$\Rightarrow$ Cosa significa $f : X \to Y$ CONTINUA ? (con X, Y insiemi)

$\Rightarrow$ NON BASTA la struttura di insieme, serve una sovrastruttura (detta METRICA) che definisca il concetto di vicinanza tra elementi di un insieme.

N.B.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice CONTINUA in $x \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_x$ t.c. :

$$|y - x| < \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

f si dice globalmente continua se è continua in ogni punto del suo dominio

$\Rightarrow$ Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si estende l'idea precedente mediante il concetto di distanza euclidea

Def. (METRICA):

Sia A un insieme. Si dice METRICA o DISTANZA su A una funzione $d : A \times A \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $d(a, b) = 0 \iff a = b \quad \forall a, b \in A$

2) $d(a, b) + d(a, c) \geq d(b, c) \quad \forall a, b, c \in A$

N.B.

La (2) si dice disuguaglianza triangolare, e in essa è importante l'ordine dei punti di A !!!

<u>Proposizione</u>:

Se d è metrica su A, valgono le seguenti:

1) $d(a,b) \geq 0 \quad \forall a,b \in A$
2) $d(a,b) = d(b,a) \quad \forall a,b \in A$

<u>Dim.</u>

1) Sia la terna di punti di A a, b, c:

$\Rightarrow d(a,b) + d(a,b) \geq d(b,b) = 0$ (def. di METRICA)

$\Rightarrow d(a,b) \geq 0 \quad \forall a,b \in A$

2) Sia la terna di punti di A a, b, a:

$\Rightarrow d(a,b) + \underbrace{d(a,a)}_{=0} \geq d(b,a) \Rightarrow d(a,b) \geq d(b,a)$

Ripeto il procedimento con b, a, b:

$\Rightarrow \underbrace{d(b,b)}_{=0} + d(b,a) \geq d(a,b) \Rightarrow d(b,a) \geq d(a,b)$

$\Rightarrow d(a,b) = d(b,a) \quad \forall a,b \in A$

q.e.d.

$\Rightarrow$ Possiamo quindi definire le proprietà delle metriche:

Proprietà di una METRICA:

1) $d(a,b) = 0 \iff a = b \quad \forall a,b \in A$

2) $d(a,b) = d(b,a) \quad \forall a,b \in A$

3) $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c) \quad \forall a,b,c \in A$

Esempi di METRICA:

1) Metrica Euclidea su $\mathbb{R}^n$:

$$\Rightarrow d_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$\Rightarrow d_e(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

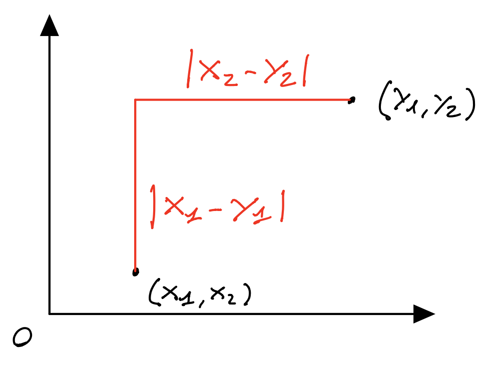
con: $x = (x_1, \dots, x_n), \ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

2) Metrica Taxi / Metrica Manhattan / 1-Distanza:

$$\Rightarrow d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

es. in $\mathbb{R}^2$:



3) p-Metrica / p-Distanza:

Sia $p \in \mathbb{Z}^{>0}$, si definisca la p-metrica come:

$$d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$
$$(x,y) \longmapsto d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$$

N.B.

$p = 1 \Rightarrow d_p$ è la Metrica Taxi

$p = 2 \Rightarrow d_p$ è la Metrica Euclidea

$\Rightarrow$ caso limite:

$p \to +\infty \Rightarrow d_p$ si dice ∞-Distanza e si ha:

$$d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i - y_i| \}$$

4) Metrica discreta:

Dato A insieme qualunque, si può SEMPRE definire su A la metrica discreta:

$$d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Definito il concetto di vicinanza, si può ora definire rigorosamente il concetto di funzione continua tra spazi metrici

<u>Def.</u> (FUNZIONE CONTINUA tra spazi metrici):

Siano (A, d_A), (B, d_B) spazi metrici. Diremo che $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$ è continua in $x \in A$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_x > 0$ t.c.:

$$d_A(x,y) < \delta_x \Longrightarrow d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

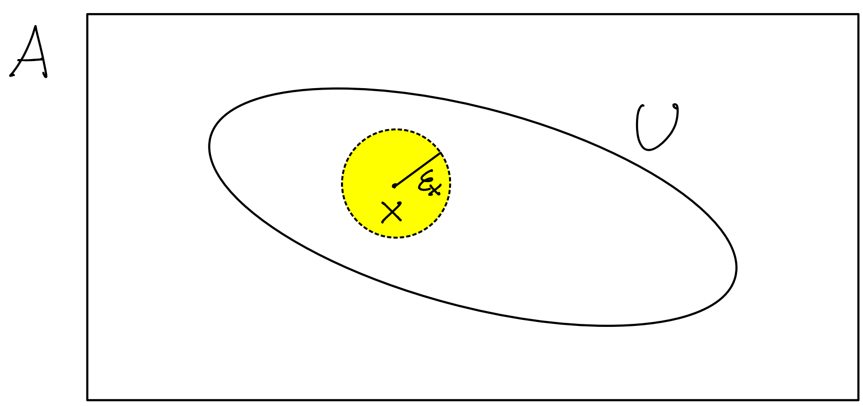
Diremo che f è continua se è continua $\forall x \in A$.

<u>Def.</u> (Insieme aperto in uno spazio metrico):

Un sottoinsieme U di uno spazio metrico (A, d) si dice APERTO se:

$$\forall x \in U \ \exists \varepsilon_x > 0 \text{ t.c.}$$
$$\forall y \in A \text{ con } d(x,y) < \varepsilon_x \text{ si ha } y \in U$$

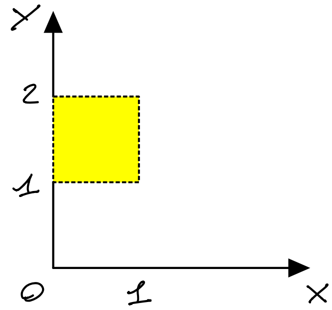
$\Rightarrow$ Schema grafico:



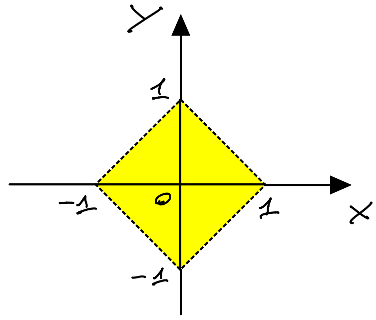
<u>Esempi di Aperti</u>:

Dato lo spazio metrico $(\mathbb{R}^2, d_e)$, si ha:

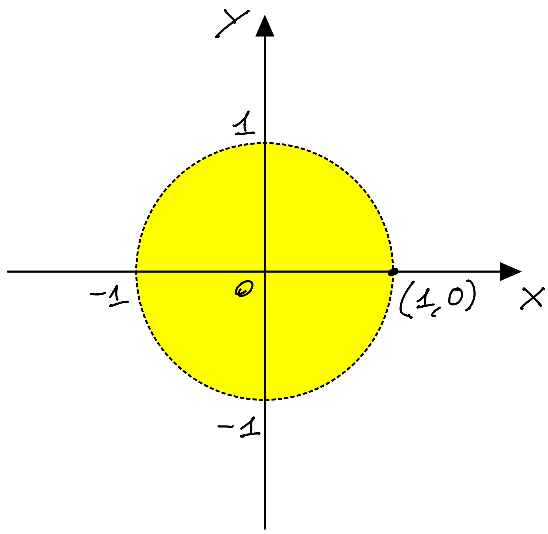
1) $(0,1)\times(1,2)$ è aperto:



2) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|<1\}$ è aperto:



3) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}\cup\{(1,0)\}$



$\Rightarrow$ Consideriamo l'insieme in $(\mathbb{R}^2, d_e)$:

A causa del punto $(1,0)$ l'insieme NON è aperto, infatti:

$$\nexists\ \varepsilon>0 \text{ t.c. } B_\varepsilon((1,0))\subseteq A$$

$\Rightarrow$ Consideriamo l'insieme in $(\mathbb{R}^2, d)$ con d metrica discreta:

$\Rightarrow$ cosa significa $B_\varepsilon((x,y))$ con d ?
Dipende da ε!!!

- Se $\varepsilon \geq 1 \Rightarrow B_\varepsilon((x,y)) = \mathbb{R}^2$
- Se $\varepsilon < 1 \Rightarrow B_\varepsilon((x,y)) = (x,y)$

$\Rightarrow$ Allora l'insieme è aperto: basta scegliere $\varepsilon = \frac{1}{2} < 1$ e ottengo

$$B_{\frac{1}{2}}((x,y)) \subseteq A \quad \forall (x,y) \in A \Rightarrow A \text{ è aperto}$$

N.B.

Dato (X,d) spazio metrico con X insieme, d metrica discreta, si ha che $\forall A \subseteq X$, A è aperto !!!

Proposizione:

Sia F la famiglia degli aperti di uno spazio metrico (A,d). Valgono allora le seguenti proprietà:

1) $\emptyset, A \in F$
2) $A_i, \dots, A_n \in F \Rightarrow \bigcap_i^n A_i \in F$ (Intersezione FINITA)
3) $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq F \Rightarrow \bigcup_i A_i \in F$ (Unione ARBITRARIA)

Dim.

1) si ha che $\forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ e che $\emptyset \in F$

2) Dati $A_1, A_2 \in F \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in F$.

Sia $x \in A_1 \cap A_2$, allora:

1) $x \in A_1$, $\exists\, \varepsilon_1 > 0$ t.c. $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A_1$

2) $x \in A_2$, $\exists\, \varepsilon_2 > 0$ t.c. $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq A_2$

Prendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e ottengo $B_\varepsilon(x) \subseteq A_1 \cap A_2$

3) Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ con $A_i \in F$, si ha:

$$x \in \bigcup_i A_i \Rightarrow \exists\, s \in I \text{ t.c. } x \in A_s$$

$$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_s \text{ t.c. } B_{\varepsilon_s}(x) \subseteq A_s \subseteq \bigcup_i A_i \Rightarrow \bigcup_i A_i \in F$$

q.e.d.

N.B.

In generale, NON è vero che l'intersezione arbitraria di elementi di F appartiene ad F !!!

esempio:

In $(\mathbb{R}, d_e)$ prendiamo $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $n \in \mathbb{Z}^{>0}$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) = \{0\} \notin F \quad (\text{NON è aperto})$$

Esprimiamo ora il concetto di continuità di una funzione in termini di aperti:

Teorema:

$f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ è continua $\Leftrightarrow$ $\forall\, U$ aperto di (M_2, d_2) si ha $f^{-1}(U)$ aperto di (M_1, d_1)

Dim.

($\Rightarrow$): Ipotesi: f è continua in $x \in M_1$

$\Rightarrow$ Sia U aperto in M_2 t.c. $x \in f^{-1}(U)$

$\Rightarrow$ dato che $f(x) \in U$ con U aperto, $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c.

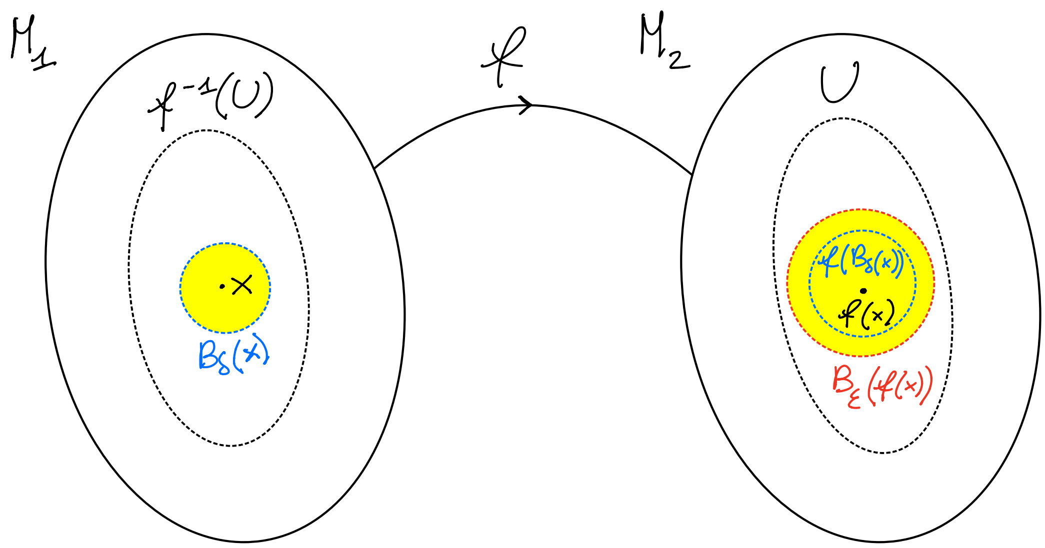
$B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$

$\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ continua} \\ \text{in } x \in M_1}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \delta_x > 0$ t.c. $d_1(x,y) < \delta_x \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\Rightarrow f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U \Rightarrow B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$

$\Rightarrow$ poiché vale $\forall x \in f^{-1}(U)$, $f^{-1}(U)$ è aperto

Schema grafico:



($\Leftarrow$): Ipotesi: $\forall U$ aperto di M_2 si ha $f^{-1}(U)$ aperto di M_1

Sia $x \in M_1$, $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(f(x))$ è aperto in M_2

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ è aperto in M_1 e contiene x

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ t.c. $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ (dalla def. di aperto), cioè: $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. $d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\Rightarrow f$ continua in x, tuttavia ciò vale $\forall x \in M_1$

$\Rightarrow f$ è continua.

q.e.d.