VALOR MEDIO CONDIZIONALE

Teorema:

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, $\mathcal{F}$ una sotto-σ-algebra di $\mathcal{A}$ e $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile. Allora $\exists\, Y$ v.a. integrabile $\mathcal{F}$-misurabile t.c.

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot Y) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Inoltre, se Y' soddisfa le stesse proprietà di Y, allora:

$$Y = Y' \quad q.c.$$

Dim.:

Consideriamo lo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$. Su esso, consideriamo 2 misure (assumiamo X v.a. ≥ 0):

1) $\mathbb{P}$ o, più precisamente, la restrizione di $\mathbb{P}$ ad $\mathcal{F}$
2) ν definita da $\nu(A) = \int_A X \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot X)$

Se $\mathbb{P}(A) = 0$ anche $\nu(A) = 0 \Rightarrow \nu \ll \mathbb{P}$. Per il Teorema di Radon-Nykodim usato sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F})$ $\exists\, Y \geq 0$ v.a. t.c. Y è la densità di ν rispetto a $\mathbb{P}$

N.B.
Y è $\mathcal{F}$-misurabile !!!

$$\Rightarrow \underbrace{\nu(A)}_{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot X)} = \underbrace{\int_A Y \, d\mathbb{P}}_{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot Y)} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot Y)$$

Ciò mostra l'esistenza di Y. Per dim. l'unicità q.c., basta osservare che se soddisfa le stesse proprietà di Y, allora:

$$\int_A Y \, d\mathbb{P} = \int_A Y' \, d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Quindi, per la proprietà di $\int$, si ha che $Y = Y'$ q.c.

$\square$

N.B.

La dim. é stata fatta per $X \geq 0$. Se $X \in \mathbb{R}$, scriviamo $X = X^+ - X^-$. Per quanto mostrato, $\exists\, Y, Z \geq 0$ t.c.

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X^+) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot Y)$$
$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X^-) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot Z)$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot (Y - Z))$$

<u>Def.</u> (Valor Medio Condizionale):

Una variabile Y come quella del Teorema sopracitato é detta valor medio di X condizionato ad $\mathcal{F}$ e si denota con $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$

Data $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ $\exists$ q.c. $!\, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e la denotiamo con $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$. Quindi $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ é la q.c. unica v.a. $\mathcal{F}$-misurabile t.c.:

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \, \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \quad \forall A \in \mathcal{F}}$$

PROPRIETÁ CARATTERISTICA DEL VALOR MEDIO CONDIZIONALE

<u>esempio</u>

Sia $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e sia $Z: \Omega \to E$ v.a. a valori in uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$. Ricordiamo la nozione di σ-algebra generata da Z:

$$\sigma(Z) = \{\underbrace{\{Z \in B\}}_{Z^{-1}(B)} : B \in \mathcal{E}\}$$

Scegliendo $\mathcal{F} := \sigma(Z)$ scriveremo $\mathbb{E}(X|Z)$ invece di $\mathbb{E}(X|\sigma(Z))$

Proposizione:

Una v.a. Y é $\sigma(Z)$-misurabile $\Leftrightarrow$ $\exists \varphi : E \to \mathbb{R}$ misurabile t.c. $Y = \varphi(Z)$

La dim. é omessa, tuttavia é facile osservare che se φ é misurabile allora $\varphi(Z)$ é $\sigma(Z)$-misurabile: basta mostrare che $\varphi(Z)^{-1}(A) \in \sigma(Z)$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si ha:

$$\varphi(Z)^{-1}(A) = Z^{-1}(\underbrace{\varphi^{-1}(A)}_{\in \mathcal{E}}) \in \sigma(Z)$$

esempi:

1) Supponiamo siano X, Z v.a. qualsiasi entrambe discrete con X a valori in E e Z a valori in un altro insieme. Il vettore (X, Z) é discreto, sia $p_{X,Z}$ la sua densitá congiunta:

$$p_{X,Z}(x,z) = \mathbb{P}(X = x, Z = z)$$

Definiamo la densitá condizionale di X rispetto a Z:

$$p_{X,Z}(x|z) = \mathbb{P}(X = x | Z = z) = \frac{p_{X,Z}(x,z)}{p_Z(z)}$$

Conveniamo che $p_{X,Z}(x|z) = 0$ se $p_Z(z) = 0$.
Sia $f : E \to \mathbb{R}$ t.c. $f(X)$ sia integrabile.

Allora $\mathbb{E}(f(X)|Z) = \varphi(Z)$ dove:

$$\varphi(z) = \sum_{x\in E} f(x)\, p_{X|Z}(x|z)$$

Per verificarlo usiamo la proprietà caratteristica del valor medio condizionale:

$$\mathbb{E}(1\!\!1_A \varphi(Z)) = \mathbb{E}(1\!\!1_A f(X)) \quad \forall A \in \sigma(Z)$$

Si ha:

$$A \in \sigma(Z) \iff \exists B \subseteq F \text{ t.c. } A = Z^{-1}(B)$$

ovvero $1\!\!1_A = 1\!\!1_B(Z)$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(1\!\!1_A \varphi(Z)) = \mathbb{E}(1\!\!1_B(Z)\varphi(Z)) = \sum_{z\in F} 1\!\!1_B(z)\,\varphi(z)\,p_Z(z)$$

$$= \sum_{x\in E,\, z\in F} 1\!\!1_B(z)\, f(x)\, \underbrace{p_{X|Z}(x|z)\, p_Z(z)}_{p_{X,Z}(x,z)} = \sum_{\substack{x\in E,\\ z\in F}} 1\!\!1_B(z) f(x)\, p_{X,Z}(x,z)$$

$$= \mathbb{E}(1\!\!1_B(Z) f(X)) = \mathbb{E}(1\!\!1_A f(Z))$$

2) Siano X a valori in $\mathbb{R}^n$, Z a valori in $\mathbb{R}^m$ t.c. (X,Z) sia assolutamente continua con densità congiunta $f_{X,Z}$. Poniamo:

$$f_{X|Z}(x|z) := \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)} \quad (= 0 \text{ se } f_Z(z) = 0)$$

Sia $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $g(X)$ sia integrabile.

Allora:

$$\mathbb{E}(g(X)|Z) = \varphi(Z)$$

con $\varphi(z) = \int g(x)\, f_{X|Z}(x|z)\,dx$

PROPRIETÀ DEL VALOR MEDIO CONDIZIONALE

Teorema (Proprietà del Valor Medio Condizionale):

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sp. di prob., $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sotto σ-algebre di $\mathcal{A}$. Allora valgono le seguenti:

1) MONOTONIA:

Se X, Y sono v.a. integrabili con $X \leq Y$ q.c., allora $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ q.c.

2) LINEARITÀ:

Se X, Y sono v.a. integrabili, $a, b \in \mathbb{R}$, allora $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ q.c.

3) Diciamo che X, $\mathcal{F}$ sono ind. se si ha:

A, B eventi ind. $\forall A \in \sigma(X), B \in \mathcal{F}$

Se $X, \mathcal{F}$ sono ind., allora $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$ q.c.

In particolare ciò accade se $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

4) "REGOLA DELLA CATENA":

Se $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$ allora $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G})$ q.c.

In particolare $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$

5) Sia X integrabile, Y v.a. reale t.c. XY sia integrabile. Se Y è $\mathcal{F}$-misurabile, allora:

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \text{ q.c.}$$

Dim.:

1) Assumiamo $X \leq Y$. Supponiamo per assurdo che sia $\mathbb{P}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) > 0$. Si ha:

$$\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) < \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\} = \bigcup_n \{\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) + \tfrac{1}{n} \leq \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) < \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \leq \sum_n \mathbb{P}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) + \tfrac{1}{n} \leq \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$$

$\Rightarrow \exists n$ t.c. $\mathbb{P}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) + \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) > 0$

Sia $A := \{\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) \geq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$. Allora usando la proprietà caratteristica del valor medio cond.:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \quad \forall B \in \mathcal{F}$$

si ha:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot (X-Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y)$$
$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}))$$
$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A (\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})))$$
$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n} \mathbb{P}(A) > 0 \ \lightning$$

Assurdo: $X \leq Y$ q.c. $\Rightarrow \mathbb{1}_A (X-Y) \leq 0$ q.c.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{1}_A (X-Y)) \leq 0$ q.c.

2) Dobbiamo mostrare che $\mathbb{E}(aX + bY | \mathcal{F}) = a\,\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\,\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) =: Z$. Ciò equivale a mostrare che:

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot (aX + bY))$$

Infatti $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A Z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A (aX + bY)) = a\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$
$+ b\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y - \mathcal{F}) = a\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X) + b\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y)$
$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A (aX + bY))$

3) $X, \mathcal{F}$ ind. $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}$ $X, \mathbb{1}_A$ sono var. al. ind.

Per dim. $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$ basta verificare che $\forall A \in \mathcal{F}$ si ha:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X)$$
$$\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{1}_A}(\mathbb{E})$$

4) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G}) = Z$. Calcoliamo:

$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G}))$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X)$$

5) Date $Z, X \in L^1$, supponiamo WLOG $Z, X \geq 0$. (Se così non fosse si avrebbe:

$$\mathbb{E}(ZX|\mathcal{F}) = \mathbb{E}((Z^+ - Z^-)(X^+ - X^-)|\mathcal{F}) \dots$$

$\dots =$ caso di variabili positive)

Supponiamo che Z assuma un numero finito di valori. (cioè sia della forma $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{F}$)

Ma $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i} X|\mathcal{F}) = \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ dato che $\forall B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\underbrace{B\cap A_i}_{\in \mathcal{F}}} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B\cap A_i} X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_A X)$$

Ne segue, per linearità, che:

$$\mathbb{E}(ZX|\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i} X|\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$$

$$= Z\,\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$$

Supponiamo ora che sia $Z \geq 0$, allora $\exists (Z_n)$ successione di v.a. $\mathcal{F}$-misurabili con numero finito di valori t.c. $\forall \omega \in \Omega$:

1) $Z_n(\omega) \leq Z_{n+1}(\omega) \quad \forall n$

2) $\lim_{n\to+\infty} Z_n(\omega) = Z(\omega)$

Per quanto mostrato si ha:

$$\mathbb{E}(Z_n X|\mathcal{F}) = Z_n \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \quad \forall n$$

Per dim. che $\mathbb{E}(ZX|\mathcal{F}) = Z\,\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ basta mostrare $\forall B \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B Z\,\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B ZX)$$

Sappiamo che $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B Z_n \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B Z_n X)$

Ma $Z_n \uparrow Z$, quindi $\mathbb{1}_B Z_n \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \uparrow \mathbb{1}_B Z \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ ∧ $\mathbb{1}_B Z_n X \uparrow \mathbb{1}_B Z X$, e quindi, per la Convergenza Monotona, si ha:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B Z \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B Z_n \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B Z_n X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B Z X)$$

$\square$

<u>esercizi</u>:

1) Siano $X_1, X_2 \sim Geo(1-p)$ ind., e sia Y ind. da X_1, X_2 con distribuzione $\mathbb{P}(Y=2) = 1 - \mathbb{P}(Y=1) = q$ con $p, q \in (0,1)$. Poniamo $Z := \min\{X_1, X_Y\}$. Calcolare $\mathbb{E}(Y|Z)$.

⇒ Ricordiamo che $\min\{X_1, X_2\} \sim Geo(1-p^2)$. Si ha:

$\mathbb{P}(Z=k, Y=1) = \mathbb{P}(X_1 = k, Y=1) = \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(Y=1)$
$= (1-p)p^{k-1} \cdot (1-q)$

$\mathbb{P}(Z=k, Y=2) = \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2\} = k, Y=2)$
$= \mathbb{P}(\min\{X_1,X_2\}=k)\,\mathbb{P}(Y=2) = (1-p^2)p^{2(k-1)}q$

$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Z=k, Y=1) + \mathbb{P}(Z=k, Y=2)$
$= (1-q)(1-p)p^{k-1} + q(1-p^2)p^{2(k-1)}$

$$p_{Y|Z}(2|k) = \frac{p_{Z,Y}(k,2)}{p_Z(k)} = \frac{q(1+p)p^{k-1}}{(1-q)+q(1+p)p^{k-1}} = 1 - p_{Y|Z}(1|k)$$

Sia $\varphi(k) := p_{Y|Z}(1|k) + 2p_{Y|Z}(2|k) = \dfrac{1-q+2q(1+p)p^{k-1}}{1-q+q(1+p)p^{k-1}}$

Quindi $\mathbb{E}(Y|Z) = \varphi(Z)$

2) Sia (X,Y) vettore aleatorio continuo con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{y}{x^2}} e^{-x} & \text{se } x,y>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare $\mathbb{E}(X|Y)$

b) Calcolare $\mathbb{E}(Y)$ senza calcolare f_Y

$\Rightarrow$ a) $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy = \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{y}{x^2}} e^{-x}\,dy$

Notiamo che $\frac{1}{x^2} e^{-\frac{y}{x^2}} \cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y)$ per x fissato é la densitá $Exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$, quindi si ha:

$f_X(x) = \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\, e^{-x}$ cioé $X \sim Exp(1)$

Si ha:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{y}{x^2}} e^{-x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y)$$

$$\varphi(x) = \int y\, f_{Y|X}(y|x)\,dy = \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \int_0^{+\infty} y \frac{1}{x^2} e^{-\frac{y}{x^2}}\,dy$$

$$= \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\, x^2$$

Quindi $\mathbb{E}(Y|X) = \varphi(X) = X^2$

b) Usiamo $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(X^2)$ con $X \sim Exp(1)$

$\Rightarrow \mathbb{E}(Y) = 2$