Def. (Topologia e Spazio Topologico)

Sia X un insieme, τ una famiglia di sottoinsiemi di X t.c.:

1) $\emptyset, X \in \tau$
2) $A_1, \dots, A_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i}^{n} A_i \in \tau$ (Intersezione finita)
3) $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \tau$ (Unione arbitraria)

Allora, tale famiglia τ si dice TOPOLOGIA su X e la coppia (X, τ) si dice SPAZIO TOPOLOGICO

Gli elementi di τ si dicono APERTI di X, mentre gli elementi di X si dicono PUNTI di X.

N.B. Su uno stesso insieme X si possono definire più topologie tra loro diversi e avere, quindi, diversi spazi topologici.

Esempi di spazi topologici:

1) Spazio topologico definito da uno spazio metrico (X, d). La topologia indotta dalla metrica d si dice TOPOLOGIA METRICA. Lo spazio topologico si dice METRIZZABILE

N.B. NON tutti gli spazi topologici sono metrizzabili

2) Dato X, definisco $\tau = \mathcal{P}(X) \Rightarrow$ ogni sottoinsieme di X sta in τ (ed è quindi un aperto di X)

$\Rightarrow \tau$ è detta TOPOLOGIA DISCRETA e lo spazio (X, τ) è metrizzabile, indotto dalla metrica discreta:

$\forall A \subseteq X$, A è aperto rispetto alla metrica discreta $\Rightarrow \forall A \subseteq X$, $A \in \tau \Rightarrow \tau = \mathcal{P}(X)$.

3) Dato X, definisco $\tau = \{\emptyset, X\}$, tale τ è detta TOPOLOGIA BANALE

Oss. Se $|X| \geqslant 2$ allora la topologia banale NON è metrizzabile.

es. sia $|X| = 2$, si ha che:

$X = \{a, b\} \Rightarrow$ l'unica metrica possibile è quella discreta, che induce la topologia discreta, NON la topologia banale !!!

4) Sia $X = \{a, b\}$, definisco $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ (oppure $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}\}$). Tale τ è una topologia detta TOPOLOGIA DI SIERPINSKI e lo spazio topologico (X, τ) è il più piccolo che non sia né banale né discreto.

5) Dato X, definisco $\tau_{cof} = \{\emptyset, X\} \cup \{A \mid \mathcal{C}_X(A) \text{ è finito}\}$

τ_{cof} è la TOPOLOGIA COFINITA.

N.B. Se X è finito $\tau_{cof} = \tau_{discreta}$, mentre se

X non è finito otteng una nuova topologia.

Verifico che τ_{cof} è una topologia:

1) $\emptyset, X \in \tau_{cof}$ ✓ (per costruzione)

2) $A, B \in \tau_{cof} \Rightarrow \mathcal{C}_X(A)$ finito $\wedge\ \mathcal{C}_X(B)$ finito

$\Rightarrow \mathcal{C}_X(A \cap B) = \mathcal{C}_X(A) \cup \mathcal{C}_X(B)$ finito

$\Rightarrow A \cap B \in \tau_{cof}$ ✓

3) $\{A_s\}_{s \in S}$ con $A_s \in \tau_{cof} \Rightarrow \mathcal{C}_X(A_s)$ finito

$\Rightarrow \mathcal{C}_X\left(\bigcup_s A_s\right) = \bigcap_s \mathcal{C}_X(A_s) \Rightarrow \bigcup_s A_s \in \tau_{cof}$. ✓

6) Data $(X, <)$ con $<$ relazione d'ordine totale su X, definisco $\forall a \in X \quad (a, +\infty) = \{x \in X \mid a < x\}$ e definisco $\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{(a, +\infty) \mid a \in X\}$. Tale τ si dice TOPOLOGIA DELLE SEMIRETTE (destre) (si definisce analogamente la topologia delle semirette sinistre). Verifico che τ è una topologia:

1) $\emptyset, X \in \tau$ ✓ (per costruzione)

2) $(a_1, +\infty), (a_2, +\infty) \in \tau$

$\Rightarrow$ assumo WLOG $a_1 < a_2 \Rightarrow (a_1, +\infty) \cap (a_2, +\infty)$

$= (a_2, +\infty) \in \tau$ ✓

3) $\{(a_i, +\infty)\}_{i \in I}$ con $(a_i, +\infty) \in \tau$

$\Rightarrow \bigcup_i (a_i, +\infty) = (\inf_i \{a_i\}, +\infty) \in \tau$ ✓

Def. (Chiuso):

Sia (X, τ) spazio topologico. Un insieme $C \subseteq X$ si dice **CHIUSO** se $\mathcal{C}_X(C) \in \tau$

Si denota con $\mathcal{T}$ la famiglia dei chiusi di X

N.B.

Un insieme $A \subseteq X$ può essere sia chiuso che aperto, così come può non essere né chiuso né aperto!!!

Proprietà (di $\mathcal{T}$):

Sia $\mathcal{T}$ famiglia di chiusi di (X, τ). Allora valgono le seguenti:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2) $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i}^{n} C_i \in \mathcal{T}$ (Unione finita)
3) $\{C_i\}_{i \in I}$ con $C_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_i C_i \in \mathcal{T}$ (Intersezione arbitraria)

Def. (Interno, chiusura di un insieme):

Sia (X, τ) spazio topologico, $Y \subseteq X$. Si dicono:

1) $\mathring{Y}$: **INTERNO DI Y** è il più grande aperto contenuto in Y
2) $\overline{Y}$: **CHIUSURA DI Y** è il più piccolo chiuso contenente Y

N.B.

- $Y = \mathring{Y} \Leftrightarrow Y \in \tau$, $Y = \overline{Y} \Leftrightarrow Y \in \mathcal{T}$
- $\mathring{Y} = \bigcup_{s \in S} A_s$ con $A_s \in \tau$, $A_s \subseteq Y$

- $\overline{Y} = \bigcap_{s \in S} C_s$ con $C_s \in \mathcal{T}$, $Y \subseteq C_s$

- $Y = \mathring{Y} = \overline{Y} \Leftrightarrow Y \in \tau \wedge Y \in \mathcal{T}$ (Y è aperto e chiuso)

<u>Lemma</u> (Caratterizzazione della Chiusura):

Sia (X, τ) spazio topologico, $Y \subseteq X$. $x \in \overline{Y}$ se e solo se $\forall A \in \tau$ t.c. $x \in A$ si ha $A \cap Y \neq \emptyset$

<u>Dim.</u>

($\Rightarrow$): Dato $x \in \overline{Y}$ supponiamo per assurdo che $\exists A \in \tau$ t.c. $x \in A \wedge A \cap Y = \emptyset$

$\Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{T}$ ($A \in \tau$, $X \setminus A = \mathcal{C}_X(A) \in \mathcal{T}$)

$\Rightarrow Y \subseteq X \setminus A = \mathcal{C}_X(A)$ quindi $\overline{Y} \subseteq \mathcal{C}_X(A)$, tuttavia $x \in A \wedge y \in \overline{Y}$ $\lightning$ ($x \in A \Rightarrow x \notin \mathcal{C}_X(A)$)

($\Leftarrow$): Supponiamo $x \notin \overline{Y} \Rightarrow x \in \mathcal{C}_X(\overline{Y})$. Prendo $\mathcal{C}_X(\overline{Y}) \in \tau$

$\Rightarrow x \in \mathcal{C}_X(\overline{Y}) \in \tau \wedge \mathcal{C}_X(\overline{Y}) \cap Y = \emptyset$ $\lightning$

<u>q.e.d.</u>

<u>Def.</u> (Punti di Aderenza):

Sia $x \in (X, \tau)$. x si dice PUNTO DI ADERENZA di $Y \subseteq X$ se $\forall A \in \tau$ t.c. $x \in A$ si ha $A \cap Y \neq \emptyset$ (o, equivalentemente, se $x \in \overline{Y}$)

<u>Def.</u> (Punti di Accumulazione):

Sia $x \in (X, \tau)$. x si dice PUNTO DI ACCUMULAZIONE per Y se $\forall A \in \tau$ t.c. $x \in A$ si ha $A \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Def. (Punti Isolati):

Sia $x \in (X, \tau)$. x si dice PUNTO ISOLATO per Y se $\exists A \in \tau$ t.c. $x \in A \wedge A \cap Y = \{x\}$

N.B.

Punti di ADERENZA = Punti di ACCUMULAZIONE $\cup$ Punti ISOLATI

Def. (Frontiera di un insieme):

Dati (X, τ) spazio topologico, $Y \subseteq X$, si dice FRONTIERA di Y l'insieme $\partial Y = \overline{Y} - \mathring{Y}$