Classificazione dei Sistemi Lineari 2×2 diagonalizzabili:

Dato $\dot{z} = Az$, $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{R}^2$ con A diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, si ha che $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sono gli autovalori di A

$\Rightarrow$ osserviamo che $\bar{z} = \vec{0}$ è SEMPRE un equilibrio

Classifichiamo ora il comportamento del sistema in base a λ_1, λ_2:

1) λ_1, λ_2 complessi coniugati:

$\Rightarrow \lambda_2 = \overline{\lambda_1} \quad \Rightarrow \lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta. \quad (\beta \neq 0)$

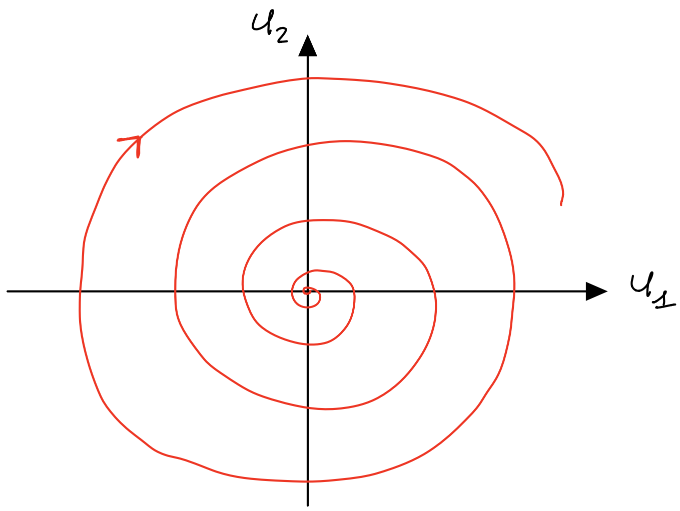
$\Rightarrow$ le orbite dipendono da $\mathrm{sgn}(\alpha) = \mathrm{sgn}(\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}))$

$\Rightarrow$ Se $\alpha > 0$:

Le orbite sono spirali uscenti dall'origine:

$\Rightarrow \bar{z} = \vec{0}$ è detto

FUOCO INSTABILE

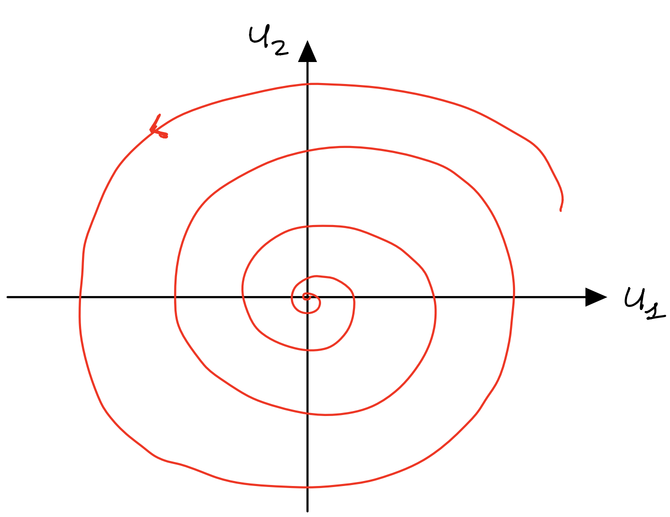


$\Rightarrow$ Se $\alpha < 0$:

Le orbite sono spirali entranti nell'origine:

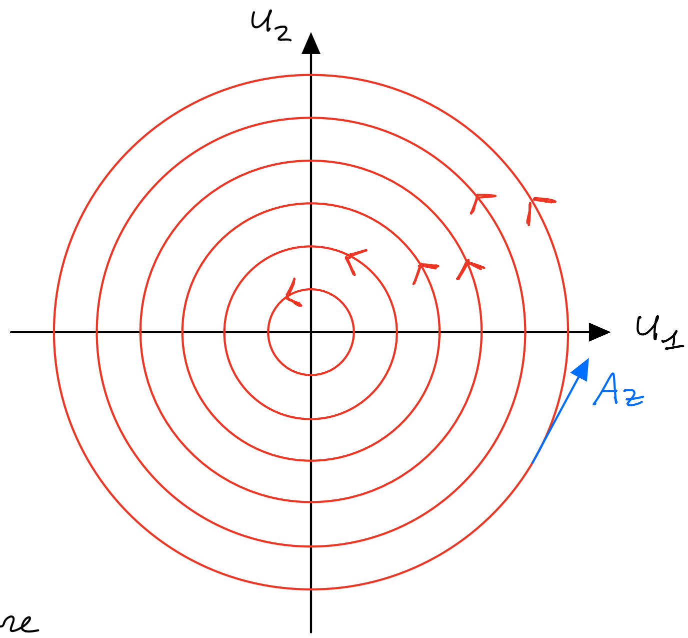
$\Rightarrow \bar{z} = \vec{0}$ è detto

FUOCO STABILE



$\Rightarrow$ Se $\alpha = 0$:

Le orbite sono circonferenze concentriche con centro nell'origine



$\Rightarrow \bar{z} = \vec{0}$ è detto CENTRO, per dedurre il verso di percorrenza delle orbite basta calcolare il valore del campo Az con $z \neq \vec{0}$

2) λ_1, λ_2 reali distinti non nulli

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ assumiamo WLOG $\lambda_1 < \lambda_2$

Si ha:

$$\dot{z} = Az \quad \text{con} \quad A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)\,P^{-1},$$
$$P = (u_1 \;\; u_2) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ effettuiamo il seguente cambio di variabile

$$z = Py \quad (\Leftrightarrow \; y = P^{-1}z)$$

$$\Rightarrow \dot{z} = P\dot{y} = A \cdot Py \Rightarrow \dot{y} = P^{-1}APy = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)\,y$$

che è un sistema diagonale!

$$\begin{cases} y_1 = y_1(0) \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \\ y_2 = y_2(0) \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \end{cases} \quad \text{soluzioni di } \dot{y} = P^{-1}APy$$

$\Rightarrow$ Se $y_1(0), y_2(0) \neq 0$, possiamo eliminare t dal sistema e ottenere un'equazione cartesiana per y_1, y_2:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \dfrac{y_1}{y_1(0)} \\[2mm] e^{\lambda_2 t} = \dfrac{y_2}{y_2(0)} \end{cases} \iff \begin{cases} e^{t} = \left(\dfrac{y_1}{y_1(0)}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \\[2mm] e^{t} = \left(\dfrac{y_2}{y_2(0)}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}} \end{cases}$$

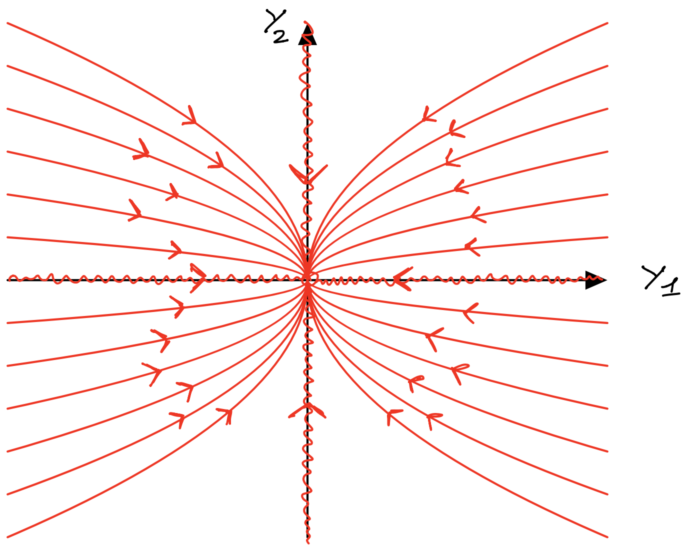
$\Rightarrow y_2 = C\,|y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \Rightarrow$ dato che $\lambda_2 > \lambda_1$ si hanno 3 casi a seconda di $\mathrm{sgn}(\lambda_1), \mathrm{sgn}(\lambda_2)$:

1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$:

$\Rightarrow 0 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$

Le orbite del sistema sono (a meno di trasf. affini) parabole tangenti in $\vec{O}$ a y_2 ed entranti nell'origine.

$\Rightarrow \bar{z} = \vec{O}$ è NODO STABILE

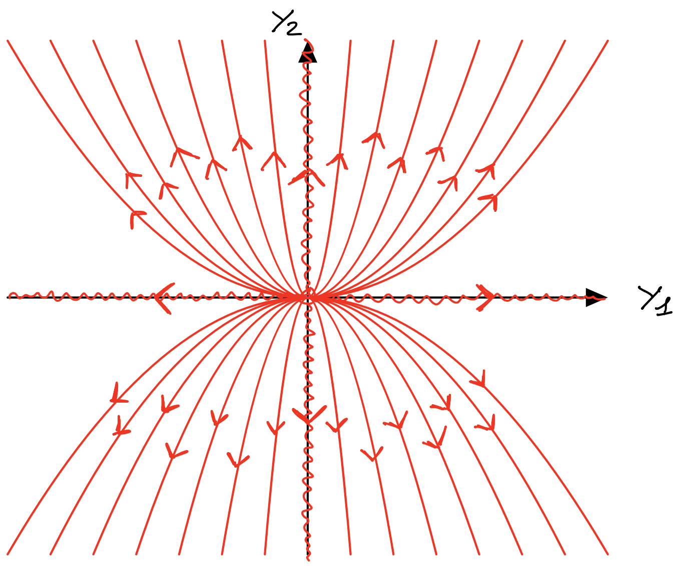


2) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$:

$\Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$

Le orbite del sistema sono (a meno di trasf. affini) parabole tangenti in $\vec{O}$ a y_1 ed uscenti dall'origine

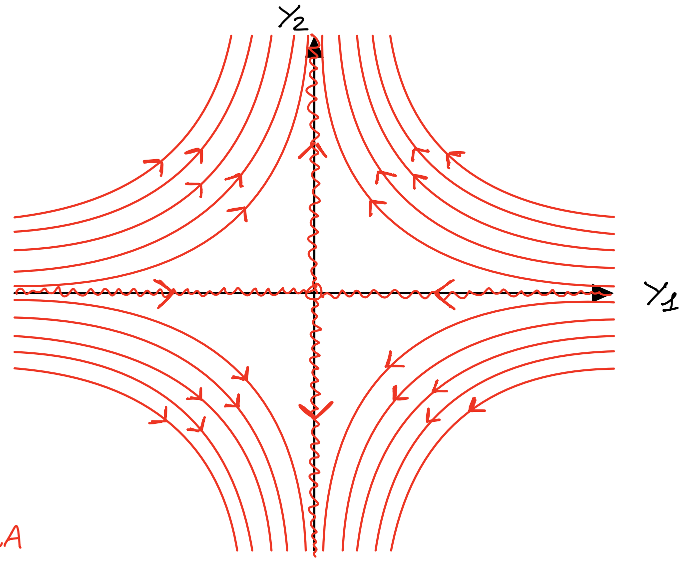
$\Rightarrow \bar{z} = \vec{O}$ è NODO INSTABILE



3) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$:

$\Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$

Le orbite del sistema sono (a meno di trasf. affini) iperboli "tangenti" all' infinito ai 2 autospazi Y_1, Y_2



$\Rightarrow \bar{z} = \vec{0}$ è PUNTO DI SELLA

$\Rightarrow$ Nel caso in cui $(0,0)$ sia un NODO (stabile / instabile) le orbite sono tangenti nell' origine all' autospazio associato all' autovalore minore in modulo.

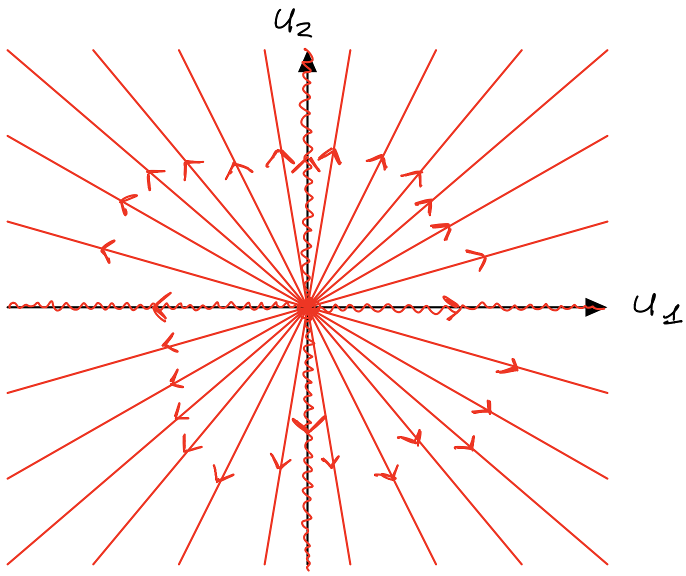
N.B.
Le orbite NON INTERSECANO MAI l' origine.

3) $\lambda_1 = \lambda_2$ reali coincidenti :

$\Rightarrow A = \lambda_1 Id_2 + \lambda_2 Id$

1) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$:

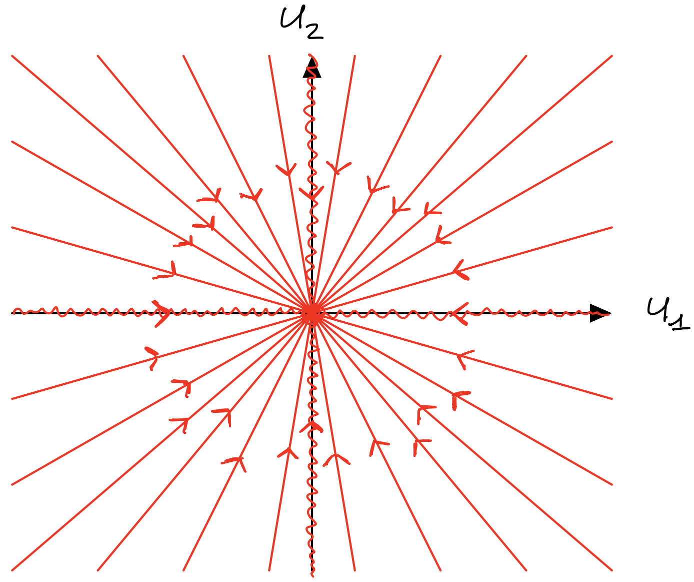
Le orbite del sistema sono (a meno di trasf. affini) semirette uscenti dall' origine



$\Rightarrow \bar{z} = \vec{0}$ è NODO A STELLA INSTABILE

2) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$:

Le orbite del sistema sono (a meno di trasf. affini) semirette entranti nell' origine



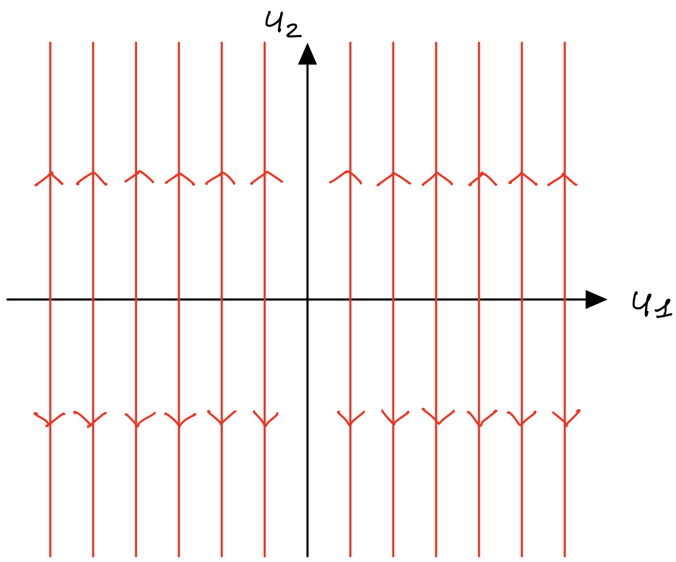
$\Rightarrow$ $\bar{z} = \vec{0}$ è NODO A STELLA STABILE

4) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow A = \vec{0} \Rightarrow$ tutti i punti sono equilibri

5) $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$:

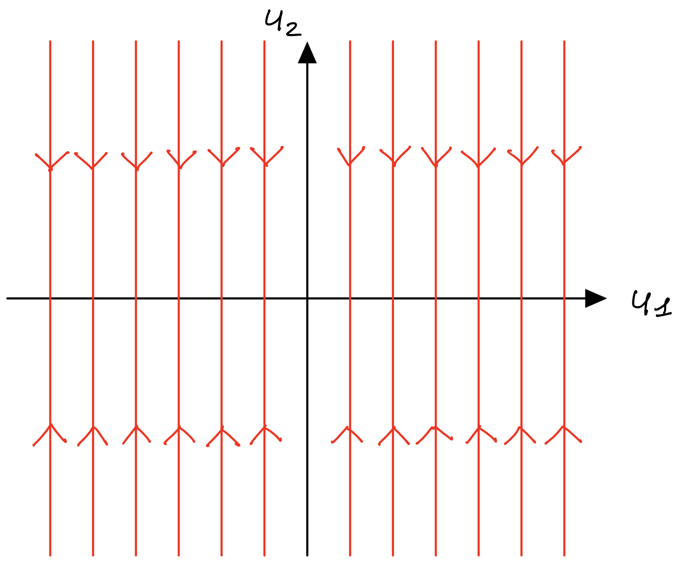
$\Rightarrow$ A non è invertibile e tutti i punti di Ker A sono equilibri. Si hanno 2 casi:

1) $\lambda_2 > 0$:



$\bar{z} = \vec{0}$ è NODO A PETTINE INSTABILE

1) $\lambda_2 < 0$:



$\bar{z} = \vec{0}$ è NODO A PETTINE STABILE

Complessivamente, quindi, si ha:

$$\dot{z} = Az \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ DIAGONALIZZABILE}$$

$\Rightarrow A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ e si distinguono i seguenti casi:

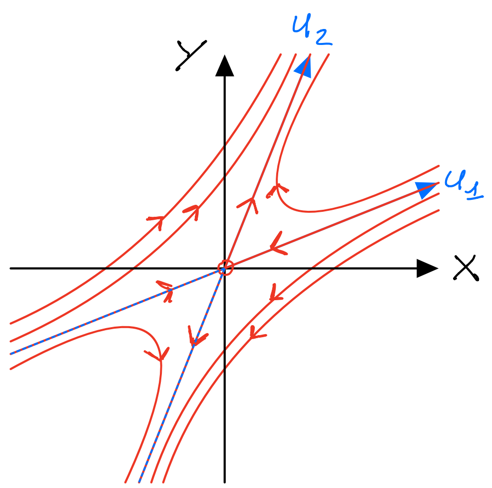
$$\begin{matrix} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \Rightarrow \bar{z} = \vec{0} \text{ FUOCO INSTABILE} \\ \alpha = 0 \Rightarrow \bar{z} = \vec{0} \text{ CENTRO} \\ \alpha < 0 \Rightarrow \bar{z} = \vec{0} \text{ FUOCO STABILE} \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} \neq 0 \wedge \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \Rightarrow \bar{z} = \vec{0} \text{ NODO STABILE} \\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Rightarrow \bar{z} = \vec{0} \text{ PUNTO DI SELLA} \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \bar{z} = \vec{0} \text{ NODO INSTABILE} \end{cases}$$

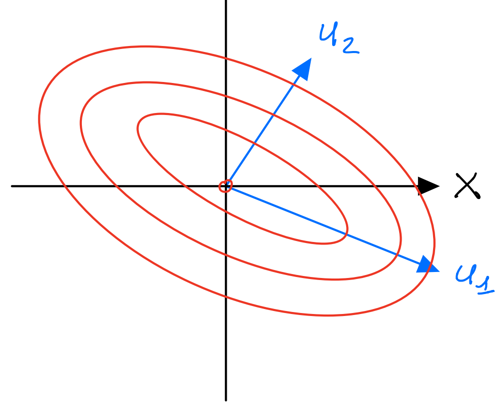
$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 > 0 \Rightarrow \bar{z} = \vec{0} & \text{NODO A STELLA INSTABILE} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow & \text{tutti i punti sono equilibri} \\ \lambda_1 = \lambda_2 < 0 \Rightarrow \bar{z} = \vec{0} & \text{NODO A STELLA STABILE} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 < 0 \Rightarrow \bar{z} = \vec{0} & \text{NODO A PETTINE STABILE} \\ \lambda_2 > 0 \Rightarrow \bar{z} = \vec{0} & \text{NODO A PETTINE INSTABILE} \end{cases}$$

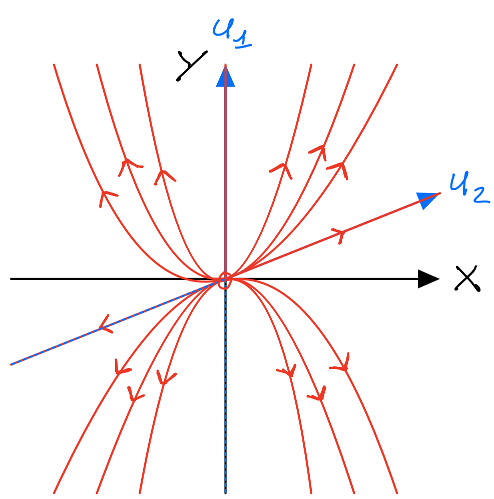
N.B. In tutti i casi, i grafici sono stati tracciati nella base di autovettori. Le orbite nella base canonica sono deformate per trasformazioni affini:



SELLA



CENTRO



NODO INSTABILE

---

esempi:

1)

$$\begin{cases} \dot{x} = 14x - 2y \\ \dot{y} = -2y + 11 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

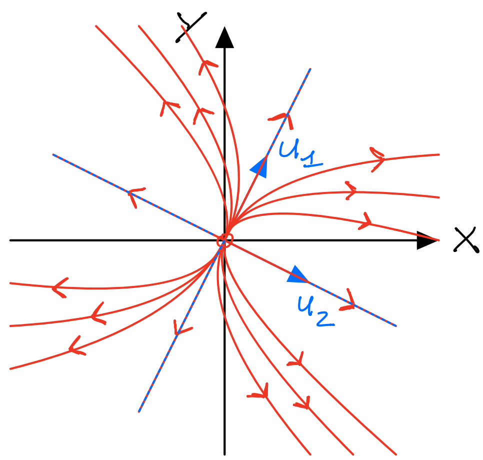
$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \lambda^2 - 25\lambda + 150$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 15, 10$$

$$\Rightarrow E_A(10) = Ker(A - 10 Id) = Ker \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow E_A(15) = Ker(A - 15 Id) = Ker \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow \bar{z} = (0,0)$ è NODO INSTABILE:



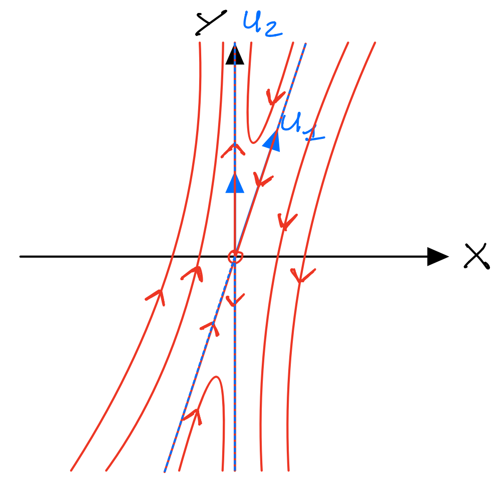
2)

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = -12x + 2y \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -12 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

$$\Rightarrow E_A(-2) = Ker(A + 2Id) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow E_A(2) = Ker(A - 2Id) = Ker \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ l'origine è un punto di sella:



3)

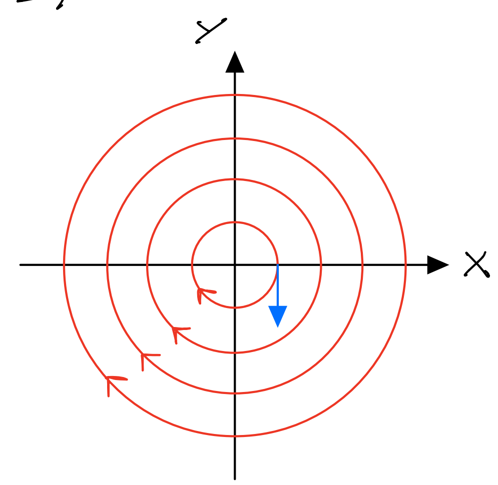
$$\ddot{x} + x = 0 \,, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v = \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \dot{v} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \ddot{x} = -x \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

$\Rightarrow \bar{z} = \vec{0}$ è CENTRO:

$$\Rightarrow A(1,0) = (0,-1)$$



4) Dato $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $|\varepsilon|$ "piccolo":

$$\begin{cases} \dot{x} = v + \varepsilon x \\ \dot{v} = -x + \varepsilon v \end{cases}$$

N.B.

Questo sistema NON È ASSOCIATO ad un'equazione del 2^o ordine.

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + 1$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \varepsilon \pm i$

$\Rightarrow$ se $\varepsilon > 0$, $\bar{z} = \vec{0}$ è FUOCO INSTABILE

$\Rightarrow$ se $\varepsilon < 0$, $\bar{z} = \vec{0}$ è FUOCO STABILE

$\Rightarrow$ se $\varepsilon = 0$, $\bar{z} = \vec{0}$ è CENTRO

Non importa quanto sia piccolo $|\varepsilon|$, le orbite (e le traiettorie) che erano limitate per $\varepsilon = 0$, non lo sono più quando si ha $\varepsilon \neq 0$. Inoltre l'equilibrio in $\bar{z} = \vec{0}$ diventa instabile (e repulsivo) per $\varepsilon > 0$.

<u>Un esempio di sistema NON DIAGONALIZZABILE:</u>

Sia, in $\mathbb{R}^2$, il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + by \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \quad \text{con } \lambda, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0.$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ NON DIAGONALIZZABILE}$$

(possiede solo l'autovalore λ di molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1)

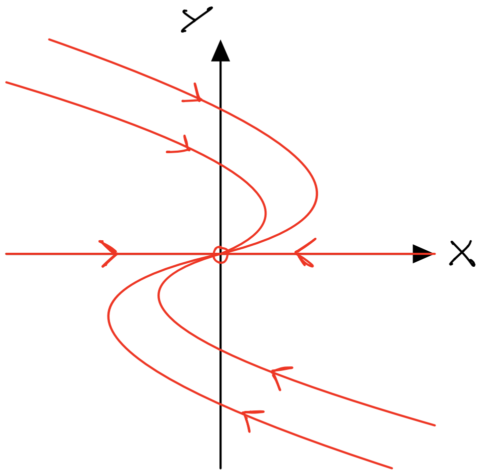
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda \Rightarrow E_A(\lambda) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ Soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + b y_0 e^{\lambda t} \\ \dot{y} = y_0 e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^{\lambda t}(x_0 + b y_0 t) \\ y = y_0 e^{\lambda t} \end{cases}$$

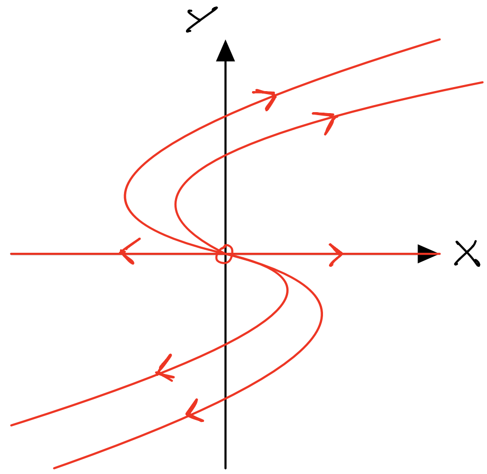
$$\Rightarrow \quad x = \frac{y}{y_0}\left(x_0 + b y_0 \log\left(\frac{y}{y_0}\right)\right)$$

$\Rightarrow$ per $b>0$ si ha:



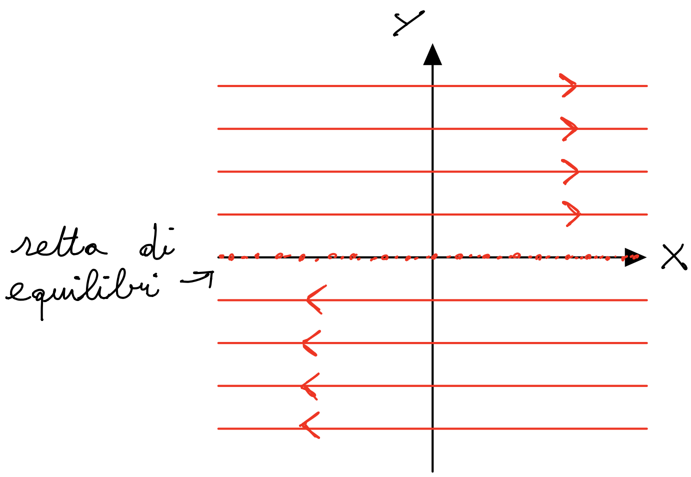
$\lambda < 0$

$\Rightarrow \quad \vec{z} = \vec{0}$ NODO IMPROPRIO STABILE



$\lambda > 0$

$\Rightarrow \quad \vec{z} = \vec{0}$ NODO IMPROPRIO INSTABILE



$\lambda = 0$