Analizziamo 2 sistemi visti in precedenza introducendo il concetto di RITARDO:

1) Modello Car-Following con ritardo:

Ipotesi di lavoro:

1) percorso rettilineo infinito
2) V velocitá del capofila
3) gli agenti NON possono sorpassarsi a vicenda

La NUOVA ipotesi di lavoro è che l'agente agisca con un ritardo $T>0$ (RITARDO DI RISPOSTA)

$\Rightarrow$ l'equazione è del tipo:

$$(*) \quad \boxed{\frac{d}{dt} x(t+T) = v_{opt}(V \cdot t - x(t))}$$

Supponiamo che sia $0 < T \ll 1$ (T piccolo) e che le soluzioni di $(*)$ siano differenziabili, sviluppiamo in serie la velocitá $\dot{x} = v$ al tempo $t+T$:

$$v(t+T) = v(t) + T\frac{dv(t)}{dt} + O(2)$$

$\Rightarrow$ sostituendo si ha:

$$\boxed{T\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) \approx v_{opt}(Vt - x(t))}$$

che è una ODE NON AUTONOMA

Supponiamo, come giá fatto in precedenza, che v_{opt} sia MONOTONA CRESCENTE. Consideriamo il cambio di coordinate $f = V \cdot T - x \Leftrightarrow \dot{f} = V - \dot{x}$ $\Leftrightarrow \ddot{f} = -\ddot{x}$. Si ottiene quindi:

$$\boxed{\ddot{t} = \frac{1}{T}\left(V - v_{opt}(t) - \dot{t}\right)}$$

($\frac{1}{T}$ è detta SENSIBILITÁ DELLA RISPOSTA)

$\Rightarrow$ riscriviamo quindi l'equazione come:

$$\dot{t} = u \iff \boxed{\dot{u} = \frac{1}{T}\left(V - v_{opt}(t) - u\right)}$$

che è un CAMPO in $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}$!!!

Ricordiamo che v_{opt} è monotona e che si ha $V < \sup v_{opt}$, quindi il campo ammette un unico equilibrio $\mathcal{E}_0 = (t_V, 0)$ con $t_V = v_{opt}^{-1}(V)$

$\Rightarrow$ usiamo la linearizzazione per studiare la stabilità:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2T}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\dot{v}_{opt}(t_V)T}\right)$$

1) $\dot{v}_{opt}(t_V) < \frac{1}{4T} \Rightarrow \lambda_{1,2} < 0$ reali negativi $\Rightarrow \mathcal{E}_0$ è NODO STABILE $\Rightarrow$ si ha un avvicinamento monotono ad $\mathcal{E}_0$ che è quindi ASINTOTICAMENTE STABILE

2) $\dot{v}_{opt}(t_V) > \frac{1}{4T} \Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$ complessi coniugati $\Rightarrow \mathcal{E}_0$ è FUOCO STABILE $\Rightarrow$ si ha un avvicinamento oscillante ad $\mathcal{E}_0$, che è ancora ASINTOTICAMENTE STABILE

$\Rightarrow \mathcal{E}_0$ è, in ogni caso, ASINTOTICAMENTE STABILE

N.B.

$T\dot{v}_{opt}(t_V)$ è piccolo se T è piccolo oppure se

$\dot{v}_{opt}(t_v)$ è piccolo (ovvero se la risposta è "dolce" e non "brusca")

2) <u>Modello S.I.R. con ritardo:</u>

Al precedente modello S.I.R. aggiungiamo l'ipotesi che la malattia abbia un PERIODO D'INCUBAZIONE $\tau > 0$. Si ha:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{S}(t) = \alpha I(t-\tau)\, S(t-\tau) \\ \dot{I}(t) = \alpha I(t-\tau)\, S(t-\tau) - \beta I(t) \\ \dot{R}(t) = \beta I(t) \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ Come sopra, supponiamo $0 < \tau \ll 1$ e sviluppiamo in serie:

$$I(t-\tau)S(t-\tau) = I(t)S(t) - \tau\big(I(t)S(t)\big)' + O(\tau^2)$$

$\Rightarrow$ si ha che:

$$\tau\big(I(t)S(t)\big)' = \frac{I(t)S(t)\big(\alpha\big(S(t)-I(t)\big)-\beta\big)}{1-\alpha\tau\big(I(t)-S(t)\big)}$$

$\Rightarrow$ sostituendo nell'equazione si ha:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha I(t)S(t) + \alpha I(t)S(t)\cdot f(I,S,\alpha,\beta) \\ \dot{I}(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta I(t) - \tau I(t)S(t)\cdot f(I,S,\alpha,\beta) \end{cases}$$

con $$f(I,S,\alpha,\beta) = \frac{\alpha\big(S(t)-I(t)\big)-\beta}{1-\alpha\tau\big(I(t)-S(t)\big)}$$

Dividendo membro a membro si ottiene:

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{\alpha S - \beta}{\alpha S}\big(1 + O(\beta\tau, \tau^2)\big)$$

che è esattamente il modello S.I.R. !!!

Cenni sui sistemi con ritardo:

Una DDE (Delay Differential Equation) è un'equazione della forma:

$$(*) \quad \boxed{\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau))}$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ (il RITARDO)

Per definire la DDE $(*)$ è necessario includere un dato iniziale "in un tempo passato":

$$\boxed{x(s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau, 0]}$$

dove:

$\phi : [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ è compatibile con $(*)$, ovvero

$\psi : [0, \tau] \longrightarrow \mathbb{R}$ è soluzione di $(*)$ se è soluzione del seguente PdC:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\psi} = f(\psi(t), \psi(t-\tau)) \\ \psi(0) = \phi(0) \end{cases}}$$

<u>Def.</u> (Soluzione di equilibrio di una DDE):

Data una DDE $(*)$ una sua SOLUZIONE DI EQUILIBRIO è una soluzione costante $\bar{x} : t \longmapsto \bar{x}$ t.c.:

$$\boxed{f(\bar{x}, \bar{x}) = 0}$$

Possiamo ora generalizzare anche la nozione di stabilità di un equilibrio:

Def. (Equilibrio stabile di una DDE):

Una soluzione di equilibrio $\bar{x}$ della DDE $(*)$ con dato iniziale $\phi(s) = x(s)$, $s \in [-\tau, 0]$ si dice STABILE se vale la seguente implicazione:

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \|\phi(t) - \bar{x}\| \leq \delta \ \ \forall t \in [-\tau, 0] \\ \Downarrow \\ \forall x(t) \text{ soluzione della DDE con dato iniziale} \\ \phi(s) \in [-\tau, 0] \text{ si ha che } \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \ \ \forall t > 0 \end{array}}$$

Un equilibrio $\bar{x}$ della DDE $(*)$ si dice ASINTOTICAMENTE STABILE se è stabile e vale la seguente:

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall x(t) \text{ soluzione della DDE con dato iniziale} \\ \phi(s) \in [-\tau, 0] \text{ si ha } \lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x} \end{array}}$$

Data la DDE $(*)$ e $\bar{x}$ un suo equilibrio, consideriamo la LINEARIZZAZIONE:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\partial_{x(t)} f(0,0)}_{=: \mu} \cdot x(t) + \underbrace{\partial_{x(t-\tau)} f(0,0)}_{=: \nu} \cdot x(t-\tau) + \dots$$

che è una DDE LINEARE!!! $\Rightarrow$ cerchiamo quindi una soluzione del tipo $x(t) = c e^{\lambda t}$. Sostituendo nella linearizzazione si ottiene:

$$\Rightarrow x = c e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x} = \lambda c e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda \cancel{c} \cancel{e^{\lambda t}} = \mu \cancel{c} \cancel{e^{\lambda t}} + \nu \cdot \cancel{c} e^{\lambda(\cancel{t} - \tau)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda - \mu - \nu e^{-\lambda\tau} = 0}$$

Tale equazione è detta EQUAZIONE CARATTERISTICA della DDE lineare ed è un'equazione trascendente, pertanto ha infinite soluzioni ed un'analisi spettrale come quelle usate in precedenza è difficoltosa da fare.
Tuttavia, possiamo procedere come segue:
$\lambda = \gamma + i\eta \Rightarrow$ si ottengono le 2 equazioni indipendenti

$$\boxed{\begin{cases} \gamma - \mu - \nu e^{-\tau\gamma} \cdot \cos(\eta\tau) = 0 \\ \eta - \nu e^{-\tau\gamma} \cdot \sin(\eta\tau) = 0 \end{cases}}$$

che forniscono, in alcuni casi, alcune informazioni riguardo alla DDE linearizzata.

<u>Modello di Hutchinson</u> (modello logistico con ritardo):
L'equazione DDE è la seguente:

$$\boxed{\dot{x} = r\,x(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right)}, \quad x \in \mathbb{R},\ \tau > 0$$

con:

$r > 0$ tasso di riproduzione
$K > 0$ equilibrio del modello logistico

$\Rightarrow$ il Modello di Hutchinson afferma che il tasso di riproduzione all'istante di tempo t NON DIPENDE dalla quantità di risorse disponibili al medesimo istante t, bensì dalla quantità di risorse che erano disponibili all'istante (nel passato) $t-\tau$

$\Rightarrow$ il modello proviene dall'osservazione di dati sperimentali riguardanti una colonia di una pulce d'acqua australiana.

Studiamo il modello usando la linearizzazione:

2 equilibri $\mathcal{E}_0 = 0$, $\mathcal{E}_1 = K$

1) $\mathcal{E}_0 = 0$:

$\Rightarrow$ il linearizzato è:

$$\dot{x} = \nu x$$

$\Rightarrow$ le sue soluzioni hanno andamento esponenziale

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}_0$ è necessariamente IPERBOLICO ed INSTABILE

2) $\mathcal{E}_1 = K$:

$\Rightarrow$ poniamo $X = x - K$. Si ha:

$$\nu x(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) = \nu(X+K)\left(1 - \frac{X(t-\tau)+K}{K}\right)$$

$$= (\nu X + \nu K)\left(1 - \frac{X(t-\tau)+K}{K}\right)$$

$$= \nu X - \frac{\nu X\left(X(t-\tau)+K\right)}{K} + \nu K - \frac{\nu K\left(X(t-\tau)+K\right)}{K}$$

$$= \nu X - \frac{\nu X \cdot X(t-\tau) + \nu K X}{K} + \nu K - \frac{\nu \cancel{K} \cdot X(t-\tau) + \nu K^2}{\cancel{K}}$$

$$= \cancel{\nu X} + \cancel{\nu K} - \frac{\nu}{K} X \cdot X(t-\tau) - \cancel{\nu X} - \nu X(t-\tau) - \cancel{\nu K}$$

$$\Rightarrow \dot{X} = -\nu X(t-\tau) - \frac{\nu}{K} X(t) \cdot X(t-\tau)$$

Il linearizzato attorno ad $x = 0$ è:

$$\dot{X} = -\nu X(t-\tau)$$

$\Rightarrow$ cerchiamo una soluzione della forma $X = ce^{\lambda t}$; si ottiene l'equazione caratteristica

$$\lambda \cancel{c}\cancel{e^{\lambda t}} = -\nu \cancel{c} e^{\lambda(\cancel{t}-\tau)} \Rightarrow \lambda + \nu e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = f + i\eta \Rightarrow \begin{cases} f + \nu e^{-\tau f}\cos(\eta\tau) = 0 \\ \eta - \nu e^{-\tau f}\sin(\eta\tau) = 0 \end{cases}$$

Notiamo che, per $\tau = 0$, l'equazione diventa:

$$\lambda + \nu = 0 \Rightarrow \lambda = -\nu < 0$$

$\Rightarrow$ la radice è negativa $\Rightarrow$ E_1 è asintoticamente stabile. Studiamo se e quando, al variare di τ, $Re(\lambda) = f$ cambia segno (se ciò avviene al crescere di τ, $\exists\, \tau_0 > 0$ t.c. $Re(\lambda(\tau_0)) = 0$ e quindi l'equazione caratteristica in quel punto avrà una coppia di radici immaginarie $\pm i\eta_0$ con $\eta_0 := \eta(\tau_0)$). Cerchiamo τ t.c. $Re(\lambda(\tau)) = 0$:

$$\Rightarrow f + \nu e^{-\lambda\tau}\cos\eta\tau = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$\Rightarrow \cos\eta_0\tau = 0 \Leftrightarrow \eta_0\tau = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ dato che $\eta_0 = \nu$, si ha:

$$\tau_k = \frac{\pi}{2\nu} + \frac{2\pi\mathbb{N}}{\nu} \Leftrightarrow \tau_0 = \frac{\pi}{2\nu}$$

Quindi l'eq. caratteristica ha una coppia di radici immaginarie $\pm i\nu$ per $\tau_0 = \frac{\pi}{2\nu}$

Verifichiamo ora che f è crescente in un intorno di τ_0, più precisamente mostriamo che $f'(\tau_0) > 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(t + \nu e^{-t} \cos \mu \tau\right)_{\tau=\tau_0} = 0 \quad (t = t(\tau),\ \mu = \mu(\tau))$$

$$\Rightarrow t' + \nu e^{-t\tau}(t + t'\tau)\cos \mu\tau$$
$$- \nu e^{-t\tau} \sin(\mu\tau)(\mu + \tau\mu')\Big|_{\tau=\tau_0} = 0$$

$$\Rightarrow t'(\tau_0) + \nu t'(\tau_0)\tau_0 \cancelto{0}{\cos(\mu(\tau_0)\tau_0)}$$
$$- \nu \underbrace{\sin(\mu(\tau_0)\tau_0)}_{1}(\mu(\tau_0) + \tau_0 \mu'(\tau_0)) = 0$$

$$\Rightarrow t'(\tau_0) - \nu(\overset{\nu}{\mu(\tau_0)} + \overset{\frac{\pi}{2\nu}}{\tau_0}\mu'(\tau_0)) = 0$$

$$\Rightarrow t'(\tau_0) - \nu^2 - \frac{\pi}{2}\mu'(\tau_0) = 0$$

$$\Rightarrow t'(\tau_0) = \nu^2 + \frac{\pi}{2}\mu'(\tau_0)$$

Non conosciamo il segno di $\mu'(\tau_0)$, tuttavia operando analogamente sull'equazione in μ si ricava che

$$\mu'(\tau_0) + \frac{\pi}{2} t'(\tau_0) = 0$$

$$\Rightarrow t'(\tau_0) = \frac{\nu^2}{1 + \frac{\pi^2}{4}} > 0$$

Quindi, per $0 < \tau < \frac{\pi}{2\nu}$ si hanno radici con parte reale < 0, quindi $\mathcal{E}_1$ è ASINTOTICAMENTE STABILE.

Se, invece, $\tau > \frac{\pi}{2\nu}$, si hanno radici con parte reale > 0, quindi $\mathcal{E}_1$ è INSTABILE.

Per $\tau = \tau_0 = \frac{\pi}{2\nu}$ si ha una BIFORCAZIONE