es. 1)

Sia X insieme arbitrario, τ, τ' topologie su X.
Dim. che $Id : (X, \tau) \to (X, \tau')$ è continua se e solo se $\tau' < \tau$

$(\Rightarrow)$: $Id : (X, \tau) \to (X, \tau')$ continua

$\Rightarrow \forall A \in \tau' \quad Id^{-1}(A) = A \in \tau$

$\Rightarrow \forall A \in \tau' \quad A \in \tau \quad \Rightarrow \quad \tau' < \tau$

$(\Leftarrow)$: $\forall A \in \tau' \quad A \in \tau \quad \Rightarrow \quad \forall A \in \tau' \quad A = Id(A) = Id^{-1}(A)$

$\Rightarrow \forall A \in \tau' \quad Id^{-1}(A) \in \tau \quad \Rightarrow Id$ continua

q.e.d.

es. 2)

Sia τ topologia su $\mathbb{R}$ generata da $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$
Stabilire la continuità delle seguenti funzioni:

1) $Id : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$

2) $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$
$$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$$

3) $g : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$
$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

4) $h : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$
$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Come è fatta τ ?

$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\} \Rightarrow [\ldots) \in \tau, \; (\ldots) \in \tau$!!!

$(\ldots] \notin \tau$!!!

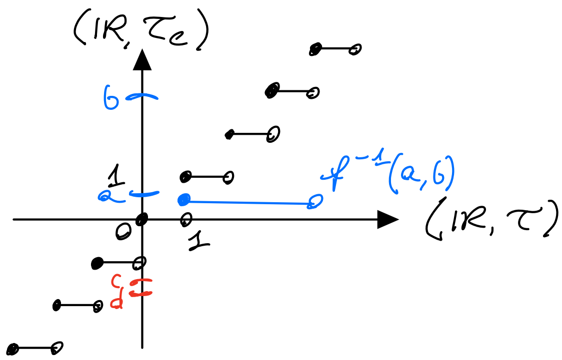
1) $Id : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$

sappiamo dall'es. 1 che è continua se e solo se $\tau_e \prec \tau$ ✓ $\Rightarrow$ è continua (τ contiene TUTTI gli aperti (c,d) di τ_e, più gli altri $[\dots)$, quindi $\tau_e \prec \tau$)

2) $f : (\mathbb{R}, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$

$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$

$\Rightarrow$



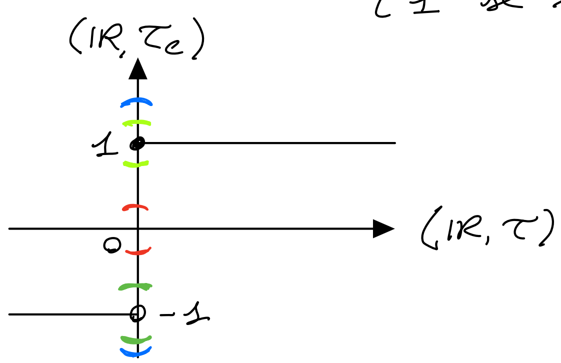
$\Rightarrow$ $f^{-1}((a,b)) = [\lceil a \rceil, \lceil b \rceil)$

$f^{-1}((c,d)) = \emptyset$

$\Rightarrow \forall (a,b) \in \tau_e \quad f^{-1}((a,b)) \in \tau \Rightarrow f$ continua

3) $g : (\mathbb{R}, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$

$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

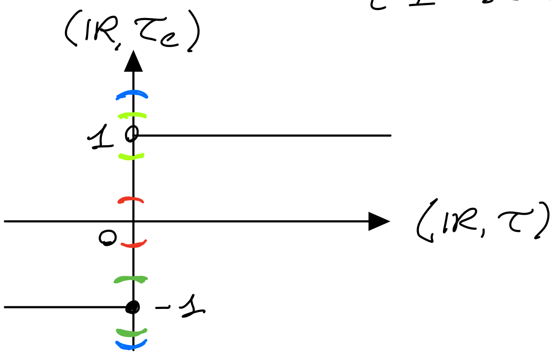


$$\Rightarrow g^{-1}((a,b)) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } -1, 1 \notin (a,b) \\ (-\infty, 0) & \text{se } -1 \in (a,b) \\ [0, +\infty) & \text{se } 1 \in (a,b) \\ \mathbb{R} & \text{se } -1, 1 \in (a,b) \end{cases}$$

$\Rightarrow g^{-1}((a,b)) \in \tau \quad \forall (a,b) \in \tau_e \Rightarrow g$ continua

4) $h : (\mathbb{R}, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$

$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



$$\Rightarrow g^{-1}((a,b)) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } -1, 1 \notin (a,b) \\ (-\infty, 0] & \text{se } -1 \in (a,b) \\ (0, +\infty) & \text{se } 1 \in (a,b) \\ \mathbb{R} & \text{se } -1, 1 \in (a,b) \end{cases}$$

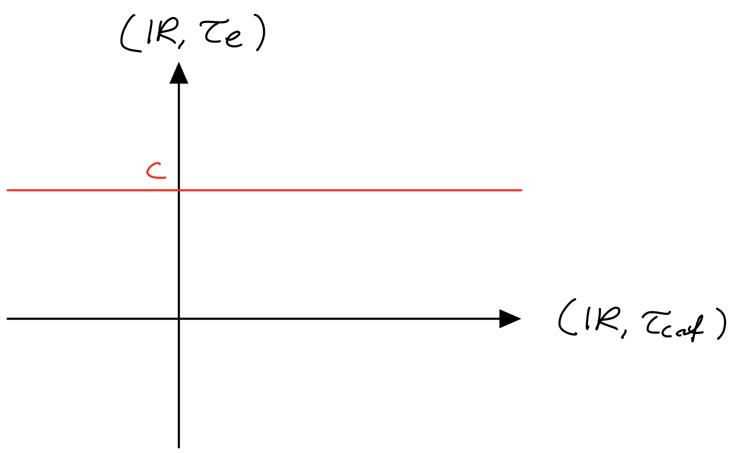
$\Rightarrow$ se $-1 \in (a,b)$, $h^{-1}((a,b)) \notin \tau \Rightarrow h$ NON è continua

es. 3)

Caratterizzare le funzioni continue da $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ in $(\mathbb{R}, \tau_e)$

$\Rightarrow$ grafico la situazione:

1) se f è costante, è continua:



sia $f = c$

$$\Rightarrow f^{-1}((a,b)) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } c \in (a,b) \\ \emptyset & \text{se } c \notin (a,b) \end{cases} \Rightarrow \mathbb{R}, \emptyset \in \tau_{cof} \checkmark$$

$\Rightarrow$ le funzioni costanti sono continue.

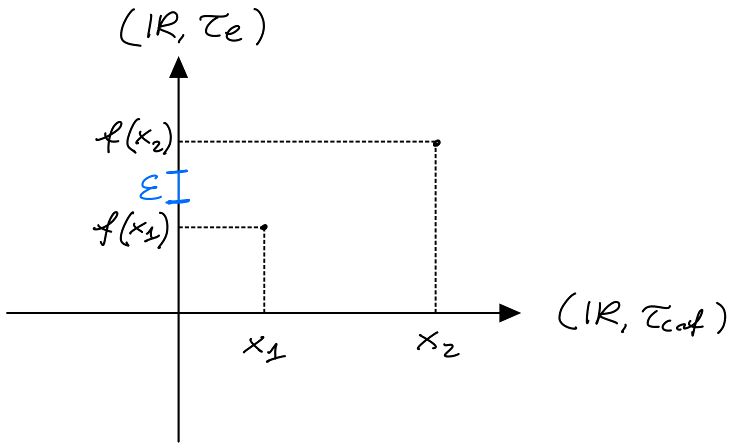
2) Mostro che non vi sono altre funzioni continue:
Utilizziamo il concetto di continuità rispetto ai chiusi (in τ_{cof} i chiusi sono gli insiemi finiti)

$\Rightarrow$ deve essere $f^{-1}(C) \in \mathcal{T}_{cof}$ $\forall C \in \mathcal{T}_e$

$\Rightarrow |f^{-1}(C)| < +\infty$ $\forall C \in \mathcal{T}_e$

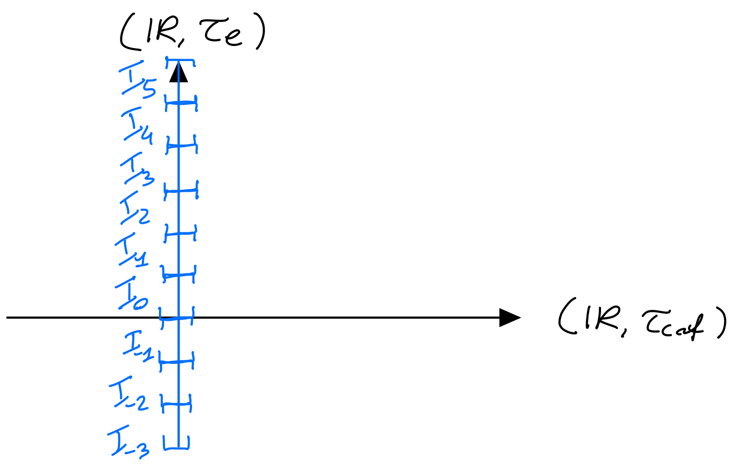
$\Rightarrow |f^{-1}(\{k\})| < +\infty$ $\forall k \in \mathbb{R}$ se f non è costante !!!

$\Rightarrow$ sia f non costante, allora $\exists\, x_1, x_2$ con $x_1 \neq x_2$ t.c. $f(x_1) \neq f(x_2)$:



$\Rightarrow$ Sia $0 < \varepsilon < |f(x_1) - f(x_2)|$

$\Rightarrow$ Suddivido $\mathbb{R}$ in intervalli $I_\lambda = [\lambda \cdot \varepsilon, (\lambda+1)\varepsilon]$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ sul codominio:



$\Rightarrow f$ non costante $\wedge$ $I_\lambda \in \mathcal{T}_e$ $\forall \lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow f^{-1}(I_\lambda) \neq \mathbb{R}$ $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow f^{-1}(I_\lambda) \in \mathcal{T}_{cof} \wedge f^{-1}(I_\lambda) \neq \mathbb{R}$ $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}} f^{-1}(J_\lambda) = \mathbb{R}$ MA è un unione numerabile di insiemi finiti $(\lambda \in \mathbb{Z})$ ↯ assurdo: $\mathbb{R}$ NON è numerabile

$\Rightarrow$ le funzioni costanti sono tutte e sole le funzioni continue da $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ in $(\mathbb{R}, \tau_e)$

q.e.d

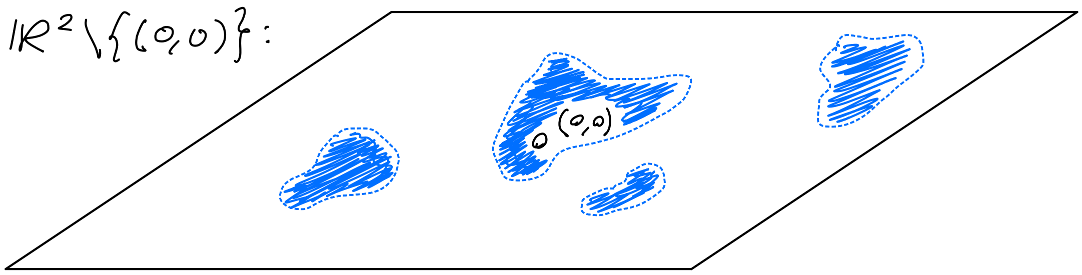
es. 6)

Trovare un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con τ_e e $\mathcal{C}^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ con τ_e

$\Rightarrow$ Ci sono 2 possibili soluzioni pratiche:

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è il piano bucato, mentre $\mathcal{C}^1$ è un cilindro infinito centrato sull'asse z

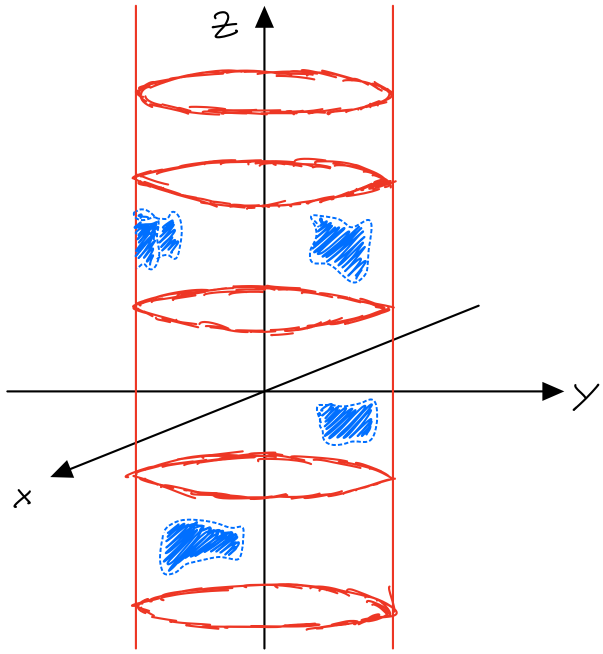
$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:



$\Rightarrow$ gli aperti indotti da τ_e su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sono tutte le possibili intersezioni/unioni delle intersezioni di tutte le $B_r(p) \subseteq \mathbb{R}^2$ con $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stesso.

$\Rightarrow$ gli aperti indotti da τ_e su $\mathcal{C}^1$ sono tutte le possibili unioni / intersezioni delle intersezioni di tutte le $B_r(p) \subseteq \mathbb{R}^3$ con $\mathcal{C}^1$ stesso.

$\Rightarrow \mathcal{C}^1$:

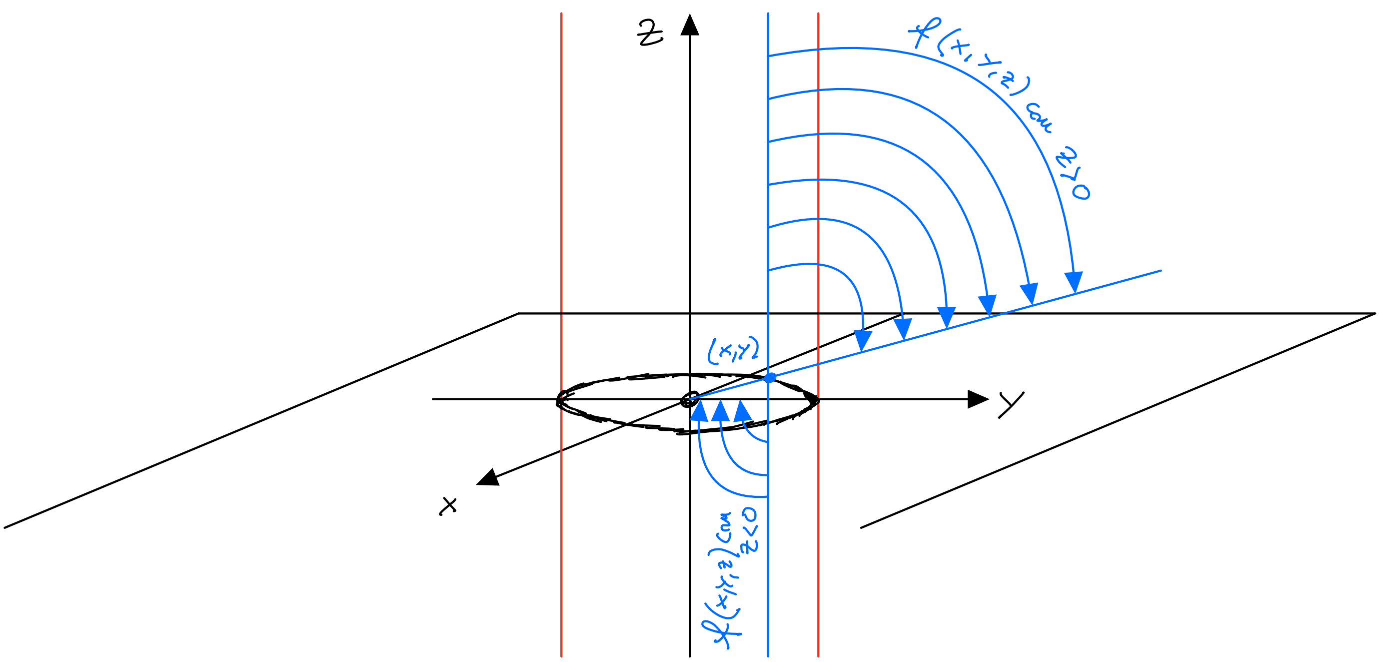


1) Scendiamo di 1 dimensione:

cerchiamo un omeomorfismo tra $(-\infty, +\infty)$ e $(0, +\infty)$

$\Rightarrow g(t) = e^t$ è omeomorfismo ✓

$\Rightarrow$ pensiamo ad $\mathbb{R}^3$ come $(\mathbb{R}^2, \tau_e) \times (\mathbb{R}, \tau_e)$:



$$\Rightarrow f : \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$(x,y,z) \longmapsto e^z (x,y) = (xe^z, ye^z)$$

$\Rightarrow$ si verifica facilmente che f, f^{-1} sono biettive e continue

$\Rightarrow f$ è omeomorfismo ✓

2) Utilizzo le coordinate cilindriche:

$\Rightarrow$ In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ si ha: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

con $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \mathcal{C}l^1 = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \mid \rho = 1\}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ mando $\begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \rho \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 = \rho$ ✓

$$\Rightarrow f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathcal{C}l^1$$
$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$\Rightarrow f$ è continua (composizione di funzioni continue e $(x,y) \neq (0,0)$)

$$\Rightarrow f^{-1} : \mathcal{C}l^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$(x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} x \cdot z \\ y \cdot z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f^{-1}$ è continua (polinomi)

$\Rightarrow f, f^{-1}$ sono biettive $\Rightarrow f$ è omeomorfismo ✓