Si tratta di uno dei più semplici modelli epidemiologici S.I.R. = "Suscettibili" - "Infetti" - "Rimossi" dove:

Suscettibili := individui sani e contagiabili

Infetti := individui malati e contagiosi

Rimossi := individui non più contagiabili

$\Rightarrow$ il modello SIR assume che la popolazione rimanga quasi costante, quindi le previsioni hanno una valenza temporale non eccessiva

$\Rightarrow$ trascureremo quindi nascite e morti (anche dovute ad altre cause), si ha:

$$S + I + R = N \in \mathbb{R}^{>0}$$

$\Rightarrow$ la malattia viene contratta un' unica volta, quindi la dinamica è: $S \longrightarrow I \longrightarrow R$. Le idee di base sono:

1) R (rimossi) può solo aumentare, sia quindi $\beta > 0$ il tasso di guarigione / mortalità degli infetti. Si ha:

$$\dot{R} = \beta I$$

2) S (suscettibili) può solo diminuire, sia quindi $\alpha > 0$. Si ha:

$$\dot{S} = -\alpha S I$$

3) I (infetti):

$$\dot{I} = \alpha S I - \beta I$$

N.B.

Il parametro $\alpha > 0$ modella la capacità di infezione dell' epidemia, le misure di protezione adottate e l'intensità del contagio.

$\Rightarrow$ Si ha quindi il seguente sistema:

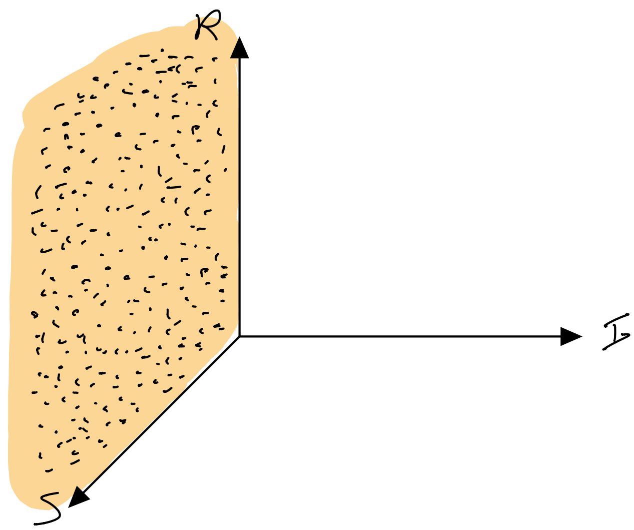
$$\boxed{\begin{cases} \dot{S} = -\alpha I S \\ \dot{I} = \alpha I S - \beta I \\ \dot{R} = \beta I \end{cases}} \quad \text{con } \alpha, \beta > 0$$

Siamo interessati al caso in cui $S, I, R > 0$ (1° ottante). Studiamo il comportamento dei piani coordinati

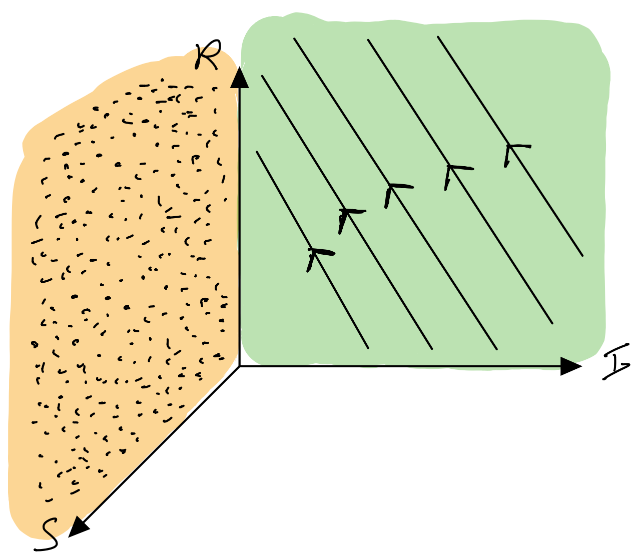
1) $I = 0$:

il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ \dot{I} = 0 \\ \dot{R} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{tutti i punti del piano } I=0 \text{ sono equilibri}$$

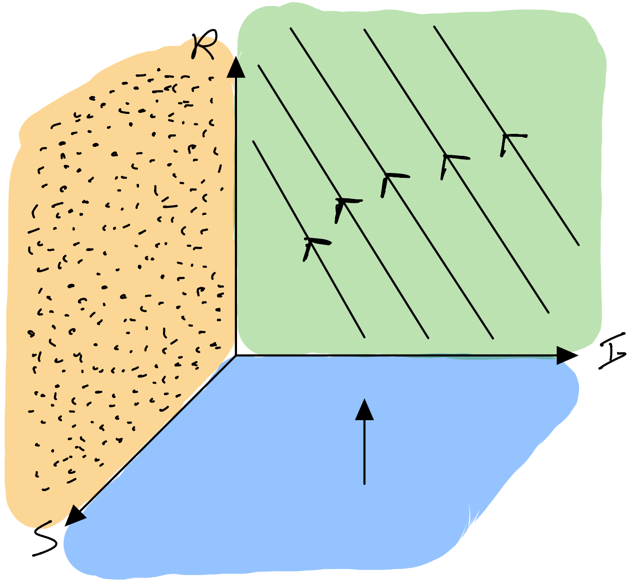


2) $S = 0 \Rightarrow$ piano invariante



3) $R = 0 \Rightarrow \dot{R} = \beta I$ con $I, \beta > 0$

$\Rightarrow \dot{R} > 0 \Rightarrow$ il campo in $\{R = 0\}$ è ENTRANTE nel 1° ottante

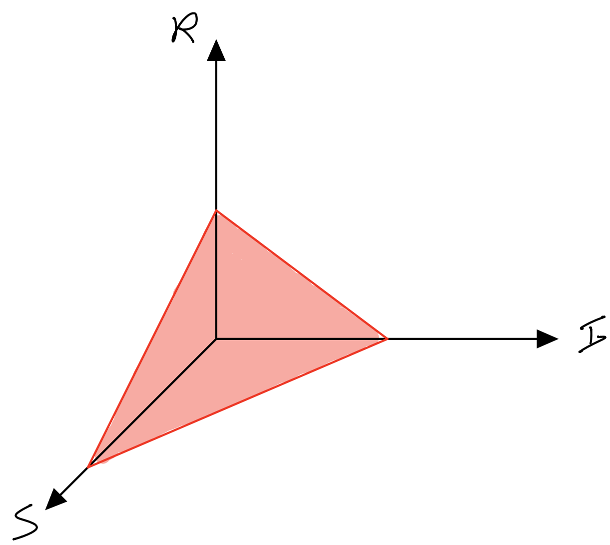


⇒ le soluzioni sono vincolate al 1° ottante per $t>0$, ovvero il 1° ottante è positivamente invariante

⇒ RICORDIAMO che il modello SIR ammette un I.P.:

$$S + I + R = N \in \mathbb{R}^{>0}$$

⇒ tale equazione è un piano trasversale agli assi coordinati, la sua intersezione con il 1° ottante è:



⇒ i livelli dell'I.P. si parametrizzano con una coppia qualsiasi tra S, I, R

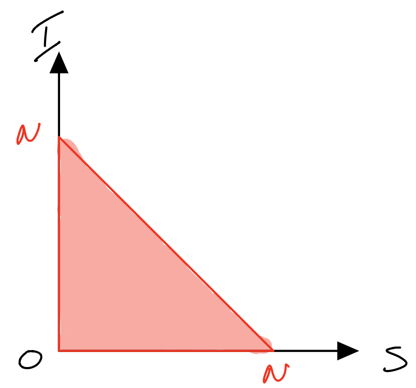
⇒ poiché R non compare nell'equazioni di S, I, scegliamo quest'ultime come coordinate:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha S I \\ \dot{I} = \alpha S I - \beta I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{S} = -SI \\ \dot{I} = (S-K)I \end{cases} \text{ con } K = \frac{\beta}{\alpha} > 0$$

dove:

$$S, I \geq 0, \quad S+I \leq N$$

$\Rightarrow$ studiamo ovvero la dinamica del sistema nella chiusura di $T_N = \{(S,I) \in \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^{>0} \mid S+I < N\}$ (triangolo di vertici $(0,0)$, $(N,0)$, $(0,N)$)



$\Rightarrow$ sappiamo che il lato $I = 0$ è formato da equilibri e il lato $S = 0$ è invariante e su di esso il campo è $\dot{I} = -KI$, quindi le soluzioni tendono asintoticamente a $(0,0)$

$\Rightarrow$ sull'ipotenusa $S+I = N$ il campo è entrante, infatti $\dot{S} + \dot{I} = -KI < 0$

Queste informazioni sono sufficienti a determinare il ritratto in fase del sistema rispetto al triangolo T_N. Infatti:

$$\begin{cases} \dot{S} = -SI \\ \dot{I} = (S-K)I \end{cases} \Rightarrow \frac{dI}{dS} = -1 + \frac{K}{S} \text{ che è facilmente}$$

integrabile:

$$\tilde{I}(S) = K \log S - S + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Consideriamo $\tilde{I}(S_0) > 0$, $S_0 > 0$. Si ha:

1) $\exists \tilde{I}(S) \ \forall S > 0$

2) $\tilde{I}$ è strettamente crescente se $K > S$ e strettamente decrescente se $S > K$

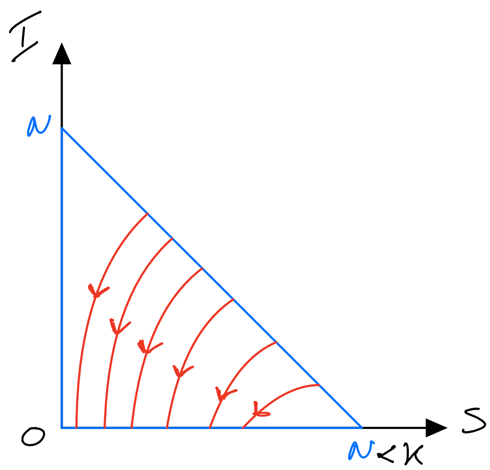
3) $\tilde{I}$ ha un max > 0 per $S = K$

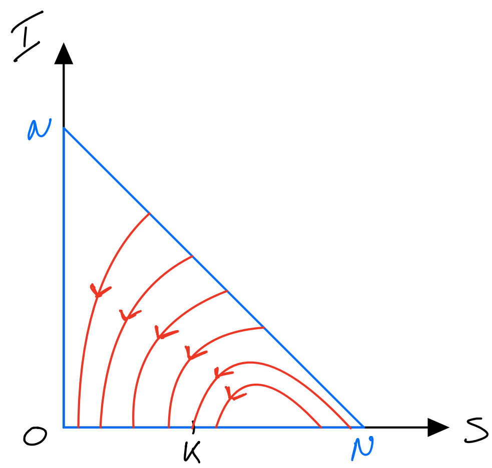
4) $\tilde{I}$ si annulla in 2 punti S^-, S^+ t.c.

$$0 < S^- < K < S^+$$

5) Il grafico di $\tilde{I}$ NON INTERSECA L'IPOTENUSA di T_N SE $S^+ < N$, E LA INTERSECA SE $S^+ \geq N$

Disegnamo ora il ritratto in fase:





$\Rightarrow$ a seconda del valore di K e dei dati iniziali si ha:

1) se $S_0 \leq K$, vi è una diminuzione degli infetti, i quali tendono asintoticamente a 0

2) se $S_0 > K$ si hanno 2 casi a seconda del dato iniziale:

2.2) il numero degli infetti decresce e tende asintoticamente a 0

2.2) il numero degli infetti aumenta fino a toccare un max, per poi decrescere e tendere asintoticamente a 0

$\Rightarrow$ l'andamento qualitativo dell'epidemia dipende dal numero degli individui suscettibili al dato iniziale S_0