es. 1)

Sia $(\mathbb{R}, \tau_e)$ e si consideri $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z} \wedge |p \cdot q| < 10^{100}\} \subseteq \mathbb{R}$

Determinare se:

1) X è aperto? No

2) X è chiuso?

Noto che X è limitato:

$$\forall x \in X \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{con } p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ |pq| < 10^{100}$$

$\Rightarrow$ se $p = 0$, $x = 0\ \forall q$ $\Rightarrow$ X è un insieme finito di punti

$\Rightarrow$ X è chiuso

3) X è compatto?

Sì (per Heine-Borel), visto che è chiuso e limitato.

es. 2)

Sia $X = [0,1] \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_e$ su $[0,1] \cup \mathcal{B}'$ con:

$\mathcal{B}' = \{(x, 1) \cup \{2\} \mid x \in [0,1)\}$. Sia $\tau(\mathcal{B})$. Considerare

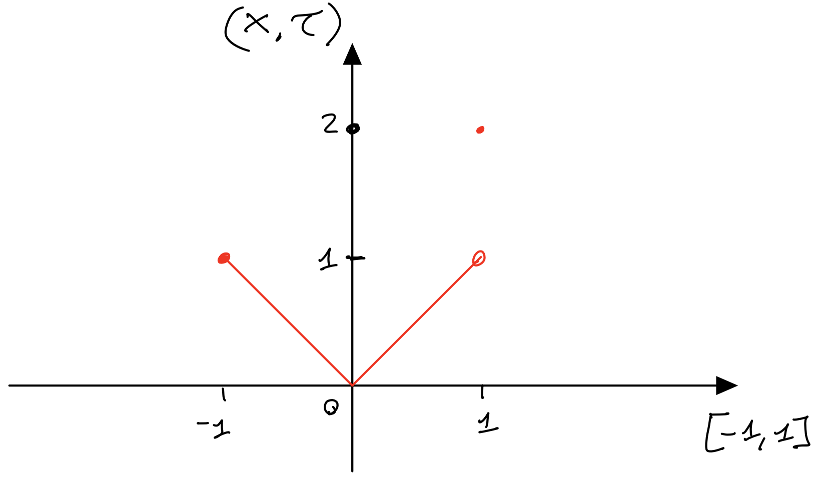
$f : [-1, 1] \longrightarrow (X, \tau)$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Determinare se:

1) f è continua con $([-1,1], \tau_e)$

$\Rightarrow$ disegniamo f e $\tau(\mathcal{B})$:



$X = [0,1] \cup \{2\}$,

$\tau =$ 

(a,b) con $0<a<b<1$

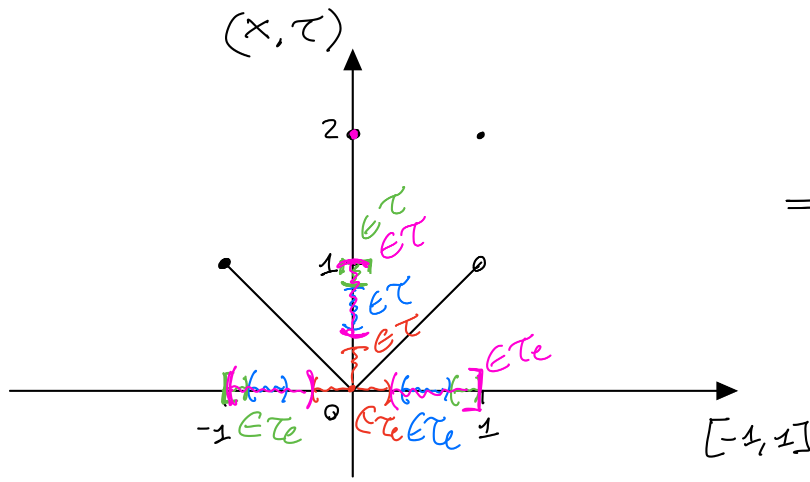
$[0,b)$ con $0<b<1$

$(a,1]$ con $0<a<1$

$[0,1]$ (ovvio)

$(x_1,1) \cup \{2\}$

In questo caso ho $[-1,1]$ con τ_e :



$\Rightarrow f$ è continua.

2) f è continua con τ_{cof} su $[-1,1]$?

$\Rightarrow f$ NON è continua (basta vedere sopra)

3) (X, τ) è T_2 ?

$\Rightarrow$ No: prendo $x=1$, $y=2$ $\Rightarrow$ $\forall A_1, A_2$ t.c. $x \in A_1 \wedge y \in A_2$ (MA NON viceversa) si ha

$$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

$\Rightarrow$ (X, τ) NON è T_2

4) (X, τ) è T_1 ?

Sì, gli unici problemi erano 1, 2 ma ora i 2 aperti possono intersecarsi.

$\Rightarrow$ (X, τ) è T_1 (e T_0)

es. 3)

Sia $\gamma: [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$ con $\gamma(t) = \left(t^2, \frac{t^3}{3} + t, 2\sqrt{2}\, t\right)$

1) γ è iniettiva ?

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \overset{?}{\Rightarrow} t_1 = t_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1^2 = t_2^2 \\ \frac{t_1^3}{3} + t_1 = \frac{t_2^3}{3} + t_2 \\ 2\sqrt{2}\, t_1 = 2\sqrt{2}\, t_2 \quad \Rightarrow t_1 = t_2 \end{cases} \Rightarrow \gamma \text{ è iniettiva.}$$

2) Verificare se t è parametro d'arco:

t parametro d'arco $\Leftrightarrow$ $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1 \quad \forall t \in [-2, 2]$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} = (2t,\ t^2+1,\ 2\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}\| = \sqrt{4t^2 + t^4 + 1 + 2t^2 + 8}$$

$$= \sqrt{6t^2 + t^4 + 9} \not\equiv 1 \Rightarrow t \text{ NON è parametro d'arco.}$$

3) Calcolare $L(\gamma)$:

$$L(\gamma) = \int_{-2}^{2} \|\dot{\gamma}\|\, dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{t^4 + 6t^2 + 9}\, dt$$

$$= \int_{-2}^{2} t^2 + 3\, dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-2}^{2} + 12 = \frac{16}{3} + 12 = \frac{52}{3}$$

4) Stabilire i punti di γ con K_{MAX}:

$$\Rightarrow K(t) = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{(t^2+3)^3}$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma} = (2,\ 2t,\ 0) \Rightarrow \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 2t & t^2+1 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 2t & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-4\sqrt{2}t,\ -(-4\sqrt{2}),\ 4t^2 - 2(t^2+1)\right)$$

$$= \left(-4\sqrt{2}t,\ 4\sqrt{2},\ 2(t^2-1)\right)$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = \sqrt{32t^2 + 32 + 4(t^4 + 1 - 2t^2)}$$

$$= \sqrt{32t^2 + 32 + 4t^4 + 4 - 8t^2}$$

$$= \sqrt{4t^4 + 24t^2 + 36}$$

$$= 2\sqrt{t^4 + 6t^2 + 9}$$

$$= 2\cdot(t^2+3)$$

$\Rightarrow K(t) = \dfrac{2}{t^2+3} \Rightarrow$ il max è raggiunto per $t=0$

$\Rightarrow \gamma(0) = (0,0,0)$

es. 4)

Sia S con $\varphi(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2\right)$

1) Determinare i punti regolari di S:

$X_1 = (1-u^2+v^2, 2uv, 2u)$

$X_2 = (2uv, 1-v^2+u^2, -2v)$

$$\Rightarrow X_1 \times X_2 = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1-u^2+v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1-v^2+u^2 & -2v \end{pmatrix}$$

$$= \left(-4uv^2 - 2u(1-v^2+u^2), -\left(-2v(1-u^2+v^2) - 4u^2v\right), (1-u^2+v^2)(1-v^2+u^2) - 4u^2v^2\right)$$

$$= \left(-2u^3 - 2u - 2uv^2, -\left(-2v + 2u^2v - 2v^3 - 4u^2v\right), 1 - \cancel{v^2} + \cancel{u^2} - \cancel{u^2} + u^2v^2 - u^4 + \cancel{v^2} - v^4 + u^2v^2 - 4u^2v^2\right)$$

$$= \left(-2u^3 - 2u - 2uv^2, 2u^2v + 2v + 2v^3, 1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4\right)$$

deve essere:

$$\begin{cases} -2u^3 - 2u - 2uv^2 = 0 \\ 2u^2v + 2v + 2v^3 = 0 \\ 1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2u\,(u^2 - 1 - v^2) = 0 \\ 2v\,(u^2 + 1 + v^2) = 0 \\ 1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (1) : $u = 0 \ \vee \ u^2 - 1 - v^2 = 0$

$\Rightarrow$ (2) : $v = 0 \ \vee \ u^2 + 1 + v^2 = 0$

$\Rightarrow$ se $u = 0$ ottengo : $\begin{cases} 2v\,(1 + v^2) = 0 \\ 1 - v^4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v\,(1 + v^2) = 0 \\ v = \pm 1 \end{cases} \qquad ↯$$

$\Rightarrow$ se $v = 0$ ottengo : $\begin{cases} -2u\,(u^2 - 1) = 0 \\ 1 - u^4 = 0 \Rightarrow u = \pm 1 \end{cases}$ ✓

$\Rightarrow (u, v) = (\pm 1, 0)$ è punto singolare.

$\Rightarrow$ se $u^2 - 1 - v^2 = 0$ ottengo: $u^2 = v^2 + 1$ e quindi:

$$\begin{cases} 2v\,(v^2 + 1 + 1 + v^2) = 0 \\ 1 + 2\,(v^2 + 1)\,v^2 - (v^2 + 1)^2 - v^4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v\,(2v^2 + 2) = 0 \\ 1 + (2v^2 + 2)v^2 - (v^4 + 1 + 2v^2) - v^4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v\,(2v^2 + 1) = 0 \\ \cancel{1} + 2\cancel{v^4} + 2\cancel{v^2} - \cancel{v^4} - \cancel{1} - \cancel{2v^2} - \cancel{v^4} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow u = \pm 1$ già trovato

$\Rightarrow$ se $u^2 + 1 + v^2 = 0$

$\Rightarrow$ $(\pm 1, 0)$ sono i 2 punti che annullano il vettore $X_1 \times X_2$

$\Rightarrow$ rk Jac $(\pm 1, 0) = 2$ $\Rightarrow$ S è regolare.

2) Determinare tutti i piani tangenti ad S in $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ deve essere:

$$\begin{cases} u - \frac{u^3}{3} + uv^2 = 0 \\ v - \frac{v^3}{3} + vu^2 = 0 \\ u^2 - v^2 = -3 \Rightarrow u^2 = v^2 - 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\underset{①}{u - \frac{u^3}{3} + uv^2 = 0}$ $\wedge$ $\underset{②}{v - \frac{v^3}{3} + v(v^2 - 3) = 0}$

$\Rightarrow$ da ② ottengo:

$$v - \frac{v^3}{3} + v^3 - 3v = 0 \Rightarrow -2v + \frac{-v^3 + 3v^3}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}v^3 - 2v = 0 \Rightarrow 2v\left(\frac{v^2}{3} - 1\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $v = 0 \vee v = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ se $v = 0$ ottengo $u^2 = -3$ ✗

$\Rightarrow$ se $v = \pm\sqrt{3}$ ottengo $u = 0$ ✓

$\Rightarrow$ $(u, v) = (0, \pm\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ 2 piani tangenti ad S in P

$\Rightarrow T_{p_1}(S) = p + \langle X_1, X_2 \rangle$ in $(0, \sqrt{3})$

$\Rightarrow T_{p_2}(S) = p + \langle X_1, X_2 \rangle$ in $(0, -\sqrt{3})$

$X_1 = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)$

$X_2 = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$

$\Rightarrow X_1(0, \sqrt{3}) = (4, 0, 0)$

$\Rightarrow X_2(0, \sqrt{3}) = (0, -2, -2\sqrt{3})$

$\Rightarrow X_1(0, -\sqrt{3}) = (4, 0, 0)$

$\Rightarrow X_2(0, -\sqrt{3}) = (0, -2, 2\sqrt{3})$

$$\Rightarrow T_{p_1}(S) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow T_{p_2}(S) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$$

3) Determinare la 1ª forma quadratica fondamentale di S:

$$g_{11} = X_1 \cdot X_1 = (1 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2$$

$$g_{22} = X_2 \cdot X_2 = 4u^2v^2 + (1 - v^2 + u^2)^2 + 4v^2$$

$$g_{12} = X_1 \cdot X_2 = 2uv(1 - u^2 + v^2) + 2uv(1 - v^2 + u^2) - 4uv$$

$$\Rightarrow g_{11} = \left(1 + (v^2 - u^2)^2 + 2(v^2 - u^2) + 4u^2v^2 + 4u^2\right)$$

$$= 1 + v^4 + u^4 - 2u^2v^2 + 2v^2 - 2u^2 + 4u^2v^2 + 4u^2$$

$$= 1 + v^4 + u^4 + 2u^2v^2 + 2v^2 + 2u^2$$

$$= 1 + 2v^2 + 2u^2 + (u^2 + v^2)^2 = (1 + u^2 + v^2)^2$$

$$\Rightarrow g_{22} = 1 + (u^2 - v^2) + 2(u^2 - v^2) + 4u^2v^2 + 4v^2$$

$$= 1 + u^4 + v^4 - 2u^2v^2 + 2u^2 - 2v^2 + 4u^2v^2 + 4v^2$$

$$= 1 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2 + 2u^2 + 2v^2$$

$$= 1 + (u^2+v^2)^2 + 2(u^2+v^2) = (1 + u^2 + v^2)^2$$

$$\Rightarrow g_{12} = 2uv(1 - u^2 + v^2) + 2uv(1 - v^2 + u^2) - 4uv$$

$$= \cancel{2uv} - \cancel{2u^3v} + \cancel{2uv^3} + \cancel{2uv} - \cancel{2uv^3} + \cancel{2u^3v} - \cancel{4uv}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ la 1^a forma quadratica fondamentale è:

$$(1 + u^2 + v^2)^2 du^2 + (1 + u^2 + v^2)^2 dv^2$$

4) Calcolare K_m di S $\forall (u,v)$

$$\Rightarrow K_m = \frac{g_{11} l_{22} - 2 \overset{0}{\cancel{g_{12}}} l_{12} + g_{22} l_{11}}{2g}$$

$$= \frac{g_{11}(l_{22} + l_{11})}{2g}$$ (in questo caso

$$X_1 = (1 - u^2 + v^2,\ 2uv,\ 2u)$$

$$X_2 = (2uv,\ 1 - v^2 + u^2,\ -2v)$$

$$\Rightarrow X_{11} = (-2u,\ 2v,\ 2) \quad X_{22} = (2u,\ -2v,\ -2)$$

$$\Rightarrow X_{11} = -X_{22} \Rightarrow l_{11} = -l_{22} \Rightarrow l_{11} + l_{22} = 0$$

$$\Rightarrow K_m \equiv 0 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$