es. 2)

Sia $(\mathbb{R}, \tau_e)$, $\sim$ t.c.

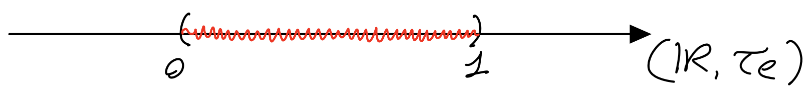
$$x \sim y \iff x = y \ \vee\ x, y \in (0,1)$$

Considero $(\mathbb{R}, \tau_e)/\sim$ con la topologia quoziente.

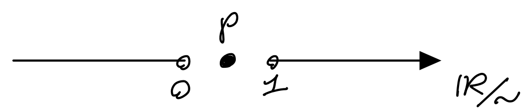
1) Descrivere gli aperti del quoziente

2) Stabilire se $(\mathbb{R}, \tau_e)/\sim$ è T_0, T_1, T_2

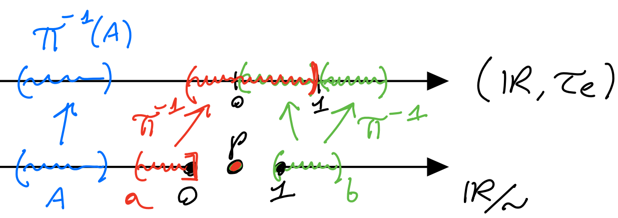
$\Rightarrow$ 1)



$\Rightarrow$ $(\mathbb{R}, \tau_e)/\sim$:



Come sono gli aperti in $(\mathbb{R}, \tau_e)/\sim$?



$\Rightarrow \pi^{-1}(\{p\} \cup (1, b)) = (0, 1) \cup (1, b) \in \tau_e$

$\Rightarrow \pi^{-1}((a, 0] \cup \{p\}) = (a, 1) \in \tau_e$ ✓

$\Rightarrow \pi^{-1}(\{p\}) = (0,1) \in \tau_e$ ✓

$\Rightarrow \{p\}, (a, 0] \cup \{p\}, \{p\} \cup (1, b) \in \tau_{quoziente}$

ecc.

$\Rightarrow$ Ogni aperto che contiene 0 o 1, contiene anche p

$\Rightarrow$ 2)

Se scelgo i punti $0, p$ $\nexists A \in \tau_{quoziente}$ t.c. $0 \in A \wedge p \notin A$ $\Rightarrow$ il quoziente NON è T_1 (e quindi non è nemmeno T_2). É T_0 ?

La coppia 0, p non da problemi, così come 1, p.
Anche 0, 1 sono separabili secondo T_0 ✓
⇒ In tutti gli altri casi (lontano da 0, p, 1) si ha τ_e che è T_0
⇒ Il quoziente è T_0 ✓

es. 8)

Sia $(\mathbb{R}, \tau_e)$, $(\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$ con:

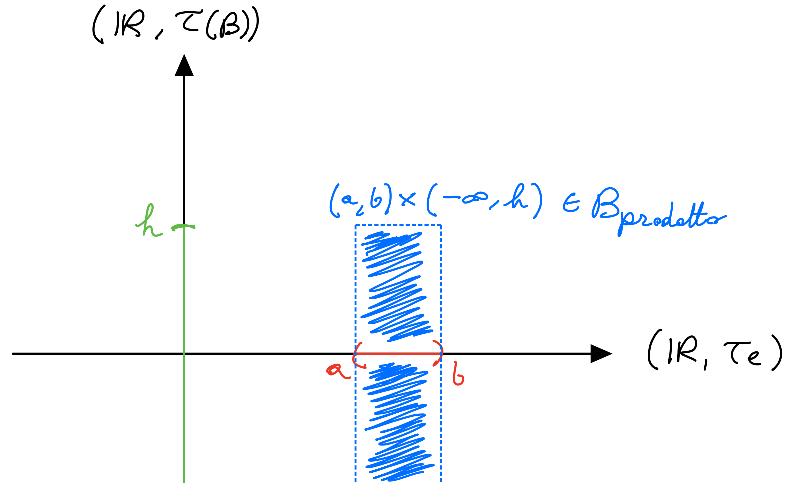
$$\mathcal{B} = \{(-\infty, h) \mid h \in \mathbb{R}\}$$

⇒ Considerare il prodotto $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_{prodotto})$ ed il sottoinsieme $S = [0,1] \times \big((0,2) \cup [3,5]\big) \subseteq X \times Y$ con la topologia indotta da $\tau_{prodotto}$.

1) S è T_2 ?

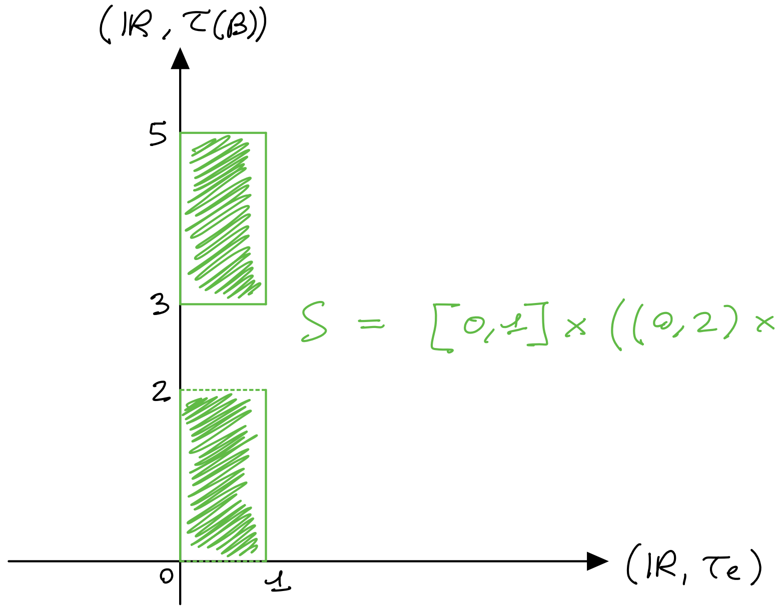
2) S è compatto ?

⇒ 1) Possiamo rappresentare i 2 spazi:



⇒ $\mathcal{B}_{prodotto} = \{(a,b) \times (-\infty, h) \mid a, b, h \in \mathbb{R} \text{ con } a < b\}$

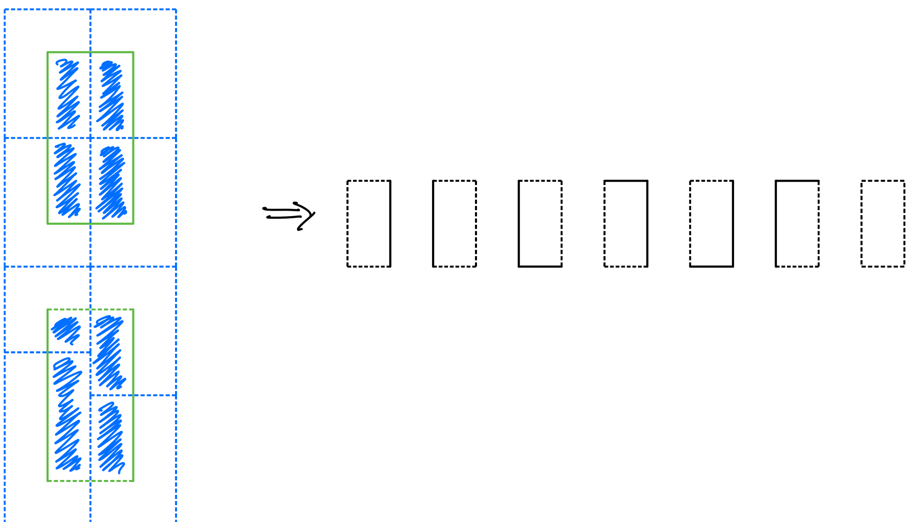
⇒ Rappresento ora S:



$S = [0,1] \times ((0,2) \times [3,5])$

$\Rightarrow$ gli aperti della topologia indotta da $\tau_{prodotto}$ su S sono:

S :

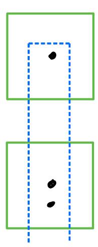


ecc.

S è T_2 (separa i punti con aperti disgiunti): NO!!!

Se 2 punti hanno la stessa coordinata x si hanno problemi:

es.:



$\Rightarrow$ Non posso separarli!!!

$\Rightarrow$ S non è nemmeno T_1 ($\nexists A \in \tau_{indotta}$ t.c. $x \in A \wedge y \notin A$ $\forall x,y \in S$!!!)

2) S è compatto?

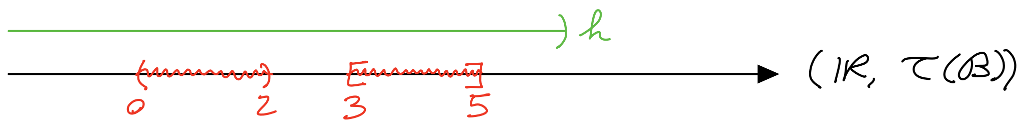
Per Tychonoff il prodotto di compatti è compatto.

$\Rightarrow S = [0,1] \times ((0,2) \cup [3,5])$

$\Rightarrow [0,1]$ è compatto in $(\mathbb{R}, \tau_e)$

$\Rightarrow$ verifico se $(0,2) \cup [3,5]$ è compatto in $(\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$

$\Rightarrow$:



$\Rightarrow$ Sia R ricoprimento aperto di $(0,2) \cup [3,5]$

$\Rightarrow R$ contiene sicuramente 1 aperto non banale (semiretta) che contiene il valore 5

$\Rightarrow$ questa semiretta da SOLA (!!!) copre anche tutto l'insieme $(0,2) \cup [3,5]$ ed è quindi un sottoricoprimento finito !!!

$\Rightarrow (0,2) \cup [3,5]$ è compatto

$\Rightarrow S$ è prodotto di compatti $\Rightarrow S$ è compatto.

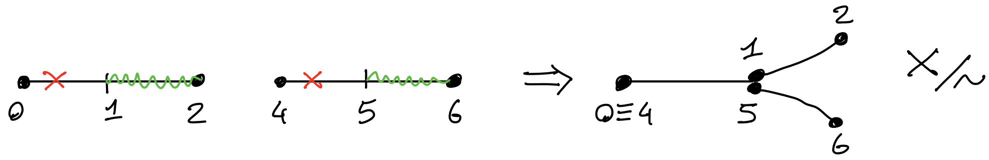
es. 5)

Sia $([0,2] \cup [4,6], \tau_{indotta}) \subseteq (\mathbb{R}, \tau_e)$ e $\sim$ t.c.

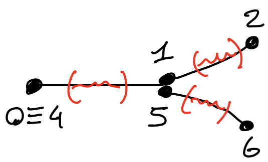
$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y & \text{se } x \in [1,2] \cup [5,6] \\ x = y \ \vee \ y = x+4 & \text{se } x \in [0,1) \\ x = y \ \vee \ y = x-4 & \text{se } x \in [4,5) \end{cases}$$

Stabilire le proprietà di separazione di $X/\sim$

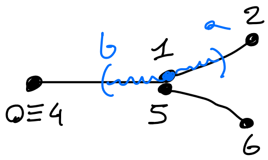
$\Rightarrow$ descrivo prima $X/\sim$:



⇒ Come sono gli aperti di $X/\sim$?



⇒ se $1, 5 \notin A \subseteq X/\sim$, A è aperto.

⇒ 

⇒ se $1 \in (b, a) \subseteq X/\sim$, (b, a) è aperto

⇒ $X/\sim$ non è T_2 : 1 e 5 non sono separabili da 2 aperti disgiunti dato che $\forall A \in \tau_{quoziente}$ t.c. $1 \in A$ $\exists \varepsilon_1 > 0$ t.c. $(1-\varepsilon_1, 1) \subseteq A$ $\wedge$ $\forall B \in \tau_{quoziente}$ t.c. $5 \in B$ $\exists \varepsilon_5 > 0$ t.c. $(1-\varepsilon_5, 5) \subseteq B$ $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

⇒ $X/\sim$ è T_1 :

$\{x\}$ è chiuso $\forall x \in X/\sim$!!!

se $x \in [1, 2] \vee x \in [5, 6]$, $\pi^{-1}(\{x\}) = \{x\} \in \tau_e$

se $x \in [0, 1)$, $\pi^{-1}(\{x\}) = \{x, x+4\} \in \tau_e$

es. 4)

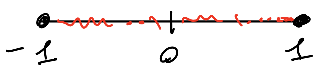
Dato $X = [-1, 1]$ con τ così definita:

$$U \in \tau \iff 0 \notin U \vee (-1, 1) \subseteq U \vee U = \emptyset \vee U = X$$

1) Stabilire le proprietà di separazione

2) (X, τ) è compatto ?

3) (X,τ) è connesso?

$\Rightarrow$  $\sim \in \tau$ $\wedge$ $[-1,1], (-1,1], [-1,1),$
$(-1,1) \in \tau$

$\Rightarrow$ (X,τ) non è T_1:

NON tutti i punti sono chiusi: $\{\frac{1}{2}\} \notin \mathcal{T}$

infatti $\mathcal{C}_X(\{\frac{1}{2}\}) \notin \tau$ perché $0 \in \mathcal{C}_X(\{\frac{1}{2}\})$ $\wedge$ $(-1,1) \not\subseteq \mathcal{C}_X(\{\frac{1}{2}\})$

$\Rightarrow$ (X,τ) è T_0:

Se $x,y \neq 0$, $\{x\},\{y\} \in \tau$ ✓

Se $x = 0 \neq y$, $\{y\} \in \tau$ ✓

(X,τ) è compatto?

$([-1,1],\tau)$ $\Rightarrow$ se R è ricoprimento, almeno 1 dei suoi aperti contiene 0 ($\exists A \in R$ t.c. $0 \in A$)

$\Rightarrow$ tale A è t.c. $(-1,1) \subseteq A$ $\Rightarrow$ devono esistere in R anche 2 aperti che contengono uno -1 e l'altro 1 $\Rightarrow$ $\forall R$ $\exists$ sottoricoprimento finito $\Rightarrow$ (X,τ) compatto.

(X,τ) è connesso?

No, $(-1,1] \cup \{-1\} = X$ e sono 2 aperti disgiunti non banali $\Rightarrow$ (X,τ) non è connesso.

es. 6) Fornire, se possibile, $f:[a,b] \to [c,d)$ continua e suriettiva

$\Rightarrow$ impossibile, $[a,b]$ è compatto, $[c,d)$ non è compatto

es. 13)

Siano $(\mathbb{R}, \tau_e)$, $(\{a,b\}, \tau_{banale})$, $Y = \mathbb{R} \times \{a,b\}$ con $\tau_{prodotto}$

Considerare i 2 sottoinsiemi di Y dati da:

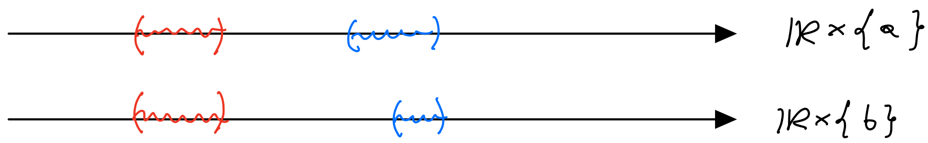
$$R = (-1,1) \times \{a\} \cup [-2,2] \times \{b\}$$
$$S = (-1,1) \times \{a\} \cup (-2,2) \times \{b\}$$

R, S sono compatti? Costruire un cammino in R che congiunga $(0,a)$ a $(0,b)$

1) Compattezza di R, S:

$$Y = \mathbb{R} \times \{a,b\}$$

$\Rightarrow$



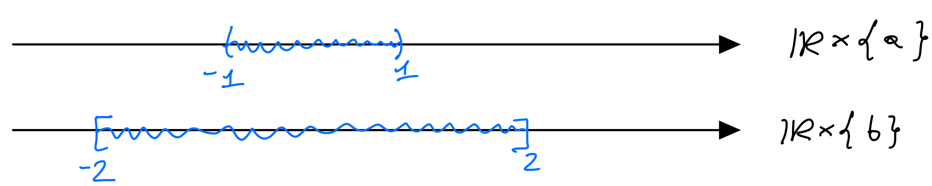
$\Rightarrow$ Gli aperti di $\tau_{prodotto}$ sono sempre in coppia!!!

$\Rightarrow$ I 2 intervalli blu NON formano un aperto!!!

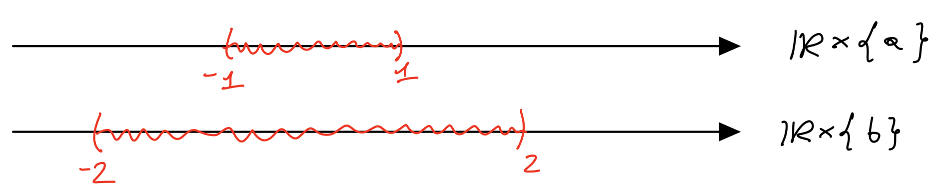
$\Rightarrow$ In definitiva gli aperti sono $A \times \{a,b\}$ con $A \in \tau_e$

Rappresento R, S:

R:



S:



R è compatto: sia $\mathcal{U}$ ricoprimento aperto di R,

allora $\mathcal{U} = \{ A_i \times \{a, b\} \mid A_i \in \tau_e, \, i \in I \}$

$\Rightarrow$ ogni ricoprimento di $[-2, 2] \times \{b\}$ è anche ricoprimento di $(-1, 1)$

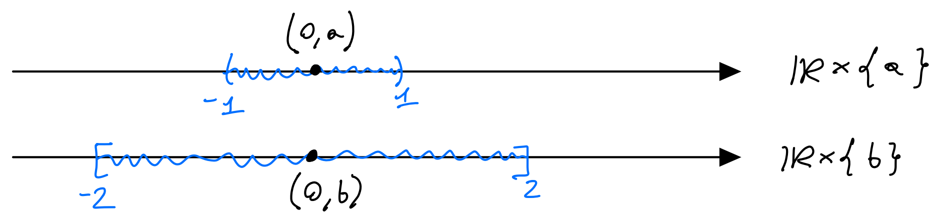
$\Rightarrow$ $\exists$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ per $[-2, 2]$ (e quindi anche per $(-1, 1)$) perché è compatto.

$\Rightarrow$ R è compatto

S non è compatto (perché $(-2, 2)$ non è compatto)

2) Costruire un cammino in R che congiunga $(0, a)$ e $(0, b)$:

R:



$\Rightarrow$ $\alpha : ([0, 1], \tau_e) \to (Y, \tau_{prodotto})$ t.c.

$$\alpha(0) = (0, a)$$
$$\alpha(1) = (0, b)$$

$\Rightarrow$ sia α t.c.:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0, a) & \text{se } t \in [0, 1) \\ (0, b) & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Verifico che α è continua:

$\forall A \in \tau_{prodotto}$ t.c. $(0, a) \in A$, $(0, b) \in A$ e viceversa:

$$\alpha^{-1}(\underset{\in \tau_e}{A'} \times \{a, b\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } 0 \notin A' \\ [0, 1] & \text{se } 0 \in A \end{cases} \checkmark$$

es. 1)

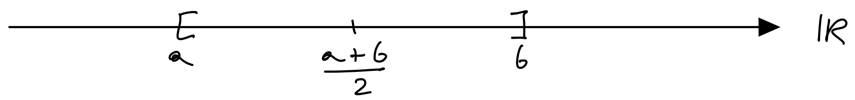
Dato $(\mathbb{R}, \tau_e)$, determinare $Y \subseteq \mathbb{R}$, $Z \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{R}/Y$ sia T_2 e $\mathbb{R}/Z$ non sia T_2 (N.B. $\mathbb{R}/Y$ è lo spazio quoziente)

$\Rightarrow$ Banalmente basta considerare $Y = \emptyset \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}/\emptyset = \mathbb{R}$ che è T_2 ✓

$\Rightarrow$ Altrimenti, si può prendere $Y = [a, b]$:

$Y \subseteq \mathbb{R} \wedge \mathbb{R}/[a,b]$:



$\Rightarrow$ 

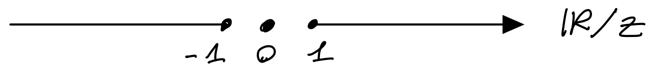
$\Rightarrow$ $\mathbb{R}/Y$ è T_2: nello spazio quoziente, stando lontano dai punti toccati da $\sim$, $\tau_{quoziente}$ si comporta come τ_e (che è T_2). Un aperto contenente $\frac{a+b}{2}$ è della forma $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ che è aperto in τ_e

$\Rightarrow$ È sempre possibile trovare un aperto contenente un punto arbitrario t.c. non intersechi un aperto contenente $\frac{a+b}{2}$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}/Y$ è T_2.

$\Rightarrow$ cerchiamo ora Z t.c. $\mathbb{R}/Y$ non è T_2

$Z = (-1, 1)$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}/Z$: 

$\Rightarrow \nexists$ aperti disgiunti contenenti uno 0 e l'altro 1 / -1

$\Rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ non è T_2.

es. 7)

Consideriamo $(\mathbb{R}, \tau)$ con $\tau = \{(-a, a) \mid a > 0\}$.

Data $S = [0, 1]$ con τ indotta.

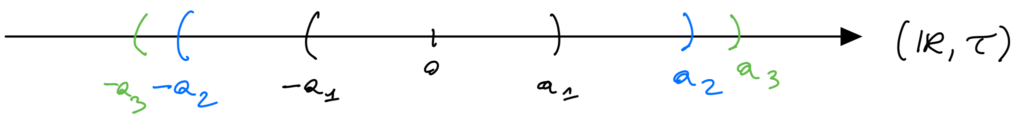
1) Dim. che S è compatto

2) $f: S \to S^1$ con $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ è continua?

3) Data $\sim$ t.c. $x \sim y \iff x = y \vee \begin{cases} x=0 \wedge y=1 \\ \vee \\ x=1 \wedge y=0 \end{cases}$

descrivere τ quoziente su $S/\sim$

$\Rightarrow$ 1) τ è della forma:



$\Rightarrow S = [0, 1] \Rightarrow \tau_{\text{indotta}} = \{[0, a) \mid a > 0\}$

$\Rightarrow \forall \mathcal{R}$ ricoprimento di S, l'unico aperto che contiene $[0,1]$ è l'aperto banale $[0,1]$

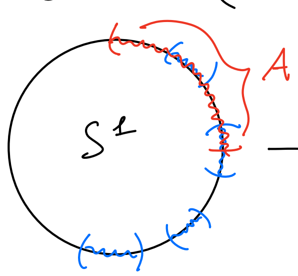
$\Rightarrow [0,1]$ è sottoricoprimento finito di S per $\mathcal{R}$, $\forall \mathcal{R}$

$\Rightarrow S$ è compatto.

$\Rightarrow$ 2) $f: (S, \tau) \longrightarrow (S^1, \tau_e)$

$t \longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

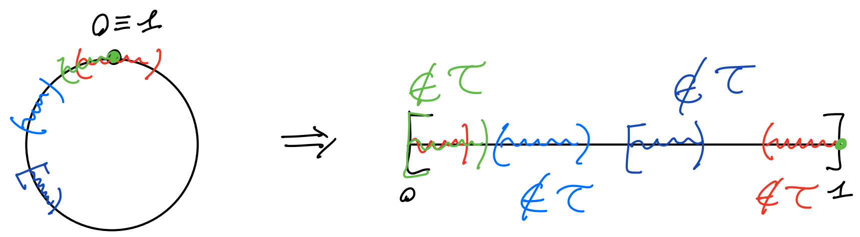
$\rightarrow$



$\longrightarrow$ es. $f^{-1}(A) = (0, \frac{1}{4}) \notin \tau$

$\Rightarrow f$ non è continua.

$\Rightarrow$ 3) $S/\sim$ è :



$$\Rightarrow \tau_{\text{quoziente}} = \tau_{\text{banale}} = \{\emptyset, S/\sim\}$$

es. 9)

Dim. che X è connesso $\Longleftrightarrow \forall f$ continua $: X \to (Y, \tau_{\text{discreta}})$ si ha $f \equiv$ costante

<u>Dim</u>:

$(\Longrightarrow)$ X è connesso $\Rightarrow \nexists A_1, A_2$ aperti disgiunti non banale t.c. $X = A_1 \cup A_2 \Rightarrow f$ è continua $\Rightarrow (Y, \tau_{\text{discreta}})$ è connesso $\Rightarrow \nexists A_1, A_2 \in \tau_{\text{discreta}}$ disgiunti t.c. $Y = A_1 \cup A_2$. Sicuramente $Y = \{y_1\}$ è connesso. Se $|Y| \geq 1$, Y con τ discreta NON può essere connesso (posso considerare $A_1 = \{y_1\}$, $A_2 = Y \setminus A_1$ entrambi aperti non banali disgiunti t.c. $A_1 \cup A_2 = Y$) $\Rightarrow$ se f è continua allora $Y = \{\bar{y}\}$ e quindi $f(x) = \bar{y}$ $\forall x \in X$.

$(\Longleftarrow)$ $f : X \to Y$ continua e costante

Supponiamo X non connesso $\Rightarrow \exists A_1, A_2$ t.c. $A_1 \cap A_2 = \emptyset \wedge A_1 \cup A_2 = X$. Definiamo $\bar{f} : X \to Y$ t.c. $f(x) = y_1$ se $x \in A_1$, $f(x) = y_2$ se $x \in A_2$ con $y_1 \neq y_2$.

$\Rightarrow \bar{f}$ è continua dato che $\bar{f}^{-1}(A) = \phi$ se $y_1, y_2 \notin A$, $\bar{f}^{-1}(A) = X$ se $y_1, y_2 \in A$, $\bar{f}^{-1}(A) = A_i$ se $y_i \in A$ $\wedge$ $y_j \notin A$.

$\Rightarrow$ ↯ assurdo: ogni f continua da X in Y è costante per ipotesi, mentre $\bar{f}$ non lo è.

q.e.d.

es. 11)

Dim che (X, τ_{banale}) è connesso per archi

$\Rightarrow \tau_{banale} = \{\phi, X\}$

$\Rightarrow X$ è connesso per archi se $\forall x, y \in X \; \exists \alpha : [0,1] \to X$ cammino continuo congiungente x a y

$\Rightarrow \forall x, y$ prendo
$$\alpha : [0,1] \to X$$
$$t \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ y & \text{se } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha^{-1}(A) = \phi$ se $A = \phi$, $\alpha^{-1}(A) = [0,1]$ se $A \neq \phi$

$\Rightarrow \alpha$ è continua $\Rightarrow (X, \tau_{banale})$ è connesso per archi.

q.e.d.

es. 12)

Fornire un esempio di insieme X connesso per archi t.c. $\bar{X}$ non sia connesso per archi

$\Rightarrow$ Curva del topologo: $X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow X$ è connesso per archi (è definito mediante una funzione continua).

$\Rightarrow \overline{X} = X \cup \{(0,y) \mid y \in [0,1]\}$

$\Rightarrow \overline{X}$ non è connesso per archi: $\nexists$ cammino continuo da $[0,1]$ in $\overline{X}$ che congiunga $x \in X$ a $y \in \{(0,y) \mid y \in [0,1]\}$

$\Rightarrow \overline{X}$ è connesso per archi, $\overline{X}$ non lo è.