Definiamo con $T_X = \{ \tau \mid \tau$ topologia sull'insieme $X \}$

$\Rightarrow$ $T_X \neq \emptyset$ (contiene sempre la topologia discreta e la topologia banale)

$\Rightarrow$ Definisco la relazione $\underset{\text{FINEZZA}}{\prec}$ sull'insieme T_X:

$$\tau_1 \prec \tau_2 \quad \text{se} \quad \tau_1 \subseteq \tau_2$$

(τ_1 è MENO FINE di τ_2 se ogni aperto di τ_1 è aperto di τ_2)

<u>N.B.</u>

$\prec$ è una relazione d'ordine PARZIALE su T_X

(NON tutti gli elementi sono confrontabili)

<u>es.</u>

$X = \{a, b\}$ $\Rightarrow$ $\exists$ le seguenti topologie su X:

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\} \arrow[dd, shift left, "\times"] \arrow[dr, phantom, "\prec"] & \\
\tau_{banale} = \{\emptyset, X\} \arrow[ur, phantom, "\prec"] \arrow[dr, phantom, "\prec"] \arrow[rr, bend right, "\prec"'] & & \tau_{discreta} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\} \\
 & \tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\} \arrow[uu, shift left, "\times"] \arrow[ur, phantom, "\prec"] &
\end{tikzcd}$$

τ_1, τ_2 NON sono confrontabili !!!

<u>Def.</u> (Base di aperti):

Si dice BASI DI APERTI su X una famiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ t.c.:

1) $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di X, cioè:

$\forall x \in X \ \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B$

2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \wedge x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}$ t.c.
$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

$\Rightarrow$ A partire da $\mathcal{B}$ posso definire una topologia $\tau(\mathcal{B})$ su X t.c. $A \in \tau(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \forall x \in A \ \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subseteq A$

Verificare che $\tau(\mathcal{B})$ è una topologia:

1) $\emptyset \in \tau(\mathcal{B})$ ✓

$X \in \tau(\mathcal{B})$: $\forall x \in X \ \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subseteq X$ ✓

2) $A_1, A_2 \in \tau(\mathcal{B})$, verifico che $A_1 \cap A_2 \in \tau(\mathcal{B})$

$\Rightarrow$ se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ✓

$\Rightarrow$ se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, $\exists B_1 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_1 \subseteq A_1$
$\exists B_2 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_2 \subseteq A_2$

$\Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau(\mathcal{B})$ ✓

3) $\{A_i\}_{i \in I}$ con $A_i \in \tau(\mathcal{B})$, verifico che $\bigcup_i A_i \in \tau(\mathcal{B})$

$\Rightarrow$ sia $x \in \bigcup_i A_i \Rightarrow \exists i^*$ t.c. $x \in A_{i^*}$

$\Rightarrow \exists B_{i^*} \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_{i^*} \subseteq A_{i^*} \subseteq \bigcup_i A_i$

$\Rightarrow \bigcup_i A_i \in \tau(\mathcal{B})$ ✓

N.B.

$A \in \tau(\mathcal{B}) \Leftrightarrow A$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Come si possono confrontare 2 topologie generate da 2 basi diverse (nel senso di finezza)?

Teorema

Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di aperti di X. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) $\tau(\mathcal{B}) \prec \tau(\mathcal{B}')$
2) $\forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B \ \exists B' \in \mathcal{B}'$ t.c.:
$$x \in B' \subseteq B$$

Dim.

$(\Rightarrow)$: $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \tau(\mathcal{B}) \underset{\text{Ipotesi}}{\Rightarrow} B \in \tau(\mathcal{B}')$

$\Rightarrow \forall x \in B \ \exists B' \in \mathcal{B}'$ t.c. $x \in B' \subseteq B$

$(\Leftarrow)$: mostro che ogni aperto di $\tau(\mathcal{B})$ è aperto di $\tau(\mathcal{B}')$

Sia $A \in \tau(\mathcal{B}) \Rightarrow \forall x \in A \ \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subseteq A$

$\Rightarrow \exists B' \in \mathcal{B}'$ t.c. $x \in B' \subseteq B \subseteq A$

$\Rightarrow \forall x \in A \ \exists B' \in \mathcal{B}'$ t.c. $x \in B' \subseteq A$

$\Rightarrow A \in \tau(\mathcal{B}')$

q.e.d.

Def. (Sottobase di aperti):

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ famiglia di sottoinsiemi di X con (X, τ) spazio topologico. $\mathcal{U}$ si dice SOTTOBASE di APERTI di (X, τ) se le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{U}$

formano una base per τ

N.B.

Se $\mathcal{U}$ è sottobase, allora è anche un ricoprimento di X e viceversa:

$$\mathcal{U} \text{ sottobase di } (X,\tau) \Leftrightarrow X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Consideriamo $\mathcal{U}$ ricoprimento di X e prendiamo
$\mathcal{B}(\mathcal{U}) = \{ B \mid B \text{ è intersezione finita di elementi di } \mathcal{U} \}$

$\Rightarrow$ tale $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ è una base di aperti per $\tau(\mathcal{B}(\mathcal{U}))$ e $\mathcal{U}$ si dice sottobase di aperti

es.

- $(\mathbb{R}, \tau_e)$, una possibile sottobase di τ_e è:

$$\mathcal{U} = \{ (-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R} \} \cup \{ (a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R} \}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{ (a,b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \}$$

$$\Rightarrow (a,b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$$

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{U})$ contiene tutti gli intervalli (a,b)

- esempio di sottobase che non è base:

(X, τ_{cof}) con $|X| \geq 3$, sia $U(x) = X \setminus \{x\}$ $\forall x \in X$

$\Rightarrow \mathcal{U} = \{ U_x \mid x \in X \} \Rightarrow \mathcal{U}$ è sottobase MA NON è base:

ovviamente $U_x \in \tau_{cof}$ $\left(\mathcal{C}_X(U_x) = \{x\} \text{ che è finito} \right)$

Devo verificare che $\forall A \in \tau_{cof}$, A si può scrivere come unione di intersezioni finite di elementi di $\mathcal{U}$

$\Rightarrow$ Se $A = X$ allora $A = U_a \cup U_b$ con $a \neq b$ ✓

$\Rightarrow$ Se $A = \phi$ allora $A = \bigcup_{i \in I} \phi$ ✓

$\Rightarrow$ Se $\emptyset \neq A \neq X$ allora:

$$A = X \setminus \{x_1, \dots, x_t\} = \bigcap_{i=1}^{t} U_{x_i} \checkmark$$

Verifico che $\mathcal{U}$ NON è base di τ_{cof}

$$A = X \setminus \{a, b\} \quad \text{con } a \neq b \quad (|X| \geqslant 3)$$

dimostro che A NON è ottenibile come unione di elementi di $\mathcal{U}$

$\Rightarrow$ se potessi ottenere A come UNIONE di elementi di $\mathcal{U}$ allora sia a che b dovrebbero non appartenere a nessuno di questi elementi $\lightning$

$U_x = X \setminus \{x\}$!!! (U_x ha 1 solo elemento mancante)

<u>Def.</u> (Intorno):

U si dice INTORNO di $x \in X$ se $\exists A \in \tau$ t.c. $x \in A \subseteq U$ con (X, τ) spazio topologico

$\Rightarrow$ Indico con $\mathcal{U}_x = \{ U \subseteq X \mid U \text{ intorno di } x \}$ la FAMIGLIA degli INTORNI di x con $x \in X$

Proprietà degli intorni:

Sia (X, τ) spazio topologico e $\mathcal{U}_x$ la famiglia degli intorni di $x \in X$. Allora valgono le seguenti:

1) $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow x \in U$
2) $U \in \mathcal{U}_x \wedge U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$
3) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$
4) $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists Z \in \mathcal{U}_x$ t.c. $U \in \mathcal{U}_y \;\; \forall y \in Z$

Grazie a queste 4 proprietà, è possibile definire una topologia a partire dal concetto di intorno:

$$\tau = \{ A \subseteq X \mid A \in \mathcal{U}_x \;\; \forall x \in A \}$$

gli aperti sono gli intorni di ogni loro punto

Def. (Sistema fondamentale di intorni):

Sia (X, τ) spazio topologico, $\mathcal{U}_x$ famiglia degli intorni di x $\forall x \in X$. Data $\mathcal{W}_x \subseteq \mathcal{U}_x$, si ha che $\mathcal{W}_x$ è SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI di x se

$$\forall U \in \mathcal{U}_x \;\; \exists W \in \mathcal{W}_x \text{ t.c. } W \subseteq U$$

es.

$$(X, \tau), \mathcal{U}_x \Rightarrow \tau_x = \{ A \in \tau \mid x \in A \} \subseteq \mathcal{U}_x$$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x \;\; \exists T \in \tau_x$ t.c. $T \subseteq U$

$\Rightarrow \tau_x$ è sistema fondamentale di intorni per $x \in X$.

$\Rightarrow$ data $\mathcal{B}$ base di τ_x, $\mathcal{B}_x = \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \}$

$\Rightarrow$ per le proprietà delle basi, anche $\mathcal{B}_x$ è sistema fondamentale di intorni per $x \in X$

$\Rightarrow \quad \mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}_x \subseteq \mathcal{U}_x$

es.

Sia $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$, allora un sistema fondamentale di intorni è $\mathcal{B}_x = \{ B_r(x) \mid r > 0 \}$ per $x \in X$