I modelli epidemiologici discreti considerano le popolazioni divise in compartimenti in funzione dello stadio in cui gli individui si trovano.

MODELLO S.I.R.:

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta I} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma} \boxed{R}$$

Si considerano i seguenti stadi:

1) $S(t)$: suscettibili (non ancora infettati)
2) $I(t)$: infetti
3) $R(t)$: rimossi (guariti / deceduti)

Inoltre si assume $N = S(t) + I(t) + R(t) = \text{COSTANTE}$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{S} = -\dfrac{\beta I S}{N} & , \; S(0) = S_0 \\ \dot{I} = \dfrac{\beta I S}{N} - \gamma I & , \; I(0) = N - S_0 , \\ \dot{R} = \gamma I & , \; R(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \beta > 0, \\ \gamma > 0 \end{matrix}}$$

(Inizio pandemia COVID-19: $I_0 \approx 200$, $S_0 \approx 60 \cdot 10^6$)

$\Rightarrow$ riscaliamo il modello in modo da avere le percentuali:

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{N}, \quad r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} s' = -\beta i s \\ i' = \beta i s - \gamma i \\ r' = \gamma i \end{cases}}$$

⇒ date le condizioni iniziali ci sarà un aumento degli infetti ?

$\Rightarrow s' = -\beta s i < 0 \Rightarrow s(t) < s_0$

$\Rightarrow i' = (\beta s - \gamma) i < (\beta s_0 - \gamma) i$

sia $s_0 \tau = s_0 \frac{\beta}{\gamma} =: R_0$, si ha:

1) $s_0 \tau < 1 \Rightarrow i(t) \leq i_0$

2) $s_0 \tau > 1 \Rightarrow$ epidemia (a febbraio 2020 in Italia, si aveva $\tau \propto R_0 \approx 6$!!!)

⇒ qual è il numero massimo di infetti ?

$$\frac{di}{ds} = \frac{\beta s i - \gamma i}{-\beta s i} = -1 + \frac{\gamma}{\beta}\frac{1}{s} = \frac{1}{\tau s} - 1$$

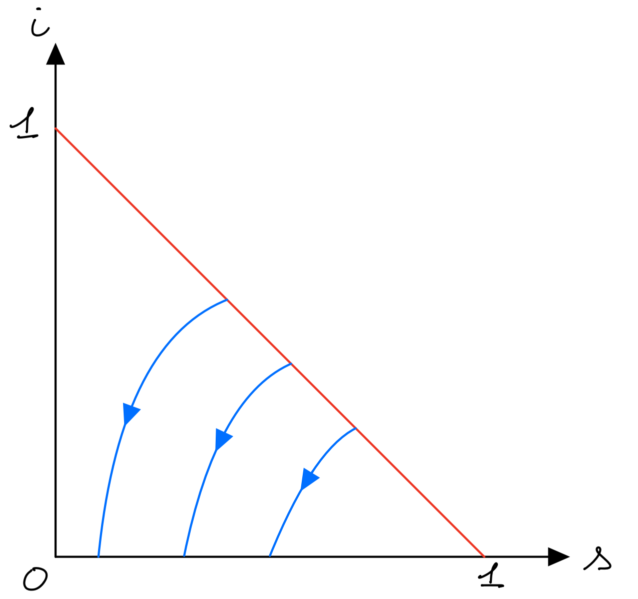
Integrando rispetto ad s ed i si ha:

$$\int di = \int \frac{1}{\tau s} - 1 \, ds$$

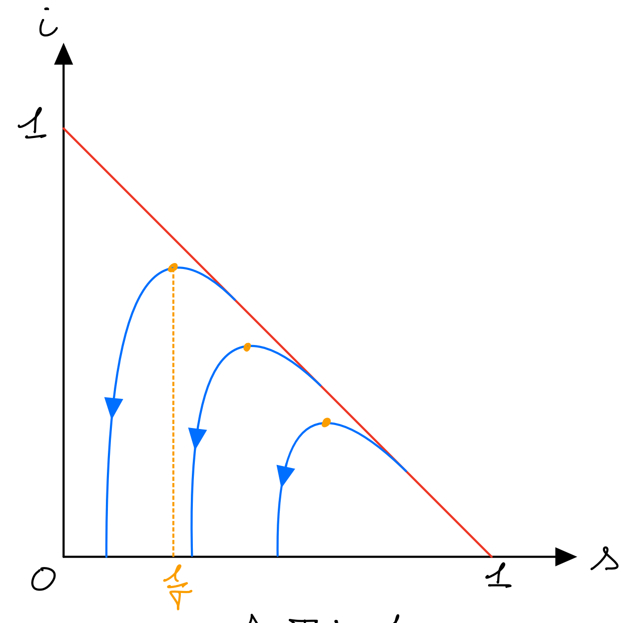
$$i(t) - i(0) = \frac{1}{\tau}\left(\log s - \log s_0\right) - s + s_0$$

quindi per il massimo degli infetti:

$$i(t) = i_0 + s_0 + \frac{1}{\tau}\left(\log s - \log s_0\right) - s$$



$s_0 \tau \leq 1$



$s_0 \tau > 1$

$$\frac{di}{ds} = 0 = \frac{1}{\tau s} - 1 \iff \frac{1}{\tau s} = 1 \iff s = \frac{1}{\tau}$$

$$i_{MAX} = i_0 - \frac{1}{\Gamma} \log\left(\frac{1}{\Gamma}\right) + \frac{1}{\Gamma} \log s_0 - \frac{1}{\Gamma} + s_0$$

$\Rightarrow$ quanti individui si ammaleranno in totale?

Sappiamo che $I \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 = i(+\infty)$

$v(+\infty) = 1 - s(+\infty) - i(+\infty) = 1 - s(+\infty)$

con $s(+\infty)$ dato dalla soluzione della seguente:

$$s(+\infty) - \frac{1}{\Gamma} \log(s(+\infty)) = 1 - \frac{1}{\Gamma} \log(s_0)$$

<u>Teorema</u> (di soglia per il Modello S.I.R.):

La soluzione del modello S.I.R. con dati iniziali $(S_0, I_0, 0)$ é t.c. $S_0 + I_0 = N$. Inoltre si ha:

1) $\Gamma = \frac{\beta}{\gamma} \leq 1$

   $I(t)$ é decrescente/crescente in t e $I \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

2) $\Gamma S_0 \leq 1 \wedge \Gamma > 1$: caso 1

3) $\Gamma S_0 > 1 \wedge \Gamma > 1$:

   $I(t)$ aumenta fino ad un massimo valore I_{MAX}, $S(t)$ decresce e converge a $S_{+\infty} \geq 0$ unica soluzione dell'equazione:

$$1 - S_{+\infty} + \frac{1}{\Gamma} \log\left(\frac{S_{+\infty}}{S_0}\right) = 0$$

<u>Osservazioni</u>:

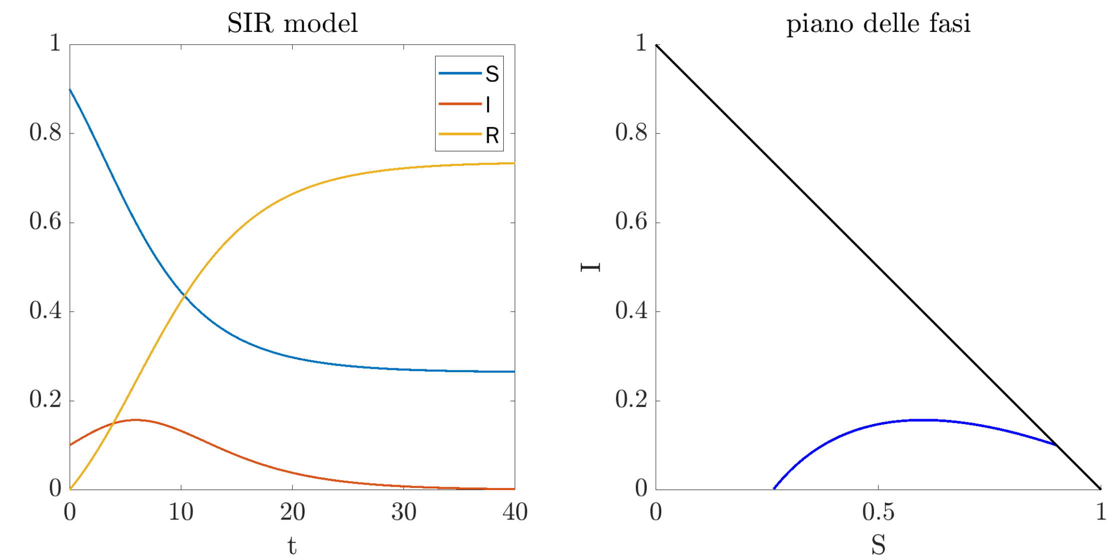
1) La condizione 2 non é quasi mai verificata in situazioni dove $s_0 \approx 1$

2) Il modello SIR é molto semplificato: il tasso β NON é in generale costante, bensí dipende da diversi fattori (etá, condizione sociale etc.)

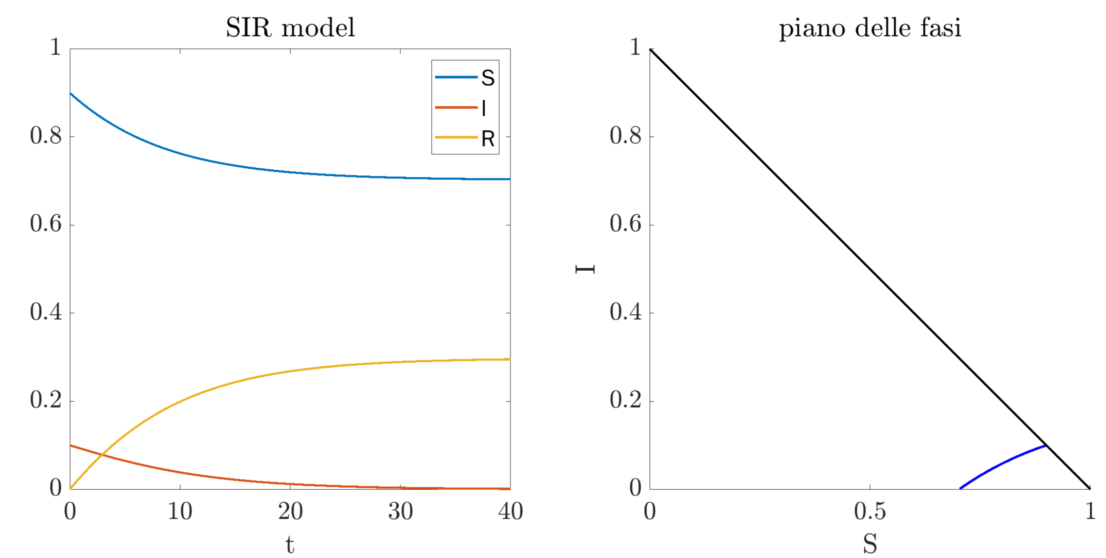
3) Il modello SIR è un modello omogeneo: NON considera la spazialità

4) Il modello SIR è un modello istantaneo: NON c'è nessun tipo di latenza o ritardo nell' infezione.

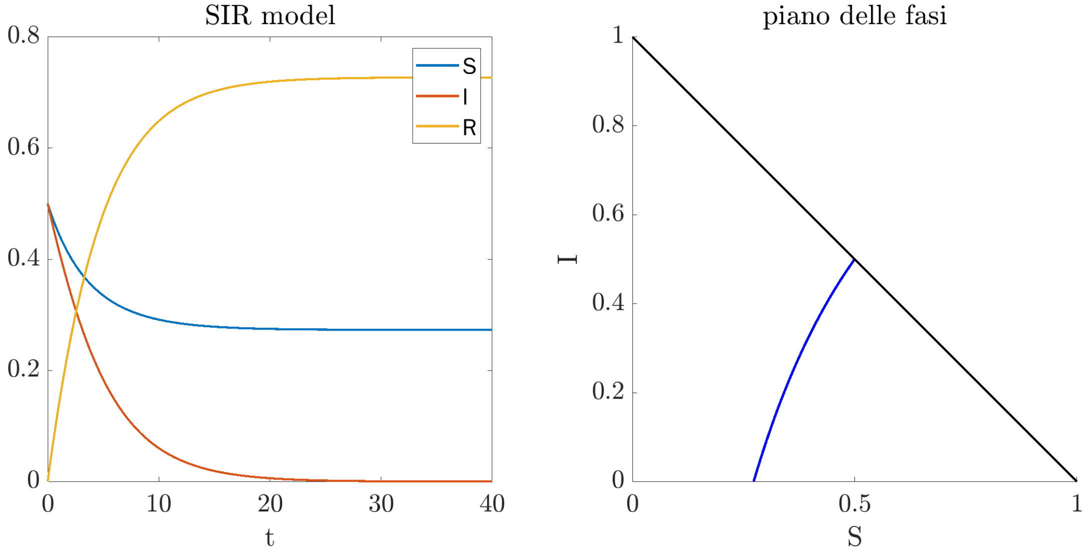
$\beta = 0.5$, $\gamma = 0.3$, $S_0 = 0.9$



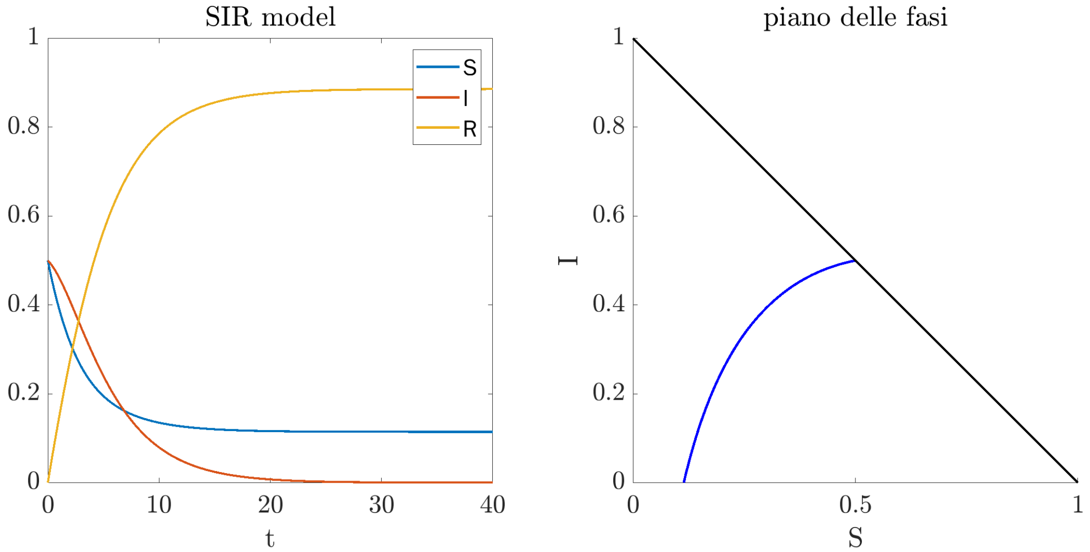
$\beta = 0.25$, $\gamma = 0.3$, $S_0 = 0.9$



$\beta = 0.25, \ \gamma = 0.3, \ S_0 = 0.5$



$\beta = 0.5, \ \gamma = 0.3, \ S_0 = 0.5$



Modello S. E. I. R.:

Viene introdotto il compartimento degli esposti $E(t)$

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$$

Il modello riscalato risulta:

$$
\boxed{\begin{cases} s' = -\beta s i \\ e' = \beta s i - \lambda e \\ i' = \lambda e - \gamma i \\ r' = \gamma i \end{cases}}
$$

con:

λ = periodo di latenza

$\frac{1}{\lambda}$ = numero di giorni durante i quali si è esposti.

$\frac{1}{\gamma}$ = numero di giorni durante i quali si è infetti

$\Rightarrow$ la diffusione della pandemia dipende ancora da $\tau = \frac{\beta}{\gamma}$!!!!

MODELLO S.I.R. ENDEMICO:

Consideriamo un fattore di mortalità per ogni singola classe. Assumiamo che in questo caso sia $\dot{N} = 0$.
Il modello NON riscalato è:

$$
\boxed{\begin{cases} \dot{S} = \mu N - \mu S - \beta \frac{IS}{N} \\ \dot{I} = \beta \frac{IS}{N} - \gamma I - \mu I \\ \dot{R} = \gamma I - \mu R \end{cases}}
$$

$\Rightarrow$ è lecito aspettarsi che $\tau \propto R_0$ dipenda da β, γ e μ.

RAPPORTO DI RIPRODUZIONE BASICO $R_0 \propto T$:

Introduciamo la funzione $F(t)$ (intesa come la probabilità che un nuovo infetto rimanga infetto per un tempo t) detta funzione sopravvivenza. Consideriamo inoltre $b(t)$: il numero medio di nuovi infetti che sono prodotti da un infetto per unità di tempo. Allora si ha:

$$\boxed{R_0 = \int_0^{+\infty} b(t)\, F(t)\, dt}$$

In generale vorremmo che R_0 fosse proporzionale alla seguente quantità:

$$R_0 \propto \text{trasmissibilità} \times \text{tasso di contatti} \times \text{durata infezione}$$

$$\left[\frac{\#\text{ infetti}}{\#\text{ contatti}}\right] \times \left[\frac{\#\text{ contatti}}{\text{tempo}}\right] \times \left[\frac{\text{tempo}}{\#\text{ infetti}}\right]$$

$\Rightarrow$ R_0 è ADIMENSIONALE !!!!

Calcolo di R_0 tramite matrici di prossima generazione:

Consideriamo un modello a N compartimenti di cui M sono i compartimenti infetti. Siano:

x_k = % di individui nel compartimento k.

Identifichiamo la variazione di x come segue:

$$\boxed{x_k' = F_k - V_k}$$

con:

1) $F_K :=$ tasso di comparsa di nuovi infetti nel K-simo compartimento

2) $V_K := V_K^- - V_K^+ :=$ tasso di trasferimento degli individui infetti nel K-simo compartimento

(es.: Modello S.I.R.:

$$i' = \underbrace{\beta s i}_{F_i} - \underbrace{\gamma i}_{V_i} \;)$$

$\Rightarrow$ F_K é il tasso di trasmissibilitá e di contatti.

$\Rightarrow$ V_K é il tempo di infezione.

Si ha quindi:

$$R_0 = \text{"} F_K \cdot V_K^{-1} \text{"}$$

Consideriamo le seguenti matrici:

$$D_F := \left(\frac{\partial F_K}{\partial x_s}(x_0) \right), \quad D_V := \left(\frac{\partial V}{\partial x_s}(x_0) \right), \quad s = 1, \dots, M$$

Calcoliamo la matrice $D_F \cdot D_V^{-1}$ che restituirá componente per componente il tasso con il quale gli individui in x_s producono nuovi infetti in x_i moltiplicato per la media di tempo impiegato da un individuo nel compartimento s-simo. x_0 é l'equilibrio "libero da epidemia".

$\Rightarrow$ R_0 é il raggio spettrale di $D_F \cdot D_V^{-1}$

esempi:

1) MODELLO S.E.I.R.:

Si ha:

$$\begin{cases} s' = -\beta s i \\ e' = \underbrace{\beta s i}_{F_e} \underbrace{- \mu e}_{V_e} \\ i' = \underbrace{\mu e - \gamma i}_{-V_i} \\ r' = \gamma i \end{cases} \Rightarrow \quad N = 4, \; M = 2$$

$\Rightarrow$ si ha:

$$e' = F_e - V_e \,, \qquad i' = -V_i = V_i^+ - V_i^-$$

$$D_F = \begin{array}{cc} \partial e & \partial i \\ \end{array}$$

$$D_F = \begin{pmatrix} 0 & \beta s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_V = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -\mu & \gamma \end{pmatrix}$$

$$D_V^{-1} = \frac{1}{\mu \gamma} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ \mu & \mu \end{pmatrix}, \qquad D_F D_V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta s}{\gamma} & \frac{\beta s}{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho_{MAX}(x_0) = \frac{\beta s_0}{\gamma}$$

2) MODELLO S.E.I.R. con mortalità:

$$\begin{cases} s' = -\beta s i + \lambda - \eta s \\ e' = \underbrace{\beta s i}_{F_e} \underbrace{- \mu e - \eta e}_{V_e} & (= -(\mu + \eta) e) \\ i' = \underbrace{\mu e - \gamma i - \eta e}_{-V_i} & (= -(\gamma + \eta) e) \\ r' = \gamma i - \eta e \end{cases}$$

$\Rightarrow N = 4, \; M = 2$

$\Rightarrow$ si ha:

$$e' = F_e - V_e \,, \qquad i' = -V_i = V_i^+ - V_i^-$$

$$D_F = \begin{pmatrix} 0 & \beta s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_V = \begin{pmatrix} \mu + \eta & 0 \\ -\mu & \gamma + \eta \end{pmatrix}$$

$$D_V^{-1} = \frac{1}{(\gamma+\eta)(\mu+\eta)} \begin{pmatrix} \gamma+\eta & 0 \\ \mu & \mu+\eta \end{pmatrix}, \quad D_F D_V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta s \mu}{(\gamma+\eta)(\mu+\eta)} & \frac{\beta s}{\gamma+\eta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{MAX}(x_0) = \frac{\beta \mu s_0}{(\gamma+\eta)(\mu+\eta)}$$

con $s_0 = \frac{\lambda}{\eta}$ $\left(\Longleftrightarrow N(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{\lambda}{\eta}, \ \dot{N} = \lambda - \eta N \right)$