Def. (Sistema Hamiltoniano):

Un campo $X_H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (Ω aperto) si dice HAMILTONIANO (o DI HAMILTON) se $\exists H : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ liscia t.c.:

$$\boxed{X_H = \left(\nabla_p H, -\nabla_q H\right)^T = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q^n}\right)^T}$$

in cui $(q,p) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ sono coordinate in Ω

esempio:

Un campo vettoriale Newtoniano conservativo è del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{v}{m} \\ \dot{v} = -\nabla V(x) \end{cases} \quad \text{con } V: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ (x,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow X(x,v)$ è Hamiltoniano per la funzione

$$H(x,v) = \frac{1}{2m} v^2 + V(x)$$

Infatti, sia $p = v \Rightarrow H(x,p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(x)$

$$\Rightarrow X_H = \left(\frac{p_1}{m}, \dots, \frac{p_n}{m}, -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^T = \left(\nabla_p H, -\nabla_x H\right)^T$$

Def. (Sistema di Equazioni Canoniche):

Il sistema di ODE definito da un campo Hamiltoniano si dice SISTEMA DI EQUAZIONI CANONICHE (o DI HAMILTON) ed è del tipo:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n}$$

Osservazione:

Notiamo che ogni funzione f liscia in Ω definisce un campo Hamiltoniano $X_f = (\nabla_p f, -\nabla_q f)$, (q,p) coordinate in Ω

N.B.

ATTENZIONE ALL'ORDINE di q e p !!!

Osservazione:

Dato un campo Hamiltoniano $X_H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ si ha che:

$$\boxed{X_H = J \nabla H}$$

Con:

$$H : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ (\text{liscia}),$$

$$\nabla H = (\partial_{q_1} H, \dots, \partial_{p_n} H),$$

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & Id_n \\ \hline -Id_n & 0_n \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$ è l' UNITÀ SIMPLETTICA

In tal caso X_H è anche detto GRADIENTE SIMPLETTICO

Teorema:

Sia $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ (Ω aperto) liscia e indipendente dal tempo t. Allora H è I.P. del campo Hamiltoniano da lei definito

Dim. :

Deve essere $\mathcal{L}_{X_H} H = 0$, calcoliamo:

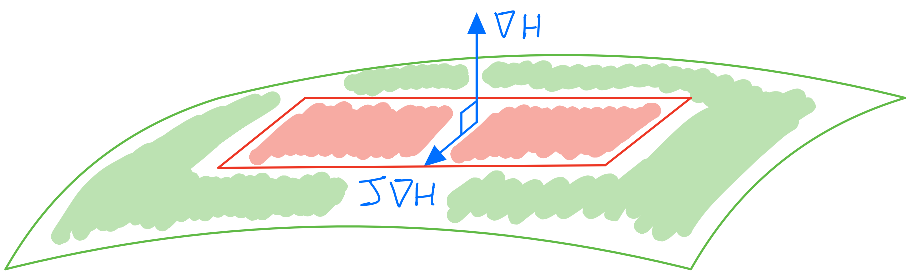
$$\mathcal{L}_{X_H} H = X_H \cdot \nabla H = J \nabla H \cdot \nabla H$$

$$= (\nabla_p H, -\nabla_q H) \cdot (\nabla_q H, \nabla_p H) = 0$$

q.e.d.

Tale teorema ha 2 importanti conseguenze:

1) $J \nabla H$ è tangente ai livelli di H. Ecco perché si dice che i sistemi Hamiltoniani sono CONSERVATIVI



2) I sistemi Hamiltoniani NON HANNO comportamenti attrattivi/repulsivi perché ammettono SEMPRE un. I.P. NON COSTANTE

Osservazione :

Siano $H, \tilde{H} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ (Ω aperto) lisce, si ha:

1) $\tilde{H} = H + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow X_{\tilde{H}} = X_H$

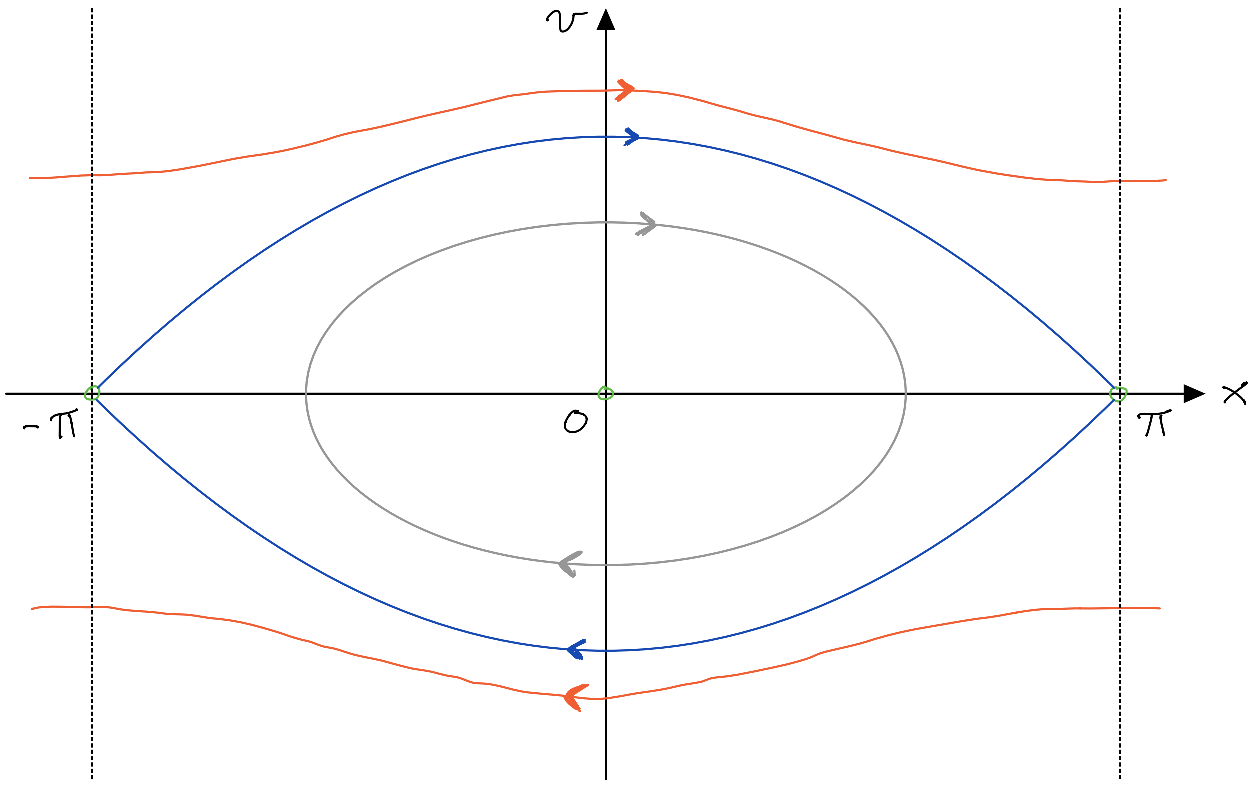
2) $\tilde{H} = cH,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow X_{\tilde{H}} = c \cdot X_H$ e i 2 campi hanno le stesse orbite

(Entrambe derivano dalla Teoria dei Sistemi Dinamici tradizionali vista in precedenza) esempio (Pendolo semplice):

Sappiamo che il ritratto in fase del sistema

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta$$

è il seguente:



Si ha:

$$\dot{\theta} = v, \quad \dot{v} = -\sin\theta$$

$$\Rightarrow (E, \theta) \rightsquigarrow \dot{E} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = 1 = \frac{\partial H}{\partial E}$$

$$\Rightarrow H(\theta, E) = E$$

$\theta \to q$, $E \to p$

Proprietà dinamiche dei sistemi Hamiltoniani:

Proposizione:

Data $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ autonoma (indipendente dal tempo) liscia, sia $(\bar{q}, \bar{p})$ un suo punto critico.

Valgono le seguenti proprietà:

1) Gli equilibri di X_H sono i punti critici di H
2) Se $(\bar{q},\bar{p})$ è un minimo o un massimo locale stretto, allora $(\bar{q},\bar{p})$ è equilibrio stabile

Dim.:

1) $X_H = J\nabla H$ con $\det J \neq 0$

$\Rightarrow X_H(\bar{q},\bar{p}) = 0 \iff \nabla H(\bar{q},\bar{p}) = \vec{0}$

2) Sia $(\bar{q},\bar{p})$ min. locale stretto di H, si ha:

$\mathcal{L}_{X_H} H = 0 \Rightarrow H$ è funzione di Lyapunov per X_H

$\Rightarrow (\bar{q},\bar{p})$ è stabile per tutti i tempi

Se $(\bar{q},\bar{p})$ max. locale stretto di H, si ha:

$\mathcal{L}_{X_H} -H = 0 \Rightarrow -H$ è funzione di Lyapunov per X_H

$\Rightarrow (\bar{q},\bar{p})$ è stabile

q.e.d.

Coordinate cicliche e riduzione:

Supponiamo che $H: \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ autonoma liscia sia INDIPENDENTE da ALCUNE COORDINATE tra $(q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n) \in \Omega$:

$$H: (\underbrace{Q, \varphi}_{q}, \underbrace{P, \pi}_{p}) \longmapsto H(Q,P,\pi)$$

ovvero H non dipende dalle k coordinate $(\varphi^1,\dots,\varphi^k)$.

Allora si ha:

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \quad \text{con } i = k+1,\dots,n$$

$$\dot{f}^a = \frac{\partial H}{\partial \Pi_a}, \quad \dot{\Pi}_a = 0 \qquad \text{con } a =$$

$\Rightarrow$ se H NON DIPENDE da una coordinata $\tilde{q}$, allora il MOMENTO CONIUGATO ASSOCIATO $\tilde{p}$ è I.P. di X_H e $\tilde{q}$ è detta COORDINATA CICLICA

Sappiamo che se è dato un I.P. di un campo, è possibile ridurre la complessità del sistema di ODE associato al campo restringendo il campo ai livelli dell'I.P.

Applichiamo tale procedimento al caso di I.P. che sono momenti di variabili cicliche di un sistema X_H:

sia $t \longmapsto (Q(t), P(t), f(t), \Pi(t))$ curva integrale di X_H con dato iniziale $\Pi = c$. Le prime 2 componenti soddisfano:

$$(*) \begin{cases} \dot{Q}^i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial P_i}(Q(t), P(t), c) \\ \dot{P}_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial Q^i}(Q(t), P(t), c) \end{cases}$$

mentre $t \longmapsto f(t)$ soddisfa:

$$f^a(t) = f^a(0) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial \Pi_a}(Q(t), P(t), c)\, ds$$

Osserviamo che $(*)$ sono ANCORA equazioni di Hamilton per una Hamiltoniana

$$H_c^R(Q, P) := H(P, Q, c)$$

definita restringendo la H originale ai livelli degli I.P. associati alle variabili cicliche:

$H_c^R(Q,P)$ è definita in $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^{2(n-p)}$, quindi la dimensione dello spazio delle fasi è diminuita di $2k$!!!

<u>esempio</u>:

Consideriamo $H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m} + V(r)$ con

$$H : \mathbb{R}^{>0} \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$V : \mathbb{R}^{>0} \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ θ è ciclica !!! $\Rightarrow$ $\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$ $\Rightarrow$ p_θ è I.P.

$\Rightarrow$ fissiamo un valore regolare di p_θ : $p_\theta = s,\ s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ determiniamo l'Hamiltoniana ridotta:

$$H_s^R(r, p_r) := H(r, p_r, s) = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{s^2}{2mr^2} + V(r)}_{\text{energia potenziale efficace}}$$

$\Rightarrow$ le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \qquad \dot{p}_r = \frac{s^2}{mr^3} - V'(r)$$

<u>Parentesi di Poisson</u>:

<u>Def</u> (Parentesi di Poisson):

$\forall f, g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ coppia di funzioni lisce si definisce la PARENTESI DI POISSON DI f e g come:

$$\{f, g\} = -\mathcal{L}_{X_f}\, g$$

<u>Proprietà</u> di $\{\cdot, \cdot\}$:

1) $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \times C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$

2) $\{\cdot,\cdot\}$ è un' operazione ANTISIMMETRICA e BILINEARE:

$$\{g,f\} = -\mathcal{L}_{X_g} f\ ,\ \{f,f\} = 0 \Rightarrow \text{si ha:}$$

$$\{f,g\} = -\mathcal{L}_{X_f} g = -X_f \cdot \nabla g = -J\nabla f \cdot \nabla g$$

$$= -\nabla f \cdot J^T \nabla g = -\nabla f \cdot -J\nabla g = \nabla f \cdot J \nabla g$$

$$= \nabla f \cdot X_g = \mathcal{L}_{X_g} f = -\{g,f\}$$

3) In coordinate $(q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n) \in \Omega$ si ha:

$$\boxed{\{f,g\} = \nabla f \cdot X_g = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial q^i}\right)}$$

4) Dato che $\{\cdot,\cdot\}$ è una derivazione, soddisfa la regola di Leibniz:

$$\{f, g\cdot h\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$$
$$\forall f,g,h \in C^\infty(\Omega)$$

5) IDENTITA' DI JACOBI:

$$\boxed{\begin{gathered}\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0 \\ \forall f,g,h \in C^\infty(\Omega)\end{gathered}}$$

$\Rightarrow (C^\infty(\Omega,\mathbb{R}), +, \cdot, \{\cdot,\cdot\})$ è un' ALGEBRA DI POISSON

<u>Proposizione</u>:

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ liscia e sia H hamiltoniana.

$$f \text{ è I.P. per } X_H \Leftrightarrow \{f,H\} = 0$$

<u>Dim.</u>:

f è I.P. di $X_H \Leftrightarrow \mathcal{L}_{X_H} f = 0 \Leftrightarrow -\mathcal{L}_{X_H} f = 0$

$\Leftrightarrow \{f, H\} = 0$

q.e.d.

Corollario:

L'antisimmetria di $\{\cdot,\cdot\}$ conferma che H è I.P. di X_H

Proposizione:

Siano $f, g \in C^\infty(\Omega)$ I.P. di X_H definito da H.
Allora $\{f, g\}$ è I.P. di X_H

Dim.:

$$\{H,\{f,g\}\} \underset{\text{Jacobi}}{=} -\underbrace{\{f,\{g,H\}\}}_{=0} - \underbrace{\{g,\{H,f\}\}}_{=0} = 0$$

f, g I.P. di H

q.e.d.

Osservazione (PARENTESI DI POISSON FONDAMENTALI):

Si hanno le seguenti:

1) $\{p_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_k} \cdot \cancelto{0}{\frac{\partial p_j}{\partial q^k}} - \cancelto{0}{\frac{\partial p_i}{\partial q^k}} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial p_k} \right) = 0$

2) $\{q^i, q^j\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q^i}{\partial q^k} \cdot \cancelto{0}{\frac{\partial q^j}{\partial p_k}} - \cancelto{0}{\frac{\partial q^i}{\partial p_k}} \cdot \frac{\partial q^j}{\partial q^k} \right) = 0$

3) $\{q^i, p_j\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q^i}{\partial q^k}}_{\delta^i_k} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta^j_k} - \cancelto{0}{\frac{\partial q^i}{\partial p_k}} \cdot \cancelto{0}{\frac{\partial p_j}{\partial q^k}} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta^i_k \delta^j_k = \delta^{ij}$

Osservazione (EQUAZIONI DI HAMILTON CON $\{\cdot,\cdot\}$):

Si ha:

1) $\{q^i, H\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial q^i}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \cancelto{0}{\frac{\partial q^i}{\partial p_j}} \frac{\partial H}{\partial q^j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i \quad \forall i$

2) $\{p_i, H\} = \dots = \dot{p}_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

esercizio:

Considerare l'Hamiltoniana $H(q,p) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_z^2) + \gamma \cdot z$

con $\gamma > 0$, $q = (x,z)$

1) scrivere X_H

2) Dim. che $g(q,p) = \gamma x + p_x p_z$ è I.P. di X_H

3) dopo aver verificato che p_x è I.P. di X_H dire se gli I.P. H, g e p_x sono funzionalmente indip.

4) gli I.P. H, g, p_x sono in involuzione? ($\Leftrightarrow$ le mutue parentesi di Poisson sono tutte nulle). Se non lo sono, ne n'è uno in involuzione con gli altri 2?

5) scrivere X_H ristretto agli insiemi di livello di g e p_x

6) il campo ottenuto al punto (5) è ancora Hamiltoniano? Se lo è, chi è la relativa Hamiltoniana?

$\Rightarrow$ 1) Si ha:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_z^2) + \gamma \cdot z$$

$$\Rightarrow X_H = J \cdot \nabla H = \begin{pmatrix} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{pmatrix} \quad i = 1,2$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}, \frac{\partial H}{\partial p_z}, -\frac{\partial H}{\partial x}, -\frac{\partial H}{\partial z} \right)^T$$

$$= \boxed{(p_x, p_z, 0, -\gamma)^T}$$

N.B.

Si noti che x è ciclica, quindi p_x è I.P. di X_H

$\Rightarrow$ 2) Si ha:

$$g(q,p) = \gamma x + p_x p_z \Rightarrow \mathcal{L}_{X_H} g = -\{H, g\} = 0$$

$$\Rightarrow X_H \cdot \nabla g = (p_x, p_z, 0, -\gamma) \cdot (\gamma, 0, p_z, p_x)$$
$$\stackrel{!}{=} \gamma p_x - \gamma p_x = 0$$

$\Rightarrow g$ è I.P. di X_H

$\Rightarrow$ 3) Si ha:

$$\nabla H = (0, \gamma, p_x, p_z), \quad \nabla g = (\gamma, 0, p_z, p_x),$$
$$\nabla p_x = (0, 0, 1, 0)$$

N.B.
Nel caso Hamiltoniano, l'indipendenza funzionale equivale all'indipendenza dei campi Hamiltoniani associati

$$\begin{pmatrix} \nabla H & \nabla g & \nabla p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ p_x & p_z & 1 \\ p_z & p_x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_K = 3$$

$\Rightarrow H, g, p_x$ sono funzionalmente indipendenti

N.B.
Si hanno quindi 3 I.P. di un campo 4-dimensionale

$\Rightarrow$ si può tracciare il ritratto in fase utilizzando le intersezioni degli insiemi di livello dei 3 I.P.

$\Rightarrow$ il sistema è integrabile per quadrature (o integrabile geometricamente)

$\Rightarrow$ 4) Sappiamo che $\{H, g\} = \{H, p_x\} = 0$ (g, p_x sono I.P. di X_H) $\Rightarrow H$ è in involuzione con g, p_x

$\Rightarrow$ calcoliamo $\{g, p_x\}$:

$$\{g, p_x\} = \mathcal{L}_{X_{p_x}} g = X_{p_x} \cdot \nabla g = -\gamma \neq 0$$

con $X_{p_x} = (-1, 0, 0, 0)^T, \ \nabla g = (\gamma, 0, p_z, p_x)$

$\Rightarrow H, g, p_x$ NON sono in involuzione

$\Rightarrow$ 5) Si hanno 2 metodi:

1) scrivere X_H in coordinate (p_x, g):

$$(x, z, p_x, p_z) \longmapsto (x, z, p_x, g)$$ $(*)$

2) x è ciclica $\Rightarrow$ scrivere $H_s^R(z, p_z)$