DINAMICHE DI POPOLAZIONE (SINGOLA SPECIE)

Quale modello matematico si può utilizzare per descrivere la crescita nel tempo di una popolazione di individui? Vogliamo quantificare la variazione di individui nel tempo. Siano:

1) $N(t) :=$ numero di individui al tempo t

2) $\frac{dN(t)}{dt} :=$ tasso di nascita $-$ tasso di decessi
bN dN
$\overset{!}{=} (b-d)N$

(in un sistema chiuso: pianeta Terra)

$\Rightarrow$ La dinamica è determinata da $r := b - d$, quindi:

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = rN, \quad r \in \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow$ si hanno 2 casi:

$r > 0 \Rightarrow$ crescita esponenziale

$r < 0 \Rightarrow$ decrescita esponenziale

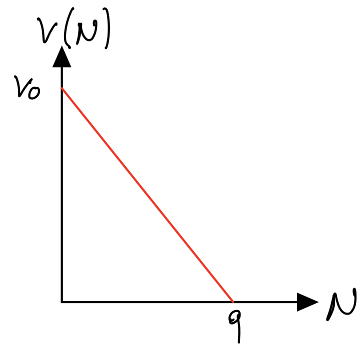
Tale modello è detto Modello Malthusiano e prevede una crescita/decrescita non controllata con tasso costante. È chiaramente una semplificazione eccessiva in diversi contesti. È più realistico considerare un tasso dipendente da N, t:

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = N \cdot r(t, N)}$$

Modello logistico (Verhulst - 1789):

Considera un tasso dipendente dalla dimensione della popolazione:

$$\boxed{v(N) = v_0\left(1 - \frac{N}{q}\right), \quad q > 0} \Rightarrow$$

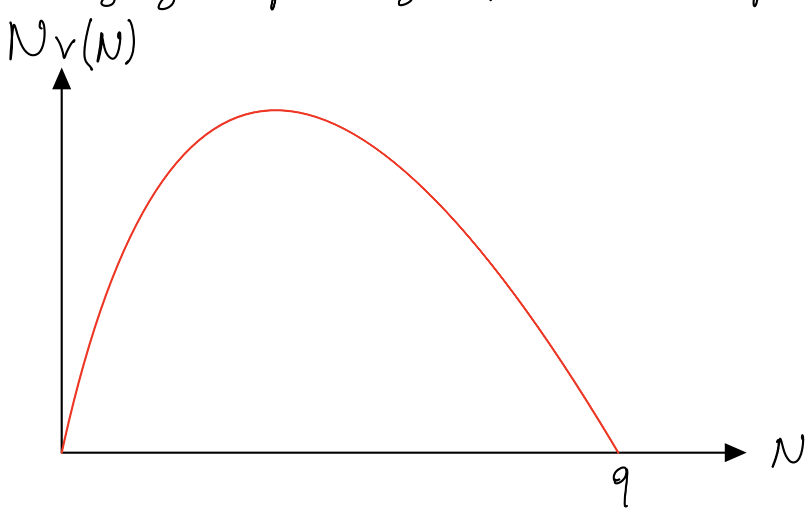


Il modello è ($v_0 \equiv v \in \mathbb{R}^{\geq 0}$):

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt} = v \cdot N \cdot \left(1 - \dfrac{N}{q}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}}$$

con:

1) $v :=$ tasso di crescita di N $[t]^{-1}$
2) $N :=$ numero di individui $[N]$
3) $q :=$ carrying capacity (risorse disponibili) $[N]$



$\Rightarrow$ la soluzione analitica del modello è:

$$\boxed{N(t) = \frac{N_0 \cdot q \cdot e^{vt}}{q + N_0 \cdot (e^{vt} - 1)}}$$

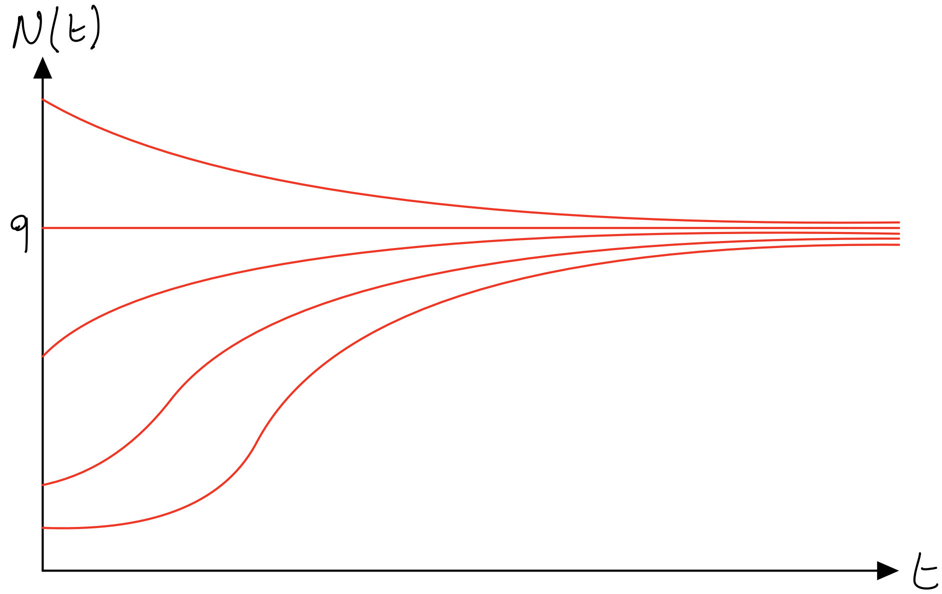
Equilibri:

Gli equilibri sono $N_1^* = 0$ (banale) ed $N_2^* = q$ (gli individui corrispondono alle risorse disponibili)

Stabilitá:

1) N_1^* é instabile $(\dot{N} < 0)$
2) N_2^* é stabile $(\dot{N} > 0)$

Grafico:



Oss.:

Il modello logistico é estremamente flessibile per il fitting dei dati.

Come possiamo ridurre lo spazio dei parametri?

La dimensionalitá del modello é data da:

$$\frac{[N]}{[t]} = \frac{\text{individui}}{\text{tempo}}$$

$\Rightarrow$ poniamo $x = \frac{N}{q}$ (a-dimensionalizzato), il modello diventa:

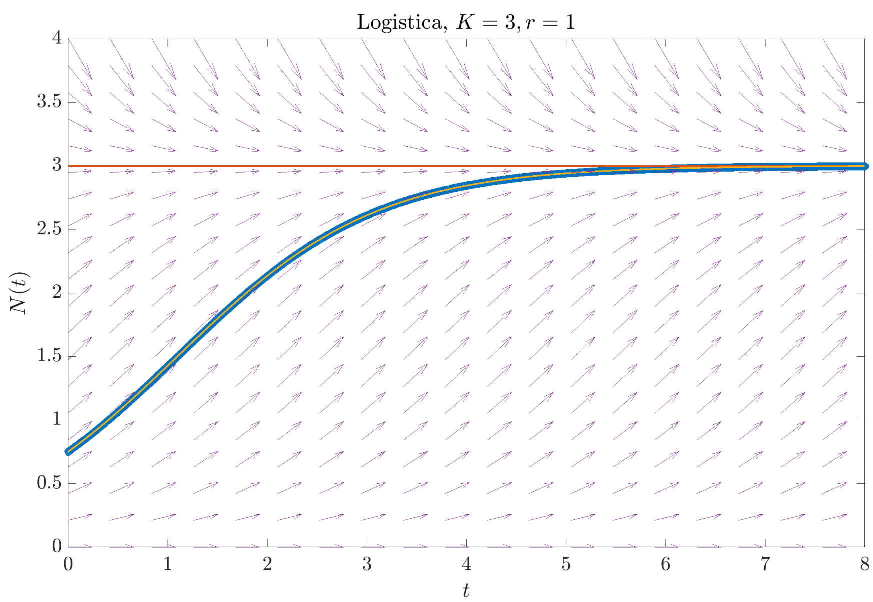
$$\frac{1}{q}\frac{dN}{dt} = \frac{rN}{q}\left(1-\frac{N}{q}\right) \longrightarrow \frac{dx}{dt} = r\cdot x\cdot(1-x)$$

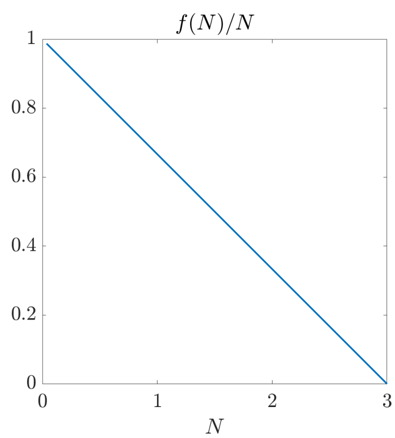
$\Rightarrow$ modifichiamo ora t: introduciamo la quantità $\tau = r\cdot t$ (a-dimensionalizzata). Si ha quindi:

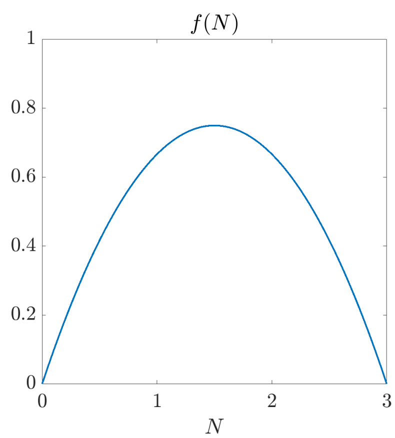
$$\frac{dx}{dt} = r\cdot x\cdot(1-x) \longrightarrow \frac{dx}{d\tau} = x(1-x)$$

$\Rightarrow$ il modello finale non ha parametri:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = x(1-x) \\ x(0) = \dfrac{N_0}{q} \end{cases}}$$







ADIMENSIONALIZZAZIONE

1) È rilevante perché riduce la complessità del modello
2) Le leggi fisiche/biologiche sono indipendenti dalle unità di misura.

Il Teorema Π di Bukingham formalizza quante possibili quantità a-dimensionali è possibile generare.
In generale le possibili a-dimensionalizzazioni sono molteplici

Procedura standard:

1) Identificare le variabili dipendenti ed indipendenti
2) Introdurre dei fattori di a-dimensionalizzazione (esempio: $x = \alpha N$, $\tau = \beta t$)
3) Sostituire nella relazione che lega le variabili e identificare i parametri con dimensione
4) Definire nuovi parametri a-dimensionali (esempio:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{q}\right) \Rightarrow N = \frac{x}{\alpha},\ t = \frac{\tau}{\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}\frac{dx}{d\tau} = r\frac{x}{\alpha}\left(1-\frac{x}{\alpha q}\right) \Rightarrow \frac{dx}{d\tau} = \frac{r}{\beta}x\left(1-\frac{x}{\alpha q}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{r}{q} := \text{a-dimensionale},\ \beta = r,\ \alpha = \frac{1}{q}\ )$$

esempio (Irradiazione Solare):

Consideriamo un sistema costituito dal Sole che irradia un ambiente contenente un animale. Si ha:

1) $\theta :=$ temperatura interna all'ambiente [deg]

2) $m :=$ massa dell'animale $[g]$

3) $c :=$ calore specifico dell'animale (energia necessaria a far aumentare di 1 deg 1g di massa) $\left[\frac{cal}{g \cdot deg}\right]$

4) $T :=$ temperatura esterna all'ambiente [deg]

5) $q :=$ radiazioni solari $\left[\frac{cal}{h}\right]$

6) $K :=$ coefficiente di trasferimento termico $\left[\frac{cal}{h \cdot deg}\right]$

7) $E :=$ energia dell'animale $[J]$

La legge é:

$$\boxed{\begin{aligned} E &= m \cdot c \cdot \theta \\ \frac{dE}{dt} &= f(\theta) = q - K(\theta - T) \end{aligned}}$$

Legge di raffreddamento di Newton

$\Rightarrow$ riscriviamo in funzione di θ:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{q}{mc} - \frac{K}{mc} \cdot (\theta - T)$$

$\Rightarrow$ poniamo $y = \frac{\theta}{\alpha}$, $t = \beta\tau$, si ha:

$$\frac{\beta\alpha \, dy}{d\tau} = \frac{q}{mc} - \frac{K}{mc} \cdot (\alpha y - T)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{q}{mc} \cdot \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right) - \frac{K}{mc} \cdot (\alpha y - T) \cdot \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)$$

$\Rightarrow$ poniamo quindi $\alpha = T$:

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{q}{Tmc} \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{K}{mc} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot (y - 1)$$

$\Rightarrow$ infine, poniamo $\beta = \frac{K}{mC}$, $Q = \frac{q}{TK}$ ed otteniamo:

$$\boxed{\frac{dy}{d\tau} = Q - (y-1) = Q + 1 - y}$$

Notiamo che il modello finale ha soltanto 1 parametro invece dei 5 parametri iniziali !!!

DINAMICA DI PREDAZIONE - SINGOLA SPECIE

Consideriamo il seguente modello:

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{r(N) \cdot N}_{\text{crescita della popolazione}} - \underbrace{p(N)}_{\text{predazione}}$$

Nel 1950 Holling descrive la predazione su 2 fattori:

1) Aumentando le prede, aumenta il loro consumo da parte dei predatori
2) Aumentando le prede, aumenta la densità dei predatori

Inoltre, Holling distinse 2 diversi tempi di predazione:

$$T = T_s + T_K$$

Tempo totale della predazione (T)
Tempo di ricerca della preda (T_s)
Tempo di gestazione della preda (T_K)

Si ha inoltre:

1) $N :=$ densità di prede al metroquadro $\left[\frac{\text{unità}}{m^2}\right]$
2) $A_s :=$ area di ricerca dei predatori esplorata in 1 ora $\left[\frac{m^2}{h}\right]$

3) $P_s :=$ numero di prede trovate in T_s

4) $P_K :=$ numero di prede gestite in T_K

Il modello è:

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = r(N)\cdot N - p(N)}$$

Risposta funzionale

Caso 1):

Assumiamo T_K istantaneo:

$\Rightarrow$ si ha:

$$P_s = A_s \cdot T_s \cdot N$$

$$P_K = \alpha P_s = \alpha A_s T_s N \quad \text{con } \alpha \in (0,1) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad p(N) = \underbrace{\alpha A_s T_s}_{v} \cdot N = vN$$

$\Rightarrow$ è irrealistico dato che i predatori crescono senza limitazioni in maniera esponenziale.

Caso 2):

Assumiamo $T_K = \beta \cdot P_K$

$\Rightarrow$ Si ha:

$$T = T_s + T_K \quad \Rightarrow \quad T_s = T - T_K$$

Introduco in $(*)$ questa relazione:

$$P_K = \alpha A_s (T - T_K) N = \alpha A_s (T - \beta P_K) N$$

risolvendo per P_K si ottiene:

$$\boxed{P_K = \frac{vN}{1 + \beta v N}}$$

Quindi i predatori saturano al valore $\frac{1}{\beta}$.

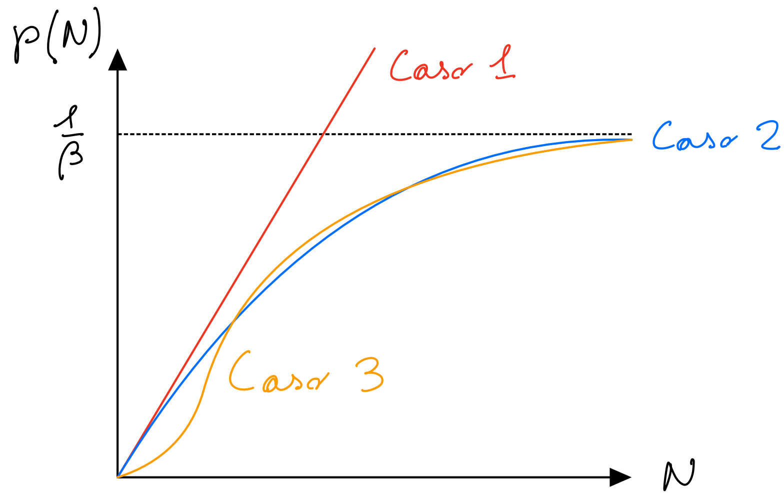
Caso 3)

Assumiamo $v = v(N) = \gamma \cdot N$

$\Rightarrow$ Si ha:

$$\boxed{p_K = \frac{\gamma N^2}{1+\beta\gamma N^2}}$$

Quindi i predatori saturano al valore $\frac{1}{\beta}$



<u>esempio</u>:

$$\frac{dN}{dt} = vN\left(1-\frac{N}{q}\right) - \gamma N$$

$\Rightarrow$ ponendo $x = \frac{N}{q}$, $\tau = \frac{t}{v}$ si ha:

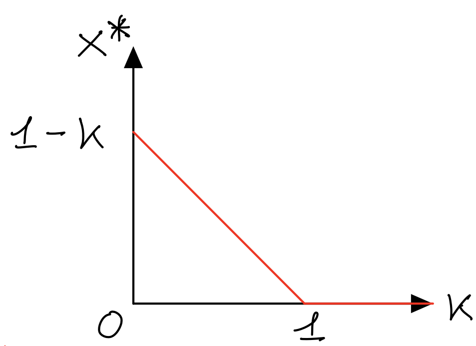
$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x) - \frac{\gamma}{v}x = x(1-x) - Kx \quad \text{con } K = \frac{\gamma}{v}$$

$\Rightarrow$ si ha quindi:

$$\boxed{\frac{dx}{d\tau} = x(1-K-x)}$$

<u>equilibri</u>:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^* = 0,\ x_2^* = 1-K \\ (x_2 \text{ ha senso solo se } K<1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$



INFESTAZIONE DA LARVE DA PINO

[Ludwig - 1978]:

propone un modello per l'evoluzione dell'infestazione dalla larva da pino in presenza di una popolazione di uccelli predatori

$$\frac{dN}{dt} = r_b N \left(1 - \frac{N}{K_b}\right) - p(N)$$

dove $p(N)$ é la risposta funzionale di TIPO 3:

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2} \qquad A, B > 0$$

$[N]$ = individui, $[r_b] = h^{-1}$

$[A] = [K_b] = [N]$, $[B] = \frac{\text{individui}}{h}$

Dove A é la misura di soglia rispetto alla quale si attiva la predazione e B é il tasso di predazione.

A-dimensionalizzazione:

$$u = \frac{N}{A}, \quad \tau = \frac{B}{A} t, \quad r = \frac{A r_b}{B}, \quad q = \frac{K_b}{A}$$

$\Rightarrow$ si ha:

$$\boxed{\frac{du}{d\tau} = ru\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2} \qquad r, q > 0}$$

equilibri:

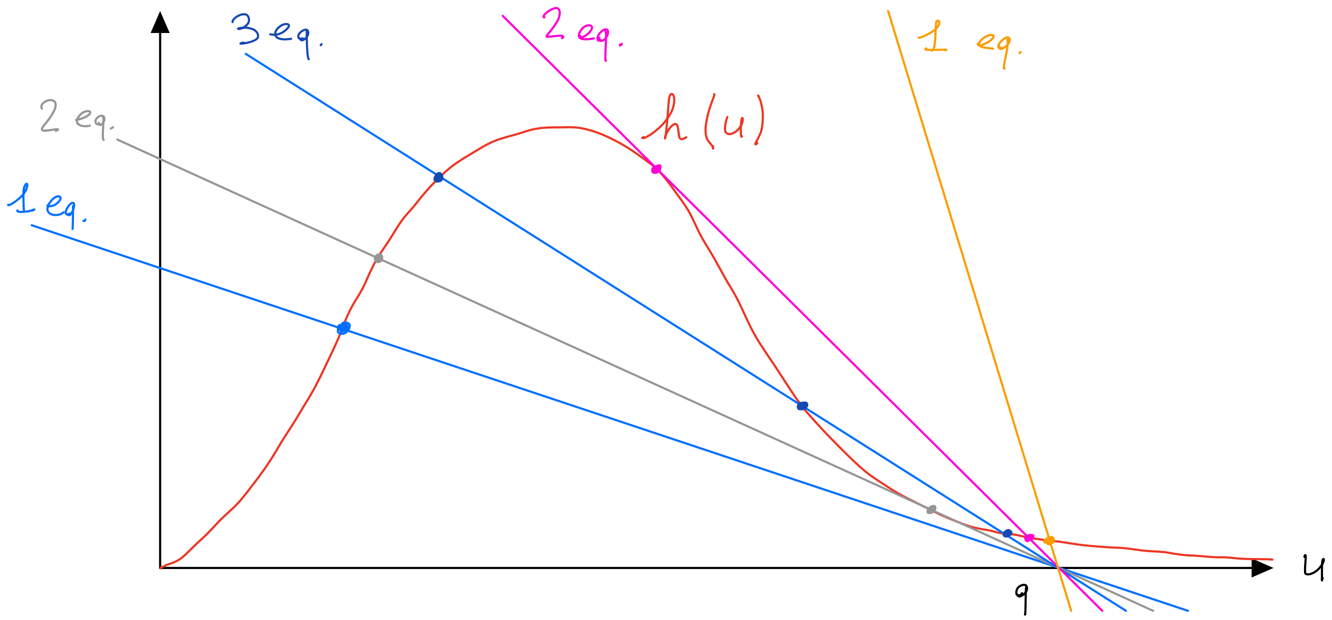
$$\frac{du}{d\tau} = f(u, r, q)$$

$$\Rightarrow f(u, r, q) = u\left(r\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u}{1+u^2} \right)$$

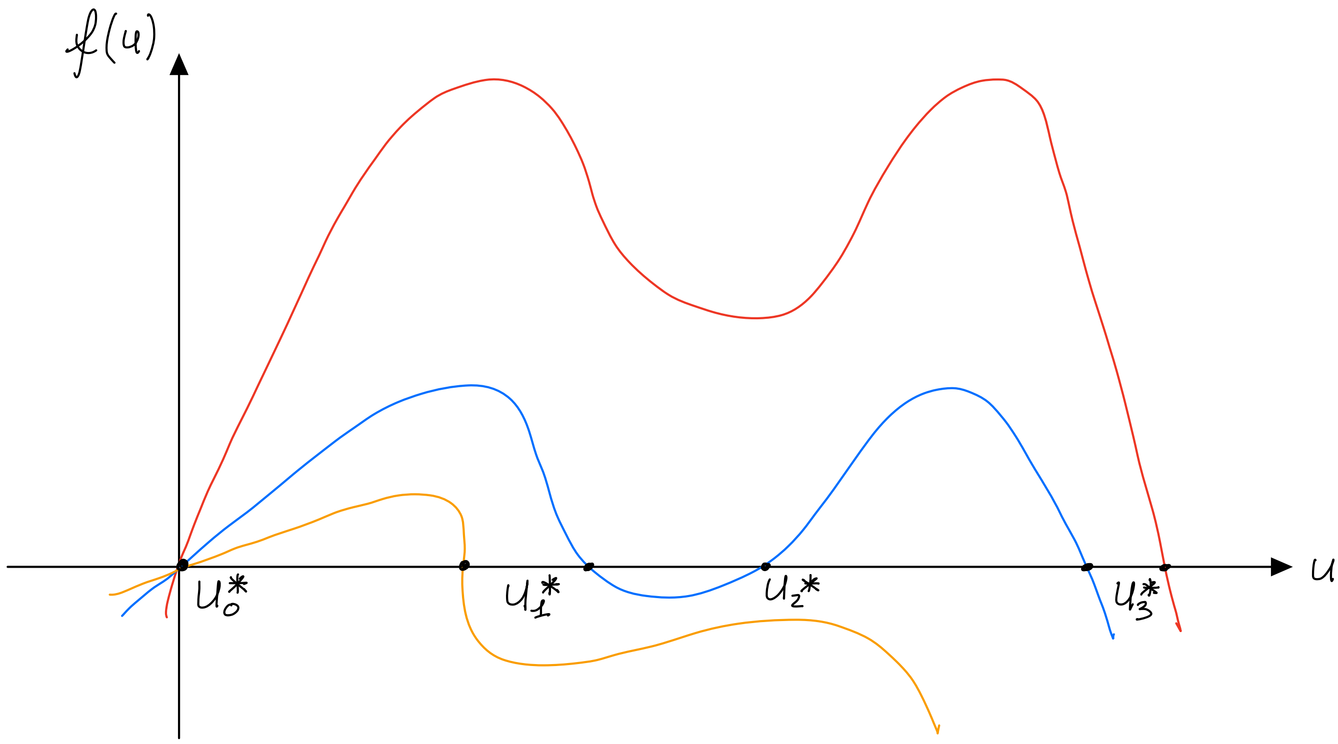
$$\stackrel{!}{=} u\left(g(u) - h(u) \right)$$

$\Rightarrow$ equilibrio banale $u_0^* = 0$

Altri equilibri sono determinati dall'equazione $g(u) = h(u)$



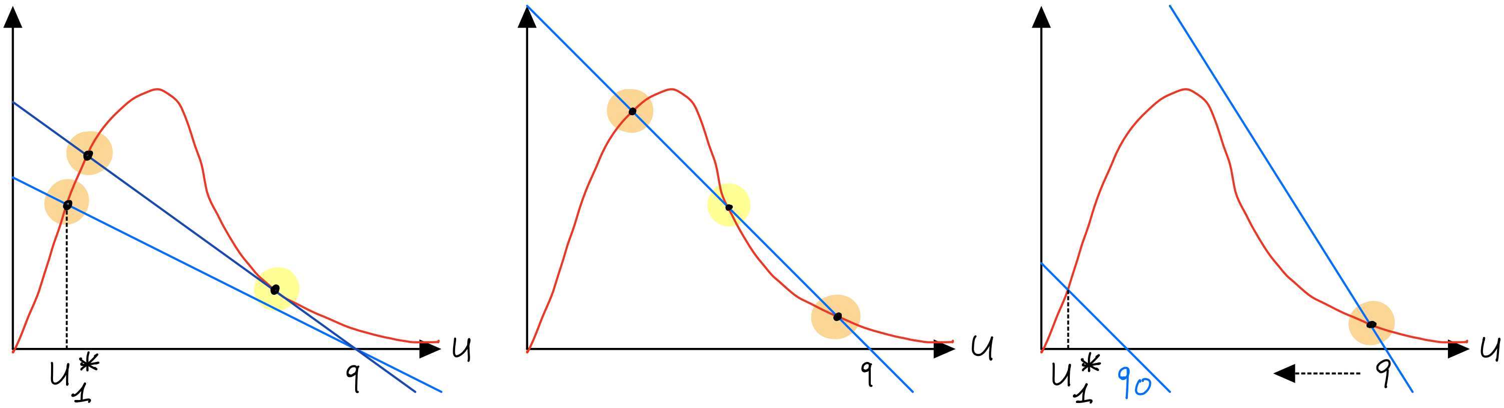
$\Rightarrow$ si hanno da 1 a 4 equilibri:



Caso 4 equilibri:

$\frac{\partial f}{\partial u} > 0$ se $u = u_0^* \vee u = u_2^*$ INSTABILI

$\frac{\partial f}{\partial u} < 0$ se $u = u_1^* \vee u = u_3^*$ STABILI



RIFUGIO CRESCITA INFESTAZIONE

⇒ Per determinare i punti di biforcazione della dinamica identifichiamo il luogo di punti di tangenza tra $g(u)$ e $h(u)$:

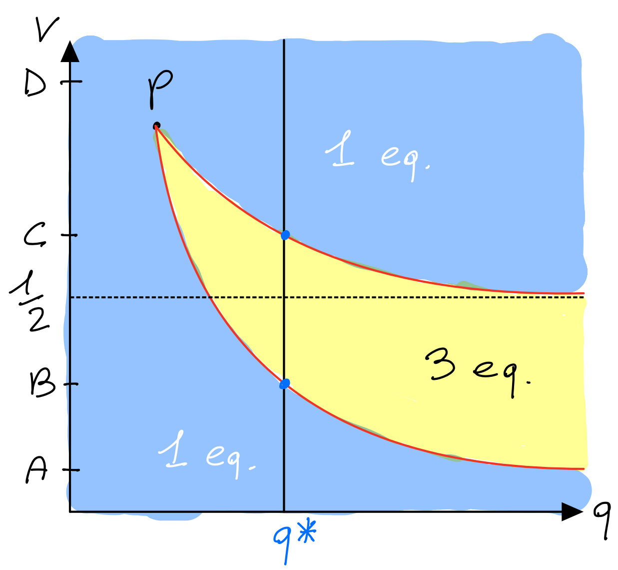
$$\frac{\partial g(u)}{\partial u} = \frac{\partial h(u)}{\partial u}$$

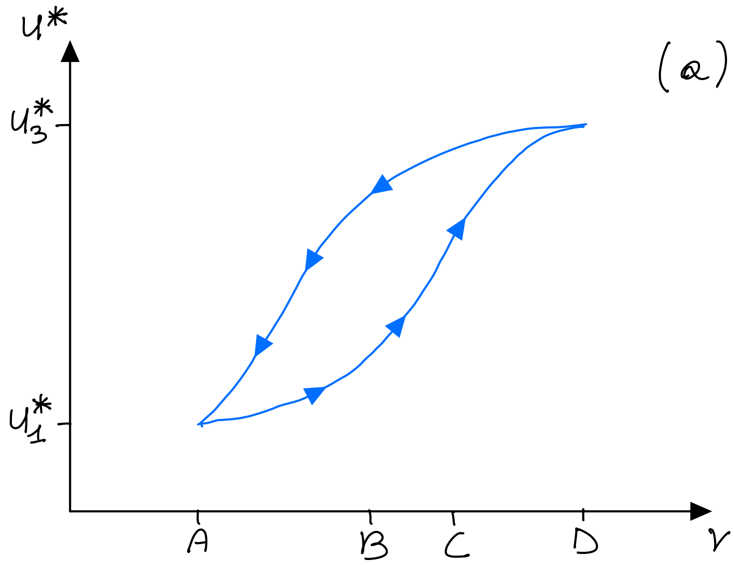
⇒ In particolare:

$$-\frac{r}{q} = \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} \qquad (u \geq 0) \qquad (**)$$

Possiamo utilizzare la relazione $g(u) - h(u) = 0$ per riparametrizzare la relazione $(**)$:

$$\begin{cases} r(u) = \dfrac{2u^3}{(1+u^2)^2} \\ q(u) = \dfrac{2u^3}{u^2-1} \end{cases}$$

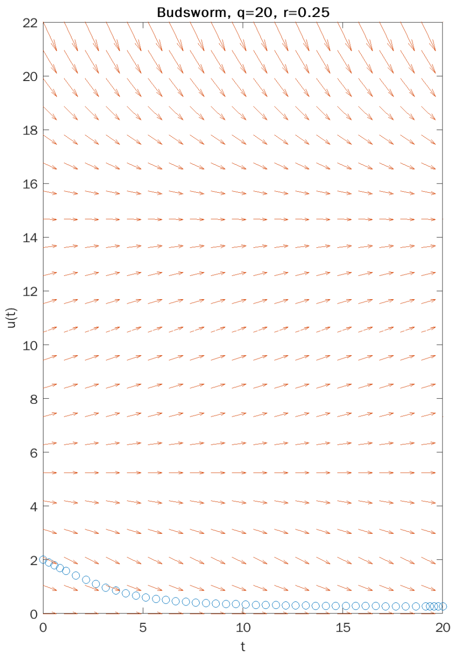


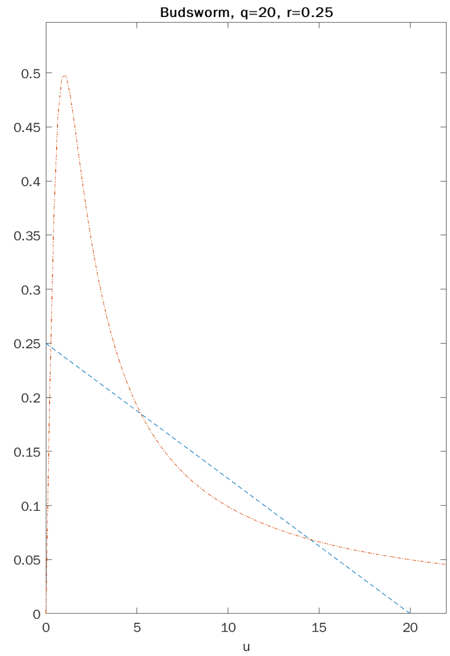


⇒ Il tipo di dinamica in funzione dei parametri in (a) è un esempio di ISTERESI

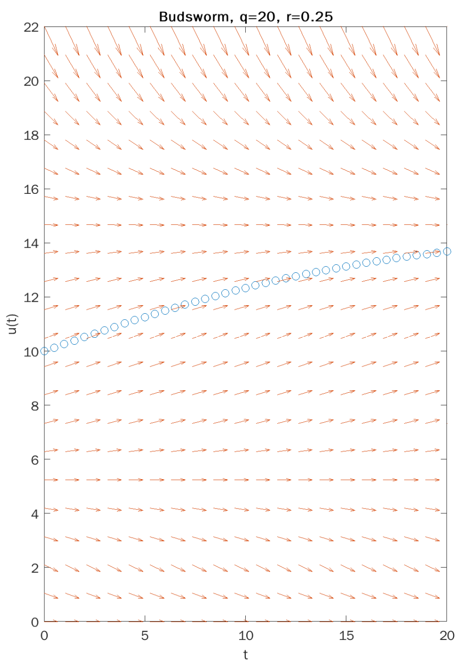
N.B.
Le invasioni da larva da pino hanno una CICLICITÀ di circa 4 anni e parti di foreste vengono distrutte completamente ($q \to 0$). Il processo di riforestazione è dell'ordine dei secoli.

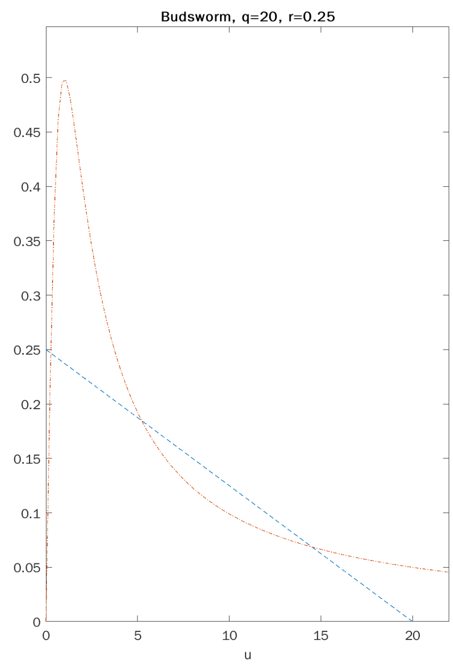
$u(0) = 2$



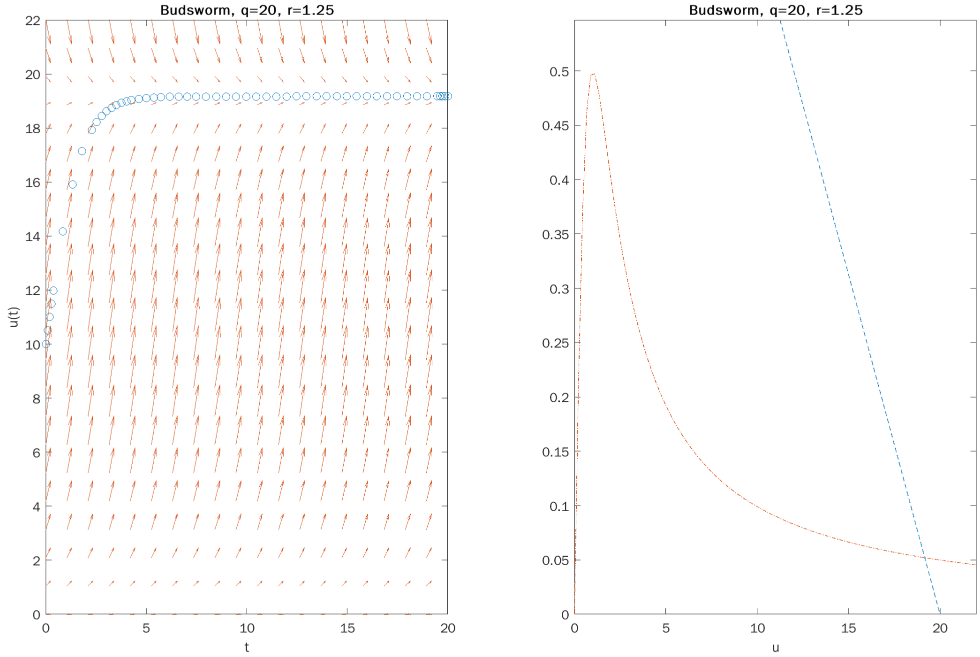


$u(0) = 10$



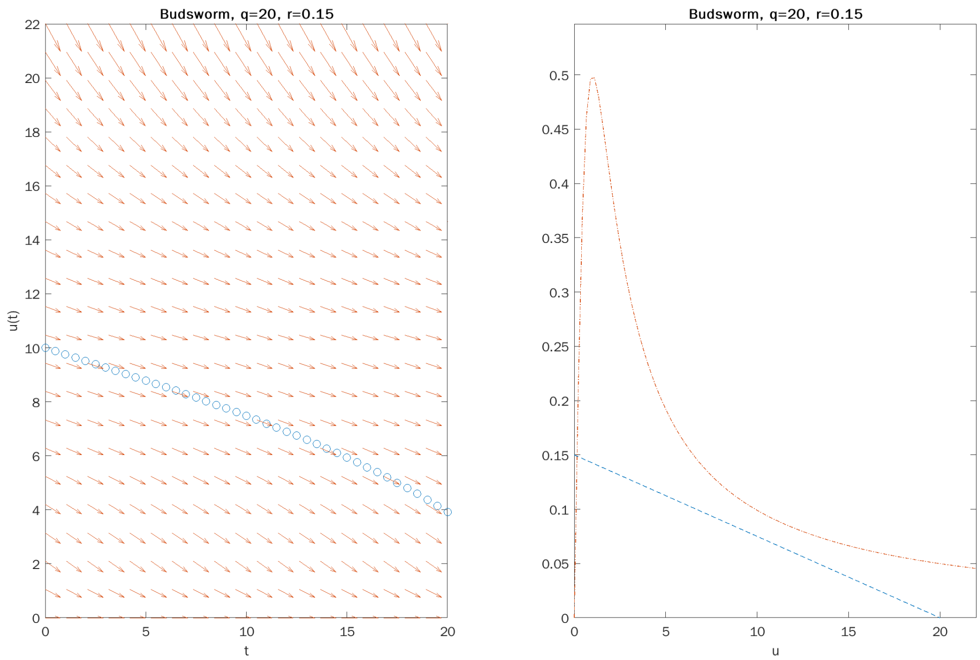


$u(0) = 10$



Budsworm, q=20, r=1.25
u(t)
t
Budsworm, q=20, r=1.25
u

$u(0) = 10$



Budsworm, q=20, r=0.15
u(t)
t
Budsworm, q=20, r=0.15
u