5. Formula Integrale di Cauchy

Teorema (Formula Integrale di Cauchy):

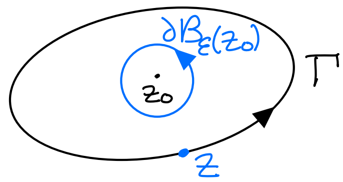
Data $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{O}(A)$ e $\Gamma = \partial D$ curva di Jordan con $D \subset A$ si ha, $\forall z_0 \in D$:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}$$

Dim.:

Sia $\varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(z_0) \subset D$. Allora si ha che $\frac{f(z)}{z - z_0} \in \mathcal{O}(\overline{D \setminus B_\varepsilon(z_0)})$, quindi:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$



Inoltre:

$$\oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \underbrace{\oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz}_{=: I_\varepsilon} + \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz$$

Si ha:

$$B_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid z(t) = z_0 + \varepsilon e^{it},\ t \in [0, 2\pi) \}$$

$$\Rightarrow z(t) - z_0 = \varepsilon e^{it} \Rightarrow dz(t) = \dot{z}(t)\, dt = i \varepsilon e^{it}\, dt$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{\varepsilon e^{it}}}\, i \cancel{\varepsilon e^{it}}\, dt = 2\pi i f(z_0)$$

Inoltre:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f'(z_0) \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < M \text{ per } \varepsilon \text{ piccolo}$$

$$\Rightarrow |I_\varepsilon| \leq \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \cdot |dz| \underset{\uparrow}{\leq} M\, 2\pi \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Disuguaglianza ML

$\Rightarrow |I_\varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ TUTTAVIA I_ε = costante (NON DIPENDE DA ε !!!), quindi deve necessariamente essere $I_\varepsilon = 0$.

Quindi, ricapitolando si ha:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \cancelto{0}{I_\varepsilon} + 2\pi i\, f(z_0)$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

□

CONSEGUENZE DELLA FORMULA DI CAUCHY

Dato che $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(s)}{s-z}\,ds$, si ha che $\forall z \in D$ $f(z)$ é UNIVOCAMENTE determinato dai valori di f su ∂D (valori al contorno) mediante una "media pesata" della funzione ANALITICA $z \longmapsto \frac{1}{s-z}$ con $s \in \Gamma$ fissato.

Teorema (FONDAMENTALE DELL' ANALISI COMPLESSA):

Data $f: A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con A aperto, si ha che:

$$\boxed{f \text{ è olomorfa su } A \Rightarrow f \in C^\omega(A)}$$

Dim.:

Va mostrato che, se $f \in \mathcal{O}(A)$, $\forall z_0 \in A\ \exists r>0$ t.c. $f(z)\big|_{B_r(z_0)} = \sum_{\mu=1}^{+\infty} c_\mu (z-z_0)^\mu$. Siano quindi $z_0 \in A$, $r>0$ t.c. $\overline{B_r(z_0)} \subseteq A$, $\Gamma = \partial B_r(z_0) \subset A$. Si ha:

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} = \frac{1}{s-z_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n$$

quindi, per $z \in B_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(s)}{s-z}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(s)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}\,ds$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}}}_{=:\,c_n}\Bigg)(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Teorema di integrazione per serie

$\square$

<u>Osservazioni</u>:

1) FORMULA INTEGRALE per le DERIVATE di una funzione olomorfa:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}}}$$

$\forall \Gamma = \partial D$ con D CA (Γ curva di Jordan)

2) $f \in \mathcal{O}(A) \Rightarrow f \in C^\omega(A) \Rightarrow f' \in C^\omega(A) \Rightarrow f' \in \mathcal{O}(A)$

infatti si ha:

$$f(z)\Big|_{B_r(z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow f'(z)\Big|_{B_r(z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, c_n (z-z_0)^{n-1}$$

<u>Teorema</u> (Stime di Cauchy per le derivate):

Data $f \in \mathcal{O}(A)$, si ha:

$$\boxed{|f^{(k)}(z)| \leqslant \sup_{B_R(z)}\{|f|\}\cdot\frac{k!}{R^k} \qquad \forall R < dist(z, \partial A)}$$

Definito $D_R := \{z \in \mathbb{C} \mid dist(z, D) < R\}$, si ha:

$$\sup_{D}\{|f^{(K)}|\} \leq \sup_{D_R}\{|f|\}\cdot\frac{K!}{R^K} \quad \forall R>0 \text{ t.c. } D_R \subset A$$

Dim.:

$$|f^{(K)}(z)| = \left|\frac{K!}{2\pi i}\oint_{\partial B_R(z)}\frac{f(s)\,ds}{(s-z)^{K+1}}\right| \leq \left|\frac{K!}{2\pi i}\right|\cdot\oint_{\partial B_R(z)}\left|\frac{f(s)}{(s-z)^{K+1}}\right|\cdot|ds|$$

$$\leq \sup_{B_R(z)}\{|f|\}\cdot\frac{\cancel{2\pi}\cancel{R}\,K!}{R^{K+\cancel{1}}\,\cancel{2\pi}}$$

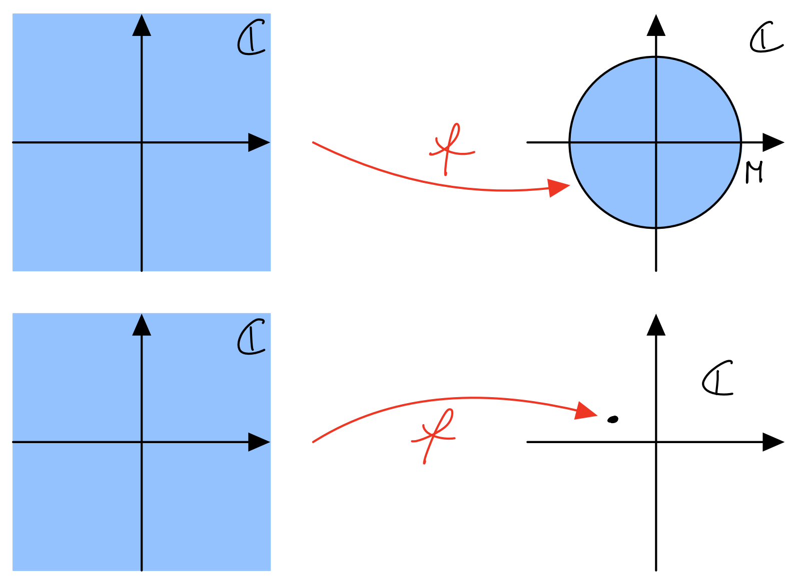
$\square$

N.B.-
Si controllano i valori di $f^{(K)}$ mediante i valori di f !!!

Teorema (di Liouville):

f INTERA $\left(\Leftrightarrow f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\right)$ e LIMITATA $\left(\Leftrightarrow \exists M>0 \text{ t.c. } \sup_{\mathbb{C}}\{|f|\}\leq M\right) \Rightarrow f$ é COSTANTE

Graficamente:



$\Longrightarrow$ Teorema di Liouville

Dim.:

$\forall R>0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$ si ha:

$$|f'(z)| \leq \sup_{B_R(z)}\{|f|\}\cdot\frac{1}{R} \leq \frac{M}{R} \longrightarrow 0 \text{ per } R\longrightarrow+\infty$$

$\Rightarrow f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = \text{costante}$

$\square$

Teorema (Fondamentale dell'Algebra):

Sia $f(z) = c_n z^n + \ldots + c_1 z + c_0$ con $c_i \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ (polinomio di $\deg = n$). Allora $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $f(z_0) = 0$ e, per induzione, $\exists\, n$ radici di f (contando le rispettive molteplicitá).

Dim.:

Supponiamo per assurdo che $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$. Allora $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ é INTERA e LIMITATA:

1) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \Rightarrow g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \Rightarrow g$ é INTERA

2) per $|z| > R_0$ si ha:

$$|f(z)| \geq |c_n| \cdot |z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| \cdot |z|^i \geq \frac{|c_n|}{2} \cdot |z|^n$$

$$\Rightarrow |g(z)| < \frac{2}{|c_n|} \cdot \frac{1}{R_0^n} \equiv M'$$

per $|z| \leq R_0$:

$$|g(z)| \leq \sup_{B_R(0)} \{|g|\} = \max_{B_R(0)} \{|g|\} = M$$

$$\Rightarrow |g(z)| \leq \max\{M, M'\} \Rightarrow g \text{ é LIMITATA}$$

$\Rightarrow$ per Liouville si ha $g = \text{costante} \Rightarrow f$ costante $\lightning$

($c_n \neq 0 \Rightarrow f$ NON é costante)

$\square$

Teorema (Proprietá della media):

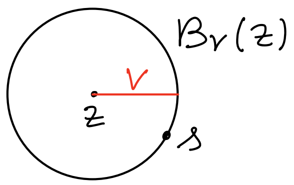
Data $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{O}(A)$, applicando la formula di Cauchy nel caso in cui $\Gamma = \partial B_r(z)$ con

$r < \text{dist}(z, \partial A)$ si ottiene:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta}$$

ovvero il valore di f nel centro di $B_r(z)$ é la media dei valori di f sulla circonferenza.

Dim.:



$\Rightarrow s = z + re^{i\theta} \Rightarrow ds = ire^{i\theta}d\theta$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{i\theta})}{\cancel{re^{i\theta}}} \cancel{ire^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta$$

$\square$

Teorema (Principio del Massimo Modulo):

Dati $f: A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{O}(A)$ e $B \subset A$ CONNESSO, se $\sup_B\{|f|\} = |f(z_0)| \left(= \max_B\{|f|\}\right)$ con $z_0 \in \mathring{B}$, allora f é COSTANTE su B. In particolare, se $f \in C^0(\overline{B})$ allora $\sup_B\{|f|\} = \sup_{\partial B}\{|f|\}$ (ovvero $\max_B\{|f|\}$ é assunto su $\partial\overline{B}$).

Dim.:

Sia $r > 0$ t.c. $\overline{B_r(z_0)} \subset B$ e $|f(z_0)| = \max_B\{|f|\}$.
Sia $0 < s < r$, per la proprietà della media su $B_s(z_0)$ si ha:

$$|f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + se^{i\theta})d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + se^{i\theta})|d\theta$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|d\theta \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + se^{i\theta})| - |f(z_0)|}_{\le 0} d\theta \ge 0$$

$\Rightarrow |f(z_0)| = |f(z)| \quad \forall z \in B_r(z_0)$

$\Rightarrow |f(z)| =$ costante su $B_r(z_0)$

$\Rightarrow |f(z)| =$ costante su B ($\forall z_1 \in B$, $\exists \Gamma$ arco tra z_0 e z_1)

$\Rightarrow \mathrm{rk}\, D_f(z) \leq 1 \quad \forall z \in B \Rightarrow D_f(z) = \vec{0} \quad \forall z \in B$

$\Rightarrow f(z) =$ costante su B

$\square$

Osservazione:

Se $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B$ vale il principio del minimo modulo (si applica il precedente teorema alla funzione domanfa $g(z) := \frac{1}{f(z)}$)

Corollario (Proprietà della media e Principio del MAX/MIN modulo per funzioni armoniche)

Siano $u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ armonica, $z_0 \equiv (x_0, y_0) \in A$, $r > 0$ t.c. $\overline{B_r(z_0)} \subseteq A$. Allora si ha:

$$\boxed{u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, d\theta}$$

Inoltre, se $B \subseteq A$ è connesso e $\exists \bar{z} \in \mathring{B}$ t.c. $\max_B \{u\} = u(\bar{z})$, allora $u =$ costante su B.

Dim.:

Sia $v : B_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'armonica coniugata di u su $B_R(z_0)$ con $R > r \wedge B_R(z_0) \subseteq A$. Posto $f = u + iv : B_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$, si ha che $f \in \mathcal{O}(B_R(z_0))$

$\Rightarrow$ applicando la proprietà della media di f su $\overline{B_R(z_0)}$ si ha la prima delle 2 tesi.

Sia ora $s \leq r$, si ha:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\bar{z} + s e^{i\theta})\, d\theta \leq u(\bar{z})$$

$\Rightarrow$ u = costante su $\overline{B_R(\bar{z})}$ $\Rightarrow$ u = costante su B

$\square$

N.B.

In particolare, max. e min. di funzioni armoniche sono assunti alla frontiera del loro dominio!!!