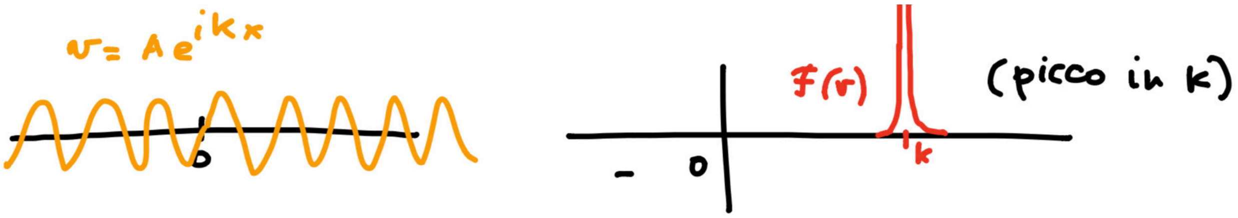
17. Equazione del Calore

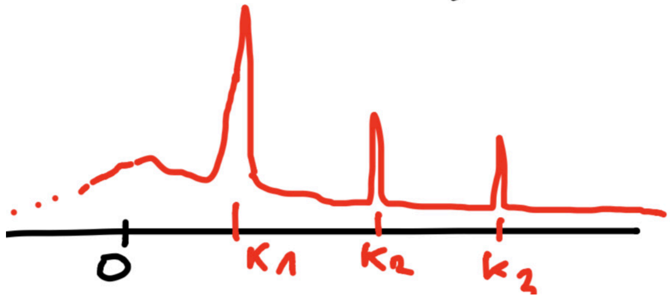
TF di funzioni periodiche – Stagionalità:

$\Rightarrow$ se $u(x) = 1 \ \forall x$, $\hat{u} = \delta_0$. Per il Teorema di modulazione:

$$v(x) = e^{ikx} = e^{ikx} \cdot 1 \Rightarrow \hat{v}(\omega) = \tau_k \delta_0 = \delta_k$$



Data la distribuzione $u(x)$ determiniamo le stagionalità (seasonality) ovvero le serie storiche:



$$\hat{u}(\omega) \approx \hat{u}_0(\omega) + \sum_{j=1}^{N} A_{k_j} \cdot \delta_{k_j} \Rightarrow u(x) \approx u_0(x) + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} A_{k_j} e^{j k_j x}}_{\text{seasonality}}$$

es. analisi annuale dei ricavi di un supermercato:

- $\sim 1 \rightarrow K_1$ = picco di spesa a frequenza annuale (es. Natale)
- $\sim 12 \rightarrow K_2$ = " " " " " mensile (es. stipendio)
- $\sim 52 \rightarrow K_3$ = " " " " " settimanale (es. week-end)

Equazione del calore su $\mathbb{R}$

L'eq. del calore è:

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u - k \Delta u = f \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}}$$

con $(t,x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$,
k = costante di diffusione specifica
f = sorgente di calore / temperatura
$u_0(x)$ = temperatura iniziale

In $\mathbb{R}$ si ha $k=1$, $f=0$ (no sorgenti):

$$(*) \quad \begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

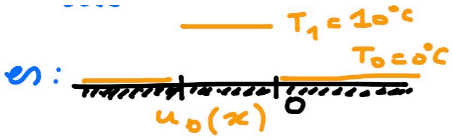
$\Rightarrow$ consideriamo $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ (u può essere discontinua !!!)

$\Rightarrow$ poniamo $v_t(x) := u(t,x)$,

$w(t;\omega) := \widehat{v_t}(x)$

TF di u rispetto a x, per t fissato

es:



si ha:

$$w(0;\omega) = \widehat{u_0}(\omega) \wedge \widehat{u_t}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t,x) \cdot e^{-2\pi i x \omega} dx = \frac{d}{dt} \widehat{v_t}(\omega)$$

mentre:

$$\widehat{\partial_{xx} u}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \partial_{xx} u(t,x) e^{-2\pi i \omega x} dx = (-4\pi^2 \omega^2) \widehat{v_t}(\omega)$$

quindi u risolve $(*)$ se e solo se w risolve $(**)$ con:

$$(**) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} w(t;\omega) = (-4\pi^2\omega^2) w(t;\omega) \\ w(0;\omega) = \widehat{u_0}(\omega) \end{cases}$$

che è una famiglia di ODE del 1° ordine parametrizzata da $\omega \in \mathbb{R}$!!!

Sol. di $(**)$: $\quad w(t,\omega) = \widehat{u_0}(\omega) e^{-4\pi^2\omega^2 t}$

$\Rightarrow$ definiamo il Nucleo del calore $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ si ha:

$$\widehat{G_t}(\omega) = e^{-4\pi^2\omega^2 t}$$

ovvero $w(t,\omega) = \widehat{u_0}(\omega) \cdot \widehat{G_t}(\omega)$. Quindi si ha $w(t;\omega) = \widehat{u_0 * G_t}(\omega)$ da cui, anti-trasformando:

$$\boxed{u(t,x) = u_0 * G_t(x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy}$$

con $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$

Rappresentazione integrale mediante nucleo del calore

Proprietà del Nucleo del calore

La famiglia $\{G_t\}_{t>0}$ definisce un'identità approssimata:

1) G_t è densità di probabilità $\forall t > 0$:

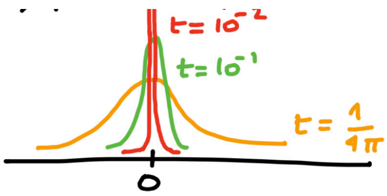
$$G_t(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \wedge \int_{\mathbb{R}} G_t(x)\, dx = 1 \quad \forall t > 0.$$

Infatti:

$$G_t(x) = \frac{1}{\lambda} G_{\frac{1}{4\pi}}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{con } \lambda = \sqrt{4\pi t}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} G_t(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} G_{\frac{1}{4\pi}}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy = 1$$

Inoltre $G_t \xrightarrow[t \to 0^+]{} \delta_0$ nel senso delle misure:



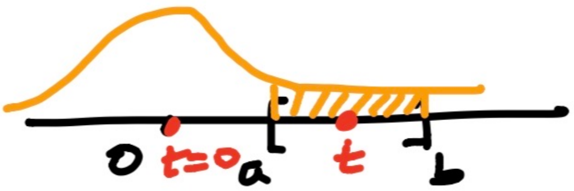
2) $G_t(x) \equiv G(t,x)$ risolve l'eq. del calore su $(0,+\infty)_t \times \mathbb{R}_x$:

$$\begin{cases} \partial_t G - \partial_{xx} G = 0 \\ G(0,x) = \delta_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il nucleo del calore è la soluzione FONDAMENTALE dell'equazione del calore !!!

INTERPRETAZIONE PROBABILISTICA:

$\int_{[a,b]} G_t(y)\,dy$ = probabilità che la particella che all'istante $t=0$ si trovava in 0 e che segue un moto browniano si trovi in $[a,b]$ all'istante t



(o %/frazione di massa che si trova in $[a,b]$ all'istante t per effetto della diffusione (lineare) di una massa unitaria inizialmente concentrata in 0

(es. di Einstein: diffusione di una goccia d'inchiostro))

PROPRIETÀ DI $u(t,x)$ SOL. DI $\circledast$:

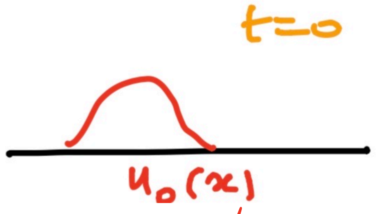
1) Regolarizzazione istantanea:

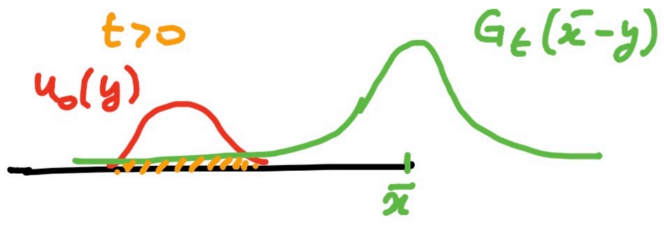
per $t>0$ $u(t,x) \in C^\infty((0,+\infty)_t \times \mathbb{R}_x)$, infatti:

$$G_t(x) \equiv G(t,x) \in C_0^\infty((0,+\infty)_t \times \mathbb{R}_x)$$

$$\Rightarrow u(t,x) = u_0 * G_t(x) \in C^\infty$$

1.bis) Propagazione del segnale a velocità infinita:





a supporto compatto

$\forall t>0$ $u(t,\bar{x}) \neq 0$ $\forall \bar{x}$ t.c. $|\bar{x}| \to +\infty$

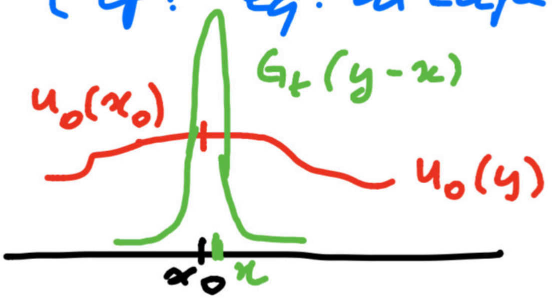
$\Rightarrow u(t,\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\, G_t(\bar{x}-y)\,dy =$ 

2) $u(t,x) \xrightarrow[t\to 0+]{} u_0(x)$ in L^1 (ovvero in media):

$$\lim_{t\to 0+} \|u(t,\cdot) - u_0\|_1 = 0$$

Inoltre, se x_0 è di continuità per u_0, si ha il limite puntuale $\lim_{\substack{t\to 0+ \\ x \to x_0}} u(t,x) = u_0(x_0)$

(cf: eq. di Laplace) $\Rightarrow$ $u(t,x)$ = media ponderata di u_0 attorno ad x



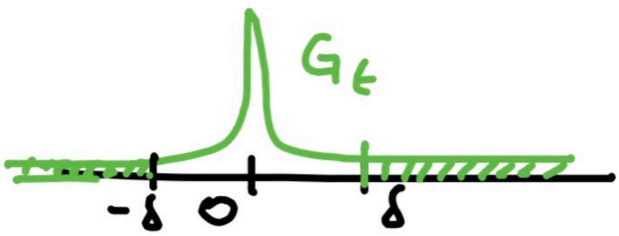
Infatti:

$$|u(t,x)-u_0(x_0)| \leq |u(t,x)-u_0(x)| + \underbrace{|u_0(x)-u_0(x_0)|}_{<\varepsilon}$$

$$\Rightarrow |u(t,x)-u_0(x_0)| = \left|\int_{\mathbb{R}} (u_0(x-y)-u_0(x))\, G_t(y)\,dy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x-y)-u_0(x)|\, G_t(y)\,dy = \int_{|y|\leq\delta} |u_0(x-y)-u_0(x)|\, G_t(y)\,dy$$

$$+ \underbrace{\int_{|y|\geq\delta} |u_0(x-y)| \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}}\,dy}_{\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{\delta^2}{4t}} \cdot \|u_0\|_1 \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0} + |u_0(x)| \underbrace{\int_{|y|\geq\delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}}\,dy}_{\longrightarrow 0 \text{ per convergenza dominata}}$$



3) Stabilità rispetto al dato iniziale (principio del massimo per l'equazione del calore):

$$|u(t,x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(y)|\, G_t(x-y)\,dy \leq \|u_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\,dy = \|u_0\|_\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| = \|u(t,\cdot)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \quad \forall t>0$$

Analogamente, si hanno stime di stabilità in varie norme:

$$\|u(t,\cdot)\|_\infty \leq \|u_0\|_1 \cdot \max_{x\in\mathbb{R}} G_t = \|u_0\|_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$

stima di decadimento

Analoghe stime di decadimento esistono per le derivate di $u(t,x)$

EQUAZIONE DEL CALORE IN $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,+\infty)_t \times \mathbb{R}^n_x \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}}$$

se $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ si ha il nucleo del calore in $\mathbb{R}^n$ (via TF in $\mathbb{R}^n$):

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^{\,n}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Infatti $\hat{v}_t(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\, e^{-2\pi i x \cdot \omega} dx$

Si ha quindi:

$$\boxed{u(t,x) = u_0 * G_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^{\,n}} \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dx}$$

e si deducono le stesse proprietà di regolarità, stabilità ecc. del caso in $\mathbb{R}$.