16. INVERSIONE DELLA TF

PROPOSIZIONE (Formula di Parseval):
$\forall u,v \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y)v(y)dy = \int_{\mathbb{R}} u(y)\hat{v}(y)dy$ (passaggio del cappello)

DIM
$u,v \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u,v \in C_0^0(\mathbb{R}) \Rightarrow |\int_{\mathbb{R}} \hat{u}v| \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}|\cdot|v| \leq \|\hat{u}\|_\infty \cdot \|v\|_1 < +\infty$
Per Fubini si ha:

$$\int \hat{u}v = \int\left[\int u(x)e^{-2\pi i xy}dx\right]v(y)dy = \iint u(x)e^{-2\pi i xy}dx\,dy$$
$$= \int\left[\int v(y)e^{-2\pi i xy}dy\right]u(x)dx = \int u\hat{v}$$

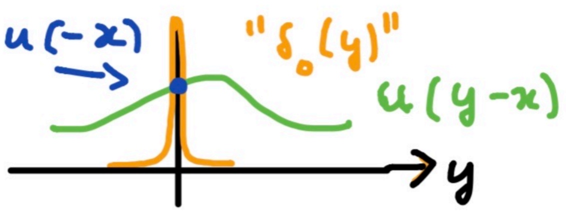
$\square$

FORMULA DI INVERSIONE IN $L_1 \cap C_0^0(\mathbb{R})$:
Data $u \in L^1 \cap C_0^0(\mathbb{R})$ t.c. $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $\hat{\hat{u}}(x) = u(-x)$
ovvero:

$$\boxed{u(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(w)e^{2\pi i wx}dw = \hat{\hat{u}}(-x)}$$

DIM.
Si applica la Formula di Parseval ad un'approssimazione di u (o di $\hat{u}$) e poi si passa al limite:
FORMALMENTE:

$$\int \hat{u}(w)e^{-2\pi i wx}dx = \int \widehat{\tau_x u}(w)\,1\,dw = \int \tau_x u(y)\,\hat{1}(y)dy$$
$$= \int u(y-x)\cdot\delta_0(y)dy = u(-x)$$
$$\Rightarrow \int u(y-x)\delta_0(y)dy \approx \int u(-x)\delta_0(y)dy = u(-x)\underbrace{\int\delta_0(y)dy}_{=1} = u(-x)$$



RIGOROSAMENTE:
consideriamo una famiglia di gaussiane che approssimano la funzione $\equiv 1$. Posto $v(x) = e^{-\pi x^2}$, $v_\lambda(x) = v(\lambda x) = e^{-\pi\lambda^2x^2}$ e $g_\lambda(x) = \hat{v}_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\pi\frac{x^2}{\lambda^2}}$ $(\lambda>0)$ si ha $v_\lambda \xrightarrow[\lambda\to0^+]{} 1$, $g_\lambda \xrightarrow[\lambda\to0^+]{} \delta_0$, $v_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall\lambda>0$ (nel senso delle misure).
Quindi segue che:

$$\hat{\hat{u}}(x) = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(w) e^{-2\pi i w x} v_\lambda(w)\, dw = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\tau_x \hat{u}}(w) v_\lambda(w)\, dw$$

$$= \lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \tau_x u(y)\, g_\lambda(y)\, dy = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} u(y-x) \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\pi \frac{y^2}{\lambda^2}} dy$$

Parseval

$$= \lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} u(\lambda s - x) e^{-\pi s^2} ds = u(-x)$$

$s = \frac{y}{\lambda}$ Convergenza dominata □

TF in $L^2(\mathbb{R})$

É naturale in virtú del seguente risultato:

Teorema (di Plancherel):

$u \in L^1 \cap C_0^0 \cap L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$

Oss.

La TF é un' isometria rispetto a $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Dato che $L^1 \cap C_0^0 \cap L^2(\mathbb{R})$ é denso in $L^2(\mathbb{R})$, si puó estendere $\mathcal{F}$ ad un' ISOMETRIA SURIETTIVA

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

Oss.

$\mathcal{F}$ conserva l'informazione ricavata da una funzione, se é misurata rispetto alla media quadratica (codifica senza perdita di informazione in media quadratica):

per $u \in L^2(\mathbb{R})$, sia $u_n \xrightarrow{L^2} u$, $u_n \in L^1 \cap C_0^0 \cap L^2(\mathbb{R})$. Si ha:

$$\|\hat{u}_n - \hat{u}_m\|_2 = \|u_n - u_m\|_2 < \varepsilon \quad \text{per } n, m \text{ grandi}$$

Plancherel

$\Rightarrow \{\hat{u}_n\}_n \subseteq L^2(\mathbb{R})$ é di Cauchy $\Rightarrow \exists v \in L^2(\mathbb{R})$ t.c. $\hat{u}_n \xrightarrow{L^2} v$.

Si pone per definizione:

$$\hat{u} := v = \lim_{n\to+\infty} \hat{u}_n \quad (\text{lim rispetto a } \|\cdot\|_2)$$

Esempio

$u \in L^2(\mathbb{R}) \cap C_0^0(\mathbb{R}) \Rightarrow$ possiamo porre $u_n(x) = u(x) \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}(x) \in L^1 \cap L^2 \cap C_0^0(\mathbb{R})$

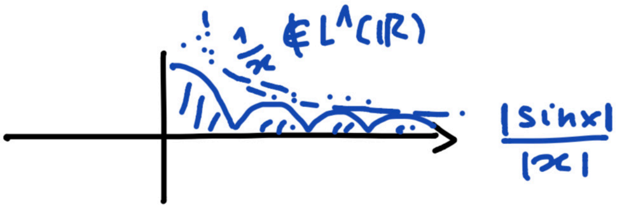
$$\Rightarrow \hat{u}_\mu(w) = \int_{-\mu}^{\mu} u(x)\, e^{-2\pi i w x}\, dx \;\wedge\; \hat{u}_\mu(w) \xrightarrow{L^2} v(w) \Rightarrow u_\mu(w) \xrightarrow[q.o.]{} v(w)$$

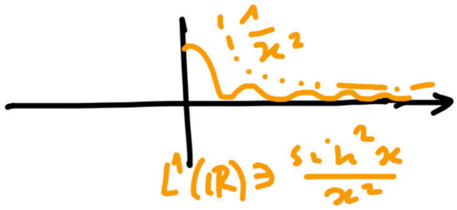
Quindi:

$$\boxed{\hat{u}(w) = V.P. \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-2\pi i x w}\, dx \quad \text{per q.o. } w \in \mathbb{R}}$$

ESEMPIO:

$$u(x) = \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow u \in L^2 \wedge u \notin L^1$$





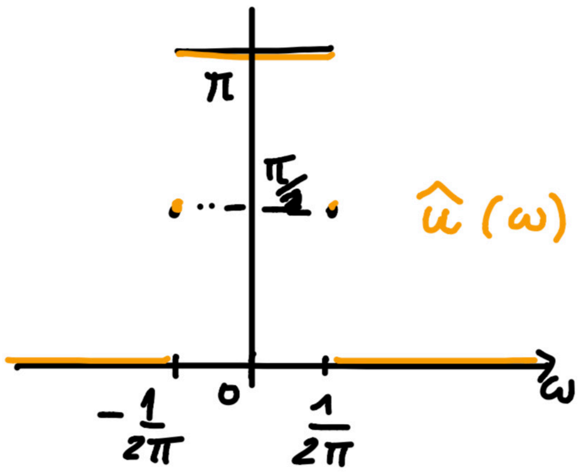
$$\Rightarrow \hat{u}(w) = V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} e^{-2\pi i w x}\, dx = V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} e^{-2\pi i w x}\, dx$$

$$= V.P. \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(1-2\pi w)x}}{2ix}\, dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(-1-2\pi w)x}}{2ix}\, dx \right]$$

$$= \pi i \left[\frac{1}{2i} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i(1-2\pi w)z}}{z}, 0 \right) - \frac{1}{2i} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i(-1-2\pi w)z}}{z}, 0 \right) \right]$$

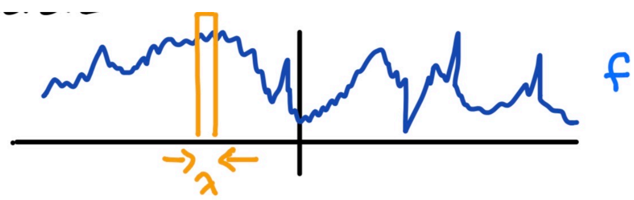
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } |w| > \frac{1}{2\pi} \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } |w| = \frac{1}{2\pi} \\ \pi & \text{se } |w| < \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(w) = \pi \cdot \operatorname{Rec}(\pi w)$$



PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

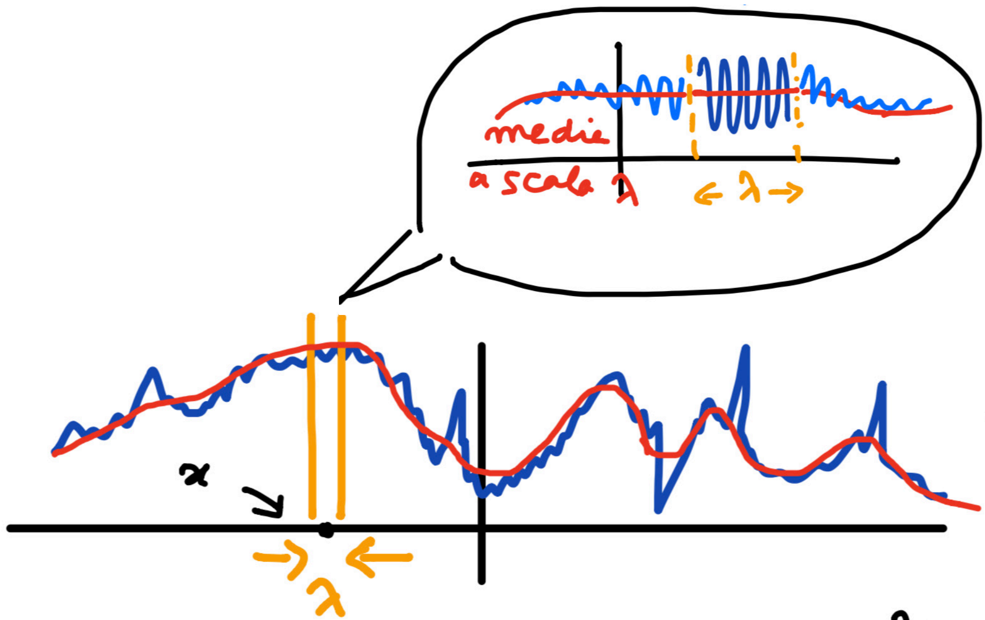
Si utilizza per la regolarizzazione e l'approssimazione di funzioni ad una data scala attraverso medie ponderate



ESEMPIO:

f segnale corrotto da rumore/errore rappresentato da oscillazioni che avvengono su una scala minore di una certa scala λ.
Per ricostruire il segnale eliminando errori/rumori possiamo

Considerare medie (pesate) di f a scala λ



$\forall x \in \mathbb{R}$ poniamo $u_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda} \int_{x-\frac{\lambda}{2}}^{x+\frac{\lambda}{2}} f(y)\,dy$ (media di f su $[x-\frac{\lambda}{2}, x+\frac{\lambda}{2}]$)

ovvero $u_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(y-x)\,dy$ con $g(y) = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]}(y)$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy = 1$. Per la simmetria pari di g si ha anche

$$u_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\,dy$$

Tale formula definisce il Prodotto di Convoluzione di f con g

DEF (Convoluzione):

$u, v \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ si pone:

$$\boxed{u * v\,(x) := \int_{\mathbb{R}} u(y)\, v(x-y)\,dy}$$

$u * v$ è ben definita come funzione $\in L^1(\mathbb{R})$ dato che:

$$\|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \cdot \|v\|_1$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} u(y)\, v(x-y)\,dy \right| dx \leq \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |u(y)| \cdot |v(x-y)|\,dy\,dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} |u(y)| \Big[\int_{\mathbb{R}} |v(x-y)|\, \underset{d(x-y)}{\underbrace{dx}} \Big] dy = \|u\|_1 \cdot \|v\|_1$$

PROPRIETÀ DI $*$:

1) $u * v = v * u$
2) $(u * v) * w = u * (v * w)$
3) $u * \delta_0 = \delta_0 * u = u$ infatti:

$$\delta_0 * u\,(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)\, d\delta_0(y) = u(x)$$

Proposizione (Regolarizzazione per Convoluzione):
se $u \in L^1 \wedge v \in C^0 \cap L^\infty \ (\equiv \mathcal{CB})$ si ha:

$$u * v \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}) \wedge \|u * v\|_\infty \leqslant \|u\|_1 \cdot \|v\|_\infty$$

Dim.

$u \in C^0_c(\mathbb{R}) \Rightarrow$ si conclude per densità di $C^0_c(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$.

$|u * v(x+h) - u * v(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} u(y) \left[v(x+h-y) - v(x-y) \right] dy \right.$

per uniforme continuità di v sul supporto compatto di u si ha $|v(x+h-y) - v(x-y)| < \varepsilon \quad \forall y \in \operatorname{Spt} u, \ \forall |h| < \delta$

$$\Rightarrow |u * v(x+h) - u * v(x)| \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |u(y)|\, dy = \varepsilon \|u\|_1 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$\Rightarrow u * v \in C^0$.

D'altra parte $|u * v(x)| \leqslant \|v\|_\infty \cdot \|u\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \|u * v\|_\infty \leqslant \|u\|_1 \cdot \|v\|_\infty$

$\square$

Convoluzione e Derivazione

$u \in L^1(\mathbb{R}) \wedge v \in C^1_0(\mathbb{R}) \Rightarrow u * v \in C^1(\mathbb{R}) \wedge (u * v)' = u * (v')$

In generale, se $v \in C^k_0(\mathbb{R})$, si ha che $\exists \dfrac{d^k}{dx^k}(u * v) = u * \dfrac{d^k v}{dx^k}$

Dim.

$$\frac{u * v(x+h) - u * v(x)}{h} = \underbrace{\int u(y) \Big[\underbrace{\frac{v(x+h-y) - v(x-y)}{h}}_{\longrightarrow\, v'(x-y)} \Big] dy}_{\longrightarrow\, u * v'(x)}$$

$\square$

TF e Convoluzione

$u, v \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u * v \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha:

$$\boxed{\widehat{u * v}(\omega) = \hat{u}(\omega) \cdot \hat{v}(\omega)}$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ trasforma convoluzione in prodotto puntuale e viceversa.

Infatti:

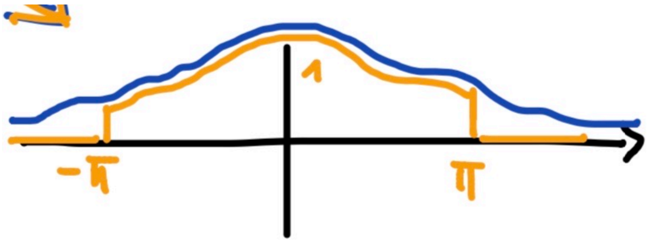
$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} u(y) v(x-y)\, dy \right] e^{-2\pi i \omega x} dx$$

$$= \iint u(y)\, e^{-2\pi i y \omega}\, v(x-y)\, e^{-2\pi i (x-y)\omega} dx\, dy$$

Fubini

ESEMPIO (*Filtro "passa basso" in teoria dei segnali*):

$$\widehat{u * \mathrm{sinc}}(\omega) = \hat{u}(\omega) \cdot \pi \,\mathrm{Rec}(\pi \omega)$$

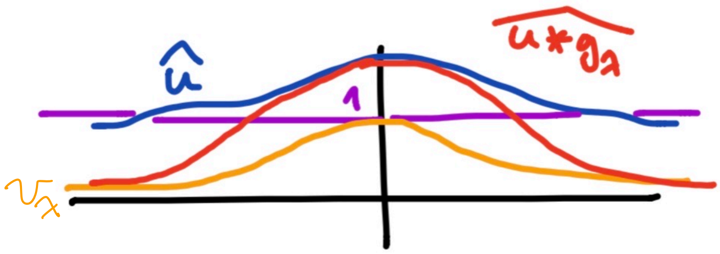


si regolarizza/approssima il segnale "tagliando" le alte frequenze. Nello spazio fisico ciò corrisponde a "filtrare" (convolvere) il segnale con un nucleo di convoluzione di tipo sinc.

ESEMPIO (*Filtri gaussiani*):

$\lambda > 0$, $v_\lambda(\omega) = e^{-\pi \lambda^2 \omega^2}$, $g_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\pi \frac{x^2}{\lambda^2}}$. Si ha:

$$\widehat{u * g_\lambda}(\omega) = \hat{u}(\omega) \cdot v_\lambda(\omega)$$



Attenuazione esponenziale delle alte frequenze

$\Rightarrow$ si ha $v_\lambda \to 1 \wedge g_\lambda \to \delta_0$ per $\lambda \to 0^+$. $\{g_\lambda\}_{\lambda > 0}$ é detta IDENTITÁ APPROSSIMATA.

Se $u \in L^1(\mathbb{R})$, si ha che $u * g_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} u$ in L^1 se $\{g_\lambda\}$ é una famiglia di identitá approssimate.