es. 3) Sia $\gamma(t) = (2\cos t, 3\cos t - \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$

$\Rightarrow Q = \gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 0, 4)$

1) Determinare i punti singolari di γ:

$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = (-2\sin t, 3\sin 3t - 3\sin t, 3\cos t - 3\cos 3t)$

$\Rightarrow$ deve essere:

$$\begin{cases} -2\sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \\ 3\sin 3t - 3\sin t = 0 \\ 3\cos t - 3\cos 3t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\sin 3t = 0 \\ 3\cos t - 3\cos 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos t - \cos 3t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = k\pi \\ \cos t = \cos 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = k\pi & , k \in \mathbb{Z} \\ \vee \\ t = k\pi - \frac{\pi}{2} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ sono i punti singolari di } \gamma(t)}$

2) Calcolare la retta tangente ed il versore tangente in Q

$\Rightarrow \dot{\gamma}(\frac{\pi}{2}) = (-2, -6, 0)$

$$\Rightarrow \vec{t} = \frac{\dot{\gamma}(\frac{\pi}{2})}{\|\dot{\gamma}(\frac{\pi}{2})\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{40}}(-2,-6,0)}$$

$$\Rightarrow r_Q : \; Q + <\dot{\gamma}(\tfrac{\pi}{2})>$$

$$\Rightarrow \boxed{r_Q : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} >}$$

3) Calcolare $K(\frac{\pi}{2})$, $\tau(\frac{\pi}{2})$:

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(\tfrac{\pi}{2}) = (-2,-6,0)$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma}(t) = (-2\cos t,\; 9\cos 3t - 3\cos t,\; 9\sin 3t - 3\sin t)$$

$$\Rightarrow \gamma^{(3)}(t) = (2\sin t,\; 3\sin t - 27\sin 3t,\; 27\cos 3t - 3\cos t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma}(\tfrac{\pi}{2}) = (0,\,0,\,-12),\quad \gamma^{(3)}(\tfrac{\pi}{2}) = (2,30,0)$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(\tfrac{\pi}{2}) \times \ddot{\gamma}(\tfrac{\pi}{2}) = (-2,-6,0)\times(0,0,-12)$$

$$= \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = (72,-(24),0) = (72,-24,0)$$

$$\Rightarrow K(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{\|(72,-24,0)\|}{\|(-2,-6,0)\|^3} = \frac{\sqrt{5760}}{(\sqrt{40})^3} = \sqrt{\frac{576\cancel{0}}{6400\cancel{0}}}$$

$$= \sqrt{\frac{100}{9}} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

$$\Rightarrow \tau(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{(72,-24,0)\cdot(2,30,0)}{\|(72,-24,0)\|^2} = \boxed{-\frac{1}{10}}$$

4) Calcolare il piano osculatore e il versore normale principale in Q:

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{\ddot{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \boxed{\frac{3}{10}(0,0,-12)}$$

$$\Rightarrow \Pi_Q\left(\frac{\pi}{2}\right): \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) + < \vec{t}\left(\frac{\pi}{2}\right), \hat{n}\left(\frac{\pi}{2}\right) >$$

$$\Rightarrow \Pi_Q\left(\frac{\pi}{2}\right): \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + < \begin{vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{40}} \\ -\frac{6}{\sqrt{40}} \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{36}{10} \end{vmatrix} >$$ Piano osculatore di γ in $\frac{\pi}{2}$

5) Calcolare la lunghezza di γ per $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + (3\sin 3t - 3\sin t)^2 + (3\cos t - 3\cos 3t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + 9\sin^2 3t + 9\sin^2 t - 18\sin t \sin 3t + 9\cos^2 t + 9\cos^2 3t - 18\cos t \cos 3t}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + 9 + 9 - 18(\sin t \sin 3t + \cos t \cos 3t)}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + 18(1 - \sin t \sin 3t - \cos t \cos 3t)}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \sin t \sin 3t + \cos t \cos 3t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + 18\left(1-(\cos^2 t - \sin^2 t)\right)}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + 18 - 18\cos^2 t + 18 \sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + \cancel{18} - \cancel{18} + 18 \sin^2 t + 18 \sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{40}\, dt = -\cos t \cdot \sqrt{40}\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boxed{\sqrt{40}}$$

es. 4)

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$$\varphi(u,v) = (v, v\cos u, \sin u)$$

1) S è regolare?

$$\Rightarrow \text{Jac}\, \varphi(u,v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -v\sin u & \cos u \\ \cos u & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow X_1 = (0, -v\sin u, \cos u), \quad X_2 = (1, \cos u, 0)$$

$$\Rightarrow X_1 \times X_2 = (0, -v\sin u, \cos u) \times (1, \cos u, 0)$$

$$= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & -v\sin u & \cos u \\ 1 & \cos u & 0 \end{pmatrix} = \left(\cos^2 u, -(-\cos u), -v\sin u \right)$$

$$= \left(\cos^2 u, \cos u, v\sin u \right)$$

$\Rightarrow$ i punti singolari di S sono quelli t.c. $X_1 \times X_2 = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 u = 0 \\ \cos u = 0 \\ v\sin u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos u = 0 \\ v\sin u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ v = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ tutti i punti $(u,v) = \left(k\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ sono i punti singolari di S

$\Rightarrow$ $\boxed{S \text{ NON è regolare}}$

2) Calcolare la 1ª e la 2ª forma quadratica fondamentale:

$\Rightarrow$ $X_1 \cdot X_1 = v^2 \sin^2 u + \cos^2 u$

$\Rightarrow$ $X_1 \cdot X_2 = -v \sin u \cos u$

$\Rightarrow$ $X_2 \cdot X_2 = 1 + \cos^2 u$

$$\Rightarrow \quad G = \begin{pmatrix} v^2\sin^2 u + \cos^2 u & -v\sin u\cos u \\ -v\sin u\cos u & 1+\cos^2 u \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La 1^a forma quadratica è:

$$\boxed{du^2\, v^2\sin^2 u\cos^2 u \;-\; 2\,du\,dv\,\sin u\cos u \;+\; dv^2(1+\cos^2 u)}$$

$$\Rightarrow \quad g = \det G = (1+\cos^2 u)(v^2\sin^2 u+\cos^2 u) - v^2\sin^2 u\cos^2 u$$

$$= v^2\sin^2 u + \cos^2 u + \cancel{v^2\sin^2 u\cos^2 u} + \cos^4 u - \cancel{v^2\sin^2 u\cos^2 u}$$

$$= v^2\sin^2 u + \cos^2 u + \cos^4 u \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad X_{11} = \partial_u X_1 = (0, -v\cos u, -\sin u)$$

$$\Rightarrow \quad X_{12} = \partial_v X_1 = (0, -\sin u, 0)$$

$$\Rightarrow \quad X_{22} = \partial_v X_2 = (0,0,0) \Rightarrow \ell_{22} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ell_{11} = \frac{\det\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} 0 & -v\cos u & -\sin u \\ 0 & -v\sin u & \cos u \\ 1 & \cos u & 0 \end{pmatrix} = -v\cos^2 u - v\sin^2 u = -v$$

$$\Rightarrow \quad \ell_{11} = -\frac{v}{\sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow \quad \ell_{12} = \frac{\det\begin{pmatrix} X_{12} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & -\sin u & 0 \\ 0 & -v\sin u & \cos u \\ 1 & \cos u & 0 \end{pmatrix} = -\sin u\cos u$$

$$\Rightarrow \ell_{12} = -\frac{\sin u\cos u}{\sqrt{g}}$$

$\Rightarrow$ La 2ª forma quadratica è:

$$\boxed{-du^2\frac{v}{\sqrt{g}} - 2\,du\,dv\,\frac{\sin u\cos u}{\sqrt{g}}}$$

3) Determinare K_s in $P = (1, -1, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 1 \\ v\cos u = -1 \\ \sin u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 1 \\ u = \pi \end{cases}$$

$\Rightarrow \ell = \det L$ con:

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{g}} & -\frac{\sin u\cos u}{\sqrt{g}} \\ -\frac{\sin u\cos u}{\sqrt{g}} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\sin^2 u\cos^2 u}{g}$$

$$\Rightarrow K_s = \frac{\ell}{g} = -\frac{\sin^2 u\cos^2 u}{g}\cdot\frac{1}{g} = -\frac{\sin^2 u\cos^2 u}{g^2}$$

$$\Rightarrow K_s(\pi, 1) = \boxed{0}$$

4) S è diffeomorfa ad un cilindro?

No, un cilindro ha curvatura gaussiana costante, mentre S ha curvatura gaussiana ≤ 0.

Es. 1)

Sia $\mathcal{B} = \{ B_q((x,y)) \mid q \in \mathbb{Q}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

1) Verificare che $\mathcal{B}$ è base di aperti per una topologia su $\mathbb{R}^2$.

1) $\mathcal{B}$ è un ricoprimento?
Si: $\forall p \in \mathbb{R}^2 \; \exists B_q(p)$ t.c. $p \in B_q(p)$

2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall p \in B_1 \cap B_2 \; \exists B_3 \in \mathcal{B}$ t.c. $p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$?

Si, $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R} \Rightarrow \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ con $q_1 < q_2 \; \exists \bar{q}$ t.c. $q_1 < \bar{q} < q_2$
$\Rightarrow \exists B_3 = B_{\frac{\bar{q}}{2}}(p)$ t.c. rispetta la proprietà.

2) Confrontare $\tau(\mathcal{B})$ con τ_e

$\Rightarrow \mathcal{B}_e = \{ B_r((x,y)) \mid r > 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$
$\Rightarrow$ si vede immediatamente che:

$\tau(\mathcal{B}) \prec \tau_e$ ($\exists$ aperti di τ_e che non sono aperti di $\tau(\mathcal{B})$ ma non viceversa.)

3) Sia $\mathcal{B}' = \{ B_q((0,0)) \mid q \in \mathbb{Q}^{>0} \}$ base per $\tau(\mathcal{B}')$.

Caratterizzare le funzioni continue:

$$f : (\mathbb{R}^2, \tau(\mathcal{B}')) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$$

$\Rightarrow$ f deve mandare un cerchio aperto di raggio razionale in un aperto di τ_e

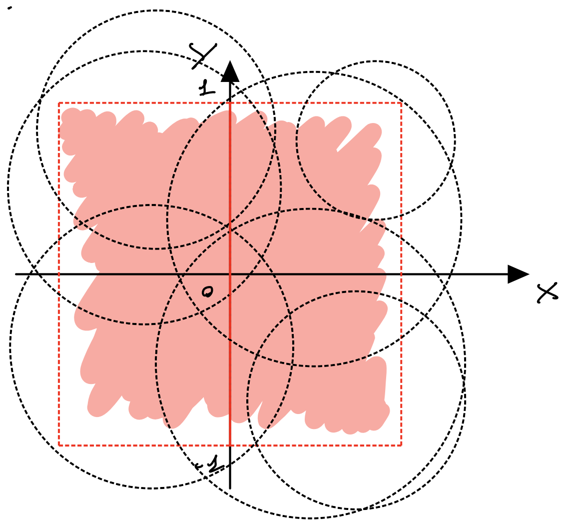
$\Rightarrow$ Sicuramente se f è costante, allora f è continua.

es. 2)

Sia $X = \{ (0,y) \mid y \in [-1,1] \} \cup \{ (x,y) \mid x \in (0,1), y \in [-1,1] \cap \mathbb{Q} \}$
$\cup \{ (x,y) \mid x \in (-1,0), y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1,1] \} \subseteq \mathbb{R}^2$

con la τ indotta.

$\Rightarrow$ Disegno X:



1) X è connesso:

$\nexists A_1, A_2 \in \tau$ indotta disgiunti non banali t.c.

$$A_1 \cup A_2 = X$$

2) ???

3) ???