Def. (Campi Topologicamente Orbitalmente Equivalenti):
2 campi vettoriali $X, Y : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (Ω aperto) si dicono TOPOLOGICAMENTE ORBITALMENTE EQUIVALENTI se $\exists\, \varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$ omeomorfismo che trasforma le orbite di X in quelle di Y mantenendone l'orientamento. Si scrive, in tal caso, $X \sim Y$

Def. (Biforcazione di un Campo):
Dato il campo $X : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \Omega$ DIPENDENTE DA UN PARAMETRO t.c. $(\mu, z) \longmapsto X_\mu(z)$, si dice che X_μ ha una BIFORCAZIONE a $\mu = \bar{\mu}$ se $\exists\, I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $\bar{\mu}$ t.c. per $\mu, \mu' \in I$ si ha:

1) $X_\mu \sim X_{\mu'}$ se $\mu, \mu' < \bar{\mu}$
2) $X_\mu \not\sim X_{\mu'}$ se $\mu < \bar{\mu} < \mu'$

esempio:
Consideriamo il campo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mu x (x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y (x^2+y^2) \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}.$$

Studiare la stabilità di $\mathcal{E}_0 = (0,0)$ al variare di μ

$\Rightarrow$ il linearizzato è:

$$D_X(x,y) = \begin{pmatrix} 3\mu x^2 + \mu y^2 & -1 + 2\mu x y \\ 1 + 2\mu y x & \mu x^2 + 3\mu y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_X(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{E}_0 \text{ è linearmente un}$$

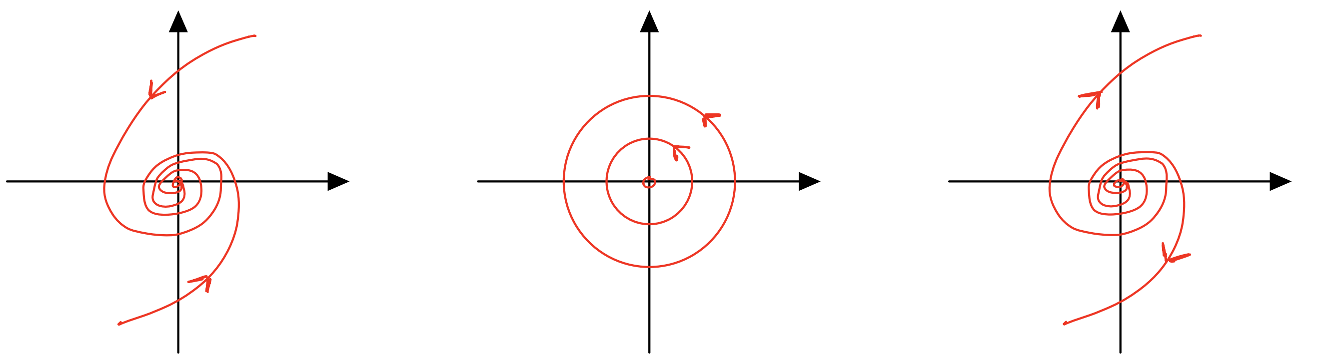
centro, quindi NON è iperbolico (indipendentemente da μ)

$\Rightarrow$ per studiare il sistema NON lineare, passiamo in coordinate polari:

$$X(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \mu \rho^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ si osserva immediatamente che il moto radiale è totalmente disaccoppiato dal moto rotatorio, quindi tutte le soluzioni ruotano attorno all'origine con velocità angolare costante e pari a $\dot{\theta} = 1$.

$\Rightarrow$ si hanno 3 casi:



$\mu < 0$ — E_0 FUOCO STABILE

$\mu = 0$ — E_0 CENTRO

$\mu > 0$ — E_0 FUOCO INSTABILE

<u>Proposizione</u>:

Ogni equilibrio iperbolico di un campo vettoriale è isolato.

Mostriamo ora la FORMA NORMALE di 3 tipi comuni di biforcazioni locali. Ogni altra biforcazione della stesso tipo si può ricondurre qualitativamente alla rispettiva equazione in forma normale.

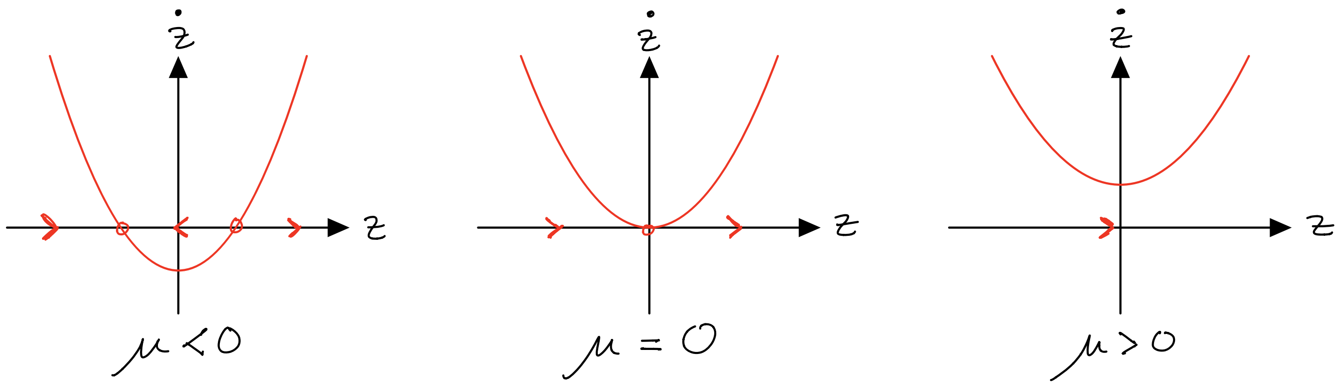
1) Biforcazione Tangente:

Le equazioni in forma normale sono:

$$\boxed{\dot{z} = \mu + z^2} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\dot{z} = \mu - z^2}$$

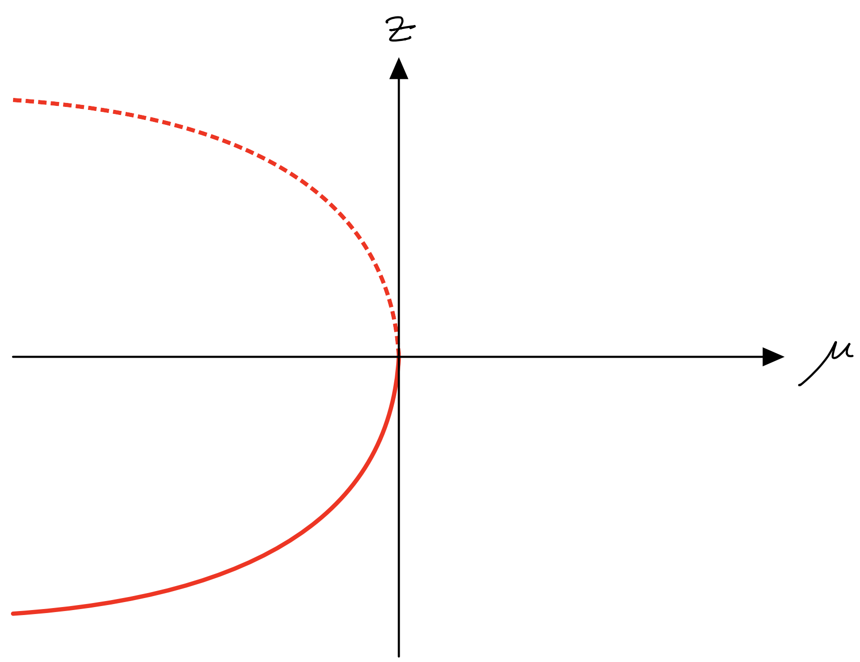
con $z \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ parametro del campo vettoriale.

$\Rightarrow$ si hanno 3 casi:



$\Rightarrow$ si ha una biforcazione tangente per $\mu = 0$

$\Rightarrow$ Diagramma di biforcazione:



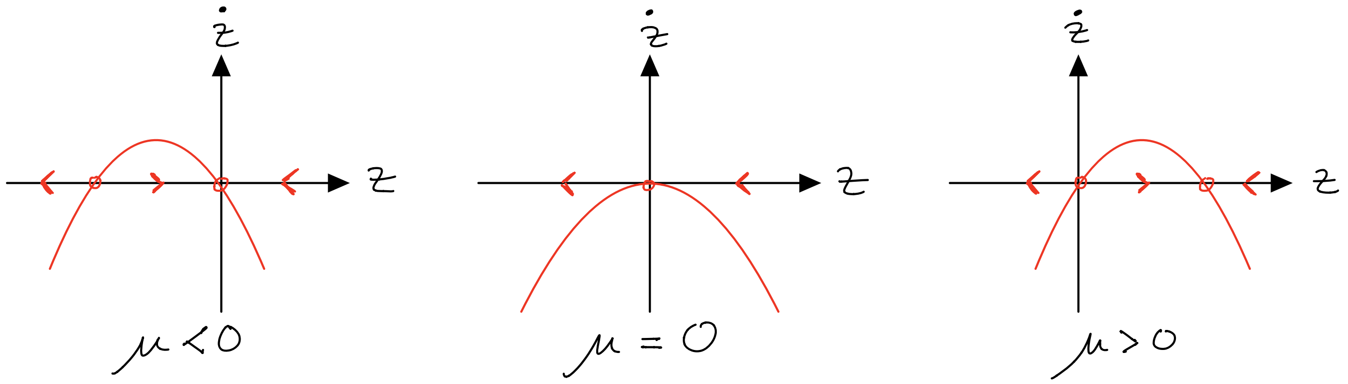
2) Biforcazione Transcritica:

L'equazione in forma normale è:

$$\boxed{\dot z = z(\mu - z)}$$

con $z \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ parametro del campo vettoriale.

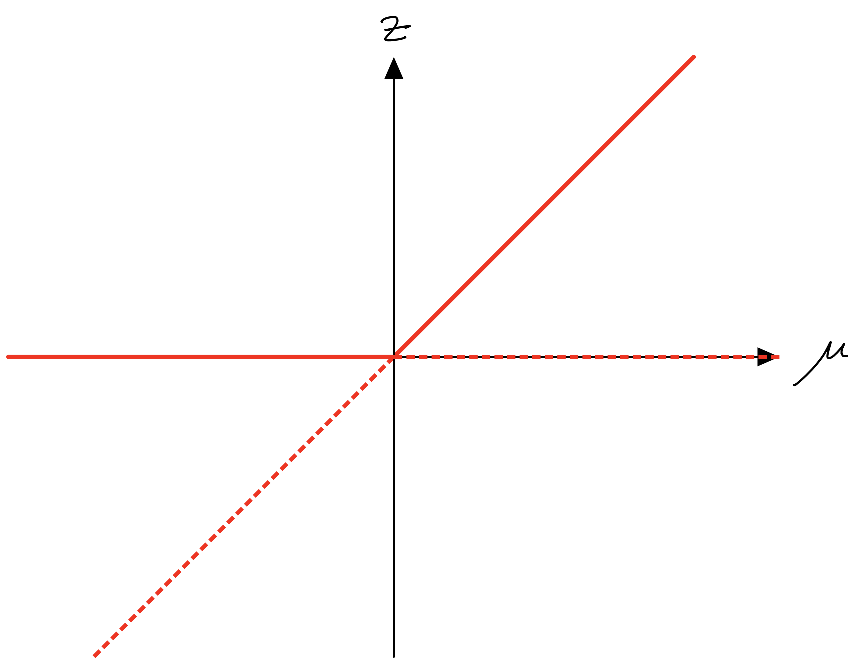
⇒ si hanno 3 casi:



⇒ gli equilibri variano le proprietà di attrattività/repulsività in funzione del parametro μ

⇒ Diagramma di biforcazione:

è la curva degli equilibri $z(\mu - z) = 0$ nel piano (μ, z)



3) BIFORCAZIONE A FORCHETTA:

⇒ si divide in 2 sottoclassi:

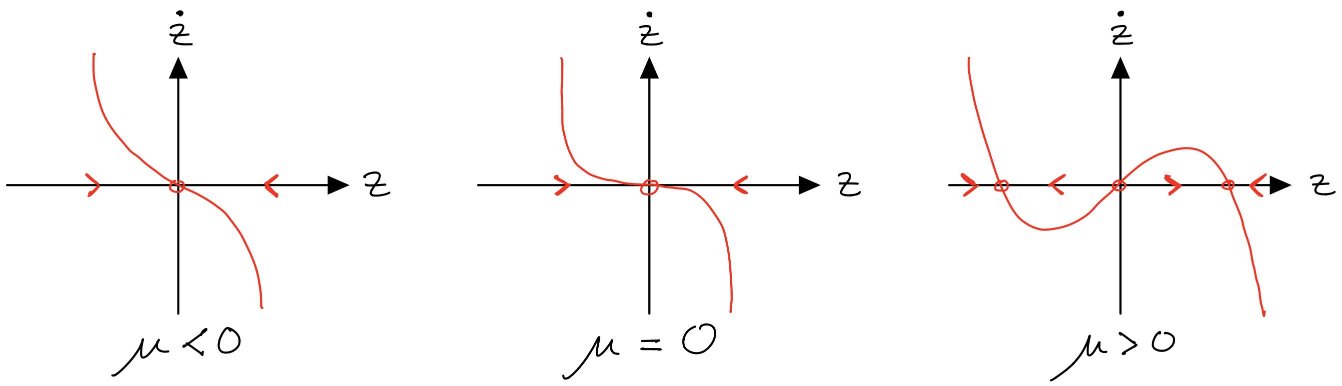
1) Biforcazione a forchetta SUPERCRITICA:

L'equazione in forma normale è:

$$\boxed{\dot{z} = \mu z - z^3}$$

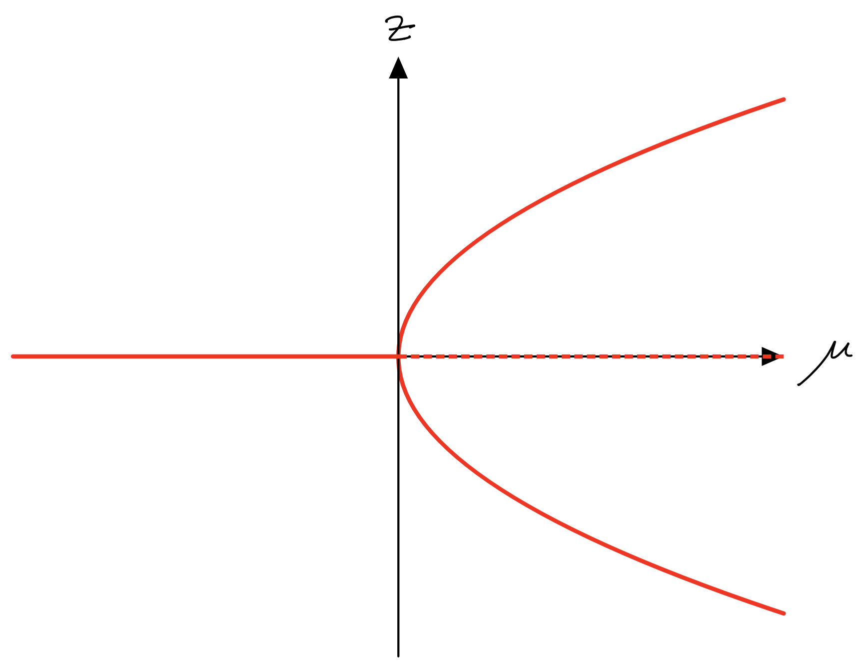
con $z \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ parametro del campo.

⇒ si hanno 3 casi:



⇒ Diagramma di biforcazione:

è la curva degli equilibri $z(\mu - z^2) = 0$ nel piano (μ, z)



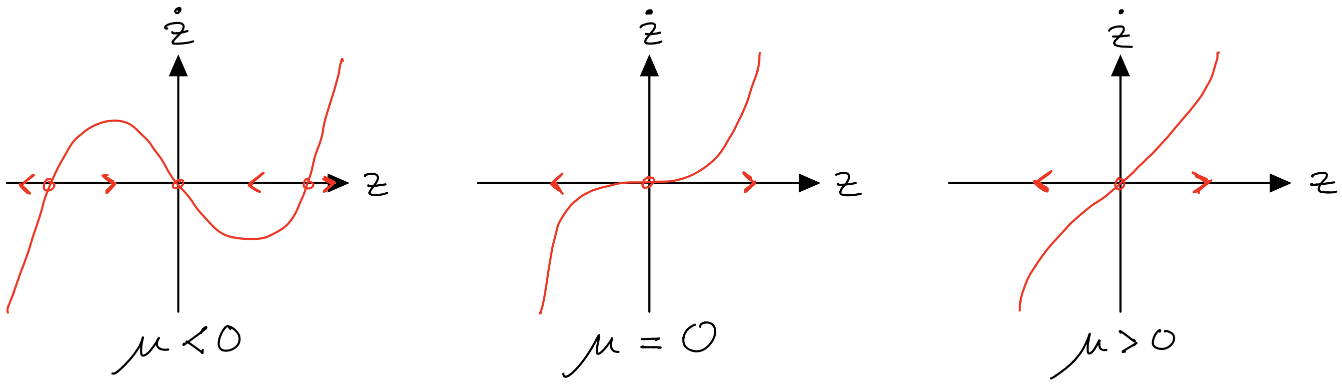
2) Biforcazione a forchetta SUBCRITICA:

L'equazione in forma normale è:

$$\boxed{\dot z = \mu z + z^3}$$

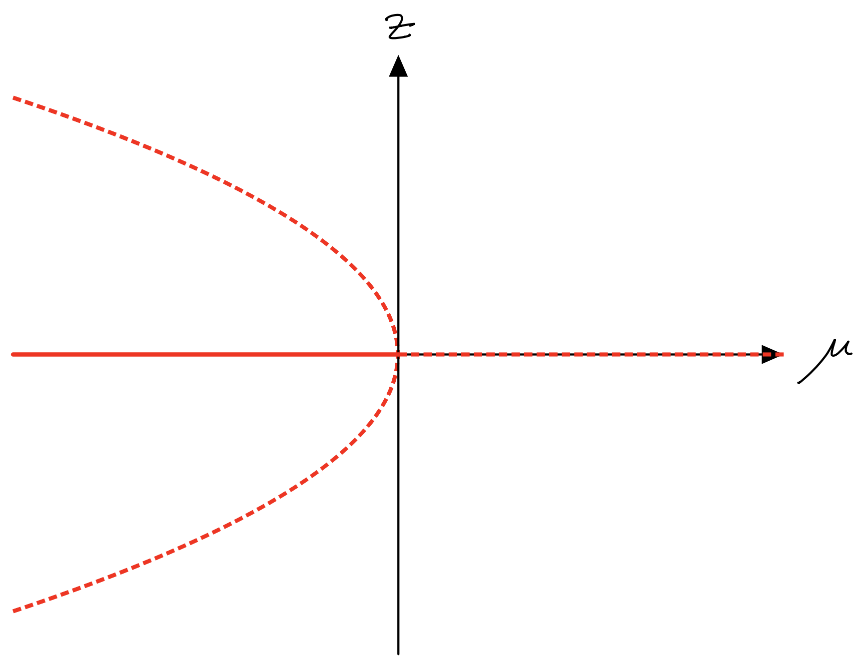
con $z \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ parametro del campo.

$\Rightarrow$ si hanno 3 casi:



$\Rightarrow$ Diagramma di biforcazione:

è la curva degli equilibri $z(\mu + z^2) = 0$ nel piano (μ, z)



Nel caso supercritico il termine quadratico ha un'azione stabilizzante, invece nel caso subcritico esso ha un'azione destabilizzante esempi / esercizi:

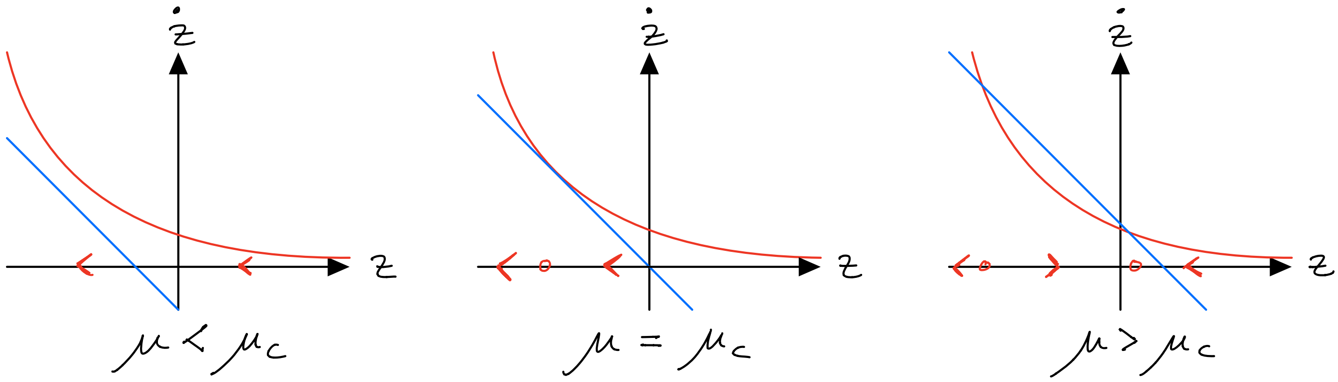
1) Considerare la ODE $\dot{z} = \mu - z - e^{-z}$, $z, \mu \in \mathbb{R}$

Determinare gli equilibri, la loro natura ed eventuali biforcazioni al variare di μ scrivendo la forma normale

$\Rightarrow$ $\mu - z - e^{-z} = 0 \iff \mu - z = e^{-z}$

$\Rightarrow$ applichiamo il metodo grafico:

$f(x) = \mu - z$, $g(x) = e^{-z}$



$\Rightarrow$ al variare di μ si ha una biforcazione tangente per un certo valore critico μ_c. Tale valore si ottiene quando la retta $\mu - z$ è tangente a e^{-z}, ovvero quando:

$$(\mu - z)' = (e^{-z})' \iff -e^{-z} = -1 \iff z = 0 \Rightarrow \mu_c = 1$$

$\Rightarrow$ scriviamo ora la forma normale:

sviluppiamo il campo attorno all'equilibrio della biforcazione $z = 0$ in serie di Taylor

$$\dot{z} = \mu - z - \left(1 - z + \frac{z^2}{2} + O(z^3)\right)$$
$$\approx (\mu - 1) - \frac{z^2}{2} + O(z^3)$$

2) Dim. che il campo $\dot{x} = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})$ ha una biforcazione transcritica in $x = 0$ quando i parametri

$a, b \in \mathbb{R}$ soddisfano una certa equazione da determinarsi. Si trovi poi una formula per il punto fisso che biforca per $x = 0$, assumendo a, b vicini alla curva trovata in precedenza.

$\Rightarrow$ $\dot{x} = x(1-x^2) - a(1 - e^{-bx}) = 0$ indipendentemente da a, b

$\Rightarrow$ $x = 0$ è equilibrio $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $$1 - e^{-bx} = 1 - \left(1 - bx + \frac{1}{2}x^2 b^2 + O(x^3)\right) \overset{!}{=} bx - \frac{1}{2}x^2 b^2 + O(x^3)$$

$\Rightarrow$ sostituendo nell'espressione del campo si ha:

$$\dot{x} = x - a\left(bx - \frac{1}{2}x^2 b^2 + O(x^3)\right) \overset{!}{=} x(1-ab) + \frac{ab^2}{2}x^2 + O(x^3)$$

$\Rightarrow$ Per $ab = 1$ si ha una biforcazione transcritica e l'equazione $ab = 1$ è detta CURVA DI BIFORCAZIONE

$\Rightarrow$ Consideriamo il CAMPO APPROSSIMATO in $X = 0$:

$$\dot{x} \approx x(1-ab) + \frac{1}{2}ab^2x^2 \overset{!}{\approx} x\left(1 - ab + \frac{ab^2}{2}x\right)$$

$\Rightarrow$ l'equilibrio di biforcazione è $\bar{x} = \approx \dfrac{2(ab-1)}{ab^2}$ (tale relazione vale in un intorno di $x = 0$ e per $ab \approx 1$)

3) Consideriamo il campo $\dot{z} = \mu \log z + z - 1$ in un intorno di $z = 1$. Mostrare che il sistema ha una biforcazione transcritica per un certo valore μ_c del parametro μ. Determinare le coordinate X, M t.c. il campo si riduca alla forma normale approssimante $\dot{X} \approx MX - X^2$

vicino alla biforcazione

$\Rightarrow$ $z = 1$ è equilibrio $\forall \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ consideriamo il cambio di variabili $z \longmapsto u = z - 1$ (con u "piccolo") $\Rightarrow$ $\dot{u} = \mu \log(1+u) + u$

$\Rightarrow$ $\log(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \mathcal{O}(u^3)$

$\Rightarrow$ $\dot{u} = \mu\left(u - \frac{1}{2}u^2 + \mathcal{O}(u^3)\right) + u \approx (\mu+1)u - \mu\frac{1}{2}u^2 + \mathcal{O}(u^3)$

$\Rightarrow$ attorno a $\mu = 0$ si ha una biforcazione transcritica per $\mu_c = -1$

$\Rightarrow$ per determinare le coordinate richieste si ha:

$\Rightarrow$ $u = ax$, $a \neq 0$ piccolo

$\Rightarrow$ $a\dot{x} = (\mu+1)ax - \frac{1}{2}\mu a^2 x^2 + \mathcal{O}(x^3)$

$\Rightarrow$ $\dot{x} = (\mu+1)x - \frac{1}{2}\mu a x^2 + \mathcal{O}(x^3)$

$\Rightarrow$ poniamo $a = \frac{2}{\mu}$, si ha:

$$\dot{x} = (\mu+1)x - x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\Rightarrow M = \mu + 1, \quad x = X$$

$$\Rightarrow \dot{X} \approx MX - X^2$$

$\Rightarrow$ nelle variabili iniziali si ha quindi:

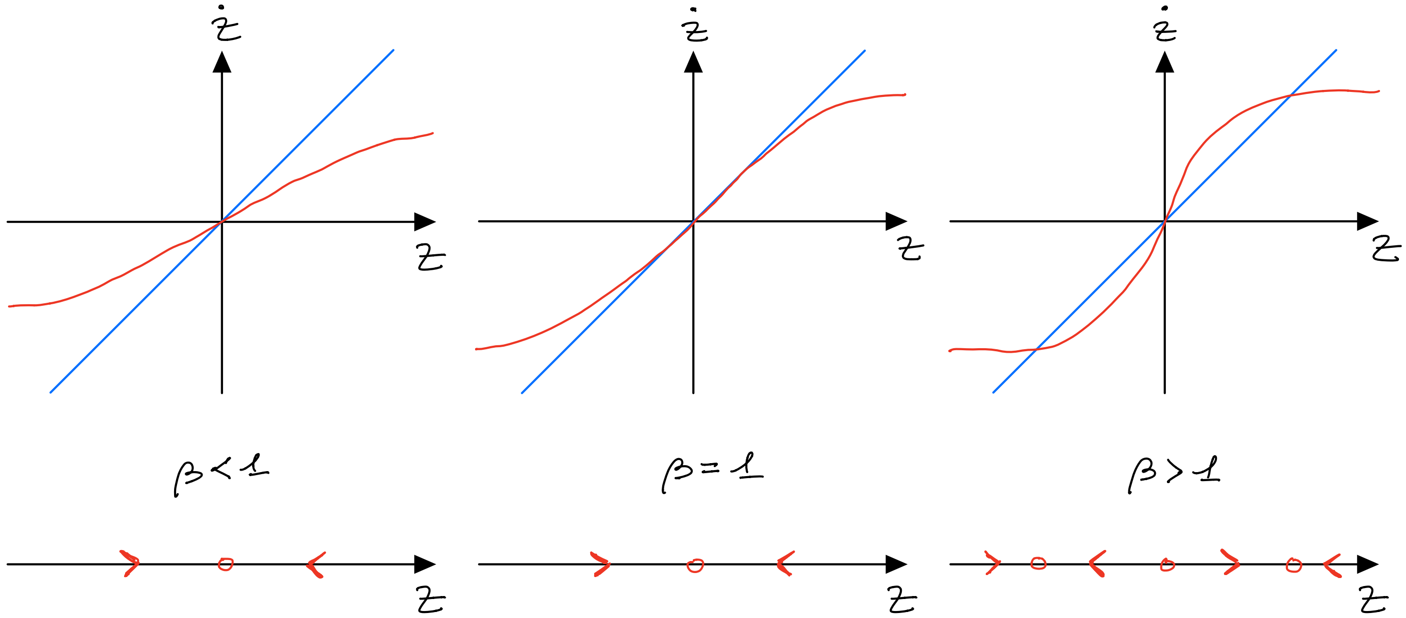
$$M = \mu + 1, \quad X = \frac{1}{2}\mu(z-1)$$

4) Mostrare che l'equazione $\dot{z} = -z + \beta \tanh z$, $z, \beta \in \mathbb{R}$ manifesta una biforcazione a forchetta di tipo supercritico al variare di β.

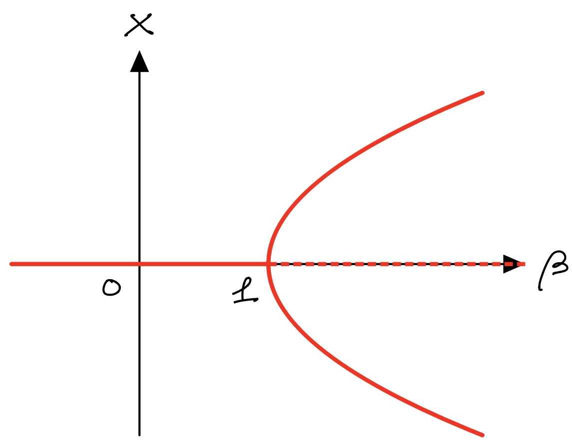
$\Rightarrow$ utilizziamo il metodo grafico:

$f(z) = z$, $g(z) = \beta \tanh z$, $\beta \in \mathbb{R}$

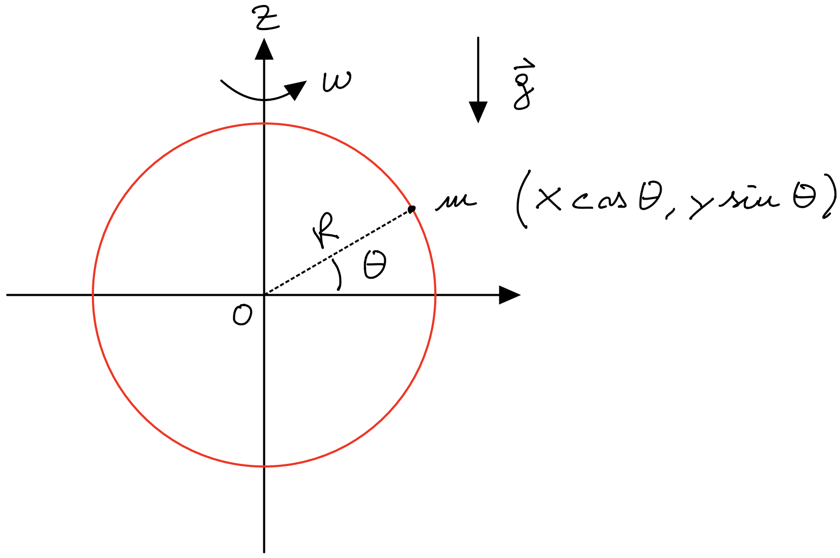
$\Rightarrow$ studiamo qualitativamente le intersezioni tra f e g:



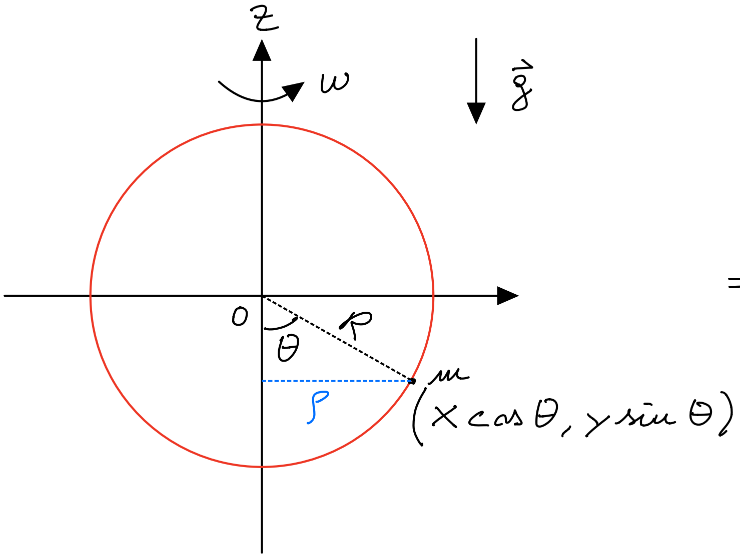
$\Rightarrow$ si riconosce la biforcazione a forchetta. Il diagramma di biforcazione è:



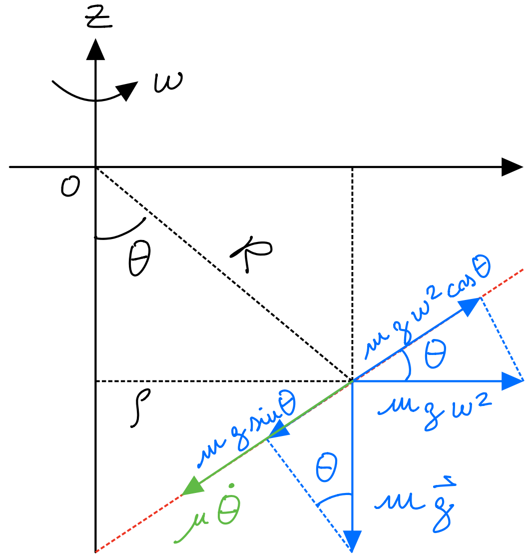
5) Si consideri una particella di massa m che si muove lungo una rotaia circolare di raggio R costretta a ruotare attorno all'asse verticale z con velocità angolare ω e frenata da un attrito lineare di coefficiente μ. Sul sistema agisce la gravità di accelerazione g. Scrivere le equazioni del moto rispetto all'angolo polare θ e determinarne la forma adimensionale (l'equazione con il più piccolo numero possibile di parametri)



⇒ Si ha:



⇒



$$\Rightarrow \quad m R \ddot{\theta} = -mg \sin\theta - \mu \dot{\theta} + m R \omega^2 \sin\theta \cos\theta$$

⇒ l'equazione ha 5 parametri, vogliamo ridurli mediante un riscalamento in tempo:

$$\tau := \frac{t}{T} \quad \text{tempo ADIMENSIONALE}$$

con $T :=$ scala di tempo caratteristica del sistema (da determinarsi)

N.B.

Se T è scelto correttamente, le derivate rispetto a τ hanno ordine 1

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta(\tau(t)) = \frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{T}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{d^2}{dt^2}\theta(\tau(t)) = \frac{d}{dt}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{\Theta}}{T} = \frac{\ddot{\Theta}}{T^2}$$

$\Rightarrow$ sostituendo nell' equazione del moto si ha:

$$\frac{mR}{T^2}\ddot{\Theta} = \frac{-\mu}{T}\dot{\Theta} - mg\sin\Theta + mR\omega^2\sin\Theta\cos\Theta$$

$\Rightarrow$ dividendo per mg si ha:

$$\frac{R}{T^2 g}\ddot{\Theta} = \frac{-\mu}{mgT}\dot{\Theta} - \sin\Theta + \frac{R}{g}\omega^2\sin\Theta\cos\Theta$$

$\Rightarrow$ $\gamma := \dfrac{R\omega^2}{g}$ è adimensionale !!!

$\Rightarrow$ vogliamo che $\dfrac{R}{T^2 g}$, $\dfrac{\mu}{mgT}$ siano di ordine 1, ovvero:

$$\frac{\mu}{mgT} \approx O(1) \Rightarrow T = \frac{\mu}{mg}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{g}\cdot\frac{1}{T^2} = \frac{R}{g}\left(\frac{mg}{\mu}\right)^2 = \frac{m^2 g R}{\mu^2} =: \varepsilon$$

$\Rightarrow$ si verifica che ε è adimensionale, quindi l' equazione diventa:

$$\boxed{\varepsilon\ddot{\Theta} = -\dot{\Theta} - \sin\Theta(1 - \gamma\cos\Theta)}$$

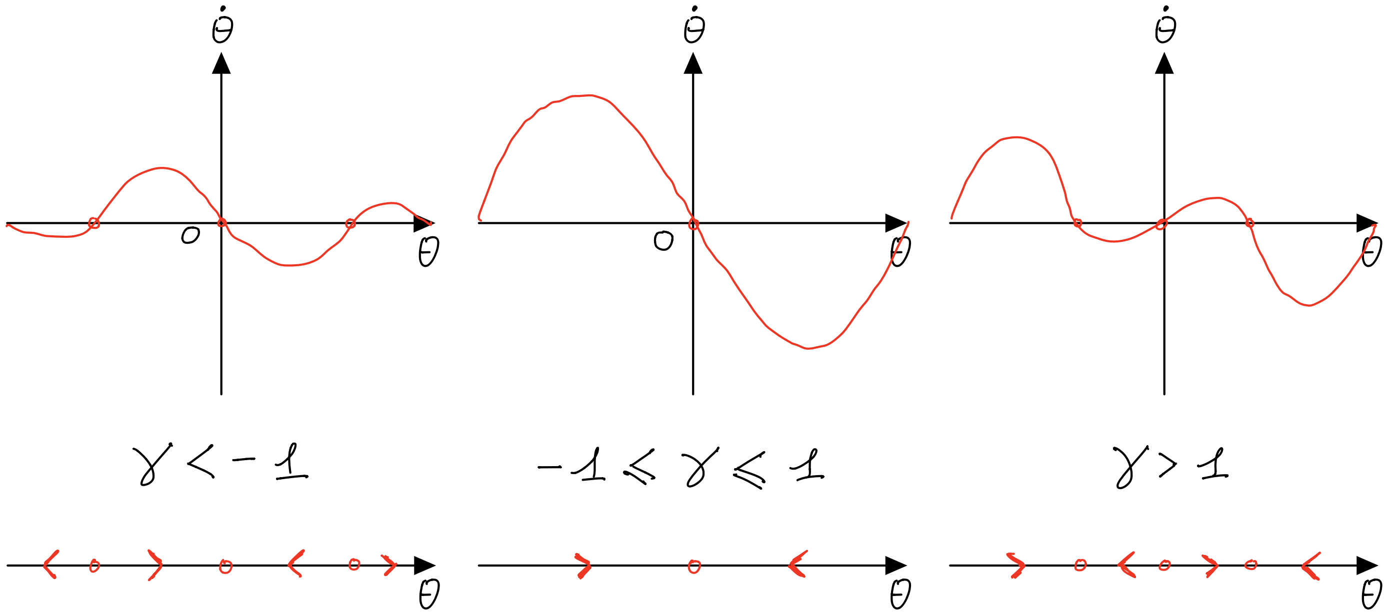
ed è la forma adimensionale dell' equazione di partenza (2 parametri vs. 5 parametri).

6) Data l' equazione di sopra, considerare il caso in cui $\varepsilon \longrightarrow 0 \iff \dot{\Theta} = -\sin\Theta(1 - \gamma\cos\Theta)$.
Studiare la dinamica e le eventuali biforcazioni.
Fornire inoltre un' interpretazione fisica dell' approssimazione $\varepsilon \longrightarrow 0$ e dell' analisi effettuata per l' equazione risultante.

$\dot{\theta} = -\sin\theta\,(1 - \gamma\cos\theta) \Rightarrow$ possiamo restringerci a $(-\pi, \pi)$, gli altri equilibri si ottengono per traslazione

$\Rightarrow \theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\gamma}, \quad \gamma \neq 0$



Il diagramma di biforcazione è il seguente: