CALCOLO DI $\mathbb{E}_x(T_y)$

Si ha:

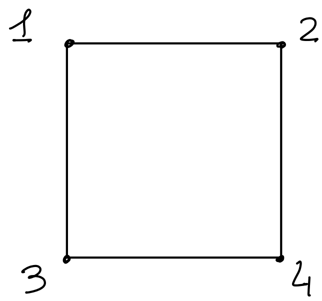
$$\mathbb{P}_x(T_y > n) = \mathbb{P}_x(X_1 \neq y, \dots, X_n \neq y)$$
$$= \sum_{x' \neq y} \mathbb{P}_x(X_1 = x', \dots, X_n \neq y)$$
$$= \sum_{x' \neq y} \underbrace{\mathbb{P}_x(X_2 \neq y, \dots, X_n \neq y \mid X_1 = x')}_{\mathbb{P}_{x'}(X_1 \neq y, \dots, X_{n-1} \neq y)} \cdot \mathbb{P}_x(X_1 = x')$$
$$= \sum_{x' \neq y} q(x, x')\, \mathbb{P}_{x'}(T_y > n-1)$$

Tale procedimento è detto ANALISI AD 1 PASSO:

$$\Rightarrow \mathbb{E}_x(T_y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x(T_y > n) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_x(T_y > n)$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{x' \neq y} \mathbb{P}_{x'}(T_y > n-1)\, q(x, x')$$
$$= 1 + \sum_{x' \neq y} \mathbb{E}_{x'}(T_y)\, q(x, x')$$

<u>esempio</u>:

Passeggiata aleatoria sul grafo:



Calcoliamo $\mathbb{E}_1(T_4)$:

$$\mathbb{E}_1(T_4) = 1 + \underbrace{\tfrac{1}{2}\mathbb{E}_2(T_4) + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}_3(T_4)}_{\text{sono uguali per simmetria}} = 1 + \mathbb{E}_2(T_4)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_2(T_4) = 1 + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}_1(T_4)$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}_1(T_4) = 2 + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}_1(T_4) \Rightarrow \mathbb{E}_1(T_4) = 4$$

DISTRIBUZIONI STAZIONARIE

Per distribuzione intenderemo una probabilità su E.
Essa si può identificare con un vettore riga $(\pi(x))_{x \in E}$ t.c. $\pi(x) \geq 0$, $\sum_{x \in E} \pi(x) = 1$

<u>Def.</u> (Distribuzione Stazionaria):

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una CM con matrice di transizione Q. Diciamo che π è DISTRIBUZIONE STAZIONARIA se $\pi Q = \pi$, ovvero se:

$$\sum_{x \in E} \pi(x)\, q(x,y) = \pi(y) \quad \forall y \in E$$

Notare che, se π è stazionaria, si ha:

$$\pi Q^n = (\pi Q) Q^{n-1} = \dots = \pi$$

Abbiamo visto che se $\mu_n(x) := \mathbb{P}(X_n = x)$ allora $\mu_n = \mu_0 Q^n \Rightarrow$ se π è distrib. staz. si ha:

$$\mu_n = \pi \quad \forall n$$

<u>Def.</u> (Distribuzione Reversibile):

Una distribuzione π si dice REVERSIBILE per la matrice di transizione Q se:

$$\pi(x)\, q(x,y) = \pi(y)\, q(y,x) \quad \forall x,y \in E$$

<u>Teorema</u>:

Se π è reversibile, allora è stazionaria.
(N.B. I 2 concetti NON sono equivalenti)

Dim.:

$$\pi Q(y) = \sum_{x\in E} \pi(x)\, q(x,y) = \sum_{x\in E} \pi(y)\, q(y,x)$$
$$= \pi(y) \sum_{x\in E} q(y,x) = \pi(y)$$

$\square$

esempi:

1) Sia Q simmetrica, allora $\pi(x) = \frac{1}{|E|}$ $\forall x \in E$ è reversibile e quindi stazionaria

2) Consideriamo la passeggiata aleatoria in un grafo non diretto (E, V) t.c.:

$$q(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & (x,y) \in V \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poniamo $\pi(x) := \dfrac{\deg(x)}{\sum_{y\in E} \deg(y)}$. Allora π è reversibile:

$\Rightarrow$ $\pi(x)\, q(x,y) = 0$ se $(x,y) \notin V$.

Se $(x,y) \in V$:

$$\pi(x)\, q(x,y) = \frac{\cancel{\deg(x)}}{\sum_{y\in E} \deg(y)} \cdot \frac{1}{\cancel{\deg(x)}} = \text{costante}$$
$$= \pi(y)\, q(y,x)$$

ESERCIZI

1) Siano $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ martingale rispetto alla stessa filtrazione $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$. Definiamo:

$$T := \min\{n \geq 1 : X_n = Y_n\}$$

Mostrare che T è un tempo d'arresto e che, posto $Z_n := (X_n - Y_n)\cdot \mathbb{1}_{\{T \geq n\}}$, allora $(Z_n)_{n\geq 1}$ é una $\mathcal{G}$-martingala.

<u>Sol</u>:

Osserviamo che $\{T = n\} = \{X_n = Y_n, X_k \neq Y_k \ \forall k < n\}$.
Per ipotesi X_k e Y_k sono $\mathcal{G}_k$-misurabili.
$\Rightarrow X_k - Y_k$ é $\mathcal{G}_k$-misurabile $\Rightarrow \{X_k = Y_k\} \in \mathcal{G}_k$ e $\{X_k \neq Y_k\} \in \mathcal{G}_k \Rightarrow \{T = n\} \in \mathcal{G}_n$ ($\Rightarrow T$ é un tempo d'arresto). Mostriamo ora che $(Z_n)_{n\geq 1}$ é $\mathcal{G}$-martingala:

1) é adattato, ovvero Z_n é $\mathcal{G}_n$-misurabile $\forall n$:

$$Z_n = (X_n - Y_n)\cdot \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}$$

$\mathcal{G}$-misurabili $\quad \{T \geq n\} = \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{G}_{n-1} \subseteq \mathcal{G}_n$

2) $Z_n \in \mathcal{L}^1$. Si ha:

$$|Z_n| \leq |X_n| + |Y_n| \in \mathcal{L}^1$$

3) $\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}((X_{n+1} - Y_{n+1})\mathbb{1}_{\{T\geq n+1\}} \mid \mathcal{G}_n)$

$\mathcal{G}_n$-misurabile

$= \mathbb{1}_{\{T\geq n+1\}}\mathbb{E}(X_{n+1} - Y_{n+1} \mid \mathcal{G}_n) = \mathbb{1}_{\{T\geq n+1\}}(X_n - Y_n)$

$= \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}(X_n - Y_n)$ dato che:

$\mathbb{1}_{\{T\geq n\}}(X_n - Y_n) - \mathbb{1}_{\{T\geq n+1\}}(X_n - Y_n)$

$= \mathbb{1}_{\{T = n\}}(X_n - Y_n) \equiv 0$

2) Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ succ. di v. a. i.i.d. t.c.:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

Poniamo $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Definiamo

$$a(t) = \mathbb{E}(e^{tX_1})$$

Mostrare che:

1) $a(t) > 1 \quad \forall t \neq 0$

2) $M_n(t) = \dfrac{e^{tS_n}}{a^n(t)}$ é martingala per la filtrazione $\sigma(X_1, \dots, X_n)$.

3) $\mathbb{E}(M_n(t)) = 1 \quad \forall n$, ma se $t \neq 0$ allora:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(M_n(t) \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow a(t) = \mathbb{E}(e^{tX_1}) = \frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{2} e^{-t} = \cosh(t) > 1 \quad \forall t \neq 0$

Notare che possiamo sostituire le X_i con v.a. di media 0 NON q.c. costanti. Infatti per ogni v.a. NON q.c. costante, se $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é strettamente convessa, si ha $\mathbb{E}(\varphi(X)) > \varphi(\mathbb{E}(X))$. Quindi, scelto $\varphi(x) = e^{tx}$ $(t > 0)$, si ha:

$$\mathbb{E}(e^{tX_1}) > e^{t\mathbb{E}(X_1)} = 1$$

$M_n(t) = \prod_{k=1}^{n} Y_k$ con $Y_k := \dfrac{e^{tX_k}}{a(t)}$. Notare che le Y_k sono i.i.d. e $\mathbb{E}(Y_k) = 1$. Da ció segue che $M_n(t)$ é una martingala. Scriviamo $M_n(t) = e^{tS_n - n \log a(t)}$ $= e^{t \cdot n \left(\overline{X}_n - \frac{\log a(t)}{t}\right)}$

$$\Rightarrow \{M_n(t) \geq \varepsilon\} = \left\{ tn\left(\overline{X}_n - \frac{\log a(t)}{t}\right) \geq \log \varepsilon \right\}$$
$$= \left\{ \overline{X}_n \geq \frac{\log a(t)}{t} + \frac{\log \varepsilon}{tn} \right\} \text{ se } t > 0,$$
$$\left\{ \overline{X}_n \leq \frac{\log a(t)}{t} + \frac{\log \varepsilon}{tn} \right\} \text{ se } t < 0$$

Supponiamo $t > 0 \Rightarrow \dfrac{\log a(t)}{t} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. per n sufficientemente grande si ha:

$$\frac{\log a(t)}{t} + \frac{\log \varepsilon}{tn} > \delta$$

Quindi $\{M_n(t) \geq \varepsilon\} \subseteq \{\overline{X}_n > \delta\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(M_n(t) \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\overline{X}_n > \delta) \leq \mathbb{P}(|\overline{X}_n| > \delta) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

per la legge dei Grandi Numeri

Se $t < 0$ si ha:

$$\overline{X}_n \leq \frac{\log a(t)}{t} + \frac{\log \varepsilon}{tn} < -\delta \quad (\text{per } n \text{ grande})$$

Supponiamo che $(X_n)_{n \geq 0}$ sia una CM con:

$q(x,y) := \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$, $Q = (q(x,y))_{x,y \in I}$.

Sappiamo che $\pi = (\pi(x))_{x \in E}$ è distribuzione stazionaria se $\pi(x) \geq 0$, $\sum_{x \in E} \pi(x) = 1$, $\pi Q = \pi$

(cioè $\sum_x \pi(x) q(x,y) = \pi(y) \quad \forall y \in E$) $\forall x$

Teorema ($\exists!$ di π):

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una CM irriducibile su E finito. Allora $\exists!$ distribuzione stazionaria π, inoltre se T_x è il tempo d'ingresso nello stato $x \in E$, si ha:

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x)} > 0 \quad \forall x \in E$$

Dim.:

1) $\exists$:

Definiamo, per $x \in E$ fissato, $(\lambda_x(y))_{y \in E}$ dove

$$\lambda_x(y) := \mathbb{E}_x \Big(\underbrace{\sum_{T=1}^{T_x} 1\!\!1_{\{X_T = y\}}}_{\text{numero di passi in } y \text{ prima di tornare in } x} \Big)$$

Notiamo che $\lambda_x(x) = 1$. Si ha:

$$\sum_{y \in E} \lambda_x(y) = \sum_{y \in E} \mathbb{E}_x \Big(\sum_{T=1}^{T_x} 1\!\!1_{\{X_T = y\}} \Big) = \mathbb{E}_x \Big(\sum_{T=1}^{T_x} \underbrace{\sum_{y \in E} 1\!\!1_{\{X_T = y\}}}_{=1} \Big)$$

$$= \mathbb{E}_x(T_x)$$

Quindi $\pi_x(y) = \dfrac{\lambda_x(y)}{\mathbb{E}_x(T_x)}$ é una distribuzione.

Mostriamo che, $\pi_x Q = \pi_x$ $\forall x \in E$ (cioé che π_x é distribuzione stazionaria): notiamo che $\pi_x Q = \pi_x$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_x Q = \lambda_x$. Si ha:

$$\lambda_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{\tau=1}^{T_x} \mathbb{1}_{\{X_\tau = y\}}\right) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{s=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_s = y\}} \mathbb{1}_{\{s \le T_x\}}\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{+\infty} \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{\{X_s = y\}} \mathbb{1}_{\{s \le T_x\}}\right) = \sum_{s=1}^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_s = y,\ s \le T_x) \quad (*)$$

Teorema di Convergenza Monotona

$$= q(x,y) + \sum_{s=2}^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_s = y,\ s \le T_x)$$

Notiamo che:

$$\mathbb{P}_x(X_s = y,\ s \le T_x) = \mathbb{P}_x(X_1 \ne x, \dots, X_{s-1} \ne x, X_s = x)$$

$$= \sum_{y' \ne x} \mathbb{P}_x(X_1 \ne x, \dots, X_{s-2} \ne x, X_{s-1} = y', X_s = y)$$

$$= \sum_{y' \ne x} \mathbb{P}_x(X_s = y \mid X_{s-1} = y', X_1 \ne x, \dots, X_{s-2} \ne x) \cdot \mathbb{P}_x(X_1 \ne x, \dots, X_{s-2} \ne x, X_{s-1} = y')$$

$$= \sum_{y' \ne x} q(y', y)\, \mathbb{P}_x(X_{s-1} = y',\ s-1 \le T_x) \quad (**)$$

Proprietá di Markov generalizzata.

Quindi, sostituendo $(**)$ in $(*)$ si ha:

$$\lambda_x(y) = q(x,y) + \sum_{s=2}^{+\infty} \sum_{y' \ne x} q(y, y')\, \mathbb{P}_x(X_{s-1} = y',\ s-1 \le T_x)$$

$$= q(x,y) + \sum_{y' \ne x} q(y,y') \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_k = y',\ k \le T_x)}_{= \lambda_x(y')}$$

$$= \sum_{y' \in E} \lambda_x(y')\, q(y', y)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_x = \lambda_x Q.$$

Quindi abbiamo mostrato che π_x é distribuzione stazionaria $\forall x \in E$. Se dimostriamo l'unicitá di π_x, allora:

$$\pi_x(y) = \pi_y(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y(T_y)}$$

che é la conclusione del teorema.

2) $!$:

Sia π una distrib. staz. Mostriamo che $\pi(x) > 0 \ \forall x$

Infatti $\exists y$ t.c. $\pi(y) > 0$. Se $x \neq y$, per irriducibilità, $\exists n$ t.c. $Q^n(y,x) > 0 \Rightarrow \pi(x) = \pi Q^n(x)$

$= \sum_{y' \in E} \pi(y') \cdot Q^n(y',x) \geq \pi(y)\, Q^n(y,x) > 0$

Definiamo, per $x \in E$ fissato, $\gamma_x(y) := \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$ e dimostriamo che $\gamma_x(y) = \lambda_x(y) \ \forall (x,y)$ (ciò implica che $\gamma_x(y) \cdot \frac{1}{\sum_y \gamma_x(y)} = \frac{\lambda_x(y)}{\sum_x \lambda_x \gamma_x(y)}$. Ma $\pi(y) = \pi_x(y)$, da cui segue l'unicità. Ci rimane quindi da dim. che $\frac{\pi(y)}{\pi(x)} = \lambda_x(y) = \sum_{s=1}^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_s = y, T_x \geq s)$. Notare che $\gamma_x(x) = \lambda_x(x) = 1$. Mostriamo che $\gamma_x(y) \geq \lambda_x(y) \ \forall x,y$.

Ciò equivale a $\gamma_x(y) \geq \sum_{s=1}^{n} \mathbb{P}_x(X_s = y, T_x \geq s)$.

Induzione su n:

$n = 1)$ ✓

$\gamma_x(y) \geq q(x,y) \Leftrightarrow \pi(y) \geq q(x,y)\pi(x)$ vero ✓

dato che $\pi = \pi Q \Leftrightarrow \pi(y) = \sum_{x'} \pi(x')\, q(x',x)$

$\geq \pi(x)\, q(x,y)$

$n \longrightarrow n+1)$

Ricordiamo che π é stazionaria $\Rightarrow \gamma_x = \gamma_x Q$ cioé

$$\gamma_x(y) = \sum_{y'} \gamma_x(y')\, q(y',y) = q(x,y) + \sum_{y' \neq x} \gamma_x(y')\, q(y',y)$$

$$\geq q(x,y) + \sum_{y' \neq x} \sum_{s=1}^{n} \mathbb{P}_x(X_s = y', T_x \geq s)\, q(y',y)$$

ipotesi induttiva

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{y' \neq x} \mathbb{P}_x(X_s = y', T_x \geq s)\, q(y',y)$$

$$= q(y',y) + \sum_{s=1}^{n+1} \mathbb{P}_x(X_{s+1}=y',\ T_x \geq s+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_x(X_k = y',\ T_x \geq k) \checkmark$$

Ricordando che $\gamma_x(x) = \gamma_x(x)Q$, $\lambda_x Q = \lambda_x$, supponiamo che $\exists y$ t.c. $\gamma_x(y) > \lambda_x(y)$. Definiamo

$\nu(y') := \dfrac{\gamma_x(y') - \lambda_x(y')}{\sum_z \gamma_x(z) - \lambda_x(z)}$ che è una distrib. staz.

$\Rightarrow \nu Q = \nu$. Inoltre, si ha che:

$$\nu(y) > 0,\quad \nu(x) = 0 \quad ⚡ \text{ assurdo !!!}$$

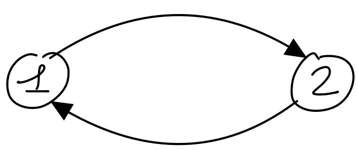
$\Rightarrow \gamma_x = \lambda_x$

$\square$

Convergenza della Distribuzione Stazionaria

Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una CM irriducibile. Sappiamo che $\exists!\ \pi$ distribuzione stazionaria. Se $X_0 \sim \mu_0$ e $\mu_n(x) = \mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = x)$, è vero che $\mu_n \longrightarrow \pi$?

<u>esempio</u>:

$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$  $\Rightarrow \mathbb{P}_1(X_n = 1) = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbb{P}_1(X_n = 1)$ non ammette limite per $n \longrightarrow +\infty$.

Notare che l'unica distribuzione stazionaria è $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

<u>Def.</u> (Insieme dei Periodi - Periodo di uno stato):

Consideriamo una CM con matrice di transizione Q.

Definiamo, fissato $x \in E$, $T(x) := \{n \geq 1 : Q^n(x,x) > 0\}$ l' INSIEME DEI PERIODI DI X. Poniamo inoltre

$d_x :=$ MCD$(T(x))$ il PERIODO DI X.

esercizio:

Se $x \leftrightarrow y$ allora $d_x = d_y$.

$\Rightarrow$ sia $n \in T(x)$. $\exists h, k$ t.c. $Q^h(x,y), Q^k(y,x) > 0$

$\Rightarrow Q^{h+k}(x,x) \geqslant Q^h(x,y)\,Q^k(y,x) > 0 \;\Rightarrow h+k \in T(x)$

Analogamente $Q^{h+k}(y,y) \geqslant Q^k(y,x)\,Q^h(x,y) > 0$

$\Rightarrow h+k \in T(y)$. Si ha quindi:

$$Q^{n+h+k}(y,y) \geqslant Q^k(y,x)\,Q^n(x,x)\,Q^h(x,y)$$

$\Rightarrow n+h+k \in T(y) \;\; \forall n \in T(x) \Rightarrow d_y \mid n+h+k$

Poiché $h+k \in T(y)$, anche $d_y \mid h+k \Rightarrow d_y \mid n$

$\Rightarrow d_y \mid n \;\; \forall n \in T(x) \Rightarrow d_y \leqslant d_x$. Ripetendo lo stesso argomento scambiando x e y si trova $d_x \leqslant d_y$

$\Rightarrow d_x = d_y$

Come conseguenza si ha che in una CM irriducibile tutti gli stati hanno lo stesso periodo.

Def. (Catena aperiodica):

Una CM si dice APERIODICA se $d_x = 1 \;\; \forall x \in E$

Osservazione:

Una CM irriducibile é aperiodica $\Leftrightarrow \exists x \in E$ t.c. $d_x = 1$

Ad esempio, se $Q(x,x) > 0 \Rightarrow d_x = 1$