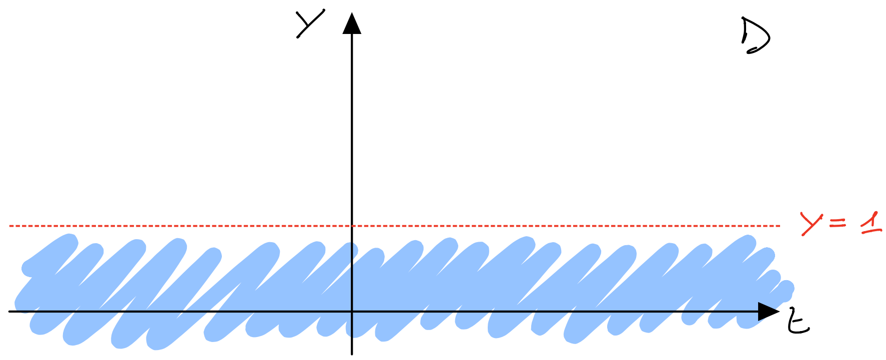
esercizio:

$$\begin{cases} \dot{y} = \log(y-1) \\ y(0) = y_0 \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(t,y) = \log(y-1) \Rightarrow y-1>0 \Rightarrow y>1$

$\Rightarrow D = \{(t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y>1\} \Rightarrow f(t,y) \in C^1(D)$

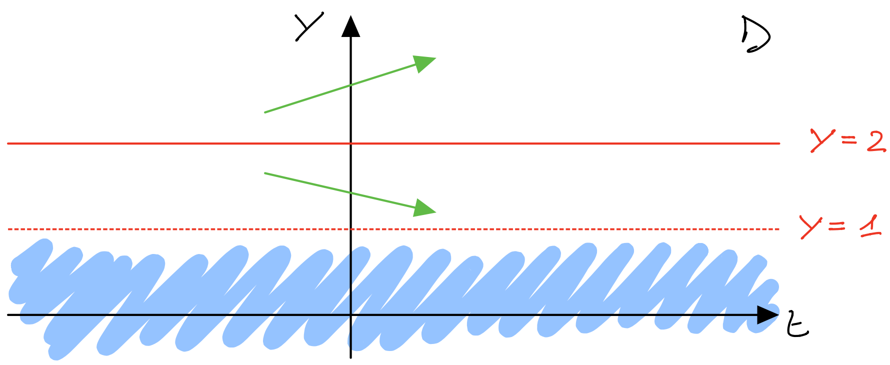


Equilibri:

$$0 = \log(y-1) \iff y = 2$$

Segno di f:

$$f > 0 \iff y > 2$$



Caso $y_0 > 2$:

Per unicità, $y > 2 \quad \forall t > t_0 \in I \Rightarrow y$ crescente

Studiamo l'$\exists$ globale:

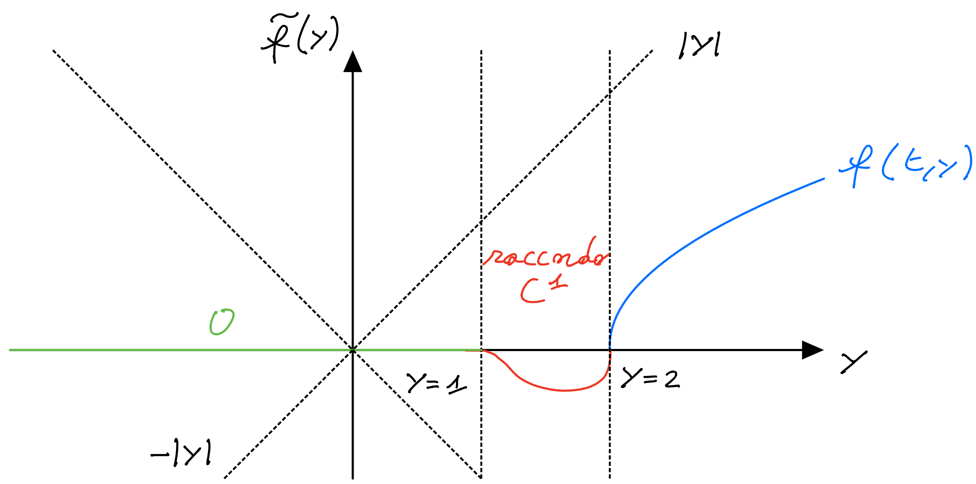
f non è definita su tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ($\log(y-1)$ ha un asintoto verticale in $y=1$), tuttavia i "problemi" singolari per $y \approx 1$, mentre ora siamo nel caso $y_0 > 2$.

$\Rightarrow$ f NON è a crescita al più lineare MA in questo caso possiamo operare nel seguente modo:

definiamo $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.:

$$\tilde{f}(t,y) := \begin{cases} \log(y-1) & \text{se } y \geq 2 \\ 0 & \text{se } y \leq 1 \\ \text{raccordo } C^1 & \text{se } 1 < y < 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ed è a crescita al più lineare in y:



Considero il nuovo PdC:

$$\begin{cases} \dot{y} = \tilde{f}(t,y) \\ y(0) = y_0 > 2 \end{cases} \Rightarrow \text{la soluzione massimale è globale}$$

(Teorema di $\exists$ globale)

$\Rightarrow$ dato che anche il nuovo PdC ha un equilibrio in $y = 2$, per unicità, $\tilde{y} > 2$. Inoltre per $\tilde{y} > 2$ $\tilde{f}(t,\tilde{y}) = f(t,y)$, quindi $\tilde{y} = y$

$\Rightarrow$ per $y_0 > 2$, y è soluzione globale.

Calcoliamo quindi $\lim_{t \to \pm\infty} y$:

$L_- := \lim_{t\to-\infty} y$ $\exists$ (y MONOTONA) $\in \mathbb{R}$ (y LIMITATA: $2 < y < y_0$ $\forall t < 0$

$\Rightarrow \dot{y} = \log(y-1) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \log(L_- - 1)$ è ben definito ($L_- > 2$)

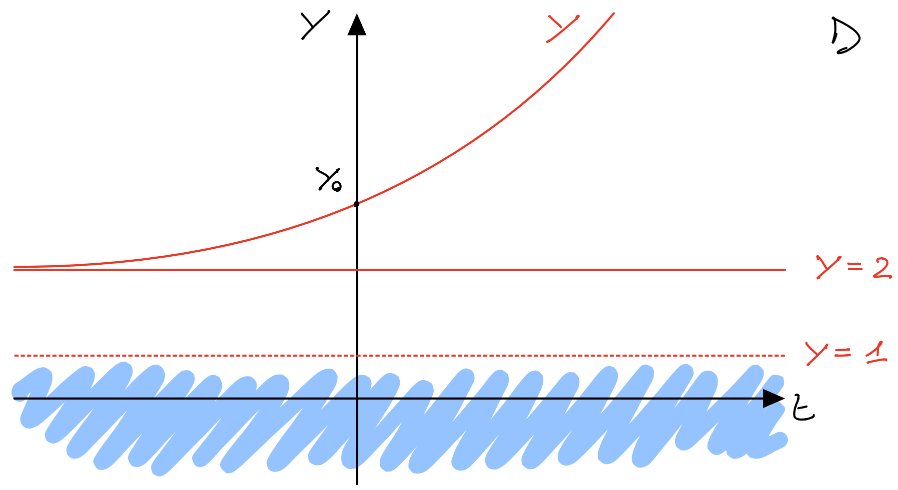
$\Rightarrow$ Per il teorema dell'asintoto $\log(L_- - 1) = 0$

$\Leftrightarrow L_- = 2 = \lim_{t\to-\infty} y$

$L_+ := \lim_{t\to+\infty} y$ $\exists$ (y MONOTONA) MA non è detto che sia finito (NON sappiamo se y è limitata)

$\Rightarrow$ supponiamo $L_+ \in \mathbb{R} \Rightarrow \dot{y} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \log(L_+ - 1)$ ben definito ($L_+ > y_0$)

$\Rightarrow$ dovrebbe essere $\log(L_+ - 1) = 0 \Leftrightarrow L_+ = 2$ $\lightning$ ($L_+ > y_0 > 2$) $\Rightarrow L_+ = +\infty$



<u>Caso $1 < y_0 < 2$:</u>

$\Rightarrow$ y decrescente, MA NON posso applicare il Teorema di $\exists$ globale. y potrebbe "schiantarsi" sul bordo del dominio, oppure potrebbe essere globale con asintoto $y = 1$.

Per $t < 0$, per unicità, $y < 2 \wedge y > y_0$

$\Rightarrow$ y LIMITATA per $t<0$ $\Rightarrow$ y globale su $(-\infty, 0)$

$\Rightarrow$ calcolo $\lim_{t \to -\infty} y =: L_-$ $\exists$ (y MONOTONA) $\in \mathbb{R}$ (y LIMITATA)

$\Rightarrow$ applicando il Teorema dell'asintoto si ha $L_- = 2$

Per $t>0$, dato che non sappiamo nulla su y, applichiamo il Teorema del Confronto:

$$y < y_0 \quad \forall t>0 \Rightarrow \dot{y} = \log(y-1) < \log(y_0 - 1)$$

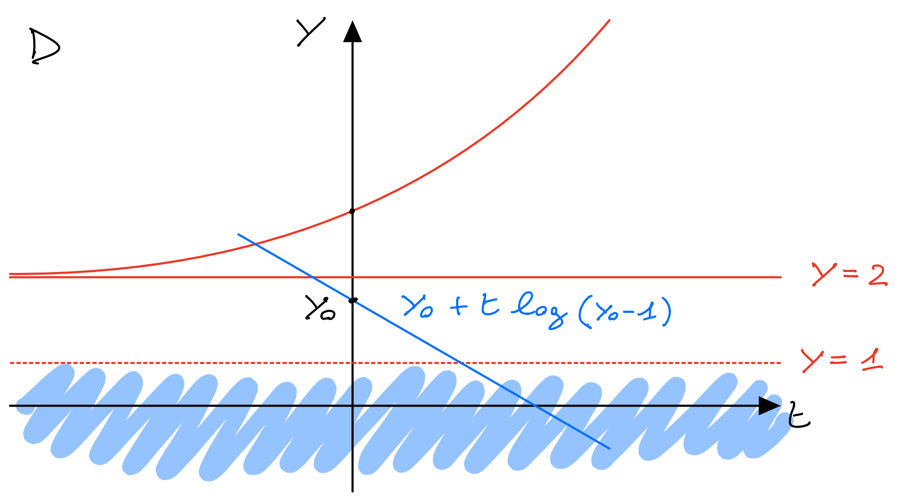
$\forall t>0$ (MONOTONIA di $\log()$)

$\Rightarrow y_0 < 2 \Rightarrow y_0 - 1 < 1 \Rightarrow \log(y_0 - 1) < 0$

Quindi, per $t>0$, si ha:

$$y - y_0 \leq \log(y_0-1)t \Rightarrow y \leq y_0 + t\log(y_0-1)$$

$\Rightarrow$ per $t>0$, y sta tutta sotto una retta passante per $(0, y_0)$ di pendenza negativa $(\log(y_0-1)<0)$

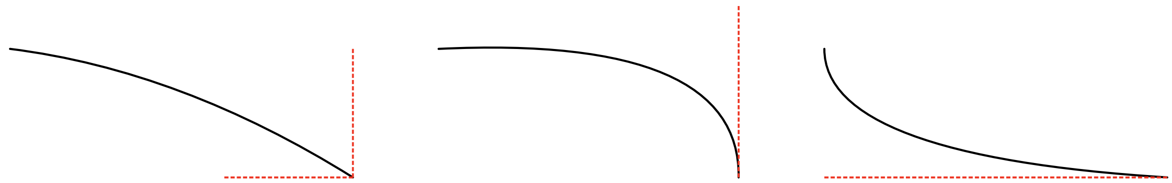


$\Rightarrow$ deve necessariamente essere che y si "schianti" sul bordo di D, ovvero:

$$\exists t^* > 0 \text{ t.c. } \lim_{t \to t_*^-} y = 1$$

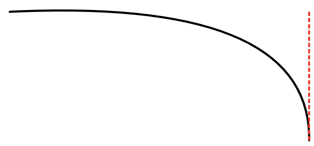
$\Rightarrow$ Calcoliamo la pendenza di y per $t \to t^{*-}$

(potrebbero verificarsi diversi comportamenti):

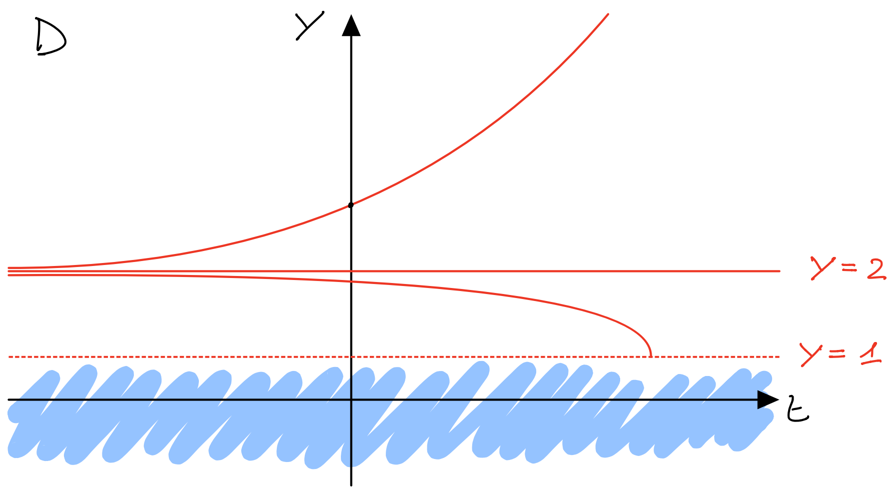


$$\lim_{t \to t^{*-}} \log(y-1) \underset{y \to 1}{=} -\infty$$

$\Rightarrow$ si verifica un comportamento a tangente verticale:



$\Rightarrow$ Possiamo quindi graficare le soluzioni del PdC:



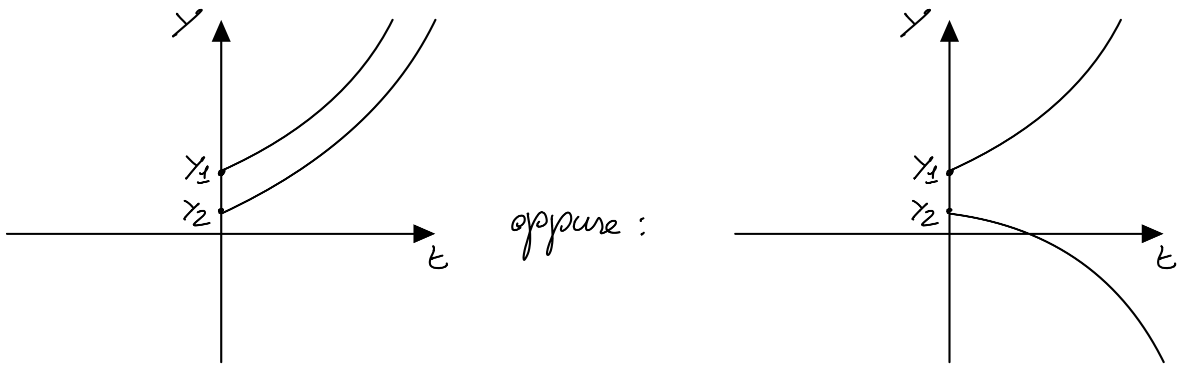
Siano i 2 PdC:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f(t, y_1) \\ y_1(t_0) = y_{1,0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_2 = f(t, y_2) \\ y_2(t_0) = y_{2,0} \end{cases} \qquad \text{con } y_{1,0} \neq y_{2,0}$$

$\Rightarrow$ supponiamo inoltre che $y_{1,0}$ e $y_{2,0}$ siano vicini

$\Rightarrow$ sappiamo, per unicità, che le soluzioni y_1, y_2 NON si intersecheranno mai. Tuttavia, se i dati iniziali sono vicini, è lecito chiedersi se anche le soluzioni continueranno ad essere vicine.

es.



oppure :

Def. (Funzione Lipschitziana):

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice LIPSCHITZIANA IN y (UNIFORMEMENTE IN t) se $\exists L > 0$ t.c. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall y_1 \in \mathbb{R}^n$ $\forall y_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq L \, \| y_2 - y_1 \|$$

Osservazione:

Se f è lipschitziana in y, allora f è a crescita al più lineare in y, infatti:

$$\begin{aligned} \| f(t,y) \| &= \| f(t,y) - f(t,0) + f(t,0) \| \\ &\leq \| f(t,y) - f(t,0) \| + \| f(t,0) \| \\ &\leq L \, \| y \| + \| f(t,0) \| \end{aligned}$$

Non vale il viceversa:

$$f \text{ a crescita al più lineare in } y$$
$$\not\Downarrow$$
$$f \text{ lipschitziana in } y$$

es. di funzione lipschitziana in y non C^1:

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(t,y) = |y|$

$\Rightarrow \ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$

es. di funzione C^1 NON lipschitziana in y

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(t,y) = e^y$

$\Rightarrow$ f non è nemmeno a crescita al più lineare in y, quindi non è sicuramente lipschitziana.

<u>Lemma:</u>

Se $f \in C^1$, si ha che:

f lipschitziana in $y \Leftrightarrow \nabla_y f$ è limitata

dove $\nabla_y f$ è il vettore delle derivate di f rispetto ad y.

<u>Teorema</u> (Di dipendenza continua dai dati iniziali):

Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$ lipschitziana in y.

Allora le soluzioni massimali y_1, y_2 dei 2 PdC (come sopra) sono globali e soddisfano la seguente:

$$\| y_1 - y_2 \| \leq e^{L(t-t_0)} \cdot \| y_{1,0} - y_{2,0} \| \quad \forall t \geq t_0$$

(con $L > 0$ costante di Lipschitzianità per f)

<u>esempi:</u>

PdC 1:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \\ y_1(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_1 = 0$

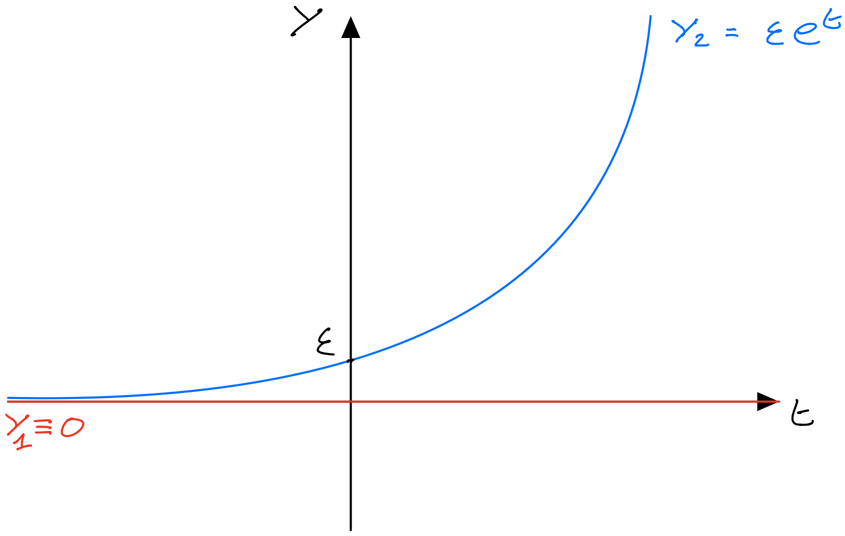
PdC 2:

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = y_2 \\ y_2(0) = \varepsilon > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_2 = \varepsilon e^t$

$\Rightarrow f(t,y) := y$ (in entrambi i casi) è lipschitziana in y di classe C^1 su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |y_1 - y_2| = \varepsilon e^t = e^t |y_{1,0} - y_{2,0}|$$



Dim.:

f ha crescita al più lineare in y $\Rightarrow$ per il Teorema di $\exists$ globale y_1, y_2 sono soluzioni globali.

Definisco la funzione ausiliaria:

$$z(t) := \| y_1 - y_2 \|^2 \in C^\infty$$

$$\Rightarrow \dot{z} = 2 (y_1 - y_2) \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy - Schwarz si ha:

$$\| \dot{z} \| \leq 2 \, \| y_1 - y_2 \| \cdot \| \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \|$$

$$\Rightarrow \| \dot{z} \| \leq 2 \, \| y_1 - y_2 \| \cdot \| f(t, y_1) - f(t, y_2) \|$$

$$\Rightarrow \| \dot{z} \| \leq 2L \, \| y_1 - y_2 \|^2 = 2L \cdot z$$

f lipschitziana in y

$$\Rightarrow z = z_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{z} \, ds \leq z_0 + 2L \int_{t_0}^{t} z \, ds \quad \forall t \geq t_0$$

(dove $z_0 = z(t_0)$)

Per il Lemma di Gronwall si ha:

$$z \leq z_0 e^{2L(t-t_0)}$$

$\Rightarrow \|y_1 - y_2\|^2 \leq e^{2L(t-t_0)} \cdot \|y_{1,0} - y_{2,0}\|^2 \quad \forall t \geq t_0$

$\Rightarrow$ prendendo la radice quadrata ambo i membri si ha la tesi.

q.e.d.

Osservazione:

Vale una stima analoga per il problema all'indietro ($t \leq t_0$):

$$\|y_1 - y_2\| \leq e^{L|t-t_0|} \|y_1(t_0) - y_2(t_0)\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esercizio:

$$\begin{cases} \dot{y} = \log y - t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f = \log y - t$ definita su $D = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > 0\}$ di classe $C^1(D)$, NON è lipschitziana in y NÉ a crescita al più lineare in y.

Equilibri:

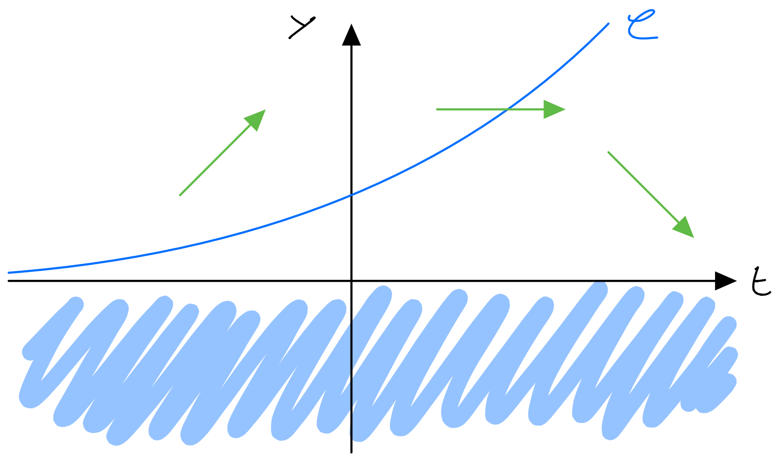
$0 = \log y - t \iff y = e^t \Rightarrow$ NON ci SONO equilibri

$\Rightarrow$ sia $\mathcal{C} = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = e^t\}$ curva isoclina.

(se una soluzione attraversa $\mathcal{C}$, lo fa con tangente orizzontale)

Segno di f:

$f > 0 \iff \log y > t \iff y > e^t$



$\Rightarrow y(0) = 1 \Rightarrow (0,1) \in \mathcal{C} \Rightarrow y$ soluzione del PdC in $t_0 = 0$ avrà tangente orizzontale, inoltre per $t \neq 0$ y non può intersecare nuovamente la curva $\mathcal{C}$

$\Rightarrow y$ interseca $\mathcal{C}$ solo in $y(0) = 1$ $(t = 0)$

Caso $t < 0$:

$\Rightarrow e^t < y \wedge y$ crescente $\Rightarrow e^t < y < y_0 = 1$

$\Rightarrow y$ MONOTONA $\wedge$ LIMITATA $\Rightarrow y$ soluzione globale su $(-\infty, 0]$ (Fuga dai Compatti)

$\Rightarrow L_- := \lim_{t \to -\infty} y \geq 0$

$\Rightarrow$ se fosse $L_- > 0$:

$$\dot{y} \xrightarrow[t \to -\infty]{} L_- + \infty = +\infty \quad \lightning$$

$\Rightarrow L_- = 0$

Caso $t > 0$:

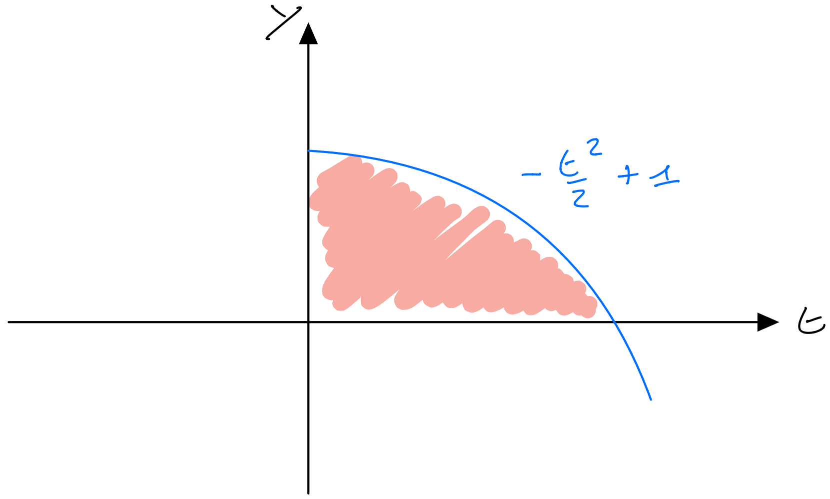
y può essere globale, avere un asintoto (verticale/orizzontale) oppure schiantarsi su ∂D. Applichiamo il confronto:

y decresce $\Rightarrow y \leq 1 \Rightarrow \dot{y} \leq -t$

$\Rightarrow$ Integrando si ha:

$$\int_1^y \dot{y}\,ds = -\int_0^t s\,ds \Rightarrow y - 1 \leq -\frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow y \leq -\frac{t^2}{2} + 1$$



$\Rightarrow \exists\, t^* > 0$ t.c. $\lim_{t \to t^{*-}} y = 0$

(y si "schianta" su ∂D in tempo finito)

Calcoliamo la pendenza in $t \to t^*$

$\Rightarrow \dot{y} = \log y - t \xrightarrow[t \to t^{*-}]{} -\infty - t^* = -\infty$

(y arriva in picchiata a tangente verticale su ∂D)

$\Rightarrow$ Possiamo quindi graficare la soluzione del PdC: