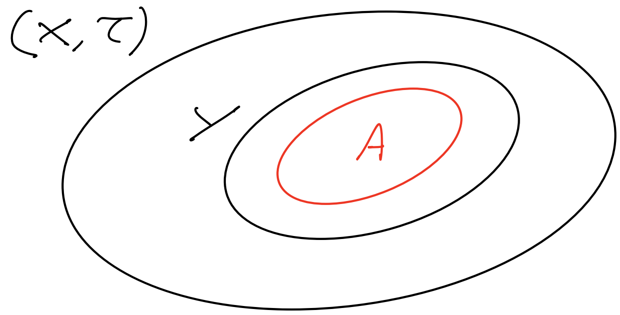
es. 2)

Sia $Y \subseteq (X, \tau)$, $A \subseteq Y$. Dim. che $\overline{A}^X$ contiene $\overline{A}^Y$:




deve essere $\overline{A}^Y \subseteq \overline{A}^X$:

$\overline{A}$ = più piccolo chiuso contenente $A$

$\Rightarrow$ su $Y$ c'é la topologia indotta da $\tau$ !!!

Dim.

$\forall x \in \overline{A}^Y$ mostro che $x \in \overline{A}^X$:

$\Rightarrow \forall U \in \tau_Y$ con $x \in U$ si ha $U \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow$ Supponiamo per assurdo che $\exists V \in \tau$ con $x \in V$ t.c. $V \cap A = \phi$, sia $V \cap Y \in \tau_Y$ (per definizione) t.c. $(V \cap Y) \cap A = \phi$. $\lightning$

$\Rightarrow x \in \overline{A}^X$

q.e.d.

N.B.

esempio in cui $\overline{A}^Y \subsetneq \overline{A}^X$:

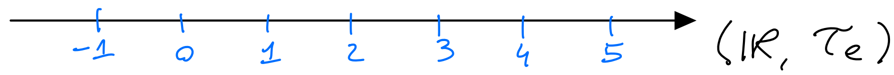
$\underset{(X,\tau)}{(\mathbb{R}, \tau_e)}$, $\underset{Y}{[a, b)}$, $\underset{A}{[c, b)}$ con $a < c < b$

$\Rightarrow \overline{A}^X = [c, b]$, $\overline{A}^Y = [c, b)$ !!!

es. 3)

Descrivere le topologie indotte da $(\mathbb{R}, \tau_e)$ su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$




$\Rightarrow$ base per $\tau_{indotta}$ su $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{B}_e = \{ (a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b \} \text{ genera } \tau_e$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\tau_{indotta}} = \{ (a,b) \cap \mathbb{Z} \mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b \}$$

$$= \{ \{n\} \mid n \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \text{qualcos'altro} \}$$

$$\Rightarrow \tau_{indotta} = \tau_{discreta} \text{ su } \mathbb{Z}$$

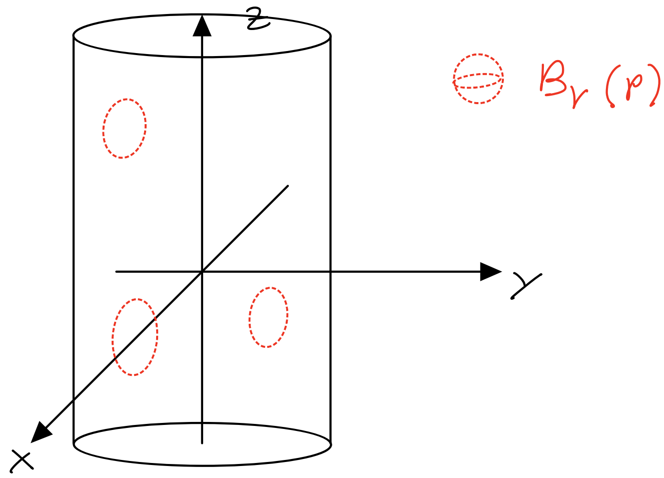
$\Rightarrow$ base per $\tau_{indotta}$ su $\mathbb{Q}$:

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\tau_{indotta}} = \{ (a,b) \cap \mathbb{Q} \mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b \}$$

es. 5)

Dato $Y = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1 \} \subseteq (\mathbb{R}^3, \tau_e)$ descrivere una base di aperti per $\tau_Y$ indotta su $Y$ da $\tau_e$. Sia poi $S^1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1 \} \subseteq (\mathbb{R}^2, \tau_e)$ con la topologia indotta. Considero $(S^1, \tau_{S^1}) \times (\mathbb{R}, \tau_e)$, descrivere una base di aperti per la topologia prodotto. Dim. che le 2 basi introdotte generano la stessa topologia.

1) $Y$ è un cilindro in $\mathbb{R}^3$




$\Rightarrow \mathcal{B}_e = \{ B_r(x,y,z) \mid r>0,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

$\Rightarrow \mathcal{B}_{\tau_{indotta}} = \{ B_r(x,y,z) \cap Y \} = \mathcal{B}_1$

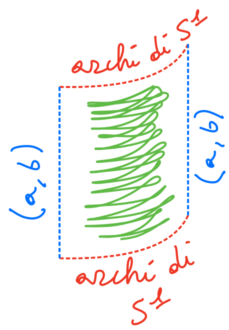
2) $S^1$ è la sfera piana di raggio 1.

$\Rightarrow \mathcal{B}_{\tau_{indotta}} = \{ B_r((x,y)) \cap S_1 \mid r>0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$=$ { archi di circonferenza di $S^1$ con estremi esclusi }

$\Rightarrow \mathcal{B}_{\tau_{prodotto}} =$ { archi di circonferenza $\times (a,b) \mid a<b$ } $= \mathcal{B}_2$

$\Rightarrow$




3) Dim che $\tau(\mathcal{B}_1) = \tau(\mathcal{B}_2)$

$\Rightarrow$ uso il teorema delle basi:

1) $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1 \ \forall x \in B_1 \ \exists B_2 \in \mathcal{B}_2$ t.c. $x \in B_2 \subseteq B_1$

2) $\forall B_2 \in \mathcal{B}_2 \ \forall x \in B_2 \ \exists B_1 \in \mathcal{B}_1$ t.c. $x \in B_1 \subseteq B_2$

2) è evidente dato che posso scegliere a piacere il

raggio di $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^3$ t.c. $(B_r(x) \cap Y) \subseteq B_2$

1) Sia $B_1 \in \mathcal{B}_1$ con $x \in B_1$. Scelgo $r$ piccolo a piacere per $B_r(p) \cap S^1$ e $(a,b)$ piccolo a piacere per $(B_r(p) \cap S^1) \times (a,b)$ e vedo che è verificata la proprietà.

q. e. d.

es. 8)

Sia $X$ insieme infinito e $Y$ con $|Y| \geq 2$. Siano $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ le topologie cofinite su $X, Y, X \times Y$. Dim. che $\tau_{prodotta}$ di $\tau_1, \tau_2$ su $X \times Y$ è più fine di $\tau_3$

$$\Rightarrow \quad X \times Y \begin{array}{l} \nearrow \tau_{prodotta} \\ \qquad \vee \\ \searrow \tau_3 = \tau_{cof} \end{array}$$

1) $\forall A \in \tau_3 \quad A \in \tau_{prodotta}$

2) $\exists A \in \tau_{prodotta}$ t.c. $A \notin \tau_3$

$\Rightarrow$ 1) $\tau_3 = \tau_{cof}$ su $X \times Y$

$$= \{\emptyset, X \times Y\} \cup \{A \mid |\complement_{X \times Y}(A)| < +\infty\}$$

$$\Rightarrow \quad A = (X \times Y) \setminus \{p_1, \dots, p_t\} \quad p_i \in X \times Y$$

$\Rightarrow$ mostro che $\forall p \quad (X \times Y) \setminus \{p\}$ è aperto in $\tau_{prodotta}$:

$\Rightarrow$ $p = (x, y)$ con $x \in X$, $y \in Y$ quindi:

$$(X \times Y) \setminus p = \underbrace{(X \setminus \{x\}) \times Y}_{\tau_{prodotta}} \cup \underbrace{X \times (Y \setminus \{y\})}_{\tau_{prodotta}} \in \tau_{prodotta}$$

⇒ 2) esibisco $A \in \tau_{prodotto}$ t.c. $A \notin \tau_3$

$\Rightarrow A = X \times (Y \setminus \{y\}) \in \tau_{prodotto}$

$\Rightarrow Y \setminus \{y\} \neq \emptyset \quad (|Y| \geq 2)$

$\Rightarrow \mathcal{C}_{X \times Y}(A) = X \times \{y\}$ infiniti elementi ($X$ inf.)

$\Rightarrow A \notin \tau_3$.

⇒ $\tau_3 \preceq \tau_{prodotto}$.

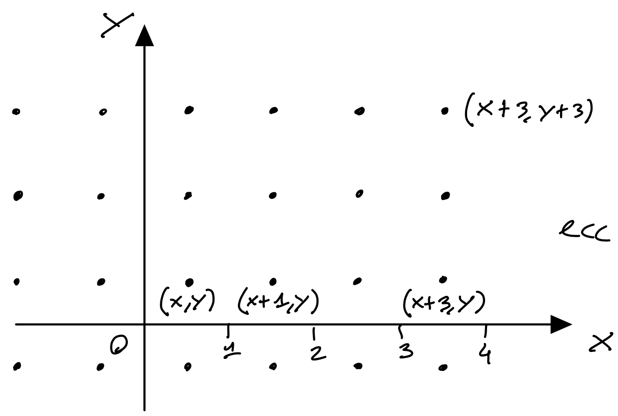
es. 12)

Sia $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$ e definiamo $\sim$ t.c.

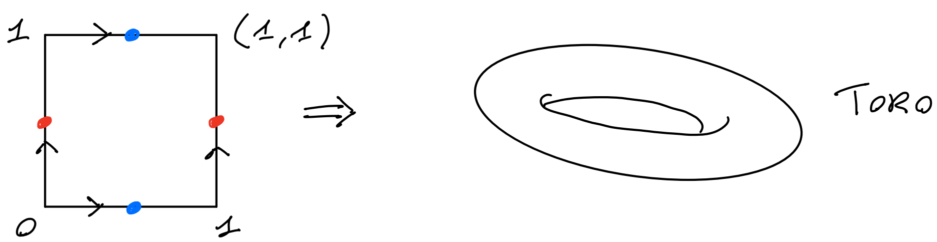
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \vee x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \wedge y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

Descrivere $(\mathbb{R}^2, \tau_e)/_\sim$ e gli aperti completi

⇒




⇒ mi limito al quadrato $[0,1] \times [0,1]$:




⇒ Quali sono gli aperti completi?

Dato un aperto sul toro (e quindi nel quadrato $[0,1] \times [0,1]$, la sua controimmagine è se stesso replicato infinite volte in ciascuno dei quadrati in cui $\sim$ divide $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$ !!!

$\Rightarrow$ Dato che l'unione arbitraria di aperti è aperta, sono tutti aperti in $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$.

$\Rightarrow$ Tuttavia dato $A \in \tau_e$, A NON è aperto completo perché $\forall A \in \tau_e$ su $\mathbb{R}^2$, $\pi^{-1}(\pi(A))$ è un'infinità di aperti tutti uguali!!!

$\Rightarrow$ Una base per gli aperti completi è data da:

$$\bigcup_{k,h \in \mathbb{Z}} B_r(x+h, y+k) \quad \forall x,y \text{ fissati} \quad \forall r>0 \in \mathbb{R}$$

es. 1)

Sia $Y \subseteq X$, $Z \subseteq Y$, dim. che $Z$ è sottospazio di $X$ con la topologia indotta.

Dim.

$$(X, \tau) \Rightarrow (Y, \tau_{indotta_X}) \Rightarrow (Z, \tau_{indotta_Y})$$

$$\Rightarrow (Z, \tau_{indotta_X})$$

Va dimostrato che $\tau_{indotta_Y} = \tau_{indotta_X}$:

$\Rightarrow \tau_Y = \{A \cap Z \mid A \in \tau_{indotta_X}\}$

$\Rightarrow \tau_X = \{A' \cap Z \mid A \in \tau\}$

$\Rightarrow \tau_{indotta_X} = \{A'' \cap Y \mid A'' \in \tau\}$

$\Rightarrow A \in \tau_{indotta_X} \Leftrightarrow A = A' \cap Y$ con $A' \in \tau$

$\Rightarrow \bar{A} \in \tau_X \Leftrightarrow \bar{A} = B \cap Z$ con $B \in \tau$

$\Rightarrow A \in \tau_{indotta_Y} \Leftrightarrow A = \bar{A} \cap Z$ con $\bar{A} \in \tau_{indotta_X}$

$\Leftrightarrow \quad A = (A' \cap Y) \cap Z$ con $A' \in \tau$

$\Leftrightarrow \quad A = A' \cap Z$ con $A' \in \tau$, $Z \subseteq X$

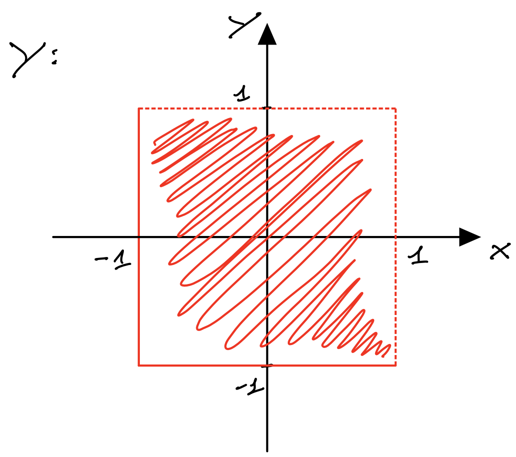
$\Rightarrow \quad Z$ è sottospazio topologico di $X$.

es. 4)

Sia $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x < 1, -1 \leq y < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ sottoinsieme di $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$. Determinare un sottospazio topologico $X \subseteq \mathbb{R}^2$ con la topologia indotta t.c.

1) $Y$ sia aperto e chiuso in $X$
2) $Y$ sia aperto ma non chiuso in $X$
3) $Y$ sia chiuso ma non aperto in $X$

$\Rightarrow$ Rappresento $Y$:

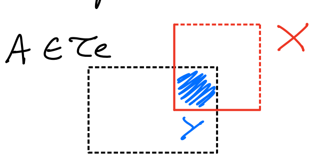



1) Prendo $(X = Y, \tau_{indotta})$

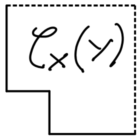
$\Rightarrow X = Y$ è sia aperto che chiuso

2) Considero $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 2), y \in [-1, 2)\}$

$\Rightarrow Y$ è aperto in $X$ poiché può essere visto come:



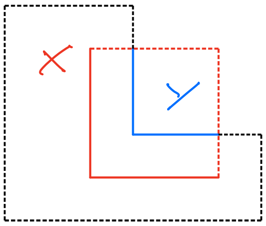
$\Rightarrow Y$ non è chiusa: il suo complementare è:




non è aperto in $\tau$ indotta

3) Considero $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 1),\ y \in [-2, 1)\}$

$\Rightarrow Y$ è chiuso ($\mathcal{C}_X(Y)$ è aperto, è intersezione tra $X$ e $A$)




$A \in \tau_e$

$\Rightarrow Y$ non è aperto (ci sono problemi per i punti con $x = -2$ e con $y = -2$)

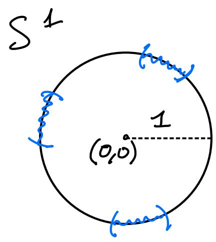
es. 6)

Consideriamo gli spazi $(\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$ con $\mathcal{B} = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ e $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ con la topologia indotta. Dim. che $\tau_{prodotto}$ su $\mathbb{R} \times S^1$ è diversa da $\tau$ indotta da $\tau_e$ su $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$ è:

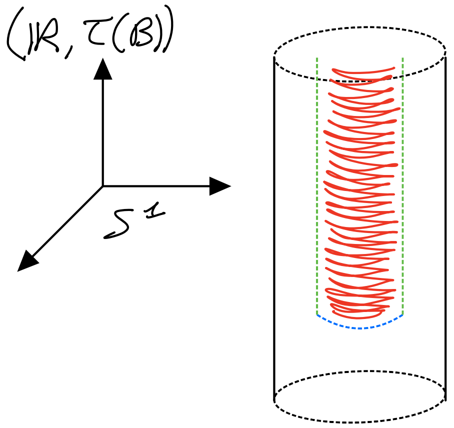

$(\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$

$\Rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ con $\tau$ indotta è:

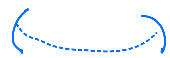



Gli aperti sono gli archi di $S^1$ estremi esclusi

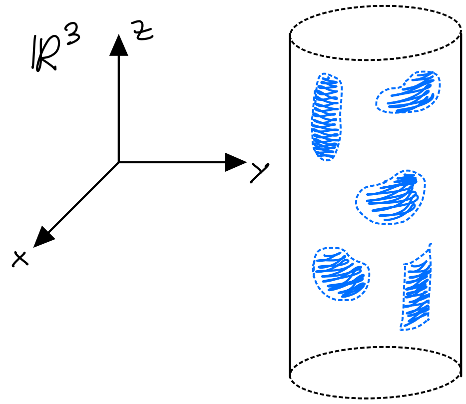
$\Rightarrow$ Il prodotto $\mathbb{R} \times S^1$ con $\tau$ prodotto è:



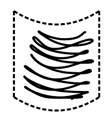
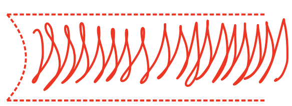

Gli aperti sono unioni / intersezioni di

 $\times \ (a, +\infty), \ a \in \mathbb{R}$

La topologia indotta su $\mathbb{R} \times S^1$ da $\tau_e$ è invece:




ecc.

$\Rightarrow$ un aperto di $\tau_e$ su $\mathbb{R}^3$ del tipo  NON può essere ottenuto né come intersezione finita, né come unione arbitraria di aperti di $\tau_{prodotto}$ della forma  perché tali unioni / intersezioni NON saranno mai insiemi limitati.

$\Rightarrow \tau_{prodotto} \lneq \tau_e$

es. 3)

Sia $X = (\mathbb{R}, \tau_e)$ e sia $\sim$ t.c.

$$x \sim y \iff x = y \ \vee \ x - y \in \mathbb{Z}$$

Descrivere $X/\sim$ con $\tau_{quoziente}$

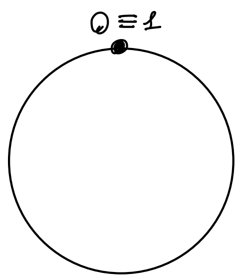
$\Rightarrow$ Divido $\mathbb{R}$ in:

1) $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ tutti gli interi collassano in un punto, come rappresentante scelgo $0$

2) $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow$ Fissato $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ si ha che $x \sim y$ se e solo se $x - y = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = x - k$, come rappresentante scelgo l'elemento che sta in $[0, 1]$

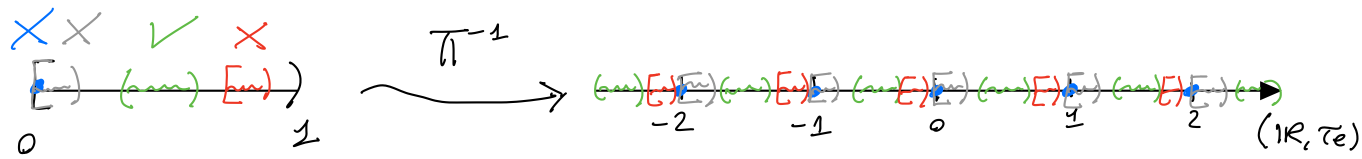
3) $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$ Si può ragionare come sopra, quindi come rappresentante scelgo l'elemento che sta in $[0, 1]$

$\Rightarrow$ Mi limito a $[0, 1]$:




$X/\sim$

$\Rightarrow$ Descrivo gli aperti di $X/\sim$:




ecc...

es. 10)

Sia $D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \} \subseteq \mathbb{R}^n$ con la topologia indotta da $\tau_e$ su $\mathbb{R}^n$ e $\sim$ t.c.

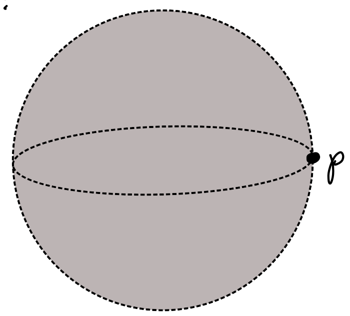
$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee x, y \in \partial D^n$$

Descrivere $D^n/\sim$.

$\Rightarrow D^n$ è il disco $n$-dimensionale, $\partial D^n = S^{n-1}$ è la sfera $n-1$ dimensionale.

$\Rightarrow$ In generale $\sim$ agisce così:

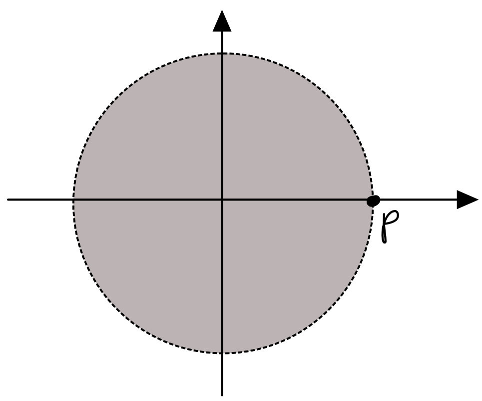
es. $n=3$:




$(B_1(\vec{0}) \cup \{p\})$ !!!

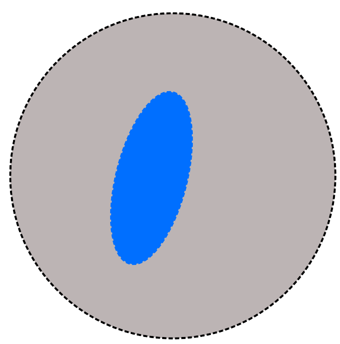
con $p = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$

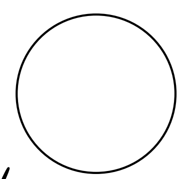
es. $n=2$:




$B_1((0,0)) \cup \{(1,0)\}$

Gli aperti sono:



✓ , $\pi^{-1}(\{p\}) =$ 

che non è aperto

✗

$\Rightarrow$ in generale, nessun aperto di $D^n/\sim$ contiene $p$ !!!

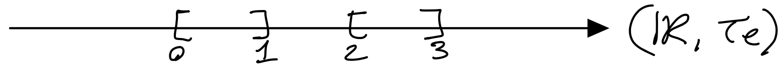
es. 11)

Siano $X = [0,1] \cup [2,3]$, $Y = [0,1]$, $\sim$ su $X$ t.c.

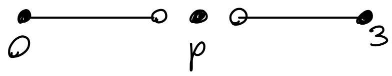
$$x \sim y \iff x = y \lor (x,y) = (1,2)$$

Verificare che $X/\sim$ è omeomorfo a $Y$

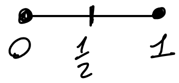
$\Rightarrow$ $X$:




$\Rightarrow$ $X/\sim$ :




$Y$




$\Rightarrow \quad f : X/\sim \longrightarrow Y$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = p \\ \frac{x-1}{2} & \text{se } x \in (2,3] \end{cases}$$

$\Rightarrow f(0) = 0, \; f(p) = \frac{1}{2}, \; f(3) = 1$ ✓

$\Rightarrow f$ è continua e biettiva $\Rightarrow X$ è omeomorfo a $Y$.