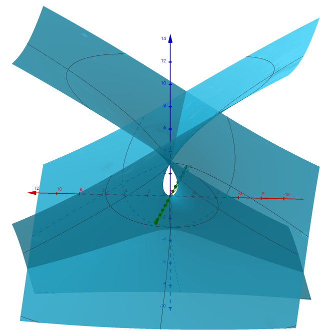
es. 1) Sia:



$$S: \begin{cases} \varphi_1(u,v) = u - \frac{u^3}{3} + u \cdot v^2 \\ \varphi_2(u,v) = v - \frac{v^3}{3} + v \cdot u^2 \\ \varphi_3(u,v) = u^2 - v^2 \end{cases}$$

Dim. che φ è una superficie priva di punti singolari.

$\Rightarrow$ deve essere $\varphi \in C^\infty$ ✓ (sono polinomi)

e $\text{rk}\, Jac(\varphi(u,v)) = 2 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow Jac(\varphi(u,v)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 & 2uv \\ 2vu & 1-v^2+u^2 \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Teorema di Kronecker: sia $1-u^2+v^2 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-u^2+v^2 & 2uv \\ 2vu & 1-v^2+u^2 \end{vmatrix} = (1-u^2+v^2)(1-v^2+u^2) - 4u^2v^2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-u^2+v^2 & 2uv \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = -2v(1-u^2+v^2) - 4u^2v$$

$$= -2v + 2u^2v - 2v^3 - 4u^2v = -2v^3 - 2v - 2u^2v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+(u^2-v^2))(1-(u^2-v^2)) - 4u^2v^2 = 0 \\ -2v^3 - 2v(1+u^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - (u^2-v^2)^2 - 4u^2v^2 = 0 \\ v^3 + v(1+u^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - (u^4 + v^4 - 2u^2v^2) - 4u^2v^2 = 0 \\ v^3 + v(1+u^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - u^4 - v^4 - 2u^2v^2 = 0 \\ v(v^2 + (1+u^2)) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v = 0 \quad \vee \quad v^2 + (1+u^2) = 0$$

$$v = 0 \Downarrow \quad 1 - u^4 = 0 \quad \Downarrow \quad u = \pm 1$$

$$v^2 + (1+u^2) = 0 \Downarrow \quad v^2 = -(1+u^2) \Leftrightarrow 1 + u^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2 = -1 \quad \lightning \text{ impossibile.}$$

$\Rightarrow P_{1,2} = (\pm 1, 0)$ tuttavia $1 - u^2 + v^2 = 0$ in $P_{1,2}$

$\Rightarrow \lightning$ impossibile.

$\Rightarrow$ sia ora $1 - u^2 + v^2 = 0 \Rightarrow 1 + (v^2 - u^2) = 0$

$$\Rightarrow -(v^2 - u^2) = 1 \Rightarrow 1 - (v^2 - u^2) = 2$$

$$\Rightarrow \text{Jac}(\varphi(u,v)) = \begin{pmatrix} 0 & 2uv \\ 2uv & 2 \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Kronecker: sia $2u \neq 0 \Rightarrow u \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2uv & 2 \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = -4uv^2 - 4u$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2uv \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = 4u^2 v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4u(v^2+1) = 0 \\ 4u^2 v = 0 \end{cases} \quad \text{con } u \neq 0$$

$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow -4u = 0 \Rightarrow u \neq 0 \quad \lightning \text{ impossibile}$$

Sia ora $u = 0 \Rightarrow \operatorname{Jac}(\varphi(u,v)) = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1-v^2 \\ 0 & -2v \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{rk} \operatorname{Jac}(\varphi(u,v)) = 2 \quad \forall v$$

$$\Rightarrow \nexists\, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \operatorname{rk} \operatorname{Jac}(\varphi(u,v)) < 2$$

$\Rightarrow \varphi(u,v)$ é una superficie privo di punti singolari

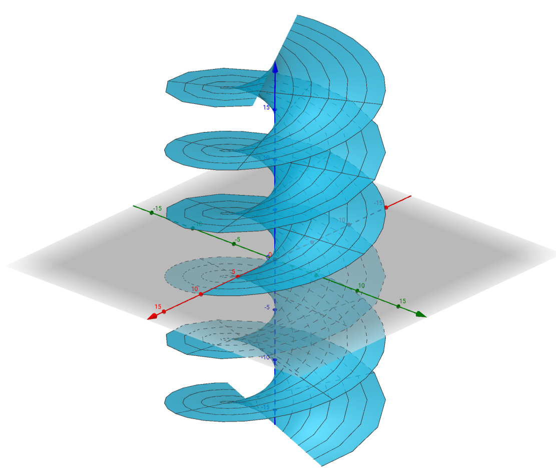
---

es. 2)

L'elicoide retto è il sostegno dell'applicazione

$$\varphi(u,v) = (v\cos u,\ v\sin u,\ a\cdot u)$$

con $a > 0 \in \mathbb{R}$.



$\Rightarrow$ <u>Dim.</u> che $\nexists$ punti singolari di φ

$\Rightarrow$ trovare una base di $T_p(S)$

1) $\text{Jac}\,\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} -v\sin u & \cos u \\ v\cos u & \sin u \\ a & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Kronecker:

$$\begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u \\ a & 0 \end{vmatrix} = -\cos u \cdot a$$

$$\begin{vmatrix} v\cos u & \sin u \\ a & 0 \end{vmatrix} = -\sin u \cdot a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\cos u \cdot a = 0 \\ -\sin u \cdot a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos u = 0 \\ \sin u = 0 \end{cases} \quad \text{⚡ impossibile}$$

$\Rightarrow \nexists\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\text{rk}\,\text{Jac}\,\varphi < 2$

$\Rightarrow \nexists$ punti singolari di φ

2) Base del piano tangente $T_p(S)$:

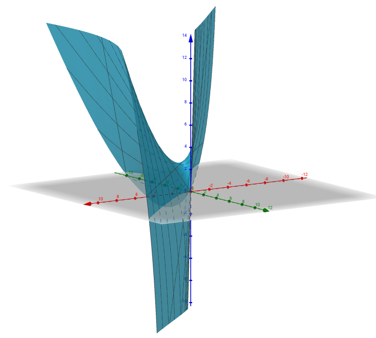
$$\Rightarrow T_p(S) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad a>0$$

$\Rightarrow$ Base naturale di $T_p(S)$: $\left\{ \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

con $a>0 \in \mathbb{R}$

es. 3)

Sia $S: \begin{cases} \varphi_1(u,v) = u + e^v \\ \varphi_2(u,v) = u - e^v \\ \varphi_3(u,v) = u \cdot v + 2e^v \end{cases}$



$$P = (e, -e, 2e)$$

$\Rightarrow$ Det. $T_P(S)$ e retta normale ad S in P

$\Rightarrow$ Det. 1ª e 2ª forma quadratica fondamentale

1) $\quad \text{Jac}\, \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & e^v \\ 1 & -e^v \\ v & u + 2e^v \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} e = u + e^v \\ -e = u - e^v \\ 2e = uv + 2e^v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_P(S) = \begin{pmatrix} e \\ -e \\ 2e \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ -e \\ 2e \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$\Rightarrow$ retta normale ad S in P è:

$$r : P + \langle \vec{\nu} \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nu} = \frac{X_1 \times X_2}{\| X_1 \times X_2 \|}$$

$$\Rightarrow X_1 \times X_2 = (1\ 1\ 1) \times (e\ -e\ 2e)$$
(in p)

$$= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ e & -e & 2e \end{pmatrix} = (3e, -e, -2e)$$

$$\Rightarrow \|X_1 \times X_2\| = \sqrt{9e^2 + e^2 + 4e^2} = e\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{3\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{2\sqrt{14}}{14} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v : \begin{pmatrix} e \\ -e \\ 2e \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3e \\ -e \\ -2e \end{pmatrix} \right\rangle}$$

2) 1^a forma quadratica fondamentale:

$$g_{11} = (X_1 \mid X_1) = ((1,1,v) \mid (1,1,v)) = 2 + v^2$$

$$g_{12} = (X_1 \mid X_2) = ((1,1,v) \mid (e^v, -e^v, u+2e^v)) = uv + 2ve^v$$

$$g_{22} = (X_2 \mid X_2) = ((e^v, -e^v, u+2e^v) \mid (e^v, -e^v, u+2e^v))$$
$$= 2e^{2v} + (u+2e^v)^2$$
$$= 2e^{2v} + u^2 + 4e^{2v} + 4ue^v$$
$$= u^2 + 4ue^v + 6e^{2v}$$

$\Rightarrow$ la 1^a forma quadratica fondamentale di S è:

$$= \boxed{du^2(2+v^2) + 2v(u+2e^v)\,du\,dv + dv^2(u^2+4ue^v+6e^{2v})}$$

$$\Rightarrow L_{is} = \frac{\det\begin{pmatrix} x_{is} \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow x_{11} = (0,0,0) \quad x_{12} = (0,0,1) \quad x_{22} = (e^v, -e^v, 2e^v)$$

$$\Rightarrow L_{11} = 0, \quad L_{12} = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & v \\ e^v & -e^v & 2e^v+u \end{pmatrix}}{\sqrt{g}} = \frac{-2e^v}{\sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow L_{22} = \frac{\det\begin{pmatrix} e^v & -e^v & 2e^v \\ 1 & 1 & v \\ e^v & -e^v & 2e^v+u \end{pmatrix}}{\sqrt{g}} = -\frac{2ue^v}{\sqrt{g}}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2+v^2 & uv+2ve^v \\ uv+2e^v & 6e^{2v}+u^2+4ue^v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g = \det G$$

$\Rightarrow$ 2ª forma quadratica è:

$$\boxed{-\frac{4e^v}{\sqrt{g}}\,du\,dv + \frac{2ue^v}{\sqrt{g}}\,dv^2}$$

---

es. 4) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos u + 1 + v\sin u \\ \sin u + v\cos u \\ u + 1 + 2v \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Determinare la 2ª forma quadratica fondamentale e classificarne i punti regolari (piatti, parabolici, iperbolici, ellittici)

$\Rightarrow X_1 = (\sin u + v\cos u, \cos u - v\sin u, 1)$

$\Rightarrow X_2 = (\sin u, \cos u, 2)$

$\Rightarrow$ $p \in S$ è regolare $\Leftrightarrow$ X_1^p, X_2^p lin. ind.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sin u + v\cos u & \sin u \\ \cos u - v\sin u & \cos u \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ deve avere } rk = 2$$

$\Rightarrow$ Kronecker partendo da 1:

Minori orlati:

$$\det\begin{pmatrix} \sin u + v\cos u & \sin u \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \sin u + 2v\cos u$$

$$\det\begin{pmatrix} \cos u - v\sin u & \cos u \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \cos u - 2v\sin u$$

$$\det\begin{pmatrix} \sin u + v\cos u & \sin u \\ \cos u - v\sin u & \cos u \end{pmatrix} = v$$

$\Rightarrow$ se $v \neq 0$, $rk = 2$, se $v = 0$, ottengo:

$$\begin{cases} \sin u = 0 \\ \cos u = 0 \end{cases} \quad \text{Impossibile } \lightning \Rightarrow rk = 2$$

$\Rightarrow \nexists$ punti singolari di S

$$g_{11} = (X_1 | X_1) = 2 + v^2 \qquad g_{12} = (X_1 | X_2) = 3$$

$$g_{22} = (X_2 | X_2) = 5$$

$$\Rightarrow G = \begin{pmatrix} 2+v^2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow g = 1 + 5v^2$$

$$\Rightarrow X_{11} = (\cos u - v \sin u, -\sin u - v \cos u, 0)$$

$$\Rightarrow X_{12} = (\cos u, -\sin u, 0)$$

$$\Rightarrow X_{22} = (0, 0, 0) \Rightarrow L_{22} = 0$$

$$\Rightarrow L_{11} = \frac{\det \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{g}} = \frac{1 + 2v^2}{\sqrt{g}}, \quad L_{12} = \dots = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} \frac{1+2v^2}{\sqrt{g}} & \frac{1}{\sqrt{g}} \\ \frac{1}{\sqrt{g}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ell = - \frac{\ell}{g} = - \frac{1}{1+5v^2} < 0 \ \forall v$$

$\Rightarrow$ tutti i punti di S sono iperbolici

---

es. 5)

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regolare parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

1) Determinare la 1ª forma quadratica fondamentale:

$$\Rightarrow X_1 = (\partial_u \varphi_1, \partial_u \varphi_2, \partial_u \varphi_3) = (1, 0, 2u)$$

$\Rightarrow X_2 = (\partial_v \varphi_1, \partial_v \varphi_2, \partial_v \varphi_3) = (0, 1, -2v)$

$\Rightarrow$ 1ª forma quadratica fondamentale:

$$du^2 \cdot g_{11} + 2\, du\, dv \cdot g_{12} + dv^2\, g_{22}$$

con:

$$g_{11} = (X_1 | X_1) = 1 + 4u^2$$

$$g_{12} = (X_1 | X_2) = -4uv$$

$$g_{22} = (X_2 | X_2) = 1 + 4v^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + 4u^2)\, du^2 - 8uv\, du\, dv + (1 + 4v^2)\, dv^2}$$

2) Determinare il versore normale:

$$\vec{\nu} = \frac{X_1 \times X_2}{\| X_1 \times X_2 \|}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{pmatrix} = (-2u, -(-2v), 1)$$

$$= (-2u, 2v, 1) \Rightarrow \| \cdot \| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nu} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}}$$

3) Determinare la 2ª forma quadratica fondamentale:

$$\Rightarrow \quad g = \det G = \det \begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}$$

$$= (1+4u^2)(1+4v^2) - 16u^2v^2$$

$$= 1 + 4v^2 + 4u^2 + \cancel{16u^2v^2} - \cancel{16u^2v^2}$$

$$= 1 + 4v^2 + 4u^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{g} = \sqrt{1+4v^2+4u^2}$$

$$\Rightarrow \quad X_{11} = \frac{\partial X_1}{\partial u} = (0, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \quad X_{12} = \frac{\partial X_1}{\partial v} = (0, 0, 0) \Rightarrow L_{12} = 0$$

$$\Rightarrow \quad X_{22} = \frac{\partial X_2}{\partial v} = (0, 0, -2)$$

$$\Rightarrow \quad L_{11} = \frac{\det \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow L_{11} = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$$\Rightarrow \quad L_{22} = \frac{\det \begin{pmatrix} X_{22} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow L_{22} = -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$\Rightarrow$ 2ª forma quadratica fondamentale:

$$\boxed{du^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} - dv^2 \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}}$$

4) Determinare la curvatura di Gauss:

$$K_S = \frac{\ell}{g} \quad \text{con:} \quad \ell = \det L, \; g = \det G$$

$$\Rightarrow \quad g = 1 + 4u^2 + 4v^2$$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \ell = -\frac{4}{1+4u^2+4v^2}$$

$$\Rightarrow K_S = \frac{\ell}{g} = -\frac{4}{1+4u^2+4v^2} \cdot \frac{1}{1+4u^2+4v^2}$$

$$= \boxed{-\frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}}$$

Es. 6)

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, \, u\sin v, \, v) \quad (u,v) \in (0,1)\times(0,\pi)$$

1) Mostrare che S è regolare

$\Rightarrow$ deve essere $(\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi) \neq \vec{0}$

$\Rightarrow X_1 = (\cos v, \sin v, 0), \quad X_2 = (-u \sin v, u \cos v, 1)$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{pmatrix} = (\sin v, -(\cos v), u)$$

$$= (\sin v, -\cos v, u)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin v = 0 \\ -\cos v = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il sistema non ha soluzione, quindi $\nexists$ punti singolari di S

2) Calcolare la curvatura di Gauss $\forall P \in S$ e verificare se $\exists$ un aperto di S localmente isometrico ad un piano

$$\Rightarrow K_S = \frac{l}{g} = \frac{\det L}{\det g}$$

$\Rightarrow (X_1 | X_1) = 1, \quad (X_1 | X_2) = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0$

$(X_2 | X_2) = u + 1$

$$\Rightarrow g = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix} = u+1$$

$$\Rightarrow X_{11} = \partial_u X_1 = (0,0,0) \Rightarrow l_{11} = 0$$

$$\Rightarrow X_{12} = \partial_v X_1 = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\Rightarrow X_{22} = \partial_v X_2 = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

$$\Rightarrow l_{12} = \frac{\det \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{g}} \quad , \quad l_{22} = \frac{\det \begin{pmatrix} X_{22} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow l_{12} = -\frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} -u\cos v & -u\sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow l_{22} = 0$$

$$\Rightarrow l = \det \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{u+1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{u+1}} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{u+1}$$

$$\Rightarrow K_S = \frac{l}{g} = -\frac{1}{u+1} \cdot \frac{1}{u+1} = \boxed{-\frac{1}{(u+1)^2}}$$

$\Rightarrow$ dato che $u \in (0,1)$, $K_S \neq 0 \ \forall u$

$\Rightarrow$ in particolare, $K_S < 0 \ \forall u \in (0,1)$

$\Rightarrow \nexists$ un aperto di S localmente isometrico ad un piano.

3) Determinare i punti piatti di S:

$\nexists$ punti piatti di S, sono tutti punti iperbolici

Es. 7) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} v\cos u \\ v\sin u \\ v \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^3 \quad (S \text{ è un cono})$$

con $U = (0, 2\pi) \times (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}^2$

1) Verificare che $\nexists$ punti singolari di S
2) Calcolare le curvatura principali di S in ogni suo punto
3) Calcolare la curvatura gaussiana e media di S.

$\Rightarrow \quad X_1 = (-v\sin u, v\cos u, 0) \quad X_2 = (\cos u, \sin u, 1)$

$$\Rightarrow \quad X_1 \times X_2 = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{pmatrix} = (v\cos u, v\sin u, -v)$$

con $v > 0$

$\Rightarrow$ tale vettore non è MAI nullo $\Rightarrow \nexists$ pti singolari di S

$\Rightarrow$ Curvature:

$$g\lambda^2 - (g_{11}L_{22} + 2g_{12}L_{12} + L_{11}g_{22})\lambda + l = 0$$

$\Rightarrow \quad X_{11} = (-v\cos u, -v\sin u, 0) \quad X_{12} = (-\sin u, \cos u, 0)$

$$X_{22} = (0, 0, 0) \Rightarrow L_{22} = 0$$

$\Rightarrow g_{11} = v^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 2$

$\Rightarrow \quad G = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{g} = \sqrt{2} \cdot v$

$\Rightarrow \quad L_{11} = \dots = -\frac{v}{\sqrt{2}}, \quad L_{12} = \dots = 0, \quad L_{22} = 0$

$\Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ell = 0 \Longrightarrow \boxed{K_s = 0}$

$\Rightarrow$ dall'equazione si ha:

$$2v^2 \lambda^2 + \frac{2v}{\sqrt{2}} \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda v (2\lambda v + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 0, \quad \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2v}} \; (v > 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{K_m = -\frac{\sqrt{2}}{4v}}$$

---

es. 8) Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ parametrizzata globalmente da

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \sin v \, (a + R \sin u) \\ \cos v \, (a + R \sin u) \\ R \cos u \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^3$$

con $U = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, $R \in (0, a) \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Calcolare l'area di S e classificare i punti regolari di S

$\Rightarrow$ Oss. S è un Toro

$\Rightarrow \quad X_1 = (R \cos u \sin v, \; R \cos u \cos v, \; -R \sin u)$

$\Rightarrow \quad X_2 = ((a + R \sin u) \cos v, \; -(a + R \sin u) \sin v, \; 0)$

$\Rightarrow \quad g_{11} = (X_1 | X_2) = R^2, \quad g_{12} = (X_1 | X_2) = 0$

$$g_{22} = (X_2 | X_2) = (a + R \sin u)^2$$

$$\Rightarrow G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & (a+R\sin u)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow g = R^2(a+R\sin u)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{g} = R(a+R\sin u) > 0$$

$$\text{Area}(S) = \iint_U R(a+R\sin u)\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R(a+R\sin u)\,dv\,du$$

$$= 2\pi R\left(\int_0^{2\pi} a\,du + \cancel{\int_0^{2\pi} R\sin u\,du}^{\,0}\right) = \boxed{4\pi^2 a R}$$

$\Rightarrow$ Classificare i punti di S:

$$X_{11} = (-R\sin u\sin v, -R\sin u\cos v, -R\cos u)$$

$$X_{12} = (R\cos u\cos v, -R\cos u\sin v, 0)$$

$$X_{22} = (-(a+R\sin u)\sin v, -(a+R\sin u)\cos v, 0)$$

$$\Rightarrow L_{11} = \dots = R$$

$$\Rightarrow L_{12} = 0, \quad L_{22} = (a+R\sin u)\sin u$$

$\Rightarrow l = R(a+R\sin u)\sin u$ (il segno di l ci dice il tipo di punti regolari)

$\Rightarrow (R\sin u)(a+R\sin u)$ con $R<a$, $v\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow \sin u > 0 \Leftrightarrow u\in[0,\pi]$, $a+R\sin u > 0 \ \forall u$ $(R<a)$

$\Rightarrow$ $l>0$ se $u\in(0,\pi)$ ellittici

$\Rightarrow$ $l=0$ se $u=0, u=\pi$ parabolici

$\Rightarrow$ $l<0$ se $u\in(\pi,2\pi)$ iperbolici