esempio 1)

Sia $\varphi(u,v) = \left( \frac{3u}{1+u^3}, \frac{3u^2}{1+u^3}, v \right)$ con $(u,v) \in (-1, +\infty) \times (0,2)$

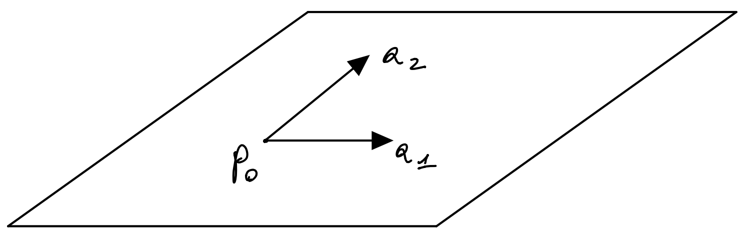
$\Rightarrow$ le prime 2 componenti costituiscono la curva in $\mathbb{R}^2$ iniettiva ma non omeomorfismo, la terza componente replica tale curva $\forall v \in (0,2)$

$\Rightarrow$ $\varphi$ è iniettiva ma non è un omeomorfismo con l'immagine.

es. 2) Trovare un atlante per le seguenti superfici:

1) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ punti del piano per $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e // ai vettori lin. ind. $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$

S:




$\Rightarrow$ scelgo $U = \mathbb{R}^2$, $\varphi(u,v) = p_0 + u \cdot a_1 + v \cdot a_2$

$\Rightarrow$ Ho un atlante $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$

2) Sia $z = f(x,y) \in C^\infty \Rightarrow f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto z = f(x,y)$

$\Rightarrow$ scelgo $U = \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$

$\Rightarrow$ Ho un atlante $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$

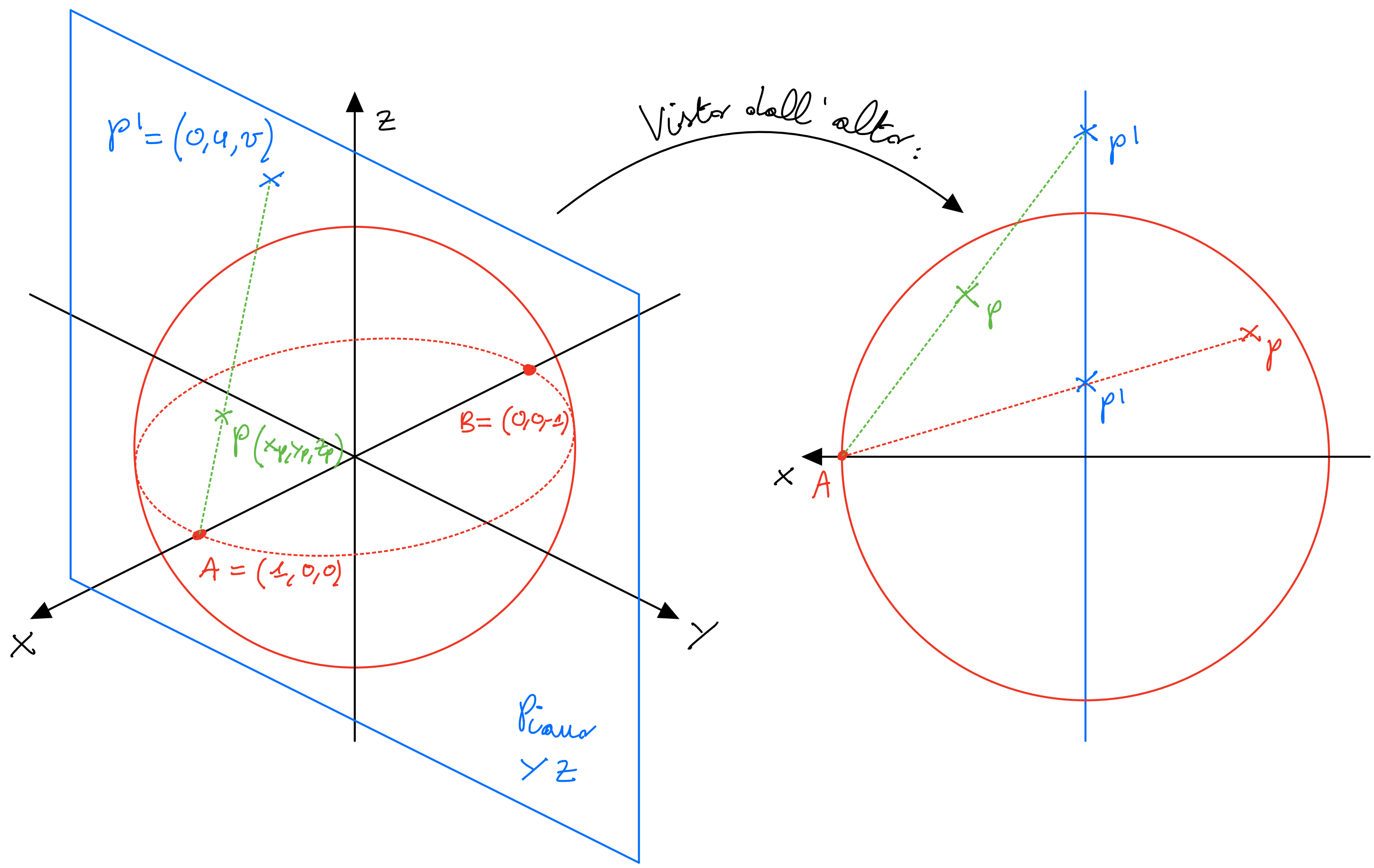
3) Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\} = S^2$

sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$ $S$ è un chiuso, quindi non può essere descritta con un omeomorfismo con l'immagine.

$\Rightarrow$ Forniamo quindi un atlante con 2 carte locali, mediante l'utilizzo delle proiezioni stereografiche:

$$\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi), (U_2, \psi)\} \quad \text{con: } \varphi(U_1) = V_1, \ \psi(U_2) = V_2$$




$\Rightarrow$ sia $P = (x_p, y_p, z_p) \in V_1$, scrivo la retta per $A, p$:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(x_p - 1) \\ y = 0 + \lambda y_p \\ z = 0 + \lambda z_p \end{cases} \iff \lambda = \frac{x-1}{x_p - 1} = \frac{y}{y_p} = \frac{z}{z_p} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ sia $p' = AP \cap$ Piano $yz$ : $p' = (0, u, v)$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x_p - 1} = \frac{u}{y_p} = \frac{v}{z_p} = \lambda \Rightarrow x_p = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \ y_p = \frac{u}{\lambda}, \ z_p = \frac{v}{\lambda}$$

$\Rightarrow$ inoltre $p \in S$: $\quad x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 = 1$

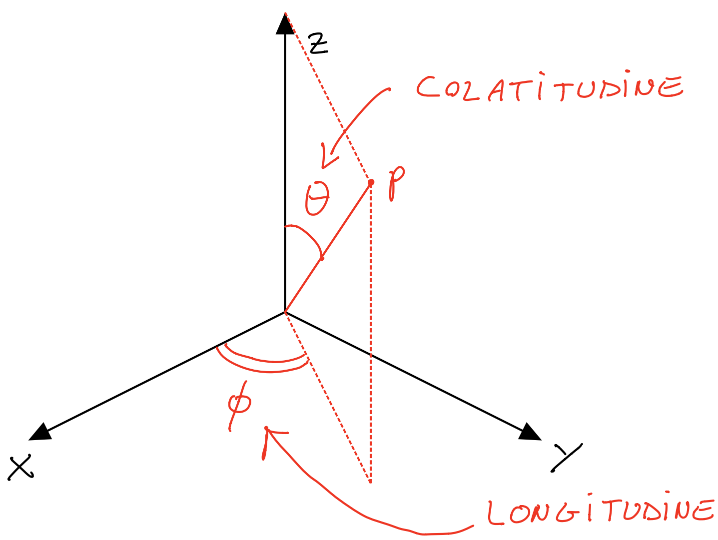
$$\Rightarrow \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^2 + \frac{u^2}{\lambda^2} + \frac{v^2}{\lambda^2} = 1 \iff \lambda = \frac{u^2+v^2+1}{2}$$

$\iff \lambda - 1 = \dfrac{u^2+v^2-1}{2} \Rightarrow$ ora trovo le equazioni:

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}, \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}\right)$$

e analogamente si trova $\psi(u,v)$

4) Sia $S$ come sopra (sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$), formiamo un atlante alternativo usando le coordinate sferiche:




$$\Rightarrow U = \{(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in (0,\pi), \phi = (0, 2\pi)\}$$

$$\Rightarrow \varphi(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

con $(\theta,\phi) \in U$, NON descrive tutta $S$: manca l'arco che congiunge il polo nord al polo sud passando per l'asse $x$ !!!

$$\Rightarrow \varphi(U) = S^2 \setminus \{(x,y,z) \in S^2 \mid y = 0 \wedge x \geq 0\}$$

$$\Rightarrow \text{costruisco } \psi(\theta,\phi) = (-\sin\theta\cos\phi, \cos\theta, -\sin\theta\sin\phi)$$

e ottengo $\tau(U) = S^2 \setminus \{(x,y,z) \in S^2 \mid z=0 \wedge x \leq 0\}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \{(U,\varphi), (U,\tau)\}$

5) Prendo $\varphi$ t.c. sia un omeomorfismo con l'immagine (immersione regolare), allora $S$ ha un atlante formato da una sola carta locale.

es. 3) Data $S$ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = (u-v^2,\ u^2+v,\ 2u+v^3) \quad \text{con } (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

1) Trovare i punti singolari di $S$

2) Trovare $T_p(S)$, $\vec{\nu}$ in $p=(-2,1)$

3) Calcolare i simboli di Christoffel di 1ª e 2ª specie in $p$

$\Rightarrow$ 1) I punti singolari sono quelli che annullano

$\vec{\nu} = X_1 \times X_2$

$\Rightarrow X_1 = (1,\ 2u,\ 2)\ ,\ X_2 = (-2v,\ 1,\ 3v^2)$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2u & 2 \\ -2v & 1 & 3v^2 \end{pmatrix} = (6uv^2-2,\ -(3v^2+4v),\ 1+4uv)$$

$\Rightarrow$ deve essere: $\begin{cases} 6uv^2-2=0 \\ -3v^2-4v=0 \\ 1+4uv=0 \end{cases}$

$\Rightarrow v(-3v-4)=0 \iff v=0 \vee v=-\frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ se $v=0$ ottengo $-2=0$ ✗

$\Rightarrow$ se $v=-\frac{4}{3}$ ottengo: $6u\cdot\frac{16}{9}-2=0 \wedge 1-\frac{16}{3}u=0$

$\Rightarrow u = \frac{3}{16} \Rightarrow (u,v) = \left(\frac{3}{16}, -\frac{4}{3}\right)$ è punto singolare di $S$.

$\Rightarrow$ 2) $T_p(S)$, $\vec{\nu}$ in $p = (-2,1)$

$\Rightarrow \varphi(-2,1) = (-3,5,-3)$

$\Rightarrow X_1(-2,1) = (1,-4,2)$

$\Rightarrow X_2(-2,1) = (-2,1,3)$

$\Rightarrow X_1 \times X_2(-2,1) = (-14,-7,-7) = -7(2,1,1)$

$$\Rightarrow T_p(S) = \begin{pmatrix}-3\\5\\-3\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow \|X_1 \times X_2\| = 7\sqrt{6}$

$\Rightarrow \vec{\nu} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$

$\Rightarrow$ 3) Simboli di Christoffel in $p = (-2,1)$:

$\Rightarrow X_1(p) = (1,-4,2)$, $X_2(p) = (-2,1,3)$

$\Rightarrow g_{11} = 5 + 4u^2 = 21$

$\Rightarrow g_{12} = -2v + 2u + 6v^2 = 0$

$\Rightarrow g_{22} = 4v^2 + 1 + 9v^4 = 14$

$\Rightarrow X_{11} = (0,2,0)$, $X_{12} = (0,0,0)$, $X_{22} = (-2,0,6v)$

$\Rightarrow \Gamma_{111} = X_{11} \cdot X_1 = -8$

$\Rightarrow \Gamma_{112} = X_{11} \cdot X_2 = 2$

$\Rightarrow \Gamma_{121} = X_{12} \cdot X_1 = 0$

$\Rightarrow \Gamma_{122} = X_{12} \cdot X_2 = 0$

$\Rightarrow \Gamma_{221} = X_{22} \cdot X_1 = 12v - 6 = 6$

$\Rightarrow \Gamma_{222} = X_{22} \cdot X_2 = 18v + 5 = 23$

$\Rightarrow \Gamma_{111} = \Gamma_{11}^{\ 1} g_{11} + \Gamma_{11}^{\ 2} g_{12} \Leftrightarrow \Gamma_{11}^{\ 1} = -\frac{8}{21}$

$\Rightarrow \Gamma_{11}^{\ 2} = \frac{1}{7}$

$\Rightarrow$ ecc...

es. 4) Calcolare $A(S)$ con $S$ = sfera di $\mathbb{R}^3$ di raggio $R > 0$

$\Rightarrow \varphi(u,v) = (R\cos v \cos u, R\cos v \sin u, R\sin v)$

con $(u,v) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow X_1 = (-R\cos v \sin u, R\cos v \cos u, 0)$

$\Rightarrow X_2 = (-R\sin v \cos u, -R\sin v \sin u, R\cos v)$

$\Rightarrow g = (X_1 \cdot X_1) \cdot (X_2 \cdot X_2) - (X_1 \cdot X_2)^2$

$= (R^2 \cos^2 v) \cdot (R^4) - 0 = R^4 \cos^2 v$

$$\Rightarrow A(S) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos v \, du\, dv = 2\pi R^2 \cdot \sin v \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$= 4\pi R^2$

Sia ora $p = \varphi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R\right) \in S$

$\Rightarrow$ la $1^a$ forma quadratica di $S$ in $p$ è:

$$\frac{R^2}{2} du^2 + R^2 dv^2$$

$\Rightarrow X_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}R, 0, 0\right)$, $X_2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}R, -\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$

$\Rightarrow$ sia $a = (1,1) \in T_p(S)$, $b = (\sqrt{2}, 0) \in T_p(S)$

$\Rightarrow a = X_1 + X_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}R, -\frac{\sqrt{2}}{2}R, -\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$

$\Rightarrow \quad b = \sqrt{2}\cdot X_1 = (-R, 0, 0)$

$\Rightarrow$ Calcolo $a \cdot b$ in 2 modi diversi:

In $\mathbb{R}^3$:

$$a \cdot b = \frac{\sqrt{2}}{2} R^2$$

In $T_p(S)$:

$$a \cdot b = g_{11} \cdot a_1 b_1 + \cancel{g_{12}}^{\,0} a_1 b_2 + \cancel{g_{12}}^{\,0} a_2 b_1 + g_{22} a_2 b_2 \overset{!}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} R^2$$

es. 5) Calcolo di curvature di $S$:

$$\varphi(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v), \quad (u,v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $S$ è un cilindro di raggio $R$.

$\Rightarrow X_1 = (-R\sin u, R\cos u, 0)$

$\Rightarrow X_2 = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow X_{11} = (-R\cos u, -R\sin u, 0)$

$\Rightarrow X_{12} = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow X_{22} = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow g_{11} = R^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1$

$\Rightarrow g = \det G = R^2$

$$\Rightarrow l_{11} = \frac{\det\begin{pmatrix} -R\cos u & -R\sin u & 0 \\ -R\sin u & R\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{R} = -R < 0$$

$\Rightarrow l_{12} = l_{22} = 0$

$\Rightarrow l = 0 \Rightarrow K_S = 0 \Rightarrow$ tutti i punti di $S$ sono parabolici

$\Rightarrow \; k_1, k_2 :$

$$\lambda^2 \cdot R^2 + \lambda R = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = -\frac{1}{R} < 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 0, \; k_2 = -\frac{1}{R} \Rightarrow k_m = -\frac{1}{2R}$$