Def. (Invariante per il flusso di un campo):

Sia $X: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo qualsiasi. Un insieme $M \subseteq \Omega$ si dice INVARIANTE (PER IL FLUSSO DI X) se $\forall z$ curva integrale di X t.c. $z(0) \in M$ si ha $z(t) \in M$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Proposizione:

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Allora V è invariante per il flusso del sistema lineare $\dot{z} = Az$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se e solo se $AV \subseteq V$ (ovvero $\forall z_0 \in V$ $Az_0 \in V$)

Consideriamo il sistema $\dot{z} = Az$ con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ DIAGONALIZZABILE su $\mathbb{C}$, ricordiamo che:

Oss.:

Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A, $u \in \mathbb{C}$ autovettore di A per λ, allora anche $\bar{\lambda}$ è autovalore di A e $\bar{u}$ è il suo autovettore associato:

$$\overline{Au} = \overline{\lambda u} \underset{\substack{\uparrow \\ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\,!!!}}{\Longrightarrow} A\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$$

Dunque si può scrivere:

Autovalori di A: $\underbrace{\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k}_{\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}, \underbrace{\lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n}_{\in \mathbb{R}}$

Base di autovettori di $\mathbb{C}^n$: $\underbrace{u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2, \dots, u_k, \bar{u}_k}_{\in \mathbb{C}^n\setminus\mathbb{R}^n}, \underbrace{u_{2k+1}, \dots, u_n}_{\in \mathbb{R}^n}$

$\Rightarrow$ Considero $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$, scrivo:

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \quad \text{con} \quad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$$
$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + i\,\vec{w}_1 \quad \text{con} \quad \vec{v}_1, \vec{w}_1 \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1 \iff A(\vec{v}_1 + i\vec{w}_1) = (\alpha_1 + i\beta_1)(\vec{v}_1 + i\vec{w}_1)$$

$$\iff A\vec{v}_1 + i\,A\vec{w}_1 = \alpha_1\vec{v}_1 - \beta_1\vec{w}_1 + i(\beta_1\vec{v}_1 + \alpha_1\vec{w}_1)$$

$$\iff \begin{cases} A\vec{v}_1 = \alpha_1\vec{v}_1 - \beta_1\vec{w}_1 \\ A\vec{w}_1 = \beta_1\vec{v}_1 + \alpha_1\vec{w}_1 \end{cases} \quad (*)$$

Considero il sottospazio $<\vec{v}_1, \vec{w}_1> \subseteq \mathbb{R}^n$. Si noti che $\vec{v}_1, \vec{w}_1$ sono linearmente indipendenti (perché $\bar{\vec{u}}_1, \vec{u}_1$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}^n$) quindi tale spazio ha dim. = 2.

Inoltre:

$$A <\vec{v}_1, \vec{w}_1> \subseteq <\vec{v}_1, \vec{w}_1>$$

come si deduce da $(*)$

$\Rightarrow$ per la proposizione di prima, si ha che $<\vec{v}_1, \vec{w}_1>$ è invariante per il flusso di $\dot{z} = Az$

$\Rightarrow$ possiamo quindi "restringere" lo studio dell'equazione differenziale al sottospazio di dim. 2 $<\vec{v}_1, \vec{w}_1>$

La restrizione di A a $<\vec{v}_1, \vec{w}_1>$ è SIMILE a $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$

Quindi la restrizione di e^{tA} al sottospazio $<\vec{v}_1, \vec{w}_1>$ è SIMILE alla matrice:

$$e^{\alpha_1 t}\begin{pmatrix} \cos\beta_1 t & \sin\beta_1 t \\ -\sin\beta_1 t & \cos\beta_1 t \end{pmatrix}$$

Si può ripetere tale procedimento per $\lambda_2, \bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k$

ottenendo quindi una base di $\mathbb{R}^n$ formata da:

$$\langle \vec v_1, \vec w_1, \vec v_2, \vec w_2, \dots, \vec v_k, \vec w_k, \vec u_{2k+1}, \dots, \vec u_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$$

t.c. $v_j + i w_j = u_j$

Rispetto a tale base la matrice A si scrive nella forma:

$$\tilde A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & \\ -\beta_1 & \alpha_1 & & & \vec 0 & \\ & & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & -\beta_2 & \alpha_2 & & \\ & \vec 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{2k+1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha_j + i\beta_j = \lambda_j$$

e, quindi:

$$e^{t\tilde A} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t & e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t & & & \\ -e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t & e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t & & \vec 0 & \\ & \vec 0 & \ddots & & \\ & & & e^{t\lambda_{2k+1}} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

<u>Proposizione</u> (Decomposizione in sottospazi invarianti):

Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, allora $\exists$ sottospazi invarianti t.c.

$$\mathbb{R}^n = \langle v_1, w_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_k, w_k \rangle \oplus \langle u_{2k+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle u_n \rangle$$

e t.c.:

1) la restrizione di e^{tA} ai sottospazi di dim. 2 sia simile alla composizione di una dilatazione con una rotazione

2) la restrizione di e^{tA} ai sottospazi di dim. 1 sia simile ad una dilatazione

---

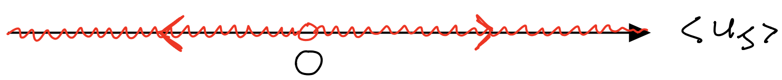
Studiamo ora le conseguenze di tale proposizione, in particolare dei suoi effetti sulle orbite di $\dot{z} = Az$ contenute nei sottospazi invarianti:

1) Nei sottospazi di dim. 1 (autospazi associati agli autovalori reali) $\langle u_s \rangle$ le soluzioni avranno la forma:

$$z = e^{t\lambda_s} z_0 \quad (\text{con } \lambda_s \in \mathbb{R},\ z_0 \in \langle u_s \rangle,\ t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ $\bar{z} = \vec{0}$ è un equilibrio

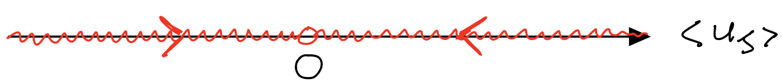
$\Rightarrow$ se $\lambda_s > 0$:



Le orbite sono semirette USCENTI dall'origine.

$\Rightarrow$ $\bar{z} = \vec{0}$ è equilibrio REPULSIVO

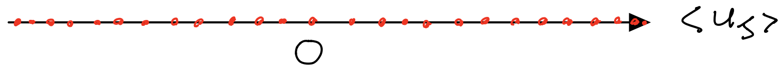
$\Rightarrow$ se $\lambda_s < 0$:



Le orbite sono semirette ENTRANTI nell'origine.

$\Rightarrow$ $\bar{z} = \vec{0}$ è equilibrio ATTRATTIVO

$\Rightarrow$ se $\lambda_s = 0$:



Le orbite sono TUTTI I PUNTI DI $\langle u_s \rangle$ (ed ogni punto è un' orbita distinta !!!), di conseguenza tutti i punti / curve integrali sono EQUILIBRI !!!

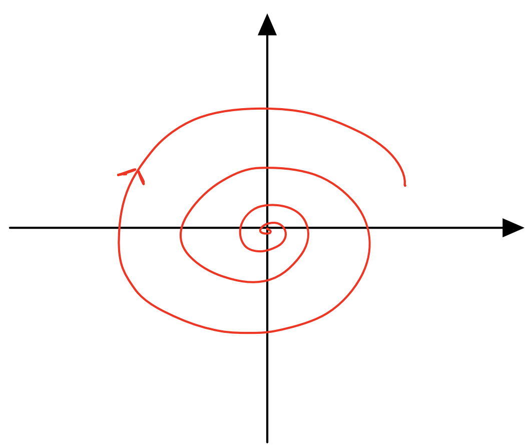
2) Nei sottospazi di dim. 2 $\langle v_s, w_s \rangle$ le soluzioni avranno la forma:

$$z = P e^{\alpha_s t} \begin{pmatrix} \cos \beta_s t & \sin \beta_s t \\ -\sin \beta_s t & \cos \beta_s t \end{pmatrix} P^{-1} z_0$$

$$\left(\text{con } \lambda_s = \alpha_s + i \beta_s \in \mathbb{C}, \; \alpha_s, \beta_s \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R} \quad z_0 \in \langle v_s, w_s \rangle \right)$$

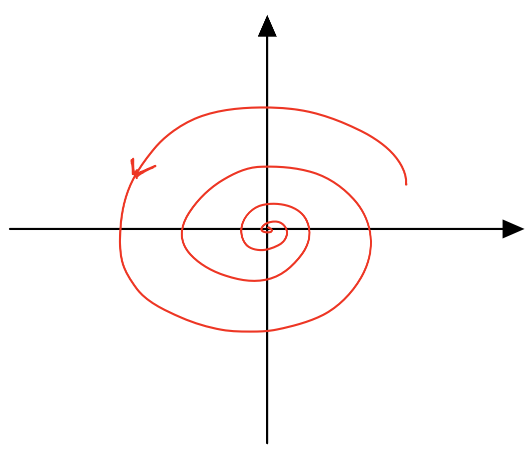
$\Rightarrow$ se $\alpha_s = Re(\lambda_s) > 0$:

dato che $e^{\alpha_s t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ e, allo stesso tempo, la matrice ruota attorno a 0, le orbite saranno spirali uscenti dall' origine



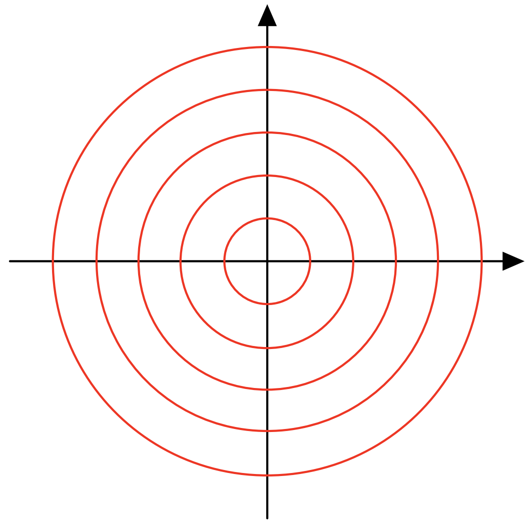
$\Rightarrow$ se $\alpha_s = Re(\lambda_s) < 0$:

dato che $e^{\alpha_s t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ e, allo stesso tempo, la matrice ruota attorno a 0, le orbite saranno spirali entranti nell' origine



$\Rightarrow$ se $\alpha_s = Re(\lambda_s) = 0$:

$e^{\alpha_s t} = 1 \Rightarrow$ agisce SOLO la matrice di rotazione, quindi le orbite saranno delle circonferenze di centro O (a meno di trasformazioni affini)



$\Rightarrow$ In ogni caso, se $Re(\lambda_s) = \alpha_s > 0$, $\underline{z} = \vec{0}$ è equilibrio REPULSIVO, mentre se $Re(\lambda_s) = \alpha_s < 0$ $\underline{z} = \vec{0}$ è equilibrio ATTRATTIVO.