es. 1)

Scrivere la funzione $\log(z^{\frac{1}{2}})$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ in forma cartesiana

N.B.

$e^z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ è TOTALMENTE CONVERGENTE:

$$\forall R>0 \quad f_n : B_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{z^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

si ha $|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{R^n}{n!} =: M_n \quad \forall z \in B_R(0)$

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n = e^R \underset{\text{(M-test di Weierstraß)}}{\Rightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ converge totalmente

ovvero $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformemente.

Sappiamo inoltre che $e^z \in C^\omega(\mathbb{C}) = \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (è ANALITICA su tutto $\mathbb{C}$, quindi è OLOMORFA su tutto $\mathbb{C}$)

Si ha:

$(e^z)' = e^z$, $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$,

$e^{z+2n\pi i} = e^z \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^z$ NON è INIETTIVA (ma è SURIETTIVA)

$\Rightarrow$ possiamo quindi definire la FUNZIONE POLIDROMA (o MULTIFUNZIONE) $\log : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$

$\Rightarrow$ si ha:

$$e^{\log z} = z, \quad \log(e^z) = z + 2\pi i \mathbb{Z}$$

Scriviamo quindi:

$$\log z = \log(|z| \cdot e^{i\arg z}) = \log|z| + \log e^{i\arg z}$$

$= \log|z| + i \arg z$ dato che $\arg z$ è anch'essa una multifunzione $\arg : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita come:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + 2\pi i\mathbb{Z} & \text{se } \operatorname{Re} z \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi i \mathbb{Z} & \text{se } \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi i \mathbb{Z} & \text{se } \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

Notiamo che:

$$\log z \Big|_{\mathbb{R}>0} = \log z \,, \quad \log z\Big|_{\mathbb{R}<0} = \log(-z) + i(\pi + 2k\pi)$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad = \left(\log(-z) + i\pi\right)_{2\pi i \mathbb{Z}} \quad \text{dove } 2\pi i \mathbb{Z} \leqslant (\mathbb{C}, +, 0)$$

Calcoliamo quindi:

$$z^{\frac{1}{2}} := e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}\log|z| + \frac{i}{2}\arg z} = e^{\frac{1}{2}\log|z|} \cdot e^{\frac{i}{2}\arg z}$$

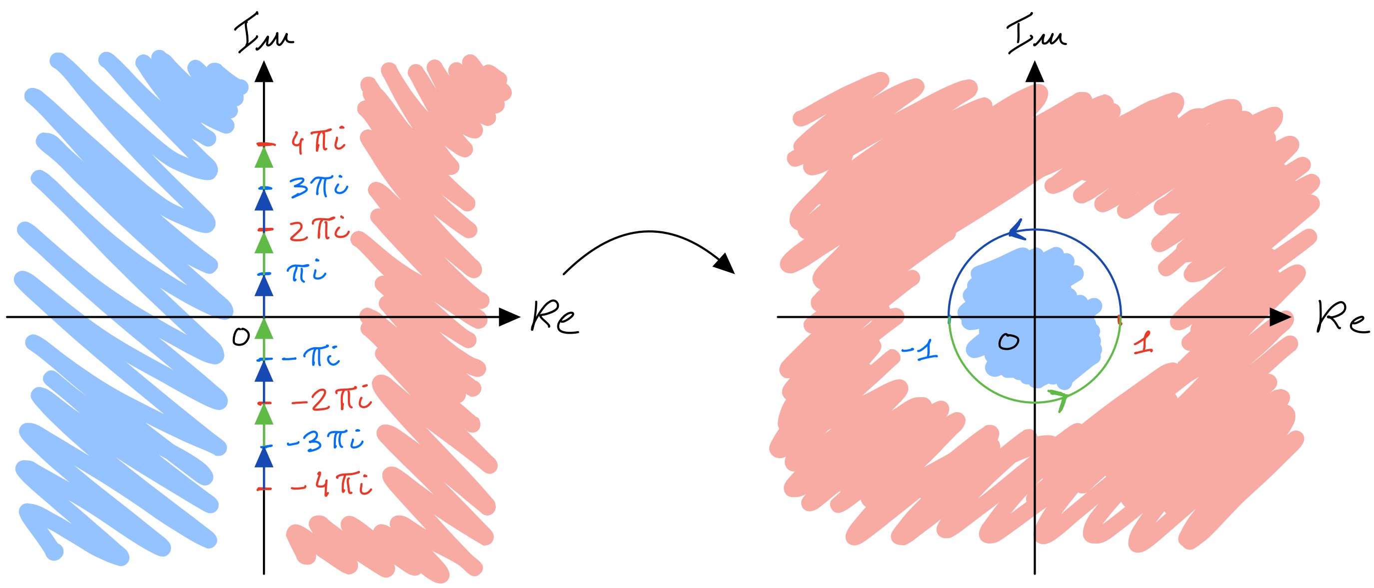
$$= |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\arg z}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z^{\frac{1}{2}}| = |z|^{\frac{1}{2}} \\ \arg(z^{\frac{1}{2}}) = \frac{\arg z}{2} \end{cases} \Rightarrow \log z^{\frac{1}{2}} = \log|z|^{\frac{1}{2}} + i \arg z^{\frac{1}{2}}$$

$$= \boxed{\log|z|^{\frac{1}{2}} + \frac{i}{2}\arg z} = \frac{1}{2}\left(\log|z| + i\arg z\right) = \frac{1}{2}\log z$$

N.B.

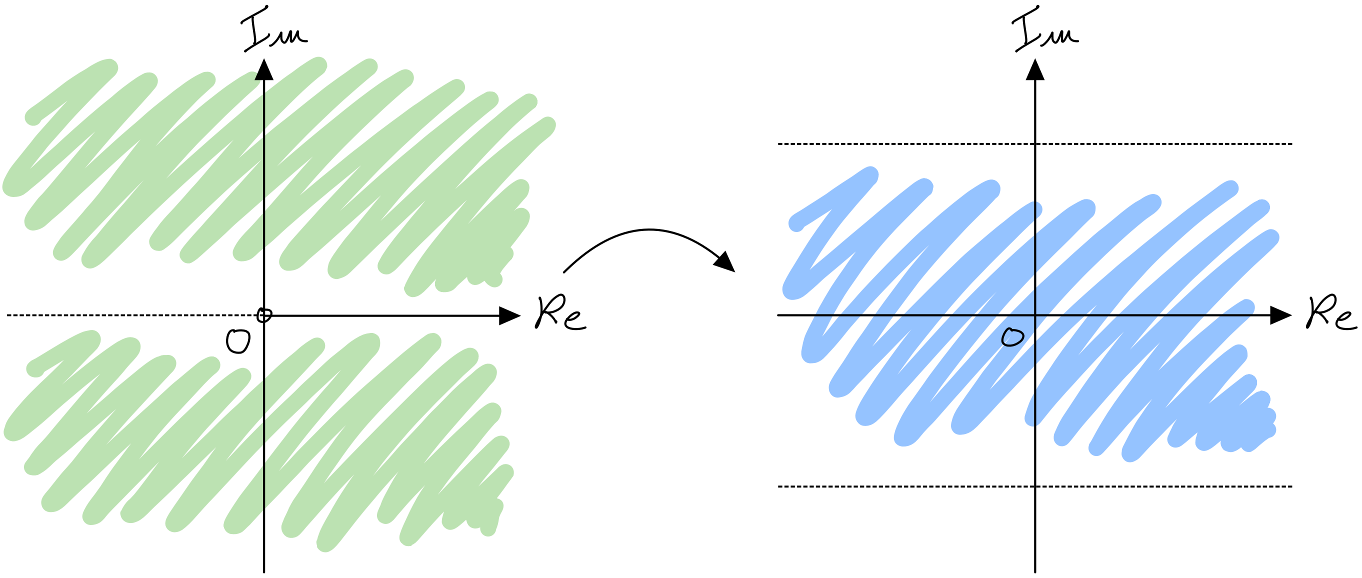
Si definisce $z^{\alpha} := e^{\alpha \log z} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$



es. 2)

$\operatorname{Log} z := \log|z| + i \operatorname{Arg} z : \mathbb{C} \setminus \{ \operatorname{Re}(z) \leq 0 \} \longrightarrow \mathbb{R} \times (-i\pi, i\pi)$,

$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$



Calcolare il valore $(1-i)^{4i}$ in forma cartesiana

$\Rightarrow \quad (1-i)^{4i} = e^{4i \log 1-i}$

$\Rightarrow \quad Vp\,(1-i)^{4i} = e^{4i \operatorname{Log} 1-i} \underset{\substack{\uparrow \\ |1-i| = \sqrt{2}}}{=} e^{4i(\log\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4})}$

(valore principale)

$= e^{\pi + (2\log 2)i} = e^{\pi} \cdot e^{i \log 4} = e^{\pi}(\cos(\log 4) + i \sin(\log 4))$

---

es. 3)

$\cos z := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Si ha:

$\cos z\big|_{\mathbb{R}>0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in C^{\omega}(\mathbb{R})$ ovvero:

$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \ \cos x \equiv T_{x_0}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \dfrac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in I_{x_0}$ intorno di x_0

dove $T_{x_0}(x)$ è la SERIE DI TAYLOR centrata in x_0

Analogamente vale anche per $\sin z\big|_{\mathbb{R}>0}$.

Si ha che $\sin z, \cos z \in C^{\omega}(\mathbb{C}) = \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

$\Rightarrow$ scrivere $\sin z$, $\cos z$ in forma cartesiana:

$$z = x+iy \Rightarrow \sin z = \sin(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$$

con $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x - e^{y}\left(\cos(-x) + i\sin(-x)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\cos x\left(e^{-y} - e^{y}\right) + i\sin x\left(e^{-y} + e^{y}\right)\right)$$

$$\frac{1}{i} = -i \longrightarrow = \frac{1}{2}\left(-i\cos x\left(e^{-y} - e^{y}\right) + \sin x\left(e^{-y} + e^{y}\right)\right)$$

$$= \sin x \cdot \underbrace{\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}}_{\cosh y} + i\cos x \cdot \underbrace{\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}}_{\sinh y}$$

$$= \boxed{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}$$

$\Rightarrow$ analogamente:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \boxed{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

N.B.

Si definiscono:

$$\cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

---

es. 4)

Studiare il luogo degli zeri di $\sin z$, $\cos z$

$\sin z = 0$, $z \in \mathbb{C}$ $\left(\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi\mathbb{Z} \quad (x \in \mathbb{R})\right)$

<u>1° Metodo:</u>

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0$$

$$\Leftrightarrow w - \frac{1}{w} = 0, \quad w := e^{iz} \neq 0 \Leftrightarrow w^2 - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow \ w = \pm 1 \ \Leftrightarrow \ e^{iz} = \pm 1$

$\Rightarrow \ e^{iz} = 1 \ \Rightarrow \ z \in 2\pi\mathbb{Z}, \ e^{iz} = -1 \ \Rightarrow \ z \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$

Il luogo degli zeri di $\sin z$ è $\pi\mathbb{Z}$

<u>2° Metodo:</u>

$\sin z = 0 \ \Leftrightarrow \ \sin(x+iy) = 0 \Leftrightarrow \ \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cosh y = 0 & \Leftrightarrow \ \sin x = 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \pi\mathbb{Z} \\ \cos x \sinh y = 0 & \Leftrightarrow \ y = 0 \vee x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \ x \in \pi\mathbb{Z} \wedge y = 0 \ \Leftrightarrow \ z \in \pi\mathbb{Z}$

Per $\cos z$, sfruttiamo il seguente espediente:

$\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{\pi}{2} - z \in \pi\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \ z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

Il luogo degli zeri di $\cos z$ è $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

---

es. 5)

Sappiamo che in $\mathbb{R}$ si ha $|\sin x|, |\cos x| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

In $\mathbb{C}$ ciò NON avviene:

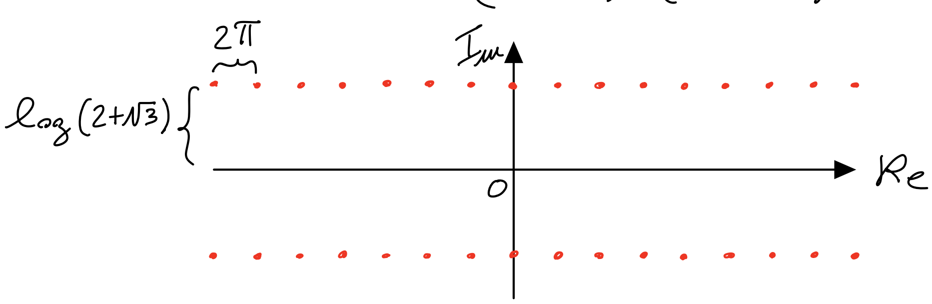
$\cos z = 2 \ \Leftrightarrow \ \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow \ e^{iz} + e^{-iz} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \ w^2 - 4w + 1 = 0, \ \ w := e^{iz} \ \Leftrightarrow \ e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \ iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) = \log(2 \pm \sqrt{3}) + i 2\pi\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \ z = 2\pi\mathbb{Z} - i \log(2 \pm \sqrt{3}) = 2\pi\mathbb{Z} \pm i \log(2+\sqrt{3})$

$(2-\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^{-1}$



es. 6)

Mostrare che, dato $K \in \mathbb{R}$ con $|K| \leq 1$, si ha:

$$\begin{cases} \cos z = K \\ \sin z = K \end{cases} \iff \begin{cases} \cos z \big|_{\mathbb{R}} = K \\ \sin z \big|_{\mathbb{R}} = K \end{cases}$$

Dim.:

1) $\sin z = K$:

$$\Rightarrow \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = K$$

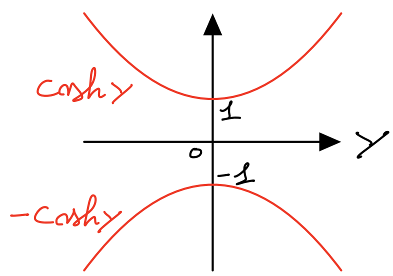
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x \cosh y = K \\ \cos x \sinh y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dots \\ x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \vee y = 0 \end{cases}$$

se $y = 0$:

$$\sin x \cosh y = \sin x = K$$

se $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \cosh y = K, \ x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \\ -\cosh y = K, \ x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$



$\Rightarrow \cosh y = K$ NON HA SOLUZIONE se $|K| < 1$

$\Rightarrow -\cosh y = K$ NON HA SOLUZIONE se $|K| < 1$

$\Rightarrow \cosh y = K$ ha soluzione $y = 0$ se $K = 1$, NON HA SOLUZIONE se $K = -1$

$\Rightarrow -\cosh y = K$ ha soluzione $y = 0$ se $K = -1$, NON HA SOLUZIONE se $K = 1$

$$\Rightarrow |K| \leq 1 \Rightarrow \boxed{\sin x = K, \ y = 0}$$

$\square$

es. 7)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso e sia $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa su Ω. Dim. che $|f|$ costante $\Rightarrow$ f costante

<u>Dim.</u>:

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, $u,v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in C^\infty(\Omega)$

$\Rightarrow$ sia $D_f = \begin{pmatrix} \nabla u(x,y) \\ \nabla v(x,y) \end{pmatrix}$. Tale D_f è una trasformazione conforme del piano

$\Rightarrow$ Si ha:

$$D_f = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \overset{-}{=} \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ -\partial_y u & \partial_x u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix}$$

f olomorfa $\Rightarrow$ f soddisfa C.R.

$$= \partial_x u \, I + \partial_x v \, J \quad \text{con} \quad I = Id_{2\times 2}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(-J^2 = I)$

$\Rightarrow$ $\det D_f = 0 \iff \nabla u = 0 = \nabla v$

$\Rightarrow$ $\det D_f \neq 0 \iff \mathrm{rk}(D_f) = 2$

$\Rightarrow$ $|f|^2 = u^2 + v^2 =$ costante $\Rightarrow$ $\nabla(u^2 + v^2) = 0$

$\Rightarrow$ $2u \nabla u + 2v \nabla v = 0$

Se $\exists (x,y) \in \Omega$ t.c. $u(x,y) = v(x,y) = 0$, allora $u^2 + v^2 \equiv 0$ su Ω $\Rightarrow$ $f \equiv 0$. Se $\exists (x,y) \in \Omega$ t.c. $u(x,y) \neq 0 \vee v(x,y) \neq 0$, allora $u^2 + v^2 = |f|^2 > 0$

$\Rightarrow$ $u(x,y) \neq 0 \vee v(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$

$\Rightarrow$ $\nabla u, \nabla v$ lin. dip. $\Rightarrow$ $\mathrm{rk}\, D_f = 0$ $\Rightarrow$ $\nabla u = \nabla v = 0$

$\Rightarrow$ $\nabla f = 0$ $\Rightarrow$ f costante su Ω

$\square$