Def. (Superficie Parametrizzata):

Si dice SUPERFICIE PARAMETRIZZATA (o IMMERSA) NELLO SPAZIO è un'applicazione $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \in C^\infty$ con U aperto rispetto a $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$ t.c. $\operatorname{rk}(\operatorname{Jac} \varphi(u,v)) = 2$

N.B.

$$\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))$$

$$\operatorname{Jac} \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(\varphi(U))$ si dice SOSTEGNO DELLA SUPERFICIE PARAMETRIZZATA.

Proposizione:

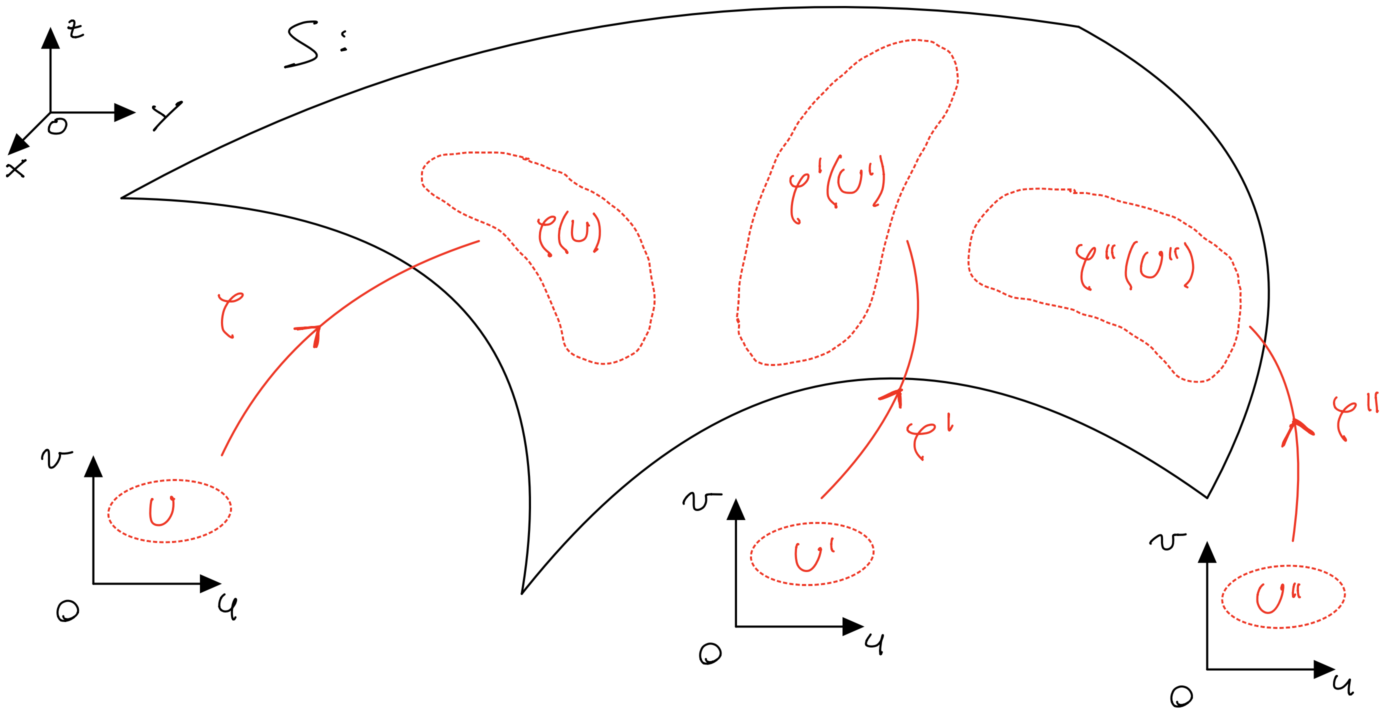
Data $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie parametrizzata, si ha che $\forall (u_0, v_0) \in U \ \exists U_1 \subseteq U$ intorno aperto di (u_0, v_0) t.c. $\varphi : U_1 \to \mathbb{R}^3$ è un omeomorfismo con l'immagine.

Def.

Un sottoinsieme connesso $S \subseteq (\mathbb{R}^3, \tau_e)$ è una SUPERFICIE REGOLARE nello SPAZIO se $\forall p \in S \ \exists \varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ e U aperto in $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$ t.c.:

1) $p \in \varphi(U) \subseteq S$ con $\varphi(U)$ aperto in $\mathbb{R}^3$
2) φ è omeomorfismo con l'immagine
3) $\operatorname{rk}(\operatorname{Jac} \varphi(p)) = 2 \ \forall p \in U$

Rappresentazione grafica:



Def. (Parametrizzazione locale, Coordinate locali, Carta locale):
Data $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regolare nello spazio e l'insieme $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ t.c. $S \subseteq \bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i)$, si danno le seguenti definizioni:

1) ogni mappa φ_i si dice PARAMETRIZZAZIONE LOCALE
2) le coordinate dei parametri $(u, v) \in U_i$ si dicono COORDINATE LOCALI
3) la coppia (U_i, φ_i) si dice CARTA LOCALE

N.B. Se ammettiamo che $\exists p \in S$ t.c. rk Jac $\varphi(p) < 2$, tale p si dice PUNTO SINGOLARE ed S viene detta semplicemente SUPERFICIE (si tratta di una def. meno stringente)

Classificazione di Superfici:

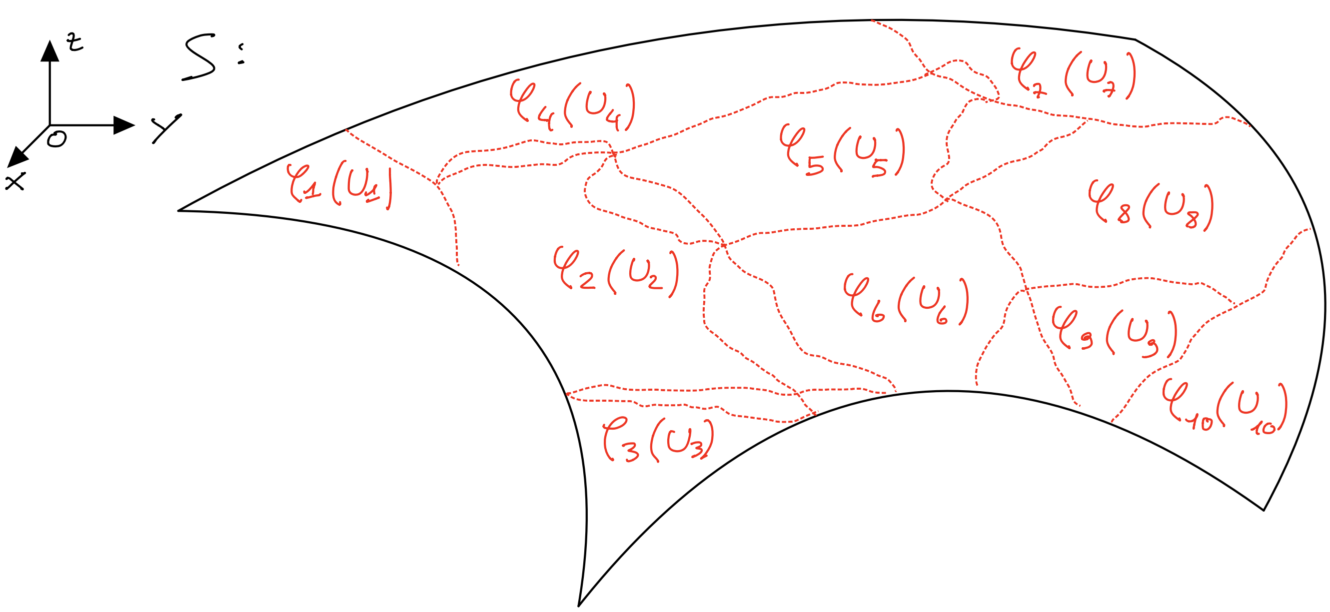
IMMERSIONE LOCALE: S NON presenta punti singolari (S è regolare)

IMMERSIONE: S è un'immersione locale INIETTIVA

IMMERSIONE REGOLARE: S è un'immersione ed è anche un'omeomorfismo con l'immagine. (GLOBALMENTE)

Def. (Atlante di una superficie regolare):
Data $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regolare nello spazio si dice ATLANTE DI S la famiglia $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ di carte locali t.c. $S = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i)$

⇒ Rappresentazione grafica:



⇒ Cosa succede nell'intersezione tra le immagini delle carte locali?

Def. (Atlante Differenziabile):

Un atlante di S si dice DIFFERENZIABILE se $\forall (U, \varphi), (V, \psi)$ coppia di carte locali t.c. $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ si ha che $\exists\, \psi^{-1} \circ \varphi$ DIFFEOMORFISMO di classe C^∞ ($\psi^{-1} \circ \varphi$, $\varphi^{-1} \circ \psi \in C^\infty$ biettive)

Def. (Funzione Differenziabile da S in $\mathbb{R}$):

Una mappa $f: S \to \mathbb{R}$ (con S superficie) si dice DIFFERENZIABILE se $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ atlante differenziabile di S la composizione $f \circ \varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile nel senso classico dell'Analisi 2 (ammette approssimazione con un piano ecc.)

Def. (Funzione Differenziabile da S in S'):

Una mappa $f: S \to S'$ (con S, S' superfici) si dice DIFFERENZIABILE se $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $\forall (V, \psi) \in \mathcal{A}'$ (con $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ atlanti differenziabili di S, S') la composizione $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile nel senso classico dell'Analisi 2 (ammette approssimazione con un piano ecc.)

Def. (Diffeomorfismo tra superfici):

Una mappa continua $f: S \to S'$ (con S, S' superfici) si dice DIFFEOMORFISMO se:

1) f è biettiva
2) f, f^{-1} differenziabili

Def. (Atlante Orientato):

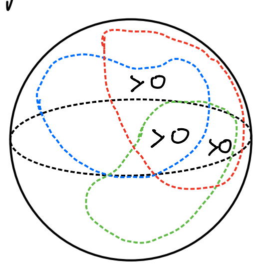
Un atlante differenziabile di S si dice ORIENTATO se $\forall\ (U, \varphi), (V, \psi)$ coppia di carte locali t.c. $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ si ha $\det(\mathrm{Jac}\ \psi^{-1} \circ \varphi) > 0$

Def. (Superficie Orientabile):

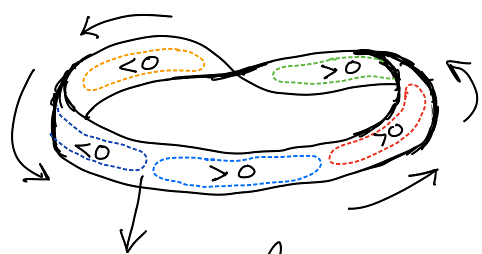
Una superficie differenziabile S si dice ORIENTABILE se ammette un atlante orientato, altrimenti si dice NON ORIENTABILE

Un esempio di superficie orientabile è la sfera, mentre un esempio di superficie non orientabile è il Nastro di Moebius.

1) Sfera:



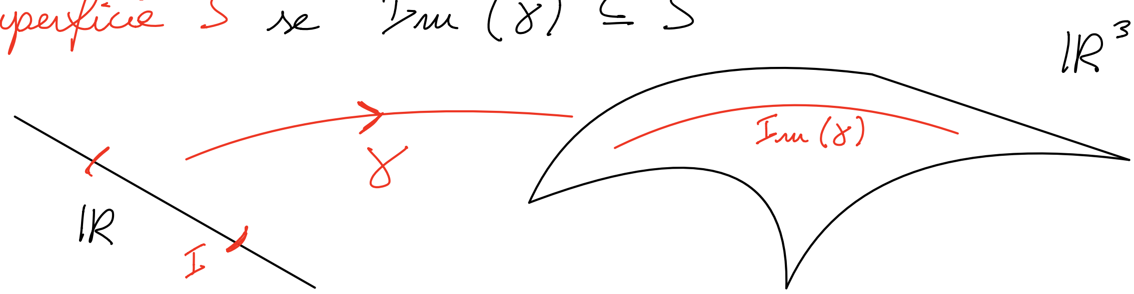
2) Nastro di Moebius:



incongruenza col segno del det. !!!

Def. (Curva di una superficie):

Una curva differenziabile $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice CURVA della superficie S se $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq S$



Come posso scrivere le equazioni di γ? Cerco una carta locale (U, φ) t.c. $\operatorname{Im}(\gamma) \subseteq \varphi(U)$ e ottengo:

$$\varphi = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)) \text{ con } (u,v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to S \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

e quindi:

$$\gamma = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)), \varphi_3(u(t), v(t))) \text{ con } t \in I$$

Def. (Vettore tangente ad S):
Data S superficie differenziabile regolare e $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con $\varphi(u_0, v_0) = p_0$, $(u_0, v_0) \in U$, un vettore si dice VETTORE TANGENTE ad S in p_0 se è tangente ad una curva differenziabile di S passante per p_0

Come possiamo scrivere un vettore tangente?
Date γ, φ come sopra, si ha:

$$\vec{\gamma} = \left(\frac{d\varphi_1}{dt}, \frac{d\varphi_2}{dt}, \frac{d\varphi_3}{dt}\right) \text{ (rispetto alla base canonica)}$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right)}_{X_1}\cdot\frac{du}{dt} + \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right)}_{X_2}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{du}{dt} \cdot X_1 + \frac{dv}{dt} \cdot X_2$ dove X_1, X_2 sono i vettori tangenti alle linee coordinate (vettori che ottengo quando $u \equiv$ costante $\vee$ $v \equiv$ costante).

N.B.
$\mathrm{Jac}\,\varphi = (X_1 | X_2)$, quindi se S è regolare X_1, X_2 sono linearmente indipendenti ($\mathrm{rk}\, \mathrm{Jac}\,\varphi = 2$)

$\Rightarrow X_1, X_2$ definiscono quindi un piano tangente ad S

<u>Def.</u> (Piano tangente ad S e sua base naturale):
Dati p_0 punto regolare di S, X_1, X_2 t.c. $\mathrm{Jac}\,\varphi = (X_1\ X_2)$, si dice che il piano $T_{p_0}(S) = p_0 + \langle X_1, X_2 \rangle$ è il PIANO TANGENTE ad S in p_0 e (X_1, X_2) è la BASE NATURALE per $T_{p_0}(S)$ indotta dalla carta locale (U, φ)

<u>Def.</u> (Vettore normale ad S):
Si definisca il versore $\vec{\nu} = \frac{X_1 \times X_2}{\|X_1 \times X_2\|}$ come il VERSORE NORMALE ad S in p_0

Consideriamo ora il prodotto scalare $\cdot$ indotto dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$ su $T_p(S)$ mediante la MATRICE DI GRAM di (X_1, X_2):

$$G = \begin{pmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 \\ X_1 \cdot X_2 & X_2 \cdot X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

con $g_{ij} = X_i \cdot X_j$

$\Rightarrow$ sia $g = \det G = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0$

N.B.

Spesso G si indica con $G = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ dati $a, b \in T_p(S)$, si ha che:

$$a \cdot b = g_{ij} \cdot a_i \cdot b_j \quad , \quad \| a \| = \sqrt{g_{ij} a_i a_j}$$

Def. (Prima forma quadratica fondamentale S):
Si dice PRIMA FORMA QUADRATICA FONDAMENTALE di una superficie differenziabile S la forma avente matrice associata G rispetto alla base (X_1, X_2):

$$g_{11} \, du^2 + 2 g_{12} \, du \, dv + g_{22} \, dv^2$$

Essa è definita sui vettori tangenti $du \cdot X_1 + dv \, X_2 \in T_p(S)$
Vi sono 2 importanti applicazioni della 1ª forma quadratica di S:

1) Calcolo di lunghezze delle curve di S:
Data S parametrizzata da $\varphi(u,v)$ e $\gamma \subseteq S$ curva parametrizzata di S, si ha:

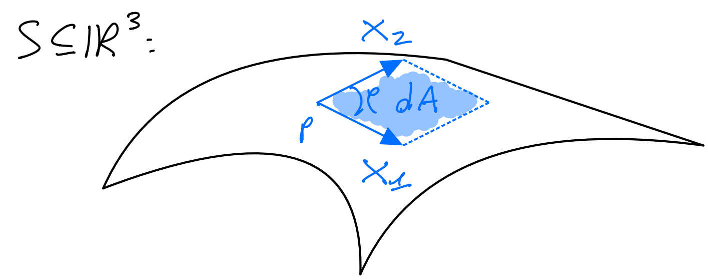
$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3$$
$$(u_1, u_2) \mapsto (\varphi_1(u_1, u_2), \varphi_2(u_1, v_2), \varphi_3(u_1, u_2))$$

$$\gamma : (a, b) \to S$$
$$t \longmapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \cdot (u_i(t), u_j(t)) \cdot \left(\frac{du_i}{dt} \cdot \frac{du_j}{dt}\right)} \, dt$$

2) Calcolo dell'area di S:

Data S si ha:



$$\Rightarrow dA = \|X_1\| \cdot \|X_2\| \cdot \sin\varphi \Rightarrow dA^2 = \|X_1\|^2 \cdot \|X_2\|^2 \cdot \sin^2\varphi$$

$$= \|X_1\|^2 \cdot \|X_2\|^2 \cdot (1 - \cos^2\varphi) = \|X_1\|^2 \cdot \|X_2\|^2 - (\|X_1\| \cdot \|X_2\| \cos\varphi)^2$$

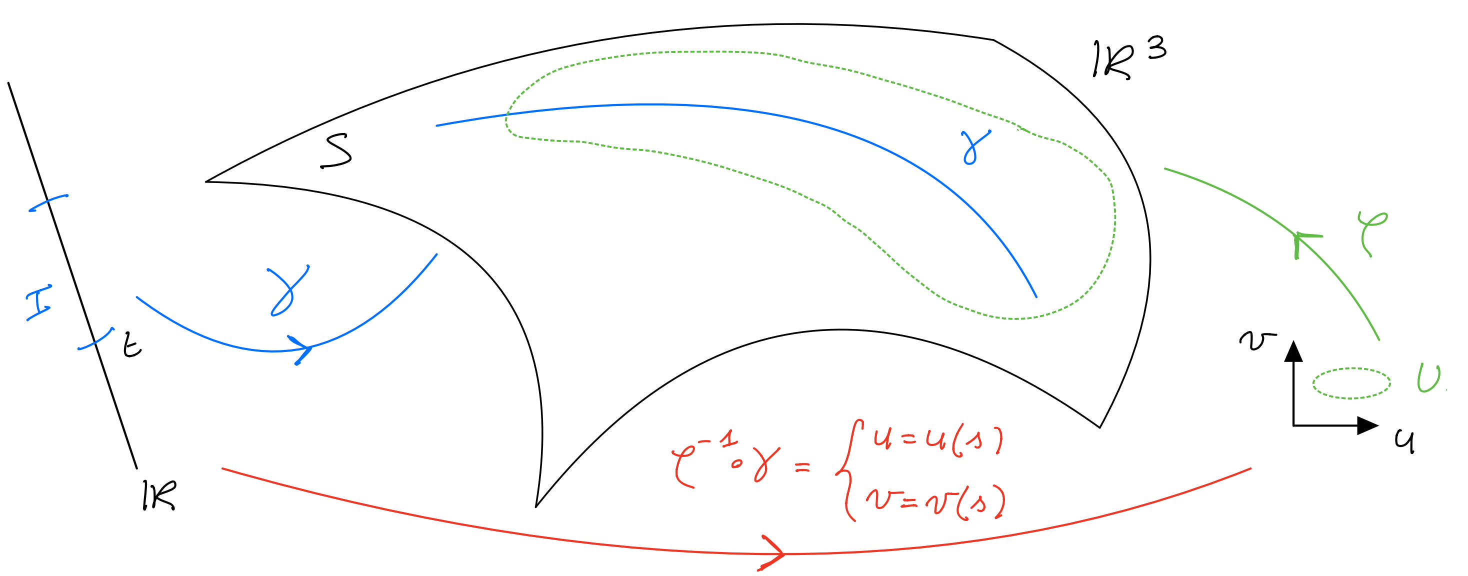
$$= (X_1 \cdot X_1) \cdot (X_2 \cdot X_2) - (X_1 \cdot X_2)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = g$$

$$= \det G \Rightarrow dA = \sqrt{g} \, (>0) = \|X_1 \times X_2\|$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint_{(u,v)} dA \, du dv = \iint_{(u,v)} \sqrt{g} \cdot du dv$$

Studiamo ora 2 tipi di curvatura di una curva su una superficie:

Data $\gamma \subseteq S$ si ha:



$\Rightarrow$ abbiamo già visto che:

$$\vec{\gamma} = X_1 \cdot \frac{du}{ds} + X_2 \cdot \frac{dv}{ds} \quad \text{con } \|\vec{\gamma}\| = 1$$

$\Rightarrow$ Definiamo ora i vettori:

$$X_{ik} := \frac{\partial X_i}{\partial u_k} \implies \text{da Schwarz si ha } X_{ik} = X_{ki} \;\; \forall i,k.$$

$$\Rightarrow X_{11} = \frac{\partial X_1}{\partial u} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u^2} \right)$$

$$\Rightarrow X_{12} = X_{21} = \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial X_2}{\partial u} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u \partial v} \right)$$

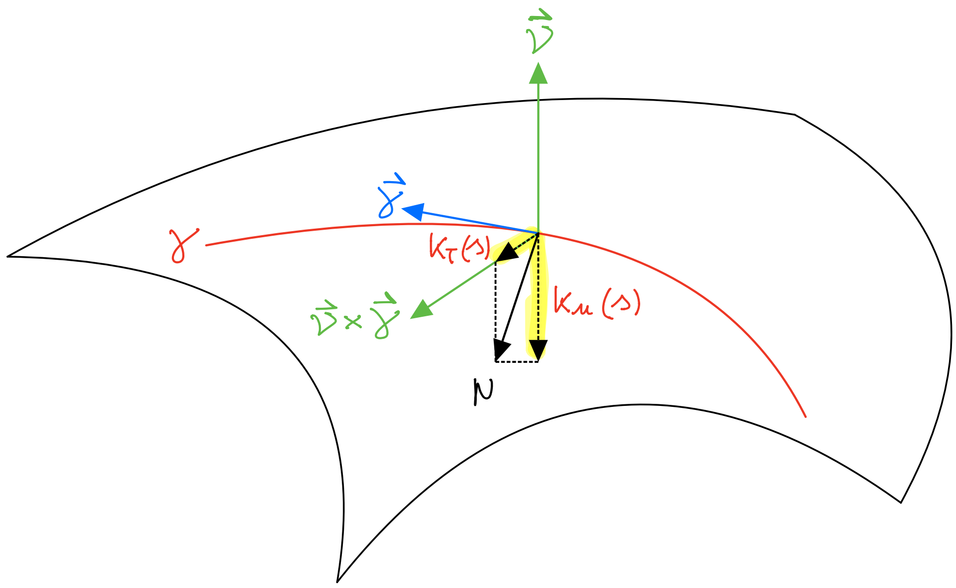
$$\Rightarrow X_{22} = \frac{\partial X_2}{\partial v} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial v^2} \right)$$

$\Rightarrow$ Calcoliamo ora N vettore normale alla curva γ:

$$N = \frac{d\vec{\gamma}}{ds} = \frac{dX_1}{ds} \cdot \frac{du}{ds} + X_1 \cdot \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{dX_2}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + X_2 \cdot \frac{d^2v}{ds^2}$$

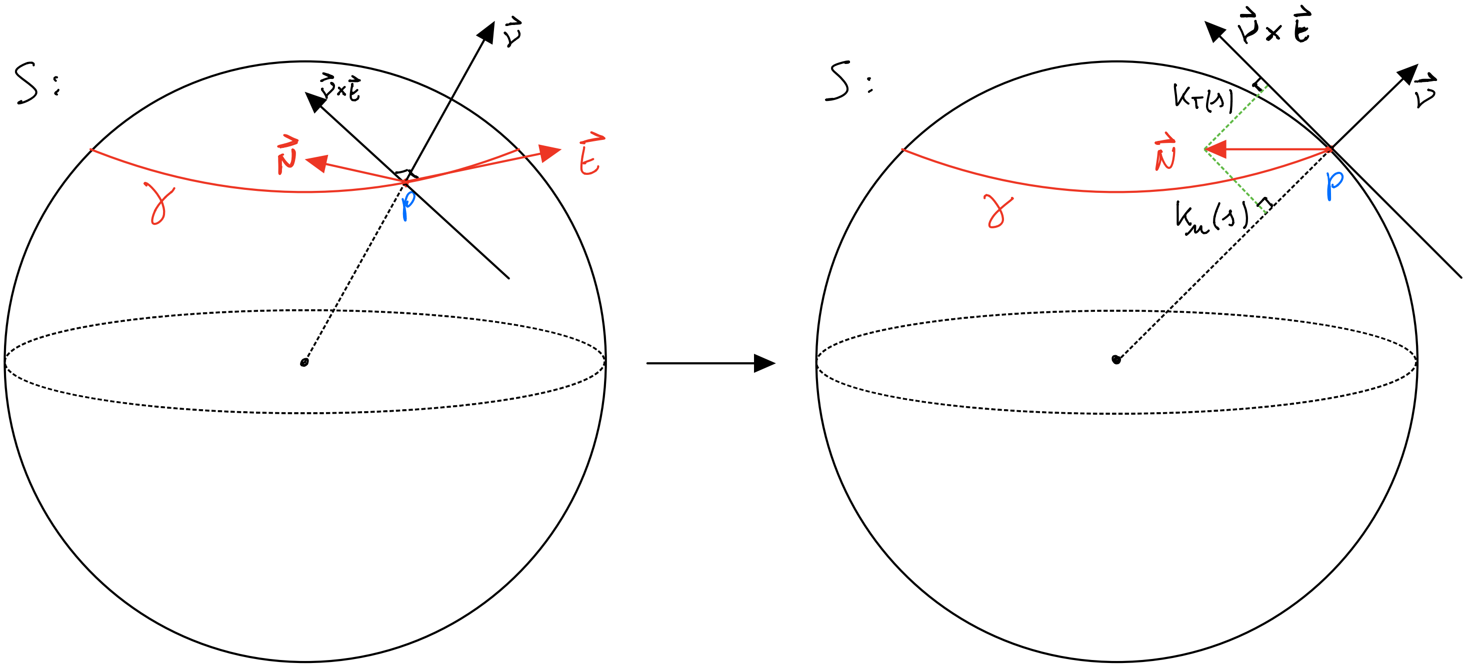
$$= \frac{\partial X_1}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds} \cdot \frac{du}{ds} + X_1 \cdot \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + X_2 \cdot \frac{d^2v}{ds^2}$$

$\Rightarrow$ ovviamente si ha $N \perp \vec{\gamma}$, inoltre:



$$\Rightarrow N = \underbrace{K_n(s)}_{\text{CURVATURA NORMALE}} \cdot \vec{\nu} + \underbrace{K_T(s)}_{\text{CURVATURA GEODETICA / TANGENZIALE}} \cdot (\vec{\nu} \times \vec{\gamma}) \implies K(s) = \pm\sqrt{K_n(s)^2 + K_T(s)^2}$$

esempio nella sfera:



Per calcolare $K_n(t)$, $K_T(t)$, scomponiamo X_{ik} lungo i 3 vettori $X_1, X_2, \vec{\nu}$:

$$X_{ik} = \underbrace{\Gamma_{ik}^{1} \cdot X_1 + \Gamma_{ik}^{2}}_{\text{SIMBOLI DI CHRISTOFFEL DI } 2^a \text{ SPECIE}} + \underset{\text{COEFFICIENTI DI FORMA}}{L_{ik}} \cdot \vec{\nu}$$

$\Rightarrow$ Da Schwarz si ha che $\Gamma_{ik}^{s} = \Gamma_{ki}^{s} \wedge L_{ik} = L_{ki}$

$\Rightarrow$ si ha che:

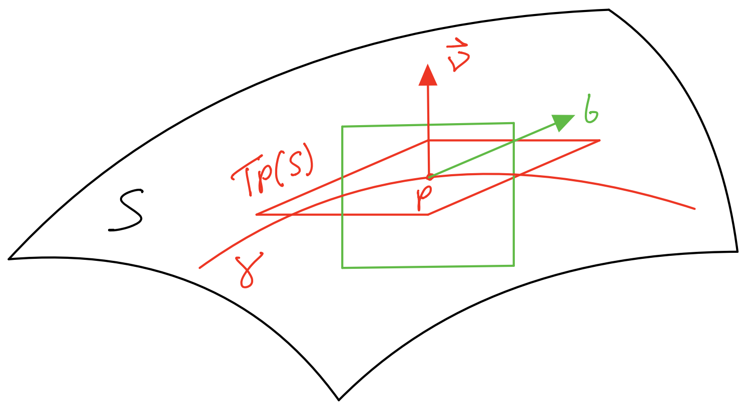
$$L_{ik} = X_{ik} \cdot \vec{\nu} = \frac{X_{ik} \cdot (X_1 \times X_2)}{\sqrt{g}} = \frac{\det \begin{pmatrix} X_{ik} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{g}}$$

$\Rightarrow$ $$K_n(s) = N \cdot \vec{\nu} = L_{ik} \frac{du_i}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds}$$ CURVATURA NORMALE DI $\gamma \subseteq S$

$$= \frac{L_{ik} \frac{du_i}{dt} \cdot \frac{du_k}{dt}}{g_{ik} \frac{du_i}{dt} \cdot \frac{du_k}{dt}}$$ (Parametrizzazione qualunque)

Teorema:

La curvatura tangenziale di una curva $\gamma \subseteq S$ (S superficie) in punto p (non di flesso) è $K(s)\cdot\cos\theta$ dove θ è l'angolo formato dal piano osculatore di γ in p con $T_p(S)$



Dim.:

$$K_T = N\cdot(\vec{\nu}\times\dot{\gamma}) = K\cdot n\cdot(\vec{\nu}\times\dot{\gamma}) = K\cdot(\vec{\nu}\cdot b) = K\cos\theta$$

q.e.d.

Calcolo dei simboli di Christoffel:

1) Simboli di Christoffel di 1ª specie:

$$\Gamma_{iks} := X_{ik}\cdot X_s = \Gamma_{kis}$$

2) Simboli di Christoffel di 2ª specie:

si ha che $X_{ik} = \Gamma_{ik}^{\;1}\cdot X_1 + \Gamma_{ik}^{\;2} X_2 + L_{ik}\cdot\vec{\nu}$

$$\Rightarrow \Gamma_{iks} = \Gamma_{ik}^{\;1} g_{1s} + \Gamma_{ik}^{\;2} g_{2s} = \Gamma_{ik}^{\;h} g_{hs}$$

Definiamo ora la 2ª forma quadratica fondamentale di S:

Def. (Seconda forma quadratica fondamentale S):

Si dice SECONDA FORMA QUADRATICA FONDAMENTALE di una superficie differenziabile S la forma avente matrice associata L rispetto alla base (X_1, X_2)

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow l_{11}\, du^2 + 2 l_{12}\, du\, dv + l_{22}\, dv^2$$

Essa è definita sui vettori tangenti $du \cdot X_1 + dv\, X_2 \in T_p(S)$

Curvature di una superficie:

Def. (Sezioni normali di una superficie in un punto):

Si dicono SEZIONI NORMALI DI S IN p le curve ottenute come intersezione di S con gli infiniti piani contenenti la retta $\perp$ ad S passante per p.

N.B.

Si osserva immediatamente che ogni sezione normale di S è una curva di S, quindi vale la formula per le curvature:

$$N(s) = k(s) \cdot n = k_n(s)\, \vec{v} \Rightarrow k(s) = \pm k_n(s)$$

Teorema:

Sia S superficie regolare, $p \in S$. $\exists$ 2 direzioni in $T_p(S)$ t.c. $k_n(a_1, a_2)$ ha max./min. lungo tali direzioni con $\|(a_1, a_2)\| = 1$. Tali direzioni possono essere scelte $\perp$ tra loro.

Dim.

Dato $a = (a_1, a_2) \in T_p(S)$ so che:

$K_n(a) = L_{ij} a_i a_j$

$\Rightarrow$ se $\|a\| = 1$ si ha $\underbrace{g_{ij} a_i a_j}_{\text{COMPATTO}} = 1$

$\Rightarrow$ K_n è continua $\wedge$ $g_{ij} a_i a_j$ compatta

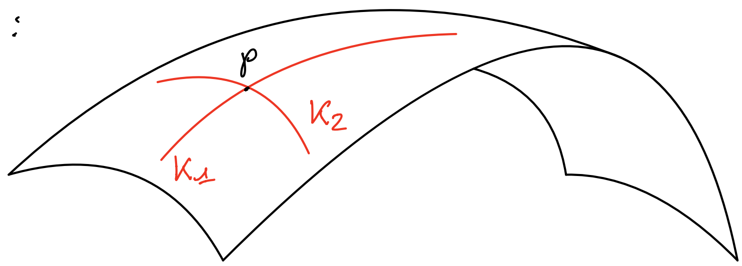
$\Rightarrow$ $\exists$ max / min di K_n lungo le 2 direzioni

q.e.d.

Def. (Curvature principali di S):

Le 2 direzioni del precedente teorema si dicono DIREZIONI PRINCIPALI e le curvature delle rispettive sezioni normali si dicono CURVATURE PRINCIPALI K_1, K_2

S:



N.B

Se $K_n(a_1, a_2) \equiv$ costante in p, allora tutte le direzioni sono principali e p si dice PUNTO OMBELICALE

Proposizione:

K_1, K_2 sono le radici dell'equazione di 2° grado

$$\lambda^2 g - \lambda (g_{11} l_{22} - 2 g_{12} l_{12} + g_{22} l_{11}) + l = 0$$

$$(g = \det G, \ l = \det L)$$

Def. (Curvatura media di S)

La CURVATURA MEDIA di S é:

$$K_m = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{g_{11} l_{22} - 2 g_{12} l_{12} + g_{22} l_{11}}{2g}$$

Def. (Curvatura Gaussiana di S):

La CURVATURA GAUSSIANA di S é:

$$K_s = K_1 \cdot K_2 = \frac{l}{g}$$

I coefficienti della 2ª forma quadratica di S vengono detti "coefficienti di forma" perché descrivono localmente la forma di S. Dato che $g>0$, si ha che $\mathrm{sgn}(K_s)$ dipende esclusivamente da $\mathrm{sgn}(l)$:

$K_s < 0 \iff l < 0$ $\quad$ p è PUNTO IPERBOLICO

$K_s > 0 \iff l > 0$ $\quad$ p è PUNTO ELLITTICO

$K_s = 0 \iff l = 0$
- $\to$ $K_m \equiv 0 \iff l_{is} = 0 \ \forall i,s$ $\quad$ p è PUNTO PIATTO
- $\to$ $K_1 = 0 \wedge K_2 > 0 \ \vee \ K_1 > 0 \wedge K_2 = 0$ $\quad$ p è PUNTO PARABOLICO

Def. (Isometria):

Date S, S' 2 superfici regolari, f una mappa continua da S in S', si dice che f è ISOMETRIA da S in S' se valgono le seguenti:

1) f diffeomorfismo
2) f conserva le distanze:

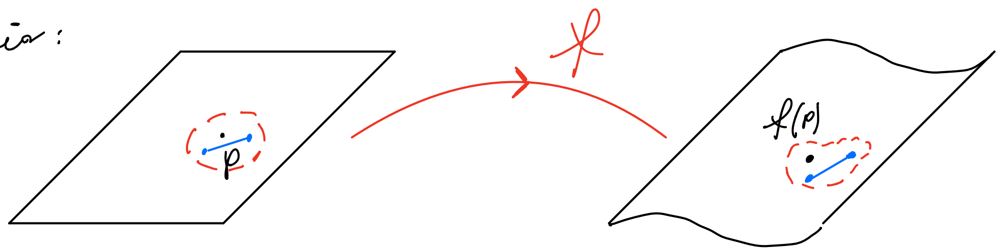
$\forall p, q \in S \quad d_S(p,q) = d_{S'}(f(p), f(q))$

Def. (Isometria locale):

Date S, S' 2 superfici regolari, f una mappa continua da S in S', si dice che f è ISOMETRIA LOCALE se $\forall p \in S$ $f(p) \in S'$ $\exists U, U'$ aperti t.c.:

1) $p \in U$, $f(p) \in U'$, $f(U) \subseteq U'$
2) $f|_U : U \to U'$ è isometria.

esempio:



N.B.
Ovviamente, ogni isometria è isometria locale, MA non vale il viceversa.

Def. (Geodetica):

Data S superficie regolare, una curva $\gamma \subseteq S$ si dice GEODETICA se $K_T \equiv 0$ su γ

N.B.
Le geodetiche sono parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco (a meno di un fattore moltiplicativo)

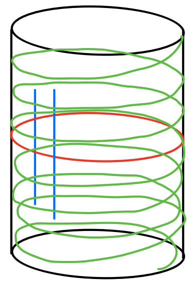
Alcuni esempi di geodetiche:

1) Nel piano, le geodetiche sono i segmenti di retta percorsi a velocità costante

2) Sulla sfera, le geodetiche sono gli archi di cerchio massimo (intersezioni tra la sfera e i piani passanti per il suo centro)

3) Sul cilindro ci sono 3 tipi di geodetiche

1) circonferenze
2) rette verticali
3) eliche



Come possiamo ricavare le equazioni delle geodetiche?

$\Rightarrow$ deve essere $K_T \equiv 0$

$\Rightarrow N = X_{ik} \cdot \frac{du_i}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds} + X_i \cdot \frac{d^2 u_i}{ds^2}$

$\Rightarrow X_{ik} = \Gamma_{ik}^{1} X_1 + \Gamma_{ik}^{2} \cdot X_2 + l_{ik} \vec{\nu} = \Gamma_{ik}^{s} X_s + l_{ik} \cdot \vec{\nu}$

$\Rightarrow K_n(s) = l_{ik} \cdot \frac{du_i}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds}$

$\Rightarrow N = K_n(s) \cdot \vec{\nu} + K_T(s) \cdot (\vec{\nu} \times \vec{\gamma})$

$\Rightarrow N \cdot (\vec{\nu} \times \vec{\gamma}) = K_T(s)$

$$\Rightarrow K_T(s) = \left(X_{ik} \cdot \frac{du_i}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds} + X_i \frac{d^2 u_i}{ds^2} \right) \cdot (\vec{\nu} \times \vec{\gamma})$$

$$= \left[\left(\Gamma_{ik}^{s} X_s + l_{ik} \vec{\nu} \right) \cdot \frac{du_i}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds} + X_i \frac{d^2 u_i}{ds^2} \right] \cdot (\vec{\nu} \times \vec{\gamma})$$

$$= \left(\Gamma_{ik}^{s} X_s \cdot \frac{du_i}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds} + X_s \frac{d^2 u_s}{ds^2} \right) \cdot (\vec{\nu} \times \vec{\gamma})$$

$$= \left(\Gamma_{ik}^{s} \cdot \frac{du_i}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds} + \frac{d^2 u_s}{ds^2} \right) \cdot \left(X_s \cdot (\vec{\nu} \times \vec{\gamma}) \right)$$

$\Rightarrow$ deve essere $K_T(s) \equiv 0$, quindi si ha:

$$\begin{cases} \Gamma_{ik}^{1} \cdot \frac{du_i}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds} + \frac{d^2 u_s}{ds^2} = 0 \\ \Gamma_{ik}^{2} \cdot \frac{du_i}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds} + \frac{d^2 u_s}{ds^2} = 0 \end{cases}$$

Sistema NON LINEARE di equazioni differenziali delle geodetiche della superficie S

$\Rightarrow$ Per i teoremi noti dell'analisi 1/2 $\exists!$ soluzione massimale del sistema, cioè $\exists!$ geodetica massimale passante per $p_0 \in S$ e con vettore tangente $\vec{\gamma_0} \in T_{p_0}(S)$.

<u>Proposizione</u> (Proprietà fondamentale delle Geodetiche):
Data $\gamma \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^3$ (S superficie regolare, γ curva di S), $p, q \in \gamma$. Vale la seguente proprietà:

$$d_S(p, q) = L(\gamma) \text{ (da } p \text{ a } q) \Rightarrow \gamma \text{ è geodetica di } S$$

N.B.
Non vale il viceversa !!!

<u>Teorema</u> (EGREGIUM di Gauss):
Data $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regolare, la curvatura gaussiana di S (K_S) è INVARIANTE per isometrie locali

<u>Dim.</u>
Va mostrato che K_S si può esprimere in funzione dei soli g_{ij} (coefficienti della 1ª forma quadratica)

1) Mostriamo prima che i simboli di Christoffel dipendono solo dai coefficienti g_{ij}

$$\Rightarrow g_{is} = X_i \cdot X_s \Rightarrow \frac{\partial g_{is}}{\partial u_k} = \frac{\partial X_i}{\partial u_k} X_s + X_i \frac{\partial X_s}{\partial u_k}$$

$$= X_{ik} \cdot X_s + X_i \cdot X_{sk} = \Gamma_{iks} + \Gamma_{ski} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ permutando gli indici ottengo 3 equazioni:

$$(1) \quad \frac{\partial g_{is}}{\partial u_k} = \Gamma_{iks} + \Gamma_{ski}$$

$$(2) \quad \frac{\partial g_{ks}}{\partial u_i} = \Gamma_{kis} + \Gamma_{sik} \qquad \text{con: } X_{is} = X_{si}, \quad \Gamma_{isk} = \Gamma_{sik}$$

$$(3) \quad \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_s} = \Gamma_{ksi} + \Gamma_{isk}$$

$\Rightarrow$ $(1)+(2)-(3)$ implica:

$$\frac{\partial g_{is}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_s} = 2\Gamma_{iks}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{iks} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_s}\right)$$

$\Rightarrow$ I simboli di Christoffel di 1ª/2ª specie dipendono quindi dai soli coefficienti metrici (coefficienti della 1ª forma quadratica)

2) Mostriamo ora che $K_s = \frac{\ell}{g}$ si può esprimere in funzione dei soli g_{is}, Γ_{iks}:

$$\Rightarrow \vec{\nu} \cdot X_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial u_k} \cdot X_i + \vec{\nu} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial u_k} = 0$$

$$\Rightarrow \text{sia } \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial u_k} := \vec{\nu}_k \Rightarrow \vec{\nu}_k \cdot X_i + \vec{\nu} \cdot X_{ik} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nu}_k \cdot X_i = -\ell_{ik}$$

$\Rightarrow \quad \vec{\nu}_k \perp \vec{\nu} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nu}_k \in T_p(S) \Rightarrow \vec{\nu}_k = -l_k^1 \cdot X_1 - l_k^2 \cdot X_2$

$\Rightarrow \quad \vec{\nu}_k = -l_k^{\nu} \cdot X_\nu \qquad \nu = 1,2$

$\Rightarrow \quad \vec{\nu}_k \cdot X_i = -l_k^{\nu} \cdot X_\nu \cdot X_i = -l_k^{\nu} g_{\nu i}$

$\Rightarrow -l_{ik} = -l_k^{\nu} g_{\nu i} \quad \Rightarrow \quad l_{ik} = l_k^{\nu} \cdot g_{\nu i}$ con $g_{\nu i} = g_{i\nu}$

$\Rightarrow$ Partiamo ora dalla relazione:

$$X_{ik} = \Gamma_{ik}^1 \cdot X_1 + \Gamma_{ik}^2 \cdot X_2 + l_{ik} \cdot \vec{\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X_{ik}}{\partial u_s} := X_{iks} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\nu}}{\partial u_s} \cdot X_\nu + \Gamma_{ik}^{\nu} \cdot X_{\nu s} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_s} \cdot \vec{\nu} + l_{ik} \cdot \vec{\nu}_s$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\nu}}{\partial u_s} \cdot X_\nu + \Gamma_{ik}^{\nu} \left(\Gamma_{\nu s}^{s} \cdot X_s + l_{\nu s} \cdot \vec{\nu} \right) + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_s} \cdot \vec{\nu} - l_{ik} \cdot l_s^{\nu} \cdot X_\nu$$

$\Rightarrow$ scambiando ν ed s ottengo:

$$X_{iks} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^{\nu}}{\partial u_s} + \Gamma_{ik}^{s} \cdot \Gamma_{ss}^{\nu} - l_{ik} \cdot l_s^{\nu} \right) \cdot X_\nu + \left(\Gamma_{ik}^{s} \cdot l_{ss} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_s} \right) \cdot \vec{\nu}$$

$\Rightarrow$ scambiando i con s ottengo:

$$X_{ski} = \left(\frac{\partial \Gamma_{sk}^{\nu}}{\partial u_i} + \Gamma_{sk}^{s} \cdot \Gamma_{si}^{\nu} - l_{sk} \cdot l_i^{\nu} \right) \cdot X_\nu + \left(\Gamma_{sk}^{s} \cdot l_{si} + \frac{\partial l_{sk}}{\partial u_i} \right) \cdot \vec{\nu}$$

$\Rightarrow X_{iks} - X_{ski} = 0$ (per Schwarz) quindi si ha:

$$0 = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^{\nu}}{\partial u_s} - \frac{\partial \Gamma_{sk}^{\nu}}{\partial u_i} + \Gamma_{ik}^{s} \cdot \Gamma_{ss}^{\nu} - \Gamma_{sk}^{s} \cdot \Gamma_{si}^{\nu} + l_{sk} \cdot l_i^{\nu} - l_{ik} \cdot l_s^{\nu} \right) X_\nu + \left(\Gamma_{ik}^{s} \cdot l_{ss} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_s} - \Gamma_{sk}^{s} \cdot l_{si} - \frac{\partial l_{sk}}{\partial u_i} \right) \cdot \vec{\nu}$$

$\Rightarrow$ dato che $(X_1, X_2, \vec{\nu})$ è una base, deve necessariamente essere:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma_{ik}^{\nu}}{\partial u_s} - \dfrac{\partial \Gamma_{sk}^{\nu}}{\partial u_i} + \Gamma_{ik}^{s} \cdot \Gamma_{ss}^{\nu} - \Gamma_{sk}^{s} \cdot \Gamma_{si}^{\nu} + l_{sk} \cdot l_i^{\nu} - l_{ik} \cdot l_s^{\nu} = 0 \\ \Gamma_{ik}^{s} \cdot l_{ss} + \dfrac{\partial l_{ik}}{\partial u_s} - \Gamma_{sk}^{s} \cdot l_{si} - \dfrac{\partial l_{sk}}{\partial u_i} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la 2^a riga genera le equazioni note come EQUAZIONI DI CODAZZI, mentre dalla 1^a si ottiene:

$$\frac{\partial \Gamma_{ik}^{\nu}}{\partial u_s} - \frac{\partial \Gamma_{sk}^{\nu}}{\partial u_i} + \Gamma_{ik}^{s} \cdot \Gamma_{ss}^{\nu} - \Gamma_{sk}^{s} \cdot \Gamma_{si}^{\nu} + l_{sk} \cdot l_i^{\nu} - l_{ik} \cdot l_s^{\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\nu}}{\partial u_s} - \frac{\partial \Gamma_{sk}^{\nu}}{\partial u_i} + \Gamma_{ik}^{s} \cdot \Gamma_{ss}^{\nu} - \Gamma_{sk}^{s} \cdot \Gamma_{si}^{\nu} = l_{ik} \cdot l_s^{\nu} - l_{sk} \cdot l_i^{\nu}$$

$$\Rightarrow g_{\nu h} \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^{\nu}}{\partial u_s} - \frac{\partial \Gamma_{sk}^{\nu}}{\partial u_i} + \Gamma_{ik}^{s} \cdot \Gamma_{ss}^{\nu} - \Gamma_{sk}^{s} \cdot \Gamma_{si}^{\nu} \right) = g_{\nu h} \cdot \left(l_{ik} \cdot l_s^{\nu} - l_{sk} \cdot l_i^{\nu} \right)$$

$\Rightarrow$ Prendo $i = k = 1$, $s = h = 2$ ed ottengo:

$$g_{\nu 2} \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^{\nu}}{\partial u_2} - \frac{\partial \Gamma_{21}^{\nu}}{\partial u_1} + \Gamma_{11}^{s} \cdot \Gamma_{s2}^{\nu} - \Gamma_{21}^{s} \Gamma_{s1}^{\nu} \right) = g_{\nu 2} \left(l_{11} l_2^{\nu} - l_{12} l_1^{\nu} \right)$$

$$= l_{11} l_{22} - l_{12}^2 = l$$

$$\Rightarrow K_s = \frac{l}{g} = \frac{1}{g} \cdot \left[g_{\nu 2} \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^{\nu}}{\partial u_2} - \frac{\partial \Gamma_{21}^{\nu}}{\partial u_1} + \Gamma_{11}^{s} \cdot \Gamma_{s2}^{\nu} - \Gamma_{21}^{s} \Gamma_{s1}^{\nu} \right) \right]$$

q.e.d.