Def. (Connessione - 1):

(X, τ) si dice CONNESSO se $\nexists\ A_1, A_2 \in \tau$ t.c.

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \wedge A_1 \neq \emptyset \neq A_2 \wedge A_1 \cup A_2 = X$

Def. (Connessione - 2):

(X, τ) si dice CONNESSO se gli unici sottoinsiemi di (X, τ) sia aperti che chiusi sono $X, \emptyset$. $(\mathcal{T} \cap \tau = \{\emptyset, X\})$

Verifichiamo che le 2 definizioni si equivalgono:

Dim.

($\Leftarrow$) Supponiamo $X = A_1 \cup A_2$ con $A_1, A_2 \in \tau$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$, allora:

$$X \setminus A_1 = A_2 \Rightarrow A_1 = \mathcal{C}_X(A_2) \Rightarrow A_1 \in \mathcal{T}$$

$\Rightarrow A_1 \in \mathcal{T} \cap \tau$ $\lightning$

($\Rightarrow$) Supponiamo che $\exists\ \emptyset \neq A \neq X \in \tau \cap \mathcal{T}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_X(A) \in \tau \wedge A \cup \mathcal{C}_X(A) = X$ con $A \cap \mathcal{C}_X(A) = \emptyset$

$\wedge\ A \neq \emptyset \neq \mathcal{C}_X(A)$ $\lightning$

q.e.d

Def. (Intervallo di $\mathbb{R}$):

Si dirà INTERVALLO di $\mathbb{R}$ ogni $S \subseteq \mathbb{R}$ t.c. se $a, b \in S$ con $a \leq b$ allora $[a, b] \subseteq S$

$\Rightarrow$ In particolare, saranno detti intervalli tutti i tipi di intervalli di $\mathbb{R}$, tutti i punti, tutte le semirette, $\mathbb{R}$ e $\emptyset$.

es.) $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) ecc.

Teorema (Caratterizzazione dei connessi di $\mathbb{R}$):

$Y \subseteq (\mathbb{R}, \tau_e)$ è connesso $\Leftrightarrow$ Y è un intervallo.

Dim.

($\Leftarrow$) Sia Y intervallo $\neq$ da $\phi, \mathbb{R}, \{a\}$ (casi banali)

Supponiamo Y non connesso:

$\exists A_1, A_2$ disgiunti non banali $\in \tau$ t.c. $A_1 \cup A_2 = Y$.

Prendiamo $x, y \in Y$ con $x \neq y \wedge x \in A_1 \wedge y \in A_2$

$\Rightarrow [x,y] \subseteq Y$ (Y è intervallo).

Sia $z = \sup\{A_1 \cap [x,y]\}$, $A_1 \in \tau$ ($\mathcal{C}_Y(A_2) = A_1$)

$\Rightarrow$ allora $z \in \overline{A_1} = A_1$ e quindi $z = \max\{A_1 \cap [x,y]\}$

$\Rightarrow (z,y] \subseteq A_2$ ma A_2 è chiuso e quindi $z \in \overline{A_2} = A_2$

$\Rightarrow z \in A_1 \cap A_2$ $\lightning$ (A_1, A_2 disgiunti)

($\Rightarrow$) Dato Y connesso suppongo che Y non sia intervallo.

Allora $\exists x, y \in Y$, $z \notin Y$ t.c. $x < z < y$

$\Rightarrow$ siano $A_1 = (-\infty, z) \cap Y \in \tau$, $A_2 = (z, +\infty) \cap Y \in \tau$

$\Rightarrow A_1 \cup A_2 = Y$ e $A_1 \cap A_2 = \phi$ con $A_1 \neq \phi \neq A_2$

$\Rightarrow Y$ non connesso $\lightning$

q.e.d

N.B.

$(\mathbb{Q}, \tau_e) \subseteq (\mathbb{R}, \tau_e)$ è TOTALMENTE NON CONNESSO:

qualunque suo sottoinsieme di cardinalità > 1 è non connesso.

Consideriamo il caso in cui (X, τ) non sia connesso, allora posso descriverlo utilizzando le seguenti strutture:

Def. (Componente connessa):

Dato (X, τ) si dice COMPONENTE CONNESSA di $x \in (X,\tau)$ il più grande sottoinsieme connesso contenente x, e si indica con $\mathcal{C}_x$

N.B.

Se $y \in \mathcal{C}_x \Rightarrow \mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$, quindi si può parlare in generale di componenti connesse di (X, τ)

esempio:

$$([0,1] \cup (3,5), \tau_e) \Rightarrow \mathcal{C} = [0,1], \ \mathcal{C}' = (3,5)$$

Lemma:

Sia (X, τ) non connesso, cioè $\exists A_1, A_2 \in \tau$ disgiunti non banali t.c. $X = A_1 \cup A_2$. Allora dato $Y \subseteq X$ connesso si ha che $Y \subseteq A_1 \vee Y \subseteq A_2$

Dim.

Sia $\tilde{A}_1 = A_1 \cap Y \in \tau_Y$, $\tilde{A}_2 = A_2 \cap Y \in \tau_Y$, si ha:

$\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 = \phi$, $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 = Y$ ma Y è connesso quindi

$\tilde{A}_1 = \phi$ oppure $\tilde{A}_2 = \phi$ cioè $Y \subseteq A_1 \vee Y \subseteq A_2$

q.e.d.

Proposizione:

Data $f: (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ continua, allora se (X_1, τ_1) è connesso, $(f(X_1), \tau_2)$ è connesso.

Dim. Supponiamo $f(X_1)$ non connesso, allora $\exists A_1, A_2 \in \tau_2$

disgiunti non banali t.c. $f(X_1) = A_1 \cup A_2$

$\Rightarrow f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2) \in \tau_1$ (f continua) e

$f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = \phi$ con $f^{-1}(A_1) \neq \phi = f^{-1}(A_2)$

$\Rightarrow$ inoltre $f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) = X_1 \Rightarrow X_1$ non connesso

$\lightning$

q.e.d.

<u>Corollario</u> (Connessione è invariante topologico):

Se $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ è omeomorfismo, (X_1, τ_1) è connesso se e solo se (X_2, τ_2) è connesso.

<u>Corollario</u>:

Il quoziente di uno spazio connesso è a sua volta connesso.

<u>N.B</u>

Non vale il viceversa.

<u>Lemma</u>:

Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ famiglia di sottoinsiemi connessi di (X,τ).

Se $\forall i,j \in I$ si ha $X_i \cap X_j \neq \phi$, allora $\bigcup_{i\in I} X_i$ è connesso.

<u>Dim.</u>

Supponiamo $\bigcup_{i\in I} X_i$ non connesso. Allora $\exists A_1, A_2 \in \tau$ t.c. $A_1, A_2 \neq \phi$, $A_1 \cup A_2 = \bigcup_{i\in I} X_i \wedge A_1 \cap A_2 = \phi$. Considero X_{i_1}, poiché è connesso si ha $X_{i_1} \subseteq A_1 \vee X_{i_1} \subseteq A_2$. Assumiamo $X_{i_1} \subseteq A_1$: sia X_j, dato che $X_j \cap X_{i_1} \neq \phi$ non può essere $X_j \subseteq A_2 \Rightarrow X_j \subseteq A_1 \ \forall j \in I$

$\Rightarrow \forall i \quad X_i \subseteq A_1 \Rightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \subseteq A_1 \Rightarrow A_2 = \phi \ \lightning$

q.e.d.

Teorema:

Data $\{X_i\}_{i\in I}$ famiglia di spazi topologici e $X = \prod_{i\in I} X_i$. Allora $(X, \tau_{prodotto})$ è connesso se e solo se X_i è connesso $\forall i \in I$.

Dim.

($\Rightarrow$) Considero $\forall i \in I$ $\pi_i : X \to X_i$ proiezione continua, dato che X è connesso, X_i è connesso.

($\Leftarrow$) Dati X_1, X_2 connessi, consideriamo $X_1 \times \{x_2\}$, $\{x_1\} \times X_2$ con $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Sono entrambi connessi perché sono omeomorfi ad X_1 e X_2 rispettivamente. Sia $(\{x_1\} \times X_2) \cap (X_1 \times \{x_2\}) = \{(x_1, x_2)\} \neq \emptyset$. Costruiamo gli insiemi $A_{x_1 x_2} := (\{x_1\} \times X_2) \cap (X_1 \times \{x_2\})$. Tale $A_{x_1x_2}$ è connesso (per il lemma precedente). Si ha:

$X_1 \times X_2 = \bigcup_{(x_1,x_2)} A_{x_1x_2}$, $A_{x_1x_2} \cap A_{z_1z_2} = \{(x_1, z_2), (z_1, x_2)\} \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \{A_{x_1x_2}\}_{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2}$ è famiglia di connessi che si intersecano a 2 a 2 $\Rightarrow \bigcup_{x_1,x_2} A_{x_1x_2} = X_1 \times X_2$ è connesso.

q.e.d.

Proposizione:

Dati $Y, Z \subseteq (X, \tau)$ t.c. $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$, allora si ha che se Y è connesso, Z è connesso.

Dim.

Sia $Z = A_1 \cup A_2$ con $A_1, A_2 \in \tau$ disgiunti.

$\Rightarrow Y$ connesso e $Y \subseteq Z \Rightarrow Y \subseteq A_1 \Rightarrow \overline{Y} \subseteq \overline{A_1}$

$\Rightarrow A_1 \in \mathcal{T} \ (\mathcal{C}_Z(A_2) = A_1) \Rightarrow \overline{Y} \subseteq \overline{A_1} = A_1 \subseteq Z \subseteq \overline{Y} \subseteq A_1$

$\Rightarrow Z \subseteq A_1 \Rightarrow A_2 = \phi \Rightarrow Z$ connesso.

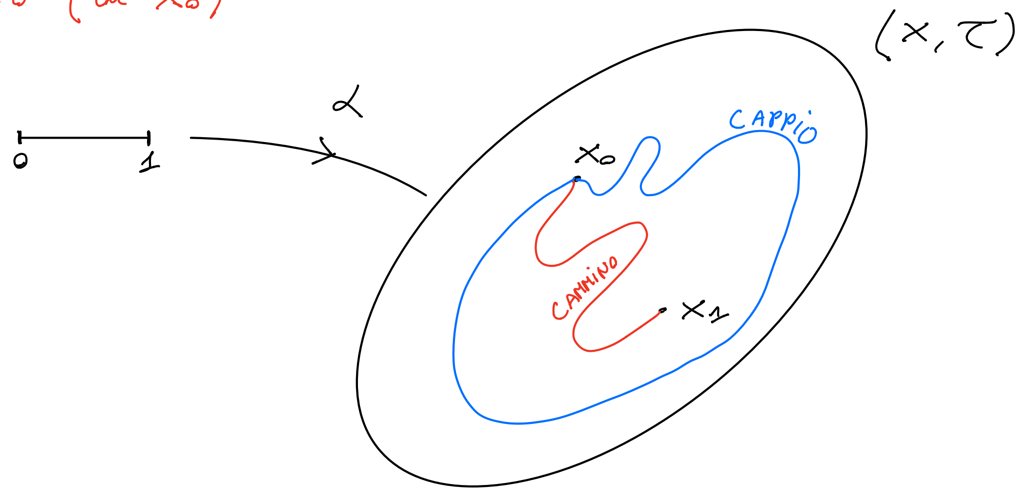
q.e.d.

N.B. In particolare ciò implica Y connesso $\Rightarrow \overline{Y}$ connesso e quindi le componenti connesse di uno spazio topologico sono CHIUSE.

Def. (Cammino o Arco):

Si dice CAMMINO o ARCO in (X, τ) un'applicazione continua $\alpha : ([0,1], \tau_e) \to (X, \tau)$ con $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ detti ESTREMI DELL'ARCO. Se $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, α si dice CAPPIO (in x_0)

$\Rightarrow$



Def. (Connessione per archi):

(X, τ) spazio topologico si dice CONNESSO PER ARCHI se $\forall x, y \in X \ \exists \ \alpha : [0,1] \to X$ cammino t.c. x, y sono gli estremi di α.

Teorema:

Dato (X, τ) spazio topologico, se (X, τ) è connesso per archi allora è connesso

Dim.

Supponiamo (X, τ) connesso per archi ma non connesso

$\Rightarrow \exists A_1, A_2 \in \tau$ non banali disgiunti t.c. $A_1 \cup A_2 = X$.

$\Rightarrow$ siano $x \in A_1$, $y \in A_2$, allora $\exists \alpha$ t.c. $\alpha(0) = x \wedge$ $\alpha(1) = y \Rightarrow \alpha([0,1])$ è connesso ($[0,1]$ è connesso, α è continua) $\Rightarrow \alpha([0,1]) \subseteq A_1 \vee \alpha([0,1]) \subseteq A_2$ ⚡ (gli estremi di α sono uno in A_1 e l'altro in A_2)

q.e.d.

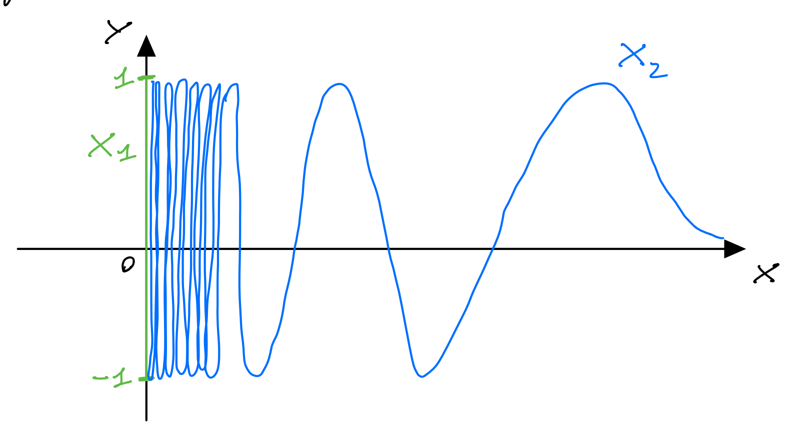
N.B.

Non vale il viceversa!!! Connesso $\not\Rightarrow$ Connesso per archi

Controesempio: CURVA DEL TOPOLOGO

Sia $X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0,\ y \in [-1,1]\}$, $X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ con } x > 0\}$

$\Rightarrow$ Grafico:



$\Rightarrow X$ non è connesso per archi: $\nexists \alpha$ continua avente estremi in X_1 e X_2

$\Rightarrow X$ è connesso:

$X_2 \subseteq X$ è connesso, $\overline{X_2} = X \Rightarrow X$ connesso

Def. (Locale connessione):

(X,τ) spazio topologico si dice LOCALMENTE CONNESSO se $\forall x \in X$ $\exists$ sistema fondamentale di intorni connessi

N.B.

Connessione $\not\Leftrightarrow$ locale connessione

esempio di spazio localmente connesso ma non connesso:

$X = ((0,1) \cup (2,3), \tau_e)$ NON è connesso:

$A_1 = (0,1),\ A_2 = (2,3) \Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset \wedge A_1 \cup A_2 = X$

X è localmente connesso:

$\forall x \in X$ $\exists B_\varepsilon(x) \in \tau_e$ sistema fondamentale di intorni

esempio di spazio connesso ma non localmente connesso:

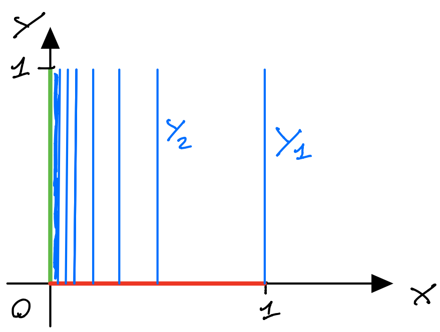
$X = X_0 \cup Y_0 \cup \left(\bigcup_n^{+\infty} Y_n\right)$ con:

$X_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ y=0\}$,

$Y_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,1],\ x=0\}$,

$Y_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{n},\ y \in [0,1]\}$

$\Rightarrow$ Grafico:



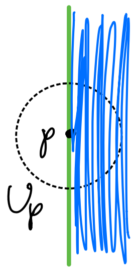
Spazio a pettine o "Pettine per semicolori".

$\Rightarrow$ X è connesso ma non localmente connesso

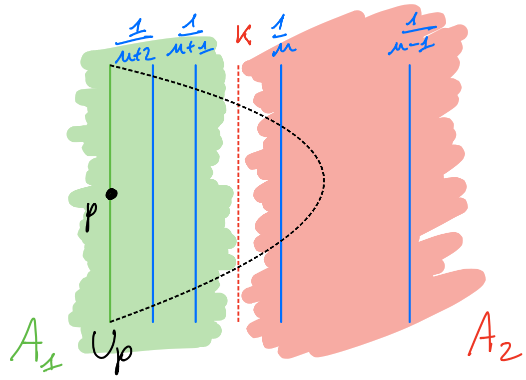
$\Rightarrow$ è connesso perché è connesso per archi (X_0 salva tutto)

$\Rightarrow$ non è localmente connesso:

se $p \in Y_0$ $\nexists$ intorno aperto connesso.



$\Rightarrow$ sia $\frac{1}{n+1} < k < \frac{1}{n}$:



$\Rightarrow$ sia $p \in Y_0 \wedge U_p$ intorno di p.

$\Rightarrow$ siano $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < k,\ y \in [0,1]\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > k,\ y \in [0,1]\}$, tali $A_1, A_2 \in \tau_e$ e si ha:

$U_p \cap A_1,\ U_p \cap A_2 \in \tau_e$, $(U_p \cap A_1) \cap (U_p \cap A_2) = \emptyset$ e

$(U_p \cap A_1) \cup (U_p \cap A_2) = U_p$

$\Rightarrow U_p$ non è connesso $\Rightarrow X$ non è localmente connesso.

Def. (Cammini omotopi):

2 cammini α, β si dicono OMOTOPI se $\exists F$ tale che

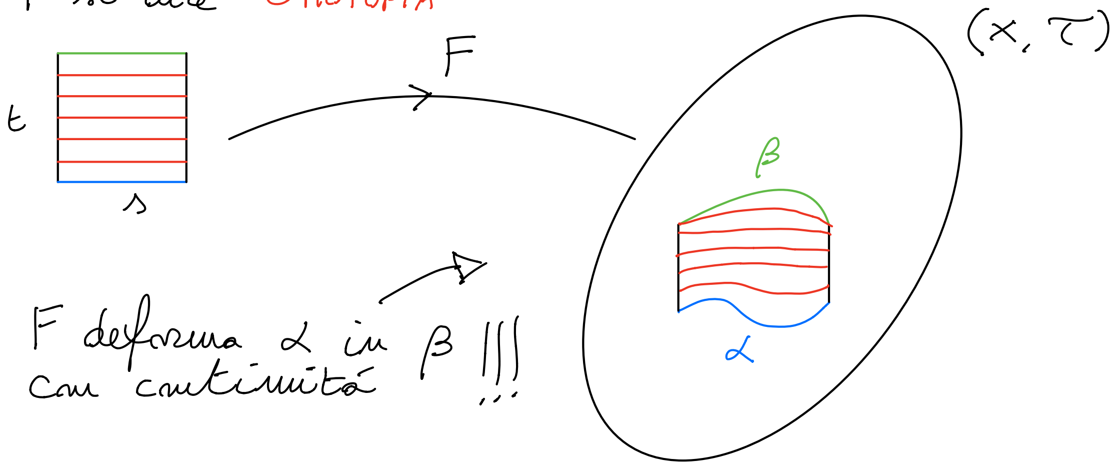
$$\begin{aligned} F: [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow (X,\tau) \\ (s,t) &\longmapsto F(s,t) \end{aligned}$$

con:

1) $F(s,0) = \alpha(s)$
2) $F(s,1) = \beta(s)$

$\forall s \in [0,1]$

Tale F si dice OMOTOPIA



F deforma α in β !!!
con continuità

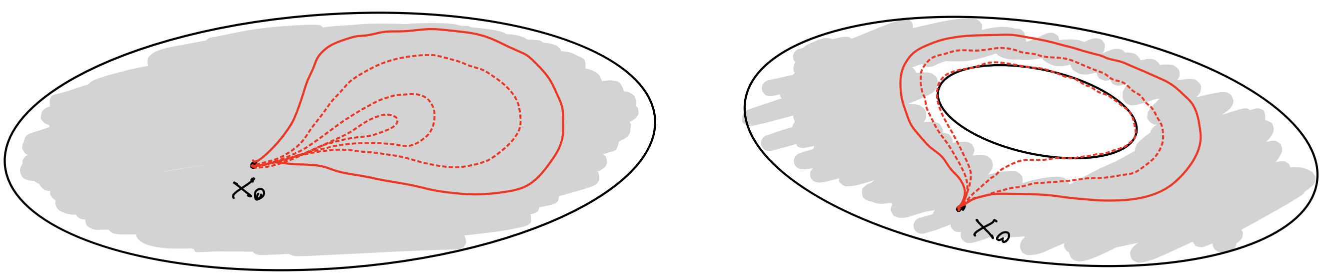
Dato (X, τ) spazio topologico, indico $\mathcal{C}_{x_0}(X)$ l'insieme di tutti i possibili cappi in x_0:

$$\mathcal{C}_{x_0}(X) = \{ \alpha : [0,1] \to (X, \tau) \text{ cammino} \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \}$$

$\Rightarrow$ tale $\mathcal{C}_{x_0}(X)$ è sicuramente non vuoto:

$$\forall x_0 \quad \exists\, \alpha_{x_0}(s) = x_0 \quad \forall s \in [0,1] \quad (\text{cappio nullo})$$

<u>Def.</u> (Semplice Connessione):
Uno spazio topologico (X, τ) si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se tutti i cappi in $\mathcal{C}_{x_0}(X)$ sono omotopi al cappio nullo α_{x_0} $\forall x_0 \in X$.



SEMPLICEMENTE CONNESSO   NON SEMPLICEMENTE CONNESSO

<u>N.B.</u>
Se (X, τ) è connesso per archi, è sufficiente verificarlo per un solo $x_0 \in X$.

Dati (X, τ) spazio topologico, $x_0 \in X$, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_{x_0}(X)$.
definisco

$$\alpha \cdot \beta : [0,1] \longrightarrow (X, \tau) \quad \text{t.c.}:$$
$$t \longmapsto \alpha \cdot \beta(t)$$

$$\alpha \cdot \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\bullet$ è un'operazione binaria interna ma ha pessime proprietà e non permette di definire un gruppo.

$\Rightarrow$ considero allora la relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathcal{C}_{x_0}(X)$:

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha, \beta \text{ omotopi.}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_{x_0}(X)/\sim \; = \pi_1(X, x_0)$, ed è ben definita la seguente operazione:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) &\longmapsto [\alpha] \bullet [\beta] = [\alpha \cdot \beta] \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ elemento neutro (Id) ed elemento inverso (α^{-1})

$\Rightarrow$ $(\pi_1(X, x_0), \bullet)$ è il GRUPPO FONDAMENTALE di X in x_0 e, in generale, non è abeliano.