o(h) = F_{T_f}(h) + o(h)$$
$$= 1 - e^{-\lambda h} + o(h) \underset{\text{Taylor}}{=} \lambda h + o(h)$$

$$P_h(0,1) = \mathbb{P}(X_h = 1 \mid X_0 = 0) = \mathbb{P}(T_r \leq h) + o(h) = F_{T_r}(h) + o(h)$$
$$= \ldots = \mu h + o(h)$$

Pertanto si ha:

$$A(1,0) = \lim_{h\to 0} P_h(1,0) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\lambda h + o(h)}{h} = \lambda$$
$$A(0,1) = \ldots = \mu$$

Quindi $A = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$. Per quanto riguarda le distr. staz., notiamo che A è irriducibile e quindi (la CM è a stati finiti) la distr. staz. è unica. Si ha:

$$\begin{cases} \pi A = 0 \\ \pi(0) + \pi(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)$$

---

3) Consideriamo un processo di nascita e morte su $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \dots\}$ il cui generatore è t.c.:

$$\begin{aligned} &A(x, x+1) = \lambda x, \quad \lambda > 0 \\ &A(x, x-1) = \mu x, \quad \mu > 0 \\ &A(x, y) = 0 \qquad \forall y \notin \{x-1, x, x+1\} \\ \Rightarrow\ &A(x, x) = -(\lambda+\mu) x \end{aligned}$$

ovvero:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & & 0 \\ \vdots & & 3\mu & -3(\lambda+\mu) & 3\lambda & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Assumendo $X_0 = 1$, calcolare $\mathrm{Var}(X_t)$ $\forall t \geq 0$

SOL:

Usiamo la formula di Dynkin:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(F(X_t)) = \mathbb{E}(AF(X_t)) \quad (*)$$

per ottenere una ODE da cui ricavare $\mathbb{E}(X_t)$, $\mathbb{E}(X_t^2)$

Consideriamo $\lambda \neq \mu$:

1) Calcoliamo $\mathbb{E}(X_t^2)$. Usiamo $(*)$ con $F(X_t) = X_t^2$.

$$AF(X_t)(x) = \sum_{y \neq x} A(x,y)[F(y) - F(x)] = A(x, x+1)[(x+1)^2 - x^2]$$

$$+ A(x, x-1)[x^2 + (x-1)^2] = \dots = 2(\lambda-\mu)x^2 + (\lambda+\mu)x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbb{E}(X_t^2) = 2(\lambda-\mu)\mathbb{E}(X_t^2) + (\lambda+\mu)\mathbb{E}(X_t)$$

2) Calcoliamo $\mathbb{E}(X_t)$. Usiamo $(*)$ con $F(X_t) = X_t$.

$$AF(X_t)(x) = A(x,x+1)(x+1-x) + A(x,x-1)(x-1-x) = (\lambda-\mu)x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{E}(X_t) = (\lambda-\mu)\mathbb{E}(X_t) \quad \text{con} \quad \mathbb{E}(X_0) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_t) = e^{(\lambda-\mu)t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{E}(X_t^2) = 2(\lambda-\mu)\mathbb{E}(X_t^2) + (\lambda+\mu)e^{(\lambda-\mu)t} \quad \text{con} \quad \mathbb{E}(X_0^2) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_t^2) = e^{2(\lambda-\mu)t}\left[2\lambda - (\lambda+\mu)e^{-(\lambda-\mu)t}\right]\cdot\frac{1}{\lambda-\mu}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}(X_t)^2 = \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{2(\lambda-\mu)t} - e^{(\lambda-\mu)t}\right)$$

Consideriamo ora $\lambda = \mu$:

Usiamo la formula di Dynkin

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}(F(X_t)) = \mathbb{E}(AF(X_t)) \quad (*)$$

per ricavare $\mathbb{E}(X_t)$, $\mathbb{E}(X_t^2)$:

1) Calcolo di $\mathbb{E}(X_t)$

$$\Rightarrow F(X_t) = X_t \Rightarrow AF(X_t) = \sum_{y\neq x} A(x,y)[F(y)-F(x)]$$

$$= \underbrace{A(x,x+1)}_{=\lambda x}(x+1-x) + \underbrace{A(x,x-1)}_{=\lambda x}(x-1-x) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbb{E}}(X_t) = 0 \quad \text{con} \quad \mathbb{E}(X_0) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(X_t) \equiv 1$$

2) Calcolo di $\mathbb{E}(X_t^2)$:

$$\Rightarrow F(X_t) = X_t^2 \Rightarrow AF(X_t) = \sum_{y\neq x} A(x,y)[F(y)-F(x)]$$

$$= \underbrace{A(x,x+1)}_{=\lambda x}\left[(x+1)^2 - x^2\right] + \underbrace{A(x,x-1)}_{=\lambda x}\left[x^2 + (x-1)^2\right] = 2\lambda x$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbb{E}}(X_t^2) = \mathbb{E}(AX_t^2) = \mathbb{E}(2\lambda X_t) = 2\lambda\,\mathbb{E}(X_t) = 2\lambda$$

$$\text{con} \quad \mathbb{E}(X_0^2) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_t^2) = 2\lambda t + 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X_t) = 2\lambda t + 1 - 1 = 2\lambda t$$

---

4) Modello di Bernoulli - Laplace:

è una CMTC con spazio degli stati $E_N = \{x = (x_1, \dots, x_L) \in \{0,1\}^L : \sum_{i=1}^{L} x_i = N\}$, $1 \leq N < L$, e generatore applicato ad una funzione $f: E_N \to \mathbb{R}$ dato da:

$$AF(x) = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j\neq i} x_i(1-x_j)\lambda_i\left[F(x^{ij}) - F(x)\right]$$

dove x^{ij} è lo stato ottenuto da x scambiando le componenti x_i

e x_j, $\lambda_i > 0$ $\forall i$. Mostrare che $\forall c > 0$ la distribuzione

$$\pi(x) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^{L} \left(\frac{c}{c+\lambda_i} \right)^{x_i} \left(\frac{\lambda_i}{c+\lambda_i} \right)^{1-x_i}$$

é reversibile.

SOL:

Per mostrare che π é distr. reversibile dobbiamo mostrare che $\forall x \in E_N$ $\forall i,j$ con $i \neq j$ si ha:

$$\pi(x) A(x, x^{ij}) = \pi(x^{ij}) A(x^{ij}, x)$$

Notiamo che:

1) $A(x, x^{ij}) \neq 0$ solo se $x_i = 1$, $x_j = 0$. In tal caso si ottiene:

$$A(x, x^{ij}) = \lambda_i, \quad A(x^{ij}, x) = x_j^{ij}(1 - x_i^{ij})\lambda_j = \lambda_j$$

2) $\pi(x)$, $\pi(x^{ij})$ hanno in comune molti fattori ovvero

$$\frac{1}{Z} \prod_{k \neq i,j} \left(\frac{c}{c+\lambda_k} \right)^{x_k} \left(\frac{\lambda_k}{c+\lambda_k} \right)^{1-x_k}$$

i quali si semplificano. Si ha quindi:

$$\frac{c}{c+\lambda_i} \cdot \frac{\lambda_j}{c+\lambda_j} \cdot \lambda_i \stackrel{?}{=} \frac{c}{c+\lambda_j} \cdot \frac{\lambda_i}{c+\lambda_i} \cdot \lambda_j$$

---

5) Consideriamo una CMTC con generatore:

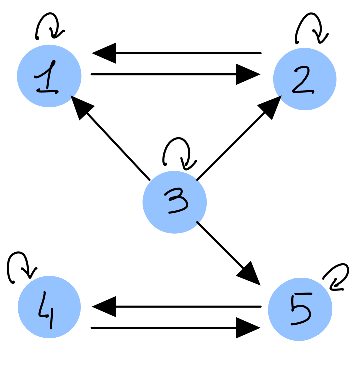
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Calcolare le distr. stazionarie

2) Calcolare $\mathbb{P}(X_1 = 3 | X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_1 = 5 | X_0 = 4)$

SOL:

Identifichiamo lo spazio degli stati con $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Il grafo delle transizioni é:



Quindi:

$\{1,2\}$ chiusa ricorrente, $\{3\}$ NON chiusa transitoria, $\{4,5\}$ chiusa ricorrente.

La catena NON é irriducibile. Calcoliamo le distribuzioni stazionarie risolvendo:

$$\begin{cases} \pi A = 0 \\ \sum_{i=1}^{5} \pi(i) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le equazioni sono:

$$\begin{cases} -2\pi(1) + \pi(2) + 2\pi(3) = 0 \\ 2\pi(1) - \pi(2) + \pi(3) = 0 \\ -6\pi(3) = 0 \\ 3\pi(3) + \pi(4) - 2\pi(5) = 0 \\ \pi(4) - 2\pi(5) = 0 \\ \sum_{i=1}^{5} \pi(i) = 0 \end{cases} \iff \pi = \left(\frac{a}{3}, \frac{2}{3}a, 0, \frac{2}{3}(1-a), \frac{1-a}{3}\right)$$

con $a \in [0,1]$

Calcoliamo ora:

$\mathbb{P}(X_1 = 3 | X_0 = 1) = 0$ ($\{1,2\}$ é classe chiusa, 3 non é accessibile dallo stato 1)

$\mathbb{P}(X_1 = 5 | X_0 = 4) = P_1(4,5)$

$\Rightarrow$ usiamo le equazioni di Kolmogorov ristrette alla classe $\{4,5\}$:

$$\dot{P}_t = P_t A$$

ovvero:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} P_t(4,4) & P_t(4,5) \\ P_t(5,4) & P_t(5,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_t(4,4) & P_t(4,5) \\ P_t(5,4) & P_t(5,5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dot{P}_t(4,5) = P_t(4,4) - 2P_t(4,5) = 1 - 3P_t(4,5)$

$\Rightarrow$ ODE lineare del 1° ordine:

$$\begin{cases} \dot{P}_t(4,5) = 1 - 3P_t(4,5) \\ P_0(4,5) = 0 \quad (\text{si ha che } \mathbb{P}_0 = Id) \end{cases}$$

$\Rightarrow x_t = P_t(4,5) \Rightarrow \dot{x}_t = 1 - 3x_t \Rightarrow x_t = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$

quindi:

$\mathbb{P}(X_1 = 5 | X_0 = 4) = P_1(4,5) = x_1 = \frac{1}{3}(1 - e^{-3})$

6) Consideriamo una CMTC su $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, \dots,\}$ con generatore

$$AF(x) = a(x)\,[F(x+1) - F(x)] + [F(0) - F(x)]$$

con $a : \mathbb{N}_0 \longrightarrow (0, +\infty)$ limitata

1) Mostrare che $\nexists$ distribuzione reversibile
2) Determinare l'unica distrib. staz. esplicitamente nel caso in cui $a(x) \equiv a$

SOL:

1) Per def. gli elementi non diagonali del generatore sono dati da:

$$A(x, x+1) = a(x) \qquad \forall x \in \mathbb{N}_0$$
$$A(x, 0) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ se π fosse reversibile dovrebbe soddisfare:

$$\pi(x)\underbrace{A(x, x+1)}_{= a(x) > 0 \ \forall x} = \pi(x+1)\underbrace{A(x+1, x)}_{= 0} \quad \forall x \geq 1$$

$\Rightarrow$ dovrebbe essere $\pi(x) = 0 \ \forall x \geq 1 \Rightarrow$ la misura si dovrebbe concentrare in $x = 0$

$\Rightarrow$ Consideriamo la stessa equazione nel caso $x = 0$, $x+1 = 1$:

$$\pi(0)\underbrace{A(0,1)}_{= a(0) > 0} = \underbrace{\pi(1)}_{= 0}\underbrace{A(1,0)}_{= 1}$$

$$\Rightarrow \pi(0) = 0 \ \Rightarrow \pi(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{N}_0 \ \lightning$$

$\Rightarrow \nexists$ distribuzione reversibile

2) Ricaviamo l'unica distrib. staz. risolvendo:

$$\begin{cases} \pi A = 0 \quad (*) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \pi(n) = 1 \end{cases}$$

risolvo $(*)$ e poi impongo la normalizzazione:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -a(0)\pi(0) + \sum_{x=1}^{+\infty} \pi(x) = 0 \\ a(x-1)\pi(x-1) - (1 + a(x))\pi(x) = 0, \quad x \geq 1 \end{cases}$$

dato che $A = \begin{pmatrix} -a(0) & a(0) & 0 & \cdots & & \\ 1 & -(1+a(1)) & a(1) & 0 & \cdots & \\ 1 & 0 & -(1+a(2)) & a(2) & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$

Notiamo che se tutte le equazioni per $x \geq 1$ sono soddisfatte, allora lo é anche la prima. Infatti, sommandole si ha:

$$\sum_{x=1}^{+\infty} \pi(x-1)\, a(x-1) - \sum_{x=1}^{+\infty} \pi(x) - \sum_{x=1}^{+\infty} a(x)\,\pi(x) = 0$$

$$\pi(0)\, a(0) + \sum_{x=2}^{+\infty} \pi(x-1)\, a(x-1) = \pi(0)\, a(0) + \sum_{x=1}^{+\infty} \pi(x)\, a(x)$$

$$\Rightarrow \pi(0)\, a(0) - \sum_{x=1}^{+\infty} \pi(x) = 0 \quad \checkmark$$

Risolviamo quindi le altre equazioni:

$$\Rightarrow \pi(x) = \frac{a(x-1)}{1+a(x-1)}\,\pi(x-1) \;\wedge\; \pi(x-2) = \frac{a(x-2)}{1+a(x-2)}\,\pi(x-2)$$

etc... fino a $\pi(1) = \ldots$

Da ció si ricava:

$$\pi(x) = \left(\prod_{k=1}^{x} \frac{a(k-1)}{1+a(k)} \right) \pi(0) \quad (\text{si dimostra per induzione})$$

Tale identitá definisce una distrib. se puó essere normalizzata, ovvero se:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{a(k-1)}{1+a(k)} < +\infty$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \frac{a(k-1)}{1+a(k)} = \frac{a(0)}{1+a(n)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a(k)}{1+a(k)} \leq a(0) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a(k)}{1+a(k)}$$

Si noti che $\exists\, c > 0$ t.c. $a(x) \leq c$ e che $\dfrac{a(k)}{1+a(k)}$ é crescente.

Quindi si ha:

$$a \leq c \Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{c}{1+c}$$

e quindi:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a(k-1)}{1+a(k)} \leq a(0) \left(\frac{c}{1+c} \right)^{n-1}$$

inoltre:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a(k-1)}{1+a(k)} \leq a(0) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{c}{1+c} \right)^{n-1} < +\infty$$

(convergenza serie geometrica)

In conclusione, quindi, si ha:

$$\pi(x) = \begin{cases} \left(1 + \displaystyle\sum_{n \geq 1} \prod_{k=1}^{n} \frac{a(k-1)}{1+a(k)} \right)^{-1} & \text{se } x = 0 \\[2ex] \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{x} \frac{a(k-1)}{1+a(k)}}{1 + \displaystyle\sum_{n \geq 1} \prod_{k=1}^{n} \frac{a(k-1)}{1+a(k)}} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Per calcolare $\pi(x)$ nel caso $a(x) \equiv a$, usando la somma della serie geometrica $\sum_{k \geq 0} q^k = \frac{1}{1-q}$, si ha:

$$1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{k=1}^{n} \frac{a(k-1)}{1+a(k)} \underset{a(\cdot) \equiv a}{=} 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{a+1}} = a+1$$

$$\prod_{k=1}^{x} \frac{a(k-1)}{1+a(k)} \underset{a(\cdot) \equiv a}{=} \left(\frac{a}{1+a}\right)^x$$

quindi:

$$\pi(x) = \left(\frac{a}{1+a}\right)^x \frac{1}{a+1} \qquad \forall x \geq 0$$