MARTINGALE

Def. (Filtrazione):

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Si dice FILTRAZIONE una successione $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ di sotto σ-algebre di $\mathcal{A}$ t.c. $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}_{n+1}$ $\forall n$

Def. (Processo adattato):

Si dice PROCESSO ADATTATO AD UNA FILTRAZIONE $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ una successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n\geq 0}$ t.c. X_n é $\mathcal{G}_n$-misurabile $\forall n \geq 0$

esempio:

Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una successione di v.a. Definiamo:

$$\mathcal{G}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$$

(σ-algebra generata dal vettore aleatorio $X_0, \dots, X_n$)

$\Rightarrow$ $(\mathcal{G}_n)$ é detta filtrazione generata dal processo stocastico $(X_n)_{n\geq 0}$ ed è spesso denotata con $\mathbb{G}^X = (\mathcal{G}_n^X)$.

Inoltre, il processo $(X_n)_{n\geq 0}$ é adattato a $\mathbb{G}^X$ (cioé X_n é $\mathcal{G}_n^X$-misurabile $\forall n \geq 0$)

Osservazione:

Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ un processo adatto ad una filtrazione $\mathbb{G}$. Allora:

$$\mathcal{G}_n^X \subseteq \mathcal{G}_n$$

Infatti, se (X_n) é adattato, allora:

X_0 é $\mathcal{G}_0$-misurabile $\Rightarrow \mathcal{G}_0^X \subseteq \mathcal{G}_0$

X_0, X_1 é $\mathcal{G}_1$-misurabile $\Rightarrow \mathcal{G}_1^X \subseteq \mathcal{G}_1$

$\Rightarrow$ $X_0, \dots, X_n$ sono $\mathcal{G}_n$-misurabili $\Rightarrow \mathcal{G}_n^X \subseteq \mathcal{G}_n$

esempio:

Siano $(Y_n)_{n\geq 0}$ v.a. reali, $\mathcal{G}_n := \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$, $X_n = \prod_{i=0}^{n} Y_i \Rightarrow X_n$ é $\mathcal{G}_n$-misurabile, ovvero $(X_n)_{n\geq 0}$ é adattato a $\mathbb{G}$. Tuttavia puó essere che, per $n \geq 1$, $\mathcal{G}_n^X \nsubseteq \mathcal{G}_n$

Def. (Martingala):

Una successione di v.a. reali $(X_n)_{n\geq 0}$ si dice MARTINGALA rispetto alla filtrazione $\mathbb{G}$ (o semplicemente una $\mathbb{G}$-martingala) se:

1) (X_n) é adattata a $\mathbb{G}$
2) X_n é integrabile $\forall n$
3) $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) = X_n$ q.c. $\forall n$

Se la (3) é sostituita da:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) \geq X_n \text{ q.c. } \forall n$$

allora si diche che (X_n) é una $\mathbb{G}$-SUBMARTINGALA

Se la (3) é sostituita da:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) \leq X_n \text{ q.c. } \forall n$$

allora si diche che (X_n) é una $\mathbb{G}$-SUPERMARTINGALA

$\Rightarrow$ si ha che per le martingale vale la seguente:

Proposizione:

Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una $\mathcal{G}$-martingala. Si ha:

1) $(X_n)_{n\geq 0}$ è anche una $\mathcal{G}^X$-martingala (analogamente per super- e submartingale)

2) $\mathbb{E}(X_{n+k} \mid \mathcal{G}_n) = X_n \quad \forall k \geq 1, \ \forall n \geq 0$ (analogamente per super- e submartingale)

3) $(\mathbb{E}(X_n))_{n\geq 0}$ è costante (ed è crescente per submartingale, decrescente per le supermartingale)

Dim.:

1) Basta mostrare che $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{G}_n^X) = X_n$ q.c.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{G}_n^X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{G}_n) \mid \mathcal{G}_n^X)$$
$$= \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}_n^X) = X_n$$

2) Induzione su k:

$k=1$ ✓ (def. di martingala)

Passo induttivo: $k \longrightarrow k+1$

$$\mathbb{E}(X_{n+k+1} \mid \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X_{n+k+1} \mid \mathcal{G}_{n+k})}_{X_{n+k}} \mid \mathcal{G}_n)$$
$$= X_n$$

ipotesi induttiva

3) Si ha:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{G}_n) = X_n \Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{G}_n))}_{\mathbb{E}(X_{n+1})} = \mathbb{E}(X_n)$$

□

esempi canonici di martingale:

1) Sia $(Y_n)_{n\geq 1}$ succ. di v.a. reali, ind., integrabili

t.c. $\mathbb{E}(Y_n) = 0$. Definiamo:

$$X_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & n \geq 1 \end{cases}$$

Sia inoltre $\mathcal{G}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) \ (= \sigma(X_0, \dots, X_n))$

$\Rightarrow (X_n)$ è una $\mathcal{G}$-martingala, infatti:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(X_n + Y_{n+1} | \mathcal{G}_n)$$

$$= \mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}_n) + \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{G}_n) = X_n + \cancel{\mathbb{E}(Y_{n+1})}$$

2) Sia $(Y_n)_{n \geq 1}$ succ. di v.a. reali, ind., integrabili t.c. $\mathbb{E}(Y_n) = 1$. Definiamo $X_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k \ (X_0 = 1)$

Sia inoltre $\mathcal{G}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$

$\Rightarrow (X_n)$ è una $\mathcal{G}$-martingala, infatti:

1) X_n è integrabile essendo prodotto di v.a. integrabili e indipendenti

2) $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(X_n \cdot Y_{n+1} | \mathcal{G}_n)$

$= X_n \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{G}_n) = X_n \cdot \mathbb{E}(Y_{n+1}) = X_n$

3) Sia $\mathcal{G}$ una filtrazione, X v.a. integrabile, poniamo $X_n := \mathbb{E}(X | \mathcal{G}_n)$. Allora X_n è $\mathcal{G}$-martingala

<u>Proposizione</u>:

Sia (X_n) una $\mathcal{G}$-martingala e sia $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa t.c. $\varphi(X_n)$ è integrabile $\forall n$. Allora $(\varphi(X_n))_{n \geq 1}$ è una $\mathcal{G}$-submartingala

<u>Dim.</u>:

Adattamento ed integrabilità sono ovvi. Calcoliamo:

$$\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1}) \mid \mathcal{G}_n) \underset{\text{Disuguaglianza di Jensen}}{\geq} \varphi(\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{G}_n)) = \varphi(X_n)$$

$\square$

<u>Def.</u> (Tempo d'arresto):

Sia $\mathcal{G}$ una filtrazione nello sp. di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si dice TEMPO D'ARRESTO una v.a. $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ t.c.:

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{G}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\geq 0}$$

<u>Proposizione</u>:

Data $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ le seguenti si equivalgono:

1) τ è un tempo d'arresto
2) $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{G}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\geq 0}$

<u>Dim.</u>:

1) $\Rightarrow$ 2):

$$\{\tau \leq n\} = \underbrace{\{\tau = 0\}}_{\in \mathcal{G}_0} \cup \dots \cup \underbrace{\{\tau = n-1\}}_{\in \mathcal{G}_{n-1}} \cup \underbrace{\{\tau = n\}}_{\in \mathcal{G}_n} \in \mathcal{G}_n$$

2) $\Rightarrow$ 1):

$$\{\tau = n\} = \underbrace{\{\tau \leq n\}}_{\in \mathcal{G}_n} \cap \underbrace{\{\tau \leq n-1\}^c}_{\in \mathcal{G}_{n-1} \subseteq \mathcal{G}_n} \in \mathcal{G}_n$$

$\square$

<u>esempio</u>:

$(X_n)_{n \geq 0}$ succ. di v.a. a valori in $(E, \mathcal{E})$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}^X$, $A \in \mathcal{E}$. Sia $\tau = \min\{n : n \geq 0, X_n \in A\}$ ($\min \emptyset = +\infty$) (Tempo di ingresso in A). $\Rightarrow \tau$ è tempo d'arresto:

$$\{\tau = n\} = \{X_0 \in A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}$$
$$= \gamma(X_0, \dots, X_n) = \mathcal{G}_n$$

<u>esempio</u>:

Siano $(Y_n)_{n \geq 1}$ v. a. ind. t.c. $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$. Sia $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $X_0 = 0$. $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ $\forall n \geq 0$. Considero $\tau := \min\{n : n \geq 0, X_n = 1\}$. Si può dim. che $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1 \Rightarrow X_\tau = X(\tau) = 1$
$\Rightarrow \mathbb{E}(X_\tau) = 1 > \mathbb{E}(X_0) = 0$

Q.) Sia $N > 0$, definiamo $\tau_N = \tau \wedge N := \min\{\tau, N\}$.
Quanto vale $\mathbb{E}(X_{\tau_N})$? È > 0? È vero che
$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{E}(X_{\tau_N}) = \mathbb{E}(X_\tau) = 1$? La risposta è NO!

<u>Teorema</u> (di Arresto):

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una $\mathcal{G}$-martingala (o sub/super) e sia τ tempo d'arresto per la filtrazione $\mathcal{G}$ t.c. $\exists N > 0$ per cui $\mathbb{P}(\tau \leq N) = 1$. Allora si ha:

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0).$$

(Submartingala $\Rightarrow \mathbb{E}(X_\tau) \geq \mathbb{E}(X_0)$,
Supermartingala $\Rightarrow \mathbb{E}(X_\tau) \leq \mathbb{E}(X_0)$)

<u>Dim.</u>:

Usiamo l'identità $X_\tau = \sum_{n=0}^{N} X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = n\}}$. Calcoliamo:

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = n\}}) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_N \mid \mathcal{G}_n) \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau = n\}}}_{\mathcal{G}_n\text{-mis.}})$$
$$= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\tau = n\}} \mid \mathcal{G}_n)) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\tau = n\}})$$
$$= \mathbb{E}(X_N \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{\{\tau = n\}}}_{=1}) = \mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_0)$$

$\square$

esempi di martingale:

1) Urna di Polya:

Un'urna contiene inizialmente una pallina nera ed una bianca. Si estrae a caso una pallina, la si re-inserisce e si aggiunge un'altra pallina dello stesso colore di quella estratta. Si prosegue nello stesso modo.

$\Rightarrow X_n :=$ numero di palline bianche nell'urna dopo n estrazioni

$(\Rightarrow X_0 = 1)$

$\Rightarrow Z_n :=$ frazione di palline bianche nell'urna dopo n estrazioni

$$\Rightarrow Z_n = \frac{X_n}{n+2} \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$$

Mostriamo che $(Z_n)_{n\geq 0}$ é una $\mathcal{G}$-martingala.

Dobbiamo verificare che $\mathbb{E}(Z_{n+1} | X_0, \dots, X_n) = Z_n$:

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} | X_0, \dots, X_1) = \frac{1}{n+3} \mathbb{E}(X_{n+1} | X_0, \dots, X_n)$$

$\Rightarrow$ ci serve dunque la densità condizionata:

$$p_{X_{n+1}|X_0,\dots,X_n}(k_{n+1}|k_0,\dots,k_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k_{n+1} | X_0 = k_0, \dots, X_n = k_n)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k_n}{n+2} & \text{se } k_{n+1} = k_n + 1 \\ 1 - \dfrac{k_n}{n+2} & \text{se } k_{n+1} = k_n \end{cases}$$

Calcoliamo:

$$\sum_{k_{n+1}} k_{n+1}\, p_{X_{n+1}|X_0,\dots,X_n}(k_{n+1}|k_0,\dots,k_n) = (k_n+1)\frac{k_n}{n+2} + k_n\left(1 - \frac{k_n}{n+2}\right)$$

$$= k_n \frac{n+3}{n+2}$$

Quindi $\mathbb{E}(X_{n+1} | X_0, \dots, X_n) = \dfrac{n+3}{n+2} X_n$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Z_{n+1} | X_0, \dots, X_n) = \frac{X_n}{n+2} = Z_n$$

2) Mostriamo che in alcuni casi è possibile indebolire l'ipotesi, nel teorema d'arresto, che τ sia limitato:

<u>Proposizione</u>:

Data $(t_n)_{n\geq 1}$ succ. di v. a. integrabili, valgono le seguenti:

1) $\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|t_n|\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(|t_n|)$

2) se $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(|t_n|) < +\infty$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} t_n < +\infty$ q.c. e definisce una v.a. integrabile t.c.:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(t_n)$$

Sia $(Y_n)_{n\geq 1}$ succ. di v. a. integrabili ind. i.i.d. t.c. $\mathbb{E}(Y_n) = 0 \quad \forall n$. Sia:

$$X_n = Y_1 + \ldots + Y_n.$$

Se τ è un tempo d'arresto t.c. $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$, allora $\mathbb{E}(X_\tau)\,(= \mathbb{E}(X_0)) = 0$. Infatti:

$$X_\tau = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = n\}}$$

Verifichiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) < +\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(|Y_k|\mathbb{1}_{\{\tau=n\}})$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{E}(|Y_k|\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. precedente}}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left(|Y_k|\sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{E}\Big(|Y_k|\mathbb{1}_{\underbrace{\{\tau\geq k\}}_{\{\tau\leq k-1\}^c \in \mathcal{G}_{k-1}}}\Big) = \quad (Y_k, \mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}} \text{ sono indipendenti})$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{E}(|Y_k|)\,\mathbb{P}(\{\tau\geq k\}) = \mathbb{E}(|Y_1|)\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\{\tau\geq k\})$$

$= \mathbb{E}(|Y_1|)\mathbb{E}(\tau) < +\infty$

$\left(\text{dato che } \mathbb{E}(\tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\tau \geq k)\right)$

Quindi, per (2) della proposizione precedente, si ha:

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} X_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}})$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_k \mathbb{1}_{\{\tau=k\}})$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty} Y_k \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\Big) \Big(\text{dato che } \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_k \mathbb{1}_{\{\tau=n\}})$$

$$= \ldots = \mathbb{E}(Y_k)\mathbb{P}(\tau \geq k) < +\infty\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_k \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}})$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_k)\mathbb{P}(\{\tau \geq k\}) = 0$$

3) Siano $Y_k = \pm 1$ con prob. $\frac{1}{2}$ (testa - croce), $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, $\tau = \min\{n : X_n = 1\}$. Sappiamo che $X_\tau = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(X_\tau) = 1 \neq 0$. Quindi sicuramente si ha $\mathbb{E}(\tau) = +\infty$

4) Siano $\mathcal{G}$ filtrazione, $X \in \mathcal{L}^1$, $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_n)$. Mostriamo che $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X)$ $\forall \tau$ tempo d'arresto t.c. $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$ q.c.:

$X_\tau = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}$, mostriamo che

$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) < +\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_n)| \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=n\}})$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| | \mathcal{G}_n) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} | \mathcal{G}_n))$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) = \mathbb{E}\Big(|X| \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\Big) = \underset{+\infty}{\mathbb{E}(|X|)}^{\wedge}$$

Quindi $\mathbb{E}(X_\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) = \ldots = \mathbb{E}(X)$

Osservazione

Siano $X \in \mathcal{L}^1$, $\mathcal{F}$ σ-algebra e Y v.a. $\mathcal{F}$-mis.

Supponiamo che $\exists$ φ misurabile t.c.:

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = \varphi(Y)$$

Allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X \mid Y)$. Infatti:

$$\mathbb{E}(X \mid Y) \underset{\sigma(Y) \subseteq \mathcal{F}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) \mid Y) = \mathbb{E}(\varphi(Y) \mid Y) \underset{\varphi(Y) \text{ è } \sigma(Y)\text{-mis.}}{=} \varphi(Y)$$