

MODELLI A TEMPI DISCRETI

Sono modelli del tipo $x_{k+1} = f(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$.
(vengono detti mappa discreta).

Esempio:

$$f(x_k) = v x_k \Rightarrow x_{k+1} = f(x_k) = v x_k = v^2 x_{k-1} = \dots = v^k x_0$$

quindi al variare di v otteniamo:

$v \in (0, 1) \Rightarrow$ decrescita

$v > 1 \Rightarrow$ crescita geometrica.

Logistica discreta:

$$x_{k+1} = v x_k \left(1 - \frac{x_k}{q}\right) =: f(x_k)$$

equilibri:

Sono i punti fissi di f , quindi si ha:

$$x = f(x) \Rightarrow x = v x \left(1 - \frac{x}{q}\right)$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow (x \neq 0):$$

$$1 = v \left(1 - \frac{x}{q}\right) \Rightarrow \frac{v}{q} x = v - 1 \Rightarrow x^* = q \frac{v-1}{v}$$

stabilità:

È determinata dal valore di $f'(x^*)$:

$$|f'(x^*)| < 1$$

infatti:

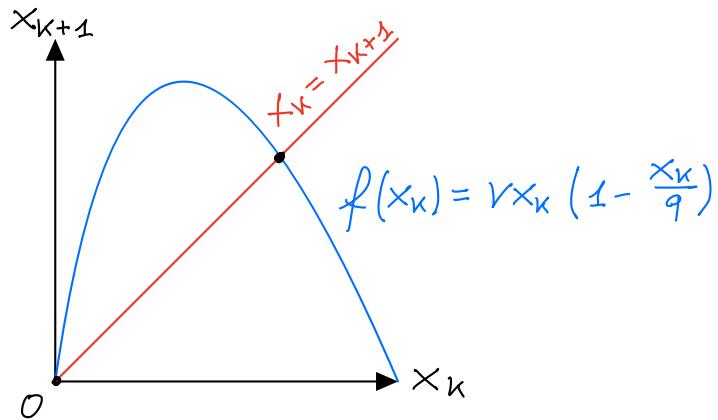
$$x_{k+1} = f(x_k), \quad x^* \text{ eq.} \Rightarrow x^* = f(x^*)$$

\Rightarrow introduciamo $\tilde{x}_k = x^* + \xi_k$

$\Rightarrow \tilde{x}_{k+1} = f(\tilde{x}_k) = f(x^*) + f'(x^*) \xi_k + \mathcal{O}(\xi_k^2)$
Taylor intorno ad x^*

$\Rightarrow \tilde{x}^* + \xi_{k+1} = x^* + f'(x^*) \xi_k + \mathcal{O}(\xi_k^2)$

\Rightarrow se $|f'(x^*)| < 1$, le perturbazioni ξ_k svaniscono,
altrimenti esplodono.



\Rightarrow l'instabilità di x^* produce delle biforcazioni
associabili al tipo Hopf.

COBWEBBING

Si tratta del seguente algoritmo (grafico a raguata) per la visualizzazione della dinamica degli equilibri:

```
Set N0, N1 = f(N0), K = 0, tol, itsMax;  
while (|NK+1 - NK| > tol  $\wedge$  K  $\leqslant$  itsMax)
```

```
    NK+1 = f(NK);
```

```
    plot(NK+1, NK+1);
```

```
    K = K + 1;
```

esempio (logistica discreta):

$$x_{k+1} = f(x_k) = \nu x_k (1 - \frac{x_k}{q})$$

$$f'(x) = \nu(1 - \frac{2x}{q})$$

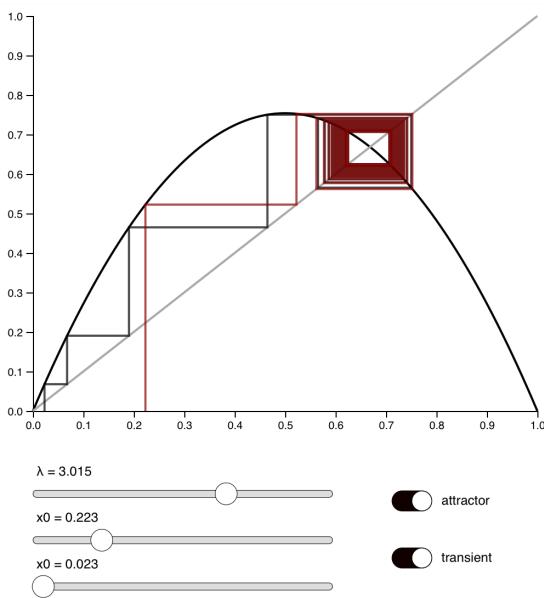
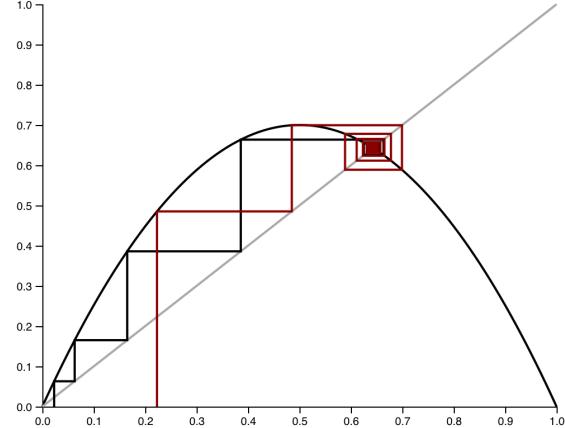
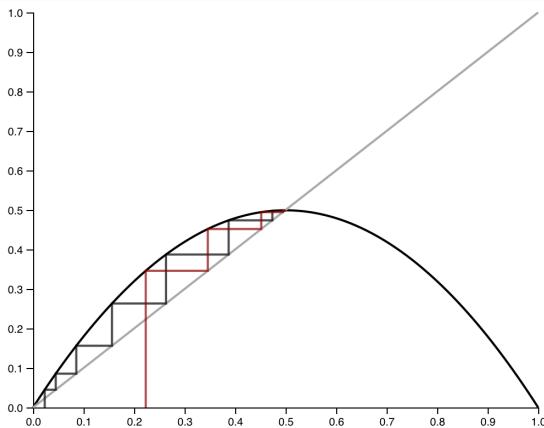
$$\Rightarrow |f'(x)| < 1 :$$

$$x^* = 0 \Rightarrow f'(x^*) = \nu \Rightarrow \text{deve essere } \nu < 1$$

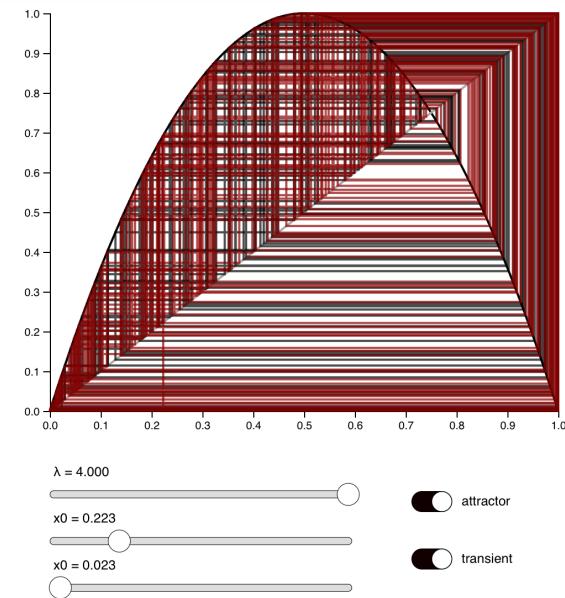
$$x^* = q \frac{\nu-1}{\nu} \Rightarrow f'(x^*) = 2 - \nu \Rightarrow |2 - \nu| < 1$$

$$\Rightarrow \text{deve essere } 1 < \nu < 3$$

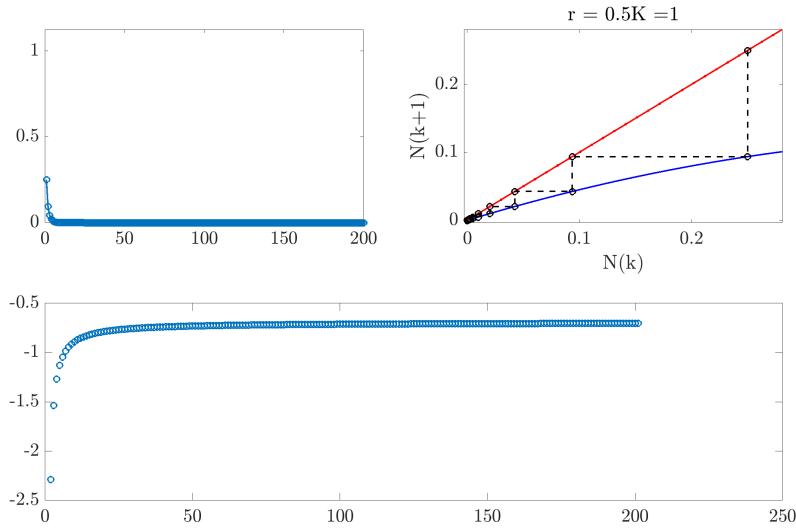
\Rightarrow <https://www.complexity-explorables.org/flongs/logistic/> Si ha:



↓ CASO PATOLOGICO ↓



\Rightarrow per $\lambda = \nu < 1$ si ha:



ORBITE PERIODICHE

Def. (Punto periodico di una mappa discreta):

x^* è detto PUNTO PERIODICO di periodo m per una mappa discreta $x_{k+1} = f(x_k)$ se:

$$f^{(m)}(x^*) = x^* \quad \text{con} \quad f^{(m)}(x^*) = [\underbrace{f \circ \dots \circ f}_m](x)$$

Proposizione:

Dato x^* equilibrio per $x_{k+1} = f(x_k)$ e periodico di periodo m . Allora x^* è LINEARMENTE STABILE se

$$\left| \prod_{i=0}^{m-1} f'(x_i^*) \right| < 1 \quad \text{con} \quad x_i^* = f^{(i)}(x_0^*), f^{(0)} \equiv f$$

Dim.:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{df^{(m)}}{dx}\Big|_{x=x^*} = \frac{df}{dx} f'\Big(f^{(m-1)}(x) \Big) \Big|_{x=x^*} \\ &= f'(x_{m-1}^*) \cdot \frac{d}{dx} f^{(m-1)}(x) \Big|_{x=x^*} = \dots = \prod_{i=0}^{m-1} f'(x_i^*) \end{aligned}$$



Osservazioni :

- 1) All' aumentare di r si ottengono orbite stabili di periodo crescente
- 2) \exists successione di punti $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ t.c. il periodo dell' orbita raddoppia. Si ha che:

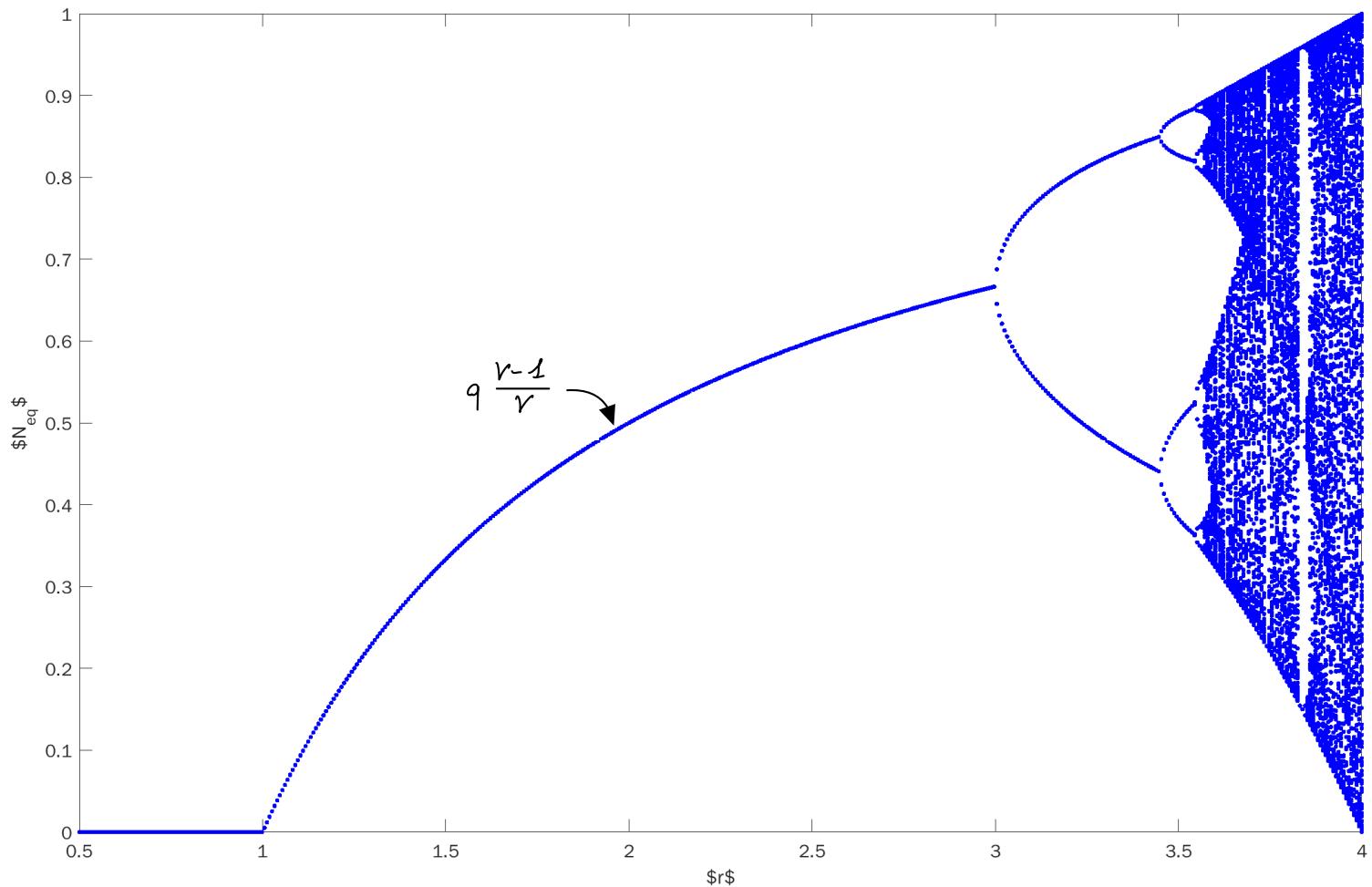
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = S_F \approx 4,6692$$

COSTANTE DI Feigenbaum (1975)

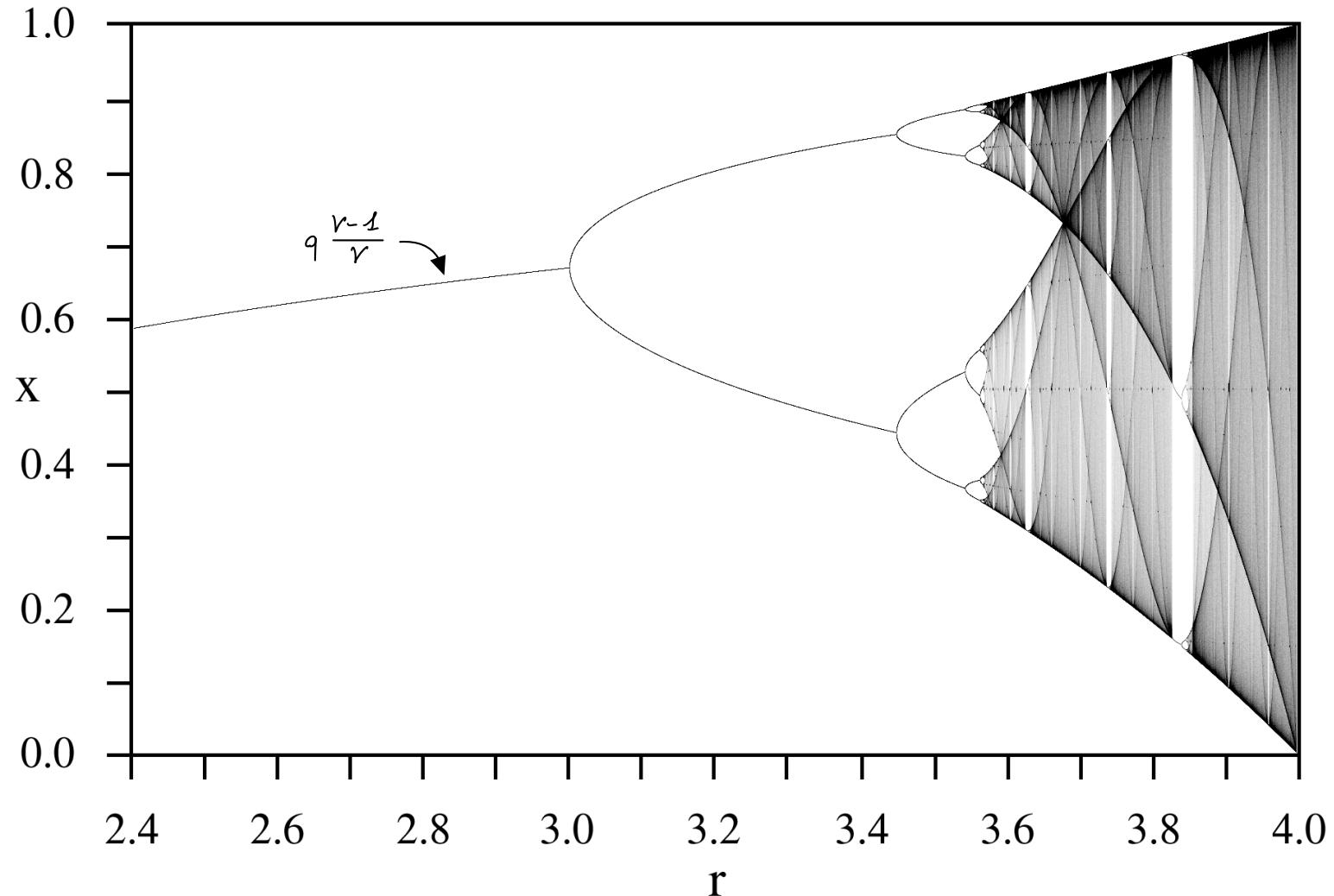
Tale costante è legata alle proprietà di **AUTOSIMILARITÀ** del sistema (es. FRATTALI).

⇒ Si verifica quindi una **transizione da una DINAMICA ORDINATA ad una DINAMICA CAOTICA**:

BIFORCAZIONI NELLA LOGISTICA DISCRETA (ATTRATTORE STRANO)



200M:

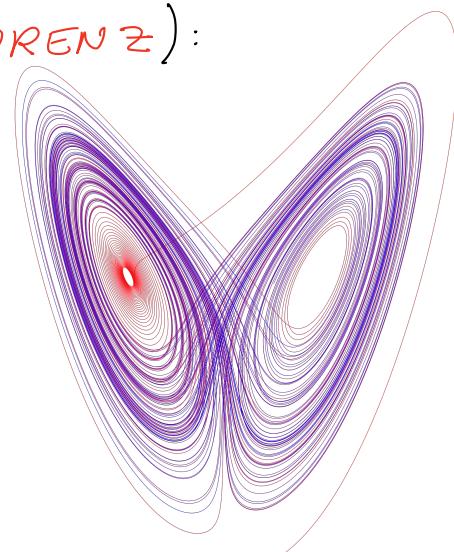


CAOS DETERMINISTICO

Nel 1963 Lorenz studiò un esempio di sistema deterministico caotico che venne poi applicato alla METEOROLOGIA (ATTRATTORE DI LORENZ):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - xz - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

con $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$, ρ parametro



Alla scoperta di Lorenz va attribuito il cosiddetto **EFFETTO FARFALLA**. Nel 1963 Smale definisce le proprietà topologiche dei sistemi caotici:

1) **FORTE SENSIBILITÀ ALLE CONDIZIONI INIZIALI:**

Variazioni infinitesime dei dati iniziali causano cambiamenti significativi nella dinamica del sistema

2) **POSSIBILI ORBITE NON PERIODICHE:**

Le orbite hanno probabilità non nulla di mostrare comportamenti non periodici nel lungo termine.

Tuttavia, un sottinsieme delle traiettorie può mostrare periodicità.

Def. (Sistema Caotico):

Un **SISTEMA** si dice **CAOTICO** se le orbite sono **NON PERIODICHE**, **LIMITATE**, soluzioni vicine tendono a divergere tra loro nel tempo e lo spazio delle fasi è **DENSO** di orbite.

Il grado di caoticità di un sistema viene in genere misurato dal **MASSIMO ESPONENTE DI LYAPUNOV (MLE)**

Def. (MLE-Discreto, Tempo di Lyapunov):

Il **MLE - DISCRETO** di una mappa discreta $x_{k+1} = f(x_k)$ differenziale è definito come:

$$\lambda_L = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_{s=1}^{K-1} \log |f'(x_s)|$$

Il MLE misura la discrepanza tra traiettorie vicine del sistema. Se $\lambda_L > 0$, si definisce il **TEMPO DI LYAPUNOV** del sistema come:

$$T_L = \frac{1}{\lambda_L}$$

Il tempo T_L fornisce l'**ORIZZONTE DI PREDICIBILITÀ** del sistema (es.: per i sistemi atmosferici e meteorologici si ha $T_L \sim \mathcal{O}(\text{giorni})$, per i sistemi planetari si ha invece $T_L \sim \mathcal{O}(\text{milioni di anni})$)

N.B.

Tali concetti/definizioni/proprietà si estendono naturalmente al caso di sistemi continui.

Proposizione:

Esistono sistemi caotici descritti da equazioni di tipo ODE di dim. < 3 (**N.B.** ciò è falso in generale, basta pensare ai sistemi descritti da DDE o PDE)
