18. Trasformata di Laplace

È utilizzata estensivamente in ambito ingegneristico dato che fornisce un approccio standard alla risoluzione di problemi integro-differenziali (lineari) ai dati iniziali (ODE / sistemi di ODE)

Esempio:

In analisi ed elaborazione di segnali (es. segnali audio) si usa per la progettazione di filtri audio digitali

Schema:

$$\begin{tikzcd} \text{SEGNALE } f \arrow[r, "\text{INPUT}"] \arrow[d, "\text{TRASFORMATA } \mathcal{L}"'] & \boxed{T} \arrow[r, "\text{OUTPUT}"] & g = (Tf) \arrow[d, "\mathcal{L}"] \\ \mathcal{L}(f) \arrow[r] & \boxed{\mathcal{L}(T)} \arrow[r] & \mathcal{L}(g) \end{tikzcd}$$

sistema ("filtro") descritto tramite T operatore integrale/differenziale

OPERATORE ALGEBRICO

($\mathcal{L}(T) :=$ funzione di trasferimento)

N.B.

1) la classe di segnali ($\equiv$ funzioni) a cui si applica $\mathcal{L}$ è diversa dalla classe a cui si applica $\mathcal{F}$!!!
2) $\exists$ la Trasformata Zeta, ovvero la versione di $\mathcal{L}$ per segnali a tempo discreto (è una serie di Laurent valida per $|z| \to +\infty$)

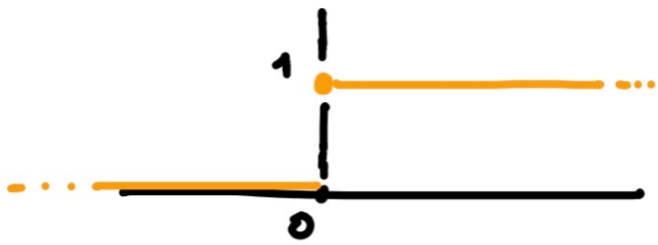
Segnali Causali:

Sono funzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) t.c. $u(t) = 0 \quad \forall t < 0$.

es. funzione di Heaviside:

$$H(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

(funzione a gradino)



Dato u segnale causale si definisce la TRASFORMATA DI LAPLACE DI u:

$$\boxed{\mathcal{L}(u)(s) := \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st}\,dt}$$
$$s \in \mathbb{C}$$

es.:

$$\underbrace{\mathcal{L}(H)(s)}_{\text{TL DELLA funzione di Heaviside}} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}. \quad \mathrm{Dom}(\mathcal{L}(H)) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Oss.:

u causale si dice $\mathcal{L}$-trasformabile se $\exists M > 0$ t.c. $u(t)e^{-Mt} \in L^1(\mathbb{R})$. Infatti, per $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > M$, si ha:

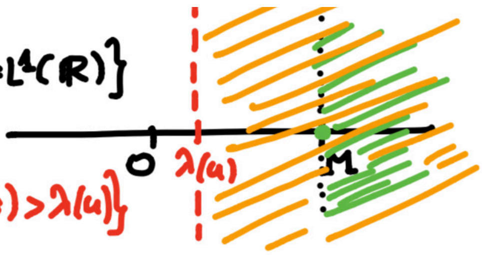
$$|\mathcal{L}(u)(s)| = \left|\int_0^{+\infty} u(t)e^{-st}\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |u(t)|e^{-Re(s)t}\,dt < \int_0^{+\infty} |u(t)|e^{-Mt}\,dt < +\infty$$

In particolare, $\{s \in \mathbb{C},\ Re(s) > M\} \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{L}(u)(s))$. Si definisce l'ascissa di convergenza:

$$\lambda(u) := \inf\{M \in \mathbb{R};\ e^{-Mt}\cdot u(t) \in L^1(\mathbb{R})\}$$

ASCISSA di CONVERGENZA:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{L}(u)) \supset \{s \in \mathbb{C};\ Re(s) > \lambda(u)\}$$



(semipiano massimale $\subset \mathrm{Dom}(\mathcal{L}(u))$)

Oss.:

Le funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili hanno crescita al più esponenziale per $t \to +\infty$.

es. $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{t^2} & t \geq 0 \end{cases}$ NON è $\mathcal{L}$-trasf.: $\forall M > 0$ $e^{t^2}e^{-Mt} \notin L^1$

Oss.:

Abuso di notazione: $u(t) \equiv u(t)\cdot H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u(t) & t \geq 0 \end{cases}$

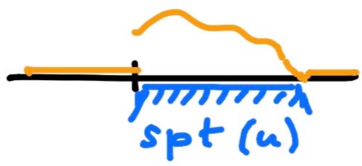
ESEMPIO:

$u(t) = e^{-t^2} \Rightarrow \lambda(u) = -\infty \Leftrightarrow \mathrm{Dom}(\mathcal{L}(u)) = \mathbb{C}$. Infatti:

$$e^{-t^2}e^{-Mt} \in L^1(\mathbb{R}^{\geq 0}) \ \forall M \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow u(t)e^{-Mt} \in L^1(\mathbb{R}) \ \forall M \in \mathbb{R}$$
$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)|e^{-Mt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}e^{-Mt}\,dt < +\infty$$

Oss.:

Anche nel caso $u(t)$ abbia supporto compatto si ha $\lambda(u) = -\infty \wedge \mathrm{Dom}(\mathcal{L}(u)) = \mathbb{C}$



Proprietà di $\mathcal{L}$:

1) linearità:

$$\mathcal{L}(u_1 + u_2) = \mathcal{L}(u_1) + \mathcal{L}(u_2)$$

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{L}(u_1+u_2)) = \mathrm{Dom}(\mathcal{L}(u_1)) \cap \mathrm{Dom}(\mathcal{L}(u_2)) \text{ !!!}$$

2) ritardo:

per $h>0$ si ha $\mathcal{L}(\tau_h u)(s) = e^{-hs}\mathcal{L}(u)(s)$

3) modulazione:

$\forall s_0 \in \mathbb{C}$ si ha $\mathcal{L}(e^{s_0 t}u(t))(s) = \mathcal{L}(u)(s-s_0) = \tau_{s_0}\mathcal{L}(u)(s)$

4) trasformate importanti:

$$\mathcal{L}(e^{s_0 \cdot t})(s) = \frac{1}{s-s_0} \quad (= \tau_{s_0}\mathcal{L}(H)(s)) \quad \forall s_0 \in \mathbb{C},$$

$$\mathcal{L}(\cos \omega t)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right)(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right)(s) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

5) $\mathcal{L}(u) \in C^0$, infatti:

$$\mathcal{L}(u)(s+h) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st}e^{-ht}\,dt \xrightarrow[h\to 0]{} \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st}\,dt$$

convergenza dominata

6) $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{O}(\mathrm{Dom}(\mathcal{L}(u))) \wedge \lim\limits_{Re(s)\to+\infty} \mathcal{L}(u)(s) = 0$

Dim.:

1) basta mostrare $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{O}(\{Re(s) > \lambda(u)\})$ e applicare il principio di continuazione analitica:

sia $M > a > \lambda(u) \Rightarrow \int_0^{+\infty} \partial_s(u(t)e^{-st})\,dt = \int_0^{+\infty} -t\cdot(u(t)e^{-st})\,dt$
$= \mathcal{L}(-t\cdot u(t))(s)$

$\Rightarrow |\partial_s(u(t)e^{-st})| \leq t e^{-Re(s)t}|u(t)| \leq e^{-at}|u(t)| \in L^1$ per $Re(s)>M$

2) Teorema di Morera:

$\oint_T \mathcal{L}(u)(s)\,ds = \int_0^{+\infty} u(t)\left[\oint_T e^{-st}\,ds\right]dt = 0 \quad \forall T$

$\Rightarrow \mathcal{L}(u)$ olomorfa, inoltre $\mathcal{L}(u)(x+iy) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}e^{-iyt}\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

□

7) $\frac{d}{ds}\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(-t\,u(t))$

Relazione tra $\mathcal{L}$ e $\mathcal{F}$, formula di inversione:

sia $s = x+iy$ con $x > \lambda(u)$, u $\mathcal{L}$-trasf.. Si ha:

$$\mathcal{L}(u)(s) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}e^{-iyt}\,dt = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}e^{-2\pi i\frac{y}{2\pi}t}\,dt$$

$$= \mathcal{F}(u(t)e^{-xt})\left(\frac{y}{2\pi}\right)$$

ovvero:

$$\mathcal{L}(u)(x+i2\pi y) = \mathcal{F}(u(t)e^{-xt})(y)$$

In particolare, se $u(t)e^{-xt} \in C^0_0 \cap L^1$, si ha:

$$u(t)\,e^{-xt} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{L}(u)(x+2i\pi y)e^{i2\pi yt}\,dy$$

ponendo $s = x+i2\pi y$, $ds = 2\pi i\,dy$ si ha:

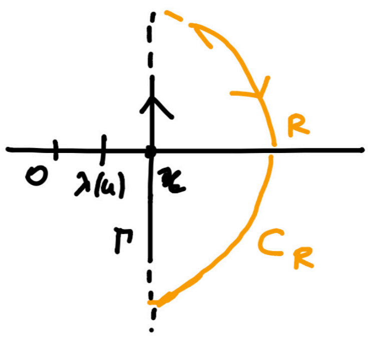
$$u(t) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\mathcal{L}(u)(x+i2\pi y)e^{xt}e^{2\pi iyt}\,dy$$

$$\iff \boxed{u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}(u)(s)e^{st}\,ds}, \quad \Gamma = \{s = x+i2\pi y : -\infty < y < +\infty\}$$

FORMULA DI INVERSIONE DI RIEMANN - FOURIER $\Rightarrow$ vale se $u \in C^0$, in particolare se $u(0^+) = u(0^-) = 0$

Oss.:

La formula è indipendente da $x > \lambda(u)$!!! Inoltre, per $t<0$, si ha $\int_\Gamma \mathcal{L}(u)(s)e^{st}\,ds = 0$. Infatti, su $\{Re(s) > \lambda(u)\}$, $\mathcal{L}(u)(s)e^{st}$ è olomorfa e $\int_{C_R}\mathcal{L}(u)(s)e^{st}\,ds \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ per $t<0$ (convergenza dominata).



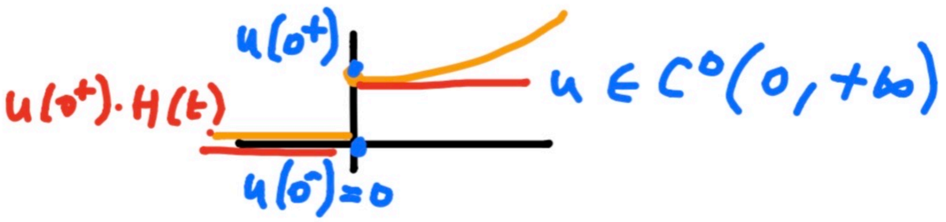
Formula di inversione - Caso generale:

In generale si ha la formula:

$$\boxed{\frac{u(t^+)+u(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\mathcal{L}(u)(s)e^{st}\,ds}$$

Dim.:

Mostriamo solo il caso (tipico) in cui u abbia una discontinuità a salto in $t=0$:



$$\Rightarrow v(t) = u(t) - u(0^+)\cdot H(t) \in C^0(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}(v)(s)e^{st}\,ds - \frac{u(0^+)}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}(H)(s)e^{st}\,ds$$

con $\Gamma = \{x + i\alpha,\ -\infty < \alpha < +\infty\}$

scelgo $x>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}(H)(s)e^{st}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{st}}{s}\,ds = \begin{cases} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{st}}{s}, s=0\right) = 1 & t>0 \\ \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{2} & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ per $t>0$:

$$u(t) - \cancel{u(0^+)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}(u)(s)e^{st}\,ds - \cancel{u(0^+)}$$

per $t=0$:

$$0 = v(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}(u)(s)\,ds - u(0^+)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{u(0^+) + \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{u(0^-)}}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}(u)(s)e^{s\cdot 0}\,ds$$

per $t<0$:

$$u(t) = 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}(u)(s)e^{st}\,ds - \cancel{u(0^+)}\cdot 0$$

$\Rightarrow$ riassumendo:

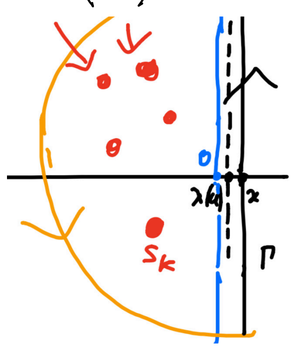
$$\frac{u(0^+) + u(0^-)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}(u)(s)e^{s\cdot t}\,ds \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$\square$

Formula di Heaviside:

Se $\mathcal{L}(u)(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ funzione razionale, allora i poli di $\mathcal{L}(u)$ (ovvero gli zeri di Q) hanno parte reale $< \lambda(u)$ e si ha:

$$\boxed{u(t) = \sum_{s_K} \operatorname{Res}\left(e^{st}\cdot\frac{P(s)}{Q(s)}; s=s_K\right) \quad \text{con } Q(s_K)=0 \ \forall K}$$



Oss.:

Tipicamente le funzioni razionali sono le trasformate di funzioni esponenziali/trigonometriche/polinomiali. Pertanto, per anti-trasformare funzioni razionali si possono usare le tabelle per le funzioni $e^{\alpha t}$, $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, t^{μ} e le proprietà di $\mathcal{L}$ rispetto alle operazioni naturali su $\mathbb{R}$:

N.B.

$$\mathcal{L}(t^{\mu})(s) = \int_0^{+\infty} t^{\mu} e^{-st}\,dt = \frac{1}{s^{\mu+1}} \int_0^{+\infty} s^{\mu} t^{\mu} e^{-st}\,d(st) = \frac{1}{s^{\mu+1}} \int_0^{+\infty} \tau^{\mu} e^{-\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}} \quad \left(\text{se } \mu \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(t^{\mu})(s) = \frac{\mu!}{s^{\mu+1}}\right)$$

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p, p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^{\infty} F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			

Convoluzione ed $\mathcal{L}$:

u, v segnali causali $\mathcal{L}$-trasf

$\Rightarrow u * v(t) = \int_{\mathbb{R}} u(\tau) v(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t u(\tau)\, v(t-\tau)\, d\tau$

Per Fubini si ha:

$$\boxed{\mathcal{L}(u * v)(s) = \mathcal{L}(u)(s) \cdot \mathcal{L}(v)(s)}$$

Da tale formula si deriva l'espressione per la $\mathcal{L}$-TRASFORMATA DI UNA PRIMITIVA CAUSALE:

$\Rightarrow$ sia $U(t) = \int_0^t u(\tau)\, d\tau$ con u causale, $\mathcal{L}$-trasf. Allora si ha:

$$U(t) = \int_0^t u(\tau)\, H(t-\tau)\, d\tau = (u * H)(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(U)(s) = \mathcal{L}(u * H)(s) = \mathcal{L}(u)(s) \cdot \mathcal{L}(H)(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(U)(s) = \frac{\mathcal{L}(u)(s)}{s}}$$

$\mathcal{L}$-Trasformata della derivata:

u, u' causali, $\mathcal{L}$-trasf. $\Rightarrow$ si ha:

$$\mathcal{L}(u')(s) = \int_{0^+}^{+\infty} u'(t)\, e^{-st}\, ds = u(t)\, e^{-st}\Big|_{0^+}^{+\infty} - \int_{0^+}^{+\infty} u(t)(-s)\, e^{-st}\, ds$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(u')(s) = s\mathcal{L}(u)(s) - u(0^+)}$$

se u'' è $\mathcal{L}$-trasf. allora:

$$\mathcal{L}(u'')(s) = s\mathcal{L}(u')(s) - u'(0^+) = s^2\mathcal{L}(u)(s) - s\,u(0^+) - u'(0^+)$$

Risoluzione di PdC:

es. oscillatore armonico sforzato:

$$\begin{cases} u'' + u = f(t) \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}(u'')(s) + \mathcal{L}(u)(s) = \mathcal{L}(f)(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(u)(s) \cdot (s^2 + 1) - s\,u_0 - v_0 = \mathcal{L}(f)(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(u)(s) = \frac{\mathcal{L}(f)(s)}{s^2+1} + \frac{s\,u_0 + v_0}{s^2+1}$$

$\Rightarrow \frac{1}{s^2+1}$ è la funzione di trasferimento del sistema ed è il reciproco del polinomio caratteristico !!!

$\Rightarrow \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}(g)(s)$ con $g = \sin t$

SOL: $\mathcal{L}(u)(s) = \mathcal{L}(f * g)(s) + u_0 \underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{= \mathcal{L}(\cos t)(s)} + v_0 \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{= \mathcal{L}(\sin t)(s)}$

$$\Rightarrow u(t) = f * g(t) + u_0 \cos t + v_0 \sin t$$

La funzione di trasferimento $g(t)$ risolve il PdC con impulso ideale:

$$\begin{cases} u'' + u = \delta_0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

ed è detta soluzione fondamentale. Rappresenta la risposta libera del sistema per effetto di un impulso unitario concentrato nell'istante ideale

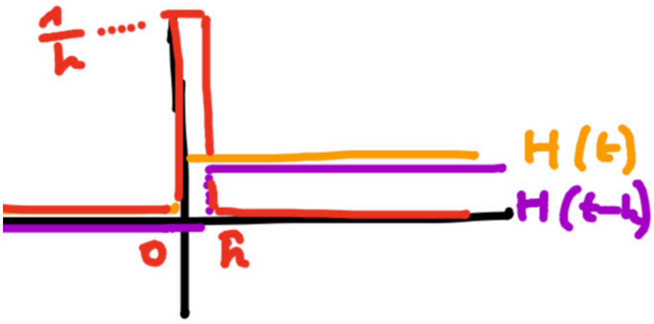
Oss.:

$g(t)$ è anche sol. del PdC $\begin{cases} u'' + u = \delta_0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$

$\mathcal{L}$ E δ_0:

In dimensione 1 possiamo vedere δ_0 come "derivata" della funzione di Heaviside. Infatti:

$$\frac{H(t) - H(t-h)}{h} = \frac{1}{h} Rec\left(\frac{t}{h}\right) \text{ è t.c. } \int_{\mathbb{R}} \frac{H(t) - H(t-h)}{h} dt = 1 \ \forall h$$



Il rapporto incrementale in 0 di H forma un'identità approssimante !!!

$$\Rightarrow \frac{H(t) - H(t-h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \delta_0 \text{ nel senso delle misure}$$

D'altra parte, $\mathcal{L}\left(\frac{H - \tau_h H}{h}\right)(s) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sh}}{s}\right] = \frac{1 \cdot s}{s}\left[\frac{1 - e^{-sh}}{sh}\right]$ $\xrightarrow[h \to 0]{}$ 1. Risulta naturale pertanto definire:

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta_0)(s) \equiv 1}$$

Tale scrittura è coerente con la proprietà di identità rispetto al prodotto di convoluzione:

$$f = \delta_0 * f \Leftrightarrow \cancel{\mathcal{L}(f)} = \mathcal{L}(\delta_0 * f) = \mathcal{L}(\delta_0) \cdot \cancel{\mathcal{L}(f)}$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}(\delta_0) = 1$$

TEOREMA (del valore iniziale / finale):

Si ha:

$$1)\quad u(0^+) = \lim_{t \to 0^+} u(t) = \lim_{Re(s) \to +\infty} s \cdot \mathcal{L}(u)(s)$$

$$2)\quad u(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} u(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \mathcal{L}(u)(s)$$

(Si usano per definire condizioni iniziali in equazioni differenziali / integrali date contenenti termini impulsivi (ovvero δ di Dirac))

DIM.:

$$1)\quad \underbrace{\mathcal{L}(u')(s)}_{\xrightarrow{Re(s)\to+\infty} 0} = s \cdot \mathcal{L}(u)(s) - u(0^+)$$

$$2)\quad \mathcal{L}(u')(s) = \int_0^{+\infty} u'(t) e^{-st} ds \xrightarrow[s \to 0]{} \int_0^{+\infty} u'(t)\, dt = u(+\infty) - u(0^+)$$

$\square$

EQUAZIONI INTEGRALI:

Equazioni di tipo Volterra (es. modelli di popolazione)

$$u(t) = \int_0^t K(t,v)\, u(v)\, dv + f(t)$$

$\Rightarrow$ se $K(t,v) = K(t-v)$ (nucleo di convoluzione) allora:

$$u = K * u + f$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(K * u) + \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(K) \cdot \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(f)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(u) = \frac{\mathcal{L}(f)}{1 - \mathcal{L}(K)}}$$