es. 1) Alcuni modelli per lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$:

$\Rightarrow$ dato $(\mathbb{R}^{n+1}, \tau_e)$, rimuoviamo $\vec{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\Rightarrow$ $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{O}\}, \tau_e)$ con τ_e topologia indotta su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{O}\}$ da τ_e su $\mathbb{R}^{n+1}$.

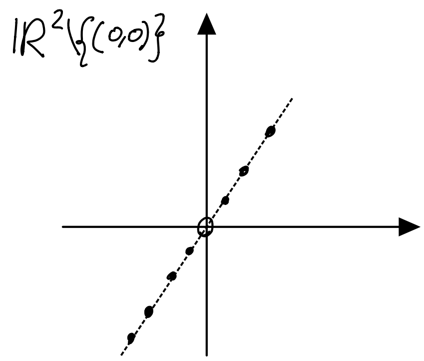
$\Rightarrow$ definiamo la seguente relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{O}\}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee (\exists \lambda \neq 0 \text{ t.c. } x = \lambda \cdot y)$$

N.B

$x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, $y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$!!!

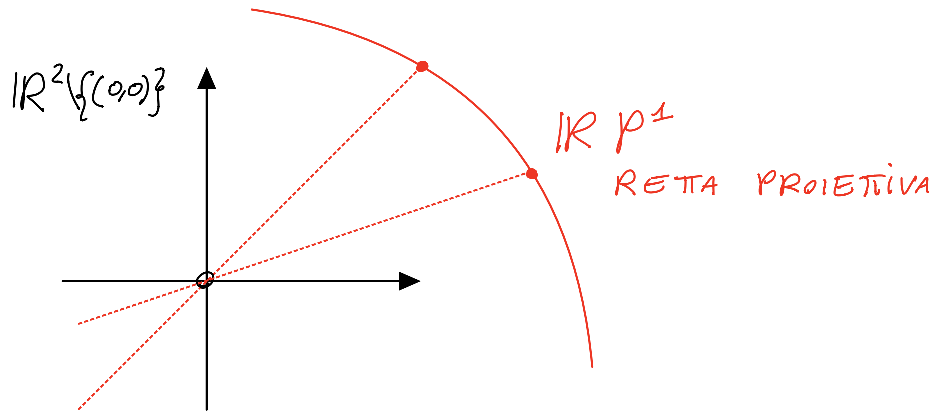
es. in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:



$\Rightarrow$ definiamo $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{O}\} / \sim \; = \mathbb{R}P^n$

$\Rightarrow$ Su $\mathbb{R}P^n$ prendo la topologia quoziente:

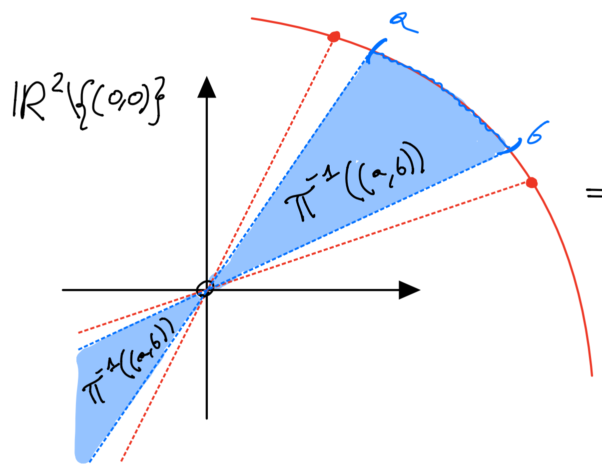
$\Rightarrow$ se $n+1 = 2$, allora si definisce $\mathbb{R}P^n$ "retta proiettiva" a causa della natura della sua rappresentazione grafica:



N.B.

$\mathbb{R}P^1 \not\subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$!!! È solo una rappresentazione grafica !!!

$\Rightarrow$ quali sono gli aperti di $\mathbb{R}P^1$? Ricordiamo che un insieme è aperto in $\mathbb{R}P^1$ se la sua controimmagine (rispetto alla proiezione π) è un aperto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

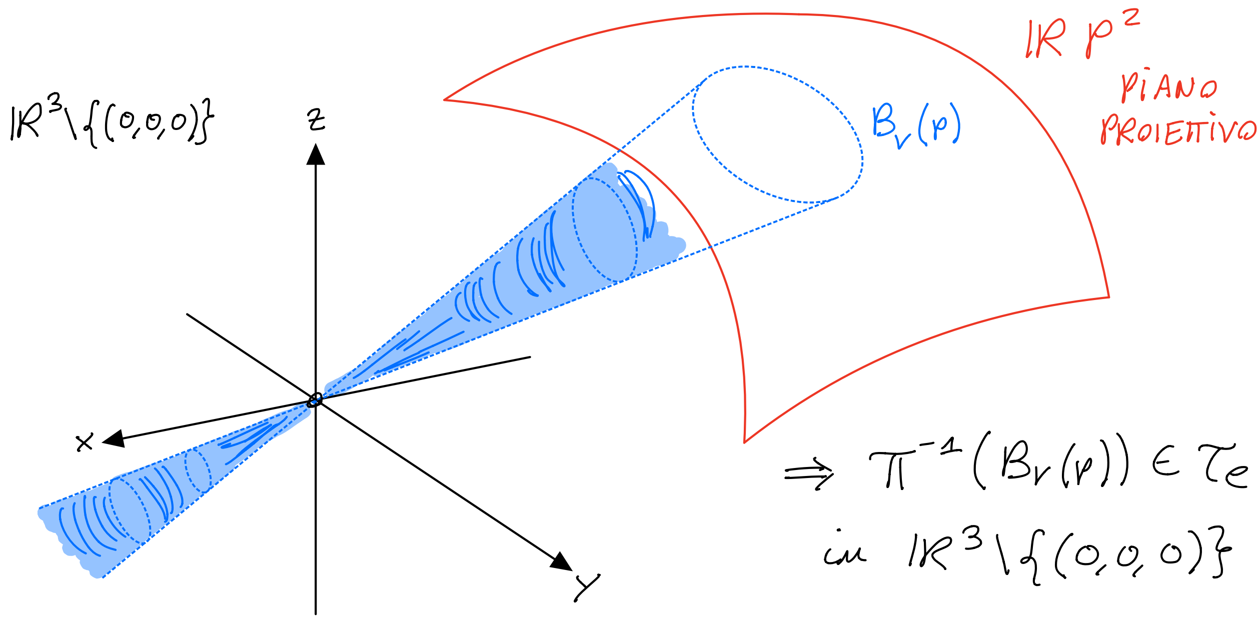


$\Rightarrow \pi^{-1}((a,b)) \in \mathcal{T}_e$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\Rightarrow$ allo stesso modo $\pi^{-1}((a,b]) \notin \mathcal{T}_e$ ecc.

$\Rightarrow$ il concetto si estende a dimensione $n+1$ senza cambiare nulla:

$\Rightarrow$ es. in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ si avrà $\mathbb{R}P^2$ (PIANO PROIETTIVO) e gli aperti saranno i coni tridimensionali passanti per $(0,0,0)$ (ma che non lo comprendono ovviamente):



$\Rightarrow \pi^{-1}(B_r(p)) \in \mathcal{T}_e$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

ecc.

Un'altro modello possibile è il seguente:

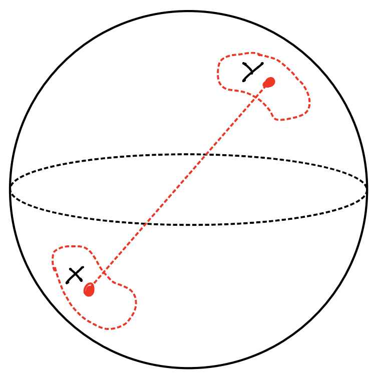
Sia $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ t.c.:

$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ la SFERA $n+1$ DIMENSIONALE

$\Rightarrow$ Consideriamo lo spazio $(S^n, \mathcal{T}_e)$ con topologia indotta da $\mathcal{T}_e$ su $\mathbb{R}^{n+1}$, e la seguente relazione di equivalenza:

$x \approx y \Leftrightarrow x = \pm y$ (2 punti sono in relazione se e solo se sono lo stesso punto oppure se sono punti antipodali)

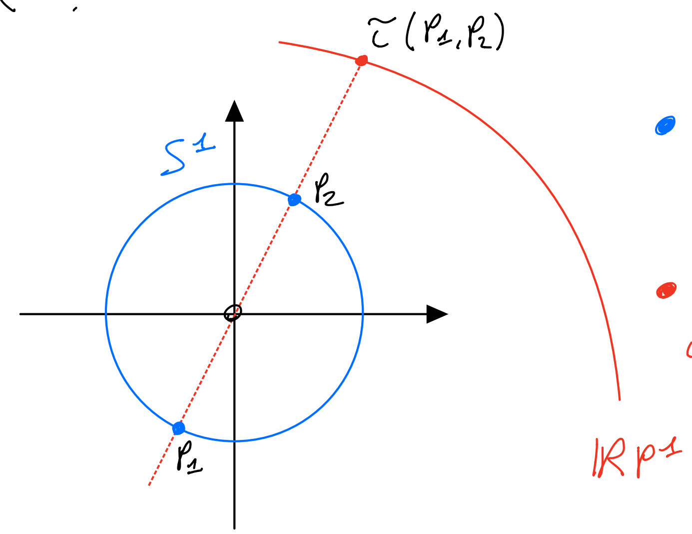
$\Rightarrow$ es. in $\mathbb{R}^3$:



⇒ Consideriamo l'immersione naturale di (S^n, τ_e) in $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\vec{0}\}$ e la proiezione π su $\mathbb{R}P^n$

$$
\begin{tikzcd}
(S^n, \tau_e) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi\ (\text{con } \approx)"'] & \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\vec{0}\} \arrow[d, "\pi\ (\text{su } \sim)"] \\
S^n/\approx \arrow[r, "\tilde{\iota}", "\text{OMEOMORFISMO}"'] & \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\vec{0}\}/\sim \; = \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd}
$$

es. in $\mathbb{R}^2$:

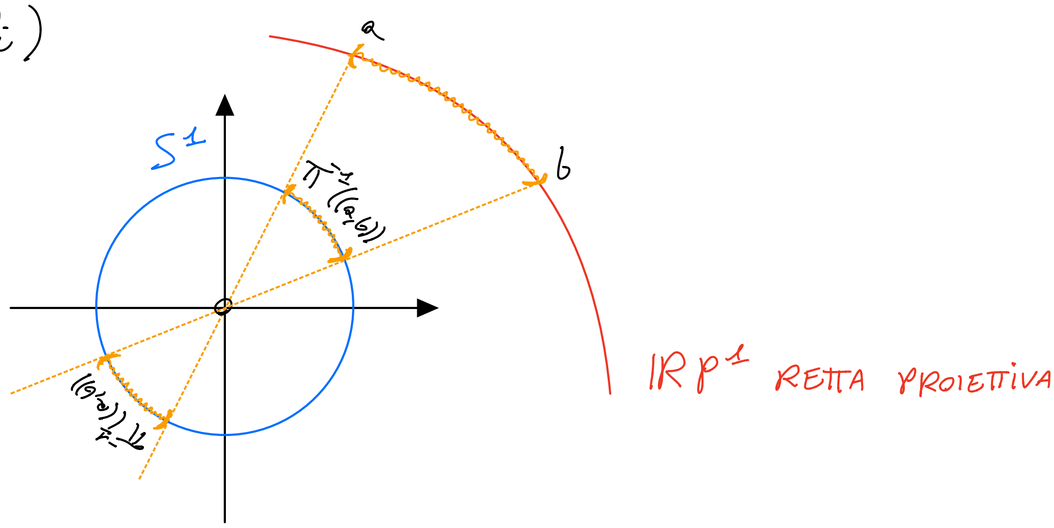


● sono i punti in relazione tramite $\approx$

● e ········ sono i punti in relazione tramite $\sim$

⇒ come omeomorfismo assegno ad ogni coppia di punti antipodali il corrispettivo punto nella retta proiettiva $\mathbb{R}P^1$

⇒ gli aperti di S^n saranno sempre gli archi di circonferenza, tuttavia saranno sempre a coppie (antipodali)



Un ulteriore modello è rappresentato da:

$$D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1 \}, \ \approxeq \ \text{t.c.}$$

$$x \approxeq y \Leftrightarrow x = y \vee (x = -y \wedge x, y \in \partial D^n = S^{n-1})$$

N.B.

D^n è il disco n-dimensionale e la sua frontiera ∂D^n è S^{n-1} la sfera $n-1$-dimensionale.

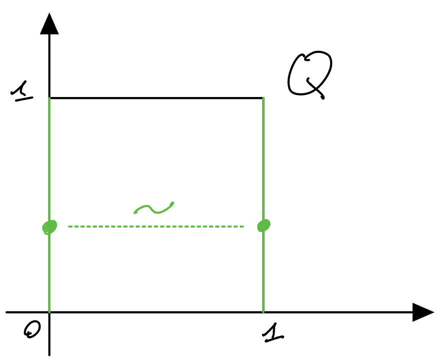
$\Rightarrow$ si ha che $D^n/_{\approxeq}$ è OMEOMORFO a $\mathbb{R}P^n$

es. 2) Costruzione di alcuni spazi noti come spazi quoziente:

1) Sia $Q = ([0,1] \times [0,1], \tau_e) \subseteq (\mathbb{R}^2, \tau_e)$ un quadrato e definisco la relazione di equivalenza che identifica ogni punto del lato sinistro del quadrato con il corrispettivo punto del lato destro (oltre che con se stesso)

$$\Rightarrow (0, y) \sim (1, y) \quad \forall y \in [0,1]$$

$\Rightarrow$

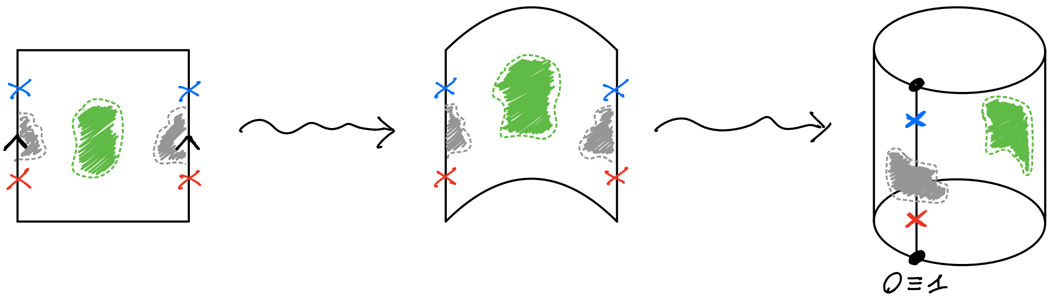


$$\Rightarrow P \sim Q \Leftrightarrow P = Q \vee (P = (0,y) \wedge Q = (1,y))$$

$\Rightarrow$ Cos'è $Q/_{\sim}$?

⇒ Si ha che $Q/\sim$ è un cilindro !!!

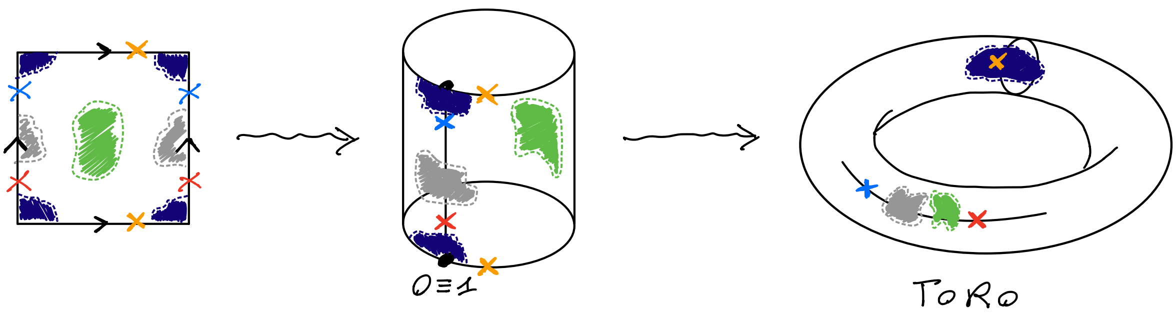
$Q/\sim$:



⇒ Gli aperti di $Q/\sim$ con τ_π sono rappresentati in figura.

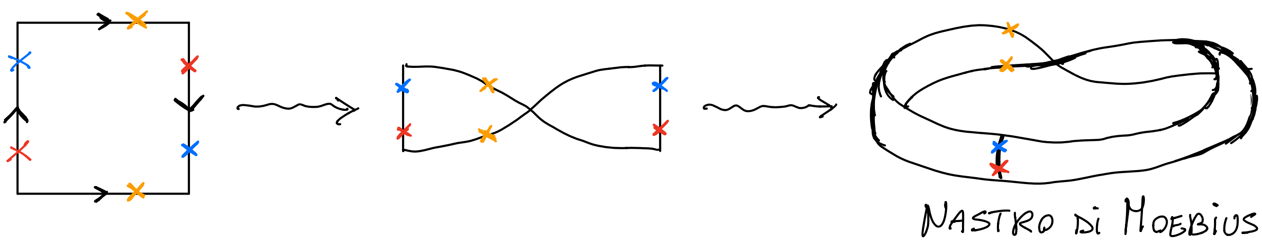
⇒ $Q/\sim$ è omeomorfo ad un cilindro di $\mathbb{R}^3$ con topologia indotta da τ_e su $\mathbb{R}^3$.

2) Dato Q come sopra, aggiungiamo la seguente relazione di equivalenza:



⇒ $Q/\sim$ è omeomorfo ad un toro di $\mathbb{R}^3$ con topologia indotta da τ_e su $\mathbb{R}^3$.

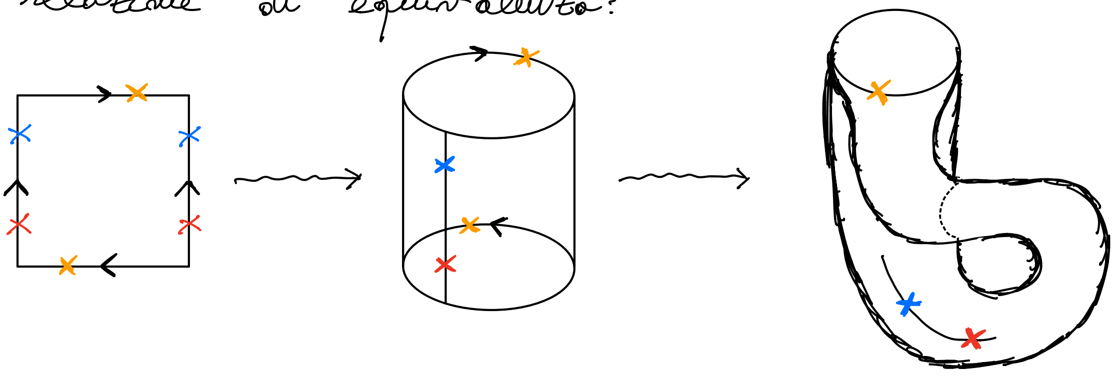
2) Dato Q come sopra, aggiungiamo la seguente relazione di equivalenza:



⇒ $Q/\sim$ è omeomorfo ad un nastro di Moebius di $\mathbb{R}^3$

con topologia indotta da τ_e su $\mathbb{R}^3$.

3) Dato Q come sopra, aggiungiamo la seguente relazione di equivalenza:



BOTTIGLIA DI KLEIN

$\Rightarrow$ $Q/\sim$ è omeomorfo ad una bottiglia di Klein di $\mathbb{R}^3$ con topologia indotta da τ_e su $\mathbb{R}^3$.