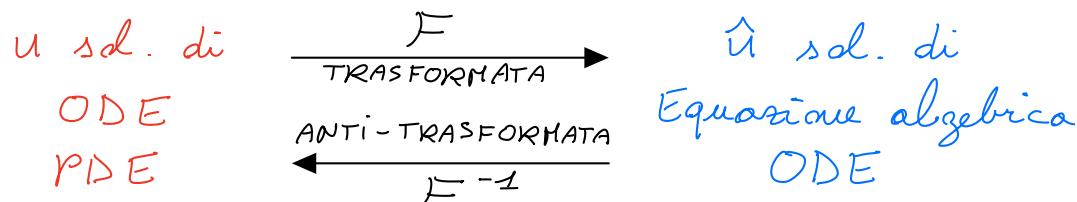


15. TRASFORMATA DI FOURIER IN $L^1(\mathbb{R})$

Motivazioni:

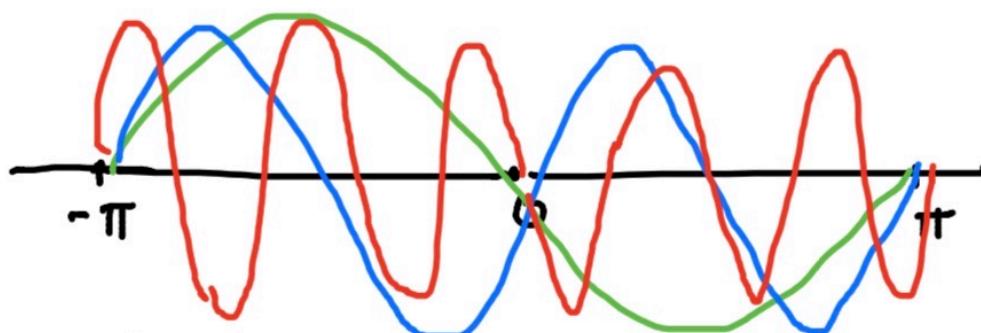
Analisi (codifica, approssimazione) di segnali NON periodici, distribuzioni statistiche o densità di probabilità (es. notazione di funzioni caratteristiche di una densità di probabilità).

Risoluzione di ODE/PDE:



La Trasformata di Fourier (TF) si ottiene formalmente come caso limite delle Serie di Fourier per segnali $2L$ -periodici con $L \rightarrow +\infty$:

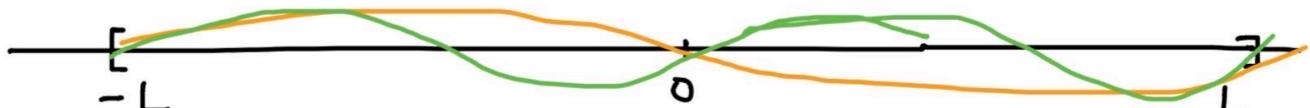
$$\frac{\pi}{L} = \begin{matrix} \text{frequenza "base"} \\ \text{dell'intervallo } [-L, L] \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sin(1 \cdot x) & \sin(2 \cdot x) & \underbrace{\sin(4 \cdot x)}_{\text{Multipli interi della frequenza "base" ovvero frequenze "ARMONICHE"}} \\ \uparrow \\ \text{Frequenza "base" di oscillazione periodica supportata nell'intervallo } [-\pi, \pi] \end{matrix}$$



$$f \text{ 2}\pi\text{-periodica} \Rightarrow c_n = a_n - i b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

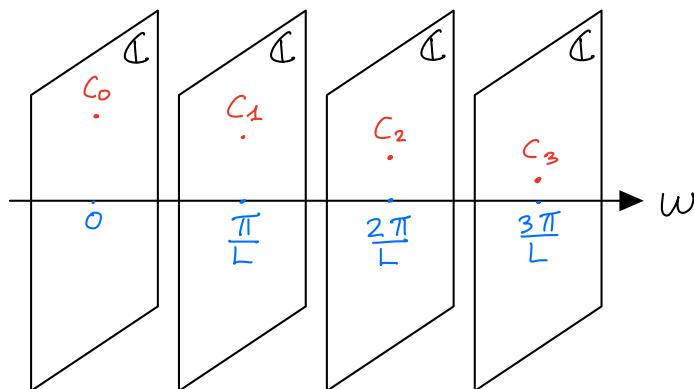
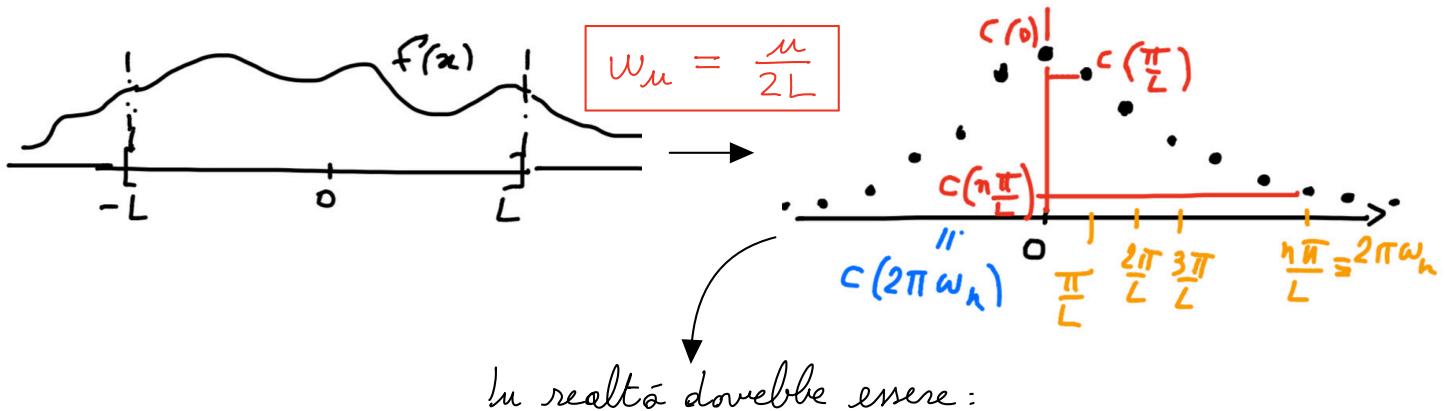
Coefficiente di Fourier di f complesso $\stackrel{ii}{=} \langle f, e^{-inx} \rangle_{L^2([- \pi, \pi])}$

componente di f che "oscilla" a frequenza n



Su $[-L, L]$ la frequenza base è $\frac{\pi}{L}$: $\sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right), \sin\left(2 \frac{\pi}{L} \cdot x\right)$ etc.
 $\Rightarrow e^{i(n \frac{\pi}{L} x)}, \quad n \in \mathbb{Z}$

\Rightarrow possiamo definire il coeff. di Fourier di f $2L$ -periodica come $c(n\frac{\pi}{L}) = c_n \equiv a_n - i b_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-inx} dx$, $n \in \mathbb{Z}$



Per $L \rightarrow +\infty$ tutte le frequenze $w \in \mathbb{R}$ sono incluse, quindi i coefficienti di Fourier di $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diventeranno una funzione INTEGRABILE $\in L^1(\mathbb{R})$ $\hat{u}(w)$. Per determinarla, consideriamo:

$$\underbrace{2L \cdot c(w_n)}_{\substack{\text{Coefficiente} \\ \text{di Fourier ri-} \\ \text{normalizzato}}} = \int_{-L}^L u(x) e^{-i2\pi w_n x} dx \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-i2\pi w_n x} dx$$

$\Rightarrow 2L c(w) \not\rightarrow 0$ per $L \rightarrow +\infty$

Poniamo dunque, per $w \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}[u](w) := \hat{u}(w) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-2\pi i w x} dx$$

La funzione $\mathcal{F}[u]$ o $\hat{u}: \mathbb{R}_w \rightarrow \mathbb{C}$ è detta TRASFORMATA DI FOURIER di $u \in L^1(\mathbb{R}_x)$

\uparrow
Spazio delle frequenze

OSSERVAZIONE:

x, w sono variabili "coniate": se x è un tempo, w è un'energia (come le coordinate p, q nei sistemi Hamiltoniani)

PROPRIETÀ DELLA TF

1) \hat{u} è ben definita e limitata: $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \forall w \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{u}(w)| = \left| \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-2\pi i w x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \cdot |e^{-2\pi i w x}| dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$\Rightarrow \|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1 \Rightarrow F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ è lineare e limitata

$\Rightarrow F$ è continuo: $\widehat{u_1 + u_2} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$ (dalla linearità dell'integrale)

2) $\hat{u} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \equiv CB(\mathbb{R})$ (\hat{u} è continua e limitata):

$$\begin{aligned} |\hat{u}(w+h) - \hat{u}(w)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \cdot |e^{-2\pi i (w+h)x} - e^{-2\pi i w x}| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \cdot |e^{2\pi i w x}| \cdot \underbrace{|e^{2\pi i h x} - 1|}_{\substack{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}} dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ &\leq |u(x)| \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE:

Dalla linearità di F si ha che la TF trasforma la convergenza in media in convergenza uniforme: se $u_n \rightarrow u$ in L^1 , allora $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$ in L^∞ ($\|\hat{u} - \hat{u}_n\|_\infty \leq \|\hat{u} - \hat{u}_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$)

OSSERVAZIONE:

La regolarità (i.e. continuità) di \hat{u} rende più efficiente la sua approssimazione $v_n \rightarrow u$ uniformemente quindi, in virtù dell'antitrasformata F^{-1} , si ottengono approssimazioni $u_n = F^{-1}v_n$ di u

3) $\hat{u} \in C^0(\mathbb{R})$ ovvero $\hat{u} \in C^0(\mathbb{R}) \wedge \hat{u} \xrightarrow{w \rightarrow \pm\infty} 0$

PROPRIETÀ DELLA TF RISPETTO ALLE TRASFORMAZIONI SU \mathbb{R}

Data $u \in L^1(\mathbb{R})$ e $h, w_0, c \in \mathbb{R}$ si ha:

1) FORMULA DEL RITARDO:

$$v(x) \equiv \tau_h u(x) = u(x-h) \Rightarrow \hat{v}(w) = \underbrace{e^{-2\pi i \omega h}}_{\substack{\text{Traslazione di } h}} \cdot \hat{u}(w)$$

modulazione a frequenza h di \hat{u}

2) FORMULA DELLA MODULAZIONE:

$$v(x) = \underbrace{e^{2\pi i w_0 x}}_{\substack{\text{modulazione di } u \text{ a freq. } w_0}} \cdot u(x) \Rightarrow \hat{v}(w) = \hat{u}(w-w_0) = \tau_{w_0} \hat{u}(w)$$

traslazione di w_0

3) FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI SCALA - EFFETTO DOPPLER:

$$v(x) = u(cx) \Rightarrow \hat{v}(\omega) = \frac{1}{|c|} \hat{u}\left(\frac{\omega}{c}\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

Dim:

$$\hat{v}(\omega) = \frac{1}{|c|} \int_{\mathbb{R}} u(cx) e^{-2\pi i \frac{\omega}{c} cx} dx = \frac{1}{|c|} \int_{\mathbb{R}} u(y) e^{-2\pi i \frac{\omega}{c} y} dy$$

$= |\det Df| \text{ con } f: x \mapsto cx$

(Cambiare di variabile nell'integrale di Lebesgue non orientato)

4) SIMMETRIE:

$$u \{ \text{pari, dispari} \} \Rightarrow \hat{u} \{ \text{pari, dispari} \}$$

$$5) \hat{u}(\omega) = \overline{\hat{u}}(-\omega)$$

Dim:

$$\hat{u}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(x) e^{2i\pi \omega x} dx = \overline{\hat{u}}(-\omega)$$

$$6) u(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \Rightarrow \hat{u}(\omega) = \hat{u}(-\omega) \Rightarrow \operatorname{Re}(\hat{u}) \text{ pari} \wedge \operatorname{Im}(\hat{u}) \text{ dispari}$$

Dim:

$$\operatorname{Re}(\hat{u}(\omega)) - i \operatorname{Im}(\hat{u}(\omega)) = \operatorname{Re}(\hat{u}(-\omega)) + i \operatorname{Im}(\hat{u}(-\omega))$$

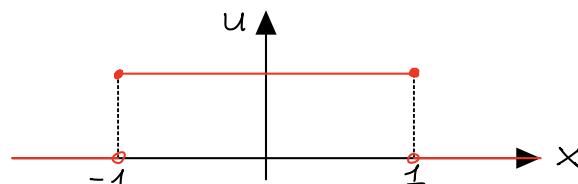
$$7) u \{ \text{reale pari, reale dispari} \} \Rightarrow \hat{u} \{ \text{reale pari, immaginaria dispari} \}$$

ESEMPI

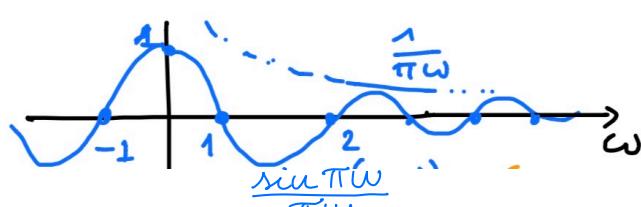
1) TF DELLA FUNZIONE CARATTERISTICA:

$$u(x) = \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases} =: \operatorname{Rec}_{[-1, 1]}(x) \quad (\text{funzione rettangolare})$$

$\Rightarrow u$ reale pari:



$$\Rightarrow \hat{u}(\omega) = \int_{-1}^1 e^{-2i\pi \omega x} dx = \left[-\frac{e^{-2i\pi \omega x}}{2i\pi \omega} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{2i\pi \omega} - e^{-2i\pi \omega}}{2i\pi \omega} = \frac{\sin(\pi \omega)}{\pi \omega}$$



$\hat{u} \in C_0^\circ(\mathbb{R})$ reale pari, tuttavia
 \Rightarrow decade molto lentamente (come $\frac{1}{\omega}$) dato che $u \notin C^\circ(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \hat{u}(cx) = \mathbb{1}_{[-c, 0]}(x) = \frac{1}{c} \frac{\sin(\pi \frac{\omega}{c})}{\pi \frac{\omega}{c}} = \frac{\sin(\pi \frac{\omega}{c})}{\pi \omega} \in C_0^\circ(\mathbb{R})$$

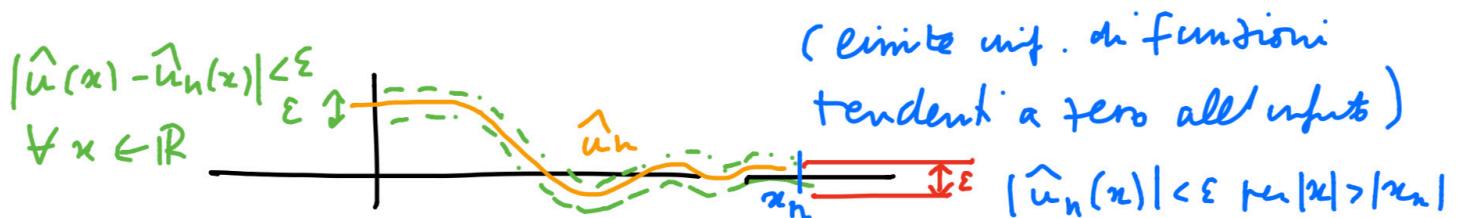
$$\Rightarrow \widehat{u}(c \cdot x - h) = \widehat{\mathbb{1}}_{[-c+h, c+h]}(x) = e^{-2\pi i \omega h} \frac{\sin(\pi \omega)}{\pi \omega} \in C_0^0(\mathbb{R})$$

$\widehat{\mathbb{1}}_{[a, b]}$ con:
 $c = \frac{b-a}{2}$, $h = \frac{b+a}{2}$

Dim. ($u \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{u} \in C_0^0(\mathbb{R})$):

Siano $u_n = \sum_{s=1}^{N(x)} d_s \cdot \mathbb{1}_{[a_s, b_s]}$ $L^1 \rightarrow u$ (funzioni semplici).

$\Rightarrow \widehat{u}_n \xrightarrow{L^\infty} \widehat{u}$ uniformemente in \mathbb{R} MA $\widehat{u}_n \in C_0^0$ (somma finita di C_0^0)



$$\Rightarrow |\widehat{u}(x)| < |\widehat{u} - \widehat{u}_n| + |\widehat{u}_n| < 2\epsilon \text{ per } |x| > |x_n| \Rightarrow \widehat{u} \in C_0^0(\mathbb{R})$$

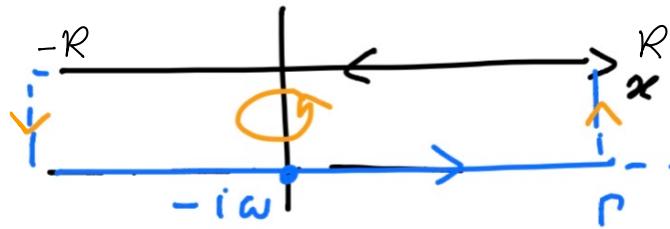
□

2) TF di UNA GAUSSIANA:

$$u(x) = e^{-\pi x^2} \Rightarrow \widehat{u}(\omega) = e^{-\pi \omega^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi \omega x} e^{\pi \omega^2} dx \\ = e^{-\pi \omega^2} \int_{x-i\omega \in \mathbb{R} - i\omega} e^{-\pi(x-i\omega)^2} d(x-i\omega) = e^{-\pi \omega^2} \int_{\Gamma} e^{-\pi z^2} dz \text{ con:}$$

$$\Gamma := \{z = x - i\omega, x \in \mathbb{R}\}. \text{ MA } \int_{\Gamma} e^{-\pi z^2} dz = 1, \text{ quindi:}$$

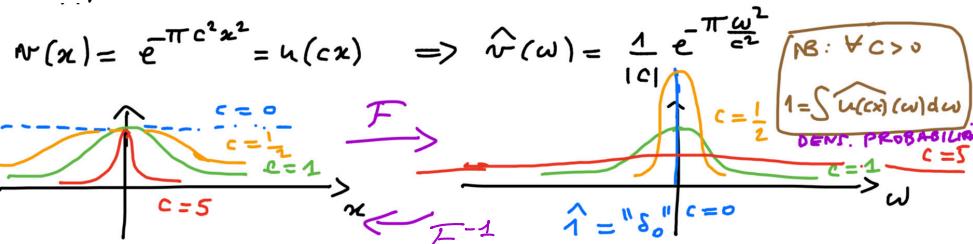
$$0 = \oint e^{-\pi z^2} dz = \int_{\Gamma} e^{-\pi z^2} dz - \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$$



quindi $\mathcal{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi \omega^2} \Rightarrow \widehat{u}(\omega) = u(x)$ ovvero:

$u(x) = e^{-\pi x^2}$ è punto fisso per \mathcal{F} (#invariante)

Applicando la formula di cambiamento di scala si ha:



Oss.:

Si può estendere la nozione di TF al di fuori di L^1 con passaggio al limite:

$$u_n \rightarrow 1 \text{ in } L^1_{loc} \Rightarrow \hat{u}_n \rightarrow \delta_0 \text{ (nel senso delle misure o delle funzioni di riportazione)}$$

$$\Rightarrow \hat{1} := \delta_0$$

$\overset{\text{AP}}{L^1(\mathbb{R})} \quad \overset{\text{C}^0(\mathbb{R})}{\cancel{L^1(\mathbb{R})}}$ (non è nemmeno una funzione)

e viceversa:

$$u_n \rightarrow \delta_0 \text{ nel senso della misura} \Rightarrow \hat{u}_n \rightarrow 1 \text{ in } L^1_{loc}$$

$$\hat{\delta}_0 := 1 \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}) \text{ MA } \notin C^0(\mathbb{R})$$

è una misura concentrata
 $\notin L^1(\mathbb{R})$

Oss.:

Il comportamento delle distribuzioni unimodali e delle loro TF è un caso particolare del **Princípio di INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG**:

$$(conoscenza precisa della posizione \Rightarrow conoscenza imprecisa del momento)$$

variabili coniate

e viceversa:

$$\| \hat{u} \|_2^2 \cdot \| u \|_2^2 \geq \hbar^2$$

(se $x_0 = 0$ e $P_0 = 0$)

TF E DERIVATE

$$u, u' \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u}' = (2\pi i w) \cdot \hat{u}(w)$$

N.B.

\mathcal{F} trasforma derivata in moltiplicazione per w ossia trasforma operazioni (equazioni) differenziali in operazioni (equazioni) algebriche

DIM.:

$$\hat{u}'(w) = \int_{\mathbb{R}} u'(x) e^{-2\pi i w x} dx = \left[u(x) e^{-2\pi i w x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} u(x) (-2\pi i w) e^{-2\pi i w x} dx$$

$(u \in C^0(\mathbb{R}) \wedge u(\pm\infty) = 0)$
dato che $u \in L^1(\mathbb{R})$

Analogamente $u, u', u'' \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{u''}(\omega) = (2\pi i\omega)^2 \widehat{u}(\omega)$
e, in generale:

$$u, \dots, \frac{d^n u}{dx^n} \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \frac{d^n \widehat{u}}{d\omega^n}(\omega) = (2\pi i\omega)^n \widehat{u}(\omega)$$

in particolare:

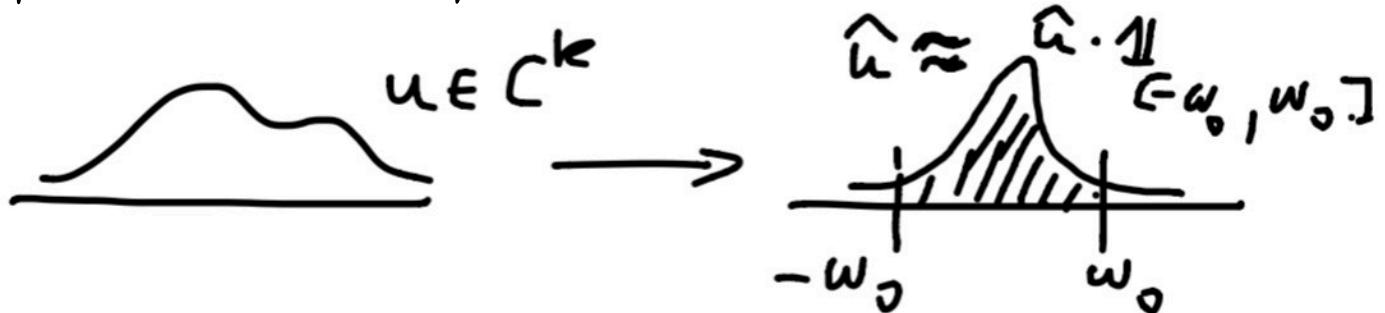
$$u, u' \in L^1 \Rightarrow \widehat{u}(\omega) = \frac{\widehat{u}'(\omega)}{2\pi i\omega} \xrightarrow[|\omega| \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Se anche $u'' \in L^1$:

$$\Rightarrow \widehat{u}(\omega) = \frac{\widehat{u}''(\omega)}{(2\pi i\omega)^2} \Rightarrow |\widehat{u}(\omega)| \leq \frac{|\widehat{u}''(\omega)|}{(2\pi i\omega)^2} \leq \frac{\|u''\|_1}{(2\pi i\omega)^2}$$

TASSO DI DECADIMENTO A 0 DI \widehat{u} PER $\omega \rightarrow \pm\infty$ SOTTO IPOTESI DI REGOLARITÀ DI u .

QUANTO MAGGIORE È LA REGOLARITÀ DI u TANTO PIÙ RAPIDO È IL DECADIMENTO DI \widehat{u} ALL'∞ (e tanto più efficiente è la sua approssimazione "al finito"):



VICEVERSA, QUANTO PIÙ RAPIDO È IL DECADIMENTO A 0 DI $u(x)$ PER $x \rightarrow \pm\infty$ TANTO PIÙ REGOLARE (DERIVABILE) È \widehat{u} :

$$u(x), x \cdot u(x) \in L^1 \Rightarrow (-2\pi i)(\widehat{x \cdot u(x)}) = \frac{d\widehat{u}}{d\omega}(\omega)$$

$$\frac{\widehat{u}(\omega+h) - \widehat{u}(\omega)}{h} = \int_{\mathbb{R}} x \cdot u(x) e^{-2\pi i \omega x} \underbrace{\left[\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{x h} \right]}_{= -2\pi i} dx$$

$$\rightarrow (-2\pi i) \cdot \widehat{x \cdot u(x)}(\omega)$$

