2. Funzioni Complesse

Per operare con funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ è necessario innanzitutto fissare una topologia su $\mathbb{C}$:

$\Rightarrow$ topologia su $\mathbb{C}$ $\equiv$ topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$

quindi una base di aperti è costituita, per esempio, dalle "palle aperte" di centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raggio $r>0$:

$$B_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$$

Consideriamo ora una funzione $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$. (A aperto)

$\Rightarrow$ sappiamo che, in notazione rettangolare, $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, quindi possiamo scrivere:

NOTAZIONE RETTANGOLARE PER FUNZIONI COMPLESSE:

$$\boxed{\begin{gathered} f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y) \\ \text{con } u, v : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{gathered}}$$

<u>esempio</u>:

Sia $c = a + ib \in \mathbb{C}$, definiamo $f(z) = c \cdot z = (a+ib)(x+iy)$

$\Rightarrow f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ con $u(x,y) = ax - by$, $v(x,y) = bx + ay$.

In particolare, si ha:

$$f(x+iy) \equiv \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

con:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{t.c.}$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv c \cdot z$$

$\Rightarrow$ L'azione della matrice 2×2 a coefficienti reali sul vettore $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ corrisponde al prodotto di $c \cdot z$ con $c = a+ib$, $z = x+iy$

In generale si ha:

$$(a+ib) \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a\,Id_2 + b\,J_2 \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

con:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad J_2^2 = -Id_2$$

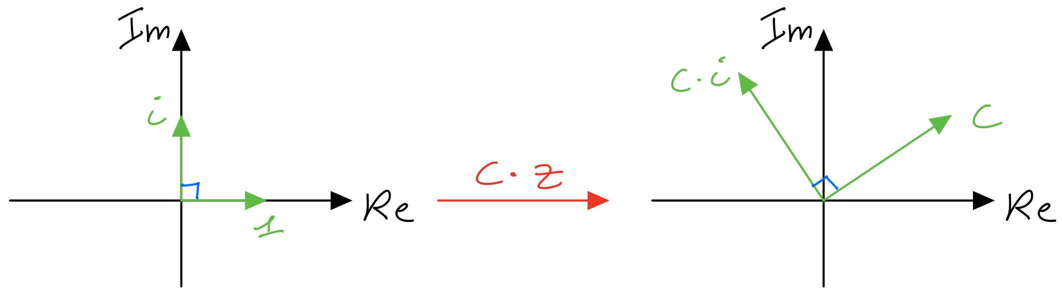
$\Rightarrow$ tale corrispondenza tra $\mathbb{C}$ e $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è un ISOMORFISMO DI ANELLI

N.B.

Dato $c = a+ib \in \mathbb{C}$, la matrice $C = a\,Id_2 + b\,J_2$ (con $J_2^2 = -Id_2$) è del tipo:

$$c = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{i\theta} \equiv C = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{DILATAZIONE}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\substack{\text{ROTAZIONE} \\ \text{ANTIORARIA DI} \\ \text{ANGOLO } \theta}}$$

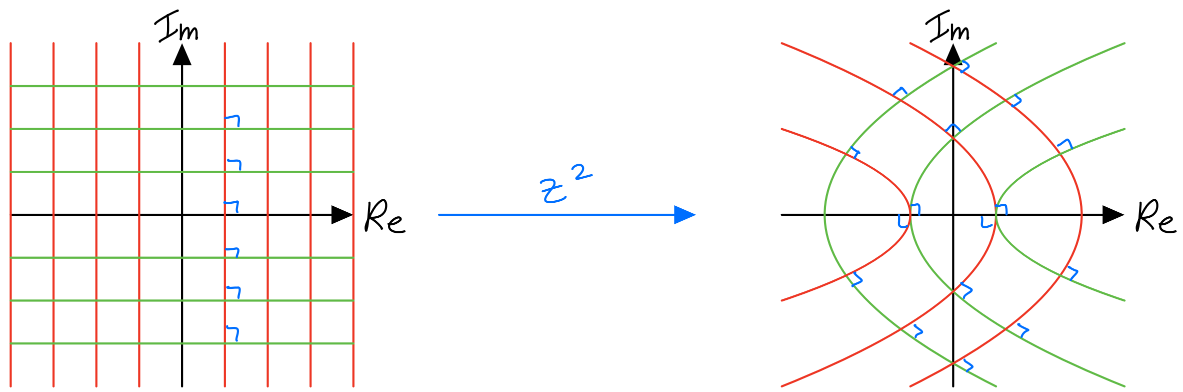
$\Rightarrow$ una composizione di una dilatazione con una rotazione è detta una TRASFORMAZIONE CONFORME: si tratta di una trasformazione del piano in sé stesso che preserva gli angoli (NON preserva tuttavia le lunghezze, a causa del fattore di dilatazione $\sqrt{a^2+b^2}$).



esempio:

$$f(z) = z^2 \Rightarrow f(x+iy) = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$$

$\Rightarrow$ l'applicazione non è lineare, bensì quadratica, quindi le rette coordinate in partenza (x = costante, y = costante) vengono trasformate in curve in arrivo, rispettando tuttavia gli angoli delle loro intersezioni:



LIMITI e CONTINUITÀ

Dato che la topologia su $\mathbb{C}$ è isomorfa alla topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$, si ha:

1) $\lim\limits_{z \to z_0} f + g = \lim\limits_{z \to z_0} f + \lim\limits_{z \to z_0} g$

2) $\lim\limits_{z \to z_0} f \cdot g = \lim\limits_{z \to z_0} f \cdot \lim\limits_{z \to z_0} g$

3) $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{z \to z_0} f \cdot \frac{1}{\lim\limits_{z \to z_0} g}$

$\Rightarrow$ grazie a tali proprietà si ha immediatamente la

CONTINUITÀ DEI POLINOMI $f(z)=\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot z^k$ e la CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI RAZIONALI $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ (P, Q polinomi)

DIFFERENZIABILITÀ (IN SENSO REALE)

Data $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ $\left(\equiv (x,y)\longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y)\end{pmatrix}\right)$

si ha che la DIFFERENZIABILITÀ è determinata dalla matrice Jacobiana di f:

$$Df(x+iy)=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

se $u,v \in C^1(\mathbb{R})$ si ha che vale il Teorema della funzione inversa, e quindi:

$$\det Df(z_0)\neq 0 \Rightarrow \exists B_r(z_0) \text{ t.c. } \exists \left(f\Big|_{B_r(z_0)}\right)^{-1}$$

<u>esempio</u>:

$f(z)=z^2=x^2-y^2+2ixy$

$\Rightarrow u(x,y)=x^2-y^2 \in C^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow v(x,y)=2xy \in C^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow Df(x+iy)=\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x\end{pmatrix}=2x\, Id_2+2y\, J_2$

$\Rightarrow \det Df(x+iy)=4(x^2+y^2)\neq 0 \quad \forall z\neq 0$

$\Rightarrow f(z)=z^2$ è LOCALMENTE INVERTIBILE al di fuori dall'origine.

DERIVABILITÁ IN SENSO COMPLESSO

Data $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A aperto, $z_0 \in A$, si dice che f è DERIVABILE in senso complesso in z_0 se:

$$\boxed{\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: \dot{f}(z_0)}$$

DERIVATA COMPLESSA DI f in z_0

N.B.

$h \in \mathbb{C}$!!!

Se f è derivabile in senso complesso $\forall z \in A$ (ovvero se $\exists \dot{f}(z)$ $\forall z \in A$), f si dice OLOMORFA su A.

Valgono le stesse <u>regole di derivazione</u> del caso reale !!!

<u>esempio</u>:

le funzioni elementari sono olomorfe:

$$f(z) = z^2 + 4iz \Rightarrow \dot{f}(z) = 2z + 4i$$

$$f(z) = \frac{1}{z-i} \Rightarrow \dot{f}(z) = -\frac{1}{(z-i)^2}$$

Che relazione sussiste tra i 2 concetti di differenziabilità in senso reale e derivabilità in senso complesso?

Sia f derivabile in senso complesso. Notiamo che per calcolare il rapporto incrementale viene utilizzato un incremento h complesso. Possiamo quindi far tendere h a 0 lungo molteplici direzioni sul piano. Scegliamo quindi le 2 direzioni coordinate Re, Im:

1) $h = \varepsilon \in \mathbb{R}$ (incremento sull'asse reale Re):

$\Rightarrow$ calcolando il limite del rapporto incrementale si ha:

$$f'(z_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x_0+\varepsilon, y_0) + i v(x_0+\varepsilon, y_0) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

2) $h = i\varepsilon$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ (incremento sull'asse immaginario Im):

$\Rightarrow$ calcolando il limite del rapporto incrementale si ha:

$$f'(z_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\varepsilon) + i v(x_0, y_0+\varepsilon) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{i\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$\Rightarrow$ dato che $\exists!\, f'(z_0)$, le 2 espressioni devono essere necessariamente uguali, da cui si ottengono le seguenti:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad \text{EQUAZIONI DI CAUCHY-RIEMANN}}$$

Quindi, complessivamente si ha:

$$\boxed{\begin{array}{c} f = u + iv \\ \text{OLOMORFA su } A \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \exists\ \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y} \text{ soddisfacenti} \\ \text{le equazioni di Cauchy-Riemann} \end{array}}$$

Osserviamo ora alcune conseguenze delle equazioni di Cauchy-Riemann:

1) $|\nabla u| = |\nabla v|$

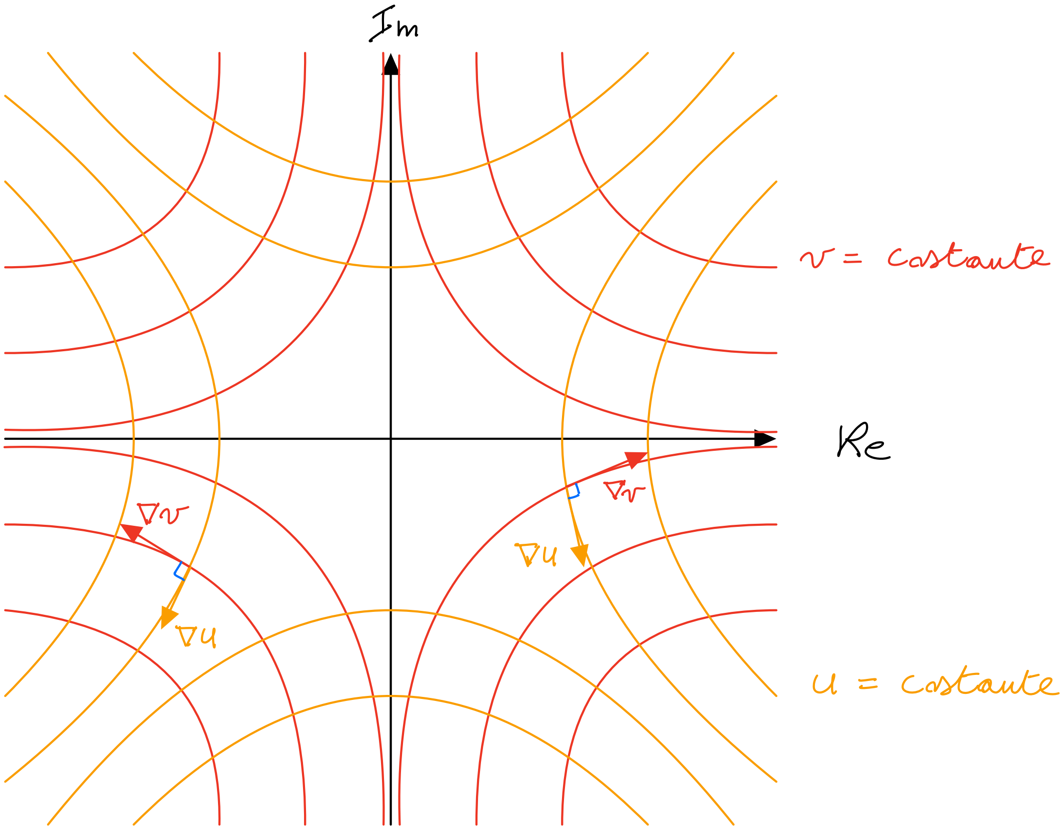
2) $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$

$\Rightarrow$ le curve di livello di u, v sono $\perp$ tra loro

$\Leftrightarrow$ le linee di flusso di ∇u corrispondono ai livelli di v e viceversa.

<u>esempio</u>

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$



3) la matrice Jacobiana di una funzione olomorfa è una trasformazione conforme del piano:

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \underset{\text{C-R}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Df(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} Id_2 + \frac{\partial v}{\partial x} J_2 \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z_0)$$

$\Rightarrow$ poniamo quindi $\theta = \arg(f'(z_0))$, allora si ha:

$$Df(z_0) = |f'(z_0)| \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \equiv \underbrace{|f'(z_0)| e^{i\theta}}_{\text{DECOMPOSIZIONE POLARE DI } f'(z_0)}$$

In particolare:

$$\det Df(z_0) = |f'(z_0)| \quad (\neq 0 \Leftrightarrow f'(z_0) \neq 0)$$

$\Rightarrow$ se f è OLOMORFA su A (e di classe C^1 (*)) allora vale la condizione di INVERTIBILITÀ LOCALE $f'(z_0) \neq 0 \quad \forall z_0 \in A$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Una funzione olomorfa è localmente invertibile}}$

N.B.
L'ipotesi (*) si può rimuovere in virtù del Teorema Fondamentale dell'Analisi Complessa

N.B.
f olomorfa $\Rightarrow rk(Df(z_0)) = 2 \quad \forall z_0$ t.c. $f'(z_0) \neq 0$
(se $f'(z_0) = 0$, $rk(Df(z_0)) = 0$)

esempio:

$$f(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow f \in C^1$$

$\Rightarrow u(x,y) = x^2 + y^2, \quad v(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ calcoliamo $Df(z)$:

$$Df(z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rk(Df(z_0)) = 1 \quad \forall z_0 \neq 0$$

$\Rightarrow f$ NON è olomorfa su $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
(NON valgono le Equazioni di Cauchy-Riemann)

4) Espressione di f in funzione di $z, \bar{z}$:

Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ y = Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si ottengo quindi le seguenti relazioni per le derivate parziali:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{1}{2i} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\dfrac{1}{2i} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Possiamo quindi esprimere $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x+iy \longmapsto f(x+iy)$

attraverso le variabili coniugate $z, \bar{z}$: con abuso di notazione, si pone:

$$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y) = u(z,\bar{z}) + i v(z,\bar{z}) = f(z,\bar{z})$$

Si ha la seguente relazione:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \right)$$

ovvero:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$\Rightarrow$ se f soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dot{f}(z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f olomorfa si DEVE poter esprimere in funzione della sola z !!!

esempio:

$$f(x+iy) = x^2+y^2 = z \cdot \bar{z} = f(z,\bar{z})$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z \neq 0 \quad \forall z \neq 0 \Rightarrow f$ NON è olomorfa.

N.B.

Se f soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann su un aperto $A \subseteq \mathbb{C}$, allora f è olomorfa su A. (se $f \in C^1$ la dimostrazione è semplice, altrimenti discende dal Teorema Fondamentale dell'Analisi Complessa). Quindi, dato $A \subseteq \mathbb{C}$ APERTO, si ha:

$$\boxed{f \text{ OLOMORFA su } A \iff f \text{ soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann su } A}$$

FUNZIONI ANALITICHE COMPLESSE

Def. (Funzione Analitica):

Una funzione $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è ANALITICA su A (ovvero $f \in C^\omega(A)$) se si rappresenta localmente come serie di potenze complesse, ovvero:

$$\boxed{\forall z_0 \in A \ \exists r>0 \text{ t.c. } \forall z \in B_r(z_0) \text{ si ha: } f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot (z-z_0)^k}$$

(Dove $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$)

Tali funzioni hanno un ruolo centrale nella teoria dell'Analisi Complessa. Ricordiamo ora le proprietà di convergenza per le serie di potenze (sia reali che complesse).

- Dato $R > 0$ il raggio di convergenza della serie, si ha convergenza uniforme su $\overline{B_{R-\varepsilon}(z_0)}$ $\forall\, 0 < \varepsilon < R$ e, dato che la serie delle derivate di f ha il medesimo raggio di convergenza, vale il Teorema di Derivazione per serie, ovvero:

$$\boxed{\dot{f}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot c_k (z - z_0)^{k-1}, \quad c_k \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}}$$

$\Rightarrow$ Si deduce che f è derivabile in senso complesso ∞ volte (ovvero $f \in C^{\infty}(A)$) e che f converge alla sua serie di Taylor centrata in z_0 (definizione alternativa di $f \in C^{\omega}(A)$).

<u>esempio</u> (Esponenziale Complesso):

$$\Rightarrow e^{z} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k$$ $\Rightarrow$ tale serie CONVERGE su tutto $\mathbb{C}$ per il criterio di convergenza totale:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} |z^k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} |z|^k = e^{|z|} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ si ha:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$$

$\Rightarrow$ u, v soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, (infatti f è olomorfa su $\mathbb{C}$).

$\Rightarrow$ A differenza del caso reale, si verifica il fenomeno di PERIODICITÀ dell'esponenziale:

$$e^{z + i2n\pi} = e^{z} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

<u>Teorema</u> (FONDAMENTALE DELL'ANALISI COMPLESSA):

Data $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con A aperto, si ha che:

$$\boxed{f \text{ è olomorfa su } A \Rightarrow f \in C^{\omega}(A)}$$

N.B.

Si verifica una radicale differenza rispetto alle funzioni reali! Infatti:

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ DERIVABILE } \not\Rightarrow f \in C^{1}(A)$$

$$(\text{NÉ, tantomeno, } f \in C^{\infty}(A))$$

dato che su $\mathbb{R}$ si ha:

$$\boxed{C^{\omega}(A) \subsetneq C^{\infty}(A) \subsetneq \ldots \subsetneq C^{1}(A) \subsetneq C^{0}(A)}$$

Su $\mathbb{C}$ invece si ha:

$$\boxed{\mathcal{O}(A) = C^{1}(A) = \ldots\ldots = C^{\infty}(A) = C^{\omega}(A)}$$

(dove $\mathcal{O}(A)$ sono le funzioni olomorfe su A)