Def. (Curva parametrizzata di classe C^k)

Una CURVA PARAMETRIZZATA di classe C^k in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $\in C^k$ $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con I intervallo. La variabile t di γ è detta PARAMETRO della curva, mentre $\mathrm{Im}(\gamma)$ è detta SOSTEGNO della curva γ. Diremo, infine, che γ è una CURVA CHIUSA se $I = [a,b] \wedge \gamma(a) = \gamma(b)$.

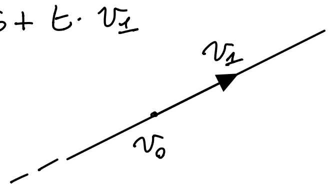
Alcuni esempi di curve parametrizzate:

1) Il grafico di una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$ è sostegno di una curva parametrizzata:

$$\begin{aligned} \gamma : I \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (t, f(t)) \end{aligned}$$

2) Dati $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^n$ con $v_1 \neq \vec{0}$, il sostegno della curva
$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R}^{\geq 0} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto v_0 + t \cdot v_1 \end{aligned}$$
è la retta per v_0 con direzione v_1.

$\Rightarrow$:

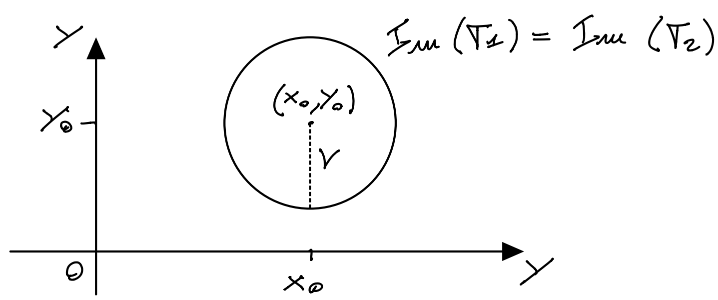


3) Date le 2 curve $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\gamma_1(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t),$$
$$\gamma_2(t) = (x_0 + r\cos 2t, y_0 + r\sin 2t)$$

con $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

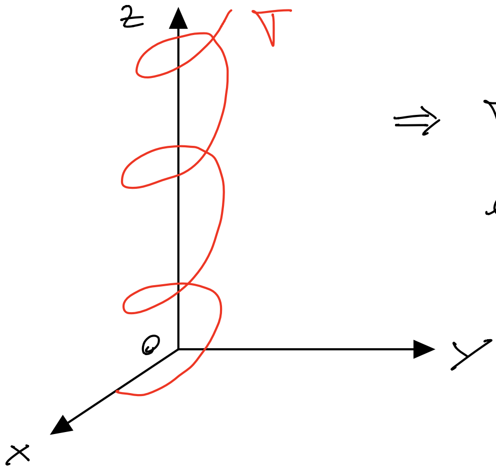
si ha:



$\Rightarrow \operatorname{Im}(\gamma_1) = \operatorname{Im}(\gamma_2)$ MA $\gamma_1 \neq \gamma_2$!!! (γ_1 percorre un giro solo, mentre γ_2 percorre 2 giri)

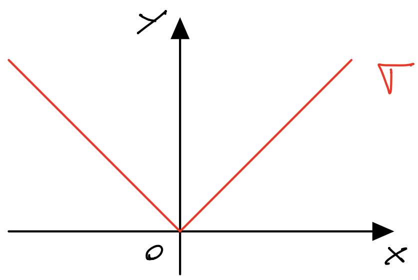
4) Data $\gamma : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^3$
$t \longmapsto (r\cos t, r\sin t, a\cdot t)$ con $a > 0 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Qual è $\operatorname{Im}(\gamma)$?



$\Rightarrow$ γ è un elica circolare di raggio r e passo $2\pi a$

5) Esempio di curva non C^1: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (t, |t|)$

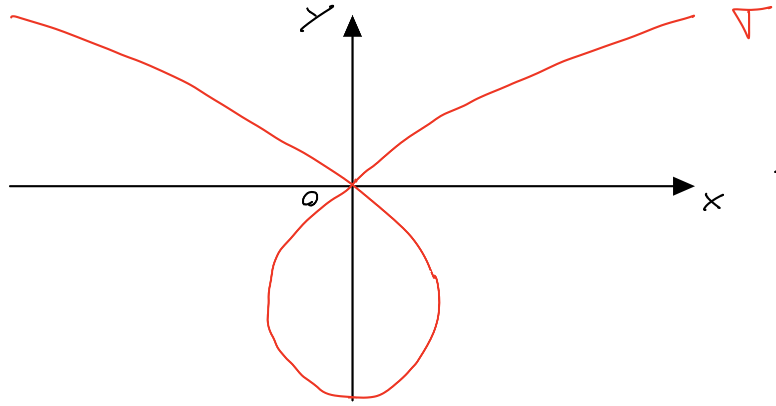


In generale la mappa $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ IMMERGE e DEFORMA l'intervallo I nello spazio $\mathbb{R}^n$, quindi PUÓ ACCADERE che γ sia omeomorfismo.

6) esempio di curva NON INIETTIVA:

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$

$\Rightarrow$ Cerchiamo di disegnare $\operatorname{Im}(\gamma)$:



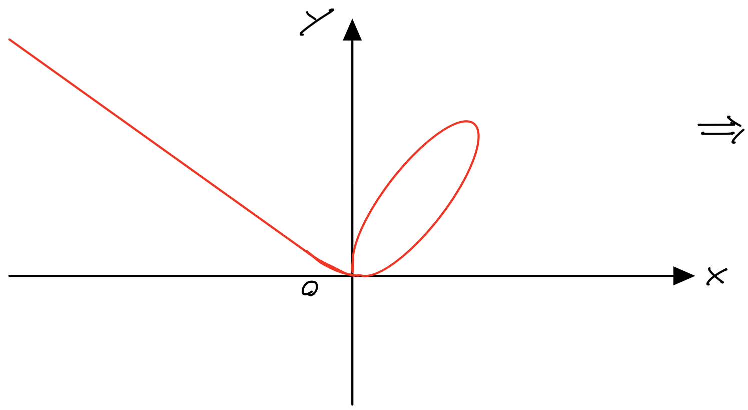
$\Rightarrow$ γ è detta Parabola Cubica Nodata

$\Rightarrow$ ovviamente γ non è iniettiva, e quindi non è nemmeno omeomorfismo.

7) esempio di curva iniettiva MA non omeomorfismo:

$$\gamma : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \left(\frac{3t}{1+t^3} , \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

$\Rightarrow$ Im (γ) è:



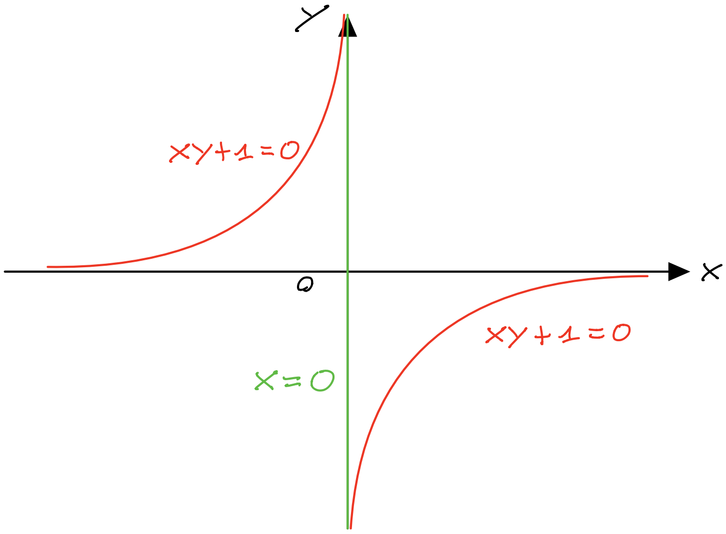
$\Rightarrow$ γ è iniettiva, ma Im (γ) è CHIUSO!

$\Rightarrow$ pur essendo iniettiva, γ non è omeomorfismo.

8) Data $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\nabla F \neq (0,0)$, il suo luogo di zeri è localmente il sostegno di una curva, grazie al teorema della funzione implicita.

es. $F(x,y) = x^2 y + x = 0 \iff x(xy+1) = 0$

$\iff x = 0 \vee y = -\frac{1}{x}$ (CURVE ALGEBRICHE)



Def. (Diffeomorfismo di classe C^k):
Un DIFFEOMORFISMO $\in C^k$ è un'applicazione h t.c.:

1) h è biiettiva
2) $h, h^{-1} \in C^k$

Def. (Curve parametrizzate equivalenti):
2 curve parametrizzate, $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con $\gamma, \tilde{\gamma} \in C^k$, sono EQUIVALENTI se $\exists\, h : I \to \tilde{I}$ DIFFEOMORFISMO di classe C^k t.c. $\tilde{\gamma} = h \circ \gamma$. In tal caso si dice che $\tilde{\gamma}$ (γ) è una RIPARAMETRIZZAZIONE di γ $(\tilde{\gamma})$.

Def. (Curva $\in C^k$ in $\mathbb{R}^n$):
Una CURVA di classe C^k in $\mathbb{R}^n$ è una classe di equivalenza di curve parametrizzate di classe C^k in $\mathbb{R}^n$

In alcuni casi/situazioni, può essere utile classificare le curve in base alla loro ORIENTAZIONE:

Def. (Curve con la stessa orientazione):

2 curve parametrizzate $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ con $\gamma, \tilde{\gamma} \in C^k$ sono EQUIVALENTI CON LA STESSA ORIENTAZIONE se $\exists\, h: I \to \tilde{I} \in C^k$ diffeomorfismo t.c. $\dot{h}(t) > 0$ $\forall t$

N.B. Se $\dot{h}(t) < 0$ $\forall t$, si dice che $\gamma, \tilde{\gamma}$ sono EQUIVALENTI CON ORIENTAZIONE OPPOSTA.

Def. (Curva orientata):

Una CURVA ORIENTATA è una classe di equivalenza di curve parametrizzate con la stessa orientazione.

Come scelgo un "buon" rappresentante per ogni curva?

Def. (Vettore e retta tangente ad una curva in un punto):

Data $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ curva parametrizzata $\in C^k$ con $k \geq 1$, il vettore $\dot{\gamma}(t)$ è detto VETTORE TANGENTE alla curva γ in $\gamma(t)$ e la retta $r: \gamma(t) + \langle \dot{\gamma}(t) \rangle$ è detta RETTA TANGENTE a γ in $\gamma(t)$. Ovviamente tale retta è definita per $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$

Def. (Punto regolare, curva regolare):

Data $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, un punto $\gamma(t)$ si dice REGOLARE se $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$. Una curva γ si dice REGOLARE se $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ $\forall t \in I$ (cioè se ogni punto di γ è regolare).

N.B. Un punto $\gamma(t)$ di una curva t.c. $\dot{\gamma}(t) = \vec{0}$ si dice PUNTO SINGOLARE della curva γ

Proposizione:

I punti singolari di una curva non dipendono dalla parametrizzazione scelta.

Dim.:

Siano $\gamma, \tilde{\gamma}$ curve parametrizzate equivalenti

$\Rightarrow \exists\, h : I \to \tilde{I}$ cambio di parametro t.c. $\tilde{\gamma} = h \circ \gamma$

$\Rightarrow \dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\gamma}(h(t)) \cdot \dot{h}(t)$ e si ha $\dot{h}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

(h è diffeomorfismo $\in C^K$) e quindi:

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow \dot{\gamma}(h(t)) = 0$$

q.e.d.

esempio di curva non regolare:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \Rightarrow \quad \dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2)$$
$$t \mapsto (t^2, t^3)$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \vec{0} \quad \text{per} \quad t = 0$$

$\Rightarrow$ provo ora a riparametrizzare γ:

$$h(\tau) = 2\tau \quad \Rightarrow \quad \tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$\tau \mapsto (4\tau^2, 8\tau^3)$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{\gamma}}(\tau) = (8\tau, 24\tau^2) = \vec{0} \Leftrightarrow \tau = 0$$

$\Rightarrow \quad \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = (0,0) \quad \checkmark$

Classificazione di curve:

1) IMMERSIONE LOCALE: γ è t.c. tutti i punti sono regolari (γ è curva regolare)
2) IMMERSIONE: γ è IMMERSIONE LOCALE iniettiva
3) IMMERSIONE REGOLARE: γ è IMMERSIONE e $Im(\gamma)$ è omeomorfo ad I (γ omeomorfismo)

Teorema (Lunghezza di una curva):

Ogni curva parametrizzata $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \in C^1$ è rettificabile e si ha:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Corollario:

La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Dim.:

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_a^b \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(h(t))\| \cdot h'(t)\, dt$$

$$= \int_{a'}^{b'} \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$$

q.e.d.

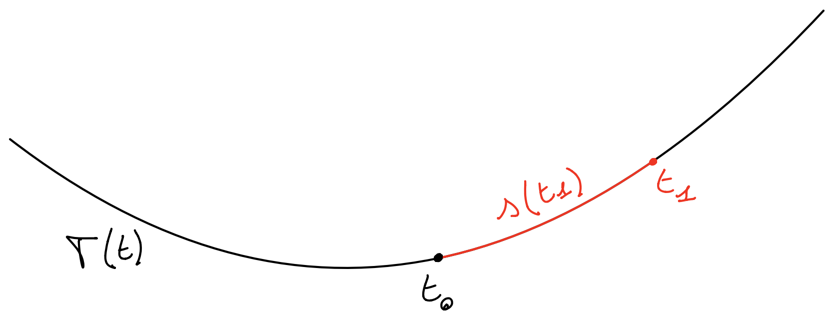
Def.

Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \in C^k$ con $k \geq 1$, $t_0 \in I$, la LUNGHEZZA D'ARCO di γ da t_0 è la funzione $s : I \to \mathbb{R} \in C^k$ data da:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(\tau)\| \, d\tau$$

s viene anche detto ASCISSA CURVILINEA.

$\Rightarrow$:



Def. (Parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco):

Diremo che γ è PARAMETRIZZATA rispetto ALLA LUNGHEZZA D'ARCO se $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow$ Si ha che ogni curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è regolare $\left(\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in I \right)$

N.B.

Tale parametrizzazione è UNICA a meno di traslazione del parametro t_0 e orientazione.

Def. (Versore tangente):

Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \in C^k$ regolare, il suo VERSORE TANGENTE è $\vec{t} : I \to \mathbb{R}^n \in C^{k-1}$ con: $\vec{t} = \dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$

Def. (Curvatura):

Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \in C^k$ regolare con $k \geq 2$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, la CURVATURA di γ è la funzione:

$$\begin{aligned} K : I &\to \mathbb{R}^{>0} \\ s &\mapsto K(s) = \|\dot{\vec{t}}\| = \|\ddot{\gamma}(s)\| \end{aligned} \quad \in C^{k-2}$$

Def. (Curva biregolare):

Si dice che una curva γ parametrizzata ad ascissa curvilinea è BIREGOLARE se $K(s) \neq 0 \ \forall s$

Def. (Raggio di curvatura):

Si dice RAGGIO DI CURVATURA di una curva γ biregolare il valore $\rho(s) = \dfrac{1}{K(s)}$

Def. (Punto di flesso):

Un punto regolare si dice PUNTO DI FLESSO se $\dot{\gamma}(s_0)$, $\ddot{\gamma}(s_0)$ sono linearmente dipendenti

Mostriamo ora che il versore tangente $\vec{t}(s)$ e la sua derivata $\dot{\vec{t}}(s)$ sono $\perp \ \forall s$:

$$\vec{t} \cdot \vec{t} = 1 \quad (\|\vec{t}\| = 1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\, \vec{t} \cdot \vec{t} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{t}} \cdot \vec{t} + \vec{t} \cdot \dot{\vec{t}} = 0$$

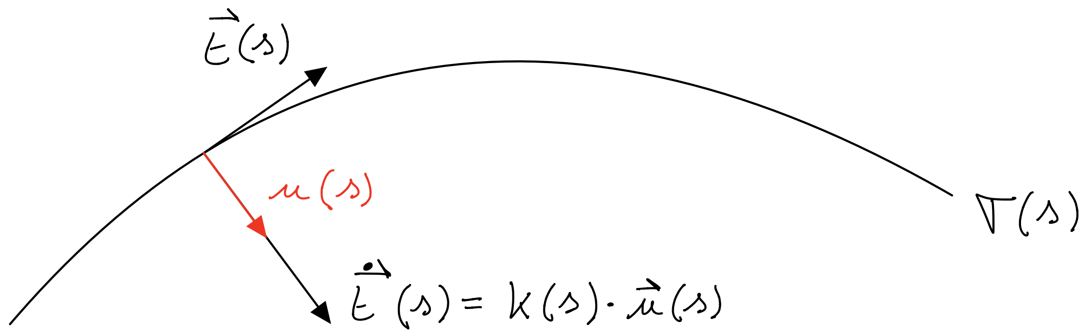
$$\Rightarrow 2\dot{\vec{t}} \cdot \vec{t} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{t}} \cdot \vec{t} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{t}} \perp \vec{t} \quad \forall s$$

Def. (Versore Normale):

Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \in C^k$ con $k \geq 2$ biregolare e parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, il suo VERSORE NORMALE è l'applicazione $n : I \to \mathbb{R}^n \in C^{k-2}$ data da:

$$\vec{n}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{\|\dot{\vec{t}}(s)\|} = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{k(s)}$$

Rappresentazione schematica:



Def. (Piano osculatore):

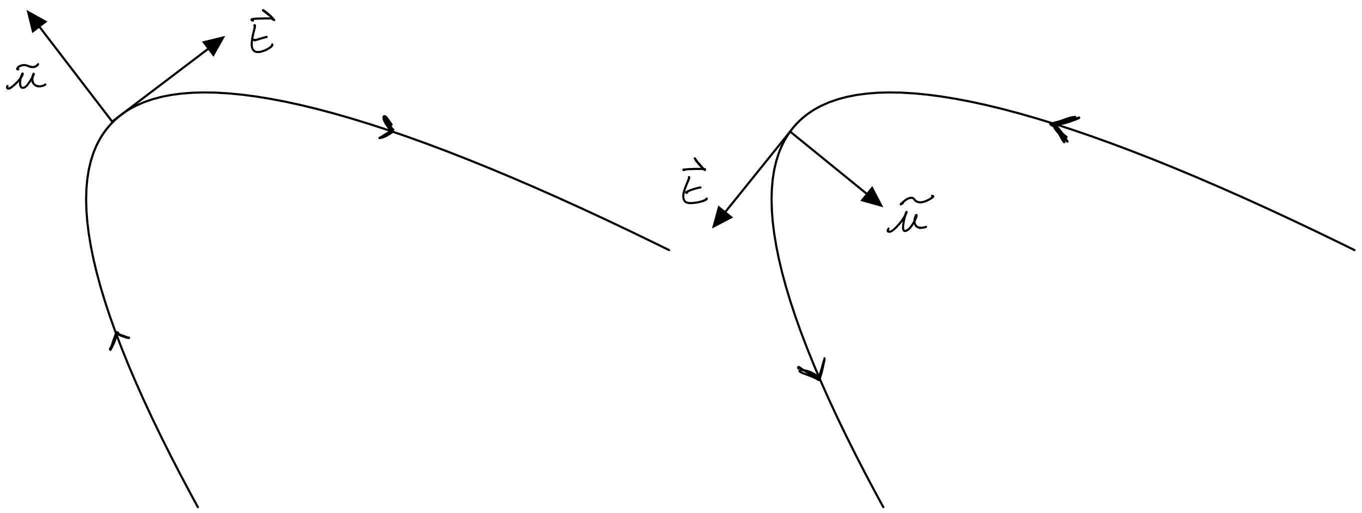
Data γ curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco il PIANO OSCULATORE alla curva γ in $\gamma(s)$ è il piano $\pi : \gamma(s) + \langle \vec{t}(s), \vec{n}(s) \rangle$

N.B. Se γ è piana, il suo piano osculatore è il piano su cui giace.

Valgono le seguenti osservazioni in $\mathbb{R}^2$:

$\Rightarrow$ In $\mathbb{R}^2$, qualunque curva è piana, e anche se non è biregolare ($k(s) = 0$ per qualche $s \in I$) si può costruire il seguente vettore:

Sia $\tau: I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana $\in C^k$ regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. $\forall s \in I \ \exists! \ \tilde{n}(s)$ t.c. $\tilde{n}(s) \perp \vec{t}(s) \wedge (\vec{t}(s), \tilde{n}(s))$ abbia la stessa orientazione della base canonica.



Tale $\tilde{n}(s)$ si dice VERSORE NORMALE ORIENTATO e, se $\exists\, n(s)$ allora si ha che $n(s) = \pm \tilde{n}(s)$

Definisco allora $\tilde{k}: I \to \mathbb{R}$ t.c. $\dot{\vec{t}} = \tilde{k} \cdot \tilde{n}$, tale $\tilde{k}$ si dice CURVATURA ORIENTATA e, se $\exists\, k(s)$ allora si ha:

$$k(s) = |\tilde{k}(s)|$$

Si ha che, per una parametrizzazione qualunque $\tau(t)$, vale la seguente formula:

$$\tilde{k}(t) = \frac{\det(\dot{\tau}(t) \,|\, \ddot{\tau}(t))}{\|\dot{\tau}(t)\|^3}$$

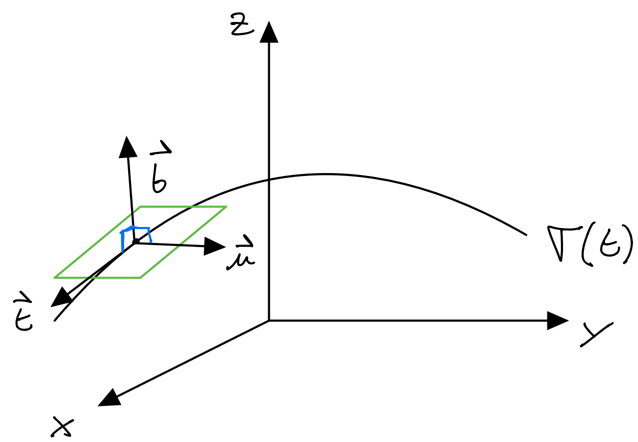
Vedremo che tale formula è un caso particolare della formula in $\mathbb{R}^3$.

In $\mathbb{R}^3$, una curva può anche variare il suo piano osculatore:

<u>Def.</u>

Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \in C^k$ biregolare il VERSORE BINORMALE a γ è l'applicazione $\vec{b} : I \to \mathbb{R}^3 \in C^{k-2}$ t.c.:

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$



<u>Def.</u> (Riferimento di Frenét):

Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \in C^k$ biregolare la terna $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ è detta RIFERIMENTO DI FRENÉT di γ.

<u>N.B.</u> Una curva in $\mathbb{R}^2$ può essere trattata come una curva piana immersa in $\mathbb{R}^3$ con $\vec{b} = (0, 0, \pm 1)$

Vale la seguente formula per il calcolo di $\vec{b}$:

$$\vec{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}$$

dalla quale si ricava:

$$\vec{n}(t) = \vec{b} \times \vec{t} = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \times \dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| \cdot \|\dot{\gamma}\|}$$

e, a sua volta, si ha:

$$K(t) = \frac{\| \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \|}{\| \dot{\gamma}(t) \|^3}$$

$\Rightarrow$ si ha:

$$b \perp \dot{b} \quad \Rightarrow \quad \dot{b} = \cancelto{0}{\dot{t} \times u} + t \times \dot{u} = t \times \dot{u}$$

$$\Rightarrow \dot{b} \perp t \Rightarrow \dot{b} \parallel u$$

Def. (Torsione di una curva in $\mathbb{R}^3$):

Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \in C^k$ con $k \geq 3$ biregolare e parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, la TORSIONE di γ è la funzione $\tau : I \to \mathbb{R} \in C^{k-3}$ t.c.

$$\tau = \pm \| \dot{\vec{b}} \| \quad \left(\Leftrightarrow \quad \dot{\vec{b}} = -\tau \cdot \vec{u} \right)$$

$\Rightarrow$ Per una parametrizzazione qualunque vale la formula:

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{\| \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \|^2}$$

N.B.

$$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma} = \det \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \\ \dddot{\gamma} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ si ha $\vec{u} = \vec{b} \times \vec{t} \Rightarrow \dot{\vec{u}} = -k \cdot \vec{t} + \tau \cdot \vec{b}$ e quindi:

$$\begin{cases} \dot{\vec{t}} = k \vec{u} \\ \dot{\vec{u}} = -k \vec{t} + \tau \vec{b} \\ \dot{k} = -\tau \vec{u} \end{cases}$$

FORMULE di FRENÉT-SERRET della curva biregolare γ

$\Rightarrow$ si può riscrivere in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{t}} \\ \dot{\vec{n}} \\ \dot{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

EQUAZIONI INTRINSECHE DELL'ARCO

N.B. Per curve piane (in $\mathbb{R}^2$) si ha:

$$\begin{cases} \dot{t} = \tilde{k} \cdot \tilde{n} \\ \dot{\tilde{n}} = -\tilde{k} \cdot t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\tilde{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{k} \\ -\tilde{k} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ \tilde{n} \end{pmatrix}$$

Vogliamo ora dim. che curvatura e torsione determinano "completamente" una curva

Def. (Movimento Rigido di $\mathbb{R}^n$):
Un MOVIMENTO RIGIDO di $\mathbb{R}^n$ è un isomorfismo affine di $\mathbb{R}^n$ $\rho: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ della forma $\rho(x) = Ax + b$ t.c. $A \in SO_n$, $b \in \mathbb{R}^n$.

N.B. SO_n = gruppo speciale ortogonale, sono le matrici ortogonali ($P \cdot P^T = P^T P = Id_n$) con $\det = 1$.

$\Rightarrow$ Indichiamo, in $\mathbb{R}^3$, i vettori t, n e b per componenti:

$$t = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$
$$n = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s))$$
$$b = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$$

$\Rightarrow$ Dalle formule di Frenet - Serret si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{t} = k \cdot n & \begin{cases} \frac{d\alpha_1}{ds} = k(s) \cdot \beta_1(s) \\ \frac{d\alpha_2}{ds} = k(s) \cdot \beta_2(s) \\ \frac{d\alpha_3}{ds} = k(s) \cdot \beta_3(s) \end{cases} \\ \dot{n} = -k t + \tau b & \begin{cases} \frac{d\beta_1}{ds} = -k(s) \cdot \alpha_1(s) + \tau(s) \cdot \gamma_1(s) \\ \frac{d\beta_2}{ds} = -k(s) \cdot \alpha_2(s) + \tau(s) \cdot \gamma_2(s) \\ \frac{d\beta_3}{ds} = -k(s) \cdot \alpha_3(s) + \tau(s) \cdot \gamma_3(s) \end{cases} \\ \dot{b} = -\tau n & \begin{cases} \frac{d\gamma_1}{ds} = -\tau(s) \beta_1(s) \\ \frac{d\gamma_2}{ds} = -\tau(s) \beta_2(s) \\ \frac{d\gamma_3}{ds} = -\tau(s) \beta_3(s) \end{cases} \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare di 9 O.D.E. lineari del 1° ordine in 9 incognite

$\Rightarrow$ Dal teorema di Cauchy - Lipschitz sappiamo che $\exists!$ soluzione del PdC nell'intervallo di definizione dei coefficienti.

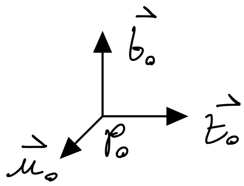
$\Rightarrow$ Enunciamo dunque il teorema fondamentale della teoria locale delle curve:

Teorema (Fondamentale della teoria locale delle curve):

Date 2 funzioni $K: I \to \mathbb{R}^{>0} \in C^{k+1}$, $\tau: I \to \mathbb{R} \in C^k$ $\exists!$, a meno di movimenti rigidi, la curva $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ $\in C^{k+3}$ biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura K e torsione τ.

Dim.

Fisso $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e (t_0, n_0, b_0) in p_0 t.c. $b_0 = t_0 \times n_0$



$\Rightarrow$ il sistema di equazioni differenziali determinato dalle formule di Frenèt - Serret ha soluzione unica.

$\Rightarrow \exists\ t(s), n(s), b(s)$ t.c. $t(s_0) = t_0$, $n(s_0) = n_0$, $b(s_0) = b_0$

$\Rightarrow$ definisco $\gamma(s)$ t.c.:

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^{s} t(x)\,dx$$

$\Rightarrow \gamma$ è unica: se fosse $\bar{\gamma} \in C^{k+3}$ biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura K e torsione τ e t.c. $\gamma(s_0) = \bar{\gamma}(s_0)$ potrei far coincidere $\gamma, \bar{\gamma}$ sul triedro di Frenèt per s_0 tramite un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$, MA, per il Teorema di Cauchy - Lipschitz, si ha:

$$\dot{\gamma} \equiv \dot{\bar{\gamma}} \quad \forall s$$

$$\Rightarrow \gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^{s} \dot{\gamma}(x)\,dx = \bar{\gamma}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \dot{\bar{\gamma}}(x)\,dx = \bar{\gamma}(s)$$

$\Rightarrow \, T(s) \equiv \overline{T}(s) \, \Rightarrow \, T$ è unica a meno di movimenti rigidi.

q.e.d.