Teorema:

Ogni sottoinsieme chiuso C di uno spazio topologico (X, τ) COMPATTO è a sua volta compatto.

Dim.

Sia $\mathcal{R} = \{A_i \mid i \in I\}$ ricoprimento aperto di C

$\Rightarrow C \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \tau$

$\Rightarrow$ sia $\mathcal{R} \cup \mathcal{C}_X(C)$ ricoprimento aperto di X
$(\mathcal{C}_X(C) \in \tau)$

$\Rightarrow$ dato che X è compatto, $\exists$ sottoricoprimento finito $\{A_1, \dots, A_n, \mathcal{C}_X(C)\}$

$\Rightarrow$ dato che $C \cap \mathcal{C}_X(C) = \emptyset$, $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$\Rightarrow \{A_1, \dots, A_n\}$ è sottoricoprimento finito di $\mathcal{R}$ per C

$\Rightarrow C$ è compatto.

q.e.d.

Lemma:

Dato (X, τ) spazio topologico T_2 (o di HAUSDORFF), $K \subseteq X$ compatto. Allora $\forall x \notin K \; \exists A, B \in \tau$ t.c.
$x \in A \wedge K \subseteq B \wedge A \cap B = \emptyset$

N.B. Se (X, τ) è T_2, separa punti e chiusi.

Dim.

Sia $x \notin K$, $y \in K \Rightarrow \forall y \in K \; \exists A_y, B_y$ t.c. $x \in A_y$, $y \in B_y \wedge A_y \cap B_y = \emptyset$

$\Rightarrow$ la famiglia $\{B_y\}_{y \in K}$ è un ricoprimento aperto di K.

$\Rightarrow$ dato che K è compatto, posso estrarre un sottoricoprimento finito, cioè $\exists\, B_{y_1}, \dots, B_{y_t}$ ricoprimento di K.

$\Rightarrow$ siano $A_1, \dots, A_{y_t}$ i corrispettivi aperti disgiunti come visto sopra.

$\Rightarrow$ siano $A = \bigcap_{i=1}^{t} A_{y_i}$, $B = \bigcup_{i=1}^{t} B_{y_i}$ allora si ha che $B \in \tau$ e B copre K, $A \in \tau$ e $x \in A$ e $A \cap B = \emptyset$

q.e.d.

Teorema:

Ogni sottoinsieme compatto K di uno spazio topologico (X, τ) T_2 (o di HAUSDORFF) è chiuso

Dim.

K è compatto $\Rightarrow \forall x \in \mathcal{C}_X(K)\ \exists\, A_x \in \tau$ t.c. $x \in A \subseteq \mathcal{C}_X(K)$

$\Rightarrow \mathcal{C}_X(K) = \bigcup_i A_{x_i} \Rightarrow \mathcal{C}_X(K) \in \tau \Rightarrow K \in \mathcal{T}$ cioè K è chiuso

q.e.d.

Def. (Insieme limitato):

Un insieme $Y \subseteq X$ si dice LIMITATO se $\exists M > 0$ t.c. $\sup_{x,y \in Y} \{d(x,y)\} < M$ oppure, equivalentemente, se $Y \subseteq B_M(x)$ per un certo $x \in Y$.

Corollario:

Se (X, τ) è uno spazio topologico METRIZZABILE allora i sottoinsiemi compatti di X sono chiusi e limitati

Dim.

1) K compatto $\Rightarrow$ K chiuso:

(X, τ) è T_2 (essendo metrizzabile) $\Rightarrow$ la tesi segue dal teorema precedente.

2) K compatto $\Rightarrow$ K limitato:

Sia $\mathcal{R} = \{ B_1(y) \mid y \in K \}$ ricoprimento aperto di K.

$\Rightarrow$ dato che K è compatto, $\exists \{ B_1(y_1), \dots, B_1(y_t) \}$ sottoricoprimento finito di K

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} B_1(y_i) \Rightarrow \forall x, z \in K \quad d(x,z) < 2t > 0$

$\Rightarrow$ K è limitato.

q.e.d.

Corollario:

I sottoinsiemi compatti di $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ sono chiusi e limitati

Dim.

$(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ è metrizzabile, quindi segue dai risultati precedenti.

q.e.d.

N.B.

Il viceversa è vero, per un qualunque spazio topologico metrizzabile (e non solo, quindi, in $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$) se si sostituisce la limitatezza con la TOTALE LIMITATEZZA

Def. (Spazio totalmente limitato):

Uno spazio topologico METRIZZABILE (X, τ) si dice TOTALMENTE LIMITATO se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ famiglia finita di $B_\varepsilon(x)$ (per un certo $x \in X$) che copre X.

N.B.

Totalmente limitato $\Rightarrow$ limitato e NON VALE il viceversa !!!

Contraesempio:

$(\mathbb{R}^2, d)$ con d = metrica discreta, $\varepsilon = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow B_\varepsilon(x) = \{x\}$ $\forall x \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ servono infinite $B_\varepsilon(x)$ per coprire tutto $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ non è totalmente limitato, ma è limitato dato che $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ $d(x,y) \leq 1$

Teorema:

Gli intervalli $[a, b]$ di $(\mathbb{R}, \tau_e)$ sono compatti

Dim.

Sia $R = \{A_s \mid s \in S\}$ ricoprimento aperto di $[a, b]$.

Supponiamo che $[a, b]$ non sia compatto (ovvero che R non ammetta sottoricoprimento finito):

$\Rightarrow$ costruisco $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ e ottengo che almeno 1 dei 2 non ammette ricoprimento finito di aperti di R

$\Rightarrow$ lo denoto con $[c_1, d_1]$ (se sono entrambi, ne scelgo

1 solo)

$\Rightarrow$ procedo per bisezione su $[c_1, d_1]$ $\left([c_1, \frac{c_1+d_1}{2}], [\frac{c_1+d_1}{2}, d_1]\right)$ ottenendo $[c_2, d_2]$ ecc.

$\Rightarrow$ la sequenza $[c_n, d_n]$ ha la proprietà che:

$$[c_1, d_1] \supseteq [c_2, d_2] \supseteq \dots \supseteq [c_n, d_n] \supseteq \dots$$

inoltre:

$$c_n - d_n = \frac{1}{2^n} \cdot |a-b| \quad e \quad c_n \leq c_{n+1} \leq d_{n+1} \leq d_n$$

$\Rightarrow$ sia $c = \sup_n \{c_n\}$, $d = \inf_n \{d_n\}$ e si ha:

$$c_n \leq c \leq d \leq d_n$$

$\Rightarrow$ deve quindi essere $c = d \in [a, b]$ e inoltre $\exists A_\xi \in \mathcal{R}$ t.c. $c \in A_\xi$

$\Rightarrow$ per n abbastanza grande $[c_n, d_n] \subseteq A_\xi$ $\lightning$ A_ξ sarebbe sottoricoprimento finito per $[c_n, d_n]$.

q.e.d.

<u>Teorema</u> (di Heine-Borel in $\mathbb{R}$):
Un sottoinsieme $K \subseteq (\mathbb{R}, \tau_e)$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

<u>Dim.</u>

1) K compatto $\Rightarrow$ K chiuso e limitato ✓ (corollario precedente)

2) K chiuso e limitato $\Rightarrow$ $K \subseteq [a, b]$
$\Rightarrow$ K chiuso $\wedge$ $[a, b]$ compatto $\Rightarrow$ K compatto

q.e.d.

Teorema (di Tychonoff):

2 spazi topologici (X, τ_1), (Y, τ_2) sono compatti se e solo se $(X \times Y, \tau_{prodotto})$ è compatto.

Lemma:

Se $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ è continua e suriettiva, allora:

$$X_1 \text{ compatto} \Rightarrow X_2 \text{ compatto}$$

Dim. lemma:

Sia $R = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di X_2. Considero la famiglia $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$: si ha che $f^{-1}(U_i) \in \tau_1$ $\forall i$ (f continua) e la famiglia è un ricoprimento aperto di X_1 (f suriettiva). Dato che X_1 è compatto posso estrarre un sottoricoprimento finito $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_h)\}$

$\Rightarrow$ Dato che f è suriettiva $\{U_1, \dots, U_h\}$ è ricoprimento finito di X_2, quindi X_2 è compatto

q.e.d.

Corollario 1 (Compattezza è invariante topologico):

Se $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ è omeomorfismo allora

$$X_1 \text{ è compatto} \Leftrightarrow X_2 \text{ è compatto}$$

Dim.

Applico il lemma precedente sia per $\Rightarrow$ che per $\Leftarrow$.

q.e.d.

Sia $\pi : (X, \tau) \to (X/\sim, \tau_{quoziente})$.

Corollario 2:

$$(X, \tau) \text{ compatto} \Rightarrow (X/\sim, \tau_{quoziente}) \text{ compatto}$$

Dim.

π è continua e suriettiva, quindi applico il lemma precedente.

q.e.d.

Siano le 2 proiezioni:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 : X_1 \times X_2 &\to X_1 \\ (x, y) &\mapsto x \\[1em] \pi_2 : X_1 \times X_2 &\to X_2 \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}\right\} \text{continue e suriettive}$$

Corollario 3:

$$(X_1 \times X_2, \tau_{prodotto}) \text{ compatto} \Rightarrow (X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) \text{ compatti}$$

Dim.

π_1, π_2 sono continue e suriettive, quindi applico il lemma precedente.

q.e.d.

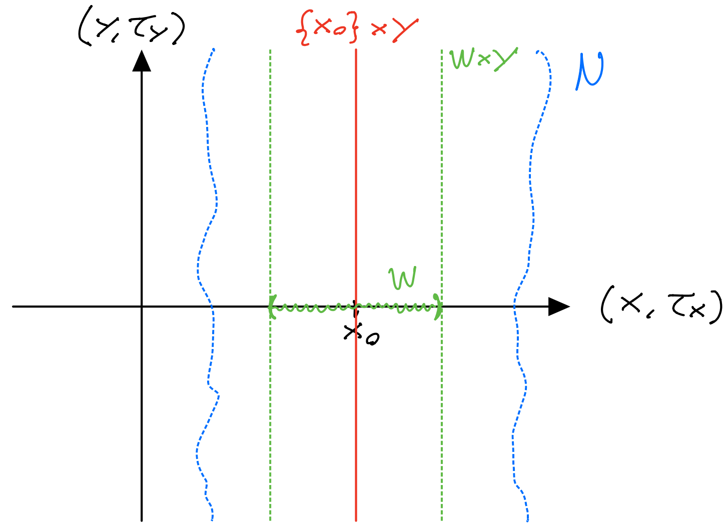
Lemma (del Tubo):

Dati 3 spazi topologici (X, τ_X), (Y, τ_Y), $(X \times Y, \tau_{prodotto})$ e il punto $x_0 \in X$, si ha che:

$$\begin{aligned} &Y \text{ compatto} \wedge \\ &\{x_0\} \times Y \subseteq N \in \tau_{prodotto} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\exists W \in \tau_X \text{ t.c.:} \\ &x_0 \in W \wedge W \times Y \subseteq N \end{aligned}$$

Rappresentazione grafica del lemma:

es. $(X = \mathbb{R},\ \tau_X = \tau_e)$, $(Y = \mathbb{R},\ \tau_Y = \tau_e)$:



Dim.

Sia $R = \{ (U_i \times V_s)_{\substack{i \in I \\ s \in S}} \mid U_i \in \tau_X,\ V_s \in \tau_Y \}$ ricoprimento aperto di $X \times Y$. Prendo una sottofamiglia in modo da avere $\{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup_{i,s} (\tilde{U}_i \times \tilde{V}_s) \subseteq N$ per certi $\tilde{U}_i, \tilde{V}_s$ dove $\tilde{U}_i \times \tilde{V}_s = (U_i \times V_s) \cap N$. Poiché $\{x_0\} \times Y$ è omeomorfo ad Y ($\exists f$ omeomorfismo t.c. $f : \{x_0\} \times Y \to Y \wedge f(x_0, y) = y$) e Y è compatto, $\{x_0\} \times Y$ è compatto. Posso quindi estrarre $\{ \tilde{U}_i \times \tilde{V}_s \}_{i,s}$ sottoricoprimento finito t.c.:

$$\{x_0\} \times Y \subseteq (\tilde{U}_1 \times \tilde{V}_1) \cup \ldots \cup (\tilde{U}_k \times \tilde{V}_k)$$

Posso supporre che $x_0 \in U_i \ \ \forall i = 1, \ldots, k$, quindi prendo $W = U_1 \cap \ldots \cap U_k \Rightarrow x_0 \in W \in \tau_X \Rightarrow \{x_0\} \times Y \subseteq W \subseteq N$

q.e.d.

Possiamo ora dimostrare ~~la~~ il teorema di Tychonoff:

Dim. (Teorema di Tychonoff):

$\Leftarrow$ Applico il corollario 3: $X \times Y$ compatto $\Rightarrow X, Y$ compatti.

($\Rightarrow$) Sia R ricoprimento aperto di $X \times Y$. Fissiamo $x_0 \in X$, allora $\{x_0\} \times Y$ è compatto e quindi ammette sottoricoprimento finito di R. Quindi ottengo:

$$\{x_0\} \times Y \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n = N_{x_0} \in \tau_{prodotto}$$

$\Rightarrow$ per il lemma del Tubo $\exists W_{x_0} \in \tau_X$ t.c. $x_0 \in W_{x_0} \wedge W_{x_0} \times Y \subseteq N_{x_0}$ per qualunque $x_0 \in X$ fissato.

$\Rightarrow$ sia la famiglia $\{W_{x_0}\}_{x_0 \in X}$: tale famiglia è ricoprimento aperto di X, dato che X è compatto $\exists \{W_{x_1}, \ldots, W_{x_h}\}$ sottoricoprimento finito.

$\Rightarrow$ $(W_{x_1} \times Y) \cup \ldots \cup (W_{x_h} \times Y)$ è ricoprimento finito di $X \times Y$

$\Rightarrow$ Ad ognuno dei W_{x_i} sostituisco gli aperti A_i usati per costruire R.

$\Rightarrow$ In totale ho $\{A_1, \ldots, A_h\}$ ricoprimento finito di R per $X \times Y$

$\Rightarrow$ $X \times Y$ è compatto.

q.e.d.

__Teorema__ (di Heine-Borel in $\mathbb{R}^n$):
Un sottoinsieme $K \subseteq (\mathbb{R}^n, \tau_e)$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

__Dim.__

($\Rightarrow$) Analoga alla dim. della versione in $\mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Dato C chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$, si ha che

$C \subseteq [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ (è limitato)

$\Rightarrow [a_i, b_i]$ sono compatti $\Rightarrow$ per Tychonoff $[a_1, b_1] \times .. \times [a_n, b_n]$ è compatto $\Rightarrow$ C è un chiuso all'interno di un compatto $\Rightarrow$ C è compatto.

q. e. d.