Equazioni di Riccati:

Sono ODE della forma $\dot{y} = \alpha(t) + \beta(t)y + \gamma(t)y^2$

NON sono ODE lineari (y ha grado 2) ma tra tutte le equazioni non lineari sono tra le più semplici.

Vi sono 2 metodi risolutivi, entrambi richiedono un cambio di variabile:

1) Riduzione ad un' equazione lineare del 2° ordine.
2) Riduzione ad un' equazione lineare del 1° ordine.

esempio (del 1° metodo):

Si pone $y = -\dfrac{\dot{u}}{u\gamma(t)}$

$$\Rightarrow \dot{y} = 3e^{-t} + 3y + e^t y^2 \Rightarrow y = -\frac{\dot{u}}{e^t u}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = -\frac{\ddot{u}e^t u - \dot{u}e^t u - (\dot{u})^2 e^t}{e^{2t}u^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\ddot{u}e^t u - \dot{u}e^t u - (\dot{u})^2 e^t}{e^{2t}u^2} = 3e^{-t} - \frac{3\dot{u}}{e^t u} + \frac{e^t(\dot{u})^2}{e^{2t}u^2}$$

$$\Rightarrow -\ddot{u}e^t u + \dot{u}e^t u + \cancel{\dot{u}^2 e^t} = 3e^t u^2 - 3\dot{u}e^{2t}u + \cancel{e^t \dot{u}^2}$$

$$\Rightarrow -\ddot{u}e^t u + \dot{u}e^t u - 3e^t u^2 + 3\dot{u}e^{2t}u = 0$$

$$\Rightarrow -\ddot{u}e^t u + 4\dot{u}u e^t - 3e^t u^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{u} - 4\dot{u} + 3u = 0$$ Equazione lineare del 2° ordine omogenea a coefficienti costanti

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \iff \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3$$

$\Rightarrow u = c_1 e^t + c_2 e^{3t} \Rightarrow$ deve essere $u \neq 0$ quindi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ NON DEVONO ESSERE entrambe nulle

$$\Rightarrow y = -\frac{\dot{u}}{e^t u} = -\frac{c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{3t}}{c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}}$$

In generale, l'equazione lineare del 2° ordine ottenuta in u potrebbe avere coefficienti NON costanti.

<u>esempio</u> (del 2° metodo):

É necessario conoscere una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione.

Si pone $y = \bar{y} + \frac{1}{w}$

$$\Rightarrow \dot{y} = 3e^{-t} + 3y + e^t y^2 \quad \text{con } \bar{y} = -e^{-t}$$

$$\Rightarrow y = -e^{-t} + \frac{1}{w} \Rightarrow \dot{y} = e^{-t} - \frac{\dot{w}}{w^2}$$

$$\Rightarrow e^{-t} - \frac{\dot{w}}{w^2} = \cancel{3e^{-t}} - \cancel{3e^{-t}} + \frac{3}{w} + e^t\left(-e^{-t} + \frac{1}{w}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{-t}} - \frac{\dot{w}}{w^2} = \frac{3}{w} + \cancel{e^{-t}} - \frac{2}{w} + \frac{e^t}{w^2}$$

$$\Rightarrow -\dot{w} = 3w - 2w + e^t \Rightarrow \dot{w} + w + e^t = 0$$

Equazione lineare del 1° ordine

$$\Rightarrow e^t \dot{w} + e^t w + e^{2t} = 0$$

$$\Rightarrow (\dot{w} + w)e^t = -e^{2t} \Rightarrow \frac{d}{dt}(we^t) = -e^{2t}$$

$$\Rightarrow we^t = -\frac{1}{2}e^{2t} + c \Rightarrow w = -\frac{1}{2}e^t + ce^{-t}$$

$$\Rightarrow y = -e^{-t} + \frac{1}{ce^{-t} - e^t/2} \quad \vee \quad y = -e^{-t}$$

esercizi:

1) $\dot{y} = y^2 - 2ty + t^2 + 1$

$\Rightarrow$ Vogliamo applicare il 2° metodo, cerchiamo quindi una soluzione particolare $\bar{y} = Kt^\alpha$, $K, \alpha \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \dot{\bar{y}} = \alpha K t^{\alpha - 1} \Rightarrow$ sostituendo si ha:

$$\alpha k t^{\alpha-1} = k^2 t^{2\alpha} - 2t k t^{\alpha} + t^2 + 1$$

$\Rightarrow$ i 2 termini noti hanno grado 2, 0, quindi cerchiamo α, k t.c. sia:

$$\alpha - 1 = 0 \quad \vee \quad \alpha - 1 = 2$$

se $\alpha = 1$)

$$\Rightarrow k = k^2 t^2 - 2k t^2 + t^2 + 1$$

$$\Rightarrow k = t^2 (k-1)^2 + 1$$

$\Rightarrow$ deve essere:

$$\begin{cases} (k-1)^2 = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = k = 1 \Rightarrow t \text{ è soluzione particolare}$$

$$\Rightarrow y = t + \frac{1}{w} \Rightarrow \dot{w} + (-2t \cancel{+2(t)})w = -1$$

$$\Rightarrow \dot{w} = -1 \Rightarrow w = -t + c \Rightarrow \boxed{y = t + \frac{1}{c-t}}$$

2) $\dot{y} = y^2 + \left(1 - \frac{2}{t^2}\right) y + \frac{1 - 2t - t^2}{t^4}$

Cerco una soluzione particolare del tipo $\bar{y} = k t^{\alpha}$

$$\Rightarrow \alpha k t^{\alpha-1} = k^2 t^{2\alpha} + \left(1 - \frac{2}{t^2}\right) k t^{\alpha} + t^{-4} - 2t^{-3} - t^{-2}$$

$\Rightarrow$ i termini noti sono di grado $-4, -3, -2$

$\Rightarrow$ proviamo ad imporre $\alpha = -2 = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2$:

$$-2k t^{-3} = k^2 t^{-4} + \left(1 - \frac{2}{t^2}\right) k t^{-2} + t^{-4} - 2t^{-3} - t^{-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = k - 1 & (t^{-2}) \\ -2k = -2 & (t^{-3}) \\ 0 = k^2 - 2k + 1 & (t^{-4}) \end{cases} \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{w} \Rightarrow \dot{w} + \left(\left(1-\frac{\cancel{2}}{\cancel{t^2}}\right) + 2\left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{t^2}}\right)\right)w = -1$$

$$\Rightarrow \dot{w} + w = -1 \Rightarrow w = e^{-\int 1 dt}\left(c + \int e^{\int 1 dt} - 1\, dt\right)$$

$$= e^{-t}\left(c - e^{t}\right) = ce^{-t} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{ce^{-t} - 1}}$$

Equazioni a Coefficienti Omogenei:

Sono ODE della forma $\dot{y} = g\left(\frac{y}{t}\right)$. Si effettua il cambio di variabile $u = \frac{y}{t}$. Si riducono quindi ad equazioni a variabili

esempio:

$$\dot{y} = \frac{t+y}{t-y} \quad \text{con } t > 0$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{1+\frac{y}{t}}{1-\frac{y}{t}} =: g\left(\frac{y}{t}\right) \Rightarrow u = \frac{y}{t} \Rightarrow \dot{u} = \frac{\frac{1+u}{1-u} - u}{t}$$

$$\Rightarrow \dot{u} = \frac{1 + \cancel{u - u} + u^2}{1-u}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1+u^2}{1-u}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\Rightarrow \int \dot{u}\,\frac{1-u}{1+u^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \log t + c \quad (t>0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{ds}{1+s^2}(1-s) = \log t + c_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{ds}{1+s^2} - \int \frac{s\,ds}{1+s^2} = \log t + c_1$$

$$\Rightarrow \arctan s - \frac{1}{2}\log(1+s^2) + c_2 = \log t + c_2$$

$$\Rightarrow \arctan \frac{y}{t} - \frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{y}{t}\right)^2\right) + c_2 = \log t + c_2$$

$$\Rightarrow \arctan \frac{y}{t} - \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) = \log t + c$$

$\Rightarrow$ in coordinate polari ($t = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$) si ha:

$$\boxed{\theta - \frac{1}{2} \log\left(1 + \tan^2\theta\right) = \log\left(\rho\cos\theta\right) + c}$$

---

esercizio :

$$\dot{y} = y^2 + 3\frac{y}{t} + 2y\sin t + 3\frac{\sin t}{t} - \cos t + \sin^2 t$$

con $\bar{y} = -\sin t$

$\Rightarrow$ Si tratta di una Equazione di Riccati con soluzione particolare $\bar{y} = -\sin t$

$$\Rightarrow \dot{y} + y\left(-\frac{3}{t} - 2\sin t\right) - y^2 + \left(\cos t - \sin^2 t - \frac{3\sin t}{t}\right) = 0$$

$$\Rightarrow y = -\sin t + \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \dot{z} - \left[-\frac{3}{t} - 2\cancel{\sin t} + 2\cancel{\sin t}\right] z = -1$$

$$\Rightarrow \dot{z} + \frac{3}{t} z = -1 \quad \Rightarrow z = e^{-3\int \frac{1}{t}dt}\left(c + \int e^{3\int \frac{1}{t}dt}(-1)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{|t^3|}\left(c + \int -|t^3|\,dt\right) = \frac{1}{|t^3|}\left(c - \frac{t^4 \operatorname{sgn} t}{4}\right)$$

$$= \frac{c}{|t^3|} - \frac{t}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\sin t + \frac{4|t^3|}{c - t|t^3|}} \quad (\text{con } t \neq 0)$$
