Appunti di Analisi Matematica 2

Federico Cerutti
Mauro Conte

Dal corso del professor

Rinaldo M. Colombo

Università degli Studi di Brescia

Ultimo aggiornamento: 27 maggio 2020

Indice

Prefazione

Questi appunti sono basati sulla dispensa *Appunti per il Secondo Corso di Analisi Matematica per Allievi Ingegneri* del professor Rinaldo M. Colombo dell'Università degli Studi di Brescia. La stesura è stata resa necessaria dalla brevità delle dimostrazioni offerte nel testo ufficiale del corso, nonché dall'esigenza per gli autori di formalizzare i passaggi seguiti mentalmente durante lo studio.

Le parti di questo documento affiancate da una banda verde non sono state trattate a lezione e son riportate dal libro per completezza.

La versione più recente del testo è reperibile nel repository

https://github.com/ceres-c/unibs-analisi2

accessibile anche scansionando il seguente QRCode

Gli appunti non sono stati validati dal professore, dunque non si escludono errori. Son ben accette pull request per correggere inesattezze o migliorare spiegazioni.

Capitolo 1

Spazi Metrici

1 Preliminari

Definizione 1.1 (Spazio Vettoriale)
Siano K un **campo** e V un **insieme**. Si dice che **Spazio Vettoriale** sul campo K se sono definite due operazioni:

1. **Somma**, operazione interna binaria
2. **Prodotto per scalari** operazione esterna

Nota. Questa definizione è stata riportata per ricordare il concetto, si consiglia la consultazione di un libro di Algebra Lineare per una definizione più precisa.

Definizione 1.2 (Spazio Metrico)
Si dice Spazio Metrico (X, d) un insieme X non vuoto in cui sia definita una **Distanza** (o **Metrica**), vale a dire una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in X \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X \qquad (\textit{simmetria})$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X \qquad (\textit{disuguaglianza triangolare})$

Nota. D'ora in poi, quando si userà d come metrica, dove non diversamente specificato, si intenderà la **Metrica Euclidea** di Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)

Unendo le due definizioni si giunge naturalmente a

Definizione 1.3 (Spazio Vettoriale Metrico)
Uno **Spazio Vettoriale Metrico** è uno spazio vettoriale V su cui è definito un prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ definito positivo, la sua **Metrica**.

Nota. Analogamente si definisce il Sottospazio Vettoriale Metrico

Definizione 1.4 (Metrica Indotta)
Siano (X, d) spazio metrico e $S \subseteq X$ con $S \neq \emptyset$
Allora $d_{|S} = d_{|S \times S}$ è una metrica su S, cioè la metrica $d_{|S}$ è la **Metrica Indotta**, definita come la **restrizione** della metrica d ai soli elementi di S. Si definisce formalmente come

$$\begin{array}{rccc} d_{|S} & : & S \times S & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array}$$

Definizione 1.5 (Sottospazio Metrico)
Siano (X, d) spazio metrico e $S \subseteq X$ con $S \neq \emptyset$
Allora $(S, d_{|S})$ con la Definizione 1.4 (Metrica Indotta) è a sua volta Spazio Metrico ed è chiamato **Sottospazio Metrico di** (X, d)

Dimostrazione. La $d_{|S}$, essendo restrizione della metrica d, rispetta ancora tutti i punti della Definizione 1.2 (Spazio Metrico). □

Proposizione 1.6
Sia (V) uno **spazio vettoriale metrico** sul campo K e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$. Il sottoinsieme U è un **sottospazio vettoriale metrico** se, e soltanto se, sono verificate le seguenti condizioni:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U \quad \mathbf{u} + \mathbf{u}' \in U$
2. $\forall \lambda \in K,\ \forall \mathbf{u} \in U \quad \lambda \cdot \mathbf{u} \in U$

Dimostrazione. Non richiesta, analoga a quella per Spazi Vettoriali reperibile in un libro di Algebra Lineare □

Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)
Si dimostri che le seguenti funzioni sono distanze:

> ***Nota.*** Si noti che alcuni degli esempi sottostanti sono relativi a metriche trattate molto più avanti e dunque potrebbe essere conveniente ignorarli temporaneamente per tornare qui quando saranno stati studiati i successivi argomenti.

1. $X = \mathbb{R}^2, \quad d(x, y) = d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ **Metrica Euclidea in $\mathbb{R}^2$**

   1 $d(x, y) \geq 0$ è verificata poiché l'argomento della radice è sempre positivo o al più nullo, essendo una somma di quadrati. Inoltre la radice quadrata mantiene la positività.

   2 $d(x, y) = 0 \iff x = y$

$$\begin{aligned} d = 0 &\iff \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = 0 \\ &\iff (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} (y_1 - x_1)^2 = 0 \\ (y_2 - x_2)^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \\ &\iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \end{aligned}$$

   3 $d(x, y) = d(y, x)$ invertendo le coordinate di x con quelle di y la somma non cambia, quindi la simmetria è rispettata

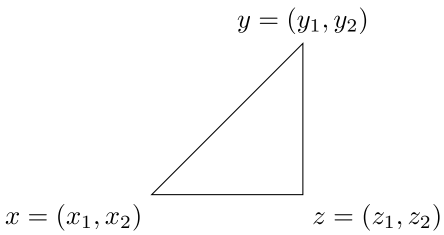
$$\begin{aligned} d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(y_2 - x_2)^2 + (y_1 - x_1)^2} \\ &= d\big((y_1, y_2), (x_1, x_2)\big) \end{aligned}$$

4 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ da Proposizione 1.11 (Metrica Indotta da una Norma), la metrica indotta dalla norma (Definizione 1.8 (Norma)), applicata ad $\mathbb{R}^2$ è

$$\|x - y\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

che corrisponde alla metrica in oggetto. Dunque, grazie alle proprietà dell'operatore $\| \cdot \|$ (nello specifico la *disuguaglianza triangolare*), si ottiene

$$d(x,y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(z,y)$$



2. $X = \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |y - x|$ **Metrica Euclidea in $\mathbb{R}$**
   1. $d(x,y) \geq 0$ per definizione di valore assoluto
   2. $d(x,y) = 0 \iff x = y$ perché $|\cdot| = 0 \iff \cdot = 0$, per definizione di valore assoluto
   3. $d(x,y) = d(y,x)$ perché $|x - y| = |y - x|$ per definizione di valore assoluto
   4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ in quanto

$$d(x,y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x,z) + d(z,y)$$

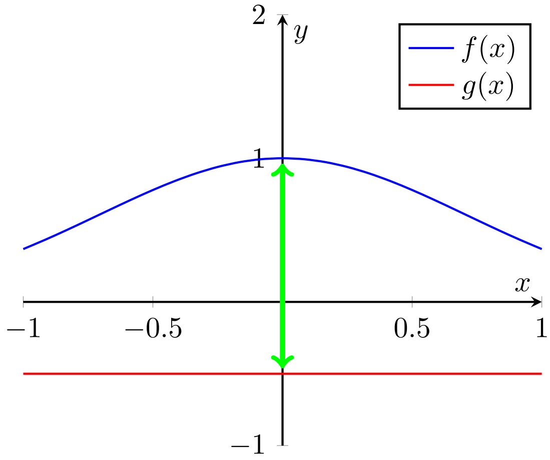
3. $X = \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$
   $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ **Metrica Euclidea in $\mathbb{R}^n$**
   Analogo al primo esempio.

4. $X \neq \emptyset, \quad d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$ **Metrica Discreta**
   1. $d(x,y) \geq 0$ per definizione della metrica
   2. $d(x,y) = 0 \iff x = y$ per definizione della metrica
   3. $d(x,y) = d(y,x)$ per definizione della metrica (sia nel caso $x = y$ che in $x \neq y$)
   4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ perché $d(x,z) + d(z,y)$ può essere:
      - 0 se $x = y = z$, ma in questo caso anche $d(x,y) = 0$
      - 1 se $x = y \neq z$ o $x \neq y = z$, ma in questo caso $d(x,y) \leq 1$
      - 2 se $x \neq y \neq z$, quindi sicuramente $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

5. $X = \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R})\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b$
   $d_{\mathbf{C^0}}(f,g) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$ **Distanza Infinito** o **Distanza della Convergenza Uniforme**

   Nota. La metrica è spiegata in sottosezione 19.3 (Distanze tra Funzioni) ed utilizzata in sottosezione 19.4 (Convergenza Uniforme).

Nota. X è l'insieme delle infinite funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$.



1. $d(x, y) \geq 0$ per definizione, il valore è sicuramente appartenente a $[0, +\infty]$, ma $+\infty$ non è un valore accettabile, in quanto la metrica è definita come funzione a valori in $\mathbb{R}$ e $+\infty \notin \mathbb{R}$. D'alto canto, si nota che X è definito come l'insieme delle funzioni continue definite su un intervallo **chiuso e limitato** a valori in $\mathbb{R}$ ($\mathbf{C^0}([a, b], \mathbb{R})$). Questa definizione permette di applicare il Esercizio 3.16 (Teorema di Weierstrass - Analisi 1) ed avere la certezza che esista sup finito.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ per definizione, $d_{\mathbf{C^0}}(f, g) = 0 \iff \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)| = 0$, cioè se e solo se le due funzioni hanno lo stesso dominio e, per ogni punto di esso, la stessa immagine.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ semplicmente $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f - g| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g - f| = d_\infty(g, f)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dalla disuguaglianza triangolare per $|\cdot|$ si ottiene

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - h(x)| + |h(x) - f(x)|$$

   Applicando il sup la disuguaglianza resta vera.

Nota. Si sottolinea che queste conclusioni sono valide finché $[a, b]$ chiuso e limitato, altrimenti non varrebbe più l'Esercizio 3.16 (Teorema di Weierstrass - Analisi 1) che è necessario per il punto 1..

6. $X = \mathbb{R}^2$, d Metrica Euclidea e $P \in X$ punto arbitrario

$$d_P(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ d(x, P) + d(P, y) & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Distanza di Parigi
o
Distanza Ferroviaria Francese

1. $d(x, y) \geq 0$ per definizione della metrica
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ per definizione della metrica
3. $d(x, y) = d(y, x)$ essendo bassata sulla Metrica Euclidea
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ essendo bassata sulla Metrica Euclidea

7. $X = \mathbf{C^0}([a, b], \mathbb{R})$ $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b [g(x) - f(x)]^2 \, \mathrm{d}x}$$

Distanza Quadratica

Nota. La metrica viene trattata in Proposizione 19.60

1. $d(x, y) \geq 0$ per definizione, essendo integrale di un valore positivo (quadrato) tra estremi ordinati ($a < b$ per ipotesi)
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ Per definizione della metrica:

$$d_2(f, g) = 0 \iff \sqrt{\int_a^b [g(x) - f(x)]^2 \, \mathrm{d}x} = 0$$

cioè se e solo se le due funzioni hanno lo stesso dominio e, per ogni punto di esso, la stessa immagine.

3. $d(x, y) = d(y, x)$ semplicemente $d_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b [g(x) - f(x)]^2 \, \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, \mathrm{d}x} = d_2(g, f)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ...

Definizione 1.8 (Norma)
Dato uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$, si definisce **Norma** una funzione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ con le proprietà:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad \forall x \in V$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K}$

Nota. La funzione Norma associa dunque ad un vettore di qualsiasi dimensione uno scalare, fornendo (anche) una metrica per ordinare vettori tra loro.

Definizione 1.9 (Spazio Normato)
Uno **Spazio Normato** è uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ **in cui è definita una norma**.

Nota. Nel seguito verranno considerati esclusivamente spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$, cioè $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Esempio 1.10 (Esempi di Spazi Normati)

1. $\mathbb{R}$ con $\|x\| = |x|$
2. $\mathbb{C}$ con $\|x\| = |x|$
3. $\mathbb{R}^n$ con $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

   Nota. Dalla questa definizione di norma segue che $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x \cdot x$

4. $\mathbf{C^0}([0, 1]\,; \mathbb{R})$ con $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

   Nota. Dimostrazione in Esercizio 19.17.

Proposizione 1.11 (Metrica Indotta da una Norma)
Sia V uno spazio normato. Allora (V, d) è uno spazio metrico con la distanza

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

ed inoltre la distanza così definita è:

1. Invariante per traslazioni:

$$\forall x, y, z \in V,\ d(x, y) = d(x + z, y + z)$$

2. Positivamente omogenea:

$$\forall x, y \in V \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R},\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)$$

Dimostrazione.

1. $d(x, y) = d(x + z, y + z) = \|y + z - x - z\| = \|y - x\| = d(x, y)$
2. Con la proprietà 4 della Definizione 1.8 (Norma)

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda y - \lambda x\| = \|\lambda(y - x)\| = |\lambda|\, \|y - x\| = |\lambda|\, d(x, y)$$

□

Nota. Nel caso in cui $V = \mathbb{R}^n$, la metrica indotta è ovviamente la **Metrica Euclidea** di Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

Definizione 1.12 (Metriche Equivalenti)
Siano d_1 e d_2 due distanze sullo stesso insieme X.

$$d_1 \text{ e } d_2 \text{ sono } \textbf{equivalenti}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\exists c, C \in \,]0, +\infty[\, :\ \forall x, y \in X \quad c \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C \cdot d_1(x, y)$$

Cioè se è sempre possibile "limitare" una metrica con l'altra (moltiplicata per un opportuno coefficiente). Questo implica che distanze infinite per una metrica devono esserlo anche per l'altra.

Nota. Dato uno spazio metrico (X, d), passare dalla distanza d ad un'altra ad essa equivalente è concettualmente analogo ad un cambio di unità di misura. Come esempio si veda Esercizio 2.43

Esempio 1.13
La Distanza Ferroviaria Francese da Esempio 1.7 (Esempi di Metriche) e la Metrica Euclidea da Esempio 1.7 (Esempi di Metriche) non sono equivalenti

Soluzione. Operando in $\mathbb{R}$ e avendo un $n \in \mathbb{N}$:

- $P = 0$
- $x = n$
- $y = n + 1$

Ora, per ogni n, si ha $d = 1$, mentre la $d_P = 2n + 1$. È dunque impossibile trovare un $C \in]0, +\infty[$ (quindi finito) tale per cui

$$2n + 1 = d_P(x, y) \leq C \cdot d(x, y) = n \quad \text{con } n \to \infty$$

■

Esempio 1.14
In $\mathbb{R}^2$, le distanze:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \\ d(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\ d_{\mathbf{C^0}}(x, y) &= \max(|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|) \end{aligned}$$

sono tutte equivalenti tra di loro.

Definizione 1.15 (Sfera)
Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $x_0 \in X$, $r > 0$. Si dice **Sfera** (o **Bolla**, o ancora **Palla**) **Aperta** di centro x_0 e raggio r l'insieme:

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, y) < r\}$$

Osservazione 1.16
Se $r = 0 \implies B(x_0, r) = \emptyset$
Se $r > 0 \implies x_0 \in B(x_0, r)$

Esempio 1.17 (Sfere ed Altri Enti)

- In $\mathbb{R}$ con d, $B(x_0, r)$ è un intervallo simmetrico centrato in x_0
- In $\mathbb{R}^2$ con d, $B(x_0, r)$ è un cerchio con centro in x_0
- In $\mathbb{R}^3$ con d, $B(x_0, r)$ è una sfera con centro in x_0

Esercizio 1.18
Descrivere le sfere nelle distanze dell'Esempio 1.14.

Definizione 1.19 (Intorno)
Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $x \in X$. **Intorno di x** è un qualunque sottoinsieme di X che contenga una sfera aperta contentente x

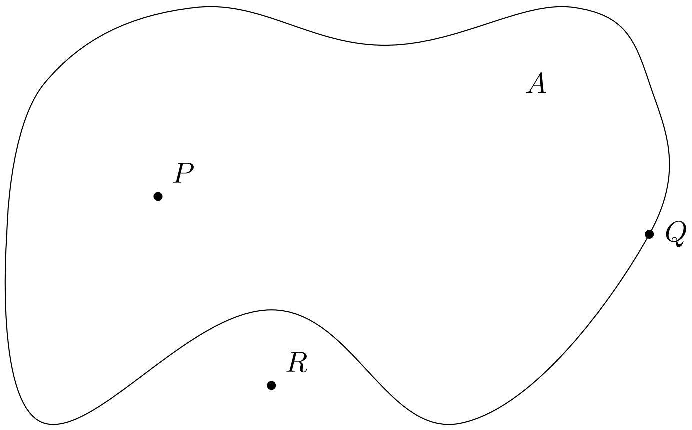
Definizione 1.20 (Punti e Spazi Metrici)
Siano (X, d) uno Spazio Metrico, $A \subseteq X$ e $x_0 \in X$:

- x_0 **Interno** ad A $\quad \rightleftharpoons \quad \exists r > 0 : \; B(x_0, r) \subseteq A$
  Cioè è possibile individuare una sfera interamente contenuta in A
- x_0 **Esterno** ad A $\quad \rightleftharpoons \quad \exists r > 0 : \; B(x_0, r) \subseteq X \setminus A$
  Cioè è possibile individuare una sfera interamente contenuta in X e NON in A
- x_0 **di Frontiera** per A $\quad \rightleftharpoons \quad \forall r > 0, \; B(x_0, r) \nsubseteq A$ e $B(x_0, r) \nsubseteq X \setminus A$
  Cioè, per qualsiasi r, la sfera non appartiene completamente né ad A, né a $X \setminus A$

- x_0 **Isolato** per A $\quad\rightleftharpoons\quad \exists r > 0 : \ B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$
  Cioè è possible trovare un r per cui l'intersezione tra la sfera ed A contiene solo x_0
  Esempio: i numeri naturali con $r = 0,5$
- x_0 **di Accumulazione** per A $\quad\rightleftharpoons\quad \forall r > 0, \ \big(B(x_0, r) \cap A\big) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$
  Cioè, per qualsiasi r, l'intersezione tra la sfera ed A è sempre non vuota (non considerando x_0 stesso)

  Nota. x_0 non deve necessariamente essere $\in A$, basta che sia indefinitamente vicino a dei punti di A.

Esempio 1.21
Dato l'insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ munito della Distanza Euclidea e rappresentato in figura



Si hanno:

- P Interno
- Q di Frontiera
- R Esterno
- P e Q, inoltre, son di Accumulazione per A

Definizione 1.22 (Topologia Spazi Metrici)
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Si definiscono:

- **Parte Interna di A** $\quad \rightleftharpoons \quad \mathring{A} = \{x \in X : \ x \text{ è } \textbf{Interno} \text{ ad } A\}$
- **Frontiera di A** $\quad \rightleftharpoons \quad \partial A = \{x \in X : \ x \text{ è } \textbf{di Frontiera} \text{ per } A\}$
- **Chiusura di A** $\quad \rightleftharpoons \quad \overline{A} = \left\{ x \in X : \ x \left\{ \begin{array}{c} \textbf{Appartiene} \text{ ad } A \\ o \\ \text{è } \textbf{di Accumulazione} \text{ per } A \end{array} \right\} \right\}$

Esempio 1.23
Siano $X = \mathbb{R}$ con $d(x, y) = |y - x|$, $A = \{1\} \cup [2, 3[$, allora:

- 1 è un punto isolato per A
- 5, ad esempio, è un punto esterno ad A
- $\overline{A} = \{1\} \cup [2, 3]$
- $\mathring{A} =]2, 3[$
- $\partial A = \{1, 2, 3\}$

Esempio 1.24
Sia $X = \mathbb{R}$ con $d(x, y) = |y - x|$
Valgono le uguaglianze $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}, \quad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}, \quad \partial \mathbb{R} = \emptyset$

Proposizione 1.25
Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Allora

$$\overline{A} = \{x \in A \text{ è } \textbf{isolato} \text{ per } A\} \cup \{x \in A : x \text{ è } \textbf{di accumulazione} \text{ per } A\}$$

Dimostrazione. Un punto isolato, per definizione, appartiene ad A, e rientra quindi automaticamente nella definizione di $\overline{A}$. È dunque necessario dimostrare solo il caso x_* di accumulazione per A. Partiamo dunque dall'ipotesi:

$$\begin{aligned} & x_* \in A \text{ e } x_* \textbf{ non} \text{ isolato per } A \\ \Longrightarrow\ & x_* \in A \text{ e } \textbf{non } [\exists r > 0 : \ B(x_*, r) \cap A = \{x_*\}] \\ \Longrightarrow\ & x_* \in A \text{ e } [\forall r > 0 : \ B(x_*, r) \cap A \neq \{x_*\}] \end{aligned}$$

Questo significa che in $B \cap A$ ci son sicuramente altri punti, che poi è come dire

$$\Longrightarrow x_* \in A \text{ e } \underbrace{B(x_*, r) \cap A \setminus X \neq \emptyset}_{\text{Definizione di punto di accumulazione}}$$

□

Proposizione 1.26
Siano (X, d) uno spazio metrico, $x_0 \in X$ e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Allora valgono le seguenti relazioni

1. x_0 **isolato** per $A \implies x_0 \in A$
2. x_0 **isolato** per $A \implies \begin{cases} A = \{x_0\} \\ \quad \text{o} \\ \inf\limits_{A \setminus \{x_0\}} d(x, x_0) > 0 \end{cases}$
3. x_0 **interno** ad $A \implies x_0 \in A$
4. x_0 **esterno** ad $A \iff \inf\limits_{A} d(x, x_0) > 0$

Proposizione 1.27 (Condizione Punti Accumulazione)
Siano (X, d) uno spazio metrico, $x_0 \in X$ e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Allora

$$\begin{gathered} x_0 \text{ è di } \textbf{accumulazione} \text{ per } A \\ \iff \\ \inf \{d(x, x_0) : x \in A, x \neq x_0\} = 0 \end{gathered}$$

Cioè se la "minima distanza" tra x_0 ed un altro punto qualsiasi di A è 0.

Proposizione 1.28
Siano (X, d) uno spazio metrico, $x_0 \in X$ e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Valgono le seguenti relazioni:

1. $\overline{A} = \left\{ x_0 \in X : \ \inf\limits_{x \in A} d(x, x_0) = 0 \right\}$
2. $\overline{\emptyset} = \emptyset$
3. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$
4. $\mathring{A} \cap \partial A \neq \emptyset$
5. $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

Esercizio 1.29
Dimostrare nel dettaglio le proposizioni Proposizione 1.25, Proposizione 1.26, Proposizione 1.27 (Condizione Punti Accumulazione), Proposizione 1.28.

Definizione 1.30 (Insieme Aperto)
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Si definisce

$$A \text{ è } \textbf{Aperto} \quad \rightleftharpoons \quad A = \emptyset \quad \text{oppure} \quad A = \mathring{A}$$

Definizione 1.31 (Insieme Chiuso)
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Si definisce

$$A \text{ è } \textbf{Chiuso} \quad \rightleftharpoons \quad A = \emptyset \quad \text{oppure} \quad A = \bar{A}$$

Osservazione 1.32
A **non chiuso** $\not\Rightarrow$ A aperto
A **non aperto** $\not\Rightarrow$ A chiuso

Esempio 1.33
L'insieme $C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\big\} \setminus \{(1, 0)\}$ è né aperto né chiuso.

Soluzione.
Non è chiuso in quanto la sua frontiera è $\partial C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\big\}$, dunque $(1, 0) \in \partial C$, ma per definizione $(1, 0) \notin C$
Non è aperto in quanto, prendendo $(0, 1) \in C$, è impossibile trovare un intorno di $(0, 1)$ contenuto completamente in C ∎

Esercizio 1.34
Dimostrare che in uno spazio metrico (X, d):

1. Ogni sfera di raggio strettamente positivo è un aperto
2. $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \{x \in X : \ d(x, x_0) \leq r\}$
3. X è aperto ed anche chiuso
4. $\emptyset$ è aperto ed anche chiuso
5. Sia $A \subseteq X$. Se A è aperto, allora il complementare di A in X è chiuso
6. Sia $A \subseteq X$. Se A è chiuso, allora il complementare di A in X è aperto
7. Sia $A \subseteq X$. Allora $\overline{A}$ è chiuso e $\mathring{A}$ è aperto

Proposizione 1.35
Sia (X, d) lo spazio metrico con la Metrica Discreta (da Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)).
Allora, preso un $x_0 \in X$ ed un $r > 0$, l'inclusione $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \{x \in X : \ d(x, x_0) \leq r\}$ è stretta se e soltanto se $r = 1$

Esercizio 1.36
Esibire in un opportuno spazio metrico esempi di insiemi né aperti né chiusi.

Definizione 1.37 (Diametro Spazio Metrico)
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Si definisce

$$\mathbf{diam}(A) \quad = \quad \sup_{x,y \in A} d(x, y)$$

Cioè la "distanza massima" tra due suoi qualsiasi elementi.

Definizione 1.38 (Spazio Metrico Limitato)
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Allora

$$\begin{aligned} A \text{ è } \textbf{Limitato} \quad &\rightleftharpoons \quad \text{diam}(A) \text{ è finito} \\ A \text{ è } \textbf{Illimitato} \quad &\rightleftharpoons \quad \text{diam}(A) \text{ è infinito} \end{aligned}$$

Nota. L'insieme vuoto $\emptyset$ ha diametro nullo ed è dunque limitato.

Esempio 1.39 (Diametri e Limitatezza in Spazi Metrici)

1. $\mathbb{R}$ con $d(x, y) = |y - x|$ è uno spazio metrico illimitato. Inoltre se $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, allora $\text{diam}(A) = \sup A - \inf A$
2. $\mathbb{R}$ con $d(x, y) = \frac{|y-x|}{1-|y-x|}$ è uno spazio metrico limitato di diametro 1 (la distanza massima tra due punti con questa metrica è 1)
3. Sia X un insieme con almeno 2 elementi munito della Metrica Discreta (da Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)) è uno spazio metrico limitato di diametro 1
4. $\mathbf{C^0}([0, 1]\,; \mathbb{R})$ con $d(f, g) = \sup_{[0,1]} |g(x) - f(x)|$ è uno spazio metrico illimitato utilizzato in sottosezione 19.4 (Convergenza Uniforme)

Esercizio 1.40
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A, B \subseteq X$. Dimostrare le seguenti implicazioni:

1. $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ A \text{ illimitato} \end{array}\right\} \implies B \text{ illimitato}$
2. $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \text{ limitato} \end{array}\right\} \implies A \text{ limitato}$
3. $\left.\begin{array}{l} A \text{ limitato} \\ B \text{ limitato} \end{array}\right\} \implies A \cup B \text{ limitato}$

Esercizio 1.41
Dimostrare che in $\mathbb{R}$ le distanze

$$d(x, y) = |y - x| \quad \text{e} \quad d(x, y) = \frac{|y - x|}{1 + |y - x|}$$

non sono equivalenti.

Soluzione. Suggerimento: utilizzare la nozione di limitatezza. ■

Esercizio 1.42
Dimostrare che in uno spazio metrico (X, d):

1. Se $x_0 \in X$ e $r > 0$, allora $\operatorname{diam}\big(B(x_0, r)\big) \leq 2r$ (si veda Esercizio 1.44)

2. Se $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$, allora A è limitato se e solo se esiste un $r > 0 : \; A \subseteq B(x_0, r)$

Esercizio 1.43
Sia $X = \mathbb{R}$ con la distanza $d(x, y) = |y - x|$.
Dimostrare che $\operatorname{diam}\big(B(0, 1)\big) = 2$

Esercizio 1.44
Sia $X = [0, 2]$ con la distanza $d(x, y) = |y - x|$.
Dimostrare che $\operatorname{diam}\big(B(0, 1)\big) = 1$

Proposizione 1.45
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A, B \subseteq X$:

$$A \subseteq B \implies \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$$

Dimostrazione. Immediata □

Esercizio 1.46
Dimostrare con esempi che:

1. $A \subset B \;\not\Longrightarrow\; \operatorname{diam}(A) < \operatorname{diam}(B)$

2. $\operatorname{diam}(A) < \operatorname{diam}(B) \;\not\Longrightarrow\; A \subset B$

3. $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B) \;\not\Longrightarrow\; A \subseteq B$

4. $\operatorname{diam}(A) = 0 \;\not\Longrightarrow\; A = \emptyset$

Esercizio 1.47
Esibire in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ed in $\mathbf{C^0}([0, 1]\,; \mathbb{R})$ (con le metriche usuali) esempi di insiemi aperti/chiusi e limitati/illimtati.

Definizione 1.48 (Insieme Finito ed Infinito)
Un insieme si dice **Finito** se il numero dei suoi elementi è finito.
Un insieme si dice **Ininito** se non è finito.

Osservazione 1.49
Con la metrica Euclidea, ogni insieme finito è limitato e ogni insieme illimitato è infinito. Non valgono i viceversa.

2 Successioni e Completezza

Definizione 2.1 (Successione)
Sia X un insieme non vuoto. **Successione** in X è una funzione $x : \mathbb{N} \to X$.

> ***Nota.*** Altre possibili notazioni per le successioni sono: x_n, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
> Con x_n si indica spesso anche **il valore assunto** dalla successione x al suo n-*esimo* elemento.

Definizione 2.2 (Successione Limitata e Illimtata)
Una successione $x : \mathbb{N} \to X$ di elementi di uno spazio metrico (X, d) si dice **Limitata** se il suo codominio $x(\mathbb{N})$ è limitato.
Una successione è **Illimitata** se il suo codominio $x(\mathbb{N})$ è illimitato.

Definizione 2.3 (Limite per Successioni)
Data una successione $x : \mathbb{N} \to X$ di elementi di uno spazio metrico (X, d) e dato $x_\infty \in X$

$$\lim_{n\to+\infty} = x_\infty \quad \rightleftharpoons \quad \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_\infty) = 0$$

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} = x_\infty$, allora la successione x_n è **Convergente** a x_∞. Si può scrivere: $x_n \to x_\infty$ per $n \to \infty$.
Cioè la convergenza della successione $x : \mathbb{N} \to X$ a x_∞ equivale alla convergenza a 0 della successione di numeri reali $\{d(x_n, x_\infty) : n \in \mathbb{N}\}$

> ***Nota.*** Essendo posto $x_\infty \in X$, x_∞ deve appartenere allo spazio metrico. In caso alternativo il limite non esiste.

> ***Nota.*** Questa definizione è *implicita*, cioè non porta a nessun metodo *costruttivo* per calcolare il limite di una successione. La definizione di limite permette soltanto di verificare se una nota quantità è limite della successione data o meno.

Proposizione 2.4
Data la successione $x : \mathbb{N} \to X$ di elementi dello spazio metrico (X, d) e dato $x_\infty \in X$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_\infty \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \text{ vale } d(x_n, x_\infty) < \varepsilon$$

Dimostrazione. □

Teorema 2.5 (di Unicità del Limite per Successioni)
Sia (X, d) uno spazio metrico e siano x_∞, x^∞ elementi di X e $x : \mathbb{N} \to X$ una successione in X.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^\infty \end{array}\right\} \implies x_\infty = x^\infty$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, per la proprietà 4 da Definizione 1.2 (Spazio Metrico)

$$d(x_\infty, x^\infty) \le d(x_\infty, x_n) + d(x_n, x^\infty)$$

Passando al lim per $n \to +\infty$

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} d(x_\infty, x^\infty)}_{\substack{\ge 0 \\ \text{Per def. distanza}}} \le \underbrace{\lim_{n\to+\infty} d(x_\infty, x_n)}_{\substack{\le\varepsilon \\ \text{Per def. lim succ.}}} + \underbrace{\lim_{n\to+\infty} d(n, x^\infty)}_{\substack{\le\varepsilon \\ \text{Per def. lim succ.}}} \le 2\varepsilon$$

Dovendo essere questa forma valida $\forall \varepsilon > 0$, si concludere che non può esser altro che

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_\infty, x^\infty) = 0$$

Che, per la proprietà 2 da Definizione 1.2 (Spazio Metrico), significa

$$x_\infty = x^\infty$$

□

Proposizione 2.6
Sia $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$. In $\mathbb{R}^p$, con $d(x, y) = \|y - x\|$, una successione $x : \mathbb{N} \to X$ converge a x_∞ se e solo se le successioni delle componenti convergono alle rispettive componenti di x_∞.

Dimostrazione. Applicare la Definizione 2.3 (Limite per Successioni) ricordando che

$$|y_i| \leq \|y\| \leq \left| \sum_{i=1}^{p} |y_i| \right| \qquad \forall y \in \mathbb{R}^p \text{ e per } i = 1, \ldots, p$$

□

Esercizio 2.7
Esibire un esempio di successione in $\mathbb{R}^2$ convergente a $(1, 1)$ con le distanze introdotte ai punti 3 e 4 dell'Esempio 1.7 (Esempi di Metriche).

Esercizio 2.8
Esibire un esempio di successione in $\mathbb{C}$ convergente a $1 + i$ con la distanza $d(z, w) = |w - z|$.

Proposizione 2.9 (Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione)
Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $x_* \in X$. Allora

$$x_* \text{ di accumulazione per } A \iff \begin{cases} \text{esiste una successione di elementi di } A, \\ \text{diversi da } x_*, \text{ convergente a } x_* \end{cases}$$

Nota. La puntualizzazione "diversi da x_*" specifica che la successione costante $x = x_n$ non è ammissibile.

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Grazie alla Proposizione 1.27 (Condizione Punti Accumulazione)

$$\begin{aligned} &x_* \text{ è di accumulazione per } A \\ \Longrightarrow\ &\inf \{d(x, x_*) :\ x \in A, x \neq x_0\} = 0 \end{aligned}$$

Che equivale a scrivere

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A :\ x_\varepsilon \neq x_* \text{ e } d(x_\varepsilon, x_*) < \varepsilon$$

Quindi si può scegliere arbitrariamente un $\varepsilon = \frac{1}{n}$, ponendo $n \neq 0$ ed arrivare a

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists x_n \in A :\ x_n \neq x_* \text{ e } d(x_n, x_*) < \frac{1}{n}$$

La successione delle distanze è convergente a 0 per $n \to +\infty$, quindi con la Definizione 2.3 (Limite per Successioni) si può concludere che la successione x_n converge a x_*

$\Longleftarrow$ Dalla Definizione 2.3 (Limite per Successioni)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \quad x_n \in A, \ x_n \neq x_*, \quad d(x_n, x_*) < \varepsilon$$

Ma se $d(x_n, x_*) < \varepsilon$, allora si può anche scrivere $x_n \in B(x_*, \varepsilon)$, quindi sicuramente

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(x_*, \varepsilon) \cap A \setminus \{x_*\} \neq \emptyset$$

Dunque stando alla Definizione 1.20 (Punti e Spazi Metrici)

$$\Longrightarrow x_* \text{ è di accumulazione per } A$$

□

Corollario 2.10
Siano (X, d) uno Spazio Metrico, $A \subseteq X$ e $x_* \in X$. Allora:

$$x_* \in \overline{A} \iff \begin{cases} \text{esiste una successione di elementi di } A, \\ \text{diversi da } x_*, \text{ convergente a } x_* \end{cases}$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Direttamente dalla Definizione 1.22 (Topologia Spazi Metrici):

- Se $x_* \in A$
  È sufficiente scegliere $x_n = x_*$, successione costante, dunque

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} x_* = x_*$$

- Se x_* di accumulazione per A
  Per Definizione 1.22 (Topologia Spazi Metrici) e grazie alla Proposizione 2.9 (Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione) si giunge direttamente alla tesi.

$\Longleftarrow$ Per Definizione 1.22 (Topologia Spazi Metrici) e grazie alla Proposizione 2.9 (Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione) si giunge direttamente alla tesi.

□

Definizione 2.11 (Successione di Cauchy)
Sia (X, d) uno spazio metrico e $x : \mathbb{N} \to X$ una successione d in X.

$$x : \mathbb{N} \to X \text{ è } \textbf{di Cauchy}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > \nu \text{ vale } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Cioè se la distanza tra due punti qualsiasi della successione, presi dopo un certo valore ν, è minore di un ε piccolo a piacere.

Nota. La seconda riga della definizione è nota come *Condizione di Cauchy.*

Nota. Questa definizione, differentemente dalla Definizione 2.3 (Limite per Successioni), è *esplicita* e *intrinseca*: dipende esclusivamente dalla successione e dalla distanza definita.

Proposizione 2.12
Sia (X, d) uno spazio metrico.

$$x : \mathbb{N} \to X \text{ è } \textbf{convergente} \implies x : \mathbb{N} \to X \text{ è } \textbf{di Cauchy}$$

Dimostrazione. Sia $x : \mathbb{N} \to X$ convergente a x_∞. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \rightleftharpoons \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \quad d(x_n, x_\infty) < \varepsilon$$

Prendendo dunque due elementi qualsiasi n e m con $n, m > \nu$, la distanza di ognuno di essi da x_∞ dovrà essere $< \varepsilon$. Applicando la proprietà 4 da Definizione 1.2 (Spazio Metrico), otteniamo

$$d(x_n, x_m) \leq [d(x_n, x_\infty) + d(x_m, x_\infty)] < 2\varepsilon$$

Quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > \nu \quad d(x_n, x_m) \leq [d(x_n, x_\infty) + d(x_m, x_\infty)] < 2\varepsilon$$

Cioè ci si è ricondotti alla definizione della Condizione di Cauchy □

Definizione 2.13 (Spazio Metrico Completo)
Uno Spazio Metrico (X, d) si dice **Completo** se e solo se **ogni successione di Cauchy in** X **ammette limite in** X **stesso**.

Esempio 2.14 (Esempi di Spazi Metrici Completi e non)

1. $\mathbb{R}$ con $d(x, y) = |y - x|$ è uno spazio metrico completo
2. $\mathbb{Q}$ con $d(x, y) = |y - x|$ è uno spazio metrico *non* completo
3. $\mathbb{R}^n$ con $d(x, y) = \|y - x\|$ è uno spazio metrico completo.

   Nota. Altre distanze che rendono $\mathbb{R}^n$ uno spazio metrico completo sono, ad esempio

   - $d(x, y) = \max\limits_{i=1, \dots, n} |y_i - x_i|$
   - $d(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ con $\alpha \in [1, +\infty[$

4. $]0, 1[$ con $d(x, y) = |y - x|$ è uno spazio metrico *non* completo.

   Dimostrazione. La successione $\left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$ è di Cauchy ma non ammette limite in $]0, 1[$ □

5. Sia X un insieme con almeno 2 elementi, munito della metrica discreta

   $$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

   X è uno spazio metrico completo in cui le uniche successioni convergenti son le successioni **definitivamente costanti** (cioè costanti da un certo indice in poi).

6. $\mathbf{C^0}([0, 1]\,; \mathbb{R})$ è uno spazio metrico completo con la distanza

   $$d(f, g) = \sup_{[0,1]} |g(x) - f(x)|$$

   Vedasi Proposizione 19.32 per la dimostrazione.

7. $\mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R})$ è uno spazio metrico *non* completo con la distanza

$$d(f,g) = \sqrt{\int_0^1 [g(x) - f(x)]^2 \, \mathrm{d}x}$$

   Vedasi Proposizione 19.61 per la dimostrazione.

8. L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è uno spazio metrico completo con la distanza $d(z,w) = |w - z|$

Esercizio 2.15
Esibire una successione di Cauchy di numeri razionali non convergente in $\mathbb{Q}$.

Soluzione. La seguente successione

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è convergente a $e \notin \mathbb{Q}$ ■

Proposizione 2.16
Siano (X,d) uno spazio metrico **completo** e $C \subseteq X$ un sottoinsieme **chiuso** di X. Allora $\boldsymbol{(C, d_{|C})}$ **è sottospazio metrico completo**, con $d_{|C}$ da Definizione 1.4 (Metrica Indotta).

Dimostrazione. Essendo C chiuso, per Definizione 1.31 (Insieme Chiuso):

$$C = \overline{C} \implies \forall x_* \in C,\ x_* \in \overline{C}$$

Si può dunque applicare il Corollario 2.10 e concludere che

$$\forall x_* \in C \text{ esiste un successione di elementi di } C \text{ convergenti a } x_*$$

Questo permette di individuare tante successioni x_i quanti sono gli elementi di C e, grazie alla Proposizione 2.12, si sa che ognuna di queste successioni è di Cauchy.
Si giunge dunque alla Definizione 2.13 (Spazio Metrico Completo) □

> ***Nota.*** La chiusura di C è fondamentale perché diversamente non sarebbe applicabile il Corollario 2.10 e dunque non si avrebbe certezza sulla convergenza in C delle successioni.

Proposizione 2.17
Sia (X,d) uno spazio metrico. Data la successione $x : \mathbb{N} \to X$ **di Cauchy**:

$$x : \mathbb{N} \to X \textbf{ di Cauchy} \implies x : \mathbb{N} \to X \textbf{ limitata}$$

Dimostrazione.

$$x : \mathbb{N} \to X \text{ di Cauchy}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > \nu \text{ vale } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

La dimostrazione prevede di dividere in due "parti" la successione

1. Per la definizione di cui sopra è sicuramente possibile individuare un certo $\overline{\nu}$ per cui

$$\exists \overline{\nu} : \ \forall n > \overline{\nu} \quad d(x_n, x_{\overline{\nu}}) < 1 \ (1 \text{ è scelto arbitrariamente})$$

   In tal modo è stata esplicitata la limitatezza di x *da* $\overline{\nu}$ *in poi.*

2. Si ponga invece $K = \max_{n=0,\,\dots\,,\overline{\nu}-1} d(x_n, x_{\overline{\nu}})$, cioè K è la massima tra tutte le distanze $d(x_n, x_{\overline{\nu}})$ con $n < \overline{\nu}$.
   Essendo $n < \overline{\nu}$, n è sicuramente finito, per cui anche K sarà finito. Infatti, avendo un numero finito n di valori x_n assunti dalla successione, anche il massimo di tali valori (cioè K) sarà finito.
   In questo modo si è trovato un valore K che limita la x *prima di* $\overline{\nu}$.

Quindi, concludendo, sicuramente

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x_n, x_{\overline{\nu}}) < \max\{K, 1\}$$

Cioè la successione è limitata. □

Esercizio 2.18
Definire in un opportuno spazio metrico una successione limitata non di Cauchy.

Soluzione. In $(\mathbb{N}, d)$ la successione $x(n) = (-1)^n$. ■

Corollario 2.19
Sia (X, d) uno spazio metrico. Data la successione $x : \mathbb{N} \to X$ **convergente**:

$$x : \mathbb{N} \to X \ \textbf{convergente} \implies x : \mathbb{N} \to X \ \textbf{limitata}$$

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 2.12 ed alla Proposizione 2.17

$$\text{convergente} \implies \text{di Cauchy} \implies \text{limitata}$$

□

Esercizio 2.20
Definire in un opportuno spazio metrico una successione limitata non convergente.

Soluzione. Come da Esercizio 2.18 ■

Esercizio 2.21
Siano (X, d) uno spazio metrico completo, $A \subseteq X$ chiuso e non vuoto. Allora, detta $d_{|A}$ la restrizione di d ad A, $(A, d_{|A})$ è uno spazio metrico completo.
È indispensabile l'ipotesi "*A chiuso*"?

Soluzione. Vedere nota alla Proposizione 2.16 ■

Esercizio 2.22
Dimostrare che ogni sottosuccessione di una successione di Cauchy è a sua volta una successione di Cauchy.

Esercizio 2.23
Dimostrare che se una successione ammette una sottosuccessione convergente, allora l'intera successione è convergente.

2.1 Insiemi Connessi

Concettualmente, un insieme è connesso se è *un pezzo solo*. Per dare una definizione formale conviene prima caratterizzare gli insiemi formati *da più pezzi* e poi definire come connessi quelli *non* formati *da più pezzi*.

Definizione 2.24 (Insiemi Separati)
Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$

$$A \text{ e } B \text{ sono } \textbf{Separati} \rightleftharpoons \overline{A} \cap B = \emptyset \text{ e } A \cap \overline{B} = \emptyset$$

Definizione 2.25 (Insiemi Connessi e Sconnessi)
Un insieme è **Sconnesso** se e solo se è **unione** di due insiemi **separati**.
Un insieme è **Connesso** se e solo se **non è Sconnesso**.

Nota. In uno spazio metrico un insieme può essere alternativamente connesso o sconnesso, ma sicuramente deve essere di un tipo o dell'altro. Ciò differisce con la classificazione Aperto/Chiuso secondo la quale potevano esistere insiemi né aperti né chiusi (vedasi Esempio 1.33)

Esempio 2.26
In $\mathbb{R}$ con l'usuale distanza Euclidea:

1. $[0, 1]$ e $]1, 2]$ non sono separati
2. $[0, 1[$ e $]1, 2]$ sono separati
3. $\{0\} \cup [1, 2]$ è sconnesso
4. $\mathbb{R}$ è connesso

Esercizio 2.27
Dimostrare che gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono sottoinsiemi sconnessi di $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea.

Esercizio 2.28
Dimostrare che se due insiemi sono separati, allora sono disgiunti (cioè $A \cap B = \emptyset$). Esibire un controesempio all'implicazione inversa.

Esercizio 2.29
Esibire esempi di insiemi:

1. connessi/sconnessi ed aperti/chiusi
2. connessi/sconnessi e limitati/illimitati

Proposizione 2.30
In $\mathbb{R}$ con la metrica Euclidea, sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$A \text{ è } \textbf{Connesso} \iff A \text{ è un } \textbf{Intervallo}$$

Dimostrazione. Omessa. □

Proposizione 2.31 (Poligonale Congiungente due Punti)
In $\mathbb{R}^n$ con la distanza Euclidea, sia A un **aperto connesso**. Allora, comunque scelti x e y in A, esiste una **poligonale** interamente contenuta in A con i lati paralleli agli assi e congiungente x a y.

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio 2.32
Mostrare con un esempio che nella Proposizione 2.31 (Poligonale Congiungente due Punti) l'ipotesi "*A aperto*" è essenziale.

Soluzione. Dato lo spazio metrico $(\mathbb{R}^2, d)$, tutti i punti del sottoinsieme $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}$ sono di frontiera, dunque non è un aperto. È impossibile individuare una poligonale che colleghi due qualsiasi punti della circonferenza in quanto, appunto, circonferenza. ■

2.2 Insiemi Compatti

Definizione 2.33 (Insieme Compatto)
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. A è **Compatto** se e solo se **ogni successione di elementi di A ammette una sottosuccessione avente limite in A.**

> ***Nota.*** Questa è la definizione di **Compattezza per Successioni**, in spazi più generali può essere necessario utilizzare una definizione più debole che, nel caso degli spazi metrici, coincide con la precedente.

Proposizione 2.34

> ***Nota.*** Questo teorema è anche noto come *Teorema di Heine-Borel*

Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$

$$A \textbf{ compatto} \implies A \textbf{ chiuso e limitato}$$

Dimostrazione. Per assurdo negando una per una le conclusioni.

- A non è chiuso

$$\begin{aligned} & A \text{ non è chiuso} \\ \implies & A \neq \overline{A} \\ \implies & A \subset \overline{A} \\ \implies & \exists x_0 \in \overline{A}, \ x_0 \notin A \end{aligned}$$

  Dunque, per Definizione 1.22 (Topologia Spazi Metrici), si deve concludere che

$$\implies \exists x_0 \text{ di accumulazione per } A, \ x_0 \notin A$$

  Quindi dalla Proposizione 2.9 (Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione)

$$\implies x : \ \mathbb{N} \to X \text{ con } \begin{cases} x_n \in A \ \forall n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0, x_0 \notin A \end{cases}$$

  Cioè abbiamo ottenuto una successione non convergente in A, dunque negando l'ipotesi

$$\implies A \text{ non è compatto - } \textit{Assurdo}$$

- A non è limitato

$$\begin{aligned} & A \text{ non è limitato} \\ \implies & \sup \{d(x, y) : x, y \in A\} = +\infty \end{aligned}$$

  Fissato dunque un $x_0 \in A$, continuerò ad aver distanza infinita, in quanto A non limitato per ipotesi.

$$\begin{aligned} \implies & \sup_{x \in A} d(x, x_0) = +\infty \\ \implies & \forall n \in \mathbb{N}, \ \exists x_n \in A : \ d(x_n, x_0) > n \end{aligned}$$

Dunque qualsiasi sottosuccessione di $x: \mathbb{N} \to X$ è illimitata

$\implies x: \mathbb{N} \to X$ è una successione in A senza sottosuccessioni convergenti

$\implies A$ non è compatto - *Assurdo*

□

Proposizione 2.35
In $\mathbb{R}^n$ con l'usuale metrica Euclidea, sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora:

$$A \text{ è } \textbf{Compatto} \iff A \text{ è } \textbf{Chiuso e Limitato}$$

Dimostrazione. Omessa a lezione.
Nel caso $n = 1$, segue dalle (note) proprietà di $\mathbb{R}$. Nel caso $n > 1$, si veda Esercizio 2.36. □

Nota. La Proposizione 2.34 vale in ogni spazio metrico, mentre la Proposizione 2.35 solo in $A \subseteq R^n$

Esercizio 2.36
Completare la dimostrazione della Proposizione 2.35.
Suggerimento: utilizzare il caso $n = 1$ e la e la Proposizione 2.6

Esercizio 2.37
Confrontare la dimostrazione della Proposizione 2.35 con Esempio 19.46

Esercizio 2.38
In uno spazio metrico, esibire esempi di insiemi connessi/sconnessi e compatti/non compatti.

Esercizio 2.39
In $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea, esibire esempi di insiemi che siano intervalli/non intervalli compatti/non compatti

Esercizio 2.40
Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano K_1 e K_2 due sottoinsiemi compatti di X. Allora $K_1 \cup K_2$ è compatto

Soluzione. Posto $K = K_1 \cup K_2$, per definizione di **unione**, ogni elemento di K è in K_1 o K_2.
Visto che, per ipotesi, K_1 e K_2 sono compatti, sappiamo che ogni successione in uno dei due avrà una sottosuccessione convergente nello stesso insieme. A questo punto possiamo concludere che ogni successione in K ammetterà una sottosuccessione convergente ad un elemento $x_\infty \in K_1$ oppure $x_\infty \in K_2 \implies x_\infty \in K$ ■

Proposizione 2.41
Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora

$$X \text{ è } \textbf{Compatto} \implies X \text{ è } \textbf{Completo}$$

Dimostrazione. Sia $x : \mathbb{N} \to X$ una successione di Cauchy di elementi di X.
X è compatto quindi, per definizione, esiste una sottosuccessione convergente ad un $x_\infty \in X$. Ciò implica, grazie all'Esercizio 2.23, che l'intera successione converga a x_∞, dunque X è completo. □

Osservazione 2.42
Sia X un insieme munito di due distanze tra loro equivalenti d_1 e d_2 (si veda Definizione 1.12 (Metriche Equivalenti)). Allora *ciò che vale in* (X, d_1)*, vale in* (X, d_2)
Il seguente esercizio rende rigorosa questa affermazione

Esercizio 2.43
Sia X un insieme munito delle due distanze d_1 e d_2 tra loro equivalenti. **Se un insieme è aperto** (chiuso, compatto, connesso, limitato) **in (X, d_1)**, allora **lo è anche in (X, d_2)**.
Inoltre, **se $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_\infty$ in (X, d_1)**, allora **$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_\infty$ anche in in (X, d_2)**

Esempio 2.44
Sia (X, d) lo spazio $\mathbb{R}^n$ munito della distanza Euclidea. Sia d_p come in Esempio 1.7 (Esempi di Metriche) con $p \in \mathbb{R}^n$
È interessante notare che in (X, d), d_p stessa non è continua e quindi gli insiemi aperti (chiusi) rispetto a d_p, possono non essere aperti (chiusi) rispetto alla distanza Euclidea. Di conseguenza son proprietà diverse nei due spazi metrici: convergenza di successioni, continuità di funzioni, connessione, compattezza, essere o meno punto di accumulazione, punto interno, punto esterno…

Esercizio 2.45
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un **compatto**. Dimostrare che se $C \subseteq A$ **è un chiuso**, allora è anche **compatto**.
L'ipotesi "*C chiuso*" è indispensabile?

3 Limiti e Continuità

Definizione 3.1 (Limite per Funzione)
Siano:

- (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici
- $A \subseteq X$
- x_0 di accumulazione per A
- $f : A \to Y$ una funzione
- $l \in Y$

Allora si definisce

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } d_Y(f(x), l) < \varepsilon$$

Che si legge *il limite per x tendente a x_0 di $f(x)$ converge a l.*

Esercizio 3.2
Sarebbe comodo definire

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \rightleftharpoons \quad \lim_{x \to x_0} d_Y(f(x), l) = 0$$

Perché non è corretto farlo?

Soluzione. Non è corretto perché questa definizione implica $l = f(x)$ con $x \to x_0$ per proprietà 2 di Definizione 1.2 (Spazio Metrico). Ciò è diverso dalla Definizione 3.1 (Limite per Funzione) ed è inoltre più restrittivo, in quanto, con questa definizione "semplificata", sarebbe richiesto $x_0 \in A$, mentre x_0 deve essere solo di accumulazione nell'altro caso. Infatti un punto di accumulazione, per definizione da Definizione 1.20 (Punti e Spazi Metrici), non è necessariamente incluso nell'insieme a cui è riferito. ■

Teorema 3.3 (di Unicità del Limite per Funzioni)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, x_0 di accumulazione per A, $f : A \to Y$ una funzione e $l', l'' \in Y$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = l' \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = l'' \end{aligned}\right\} \implies l' = l''$$

Dimostrazione.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = l' \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = l'' \end{aligned}\right\} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta' > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta' \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } d_Y(f(x), l') < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta'' > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta'' \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } d_Y(f(x), l'') < \varepsilon \end{cases}$$

Posto $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, si può sicuramente concludere

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } d_Y(f(x), l') < \varepsilon \text{ e vale } d_Y(f(x), l'') < \varepsilon$$
$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad d_Y(l', l'') < 2\varepsilon$$
$$\implies d_Y(l', l'') = 0$$

□

Proposizione 3.4 (Continuità per Successioni)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, x_0 di accumulazione per A, $f : A \to Y$ e $l \in Y$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall \text{ successione } x : \mathbb{N} \to X \text{ tale che } \lim_{x \to +\infty} x_n = x_0 \text{ e } x_n \neq x_0$$
$$\text{vale } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

> ***Nota.*** Specificare "$\forall$ successione" è fondamentale in quanto possono esistere diverse successioni convergenti a x_0, ma per tutte esse deve verificarsi $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Dalla Definizione 3.1 (Limite per Funzione) si ottiene

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \implies \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in A \\ d(x, x_0) < \delta,\ x \neq x_0 \quad d(f(x), l) < \varepsilon \end{cases} \tag{3.4.1}$$

E dalla Definizione 2.3 (Limite per Successioni), considerando una generica successione x_n convergente a x_0, costruita appositamente e sicuramente sempre esistente per Proposizione 2.9 (Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione), si ha

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \implies \begin{cases} \forall \delta > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu,\ x_n \in A \\ x_n \neq x_0 \quad d(x_n, x_0) < \delta \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Posto il δ di Eq. (3.4.1) $= \delta$ di Eq. (3.4.2) ed unendo le due definizioni, si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu,\ x_n \in A\ x_n \neq x_0$$
$$d(x_n, x_0) < \delta \quad d\big(f(x_n), l\big) < \varepsilon$$

> ***Nota.*** Questa forma va interpretata prendendo inizialmente solo $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$. Il δ individuato viene poi utilizzato per scegliere un ν per il quale valga il resto dell'espressione.

Che corrisponde alla definizione di limite per funzione di $f(x_n)$

$\Longleftarrow$ Per assurdo, negando $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

$$\text{non } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$
$$\implies \exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in A,\ x_\delta \neq x_0, \quad d(x_\delta, x_0) < \delta, \quad d\big(f(x_\delta), l\big) > \varepsilon$$

Ponendo $\delta = \frac{1}{n+1}$ si può passare ad una successione convergente a 0, quindi compatibile con il comportamento del δ precedente

$$\implies \exists \varepsilon > 0 :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in A,\ x_n \neq x_0, \quad d(x_n, x_0) < \frac{1}{n+1}, \quad d\big(f(x_n), l\big) > \varepsilon$$

Essendo $d\big(f(x_n), l\big) > \varepsilon$, non si ha limite convergente a l

$$\implies \left\{ \begin{array}{c} \text{Esiste una successione } x_n,\ x_n \in A,\ x_n \neq x_0, \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \\ \text{e} \\ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \text{ o non esiste, oppure non è } l \end{array} \right.$$

Quindi l'ipotesi è contraddetta.

□

Definizione 3.5 (Funzione Continua)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$

$$f \text{ è } \textbf{Continua} \text{ in } x_0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Inoltre

$$f \text{ è } \textbf{Continua} \text{ in } A \quad \rightleftharpoons \quad f \text{ è } \textbf{continua in ogni punto} \text{ di } A$$

Nota. Il δ è talvolta denominato **Modulo di Continuità**.

Nota. Non andrebbe detto semplicemente "*f è continua*" perché la continuità dipende in modo essenziale dall'insieme di punti su cui la funzione viene considerata. In assenza di ulteriori specificazioni, spesso si sottointende che l'insieme in esame è l'intero dominio della funzione.

Nota. Ha senso valutare la continuità di una funzione esclusivamente nell'insieme in cui è definita. Quindi una frase come:
la funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ è discontinua in 0,
non è (a rigore) sensata. Andrebbe riformulata come:
la funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ non può essere estesa ad una funzione definita e continua anche in 0.

Nota. La continuità di una funzione dipende in modo esssenziale anche dalla distanza adottata, tuttavia è prassi sottointendere questa precisazione, soprattutto per funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se la distanza adottata è quella Euclidea.

Osservazione 3.6
Alcuni testi definiscono la continuità semplicemente attraverso la nozione di limite. Il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ è però definito solo se x_0 è punto di accumulazione del dominio di f, come da Definizione 3.1 (Limite per Funzione).
Una definizione di continuità basata sul limite non permetterebbe, ad esempio, di valutare la continuità della funzione $x \mapsto \sqrt{x^2(x-1)}$ su tutto il suo insieme di definizione.

Esercizio 3.7
Data

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x^2(x-1)} \end{array}$$

determinare l'insieme di definizione e l'insieme dei punti in cui è continua.

Esercizio 3.8 (Continuità in Punti Isolati)
Formulare con precisione e dimostrare: ogni funzione è continua in ogni suo punto isolato del suo insieme di definizione.

Soluzione. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$ **Punto Isolato**.
Allora f è **Continua in x_0**

Dimostrazione. Per Definizione 1.20 (Punti e Spazi Metrici)

$$\exists r > 0 : \ B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$$

Quindi esiste una sfera centrata in x_0 che non contenga altri punti oltre x_0. Ricordando la Definizione 3.5 (Funzione Continua)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Si vede che questo unico x_0 rispetta la condizione $d_X(x, x_0) < \delta$, inoltre è sicuramente valida la condizione $\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$, verificando la continuità in x_0

□

Proposizione 3.9
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$

$$f \text{ è } \textbf{Continua} \text{ in } x_0 \iff \begin{cases} x_0 \text{ è } \textbf{Isolato} \text{ per } A \\ \textit{oppure} \\ x_0 \text{ è } \textbf{di Accumulazione} \text{ per } A \text{ e } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Dimostrazione.

- x_0 di accumulazione: per definizione di f continua
- x_0 isolato: per Definizione 1.20 (Punti e Spazi Metrici)

$$\exists r > 0 : \ B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$$

Posto ora $r = \delta$, si ottiene che, per certo, $x = x_0$, per cui sicuramente $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ dalla Definizione 3.5 (Funzione Continua).

□

Esercizio 3.10
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $k \in Y$. Sia $f : X \to Y$ definita da $f(x) = k \quad \forall x \in X$.
Dimostrare che f è continua su X

Proposizione 3.11 (Continuità e Continuità per Successioni)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$

$$f \text{ è } \textbf{Continua} \text{ in } x_0$$
$$\iff$$
$$\underbrace{\forall \text{ successione } x : \mathbb{N} \to A : \ \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0}_{\text{cioè per ogni successione convergente a } x_0} \ \text{vale} \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Nota. Il primo limite è in X, il secondo in Y

Nota. Questo enunciato mostra l'equivalenza tra Definizione 3.5 (Funzione Continua) e Proposizione 3.4 (Continuità per Successioni).

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Da Proposizione 3.9:

$$f \text{ continua in } x_0 \iff \begin{cases} x_0 \text{ di accumulazione} \\ \quad\textit{oppure} \\ \quad x_0 \text{ isolato} \end{cases}$$

Dividendo nei due casi:

- x_0 di accumulazione:
  Sia $x : \mathbb{N} \to X$ una successione convergente a x_0 con $x_0 \in A$, da cui, per Definizione 2.3 (Limite per Successioni)

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \implies$$
$$\implies \forall\delta > 0\ \exists\nu \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \quad d_X(x_n, x_0) < \delta$$

  Essendo, per ipotesi, f continua in x_0

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \text{ vale } d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

  Procedendo come nella prima parte della dimostrazione di Proposizione 3.4 (Continuità per Successioni), si ottiene:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu > 0 : \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } n > \nu \text{ vale } d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

  Che è la definizione di $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

- x_0 isolato:
  L'unica successione di elementi di A convergente a x_0 è la successione costante $x_n = x_0$, dunque sicuramente $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

$\Longleftarrow$ Dividendo ancora nei due casi:

- x_0 di accumulazione:
  Ponendo, per assurdo

$$f \ \textit{non} \text{ continua in } x_0$$
$$\implies \exists\varepsilon > 0 : \ \forall\delta > 0\ \exists x \in A, \quad d_X(x, x_0) < \delta, \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) > \varepsilon$$

  Procedendo di nuovo come nella dimostrazione di Proposizione 3.4 (Continuità per Successioni), posto $\delta = \frac{1}{n+1}$ si passa alla successione convergente a 0, dunque compatibile con il δ precedente

$$\implies \exists\varepsilon > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in A, \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n+1}, \quad d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) > \varepsilon$$

  Quindi si è costruita una successione $x : \mathbb{N} \to X$ (X generico) convergente a x_0, ma la successione $f \circ x$ (cioè la $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$) non convergerebbe a $f(x_0)$. Questo è contrario all'ipotesi da cui si è partiti, per cui $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

- x_0 isolato:
  Immediatamente da Esercizio 3.8 (Continuità in Punti Isolati)

$\square$

Corollario 3.12
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$ e $x : \mathbb{N} \in X$ una successione in A

$$\left.\begin{array}{c} f \textbf{ Continua} \text{ in } A \\ e \\ \exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in A \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)$$

Dimostrazione. Essendo f continua per ipotesi, dalla Proposizione 3.11 (Continuità e Continuità per Successioni) è noto che

$$\forall \text{ successione } x : \mathbb{N} \to A : \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \text{ vale } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Inoltre $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \in A$ per ipotesi e, grazie alla continuità di f, $\exists f(x_0) \quad \forall x_0 \in A$.
Unendo le due conclusioni si ottiene la tesi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)$$

□

Proposizione 3.13 (Continuità di f in un Insieme)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$.

$$f \textbf{ Continua} \text{ in } A$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\underbrace{\forall x_0 \in A}_{\text{unica aggiunta}} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Nota. Questa proposizione espande la Definizione 3.5 (Funzione Continua) di continuità su un insieme grazie alla stessa definizione di continuità in un punto

Dimostrazione. Segue direttamente dalla Definizione 3.5 (Funzione Continua) □

Proposizione 3.14 (Continuità Funzioni Composte)
Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici e siano:

- $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$
- $g : B \to Z$ con $B \subseteq Y$
- $x_0 \in A$
- $f(x_0) \in B$

Allora

$$\left.\begin{array}{l} f \textbf{ Continua} \text{ in } x_0 \\ g \textbf{ Continua} \text{ in } f(x_0) \end{array}\right\} \implies (g \circ f) \text{ è } \textbf{Continua} \text{ in } x_0$$

Dimostrazione. Dalla Definizione 3.5 (Funzione Continua)

$$\begin{aligned} & f \text{ continua in } x_0 \\ & \implies \forall \eta > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \eta \end{aligned}$$

Da $d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \eta$ sappiamo che la distanza in Y è limitata, dunque possiamo utilizzarla nella seguente definizione

$$\begin{aligned} & g \text{ continua in } f(x_0) \\ & \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 : \quad \forall y \in B \text{ con } d_Y\big(y, f(x_0)\big) < \eta \quad \text{vale} \quad d_Z\Big(g(y), g\big(f(x_0)\big)\Big) < \varepsilon \end{aligned}$$

Nota. η è la lettera greca Eta

Dunque, posto $y = f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Z\Big(g\big(f(x)\big), g\big(f(x_0)\big)\Big) < \varepsilon$$

Oppure, ugualmente, utilizzando il formalismo delle composizioni di funzioni

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Z\big((g \circ f)(x), (g \circ f)(x_0)\big) < \varepsilon$$

Che è, per Definizione 3.5 (Funzione Continua), la continuità di $g \circ f$ in x_0 □

Teorema 3.15 (Generale di Weierstrass)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : K \to Y$ con $K \subseteq X$.

$$\left.\begin{array}{l} K \textbf{ Compatto} \\ f \textbf{ Continua} \text{ su } K \end{array}\right\} \implies f(K) \textbf{ Compatto}$$

Dimostrazione. Siano le successioni

- $x : \mathbb{N} \to X$ tale che $x_n \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $y : \mathbb{N} \to Y$ tale che $y_n \in f(K) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, cioè $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K : \ f(x_n) = y_n$

Nota. Abbiamo una successione che, attraverso la f (non direttamente: le successioni non sono $X \to Y$!), associa indirettamente valori in $K \subseteq X$ a valori in $f(K) \subseteq Y$

K è compatto per ipotesi. Essendo x a valori in K, per Definizione 2.33 (Insieme Compatto), si ha la certezza che la x ammetta una sottosuccessione x_{n_k} convergente ad un elemento $\overline{x} \in K$.
Per come è definita y, esiste anche la successione $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ e, grazie alla continuità di f in K, sicuramente $f(x_{n_k}) \in f(K)$. Dunque

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \in f(K)$$

Essendo la sottosuccessione x_{n_k} convergente ad $\overline{x}$, anche y_{n_k} converge, verificando così la Definizione 2.33 (Insieme Compatto). □

Dimostrazione. (Alternativa)
La successione x ammette una sottosuccessione x_{n_k} convergente ad un elemento $\overline{x} \in K$, dunque da Proposizione 2.4:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_* \iff \forall \eta > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n > \nu \ \ d(x_n, x_*) < \eta$$

Dalla Definizione 3.5 (Funzione Continua) e sapendo che $f(x)$ è continua per ipotesi, si ottiene:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in K \ \ d_X(x, x_*) < \delta \ \ d_Y\big(f(x_n), f(x_*)\big) < \varepsilon$$

Unendo ora le due definizioni:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n > \nu \ \ d_Y\big(f(x_n), f(x_*)\big) < \varepsilon$$

Che equivale, per come è definita y_n, a

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = y_*$$

Cioè la definizione di successione convergente. Ho dunque individuato una sottosuccessione convergente per ogni successione in $f(K)$, verificando così la Definizione 2.33 (Insieme Compatto). □

Esercizio 3.16 (Teorema di Weierstrass - Analisi 1)
Cosa c'entra il Teorema 3.15 (Generale di Weierstrass) con il "vecchio" Teorema di Weierstrass di Analisi 1?

> ***Nota.*** L'enunciato formalmente corretto di questo teorema nel caso di Analisi 1 è riportato in Corollario 5.22 (Teorema di Weierstrass - Analisi 1).

Soluzione. Considerando il caso $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ si ottiene:

$$f : K \to f(K) \text{ con } f(K) \text{ compatto.}$$

> ***Nota.*** Y deve necessariamente essere in $\mathbb{R}^1$, perché, per individuare sup ed inf, è necessario che l'insieme sia ordinabile.

Il fatto che $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ sia compatto, implica che sia **Chiuso** e **Limitato** per Proposizione 2.34

- Essendo limitato, per certo $\exists \sup \in \mathbb{R} \neq \infty$ e $\exists \inf \in \mathbb{R} \neq \infty$
- Essendo chiuso, sicuramente $\sup = \max$ e $\inf = \min$

Dunque f ammette max e min $\in \mathbb{R} \neq \infty$, che è la conclusione del Teorema di Weierstrass in Analisi 1. ■

Proposizione 3.17
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : K \to Y$ con $K \subseteq X$.

$$\left.\begin{array}{l} K \textbf{ Connesso} \\ f \textbf{ Continua} \text{ su } K \end{array}\right\} \implies f(K) \textbf{ Connesso}$$

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio 3.18
Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che, fissato un punto $x_0 \in X$, la funzione:

$$\begin{array}{cccc} f & : & X & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & d(x, x_0) \end{array}$$

è continua in X

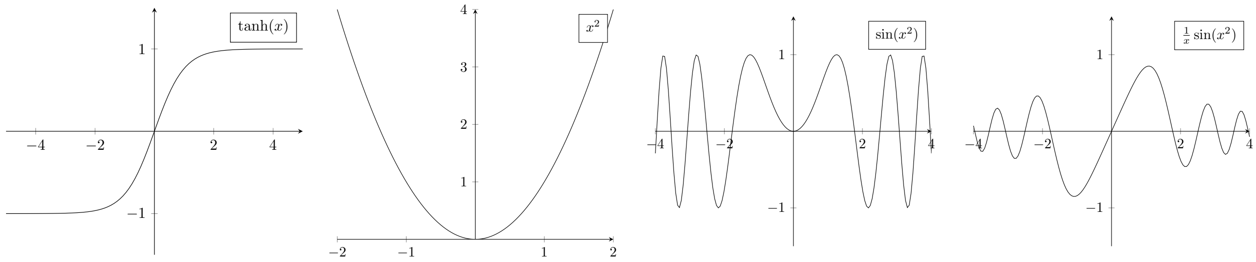
3.1 Uniforme Continuità

Definizione 3.19 (Funzione Uniformemente Continua)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$.

$$f \text{ è } \textbf{Uniformemente Continua} \text{ in } A$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x, x_0 \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale } d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Cioè è una funzione continua per la quale piccole variazioni della x implicano piccole variazioni di $f(x)$.
Graficamente si può vedere che il grafico "non impenna" e non "oscilla liberamente". Buon indicatore della uniforme continuità è la presenza di asintoti orizzontali.

Esempio 3.20



(a) Sì unif. cont. (b) No unif. cont. (c) No unif. cont. (d) Sì unif. cont.

Esercizio 3.21
Confrontare la Proposizione 3.13 (Continuità di f in un Insieme) con la Definizione 3.19 (Funzione Uniformemente Continua)

Soluzione. In Proposizione 3.13 (Continuità di f in un Insieme) si definiva la continuità della funzione sull'insieme applicando la Definizione 3.5 (Funzione Continua) a ogni $x_0 \in A$, cioè ogni punto di A. Questo non ha particolari implicazioni sul comportamento della funzione, informa solamente sulla continuità in ogni punto di A.
Definizione 3.19 (Funzione Uniformemente Continua) invece prevede, per definizione, la possibilità di scegliere un qualsiasi x_0 quando ε è già stato scelto. Ciò implica che ε debba essere valido per ogni $x_0 \in A$, non scelto *a priori*. ■

Proposizione 3.22
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Sia $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$.

$$f \textbf{ Uniformemente Continua} \text{ in } A \implies f \textbf{ Continua} \text{ in } A$$

Dimostrazione. Deriva da Esercizio 3.21 in quanto, se è possibile scegliere un qualsiasi x_0 quando ε è già stato fissato, sicuramente sarà possibile fare questa scelta anche in ordine inverso (la continuità è condizione meno stringente). □

Esercizio 3.23
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $k \in Y$. Data $f : X \to Y$ definita da $f(x) = k \quad \forall x \in X$. Dimostrare che f è uniformemente continua.

Esercizio 3.24
Formulare e dimostrare il teorema sulla uniforme continuità della composizione di funzioni uniformemente continue in spazi metrici.

Esempio 3.25
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$. f è continua in $\mathbb{R}$, ma *non* è uniformemente continua in $\mathbb{R}$

Esercizio 3.26
Esibire esempi di funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che siano limitate/illimitate ed uniformemente continue.

Esempio 3.27
Sia $f : \,]0, 1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
In $]0, 1]$, f è continua e limitata, ma non è uniformemente continua.

Teorema 3.28 (di Cantor)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : K \to Y$ con $K \subseteq X$.

$$\left.\begin{array}{l} K \textbf{ Compatto} \\ f \textbf{ Continua} \text{ su } K \end{array}\right\} \implies f \textbf{ Uniformemente Continua} \text{ su } K$$

Dimostrazione. Per assurdo, negando la conclusione

$$\begin{aligned} & f \text{ non è uniformemente continua in } K \\ \implies & \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall \delta > 0 \quad \exists x', x'' \in K \text{ con } d(x', x'') < \delta \text{ e } d\big(f(x'), f(x'')\big) > \varepsilon \end{aligned}$$

Ponendo $\delta = \frac{1}{n+1}$ si passa alla successione convergente a 0, dunque compatibile con il δ precedente

$$\implies \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x'_n, x''_n \in K \text{ con } \underbrace{d(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n+1}}_{(1)} \text{ e } \underbrace{d\big(f(x'_n), f(x''_n)\big) > \varepsilon}_{(2)} \tag{3.28.1}$$

Essendo K compatto per ipotesi, per le due successioni x'_n e x''_n esistono due sottosuccessioni x'_{n_k} e x''_{n_k} convergenti a $x'_\infty, x''_\infty \in K$.
Da (1) di Eq. (3.28.1) si sa che $\lim_{n \to +\infty} d(x'_n, x''_n) = 0$, dunque $x'_\infty = x''_\infty$ per $n \to +\infty$
Da (2) di Eq. (3.28.1), d'altro canto, è esplicitato che $d\big(f(x'_n), f(x''_n)\big)$ rimane sempre $> \varepsilon$ strettamente positivo, dunque è negata la Definizione 3.5 (Funzione Continua) in $x'_\infty = x''_\infty$. Così è negata l'ipotesi sulla continuità della funzione. □

Proposizione 3.29
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$ e $f : A \to Y$ **Uniformemente Continua** su A. Allora, per ogni successione $x : \mathbb{N} \to X$ **di Cauchy** in X, la successione $f \circ x$ delle immagini $f(x_n)$ **è di Cauchy** in Y.

Dimostrazione. Omessa. □

Proposizione 3.30
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$ e $f : A \to Y$ **Uniformemente Continua** su A. Allora esiste un'unica funzione

$$\overline{f} : \overline{A} \to Y$$

continua su $\overline{A}$ e tale che $f_{|A} = f$ (cioè la f ristretta ad A, dove definita, corrisponde a f)

Dimostrazione. Omessa. □

3.2 Lipschitzianità

Definizione 3.31 (Funzione Lipschitziana)
Siano:

- (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici
- $A \subseteq X$
- $f : A \to Y$

Allora

$$f \text{ è } \textbf{Lipschitziana}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\exists L > 0 : \ \forall x', \, x'' \in X, \quad d_Y\big(f(x''), f(x')\big) \leq L \cdot d_X(x'', x')$$

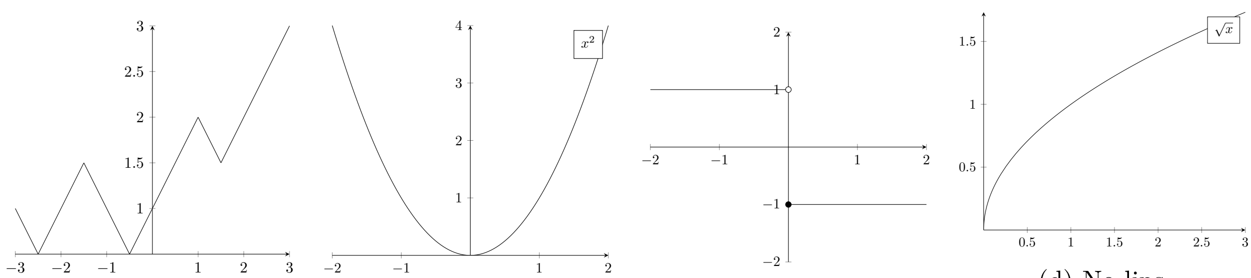
Nota. La costante L sopra introdotta non è univocamente determinata. Nei risultati seguenti non sarà mai rilevante *il valore* di L, ma il fatto stesso che L esista.

Definizione 3.32 (Costante di Lipschitz)
Fissate le distanze d_X e d_Y e la funzione f, allora la più piccola L positiva soddisfacente

$$d_Y\big(f(x''), f(x')\big) \leq L \cdot d_X(x'', x') \qquad \forall x', x'' \in X$$

si definisce **Costante di Lipschitz** della funzione f in X

Esempio 3.33



(a) Sì lips. (b) No lips. (c) No lips. (d) No lips. (Sì unif. cont.)

Esempio 3.34
Sono dati gli spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) ed una funzione Lipschitziana $f : X \to Y$.
Determinare una nuova distanza δ_X su X che sia equivalente a d_X ed in modo che la costante di Lipschitz di f rispetto a δ_X sia minore o uguale ad 1.

Esempio 3.35
Sono dati gli spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) ed una funzione Lipschitziana $f : X \to Y$.
Determinare una nuova distanza δ_Y su Y che sia equivalente a d_Y ed in modo che la costante di Lipschitz di f rispetto a δ_Y sia minore o uguale ad 1.

Esercizio 3.36
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Come si fa a capire se f è Lipschitziana o no dal suo grafico?

Proposizione 3.37
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme **Convesso** (da Definizione 8.53 (Insieme Convesso)) e $f \in \mathbf{C^1}(A; \mathbb{R})$ (da Definizione 8.23 (Funzioni di Classe $\mathbf{C^1}$)). Se tutte le **Derivate Parziali** sono **limitate** in A , allora f è **Lipschitziana**.

Dimostrazione. Segue direttamente da Definizione 8.53 (Insieme Convesso) e Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti). □

Proposizione 3.38
Sia $f : X \to Y$ una funzione **Lipschitziana**. Allora f è **Uniformemente Continua** su X.

Dimostrazione. Dall'ipotesi di Lipschitzianità, applicando la Definizione 3.31 (Funzione Lipschitziana), si sa per certo che

$$d_Y\big(f(x''), f(x')\big) \leq L \cdot d_X(x'', x')$$

Posti ora

- $d_X(x'', x') < \delta$ senza perdere generalità (il δ nella unif. continuità è a scelta)
- $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ come semplice posizione

Si ottiene

$$d_Y\big(f(x''), f(x')\big) \leq L \cdot d_X(x'', x') < L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

Da cui, prendendo il primo e l'ultimo membro,

$$d_Y\big(f(x''), f(x')\big) < \varepsilon$$

che è la condizione di uniforme continuità. □

Esempio 3.39
La funzione

$$\begin{array}{rccl} f & : & [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

è uniformemente continua ma non è Lipschitziana. Vedere grafico in Esempio 3.33

Esempio 3.40
La funzione

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

è uniformemente continua ma non è Lipschitziana.

Esempio 3.41
La funzione

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C}^\infty$ ma non è Lipschitziana. Vedere grafico in Esempio 3.33

Esempio 3.42
La funzione

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

è Lipschitziana ma non è derivabile in 0.

Esercizio 3.43
La composizione di funzioni Lipschitziane è Lipschitziana?
Per funzioni reali di variabile reale, la somma/il prodotto di funzioni Lipschitziane è una funzione Lipschitziana?
Enunciare formalmente e dimostrare.

Proposizione 3.44
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ con $A \subseteq X$.

$$f \text{ è } \textbf{Lipschitziana} \iff \textbf{ogni componente di } f \textbf{ è Lipschitziana}$$

Dimostrazione. Immediata. □

Definizione 3.45 (Norma di Matrice)
Sia $A \in \mathrm{Mat}(m \times n)$. **Norma** di A è la quantità

$$\|A\| = \max_{x \in \overline{B(0,1)}} \|A\,x\|$$

con x vettore $\in \mathbb{R}^n$ e $A\,x \in \mathbb{R}^m$ risultato del prodotto righe per colonne.

Esercizio 3.46
Verificare che la norma introdotta in Definizione 3.45 (Norma di Matrice) soddisfi alle condizioni della Definizione 1.8 (Norma) con $V = \mathrm{Mat}(m \times n)$

Esercizio 3.47
Con la notazione della Definizione 3.45 (Norma di Matrice), verificare le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \in \overline{B(0,1)}} \|A\,x\| &&= \sup_{x \in B(0,1)} \|A\,x\| \\ &= \max_{\|x\|=1} \|A\,x\| &&= \sup_{\|x\|=1} \|A\,x\| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \tfrac{\|A\,x\|}{\|x\|} \end{aligned}$$

Proposizione 3.48
Sia $A \in \mathrm{Mat}(m \times n)$. Allora

$$\|A\,x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Dimostrazione. Sia $x = 0$ la tesi è immediata.
Sia $x \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} \|A\,x\| &= \left\| A\,x \cdot \frac{\|x\|}{\|x\|} \right\| = \left\| \|x\| \cdot \left(A \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \\ &= \|x\| \cdot \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \end{aligned}$$

Essendo $\frac{x}{\|x\|}$ il versore di x, esso ha, per definizione, norma unitaria e, grazie a Esercizio 3.47, si sa che $\|A\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\,x\|$, dunque

$$\leq \|A\| \cdot \|x\|$$

□

Esercizio 3.49
Esibire una matrice $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 3)$ tale che $\|A\| = 2$

Esercizio 3.50
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione lineare. Allora è Lipschitziana (rispetto alla Metrica Euclidea). Suggerimento: utilizzare la Proposizione 3.48

Nota. In spazi più generali di $\mathbb{R}^n$ (spazi di dimensione *infinita*) l'affermazione contenuta in questo esercizio può essere falsa. Vedasi Proposizione 19.45

Esercizio 3.51
Se A e B sono matrici tali che se ne possa fare il prodotto (regole del prodotto righe per colonne), dimostrare che

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

4 Il Teorema delle Contrazioni

Definizione 4.1 (Contrazione)
Sia (X, d) uno spazio metrico. Si dice **Contrazione** una funzione $T: \ X \to X$ soddisfacente a:

$$\exists K \in [0,1[\text{ tale che } \forall x', x'' \in X \quad \text{vale} \quad d_X\big(T(x''), T(x')\big) \le K \cdot d_X(x'', x') \tag{4.1.1}$$

Una contrazione è quindi una funzione con insieme di partenza e di arrivo coincidenti e Lipschitziana con costante di Lipschitz strettamente minore di 1.
È generalmente inutile considerare contrazioni definite tra spazi diversi. Infatti, data una funzione $T : X \to Y$ Lipschitziana, sarebbe sempre possibile riscalare la distanza in uno dei due spazi X o Y per ottenere una costante di Lipschitz minore di 1.

Nota. D'ora in poi si utilizzerà spesso la notazione Tx per intendere $T(x)$

Esempio 4.2 (Esempi di Contrazioni)

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{x}{2}$. f è una contrazione.
2. $f : [0,2] \to [0,2]$ data da $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$. f è una contrazione
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. f è una contrazione

Esercizio 4.3
La composizione di contrazioni è una contrazione. Enunciare formalmente e dimostrare.
Esibire esempi che mostrino come la somma ed il prodotto di contrazioni possano non essere contrazioni.

Soluzione.
Sia (X, d) uno spazio metrico, siano $f, g : X \to X$ **due contrazioni** in X. Allora $f \circ g$ è una **contrazione**

Dimostrazione. Sappiamo che:

$$\begin{aligned} &\forall x', x'' \in X,\ d\big(f(x''), f(x')\big) \le K_f \cdot d(x'', x') \\ &\forall x', x'' \in X,\ d\big(g(x''), g(x')\big) \le K_g \cdot d(x'', x'). \end{aligned}$$

$f \circ g = f\big(g(x)\big)$, quindi presi $x', x'' \in X$ si ha

$$d\Big(f\big(g(x'')\big), f\big(g(x')\big)\Big) \le K_f \cdot d\big(g(x''), g(x')\big) \le K_f K_g \cdot d(x'', x')$$

□

Esempi: ■

Proposizione 4.4
Sia $f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ (da Definizione 8.23 (Funzioni di Classe $\mathbf{C^1}$)). Se esiste $k \in [0,1[$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale $\|Df(x)\| < k$, allora f è **Contrazione**.

Dimostrazione. Segue dal Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti) □

Definizione 4.5 (Punto Fisso)
Sia X un insieme e $f : X \to X$. Un **Punto Fisso** di f è un elemento $x \in X$ tale che:

$$x = f(x)$$

Teorema 4.6 (delle Contrazioni)

Nota. Questo teorema è anche noto come *Teorema di Banach-Cacioppoli*

Sia (X, d) uno spazio metrico e $T : X \to X$. Allora

$$\left.\begin{array}{l} X \textbf{ Completo} \\ T \textbf{ Contrazione} \end{array}\right\} \implies \exists!\, x_* \in X : \quad T(x_*) = x_*$$

Cioè esiste un **unico Punto Fisso** di T in X.

Dimostrazione. La dimostrazione si divide in 3 passaggi

1. *Individuazione di una Successione di Cauchy*
   Dato un generico $x_0 \in X$ si costruisce una successione x nel seguente modo:

$$x_0 \in X \qquad x_1 = T(x_0) \qquad x_2 = T(x_1) \qquad \dots \qquad x_{n+1} = T(x_n) \tag{4.6.1}$$

   La successione $x : \mathbb{N} \to X$ è sicuramente ad elementi in X in quanto T, contrazione, è per definizione $T : X \to X$. È necessario dimostrare che la x sia di Cauchy (Definizione 2.11 (Successione di Cauchy)) cioè che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > \nu \text{ vale } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

   Presi ora due qualunque n e m e sfruttando il modo in cui è definita la successione x:

$$d(x_n, x_m) = d\big(T(x_{n-1}), T(x_{m-1})\big)$$

   Grazie al fatto che T è contrazione, per definizione esiste un $K \in [0, 1[$ per cui

$$\leq K \cdot d(x_{n-1}, x_{m-1})$$

   Ripetendo gli ultimi due passaggi, si continua

$$= d\big(T(x_{n-2}), T(x_{m-2})\big)$$
$$\leq K^2 \cdot d(x_{n-2}, x_{m-2})$$

   Ipotizzando ora $n < m$, sicuramente dopo un n numero di passi analoghi si arriverà a 0

$$\leq K^n \cdot d(x_0, x_{m-n})$$

   Quindi, andando dal primo all'ultimo passaggio, si è ottenuta la disuguaglianza

$$d(x_n, x_m) \leq K^n \cdot d(x_0, x_{m-n}) \tag{4.6.2}$$

   Ora, applicando ripetutamente la disuguaglianza triangolare al secondo membro della Eq. (4.6.2)

$$K^n \cdot d(x_0, x_{m-n}) \leq K^n \cdot \Big(d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\Big)$$

   Applicando ora quanto ottenuto in Eq. (4.6.2) a tutti gli addendi

$$\leq K^n \cdot \Big(K^0 \cdot d(x_0, x_1) + K^1 \cdot d(x_0, x_1) + \ldots + K^{m-n-1} \cdot d(x_0, x_1)\Big)$$
$$\leq K^n \cdot (1 + K + \ldots + K^{m-n-1}) \cdot d(x_0, x_1)$$

Quindi riassumento, partendo dal primo membro dalla Eq. (4.6.2), si è arrivati a

$$d(x_n, x_m) \leq K^n \cdot (\underbrace{1 + K + \ldots + K^{m-n-1}}_{(1)}) \cdot d(x_0, x_1) \tag{4.6.3}$$

Posta ora la (1) di Eq. (4.6.3) come s si ha:

$$s = 1 + K + \ldots + K^{m-n-1} \qquad \text{e, moltiplicando per } K, \qquad K \cdot s = K + K^2 + \ldots + K^{m-n}$$

Da cui, eseguendo la differenza tra s e $K \cdot s$

$$\begin{aligned} & s - K \cdot s \\ =& (1 + \cancel{K} + \cancel{\ldots} + K^{m-n-1}) - (\cancel{K} + \cancel{K^2} + \cancel{\ldots} + K^{m-n}) \\ =& 1 - K^{m-n} \end{aligned}$$

si ottiene l'equivalenza

$$\begin{aligned} s - K \cdot s &= 1 - K^{m-n} \\ s(1 - K) &= 1 - K^{m-n} \\ s &= \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} \end{aligned}$$

Sostituendo la formulazione di s appena trovata in Eq. (4.6.3) si ottiene

$$d(x_n, x_m) \leq K^n \cdot \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} \cdot d(x_0, x_1) \tag{4.6.4}$$

Essendo $K \in [0, 1[$, eseguendone l'elevamento a potenza otterrò un numero ancor più piccolo. È dunque certo che

$$1 - K^{m-n} \geq 1 - K \implies \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} \leq 1$$

per cui è sicuramente possibile minorare la Eq. (4.6.4) che diventa

$$d(x_n, x_m) \leq K^n \cdot d(x_0, x_1) \tag{4.6.5}$$

Nota. La Eq. (4.6.5), per come è scritta, fornisce un importante risultato. Grazie a questa equazione, noto n e calcolando solo la distanza tra gli elementi 0 ed 1 della successione (facilmente individuabili) si ha un limite superiore per la $d(x_n, x_m)$ $\forall n, m$. Non sarebbe stato invece possibile calcolare la $d(x_0, x_{n-m})$ trovata ancora prima.

Questa minorazione permette di verificare la definizione di successione di Cauchy, dunque la x definita in Eq. (4.6.1) è di Cauchy. □

2. *Individuazione del Punto Fisso*
   La successione x definita in Eq. (4.6.1), essendo stata dimostrata di Cauchy nel passo precedente, per Definizione 2.13 (Spazio Metrico Completo) ammette sicuramente $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_* \in X$. Inoltre

$$T \text{ Contrazione} \overset{\substack{\text{Come da} \\ \text{Definizione 4.1 (Contrazione)}}}{\Longrightarrow} T \text{ Lipschitziana} \overset{\substack{\text{Per} \\ \text{Proposizione 3.38}}}{\Longrightarrow} T \text{ Unif. Cont.} \overset{\substack{\text{Per} \\ \text{Proposizione 3.22}}}{\Longrightarrow} T \text{ Continua}$$

Posto quindi

$$T(x_*) = T\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big)$$

Grazie alla continuità di T

$$= \lim_{n\to+\infty} \big(T(x_n)\big)$$

Dunque, per come è definita x

$$= \lim_{n\to+\infty} (x_{n+1})$$
$$= x_*$$

□

3. *Dimostrazione unicità punto fisso*
   Si suppone non sia unico

$$x_0, y_0 \in X \quad x_0 \neq y_0 \qquad T(x_0) = x_0,\ T(y_0) = y_0$$

Calcolando la distanza tra i due punti, sfruttando il fatto che siano punti fissi per definizione ed, infine, essendo T contrazione si ottiene

$$d(x_0, y_0) = d\big(T(x_0), T(y_0)\big) \leq K \cdot d(x_0, y_0)$$
$$d(x_0, y_0) - K \cdot d(x_0, y_0) \leq 0$$
$$(1 - K)\big(d(x_0, y_0)\big) \leq 0 \tag{4.6.6}$$

Però

- $1 - k > 0$ strettamente positivo perché, per Definizione 4.1 (Contrazione) $k \in [0, 1[$
- $d(x_0, y_0) \geq 0$ per Definizione 1.2 (Spazio Metrico)

Allora deve essere per forza $d(x_0, y_0) = 0$ per non contraddire la Eq. (4.6.6), dunque, per proprietà 2 delle distanze (Definizione 1.2 (Spazio Metrico)), $x_0 = y_0$.

□

Esercizio 4.7
I passaggi da Eq. (4.6.2) a Eq. (4.6.5) sono necessari?

Soluzione. Vedere nota alla dimostrazione del Teorema 4.6 (delle Contrazioni) ■

Esempio 4.8
Se X *non* è completo:
Siano $X =]0, 1[$ e $T : X \to X$ data $T(x) = \frac{x}{2}$. T è una contrazione senza punti fissi in X

Esempio 4.9
Se T è *quasi* una contrazione possono non esserci punti fissi:
Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $T : X \to X$ data da $T(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Grazie al Teorema di Lagrange (da Analisi 1, essendo in $\mathbb{R}$) si può facilmente dimostrare che $\forall x', x'' \in X$

$$\big|T(x'') - T(x')\big| < \big|x'' - x'\big|$$

però T non è una contrazione ed infatti non ammette punti fissi.

Esempio 4.10
Se T è *quasi* una contrazione possono esserci infiniti punti fissi:
Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $T : X \to X$ data da $T(x) = x$. Evidentemente

$$\left|T(x'') - T(x')\right| = \left|x'' - x'\right|$$

e T ammette infiniti punti fissi.

Esercizio 4.11
Sia $f\,[0,1] \to [1,2]$ data da $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$
f è una funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz $\frac{1}{2}$ definita tra spazi metrici completi ma senza punti fissi. È in contraddizione con il Teorema 4.6 (delle Contrazioni)?

Esercizio 4.12
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile su $\mathbb{R}$ e tale che $f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Dimostrare che allora esiste un unico $x_* \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_*) = x_*$

Soluzione. $\mathbb{R}$ è Completo come da Esempio 2.14 (Esempi di Spazi Metrici Completi e non), inoltre la f è Contrazione per Proposizione 4.4, dunque è possibile applicare il Teorema 4.6 (delle Contrazioni) ed arrivare alla tesi. ■

Osservazione 4.13
È utile considerare **contrazioni** che dipendono da uno o più **parametri**. Siano (X,d) uno spazio metrico completo, P un **insieme** di parametri e $T : X \times P \to X$.
Grazie al Teorema 4.6 (delle Contrazioni) è data l'esistenza di un punto fisso di T indipendentemente dal parametro. È dunque possibile definire una funzione $\varphi : P \to X$ che ad ogni parametro $p \in P$ associa $\varphi(p)$, unico punto fisso della contrazione.
In generale, la regolarità della funzione φ è la stessa con cui T dipende dal parametro p. Vedasi Teorema 4.15 (delle Contrazioni con Parametro) e Teorema 4.17

Definizione 4.14 (Contrazione con Parametro)
Siano (X,d) uno **Spazio Metrico** e P un **Insieme**

$$\begin{gathered} T \text{ è una } \textbf{Contrazione} \text{ in } x \in X \ \textbf{Uniformemente} \text{ in } p \in P \\ \rightleftharpoons \\ \exists K \in [0,1[\, : \ \forall p \in P, \ \forall x', x'' \in X \quad \text{vale} \quad d\Big(T\big(x',p\big), T\big(x'',p\big)\Big) \leq K \cdot d(x', x'') \end{gathered} \tag{4.14.1}$$

Cioè, indipendentemente da qualsiasi $p \in P$, la T rimane contrazione.

Teorema 4.15 (delle Contrazioni con Parametro)
Siano:

- (X, d_X) uno spazio metrico completo
- (P, d_P) uno spazio metrico
- $T : X \times P \to X$ una contrazione in $x \in X$ uniformemente in $p \in P$
- T continua

Allora $\forall p \in P$ esiste un unico punto fisso x_p per la funzione $x \mapsto T(x,p)$ e la funzione $P \to X_p$ è continua.

Dimostrazione. Come già detto in Osservazione 4.13, il Teorema 4.6 (delle Contrazioni) assicura l'esistenza di una funzione $\varphi : P \to X$ che ad ogni $p \in P$ associa un unico punto fisso di $x \mapsto T(x, p)$.
φ è continua. Infatti se $p_n \to p_0$

$$d_X\big(\varphi(p_n), \varphi(p_0)\big) =$$

Essendo $\varphi(p_n)$ per definizione punto fisso di T con parametro p_n

$$= d_X\Big(T\big(\varphi(p_n), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_0\big)\Big)$$

Applicando la disuguaglianza triangolare

$$\leq d_X\Big(T\big(\varphi(p_n), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_n\big)\Big) + d_X\Big(T\big(\varphi(p_0), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_0\big)\Big)$$

Con la definizione di contrazioni

$$\leq K \cdot d_X\big(\varphi(p_n), \varphi(p_0)\big) + d_X\Big(T\big(\varphi(p_0), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_0\big)\Big)$$

Dunque

$$d_X\big(\varphi(p_n), \varphi(p_0)\big) \leq K \cdot d_X\big(\varphi(p_n), \varphi(p_0)\big) + d_X\Big(T\big(\varphi(p_0), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_0\big)\Big)$$

Da cui, infine

$$d_X\big(\varphi(p_n), \varphi(p_0)\big) \leq \frac{1}{1-K} \cdot d_X\Big(T\big(\varphi(p_0), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_0\big)\Big)$$

Ed il secondo membro tende a 0 per $n \to +\infty$ grazie alla continuità di T, quindi da Proposizione 3.11 (Continuità e Continuità per Successioni) la φ è continua. □

Definizione 4.16 (Contrazione Lipschitziana in Parametro)
Siano (X, d_X) e (P, d_P) spazi metrici

T è una **Contrazione** in $x \in X$ **Lipschitziana** in $p \in P$

$$\rightleftharpoons$$

$$\exists K \in [0,1[\,, \exists L > 0 : \ \forall p', p'' \in P, \forall x', x'' \in X \text{ vale}$$
$$d_X\big(T(x', p'), T(x'', p'')\big) \leq K \cdot d_X(x', x'') + L \cdot d_P(p', p'')$$

Cioè, si aggiunge la Lipschitzianità rispetto al parametro

Teorema 4.17
Siano:

- (X, d_X) uno spazio metrico completo
- (P, d_P) uno spazio metrico
- $T : X \times P \to X$ una contrazione in $x \in X$ Lipschitziana in $p \in P$

Allora esiste un'unica funzione Lipschitziana $\varphi : P \to X$ tale che $\varphi(p)$ è l'unico punto fisso della funzione $x \mapsto T(x, p)$

Nota. L'unicità del punto fisso implica automaticamente l'unicità della funzione φ

Dimostrazione. Come già detto in Osservazione 4.13, il Teorema 4.6 (delle Contrazioni) assicura l'esistenza di una funzione $\varphi : P \to X$ che ad ogni $p \in P$ associa un unico punto fisso di $x \mapsto T(x, p)$.
φ è Lipschitziana. Infatti

$$d_X\big(\varphi(p'), \varphi(p'')\big) =$$

Essendo $\varphi(p)$ per definizione punto fisso di T con parametro p

$$= d_X\Big(T\big(\varphi(p'), p'\big), T\big(\varphi(p''), p''\big)\Big)$$

Applicando la Definizione 4.16 (Contrazione Lipschitziana in Parametro)

$$\leq K \cdot d_X\big(\varphi(p'), \varphi(p'')\big) + L \cdot d_P(p', p'')$$

Dunque

$$d_X\big(\varphi(p'), \varphi(p'')\big) \leq K \cdot d_X\big(\varphi(p'), \varphi(p'')\big) + L \cdot d_P(p', p'')$$

Da cui, infine

$$d_X\big(\varphi(p'), \varphi(p'')\big) \leq \frac{L}{1-K} \cdot d_P(p', p'')$$

Che dimostra la Lipschitzianità di φ □

Esercizio 4.18
Nel presente capitolo, ambientato in spazi metrici, non viene trattata la derivabilità del punto fisso rispetto al parametro. Perché?

Definizione 4.19 (Funzione Iterata)
Data $F : X \to X$, si dice **Funzione Iterata** n volte di F la F^n che corrisponde all'**applicazione** n volte di F **su sè stessa**. Formalmente:

$$f^{n+1} = f \circ f^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Se $n = 0$, per definizione, $f^0 = \mathrm{Id}_X$ con Id_X funzione identità su X

Teorema 4.20 (dell'Iterata Contrazione)
Sia (X, d_X) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X : \exists n \in \mathbb{N}, T^n$ **Iterata** è contrazione.
Allora T ammette un unico punto fisso in X

> ***Nota.*** La n non è univocamente definita e non potrebbe esserlo.
> Se infatti T^n è contrazione, allora anche T^{2n}, T^{3n}, $\cdots$, $T^{\alpha n}$ lo sono.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.6 (delle Contrazioni) esiste un unico punto fisso $x_* \in X$ per T^n, quindi

$$T^n x_* = x_*$$

applicando T ad entrambi i membri

$$T(T^n x_*) = T x_*$$

e per la Definizione 4.19 (Funzione Iterata)

$$T(T^n x_*) = T^n(T x_*) = T x_*$$

Dunque Tx_* è punto fisso della T^n. Avevamo però già trovato che x_* era punto fisso della T^n e, per il Teorema 4.6 (delle Contrazioni), può esistere un unico punto fisso. Ciò permette di concludere che $Tx_* = x_*$ □

Esercizio 4.21
Enunciare e dimostrare formalmente il *Teorema dell'Iterata Contrazione con Parametro*

5 Funzioni a Valori in $\mathbb{R}^n$

In tutto questo paragrafo si hanno $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$. Con $\mathbb{R}^n$ viene indicato lo spazio metrico $\mathbb{R}$ dotato dell'usuale **Metrica Euclidea**: $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (y_i - x_i)^2}$ da Esempio 1.7 (Esempi di Metriche).
Questo spazio si dice anche Definizione 1.3 (Spazio Vettoriale Metrico).

> ***Nota.*** Diverse dimostrazioni di questo capitolo sono omesse in quanto estremamente simili a quelle di Analisi 1.

5.1 Il Caso Generale

Proposizione 5.1
Siano (X,d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}^n$, $g : A \to \mathbb{R}^n$ e x_0 **di accumulazione** per A, allora se:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \text{ esiste finito} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \text{ esiste finito} \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) \quad \exists \text{ finito} \\ e \\ \lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \\ \\ \lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) \quad \exists \text{ finito} \\ e \\ \lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \end{array}\right.$$

> ***Nota.*** $f \cdot g$ indica il prodotto scalare $f \cdot g = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i$

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio 5.2
Dimostrare la Proposizione 5.1

Soluzione. Dalla Definizione 3.1 (Limite per Funzione)

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_f > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x,x_0) < \delta_f \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } \|f(x) - l_f\| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_g > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x,x_0) < \delta_g \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } \|g(x) - l_g\| < \varepsilon \end{array}$$

Fissato ε, si può scegliere $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ e quindi è possibile dire che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta : \forall x \in A \text{ con } d_X(x,x_0) < \delta \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } \|(f+g)(x) - (l_f + l_g)\| < \varepsilon \tag{5.2.1}$$

Essendo

$$\|(f+g)(x) - (l_f + l_g)\| = \left\|\big(f(x) - l_f\big) + \big(g(x) - l_g\big)\right\|$$

Per proprietà 3 da Definizione 1.8 (Norma)

$$\leq \|f(x) - l_f\| + \|g(x) - l_g\|$$

Quest'ultima forma è sicuramente $< \varepsilon$ per Eq. (5.2.1), quindi la somma dei limiti corrisponde al limite della somma.
Analogamente si svolge per il prodotto. ■

Esercizio 5.3
Enunciare e dimostrare un analogo della Proposizione 5.1 per il prodotto vettoriale

Proposizione 5.4
Siano:

- (X, d) **Spazio Metrico**
- $A \subseteq X$
- x_0 **di Accumulazione** per A
- $f : A \to \mathbb{R}^n$ e $g : A \to \mathbb{R}^m$

Posta dunque

$$\begin{array}{rcccc} F & : & A & \to & \mathbb{R}^{n+m} \\ & & x & \mapsto & \big(f(x),\ g(x)\big) \end{array}$$

Allora

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \text{ esiste finito} \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ esiste finito} \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to x_0} F(x) \quad \text{esiste finito} \\ e \\ \lim\limits_{x\to x_0} F(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right) \end{array}\right.$$

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio 5.5
Dimostrare la Proposizione 5.4

Osservazione 5.6
Le proposizioni precedenti sono esempi di **Forme Determinate**, vedasi Esercizio 5.18 e Esercizio 5.19.

5.2 Il Caso Reale

Teorema 5.7 (del Confronto)
Siano

- (X, d) **Spazio Metrico**
- $A \subseteq X$
- x_0 **di Accumulazione** per A
- $f, g : \ A \to \mathbb{R}$
- $L_f, L_g \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_f \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_g \end{cases}$

Allora:

1. $L_f < L_g \quad \implies \quad \exists r > 0 : \ \forall x \in A \text{ con } d(x, x_0) < r \text{ e } x \neq x_0 \quad f(x) < g(x)$
2. $\exists r > 0 : \ \forall x \in A \text{ con } d(x, x_0) < r \text{ e } x \neq x_0 \quad f(x) \leq g(x) \quad \implies \quad L_f \leq L_g$

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio 5.8
Mostrare con esempi che i viceversa delle tesi 1 e 2 del Teorema 5.7 (del Confronto) non valgono.

Teorema 5.9 (dei Due Carabinieri)
Siano

- (X, d) **Spazio Metrico**
- $A \subseteq X$
- x_0 **di Accumulazione** per A
- $f, g, h : A \to \mathbb{R}$
- $L \in \mathbb{R}$

Allora

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L \\ f \leq g \leq h \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} \text{esiste} \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \\ e \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \end{array}\right.$$

Dimostrazione. Omessa. □

Proposizione 5.10
Siano (X, d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e x_0 **di Accumulazione** per A, allora

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \\ f \leq g \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} \text{esiste} \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \\ e \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty \end{array}\right.$$

Dimostrazione. Omessa. □

Proposizione 5.11
Siano (X, d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e x_0 **di Accumulazione** per A, allora

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \\ f \leq g \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} \text{esiste} \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \\ e \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \end{array}\right.$$

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio 5.12
Enunciare e dimostrare affermazioni analoghe alle:

- Teorema 5.7 (del Confronto)
- Teorema 5.9 (dei Due Carabinieri)
- Proposizione 5.10
- Proposizione 5.11

con successioni al posto delle funzioni.

Esercizio 5.13
Dimostrare:

- Teorema 5.7 (del Confronto)
- Teorema 5.9 (dei Due Carabinieri)
- Proposizione 5.10

- Proposizione 5.11

prima direttamente attraverso la Definizione 3.1 (Limite per Funzione), poi utilizzando la Proposizione 3.4 (Continuità per Successioni) ed Esercizio 5.12.

Esercizio 5.14
Nel caso dello spazio metrico $X = \mathbb{R}$ dotato della Metrica Euclidea, enunciare e dimostrare affermazioni analoghe alle:

- Teorema 5.7 (del Confronto)
- Teorema 5.9 (dei Due Carabinieri)
- Proposizione 5.10
- Proposizione 5.11

con $\pm\infty$ al posto di x_0

Proposizione 5.15
Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $f : A \to \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ esiste finito e non nullo} \implies \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} \text{ esiste finito} \\ \qquad e \\ \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} \end{cases}$$

Dimostrazione. Omessa □

Esercizio 5.16
Dimostrare la Proposizione 5.15

Esercizio 5.17
Perché la Proposizione 5.15 è stata enunciata per funzioni a valori reali e non in $\mathbb{R}^n$

Soluzione. Perché non è possibile eseguire l'operazione di divisione rispetto ad un vettore, dunque non si può trovare il reciproco di un vettore. ■

Esercizio 5.18
Enunciare correttamente e dimostrare le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned}
f \text{ limitata e } \lim g = +\infty &\implies \lim(f+g) = +\infty \\
f \text{ limitata e } \lim g = -\infty &\implies \lim(f+g) = -\infty \\
f \geq c > 0 \text{ e } \lim g = +\infty &\implies \lim(fg) = +\infty \\
f \leq c < 0 \text{ e } \lim g = +\infty &\implies \lim(fg) = -\infty \\
f \text{ limitata e } \lim g = +\infty &\implies \lim\left(\frac{f}{g}\right) = 0 \\
f \text{ limitata e } \lim g = -\infty &\implies \lim\left(\frac{f}{g}\right) = 0
\end{aligned}$$

Considerare entrambi i casi $x \to x_0$ e $x \to +\infty$.

Esercizio 5.19

Nota. Spesso le situazioni considerate in questo esercizio sono dette *Forme di Indeterminazione*

Esibire esempi di coppie di funzioni f e g, aventi valori in $\mathbb{R}$, con i seguenti comportamenti:

$$
\begin{array}{llll}
\lim f = +\infty, & \lim g = -\infty & \text{e} & \lim(f+g) = +\infty \\
\lim f = +\infty, & \lim g = -\infty & \text{e} & \lim(f+g) = \pi \\
\lim f = +\infty, & \lim g = -\infty & \text{e} & \lim(f+g) = 0 \\
\lim f = +\infty, & \lim g = -\infty & \text{e} & \lim(f+g) = -\infty \\
\lim f = +\infty, & \lim g = -\infty & \text{e} & \lim(f+g) = \nexists
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\lim f = +\infty, & \lim g = 0 & \text{e} & \lim(fg) = +\infty \\
\lim f = +\infty, & \lim g = 0 & \text{e} & \lim(fg) = \pi \\
\lim f = +\infty, & \lim g = 0 & \text{e} & \lim(fg) = 0 \\
\lim f = +\infty, & \lim g = 0 & \text{e} & \lim(fg) = -\infty \\
\lim f = +\infty, & \lim g = 0 & \text{e} & \lim(fg) = \nexists
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\lim f = +\infty, & \lim g = +\infty & \text{e} & \lim\left(\dfrac{f}{g}\right) = +\infty \\
\lim f = +\infty, & \lim g = +\infty & \text{e} & \lim\left(\dfrac{f}{g}\right) = \pi \\
\lim f = +\infty, & \lim g = +\infty & \text{e} & \lim\left(\dfrac{f}{g}\right) = 0 \\
\lim f = +\infty, & \lim g = +\infty & \text{e} & \lim\left(\dfrac{f}{g}\right) = \nexists
\end{array}
$$

Considerare entrambi i casi $x \to x_0$ e $x \to +\infty$.

Esercizio 5.20
Esibire esempi di coppie di funzioni f e g, aventi valori in $\mathbb{R}$, con i seguenti comportamenti:

$$
\begin{array}{llll}
\lim f \ \nexists, & \lim g = +\infty & \text{e} & \lim(f+g) = +\infty \\
\lim f \ \nexists, & \lim g = +\infty & \text{e} & \lim(fg) = +\infty \\
\lim f \ \nexists, & \lim g = 0 & \text{e} & \lim(fg) = +\infty
\end{array}
$$

Considerare entrambi i casi $x \to x_0$ e $x \to +\infty$.

Esercizio 5.21
È possibile enunciare le:

- Teorema 5.7 (del Confronto)
- Teorema 5.9 (dei Due Carabinieri)
- Proposizione 5.10
- Proposizione 5.11

per funzioni con valori in un generico spazio metrico?

Corollario 5.22 (Teorema di Weierstrass - Analisi 1)
Siano:

- (X, d_X) uno spazio metrico
- $A \subseteq X$
- $f: A \to \mathbb{R}$ **Continua**
- $K \subseteq A$ **Compatto** in X

Allora f ammette **Massimo** e **Minimo** su K, vale a dire che esistono finite le quantità $\max\limits_K f$ e $\min\limits_K f$.

Dimostrazione. Vedere Esercizio 3.16 (Teorema di Weierstrass - Analisi 1). □

Corollario 5.23
Siano:

- (X, d_X) uno spazio metrico
- $A \subseteq X$
- $f: A \to \mathbb{R}$ **Continua**
- $C \subseteq A$ **Connesso** in X
- $x_1, x_2 \in C$

Allora f assume tutti i valori intermedi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

Dimostrazione. Segue dalle Proposizione 3.17 e Proposizione 2.30. □

Corollario 5.24
Siano:

- (X, d_X) uno spazio metrico
- $A \subseteq X$
- $f: A \to \mathbb{R}$ **Continua**
- $C \subseteq A$ **Connesso** in X
- $x_1, x_2 \in C$ tali che $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

Allora esiste un $x_* \in \mathbb{C}$ tale che $f(x_*) = 0$

Dimostrazione. Immediata. □

Esercizio 5.25
Il Corollario 5.24, nel corso di Analisi Matematica 1, viene spesso dimostrato attraverso il metodo di bisezione. Questo metodo è applicabile ad un generico spazio metrico?

Teorema 5.26 (della Permanenza del Segno)
Siano (X, d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ e $f: A \to \mathbb{R}$ **Continua**, allora

$$f(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \Big\{ \exists r > 0 \text{ tale che } \forall x \in A \text{ con } d(x, x_0) < r \text{ vale } f(x) > 0$$

Dimostrazione. Applicare il Teorema 5.7 (del Confronto), tesi 1, utilizzando la funzione identicamente nulla. □

Esercizio 5.27
Perché il Teorema 5.26 (della Permanenza del Segno) è stato enunciato solo per funzioni a variabili reali?

Soluzione. Perché non esiste relazione d'ordine tra vettori di $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$. ■

Esercizio 5.28
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**, $x_0 \in A$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$ **Continue** in x_0.

- Le funzioni $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono continue in x_0?
- Se f e g sono **Lipschitziane** su A, lo sono anche $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$?

Capitolo 2

Calcolo Differenziale

In questo capitolo sono trattate funzioni $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dove $r, m \in \mathbb{N}$ e $n, m \geq 1$. Generalmente, effettuata una dimostrazione per $m = 1$ è abbastanza semplice passare ad un $m > 1$ *affiancando* le componenti, mentre non è altrettanto triviale il passaggio a $n > 1$.

6 Preliminari

In $\mathbb{R}^n$ verranno usate le (note) strutture vettoriale con la metrica Euclidea di Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)

La base canonica di R^n è indicata con $(e_1, \dots, e_n)$ dove e_i è il vettore di R^n con tutte le componenti nulle tranne la *i-esima* che è posta ad 1. È dunque possibile scrivere un generico vettore x come combinazione lineare dei vettori della base canonica $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Nel caso $n = 2$ è usata la notazione $(x, y) = xi + yj$. Nel caso $n = 3$ è usata la notazione $(x, y, z) = xi + yj + zk$.

Alcune classi di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hanno nomi particolari:

- $n = 1$, $m = 1$: f è una *funzione reale di una variabile reale*;
- $n = 1$, $m > 1$: f è una *curva* in R^m (purché f sia almeno continua e A sia un intervallo)
- $n > 1$, $m = 1$: f è un *campo scalare*
- $n > 1$, $m > 1$: f è un *campo vettoriale* (soprattutto nei casi $n = m = 2$ e $n = m = 3$)

7 Derivate Parziali e Direzionali

Partendo dalla nozione di Analisi 1 di Derivata, cioè:

$$f'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \qquad \textbf{(NB. Analisi 1!)}$$

si estende il concetto di derivata alle funzioni in spazi n-*dimensionali* mediante le seguenti definizioni.

Definizione 7.1 (Derivata Direzionale)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo. Quando il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$$

esiste finito, il suo valore è la **Derivata Direzionale** di f in x_0 **nella direzione** v e si indica con $\boldsymbol{D_v f(x_0)}$

> ***Nota.*** Non è richiesto che la funzione sia continua nello spazio per calcolarne la derivata direzionale, è sufficiente sia continua nella direzione considerata. Vedasi Esempio 7.3

> ***Nota.*** L'introduzione del vettore v permette di eseguire un'operazione "sensata" in quanto sottrarre uno scalare, come in Analisi 1, non avrebbe avuto significato per una funzione $f : A \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$.

> ***Nota.*** Per una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la derivata direzionale di f in x_0 lungo una qualunque direzione, se esiste, è un vettore con m componenti.

Definizione 7.2 (Derivata Parziale)
Dalla Definizione 7.1 (Derivata Direzionale), nel caso in cui $v = e_i$ della base canonica, allora $\boldsymbol{D_{e_i} f(x_0)}$ è detta **Derivata Parziale *i-esima***. Può anche essere indicata con $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}$.
Quindi le derivate parziali sono *un caso particolare* delle derivate direzionali.

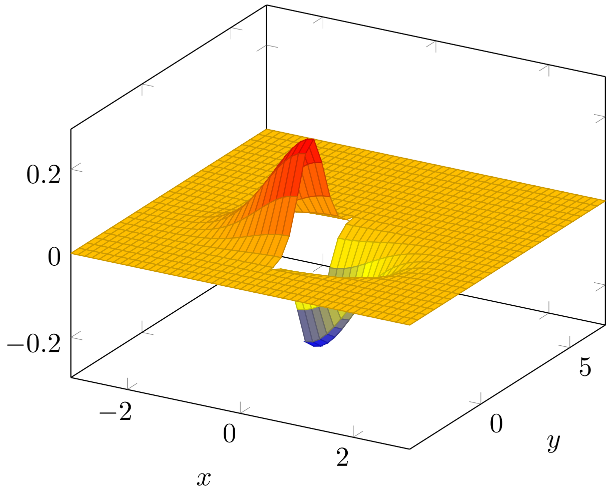
Una funzione **derivabile parzialmente in ogni direzione** è detta **Derivabile**.

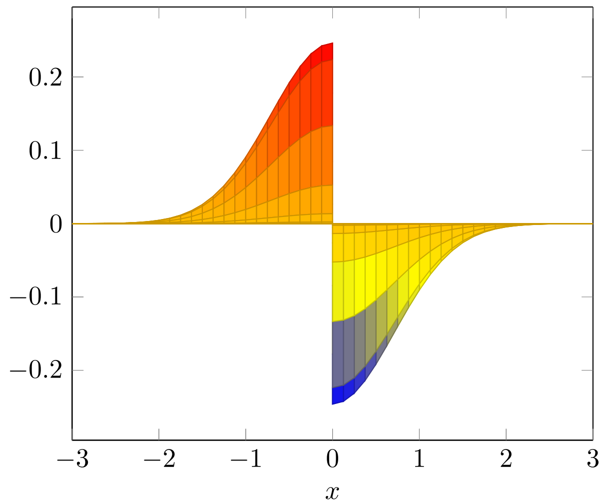
> ***Nota.*** Altre notazioni comunemente utilizzate per le derivate parziali sono: $D_i f$, $D_{x_i} f$, $\partial_i f$, $\partial_{x_i} f$, f_{x_i}

> ***Nota.*** Nel calcolo delle derivate parziali è bene distinguere tra la variabile rispetto a cui si deriva ed il valore in cui la derivata viene calcolata.

> ***Nota.***
> Nel caso $n = 2$ le derivate parziali di f si indicano $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ o, equivalentemente, $\partial_x f$ e $\partial_y f$.
> Nel caso $n = 3$ le derivate parziali di f si indicano $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ o, equivalentemente, $\partial_x f$, $\partial_y f$ e $\partial_z f$.
> Nel caso $n > 3$, notazioni usate sono $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ o $\partial_{x_i} f$ per $i = 1, \dots, n$.

Esempio 7.3
La funzione del seguente grafico è derivabile in $(0, 0)$ solo lungo y perché non presenta discontinuità. Scegliendo una qualsiasi altra direzione non risulta continua e, dunque, nemmeno derivabile.





Esercizio 7.4
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ derivabile in x_0, con $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ definita da $g(x, y) = f(y, x)$
Come sono legate le derivate parziali di f e g in x_0?

Esercizio 7.5
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, derivabile in $x_0 \in \mathring{A}$. Determinare le derivate parziali in x_0 delle funzioni

- $F : A \to \mathbb{R}^2$ definita da $\big(f(x), f(x)\big)$
- $G : A \times A \to \mathbb{R}$ definita da $G(x, y) = f(x) + f(y)$

Proposizione 7.6
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathring{A}$. f è **derivabile parzialmente** rispetto alla *i-esima* coordinata se e solo **se esiste** finito il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{t} \tag{7.6.1}$$

Dimostrazione. Da Definizione 7.1 (Derivata Direzionale), scegliendo $v = e_i$ della base canonica, si ottiene la Eq. (7.6.1). □

Esercizio 7.7
Formulare in modo rigoroso e dimostrare:

1. La somma di funzioni parzialmente derivabili è parzialmente derivabile.
2. La composizione di funzioni parzialmente derivabili è parzialmente derivabile.
3. Prodotto e rapporto (quando definiti) di funzioni parzialmente derivabili sono funzioni parzialmente derivabili.

Esempio 7.8
Sia

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x, y) & \mapsto & \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ \sin(xy^2) \\ e^{xy} \end{bmatrix} \end{array}$$

Allora la funzione f è derivabile parzialmente su tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{bmatrix} 2 \\ y^2 \cos(xy^2) \\ ye^{xy} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2xy \cos(xy^2) \\ xe^{xy} \end{bmatrix}$$

Proposizione 7.9
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$, allora

$$f \text{ è } \textbf{Derivabile} \text{ in } x_0 \text{ nella direzione } v$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall i = 1, \dots, m \quad \text{la } \textbf{componente } f_i \textbf{ è derivabile} \text{ in } x_0 \text{ nella direzione } v$$

Dimostrazione. Applicando Proposizione 2.6 e Proposizione 3.11 (Continuità e Continuità per Successioni).

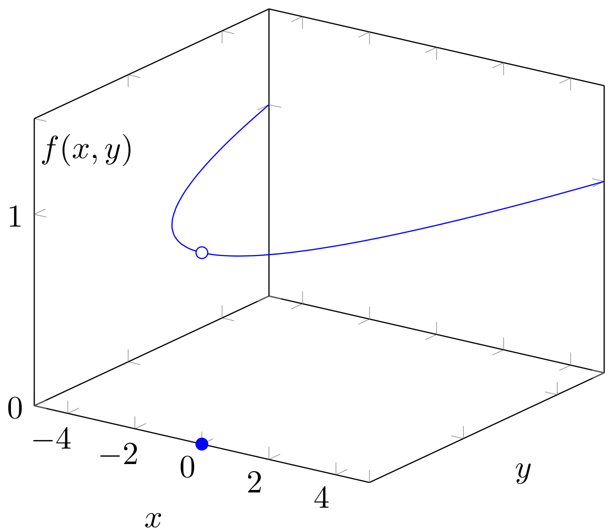
Nota. Questa è la dimostrazione proposta dal libro, ma non pare davvero sensata. Son accette pull request per integrare...

□

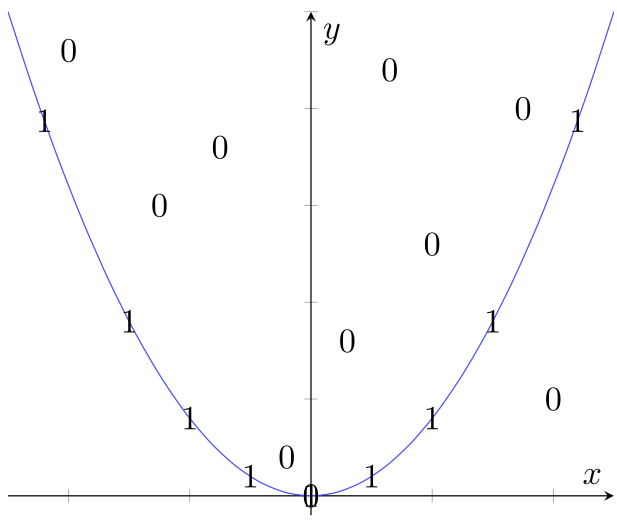
Esercizio 7.10
La derivabilità in ogni direzione non implica la continuità. Verificare che la funzione

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \text{ e } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array}$$

ammette nell'origine derivate direzionali in ogni direzione ma che *non* è continua nell'origine.



(a) Funzione nello spazio



(b) Valori della $f(x,y)$

Soluzione. Le derivate direzionali sono

$$\begin{aligned} \partial_x f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \\ \partial_y f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = 0 \\ D_v f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t_1,0+t_2)-f(0,0)}{t} = 0 \end{aligned}$$

Dunque, per ogni derivata parziale o direzionale in $(0,0)$ il valore della derivata sarà 0.
D'altro canto f in 0 *non* è continua in $(0,0)$, quindi si è verificato che la derivabilità non implichi la continuità con $\dim A > 1$ ■

Esercizio 7.11
Esibire una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che ammetta in (almeno) un punto una derivata parziale rispetto ad x ma non rispetto a y

Soluzione. La

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x+\sqrt{y} \end{array}$$

È derivabile parzialmente rispetto a x ma non rispetto a y in $(0,0)$, infatti

$$\begin{aligned} \partial_x f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{t-0}{t} = 1 \\ \partial_y f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \frac{\sqrt{t}-0}{t} = +\infty \implies \nexists \text{ limite finto} \end{aligned}$$

■

8 Derivata Totale

Teorema 8.1 (di Lagrange)

> ***Nota.*** Questo teorema viene trattato approfonditamente nel corso di Analisi 1 e si applica solo a funzioni $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, qui verrà solo riportato rapidamente l'enunciato

> ***Nota.*** Questo teorema è anche noto come *Teorema del Valor Medio Differenziale*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione **Continua** nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e **Derivabile** nell'intervallo aperto $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto

$$c \in \,]a, b[\, : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

O, alternativamente, nella forma

$$\xi \in \,]0, 1[\, : f'(x_0 + \xi h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione 8.2 (o piccolo)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ due funzioni.

$$f = o(g) \text{ per } x \to x_0 \qquad \rightleftharpoons \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} = 0$$

che si legge f è **o piccolo** di g.

> ***Nota.*** Scrivere $f(x) = o(x^k)$ per $x \to 0$ significa che $f = o(g)$ con $g = x^k$

> ***Nota.*** Con $o(1)$ per $x \to x_0$ si intende una qualunque funzione tendente a 0 per $x \to x_0$.

Esercizio 8.3
Perché son state utilizzate le norme nella Definizione 8.2 (o piccolo)?

Soluzione. Perché l'operazione di divisione è sensata solo tra due scalari, non tra vettori. ■

Esercizio 8.4
Quali tra le seguenti uguaglianze sono vere? (In tutte, $x \to 0$)

- $o(x) = o(x) + o(x)$
- $o(x^2) = o(x) \cdot o(x)$
- $o(x^2) = o(x) - o(x)$
- $\sqrt{x} = o(x)$
- $o(x) = |o(x)|$
- $x = o(\sqrt{x})$
- $o(x) = 10^6 o(x)$
- $x + x^2 = o(x)$
- $x = o(x + x^2)$

La seguente definizione è da ritenersi già nota da Analisi 1

Definizione 8.5 (Derivata in $\mathbb{R}$)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$

$$f \text{ **Derivabile** in } x_0 \quad \rightleftharpoons \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ esiste finito}$$

Direttamente dalla nozione di Analisi 1 di derivata, si ottiene la seguente relazione tra derivata e coefficiente angolare della retta tangente in un punto

Proposizione 8.6 (Derivata Analisi 1)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$

$$f \text{ \textbf{Derivabile} in } x_0$$
$$\iff$$
$$\exists m \in \mathbb{R} : \ f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h) \text{ per } h \to 0$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
& f \text{ è derivabile in } x_0 \\
\iff & \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{esiste finito} \\
\iff & \exists m \in \mathbb{R} : \ \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m \\
\iff & \exists m \in \mathbb{R} : \ \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - m = 0 \\
\iff & \exists m \in \mathbb{R} : \ \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - mh}{h} = 0
\end{aligned}$$

Per la nota alla Definizione 8.2 (o piccolo)

$$\begin{aligned}
\iff & \exists m \in \mathbb{R} : \ f(x_0 + h) - f(x_0) - mh = o(h) \text{ per } h \to 0 \\
\iff & \exists m \in \mathbb{R} : \ f(x_0 + h) = f(x_0) - mh + o(h) \text{ per } h \to 0
\end{aligned}$$

□

Analogamente a quanto fatto nella Proposizione 8.6 (Derivata Analisi 1), si definisce

Definizione 8.7 (Differenziale)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$

$$f \text{ è \textbf{Differenziabile} in } x_0$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\exists M \in \mathrm{Mat}(m \times n) : \ f(x_0 + h) = f(x_0) + Mh + o(h) \text{ per } h \to 0$$

La matrice M è la **Derivata Totale** di f calcolata in x_0 e si indica con $Df(x_0)$. $Df(x_0)$ è l'applicazione *lineare* che meglio approssima la variazione di f nelle vicinanze di x_0.

Nota. Verrà spiegato più avanti in Corollario 8.14 un metodo pratico di calcolo della Derivata Totale.

Osservazione 8.8 (Matrici Derivata Totale Particolari)
Data la matrice $Df(x_0)$ con m righe e n colonne:

- Se $n = 1$ e $m = 1$ $Df(x_0)$ è **Derivata** di Analisi 1, uno scalare
- Se $n > 1$ e $m = 1$ $Df(x_0)$ è **Gradiente** di f e si indica con $\nabla f(x_0)$ (*nabla* f) o $\operatorname{grad} f(x_0)$
- Se $n = 1$ e $m > 1$ $Df(x_0)$ è **Vettore Tangente** alla f
- Se $n > 1$ e $m > 1$ $Df(x_0)$ è **Matrice Jacobiana** di f e si può anche indicare con $J_f(x_0)$

Come si vedrà in Corollario 8.14, il Gradiente della *i-esima* variabile è la *i-esima* colonna di $Df(x_0)$.
Il Vettore Tangente della *j-esima* variabile è invece la *j-esima* riga di $Df(x_0)$.
Si veda Esempio 8.15 per alcuni esempi di Df con diverse forme.

Esercizio 8.9
Perché non è stata data una definizione di derivata attraverso il limite del rapporto incrementale?

Esempio 8.10
Siano $M \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ una matrice fissata, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ data da $f(x) = Mx$.
Allora f è differenziabile ovunqe e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $Df(x_0) = M$

Proposizione 8.11 (Unicità della Derivata Totale)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $M_1, M_2 \in \mathrm{Mat}(m \times n)$

$$\left.\begin{array}{l} M_1 \text{ derivata totale di } f \text{ in } x_0 \\ M_2 \text{ derivata totale di } f \text{ in } x_0 \end{array}\right\} \implies M_1 = M_2$$

Dimostrazione. Sia $t \in \mathbb{R}$ e sia fissato un vettore e_i della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Il *prodotto per scalare* $e_i t$ è ancora un vettore in $\mathbb{R}^n$ con l'i-esima componente uguale a t.

Si esegua ora

$$M_2 e_i - M_1 e_1 =$$

Moltiplicando e dividendo per t

$$= \frac{1}{t} M_2(e_i t) - \frac{1}{t} M_1(e_i t)$$

Grazie alla Definizione 8.7 (Differenziale)

$$= \frac{1}{t}[f(x_0 + te_i) - f(x_0) + o(t)] - \frac{1}{t}[f(x_0 + te_i) - f(x_0) + o(t)]$$
$$= \frac{1}{t} o(t) \text{ per } t \to 0$$

Essendo stato lasciato e_i generico, significa che è possibile applicare questo ragionamento ad uno qualsiasi degli n vettori della base canonica. Quindi è possibile confrontare tra loro tutte le n colonne delle M_1 e M_2, verificando l'uguaglianza delle matrici e, quindi, delle due applicazioni lineari. □

Proposizione 8.12
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$

$$f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \implies f \textbf{ Continua} \text{ in } x_0$$

Dimostrazione. Per ipotesi $x_0 \in \mathring{A}$, dunque x_0 è di accumulazione. A questo punto, grazie alla Proposizione 3.9 basta verificare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Dalla Definizione 8.7 (Differenziale)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Mh + o(h) \text{ per } h \to 0$$

Quindi, posto $h = x - x_0$ ed essendo $M = Df(x_0)$ per Definizione 8.7 (Differenziale)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \right] = f(x_0)$$

□

Proposizione 8.13
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$

$$f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \implies \begin{cases} f \text{ ammette ogni } \textbf{Derivata Direzionale} \text{ in } x_0 \\ \qquad e \\ \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad D_v f(x_0) = Df(x_0)v \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ non nullo. Partendo dalla Definizione 7.1 (Derivata Direzionale)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Sostituendo ora $f(x_0 + tv)$ con il secondo membro della Definizione 8.7 (Differenziale), dopo aver posto $h = tv$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0) + Df(x_0)(tv) + o(tv) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{Df(x_0)(tv)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{o(tv)}{t} \\ &= Df(x_0)v \end{aligned}$$

□

Corollario 8.14
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$

$$f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \implies \begin{cases} f \text{ ammette ogni } \textbf{Derivata Parziale} \text{ in } x_0 \\ \qquad e \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = Df(x_0) \cdot e_i \end{cases}$$

Dove $Df(x_0) \cdot e_i$ non è altro che

$$Df(x_0) \cdot e_i = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (0 & \dots & 1 & \dots & 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & x_{1i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & x_{2i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Cioè l'*i-esima* colonna della $Df(x_0)$, come da Osservazione 8.8 (Matrici Derivata Totale Particolari)

> ***Nota.*** Per quanto detto, il presente corollario offre il principale metodo di calcolo della **Derivata Totale** Inoltre è anche una dimostrazione alternativa della Proposizione 8.11 (Unicità della Derivata Totale)

Dimostrazione. Direttamente dalla Proposizione 8.13 e dalla Definizione 7.2 (Derivata Parziale). □

Esempio 8.15
Esempi relazioni tra Derivata Totale e derivate parziali

$$
\begin{aligned}
n = 2 \quad m = 1 \qquad & Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \\
n = 3 \quad m = 1 \qquad & Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \\
n = 1 \quad m = 2 \qquad & Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{bmatrix} \\
n = 2 \quad m = 2 \qquad & Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \\
n > 2 \quad m > 2 \qquad & Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Osservazione 8.16
Sia Proposizione 8.13 che Corollario 8.14 non possono essere invertiti, come verificato in Esercizio 7.10.

Corollario 8.17
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$

$$f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \implies f \textbf{ Derivabile} \text{ in } x_0$$

Dimostrazione. Mediante il Corollario 8.14 si vede immediatamente che rispetta la Definizione 7.2 (Derivata Parziale). □

Corollario 8.18
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$. Sia f derivabile parzialmente in x_0 e sia M la $Df(x_0)$, matrice dei coefficienti $M_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

$$
\begin{gathered}
f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \\
\iff \\
f(x_0 + h) - f(x_0) - Mh = o(h) \text{ per } h \to 0
\end{gathered}
$$

Dimostrazione. Direttamente dalla Definizione 8.7 (Differenziale), per mezzo del Corollario 8.14. □

Esercizio 8.19
Verificare che, nel caso $n = 2$ ed $m = 1$ il Corollario 8.18 si scrive

$$
\begin{gathered}
f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \\
\iff \\
f(x_0 + h, y_o + k) - f(x_0, y_0) - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = o(\sqrt{h^2 + k^2}) \text{ per } h, k \to 0
\end{gathered}
$$

Esercizio 8.20
Scrivere il Corollario 8.18 nel caso $n = 3$ ed $m = 1$

Teorema 8.21 (del Differenziale Totale)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Per } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ è } \textbf{definita} \text{ in un } \textbf{intorno} \text{ di } x_0 \text{ e } \textbf{Continua} \text{ in } x_0\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ è } \textbf{Differenziabile} \text{ in } x_0$$

Dimostrazione. Si può supporre $n = 2$ e $m = 1$ in quanto il caso più generale è del tutto analogo.
È necessario verificare la Definizione 8.7 (Differenziale), dunque in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ si ha

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o(h, k) \text{ per } h, k \to 0 \tag{8.21.1}$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o(h, k) \text{ per } h, k \to 0$$

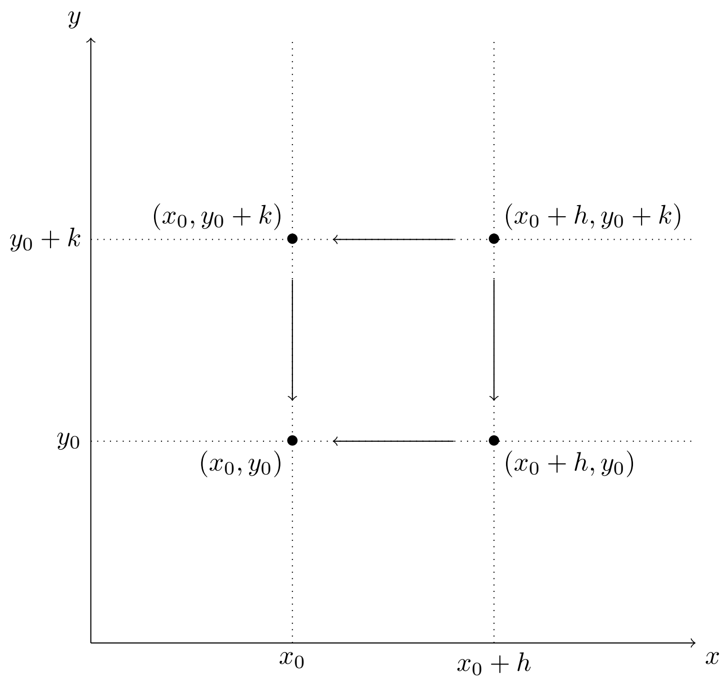
Preso in considerazione solo il primo membro, si aggiunge e sottrae ad esso la stessa quantità, ottenendo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}_{(1)} + \underbrace{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}_{(2)} \tag{8.21.2}$$

Considerando la (1) e la (2) di Eq. (8.21.2) come funzioni in una sola variabile, si può applicare il Teorema 8.1 (di Lagrange), grazie alla continuità per ipotesi delle derivate parziali:

- La (1) rispetto a y, con $x_0 + h$ fissato
- La (2) rispetto a x, con y_0 fissato

Spostandosi lungo le direzioni parallele agli assi è possibile andare da $(x_0 + h, y_0 + k)$ a (x_0, y_0)



Quindi, applicando il Teorema 8.1 (di Lagrange):

$$\exists \alpha, \beta \in]0,1[\ \textbf{per cui} \quad \begin{array}{lrcl} (1) & f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) & = & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k)k \\ (2) & f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) & = & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0)h \end{array}$$

Tornando alla Eq. (8.21.1), si ottiene

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}_{(1)} + \underbrace{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}_{(2)} - Df(x_0, y_0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k)k}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0)h}_{(2)} - Df(x_0, y_0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Si esegue il prodotto tra matrice Derivata Totale e vettore incremento $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, infine si separano i termini

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0)\right)k + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)h$$

Si passa dunque alla norma

$$\left\| f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right\|$$

Separando come fatto prima ed applicando la disguguaglianza triangolare

$$\leq \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0)\right)k \right\| + \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)h \right\|$$

Per proprietà 4 da Definizione 1.8 (Norma)

$$= \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) \right\| |k| + \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right\| |h|$$

Presa ora la norma del vettore (h, k), cioè $\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}$, sicuramente $|h| \leq \|(h,k)\|$ e $|k| \leq \|(h,k)\|$, dunque

$$\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) \right\| \sqrt{h^2+k^2} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right\| \sqrt{h^2+k^2}$$

Essendo $h, k \to 0$ da Eq. (8.21.1) e graze alla continuità delle derivate, le due norme tendono a 0. Inoltre, per Definizione 8.2 (o piccolo)

$$= o(1)\sqrt{h^2+k^2} \text{ per } \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \to 0$$

$$= o(\sqrt{h^2+k^2}) \text{ per } \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \to 0$$

Da cui la tesi, avendo verificato la Definizione 8.7 (Differenziale). □

Esercizio 8.22
Data la funzione

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Verificare che f è differenziabile su $\mathbb{R}$ ma non ha derivata continua su $\mathbb{R}$.

Definizione 8.23 (Funzioni di Classe $\mathbf{C^1}$)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**.

$$\mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^m) \text{ è l'insieme delle funzioni } f:\ A \to \mathbb{R}^m$$
$$\text{con } \textbf{tutte} \text{ le } \textbf{Derivate Parziali prime continue} \text{ in ogni punto di } A$$

Si legge *f è di classe $\mathbf{C^1}$ su A con valori in $\mathbb{R}^m$.*

Osservazione 8.24
Si ricorda la Proposizione 3.37 che è attinente anche a questo capitolo.

Corollario 8.25
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**. Se $f \in \mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^m)$ allora f è **Differenziabile** su A.

Dimostrazione. Applicare la Teorema 8.21 (del Differenziale Totale) □

Proposizione 8.26
Siano $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**

$$f \in \mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^m) \iff \forall i = 1,\ \dots\ , m \quad f_i \in \mathbf{C^1}(A;\mathbb{R})$$

Dimostrazione. Immediata. □

Esercizio 8.27
Dimostrare la Proposizione 8.26.

Esercizio 8.28
Dimostrare che $\mathbf{C^1}(A;\mathbb{R})$ non coincide con l'insieme delle funzioni differenziabili su A con valori in $\mathbb{R}$.

8.1 Regole di Derivazione

Nota. In questa sezione per forme tipo $(f+g)(x_0)$ oppure $(f\cdot g)(x_0)$ si intendono, ad esempio, la somma o il prodotto delle due funzioni nel punto x_0, quindi $f(x_0)+g(x_0)$ e così via.

Proposizione 8.29 (Differenziale del Prodotto per Scalare)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**, $x_0 \in A$, $f:\ A \to \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \implies \begin{cases} \lambda f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \\ e \\ D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0) \end{cases}$$

Dimostrazione. Essendo f differenziabile per ipotesi, si ha

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(h)$$

Dunque, considerando la λf

$$(\lambda f)(x_0+h) = (\lambda f)(x_0) + \lambda Df(x_0)h + o(h)$$

Che è la Definizione 8.7 (Differenziale) per $\lambda f(x_0)$, da cui la tesi. □

Proposizione 8.30 (Differenziale della Somma di Funzioni)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**, $x_0 \in A$, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, allora

$$\left.\begin{array}{l} f \textbf{ Differenziabile in } x_0 \\ g \textbf{ Differenziabile in } x_0 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} f+g \textbf{ Differenziabile in } x_0 \\ e \\ D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0) \end{array}\right.$$

Dimostrazione. Essendo f e g differenziabili per ipotesi si hanno

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + Df(x_0)h + o(h) \\ g(x_0+h) &= g(x_0) + Dg(x_0)h + o(h) \end{aligned}$$

Dunque, sommando membro a membro si arriva alla

$$\begin{aligned} f(x_0+h) + g(x_0+h) &= f(x_0) + g(x_0) + Df(x_0)h + Df(x_0)h + o(h) \\ (f+g)(x_0+h) &= (f+g)(x_0) + \big(Df(x_0) + Df(x_0)\big)h + o(h) \end{aligned}$$

Che è la Definizione 8.7 (Differenziale) per $(f+g)(x_0)$, da cui la tesi. □

Proposizione 8.31 (Differenziale del Prodotto Scalare)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**, $x_0 \in A$, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, allora

$$\left.\begin{array}{l} f \textbf{ Differenziabile in } x_0 \\ g \textbf{ Differenziabile in } x_0 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} f \cdot g \textbf{ Differenziabile in } x_0 \\ e \\ D(f\cdot g)(x_0) = g(x_0)^T\, Df(x_0) + f(x_0)^T\, Dg(x_0) \end{array}\right.$$

Nota. $\cdot$ indica il **Prodotto Scalare** tra vettori che può essere scritto in forma matriciale con $f^T g$ (dunque utilizzando il prodotto righe per colonne) dove f^T è la matrice **Trasposta** di f.

Dimostrazione. Omessa in aula.
Utilizzando la differenziabilità di f e g assieme alla continuità di g

$$\begin{aligned} &(f\cdot g)(x_0+h) - (f\cdot g)(x_0) = \\ &= (f^T\, g)(x_0+h) - (f^T\, g)(x_0) \\ &= \big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)^T g(x_0+h) + f(x_0)^T\big(g(x_0+h) - g(x_0)\big) \\ &= \big(Df(x_0)h + o(h)\big)^T\big(f(x_0) + o(1)\big) + f(x_0)^T\big(Dg(x_0)h + o(h)\big) \\ &= \big(Df(x_0)h\big)^T g(x_0) + f(x_0)^T\big(Dg(x_0)h\big) + o(h) \\ &= h^T Df(x_0)^T g(x_0) + f(x_0)^T Dg(x_0)h + o(h) \\ &= \big(g(x_0)^T Df(x_0) + f(x_0)^T Dg(x_0)\big)h + o(h) \end{aligned}$$

da cui la tesi per la Definizione 8.7 (Differenziale). □

Esercizio 8.32
Verificare che gli ordini delle matrici sono tali da permettere le operazioni eseguite nella Proposizione 8.31 (Differenziale del Prodotto Scalare).

Esercizio 8.33
Scrivere la Proposizione 8.31 (Differenziale del Prodotto Scalare) nel caso $m = 1$ utilizzando i vettori ∇f e ∇g.

Esercizio 8.34
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**, $x_0 \in A$, $f:\ A \to \mathbb{R}$ e $g:\ A \mapsto \mathbb{R}^m$ entrambe **Differenziabili** in x_0.
Dimostrare che $f\ g$ (prodotto di funzione scalare per funzione vettoriale) è **Differenziabile** in x_0 e determinarne la derivata totale.

Esercizio 8.35
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**, $x_0 \in A$, $f:\ A \to \mathbb{R}^m$ e $g:\ A \mapsto \mathbb{R}^p$ entrambe **Differenziabili** in x_0. Sia ora

$$\begin{array}{cccc} F & : & A & \to & \mathbb{R}^{m+p} \\ & & x & \mapsto & \big(f(x), g(x)\big) \end{array}$$

Dimostrare che F è **Differenziabile** in x_0 e detminarne la derivata totale.

Esercizio 8.36
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**, $x_0 \in A$ e $f, g:\ A \to \mathbb{R}^3$ entrambe **Differenziabili** in x_0.
Dimostrare che il prodotto vettoriale $f \wedge g$ è **Differenziabile** in x_0 e determinarne la derivata totale.

Proposizione 8.37 (Differenziale della Funzione Composta)
Siano:

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $g:\ A \to \mathbb{R}^m$
- $B \subseteq \mathbb{R}^m$
- $f:\ B \to \mathbb{R}^p$
- $x_0 \in \mathring{A}$ tale che $g(x_0) \in \mathring{B}$
- g **Differenziabile** in x_0
- f **Differenziabile** in $g(x_0)$

Allora

$$f \circ g \text{ è } \textbf{Differenziabile} \text{ in } x_0$$

$$e$$

$$D(f \circ g)(x_0) = Df\big(g(x_0)\big)Dg(x_0)$$

Nota. $(f \circ g)(x_0) = f\big(g(x_0)\big)$

Nota. In questa proposizione, a differenza delle altre del capitolo, non è richiesta l'apertura di A, ma piuttosto che x_0 appartenga alla **Parte Interna** di A, $\mathring{A}$. Concettualmente è la stessa cosa, ma sarebbe risultato meno evidente il fatto che anche $g(x_0)$ debba essere nella **Parte Interna** di B, $\mathring{B}$.
Le ipotesi avrebbero comunque potuto essere formulate come A e B **Aperti**.

Dimostrazione. Essendo $g(x)$ e $f\big(g(x)\big)$ differenziabili per ipotesi si hanno

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + Dg(x_0)h + o(h) \quad \text{per } h \to 0 \tag{8.37.1}$$

$$f\big(g(x_0) + k\big) = f\big(g(x_0)\big) + Df\big(g(x_0)\big)k + o(k) \quad \text{per } k \to 0 \tag{8.37.2}$$

Inoltre, per definizione di funzione composta:

$$(f \circ g)(x_0 + h) = f\big(g(x_0 + h)\big)$$

Sostituendo la Eq. (8.37.1) si ottiene

$$= f\big(g(x_0) + \underbrace{Dg(x_0)h + o(h)}_{(1)}\big)$$

Ora è possibile considerare (1) come il k della Eq. (8.37.2), infatti se $h \to 0 \implies k \to 0$. Essendosi ricondotti al primo termine della Eq. (8.37.2), si può anche sostituire $Dg(x_0)h + o(h)$ ai k nel secondo termine e continuare l'uguaglianza. Passando anche l'*o piccolo* a h, non avendo più termini in k, si ottiene infine:

$$\begin{aligned}
&= f\big(g(x_0)\big) + Df\big(g(x_0)\big)\big(Dg(x_0)h + o(h)\big) + o(h) \quad \text{per } h \to 0 \\
&= f\big(g(x_0)\big) + Df\big(g(x_0)\big)Dg(x_0)h + Df\big(g(x_0)\big)o(h) + o(h) \quad \text{per } h \to 0 \\
&= f\big(g(x_0)\big) + Df\big(g(x_0)\big)Dg(x_0)h + o(h) + o(h) \quad \text{per } h \to 0 \\
&= f\big(g(x_0)\big) + Df\big(g(x_0)\big)Dg(x_0)h + o(h) \quad \text{per } h \to 0
\end{aligned}$$

Che è la Definizione 8.7 (Differenziale) per $(f \circ g)(x_0) = f\big(g(x_0)\big)$ considerando $M = Df\big(g(x_0)\big)Dg(x_0)$, da cui la tesi. □

Esercizio 8.38
Verificare che gli ordini delle matrici siano tali da permettere le operazioni eseguite nella Proposizione 8.37 (Differenziale della Funzione Composta).

Esercizio 8.39
Giustificare dettagliatamente la conclusione della Proposizione 8.37 (Differenziale della Funzione Composta).

Soluzione. Vedasi dimostrazione della Proposizione 8.37 (Differenziale della Funzione Composta). ■

Esercizio 8.40
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**, $x_0 \in A$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ **Differenziabili** in x_0.
Le funzioni $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono **Derivabili/Differenziabili** in x_0?

Soluzione. Suggerimento: vedere Esercizio 5.28. ■

Esercizio 8.41
Siano:

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $g : A \to \mathbb{R}^m$
- $B \subseteq \mathbb{R}^m$
- $f : B \to \mathbb{R}^p$
- $x_0 \in \mathring{A}$ tale che $g(x_0) \in \mathring{B}$
- g **Differenziabile** in x_0
- f **Differenziabile** in $g(x_0)$

Utilizzando la Proposizione 8.37 (Differenziale della Funzione Composta), verificare la formula

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\big(g(x_0)\big)\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x_0)$$

Esercizio 8.42
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e $B \subseteq \mathbb{R}^p$ **Aperti**, $f : A \times B \to \mathbb{R}^m$ e f **Differenziabile** in $A \times B$. Sia dunque $\varphi : A \to B$ **Differenziabile** su A.
Dimostrare che

$$Df\big(x, \varphi(x)\big) = D_x f\big(x, \varphi(x)\big) + D_y f\big(x, \varphi(x)\big)D\varphi(x)$$

Esercizio 8.43
Quali ipotesi sulla funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assicurano che la funzione f definita da

$$f(x,y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}$$

può essere estesa ad una funzione continua/differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$?
Quando possibile determinare la derivata totale.

Esercizio 8.44
Quali ipotesi sulla funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assicurano che la funzione f definita da

$$f(x,y) = \int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

è una funzione continua/differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$? Vedasi Proposizione 14.3.
Quando possibile determinare la derivata totale.

Esercizio 8.45
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**. Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $g : A \to \mathbb{R}^p$ **Differenziabili** su A, la funzione $F : A \to \mathbb{R}^{m+p}$ definita da

$$F(x) = \big(f(x), g(x)\big)$$

è **Differenziabile**? Come è fatta la sua derivata totale?

Esercizio 8.46
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**. Dimostrare che lo spazio $\mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^m)$ è uno **Spazio Vettoriale** con le usuali operazioni di somma tra funzioni e prodotto scalare per funzione.

8.2 La Formula degli Accrescimenti Finiti

Definizione 8.47 (Segmento)
Siano $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, si dice **Segmento** di estremi x_0 e x_1 l'insieme che li unisce, cioè

$$S = \{tx_1 + (1-t)x_0 \in \mathbb{R}^n : \ t \in [0,1]\}$$

Osservazione 8.48
La Definizione 8.47 (Segmento) può essere formulata in ogni spazio affine o vettoriale

Esercizio 8.49
Dimostrare che ogni **Segmento** in $\mathbb{R}^n$ è **Compatto** e **Connesso**.

Soluzione. Posta

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \mapsto & tx_1 + (1-t)x_0 \end{array}$$

- $[0,1] \subset \mathbb{R}^n$, essendo sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, grazie alla Proposizione 2.35, è compatto. Inoltre, grazie al Teorema 3.15 (Generale di Weierstrass), $\varphi([0,1])$ è sicuramente compatto a sua volta, dunque il segmento S è compatto.
- Dalla Proposizione 3.17, essendo φ continua, il segmento S è sicuramente Connesso.

∎

Esercizio 8.50
Ispirandosi alla Definizione 8.47 (Segmento) è possibile dare una possibile definizione di Semiretta uscente da x_0 e passante per x_1?

Soluzione.

$$s = \{x_0 + (x_1 - x_0)t \in \mathbb{R}^n : t \in [0, +\infty[\ \}$$

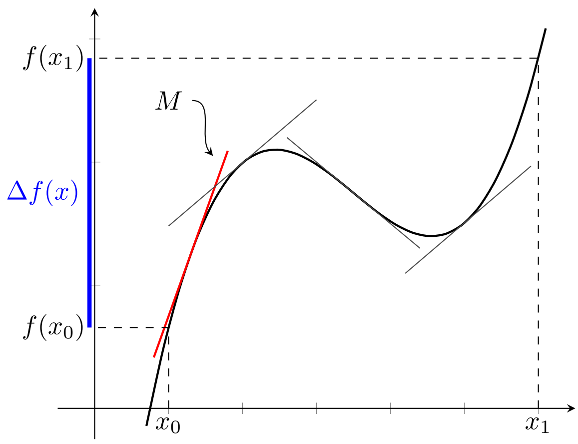
■

Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti)
Sia $f \in \mathbf{C^1}(A; \mathbb{R}^m)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Siano $x_0, x_1 \in \mathring{A}$ tali che il **Segmento** S di estremi x_0 e x_1 sia **interamente contenuto** in $\mathring{A}$. Allora

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{\xi \in S} \|Df(\xi)\| \cdot \|x_1 - x_0\| \tag{8.51.1}$$

Nota. Con $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^1$ e $A \subseteq \mathbb{R}^1$ è come dire

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq M \cdot |x_1 - x_0| \quad \text{con} \quad M = \sup\left\{ \begin{array}{c} \textit{coefficiente angolare di tutte le} \\ \textit{rette tangenti alla curva} \end{array} \right\}$$



Dimostrazione. Si può dare per scontato che $x_1 \neq x_0$, in quanto, se $x_1 = x_0$, allora $f(x_1) = f(x_0)$ e la Eq. (8.51.1) diventerebbe $0 \leq 0$. La tesi sarebbe quindi verificata direttamente.
Fissato un qualsiasi $v \in \mathbb{R}^m$, si definisce così la funzione F legata ad f tramite la Definizione 8.47 (Segmento):

$$\begin{array}{cccc} F & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & v \cdot f\big(tx_1 + (1-t)x_0\big) \end{array} \tag{8.51.2}$$

Nota. Nella Eq. (8.51.2), $\cdot$ è Prodotto Scalare tra due vettori di dimensione $\mathbb{R}^m$, dunque il risultato è correttamente uno scalare.

F è continua e derivabile sull'intervallo di definizione $[0, 1]$. È dunque possibile utilizzare il Teorema 8.1 (di Lagrange), che garantisce:

$$\exists c \in\ ]0, 1[\ : \quad F(1) - F(0) = F'(c)\ (1 - 0)$$

Tornando dunque a f dalla definizione di F

$$v \cdot f(x_1) - v \cdot f(x_0) = v \cdot Df\big(cx_1 + (1-c)x_0\big)(x_1 - x_0)$$

Ricordando che la F è a valori in $\mathbb{R}$, si può calcolare il valore assoluto mantenendo l'uguaglianza

$$|v\cdot f(x_1)-v\cdot f(x_0)|=\big|v\cdot Df\big(cx_1+(1-c)x_0\big)(x_1-x_0)\big|$$

Essendo il secondo membro il valore assoluto di un prodotto scalare, si può applicare ad esso la **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz** ed ottenere

$$\big|v\cdot\big(f(x_1)-f(x_0)\big)\big|\leq\|v\|\cdot\big\|Df\big(cx_1+(1-c)x_0\big)(x_1-x_0)\big\|$$

Dunque, seaparando ulteriormente le norme si arriva alla:

$$\big|v\cdot\big(f(x_1)-f(x_0)\big)\big|\leq\|v\|\cdot\big\|Df\big(cx_1+(1-c)x_0\big)\big\|\cdot\|x_1-x_0\| \tag{8.51.3}$$

Essendo, come detto all'inzio, $f(x_1)\neq f(x_0)$ è ora possibile scegliere un v "comodo", come:

$$v=\frac{1}{\|f(x_1)-f(x_0)\|}\cdot\big(f(x_1)-f(x_0)\big)$$

Nota. La norma di v, grazie poi alla proprietà 4 da Definizione 1.8 (Norma), è

$$\begin{aligned}\|v\|&=\left\|\underbrace{\frac{1}{\|f(x_1)-f(x_0)\|}}_{\text{Scalare}}\cdot\underbrace{\big(f(x_1)-f(x_0)\big)}_{\text{Vettore}}\right\|\\&=\left|\frac{1}{\|f(x_1)-f(x_0)\|}\right|\cdot\big\|\big(f(x_1)-f(x_0)\big)\big\|\\&=\frac{1}{\|f(x_1)-f(x_0)\|}\cdot\big\|\big(f(x_1)-f(x_0)\big)\big\|\\&=1\end{aligned}$$

Sostituendo dunque in Eq. (8.51.3) si ottiene

$$\left\|\frac{1}{\|f(x_1)-f(x_0)\|}\cdot\big(f(x_1)-f(x_0)\big)\cdot\big(f(x_1)-f(x_0)\big)\right\|\leq\cdot\big\|Df\big(cx_1+(1-c)x_0\big)\big\|\cdot\|x_1-x_0\|$$

Dalla nota al punto 3 di Esempio 1.10 (Esempi di Spazi Normati), si ottiene

$$\left\|\frac{1}{\|f(x_1)-f(x_0)\|}\cdot\|f(x_1)-f(x_0)\|^2\right\|\leq\big\|Df\big(cx_1+(1-c)x_0\big)\big\|\cdot\|x_1-x_0\|$$

Da cui

$$\|f(x_1)-f(x_0)\|\leq\big\|Df\big(cx_1+(1-c)x_0\big)\big\|\cdot\|x_1-x_0\|$$

e passando al sup su $t\in\,]0,1[$ si ottiene la tesi. □

Il seguente esercizio mostra come il Teorema 8.1 (di Lagrange) non possa essere esteso al caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ con $n>1$.

Esercizio 8.52
Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ data da $f(t)=(\cos t,\sin t)$. Mostrare che non esiste nessun numero reale c tale che

$$f(2\pi)-f(0)=Df(c)\cdot 2\pi$$

Definizione 8.53 (Insieme Convesso)
Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$

$$C \text{ è } \textbf{Convesso}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\forall x_0, y_1 \in C \quad \{tx_1 + (1-t)x_0 : \ t \in [0,1]\} \subseteq C$$

Cioè un insieme è Convesso se, dati qualsiasi due suoi punti, contiene anche il segmento che li congiunge.

Esercizio 8.54
Dimostrare la Proposizione 3.37

Esercizio 8.55
In $\mathbb{R}^n$ dimostrare che ogni segmento è convesso, così come anche ogni sfera.
Esibire un esempio di insieme non convesso.

Corollario 8.56
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A \textbf{ Aperto Convesso} \\ f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } A \\ \forall x \in A \quad \nabla f(x) = 0 \end{array}\right\} \implies f \text{ è } \textbf{Costante} \text{ su } A$$

Nota. Come da Osservazione 8.8 (Matrici Derivata Totale Particolari), $\nabla f(x) = Df(x) \in \mathrm{Mat}(1 \times n)$, cioè un vettore riga.

Dimostrazione. Se $\nabla f(x) = Df(x) = 0$, la Eq. (8.51.1) da Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti) diventa

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{\xi \in S} 0 \cdot \|x_1 - x_0\|$$
$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq 0$$
$$f(x_1) = f(x_0)$$

□

Esercizio 8.57
Dimostrare che un insieme **Convesso** è anche **Connesso**.
Esibire un controesempio al viceversa.

Soluzione. Supponendo, per assurdo, $C \in \mathbb{R}^n$ sconnesso. In questo caso, per Definizione 2.25 (Insiemi Connessi e Sconnessi), esistono due insiemi separati S_1 e S_2 che costituiscono C, inoltre $S_1 \cup S_2 = C$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Questo implica che

$$\exists t \in [0,1] : \ \forall x_1 \in S_1 \text{ e } \forall x_2 \in S_2 \quad tx_1 + (1-t)x_2 \notin S_1 \text{ e contemporaneamente } \notin S_2$$

Questo implica la non convessità di C - *Assurdo.* ■

Soluzione. Preso il cerchio di raggio unitario $S = (x, y) : x^2 + y^2 = 1$, questo verifica la Definizione 2.25 (Insiemi Connessi e Sconnessi) ma sicuramente non la Definizione 8.53 (Insieme Convesso). ■

Esercizio 8.58
Esibire esempi di insiemi convessi/non convessi e aperti/chiusi, limitati/illimitati.

Definizione 8.59 (Funzione Convessa)
Sia I un intervallo reale e $f:\ I \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ è } \textbf{Convessa} \quad \rightleftharpoons \quad \begin{cases} \forall x_0, x_1 \in I,\ \forall t \in [0,1] \\ f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \end{cases}$$

Cioè se il segmento che congiunge due qualsiasi punti del suo grafico si trova al di sopra del grafico stesso.

Esercizio 8.60
Verificare che f è **Convessa** se e solo se il suo **Epigrafo** (cioè l'insieme di punti che stanno al di sopra o sul grafico della funzione) è un sottoinsieme **Convesso** di $\mathbb{R}^2$ nel senso della Definizione 8.53 (Insieme Convesso).

Proposizione 8.61
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A \textbf{ Aperto Connesso} \\ f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } A \\ \forall x \in A \quad \nabla f(x) = 0 \end{array}\right\} \implies f \text{ è } \textbf{Costante} \text{ su } A$$

Nota. Si sta parlando di insiemi Con**n**essi

Dimostrazione. Sia $x_0 \in A$. Per la Proposizione 2.31 (Poligonale Congiungente due Punti), ogni punto $x \in A$ può essere unito a x_0 con una poligonale interamente contenuta in A dai lati paralleli agli assi. A questo punto è possibile applicare il Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti) ad ogni segmento della poligonale ed, essendo $\nabla f(x) = 0$, come in Corollario 8.56, la f è costante. □

9 Derivate Seconde

Quanto detto circa le derivate prime può essere ripetuto introducendo derivate di ordine superiore.

Definizione 9.1 (Derivate Parziali Seconde)
Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ derivabile parzialmente in x_0 lungo e_i.
Se la funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è a sua volta derivabile parzialmente in x_0, questa volta lungo e_j, allora la quantità

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \rightleftharpoons \quad \begin{array}{c}\text{è la } \textbf{Derivata Parziale Seconda} \\ \text{di } f \text{ in } x_0 \text{ rispetto a } x_j, x_i \text{ (in quest'ordine)}\end{array}$$

e si indica con

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)}$$

Nota. Altre notazioni comunemente utilizzate per le derivate parziali secone sono: $D^2_{x_j x_i} f$, $\partial^2_{ji} f$, $\partial_{x_j x_i} f$, $f_{x_j x_i}$, f_{ji}

Nota. L'ordine qui utilizzato, cioè

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad i, j = 1, \dots, n$$

non è sempre condiviso da tutti i testi di Analisi Matematica.

Osservazione 9.2
Le regole di derivazione fornite in sottosezione 8.1 (Regole di Derivazione) sono adeguate anche per il calcolo delle Derivate Seconde.

Esercizio 9.3
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$. Ammesso che esistano tutte, quante sono le derivate parziali seconde di f in un qualche punto x_0?
Confrontare quanto ottenuto con il caso $n = m = 1$ di Analisi 1.

Soluzione. Ognuna delle n derivate di f ha, a sua volta, n derivate, di conseguenza il numero di derivate seconde di f è n^2. Nel caso di Analisi 1, le derivate seconde erano $1^2 = 1$ ■

Definizione 9.4 (Differenziale Seconda)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$

$$f \text{ è } \textbf{Differenziabile } 2 \text{ volte in } x_0 \quad \rightleftharpoons \quad \left\{ \begin{array}{c} f \text{ è } \textbf{Differenziabile} \text{ in un intorno di } x_0 \\ e \\ f' \text{ è } \textbf{Differenziabile} \text{ in } x_0 \end{array} \right.$$

Dove f' è una funzione definita in un intorno di x_0 a valori in $\text{Mat}(m \times n) \in \mathbb{R}^{mn}$.

Nota. Questa definizione è utilizzata comunemenete nel linguaggio parlato, ma viene raramente formalizzata come definizione.

Nota. Avendo una funzione *scalare* $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la sua derivata prima è un *vettore*. La derivata seconda sarà una *matrice* e così via.

Definizione 9.5 (Matrice Hessiana)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$, inoltre f ammette tutte le Derivate Parziali Seconde in x_0.
La matrice di queste derivate seconde si chiama **Matrice Hessiana** di f in x_0 e si indica con $\boldsymbol{H_f(x_0)}$

$$H_f(x_0) = D^2 f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

> ***Nota.*** La Matrice Hessiana non va confusa con la Matrice Jacobiana da Osservazione 8.8 (Matrici Derivata Totale Particolari), quest'ultima infatti è la matrice delle Derivate Parziali **Prime**, mentre la Hessiana contiene le **Seconde**.

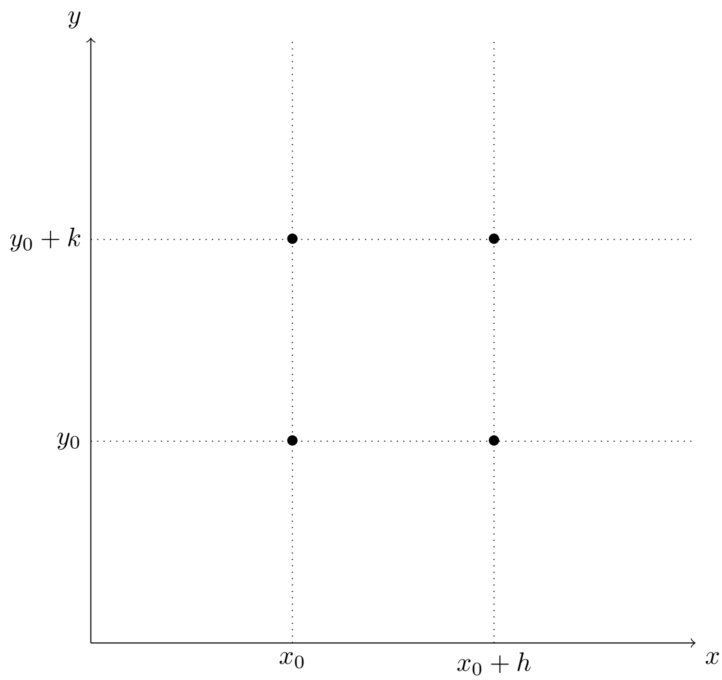
9.1 Il Lemma di Schwarz

Lemma 9.6 (di Schwarz)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ **esistono** in un intorno di (x_0, y_0) e sono **Continue** in (x_0, y_0), allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Dimostrazione. Scelti $h, k \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccoli, in modo tale che le derivate parziali di f siano definite in tutto il rettangolo di estremi

$$(x_0, y_0) \qquad (x_0 + h, y_0) \qquad (x_0, y_0 + k) \qquad (x_0 + h, y_0 + k)$$



Per come son state scelte h e k, è possibile definire sicuramente la quantità

$$q = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Per dimostrare la tesi si può ora verificare che la q, calcolata lungo percorsi differenti fornisce lo stesso risultato. È possibile fare ciò riconducendo la q a due diverse funzioni in una sola variabile ed applicando il Teorema 8.1 (di Lagrange) due volte ad ognuna di esse.

1. Posta $\varphi(\xi) = f(x_0 + \xi, y_0 + k) - f(x_0 + \xi, y_0)$, si ottiene, riordinando i termini della q

$$\begin{aligned} q &= \Big(f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)\Big) - \Big(f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)\Big) \\ &= \varphi(h) - \varphi(0) \end{aligned}$$

   Applicando Lagrange

$$= h\,\varphi'(\alpha' h)$$

   Grazie alla Proposizione 8.30 (Differenziale della Somma di Funzioni) si passa alle derivate parziali rispetto a x (la y è fissa)

$$= h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \alpha' h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \alpha' h, y_0)\right)$$

   Si definisce ora $\Phi(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \alpha' h, y_0 + \xi)$

$$= h\big(\Phi(k) - \Phi(0)\big)$$

   Per la Φ valgono nuovamente le ipotesi di Lagrange, dunque si ottiene

$$\begin{aligned} &= hk\,\Phi'(\beta' k) \\ &= hk\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \alpha' h, y_0 + \beta' k) \end{aligned}$$

2. Posta $\psi(\xi) = f(x_0 + h, y_0 + \xi) - f(x_0, y_0 + \xi)$, si ottiene, riordinando i termini della q

$$\begin{aligned} q &= \Big(f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)\Big) - \Big(f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)\Big) \\ &= \psi(k) - \psi(0) \end{aligned}$$

   Applicando Lagrange

$$= k\,\psi'(\beta'' k)$$

   Grazie alla Proposizione 8.30 (Differenziale della Somma di Funzioni) si passa alle derivate parziali rispetto a y (la x è fissa)

$$= k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \beta'' k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \beta'' k)\right)$$

   Si definisce ora $\Psi(\xi) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \xi, y_0 + \beta'' k)$

$$= k\big(\Psi(k) - \Psi(0)\big)$$

   Per la Ψ valgono nuovamente le ipotesi di Lagrange, dunque derivando rispetto a x si ottiene

$$\begin{aligned} &= kh\,\Psi'(\alpha'' h) \\ &= kh\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \alpha'' h, y_0 + \beta'' k) \end{aligned}$$

Si è quindi giunti a due diverse formulazioni di q per degli $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'' \in]0,1[$

$$\cancel{hk}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \alpha' h, y_0 + \beta' k) = \cancel{kh}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \alpha'' h, y_0 + \beta'' k)$$

A questo punto si calcola il limite per $(h,k) \to (0,0)$. Spostandosi, anche $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ cambieranno, ma essendo limitati $\in]0,1[$, non si presentano complicazioni di sorta in quanto vengono moltiplicati per una quantità tendente a zero.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

□

Osservazione 9.7
Il Lemma 9.6 (di Schwarz) ha importanti applicazioni in fisica e nella teoria dei campi. Grazie al lemma è infatti possibile distinguere tra campi **conservativi** e non: uno dei criteri è appunto il controllo dell'uguaglianza dell derivate parziali miste.

Esercizio 9.8
Verificare se il Lemma 9.6 (di Schwarz) si applica alla funzione

$$\begin{array}{rcl} f \quad : \quad \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Corollario 9.9
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ **esistono** in un intorno di x_0 e sono **Continue** in x_0, allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Dimostrazione. Segue dal Lemma 9.6 (di Schwarz) applicandolo a tutte le variabili prese 2 a 2. □

Definizione 9.10 (Funzioni di Classe $\mathbf{C^2}$)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**.

$\mathbf{C^1}(A; \mathbb{R}^m)$ è l'insieme delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}^m$
con **tutte** le **Derivate Parziali seconde continue** in ogni punto di A

Si può anche leggere f *è di classe* $\mathbf{C^2}$ *su* A *con valori in* $\mathbb{R}^m$.

Corollario 9.11
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto.

$$f \in \mathbf{C^2}(A; \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad D^2 f \text{ è una matrice } \textbf{simmetrica}$$

Dimostrazione. Segue dal Lemma 9.6 (di Schwarz), in quanto $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ per ogni i, j della matrice, andando a verificare la definizione di Matrice Simmetrica. □

Esercizio 9.12
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in \mathbf{C^2}(A; \mathbb{R}^m)$.
Quante sono le derivate parziali seconde di f che bisogna necessariamente calcolare? Calcolare questa risposta con quella dell'Esercizio 9.3.

Soluzione. Bisogna calcolare $\frac{n(n+1)}{2}$ derivate diverse, invece che n^2. ■

Esercizio 9.13
Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che ammetta tutte le derivate parziali seconde in un punto, ma che non sia continua in quel punto

9.2 Sviluppo in Serie di Taylor al II Ordine

Nota. Differentemente da quanto fatto sul libro, tutte le funzioni in esame saranno a valori in $\mathbb{R}^1$, visto che a lezione è trattato solo questo caso e che il Resto di Lagrange non è applicabile nel caso di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Fino ad ora son stati visti 2 "livelli" di approssimazione di una funzione f in un intorno del punto x_0, appartenente all'insieme di definizione di f. Per $x \to x_0$:

- Livello 0: f continua $f(x) = f(x_0) + o(1)$
- Livello 1: f derivabile $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

A livello 0, la funzione è stata approssimata dal *miglior* polinomio di grado 0, cioè la costante $f(x_0)$; a livello 1 dal *miglior* polinomio di grado 1, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Per *migliore* si intende che usando un qualsiasi altro polinomio di grado 1 passante per $\big(x_0, f(x_0)\big)$ il resto sarebbe andato a 0 come $x - x_0$ e non più velocemente. Queste approssimazioni ci permettono di capire se una funzione sia crescente o meno, ma non è possibile, ad esempio, studiarne la concavità. Per ottenere più informazioni è possibile estendere questi risultati a polinomi di grado superiore al primo.
Come nel caso Analisi 1, gli **Sviluppi di Taylor** permettono di approssimare localmente una funzione con un polinomio nelle variabili indipendenti a patto di conoscere opportune derivate parziali della funzione.

La seguente sezione affiancata da una banda verde non è richiesta, in quanto non presente nel testo di riferimento. È però necessaria per chiarire i concetti con cui si sta lavorando, deve quindi essere considerata come un approfondimento da leggere.

Definizione 9.14 (Polinomio di Taylor)
Siano:

- $f \in \mathbf{C^n}(A; \mathbb{R}^m)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $x_0 \in \mathring{A}$
- $h \in \mathbb{R}^n$
- Il segmento di estremi x_0 e $x_0 + h$ è interamente contenuto in A

Allora
$$T_{n-1}(f, x_0) = f(x_0) + Df(x_0; h) + \frac{1}{2!}D^2 f(x_0; h) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1} f(x_0; h)$$
Oppure, in forma più compatta

$$T_{n-1}(f, x_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} D^i f(x_0; h) \tag{9.14.1}$$

si dice **Polinomio di Taylor** di grado $n - 1$ della funzione f centrato nel punto x_0.

Nota. Nella Eq. (9.14.1), con la forma $D^i f(x_0; h)$ si intende lo *scalare* ottenuto applicando all'incremento h il differenziale i-*esimo* calcolato in x_0.
Supponendo $f : R^n \to \mathbb{R}^1$, la $D^i f(x_0; h)$ diventa, ad esempio:

- $i = 1$ $\quad Df(x_0; h) = \nabla f(x_0) \cdot h$
- $i = 2$ $\quad D^2 f(x_0; h) = h^T \cdot H_f(x_0) \cdot h$ dove h^T è h trasposto e H_f è la Definizione 9.5 (Matrice Hessiana)

Con $\cdot$, in questo caso, si intende il prodotto righe per colonne.
Vedasi Osservazione 8.8 (Matrici Derivata Totale Particolari) per le possibile "forme" assunte dalla $Df(x_0; h)$ in base ai valori di n e m.

Osservazione 9.15
Il Polinomio di Taylor è caratterizzato dall'avere in comune con la funzione f il valore di tutte le derivate fino all'ordine $n - 1$ nel punto x_0.

Teorema 9.16 (di Taylor)
Siano:

- $f \in \mathbf{C^n}(A; \mathbb{R}^m)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $x_0 \in \mathring{A}$
- $h \in \mathbb{R}^n$
- Il segmento di estremi x_0 e $x_0 + h$ è interamente contenuto in A

Allora
$$f(x) = T_{n-1}(f, x_0) + R_n(f, x_0, h) \qquad \text{per } x \to x_0$$
Dove $R_n(f, x_0, h)$ è **Resto** espresso nella forma di Peano o di Lagrange.

Dimostrazione. Omessa. □

Definizione 9.17 (Resto di Peano)
Nelle ipotesi del Teorema 9.16 (di Taylor), dalla Definizione 8.2 (o piccolo) si definisce il **resto** nella forma **di Peano**:
$$R_n(f, x_0, h) = \frac{1}{n!} D^n f(x_0; h) + o\left(\|h\|^2\right)$$
Cioè che la differenza tra la funzione ed il polinomio tende a zero quando la x tende al centro dello sviluppo, cioè x_0

Definizione 9.18 (Resto di Lagrange)
Nelle ipotesi del Teorema 9.16 (di Taylor), ma con $f \in \mathbf{C^n}(A; \mathbb{R}^1)$ si definisce il **resto** nella forma **di Lagrange**
$$\exists \theta \in [0, 1] : \quad R_n(f, x_0, h) = \frac{1}{n!} D^n f(x_0; \theta h) = \frac{D^n f(x + \theta h)}{n!} (x + \theta h)$$
Cioè che esiste un punto (senza sapere quale sia) all'interno del segmento di estremi x_0 e $x_0 + h$ in cui si ha un'equivalenza precisa tra la funzione ed il polinomio.

Osservazione 9.19
Il Resto di Lagrange, a differenza del Definizione 9.17 (Resto di Peano), offre informazioni quantitative sul resto, ma **NON** è applicabile a funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$, solo a funzioni a valori reali.

Passando ora al caso specifico degli sviluppi del secondo ordine

Proposizione 9.20 (Sviluppo di Taylor al Secondo Ordine con resto di Peano)
Siano:

- $f \in \mathbf{C^2}(A; \mathbb{R}^m)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $x_0 \in \mathring{A}$
- $h \in \mathbb{R}^n$

- Il segmento di estremi x_0 e $x = x_0 + h$ è interamente contenuto in A

Allora
$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)h + \frac{1}{2}h^T D^2 f(x_0)h + o\left(\|h\|^2\right)$$

Nota. h^T è il vettore riga trasposto del vettore colonna h.

Dimostrazione. Omessa in aula. □

Proposizione 9.21 (Sviluppo di Taylor al Secondo Ordine con resto di Lagrange)
Siano:

- $f \in \mathbf{C^2}(A; \mathbb{R})$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $x_0 \in \mathring{A}$
- $h \in \mathbb{R}^n$
- Il segmento di estremi x_0 e $x_0 + h$ è interamente contenuto in A

Allora
$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)h + \frac{1}{2}h^T D^n f(x + \theta h)h$$

Nota. Come detto in Osservazione 9.19, il resto di lagrange si può applicare solo a funzioni in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Omessa in aula. □

Esercizio 9.22
Sfruttando i noti sviluppi di funzioni reali di una variabile reale, scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine centrato nell'origine delle seguenti funzioni:

- $(x, y) \mapsto 2x^2 + 3xy + 4xy^3$
- $(x, y) \mapsto \sin(xy)$
- $(x, y, z) \mapsto (x + z)\cos(2x + 3y)$
- $(x, y) \mapsto e^{x-y^2}\ln(1 + x + y^2)$
- $(x, y, z) \mapsto \sqrt{1 + 2x + 3y + 4z}$
- $(x, y) \mapsto \begin{bmatrix} \cos(x^2 + y^2) \\ \sin(x^2 - y^2) \end{bmatrix}$
- $(x, y, z) \mapsto \sin(x + 3z)\cos(z - y)$
- $(x, y) \mapsto \frac{x+y^2}{\cos(x+y)}$
- $(x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} z\ln(1 + xy) \\ \frac{y}{1+x+z} \\ (y + z)\sin x \end{bmatrix}$

9.3 Derivate di Ordine Superiore

Definizione 9.23
Sia $k \in \mathbb{N}$ e sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**. $\mathbf{C^0}(A; \mathbb{R}^m)$ è l'insieme delle funzioni continue su A con valori in $\mathbb{R}^m$. Se $k \geq 1$, $\mathbf{C^k}(A; \mathbb{R}^m)$ è l'insieme delle funzioni continue su A con valori in $\mathbb{R}^m$ con tutte le derivate parziali prime di classe $\mathbf{C^{k-1}}$ su A.
Inoltre
$$\mathbf{C}^\infty(A; \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{C^k}(A; \mathbb{R}^m)$$

Si può anche leggere f *è di classe* $\mathbf{C^k}$ *o* $\mathbf{C}^\infty$ *su* A *con valori in* $\mathbb{R}^m$.

Esercizio 9.24
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ed $f \in \mathbf{C^3}(A; \mathbb{R}^m)$. Quante sono le derivate parziali terze di f in totale? E quante quelle che, in generale, bisogna necessariamente calcolare?

10 Il Teorema della Funzione Implicita

I risultati esposti in questo paragrafo permettono di studiare funzioni senza averne l'espressione analitica esplicita a disposizione, fatto estremamente importante per l'utilizzo reale dell'analisi. Non è infatti sempre possibile ottenere la forma analitica di una funzione, ma ci può comunque essere necessità di studiarla.

Definizione 10.1 (Funzione Implicita)
Dati

- $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$
- $f : X \times Y \to \mathbb{R}^l$
- $(x_0, y_0) \in X \times Y$ (un punto)

Si dice che l'equazione $f(x, y) = 0$ **Definisce Implicitamente una Funzione** φ in un intorno di (x_0, y_0) se:

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. Esistono due aperti $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ tali che:
   - $x_0 \in \mathcal{X} \subseteq X$
   - $y_0 \in \mathcal{Y} \subseteq Y$

   Nota. Oppure, alternativamente, $x_0 \in \mathring{\mathcal{X}}$ e $y_0 \in \mathring{\mathcal{Y}}$ con $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ non aperti.
3. Esiste $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$

Tali che:

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathcal{X} \\ y \in \mathcal{Y} \\ f(x, y) = 0 \end{array}\right\} \implies y = \varphi(x)$$

Con φ **Funzione Implicita** definita da $f(x, y) = 0$.

Cioè la Funzione Implicita associa un sottoinsieme delle variabili dell'equazione alle variabili rimanenti. Da questo deriva il nome *implicita*, in quanto la f definisce "implicitamente" la φ, perchè l'immagine di f è influenzata da tutte le variabili della funzione, che dunque son legate tra loro.

Nota. La **Funzione Inversa** di una qualche funzione è anche **Funzione Implicita** di questa funzione.

Esempio 10.2
Posti $m = n = l = 1$

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 + 1 \end{array}$$

Non definisce alcuna funzione implicita poiché $f(x, y) = 0$ non è mai verificata.

Esempio 10.3
Posti $m = n = l = 1$

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 - 1 \end{array}$$

Nota. Il Teorema della Funzione Implicita è particolarmente utile quando non è possibile esprimere in forma analitica un parametro rispetto agli altri, ma è ovviamente utilizzabile anche quando è fattibile.

Per prima cosa si osserva che è possibile trovare dei punti che verifichino l'uguaglianza $f(x, y) = 0$, cioè tutti i punti della circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. Il punto $(0, 1)$ definisce implicitamente, tra le altre, una funzione

$$\begin{array}{rcccc} \varphi_1 & : &]-1,1[& \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array} \tag{10.3.1}$$

Nota. φ_1 non avrebbe potuto essere definita $]-1, 1[\to]0, 1]$ perché sarebbe contrario al punto 2 della Definizione 10.1 (Funzione Implicita), non essendo $\mathcal{Y}$ un aperto, in questo caso. Estendendo $\mathcal{Y}$ a $\mathbb{R}^+$ si ha un aperto contenente tutti i valori assunti da φ_1.

Un primo problema nasce dalla scelta degli insiemi $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, per esempio sarebbero stati altrettanto accettabili $\mathcal{X} = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ e $\mathcal{Y} = R^+$. Un secondo problema è la scelta del punto nel cui intorno si cercherà la funzione implicita: sarebbe stato possibile scegliere il punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oppure ancora $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Sicuramente $(1, 0)$ non è un punto valido, dato che non si verifica il punto 3 della Definizione 10.1 (Funzione Implicita), perché una eventuale relazione come φ_3 da Figura 10.1 non sarebbe una funzione.

Nota. La φ_1 di Eq. (10.3.1) potrebbe essere scritta in funzione di y poiché, a priori, non c'è distinzione tra le variabili.

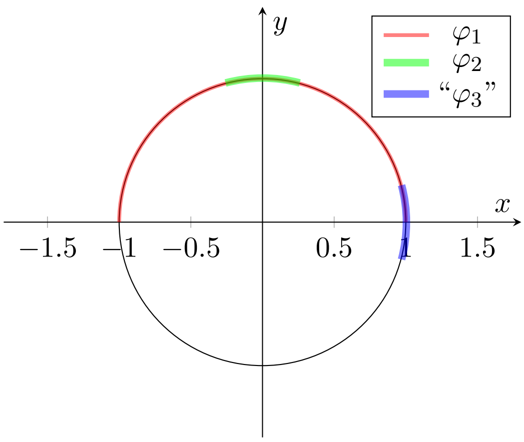


Figura 10.1: Esempi di funzioni implicite della f

Esempio 10.4
Posti $m = n = l = 1$

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

L'uguaglianza $f(x, y) = 0$ non definisce implicitamente alcuna funzione in quanto $\operatorname{Dom} f = \{(0, 0)\}$ che è composto da un solo punto isolato, dunque non esistono $\mathcal{X} \subseteq X$ e $\mathcal{Y} \subseteq Y$ aperti.

Esempio 10.5
Posti $m = n = l = 1$

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x^2-y^2 \end{array}$$

L'uguaglianza $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente infinite funzioni distinte in un intorno di $(0, 0)$.

Esercizio 10.6
Determinare (almeno) 5 funzioni diverse definite implicitamente dalla funzione nell'Esempio 10.5 sullo stesso insieme

Esempio 10.7 (Equazione di Keplero)
Nella meccanica orbitale, l'**Equazione di Keplero** è un importante risultato che mette in relazione varie proprietà dell'orbita di un oggetto soggetto ad una forza centrale fornendo la legge oraria del suo moto. Dati

- M *Anomalia Media*: frazione di periodo orbitale trascorsa dall'ultimo passaggio al pericentro z, espressa come angolo.
- E *Anomalia Eccentrica*: valore angolare utilizzato per correggere lo scostamento tra l'anomalia vera, cioè quella osservata, e quella media (da sopra)
- e *Eccentricità* dell'orbita del corpo
- n *Velocità angolare media* del corpo
- t *Istante* di tempo in cui si vuol calcolare la posizione del corpo
- τ *Istante* di tempo di passaggio per il pericentro (perielio nel caso del Sole)

Si ha la

$$\underbrace{E - e\sin(E)}_{=M} = n(t-\tau)$$

Dalla quale è però impossibile esplicitare la E, necessaria per il calcolo della posizione, in funzione del tempo t. È possibile, al massimo, avvicinarsi alla soluzione con metodi di approssimazione.

Per funzioni lineari il Teorema della Funzione Implicita si riduce alla semplice inversione di una matrice.

Teorema 10.8 (della Funzione Implicita - Caso Lineare)
Siano:

- $A \in \mathrm{Mat}(p \times n)$ matrice
- $B \in \mathrm{Mat}(p \times m)$ matrice
- $C \in \mathrm{Mat}(p \times 1)$ vettore colonna
- $p = m$
- $\det(B) \neq 0$

e la funzione

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^p \\ & & (x,y) & \mapsto & Ax + By - C \end{array}$$

Allora esiste un'unica funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che:

$$Ax + By = C \quad \iff \quad f(x,y) = 0 \quad \iff \quad y = \varphi(x)$$

Nota. Dimensionalmente, avendo $p = m$ ed eseguendo i prodotti righe per colonne, ci si porta ad avere da entrambi i lati dell'uguaglianza matriciale dei vettori colonna $\in \mathrm{Mat}(p \times 1)$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} Ax + By &= C \\ By &= C - Ax \end{aligned}$$

Essendo $p = m$ e $\det(B) \neq 0$, la matrice B è invertibile, dunque

$$B^{-1}By = B^{-1}(C - Ax)$$
$$y = B^{-1}(C - Ax)$$

Quindi è possibile esprimere la y in funzione della sola x, verificando la tesi. □

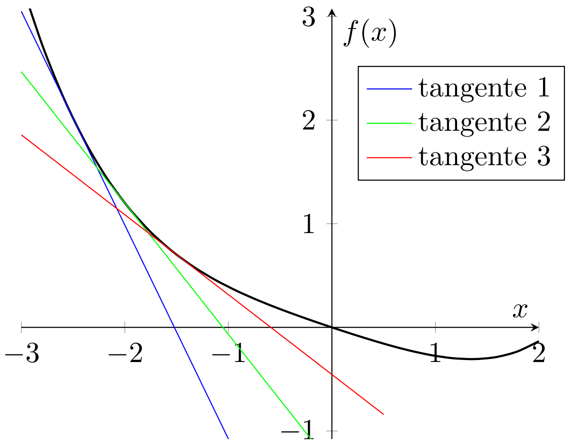
Osservazione 10.9 (Metodo di Newton, o delle Tangenti)

> ***Nota.*** Questo metodo, leggermente modificato, sarà utile nella dimostrazione del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita).

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathbf{C^2}([a, b], \mathbb{R})$. Se l'intervallo $[a, b]$ contiene una sola radice della f, allora si può individuare la radice per mezzo di successive approssimazioni della curva con le sue tangenti.
Procedendo in modo iterativo si dimostra che la relazione di ricorrenza del metodo è:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{10.9.1}$$

Che è una successione convergente alla radice.
Graficamente si vede come utilizzando le tangenti ci si possa spostare rapidamente verso la radice:



Teorema 10.10 (della Funzione Implicita)

> ***Nota.*** Questo teorema è anche noto come *Teorema di Dini*

Siano:

1. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ **Aperti**
2. $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ e f **Continua** in $X \times Y$
3. $(x_0, y_0) \in X \times Y$ e $f(x_0, y_0) = 0$
4. $D_y f$ **esiste Continua** in (x_0, y_0)
5. $D_y f(x_0, y_0)$ ammette **inversa**

> ***Nota.*** Nel Teorema 10.8 (della Funzione Implicita - Caso Lineare) si utilizzava direttamente la matrice dell'applicazione lineare, mentre qui si ha la la matrice Derivata Totale. Questo perché il differenziale è la funzione che meglio approssima una funzione in un suo punto, permettendo una pseudo linearità malgrado la f non sia (necessariamente) lineare.

> ***Nota.*** Nei punti 4 e 5 delle ipotesi si ha $D_y f$ perché si sta cercando una funzione implicita che esprima la y, se la si stesse cercando per la x si dovrebbe utilizzare la $D_x f$

Nota. Il punto 5 delle ipotesi richiede che la matrice $D_y f$ sia invertibile, cioè quadrata e con $\det(D_y f) \neq 0$. Il fatto che sia quadrata è garantito per ipotesi, in quanto $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ e f è a valori in $\mathbb{R}^m$
Nel caso molto comune di $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, bisogna verificare che $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, cioè che la derivata parziale rispetto ad y non sia nulla.

Allora

1. Esistono degli intorni $\mathcal{X}$ di x_0 e $\mathcal{Y}$ di y_0 ed esiste la **funzione Continua** $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tale che, con $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$
$$f(x, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \varphi(x) \tag{10.10.1}$$

2. Se $\varphi_1 : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{Y}_1$ e $\varphi_2 : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}_2$ soddisfano alla Eq. (10.10.1) con $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \subseteq \mathcal{X}$ intorni di x_0 e $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \subseteq \mathcal{Y}$ intorni di y_0, allora
$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{su} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$$

Nota. Il punto 2 significa che prendendo due φ definite su intervalli diversi, esse assumeranno gli stessi valori nei punti comuni ad entrambi gli intervalli (se esistono). Questa proprietà viene spesso indicata dalla forma "φ è unica *localmente*".

Dimostrazione. Analogamente alla Eq. (10.9.1), passando al caso multidimensionale, si definisce la funzione
$$\begin{array}{rcccc} T & : & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} & \to & \mathcal{Y} \\ & & (x, y) & \mapsto & y - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} \cdot f(x, y) \end{array} \tag{10.10.2}$$

Nota. $[D_y f(x_0, y_0)]^{-1}$ è la matrice inversa della $D_y f$

Considerando la x della T come un parametro, si può dire che T sia una Definizione 4.14 (Contrazione con Parametro). Bisogna però verificare che sia effettivamente una contrazione, cioè che rispetti due condizioni:

1. *La T esegue una contrazione delle distanze*
Questo si può dimostrare grazie al Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti). Infatti se il $\sup\limits_{\xi \in S} \|Df(\xi)\|$ dell'Eq. (8.51.1) è un numero $\in [0, 1[$, allora (sostituendo la distanza con la norma per Definizione 1.8 (Norma)) la Eq. (8.51.1) diventa comparabile alla Eq. (4.14.1), cioè:
$$d\big(T(x, y_1), T(x, y_2)\big) \leq K \cdot d(y_1, y_2)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\|T(x, y_1) - T(x, y_2)\| \leq \sup_{\xi \in S} \|D_y T(\xi)\| \cdot \|y_1 - y_2\|$$
Per poter applicare il Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti) è necessario che il segmento di estremi y_1, y_2 sia interamente contenuto nella parte interna dell'insieme di definizione di T.
Dato che nell'enunciato del teorema è solo indicata l'esistenza di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, è possibile scegliere questi insiemi a piacimento. Ponendo dei r_x ed r_y sufficientemente piccoli, saranno accettabili:
$$\mathcal{X} = \overline{B(x_0, r_x)} \qquad\qquad \mathcal{Y} = \overline{B(y_0, r_y)}$$
A questo punto il Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti) è applicabile, dunque si procede a quantificare il $\sup\limits_{\xi \in S} \|Df(\xi)\|$ differenziando rispetto ad y la Eq. (10.10.2)
$$D_y T(x, y) = \mathrm{Id}_Y - \big[D_y f(x_0, y_0)\big]^{-1} D_y f(x, y)$$

Essendo $\mathrm{Id}_Y = \big[D_y f(x,y)\big]^{-1} \cdot D_y f(x,y)$ per qualsiasi (x,y), si ha

$$\begin{aligned} &= \big[D_y f(x_0,y_0)\big]^{-1} \cdot D_y f(x_0,y_0) - \big[D_y f(x_0,y_0)\big]^{-1} D_y f(x,y) \\ &= \big[D_y f(x_0,y_0)\big]^{-1} \cdot \big[D_y f(x_0,y_0) - D_y f(x,y)\big] \end{aligned}$$

Passando alle norme

$$\|D_y T(x,y)\| = \left\| \big[D_y f(x_0,y_0)\big]^{-1} \cdot \underbrace{\big[D_y f(x_0,y_0) - D_y f(x,y)\big]}_{(1)} \right\|$$

Essendo, come detto prima, r_x ed r_y piccoli a piacere, si può presupporre che il fattore indicato come (1) tenda a 0, essendo una differenza tra funzioni continue (per ipotesi). A questo punto, sicuramente, si può minorare con un valore arbitrario: si sceglie $\frac{1}{2}$ in quanto sarà successivamente "comodo" nel corso della dimostrazione.

$$\|D_y T(x,y)\| \le \frac{1}{2}$$

Dunque, finalmente, applicando il Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti)

$$\|T(x,y_1) - T(x,y_2)\| \le \frac{1}{2} \cdot \|y_1 - y_2\|$$

□

2. *La T è a valori nell'insieme di partenza (T "ben definita")*
Preso un generico y, si deve verificare che $\forall y \in \mathcal{Y}: \ T(x,y) \in \mathcal{Y}$ cioè, per come è definito $\mathcal{Y}$, che la distanza tra $T(x,y)$ ed y_0, centro della $\overline{B(y_0,r_y)}$, sia minore di r_y.
Applicando la disuguaglianza triangolare

$$\|T(x,y) - y_0\| \le \left\| \underbrace{T(x,y) - T(x,y_0)}_{(1)} + \underbrace{\|T(x,y_0) - y_0\|}_{(2)} \right\|$$

Applicando nuovamente il Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti) ad (1) ed utilizzando la definizione di T per (2)

$$\le \underbrace{\sup_{\xi \in S} \|D_y T(\xi)\|}_{(3)} \cdot \underbrace{\|y - y_0\|}_{(4)} + \big\|y_0 - [D_y f(x_0,y_0)]^{-1} \cdot f(x,y_0) - y_0\big\|$$

Come dimostrato prima (3) è minorato da $\frac{1}{2}$, mentre (4) corrisponde a r_y

$$\begin{aligned} &\le \frac{1}{2} r_y + \big\|[D_y f(x_0,y_0)]^{-1} \cdot f(x,y_0)\big\| \\ &= \frac{1}{2} r_y + \big\|[D_y f(x_0,y_0)]^{-1}\big\| \cdot \|f(x,y_0)\| \\ &= \frac{1}{2} r_y + \big\|[D_y f(x_0,y_0)]^{-1}\big\| \cdot \|f(x,y_0) - 0\| \end{aligned}$$

Essendo $f(x_0,y_0) = 0$ per ipotesi

$$= \frac{1}{2} r_y + \underbrace{\big\|[D_y f(x_0,y_0)]^{-1}\big\| \cdot \|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\|}_{(5)}$$

Il termine (5) non dipende da r_y, ma solo da r_x, dunque scegliendo un r_x sufficientemente piccolo, è possibile minorare nuovamente con

$$\begin{aligned}&\leq \frac{1}{2}r_y + \frac{1}{2}r_y\\ &\leq r_y\end{aligned}$$

□

Si è quindi verificato che la T sia effettivamente una **Contrazione** per ogni $x \in \mathcal{X}$

Nota. L'indipendenza dal parametro deriva dall'aver verificato la Definizione 4.14 (Contrazione con Parametro)

Sfruttando il Teorema 4.15 (delle Contrazioni con Parametro) si può essere certi dell'unicità del punto fisso di T. Inoltre, il punto fisso di T è anche radice di $f(x, y) = 0$. Questo si dimostra applicando la Definizione 4.5 (Punto Fisso) alla T:

$$\begin{aligned}T(x, y) = y \quad &\iff \quad y - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} \cdot f(x, y) = y\\ &\iff \quad [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} \cdot f(x, y) = 0\end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri per $D_y f$

$$\iff \quad D_y f(x_0, y_0) \cdot [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} \cdot f(x, y) = D_y f(x_0, y_0) \cdot 0$$

Una matrice moltiplicata per la sua inversa dà la matrice identità, dunque

$$\iff \quad f(x, y) = 0$$

Quindi, effettivamente, il punto fisso della T è zero della f.
È ora possibile definire una funzione che associa ad un dato parametro x una T in funzione di y (quindi φ è funzione di funzioni).

$$\begin{array}{cccc}\varphi : & \mathcal{X} & \to & \mathcal{Y}\\ & x & \mapsto & T(x, y)\end{array}$$

La continuità di φ è sempre garantita da Teorema 4.15 (delle Contrazioni con Parametro). □

Esercizio 10.11
Confrontare le ipotesi del Teorema 10.8 (della Funzione Implicita - Caso Lineare) e del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita).

Soluzione. Vedere seconda nota alle ipotesi del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) ■

Esercizio 10.12
Come mai il Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) è stato ambientato in $\mathbb{R}^n$ e non in un generico spazio metrico?

Teorema 10.13
Nelle stesse ipotesi del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) ed aggiungendo $f \in \mathbf{C^1}$, allora $\varphi \in \mathbf{C^1}$ e vale

$$D\varphi(x) = -\Big[D_y f\big(x, \varphi(x)\big)\Big]^{-1} \cdot D_x f\big(x, \varphi(x)\big) \tag{10.13.1}$$

Dimostrazione. Omessa a lezione.
f è di classe $\mathbf{C^1}$ $\implies$ f è Lipschtziana $\implies$ la funzione T definita in Eq. (10.10.2) è Lipschtziana anche in x (si veda Esercizio 3.43) $\implies$ la funzione implicita $y = \varphi(x)$ è Lipschtziana (per Teorema 4.17).

Se φ è derivabile, allora le regole di derivazione garantiscono che (da Esercizio 8.42):

$$0 = D\Big(f\big(x,\varphi(x)\big)\Big) = D_x f\big(x,\varphi(x)\big) + D_y f\big(x,\varphi(x)\big)$$

Dunque

$$\varphi'(x) = -\Big(D_y f\big(x,\varphi(x)\big)\Big)^{-1} \cdot D_x f\big(x,\varphi(x)\big)$$

Si pone ora per brevità

$$A(x) = -\Big(D_y f\big(x,\varphi(x)\big)\Big)^{-1} \cdot D_x f\big(x,\varphi(x)\big)$$

Resta dunque da verificare che

$$\omega_x(h) = \varphi(x+h) - \varphi(x) - A(x)\cdot h \qquad \text{allora} \qquad \omega_x(h) = o(h) \text{ per } h \to 0 \tag{10.13.2}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
0 &= f\big(x+h,\varphi(x+h)\big)\\
&= f\big(x+h,\varphi(x)+A(x)\cdot h+\omega_x(h)\big)\\
&= D_x f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot h + D_y f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\big(A(x)\cdot h+\omega_x(h)\big) + o\left(\sqrt{\|h\|^2+\|A(x)\cdot h+\omega_x(h)\|^2}\right)\\
&= D_y f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\omega_x(h) + o\left(\sqrt{\|h\|^2+\|A(x)\cdot h+\omega_x(h)\|^2}\right)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\omega_x(h) = \big[D_y f\big(x,\varphi(x)\big)\big]^{-1} o\left(\sqrt{\|h\|^2+\|A(x)\cdot h+\omega_x(h)\|^2}\right)$$

Dalla definzione di ω_x in Eq. (10.13.2), segue che la funzione $h \mapsto \omega_x(h)$ è Lipschtziana (da Esercizio 3.43). Ciò implica che non possa andare a 0 più lentamente di $h \to h$, dunque ne segue che

$$\omega_x(h) = \big[D_y f\big(x,\varphi(x)\big)\big]^{-1} o(\|h\|) = o(\|h\|)$$

□

Corollario 10.14 (Caso $n=1$, $m=1$)
Il Teorema 10.13 nel caso caso $\boldsymbol{n = 1}$, $\boldsymbol{m = 1}$, la Eq. (10.13.1) diventa

$$D\varphi(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\varphi(x)\big)}{\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)}$$

Dimostrazione. Dalla tesi del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita), si ha

$$f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

Derivando si passa alla

$$D\Big(f\big(x,\varphi(x)\big)\Big) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\varphi(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)D\varphi(x) = 0$$

Da cui, spostando, la tesi. □

Esercizio 10.15
Tramite la Eq. (10.13.1) dimostrare che se f soddisfa le ipotesi del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) ed è di classe $\mathbf{C^k}$, allora anche la **Funzione Implicita** è di classe $\mathbf{C^k}$.

Esempio 10.16
L'uguaglianza $y^3 = x^6$ definisce un'unica funzione implicita $y = y(x)$ in un intorno di $(0, 0)$, pur non soddisfacendo alle ipotesi del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita).

Esempio 10.17
Data una funzione $f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, il luogo geometrico descritto da $f(x, y) = 0$ coincide con quello descritto da $\big(f(x, y)\big)^2 = 0$, ma anche se la prima equazione soddisfa alle ipotesi del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita), la seconda sicuramente non lo fa.

Esempio 10.18
Entrambe le funzioni

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \mapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

descrivono l'asse z attraverso le equazioni

$$f(x, y, z) = 0 \qquad\qquad g(x, y, z) = 0$$

Tuttavia, mentre f soddisfa alle ipotesi del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita), la g le soddisfa. Grazie al citato teorema, la f (nell'intorno di un qualsiasi punto $(0, 0, z)$) definisce sicuramente una funzione implicita $(x, y) = \varphi(z)$ data da $\varphi(z) = 0$.

Nota. L'esempio precedente mostra come, ai fini della determinazione del numero di gradi di libertà di un sistema, possa essere fuorviante fare affidamento sul numero di equazioni che identificano il vincolo

Corollario 10.19
Siano

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $x_0 \in \mathring{A}$
- $f \in \mathbf{C^1}(A; \mathbb{R}^m)$
- $f(x_0) = 0$
- $n > m$

Se $Df(x_0)$ ha rango m, il vincolo implicito $f(x) = 0$ equivale ad una relazione esplicita in cui $n - m$ variabili dipendono dalle rimanenti m.

Dimostrazione. Applicare il Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) □

Esercizio 10.20
Studiare il luogo dei punti in cui le coordinate soddisfano a $y + xe^y = x$ in intorni di $(-1, 0)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$.
Tracciarne il grafico globale.

10.1 Il Teorema della Funzione Inversa

Data una funzione f, poterla invertire significa poter risolvere in un unico modo l'equazione (o sistema) $f(x) = y$ determinando l'incognita x in funzione del parametro y, cioè ottenere $x = f^{-1}(y)$.

Teorema 10.21 (della Funzione Inversa - Caso Lineare)
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ data da $f(x) = Mx$ e $M \in \mathrm{Mat}(m \times n)$

$$f \text{ è invertibile} \quad \Longleftrightarrow \quad n = m \text{ e } \det M \neq 0$$

Dimostrazione. Dalle nozioni di Algebra Lineare

$$\begin{aligned} X \cdot A &= Y \\ A^{-1} \cdot X \cdot A &= A^{-1} \cdot Y \\ X &= A^{-1} \cdot Y \end{aligned}$$

□

Teorema 10.22 (della Funzione Inversa)
Siano

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è **Aperto**
- $x_0 \in X$
- $f \in \mathbf{C^k}(A; \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$
- $Df(x_0)$ **Invertibile**

Nota. $Df(x_0)$ è Invertibile quando $\det Df(x_0) \neq 0$, visto che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Allora esiste un **Aperto** $\mathcal{X} \subseteq X$ tale che:

- $x_0 \in \mathcal{X}$
- $f(\mathcal{X})$ è un **aperto**
- $f_{|\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to f(\mathcal{X})$ è **Invertibile** e l'inversa è $\mathbf{C^k}$
- $(Df^{-1})(y) = \left[Df\big(f^-1(y)\big)\right]^{-1}$

Nota. $f_{|\mathcal{X}}$ è la **Restrizione** di f ai soli elementi di $\mathcal{X}$

Dimostrazione. Sia $\Omega = \{x \in X : \det Df(x) \neq 0\}$ l'insieme di tutti i punti in cui la $Df(x)$ è invertibile. Per ipotesi sicuramente Ω è aperto, essendo X aperto, e $x_0 \in \Omega$. Posta ora F

$$\begin{array}{rcccc} F & : & \Omega \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x, y & \mapsto & f(x) - y \end{array}$$

Si va a verificare che la F rispetti le ipotesi del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita), modificando però le ipotesi per far riferimento alla $D_x f$:

1. è verificato perché Ω aperto, come detto, ed $\mathbb{R}^n$ è aperto a sua volta
2. è verificato perché F somma di funzioni continue nell'intervallo scelto
3. Dalla definizione di F, $F(x_0, y_0) = 0 \iff y_0 = f(x_0)$
4. è verificato per ipotesi
5. è verificato per definizione dell'insieme Ω. $D_x F(x, y) = Df(x)$ perchè, derivando parzialmente rispetto ad x, la derivata di y è 0, essendo y assimilabile ad una costante.

Esiste dunque una funzione $\varphi : I \to J$, con I intorno di y_0 e J intorno di x_0, tale che:

$$\underbrace{x = \varphi(y) \iff F(x,y) = 0}_{\substack{\text{Per} \\ \text{Teorema 10.10 (della Funzione Implicita)}}} \overset{\substack{\text{Riportandosi} \\ \text{alla } f}}{\iff} y = f(x) \tag{10.22.1}$$

Nota. Nella Eq. (10.22.1) è stato applicato il Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) rispetto alla variabile x, diversamente da quanto fatto nell'enunciato del teorema stesso, dove la derivata in questione era la y.

Dunque, con il primo e l'ultimo elemento

$$x = \varphi(y) \iff y = f(x) \tag{10.22.2}$$

È ora necessario individuare l'insieme su cui f è invertibile. Si pone $\mathcal{X} = f^{-1}(I) \cap J$ dove:

- $f^{-1}(I)$ è l'insieme controimmagine di f, cioè "tutti i valori di cui si può calcolare la f"
- J è l'insieme immagine della φ, quindi "i valori delle x in funzione delle y"

Nota. Vedere Esempio 10.23 per capire come $f^{-1}(I)$ possa essere diverso da J

Avendo eseguito l'intersezione, si ha la certezza che nei punti di $\mathcal{X}$, la f sia invertibile e che la φ assuma valori validi. Data la relazione tra f e φ trovata in Eq. (10.22.2), si può concludere che, per i valori in $\mathcal{X}$, la f è sicuramente invertibile e la sua inversa è φ.

Inoltre F è funzione di classe $\mathbf{C^k}$, essendo somma di $f \in \mathbf{C^k}$ $y \in \mathbf{C}^\infty$. Son dunque verificate anche le ipotesi del Teorema 10.13 (ed Esercizio 10.15), ciò implica che φ sia di classe $\mathbf{C^k}$.

Infine si ottiene la regola di derivazione:

$$(Df^{-1})(y) = D\varphi(y)$$

Dal Teorema 10.13

$$= -\Big[D_x F\big(\varphi(y), y\big)\Big]^{-1} \cdot D_y F\big(\varphi(y), y\big)$$

Per definizione di F, la derivata parziale rispetto a y è una costante, cioè la matrice identità

$$= -\Big[D_x F\big(\varphi(y), y\big)\Big]^{-1} \cdot (-\operatorname{Id})$$
$$= -\Big[D_x F\big(\varphi(y), y\big)\Big]^{-1}$$

□

Esempio 10.23

Nota. Questo esempio mostra come il Teorema 10.22 (della Funzione Inversa) non possa essere applicato globalmente, ma solo in intorni. Il fatto che il Teorema valga localmente in tutto il dominio della f **non implica** valga globalmente.

Sia

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (e^x \cos y, e^x \sin y) \end{array}$$

La f è di classe $\mathbf{C}^\infty$ ed inoltre $Df(x,y)$ è invertibile per ogni coppia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, quindi il Teorema 10.22 (della Funzione Inversa) può essere applicato in ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

f però non è globalmente invertibile, infatti non è iniettiva, ma è 2π-periodica nella variabile y.

Nota. La f può anche essere scritta come $f(z)) = e^z$, come da Definizione 15.4 (Funzione Esponenziale con Esponente Complesso).

Esercizio 10.24

Nota. Questo esempio mostra come il Teorema 10.22 (della Funzione Inversa) offra una condizione sufficiente a garantire l'invertibilità, ma non necessaria.

Sia

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

f è invertibile con inversa continua, malgrado sia $f'(0) = 0$.

Esercizio 10.25
Date due qualunque funzioni $f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ e $g \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, verificare che alla funzione $g \circ f$ non può essere applicato il Teorema 10.22 (della Funzione Inversa).
Esibire un esempio di funzioni $f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ e $g \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ tali che la funzione $f \circ g$ invece soddisfi le ipotesi del Teorema 10.22 (della Funzione Inversa).

Esercizio 10.26
La funzione $f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ soddisfa alle ipotesi del Teorema 10.22 (della Funzione Inversa) in x_0 e la funzione $g \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ soddisfa alle ipotesi del Teorema 10.22 (della Funzione Inversa) in $f(x_0)$.
Verificare che la funzione $g \circ f$ soddisfa alle ipotesi del Teorema 10.22 (della Funzione Inversa) in x_0.

11 Massimi e Minimi Liberi

Definizione 11.1 (Massimi e Minimi)
Siano (X, d) uno **Spazio Metrico**, $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Con $B \subseteq A$ e $m, M \in \mathbb{R}$, si dicono:

- M è il **Massimo** di f su B $\rightleftharpoons$ $M = \max f(B)$
- m è il **Minimo** di f su B $\rightleftharpoons$ $m = \min f(B)$
- x_0 punto di **Massimo Assoluto** per f $\rightleftharpoons$ $f(x_0) = \max\limits_{A} f$
- x_0 punto di **Minimo Assoluto** per f $\rightleftharpoons$ $f(x_0) = \min\limits_{A} f$
- x_0 punto di **Massimo Locale** per f $\rightleftharpoons$ $\begin{cases} \exists r > 0 : \ \forall x \in B(x_0, r) \cap A \\ f(x_0) \geq f(x) \end{cases}$
- x_0 punto di **Minimo Locale** per f $\rightleftharpoons$ $\begin{cases} \exists r > 0 : \ \forall x \in B(x_0, r) \cap A \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$
- x_0 punto di **Massimo Locale Forte** per f $\rightleftharpoons$ $\begin{cases} \exists r > 0 : \ \forall x \in B(x_0, r) \cap A \text{ con } x \neq x_0 \\ f(x_0) > f(x) \end{cases}$
- x_0 punto di **Minimo Locale Forte** per f $\rightleftharpoons$ $\begin{cases} \exists r > 0 : \ \forall x \in B(x_0, r) \cap A \text{ con } x \neq x_0 \\ f(x_0) < f(x) \end{cases}$
- x_0 di **Estremo** per f $\rightleftharpoons$ x_0 punto di **Massimo** o di **Minimo**

Nota. I punti di massimo/minimo son anche indicati con $\arg\max f$ e $\arg\min f$

Nota. A volte si parla di estremi (Massimi/Minimi) **Relativi** come sinonimi di estremi **Locali**.

Osservazione 11.2
Una funzione ha **unico massimo/minimo**, ma può avere **infiniti punti di massimo/minimo assoluto**.

- Il massimo di f ($\max f$) è un valore nell'insieme di arrivo della funzione ed è unico per definizione di max.
- Il punto di estremo assoluto x_0 è, per definizione, il punto appartenente all'insieme di partenza della f per cui f assume il suo valore massimo. Questa definizione appena data non è influenzata dall'unicità di $\max f$, in quanto possono esistere più valori di x per cui $f(x) = \max f$, il quale $\max f$ sarà però unico.

Vedere Esercizio 11.5 e Esercizio 11.6.

Esercizio 11.3
Formulare le definizioni di Massimo/Minimo Assoluto Forte e di Estremo Locale/Assoluto Forte e non.

Soluzione.

- x_0 punto di **Massimo Assoluto Forte** per f $\rightleftharpoons$ $\forall x \in A \ \ f(x_0) > f(x)$

- x_0 punto di **Minimo Assoluto Forte** per f $\quad \rightleftharpoons \quad \forall x \in A \;\; f(x_0) < f(x)$

- x_0 punto di **Estremo Locale** per f $\quad \rightleftharpoons \quad \begin{cases} \text{Unione delle definizioni di} \\ \textbf{Massimo Locale} \\ \textit{e} \\ \textbf{Minimo Locale} \end{cases}$

- x_0 punto di **Estremo Locale Forte** per f $\quad \rightleftharpoons \quad \begin{cases} \text{Unione delle definizioni di} \\ \textbf{Massimo Locale Forte} \\ \textit{e} \\ \textbf{Minimo Locale Forte} \end{cases}$

- x_0 punto di **Estremo Assoluto** per f $\quad \rightleftharpoons \quad \begin{cases} \text{Unione delle definizioni di} \\ \textbf{Massimo Assoluto} \\ \textit{e} \\ \textbf{Minimo Assoluto} \end{cases}$

- x_0 punto di **Estremo Assoluto Forte** per f $\quad \rightleftharpoons \quad \begin{cases} \text{Unione delle definizioni di} \\ \textbf{Massimo Assoluto Forte} \\ \textit{e} \\ \textbf{Minimo Assoluto Forte} \end{cases}$

■

Esercizio 11.4
Esibire esempi di funzioni con infiniti punti di massimo/minimo assoluti.

Soluzione.

$$f(x) = 1 \qquad\qquad f(x) = \sin(x)$$

■

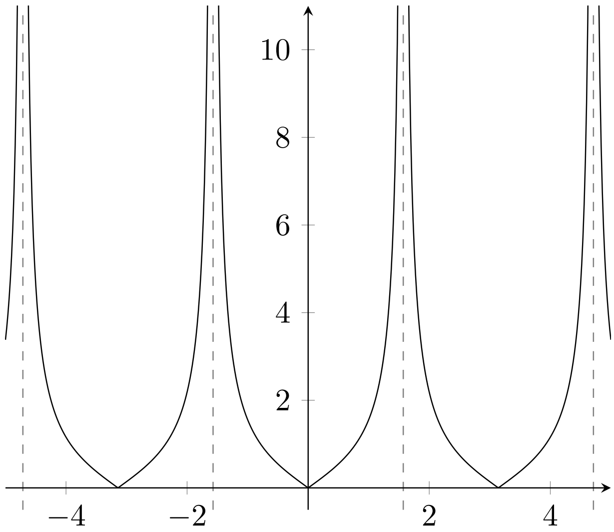
Esercizio 11.5
Esibire esempi di funzioni con infiniti punti di massimo/minimo assoluti e prive di minimo/massimo assoluti.

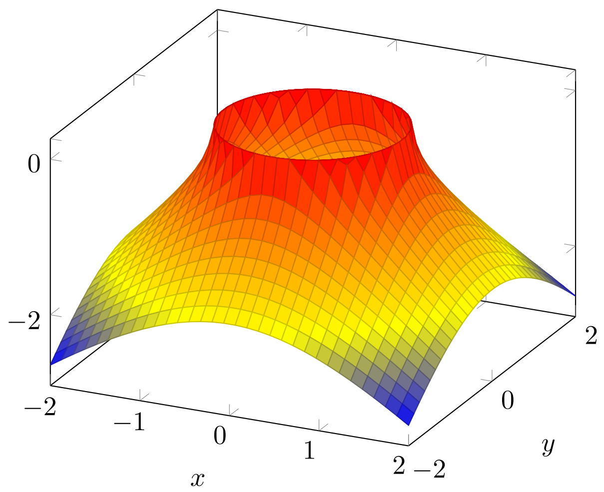
Nota. Notare che son richiesti infiniti **punti** di massimo/minimo, come da Osservazione 11.2.

Soluzione.

$f(x) = |\tan(x)|$ ha infiniti punti di minimo assoluto,
ma ovviamente unico minimo assoluto $\min f = 0$

$f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ ha dominio
$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 > 1\}$.
La f ha infiniti punti di massimo assoluto in
$\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$,
ma ovviamente unico massimo assoluto $\max f = 0$





■

Esercizio 11.6
Formulare e dimostrare l'unicità del massimo/minimo assoluto.

> ***Nota.*** Notare che è richiesta l'unicità del **massimo/minimo assoluto**, non dei punti di massimo/minimo. Si ricorda l'Osservazione 11.2.

Soluzione. Per definizione, $x = \max X$ se $x = \sup X$ e $x \in X$. Se poi $x = \sup X$, allora x è per definizione il più piccolo dei maggioranti di X.
Il sup di un insieme è unico, si dimostra per assurdo:

Dimostrazione. Dati $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$, si supponga esistano $M_1, M_2 \in A$ con $M_1 \neq M_2$, due sup diversi di B. Applicando la definizione di maggiorante:

$$\forall x \in B, \; x \leq M_1 \qquad \text{e} \qquad \forall x \in B, \; x \leq M_2$$

Si può ora supporre che sia $M_1 > M_2$ senza perdere generalità, però questo significa che M_1 non sia sup, (non è il più piccolo dei maggioranti), negando l'ipotesi - *Assurdo* □

Per come è definito dunque, anche il max sarà unico, da cui la tesi. ■

Esercizio 11.7
In questa sezione compaiono esclusivamente funzioni a valori in $\mathbb{R}$. Perché?

Soluzione. Perché si stanno considerando i valori assunti dalla f come punti nello spazio (nella retta reale, essendo in $\mathbb{R}$) e non esistono necessariamente relazioni d'ordine in altri insiemi. Non è possibile ad esempio stabilire se un punto punto sia "maggiore o minore" di un altro in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{C}$. ■

11.1 Condizioni Necessarie

Proposizione 11.8
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, allora

$$\left.\begin{array}{c} f \textbf{ derivabile in } x_0 \text{ lungo } v \\ x_0 \text{ punto } \textbf{di estremo} \text{ per } f \end{array}\right\} \implies D_v f(x_0) = 0$$

Dimostrazione. Se x_0 è di estremo per f, allora, scelto un opportuno $\delta > 0 \in \mathbb{R}$, x_0 è di estremo anche per la funzione

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : &]-\delta, \delta[& \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & f(x_0 + tv) \end{array}$$

La φ è una funzione reale di variabile reale e derivabile in 0 perché f è derivabile per ipotesi. Ciò significa che è possibile applicare alla φ il *Teorema di Fermat* di Analisi 1, avendo la garanzia che in un punto estremante di questa funzione sia $\varphi'(x_0) = 0$.
Applicando ora la definizione di derivata di Analisi 1 si ottiene:

$$\varphi'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$$

Se si calcola la derivata di φ nel punto 0 ($\varphi(0) = f(x_0)$, con x_0 estremante per ipotesi) si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(0) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} \end{aligned}$$

Ma, essendo $\varphi(h) = f(x_0 + hv)$ e $\varphi(0) = f(x_0)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \tag{11.8.1}$$

La Eq. (11.8.1) non è altro che la Definizione 7.1 (Derivata Direzionale) di f in x_0 lungo il vettore v, dunque si è giunti alla tesi. □

Teorema 11.9 (di Fermat)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, allora

$$\left.\begin{array}{c} f \textbf{ Differenziabile in } x_0 \\ x_0 \text{ punto } \textbf{di estremo} \text{ per } f \end{array}\right\} \implies \nabla f(x_0) = 0$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 8.13, si sa che, se f è differenziabile, allora

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus 0 \quad D_v f(x_0) = Df(x_0)v$$

Quindi $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ si può applicare la Proposizione 11.8. Visto poi che la f è a valori in $\mathbb{R}^1$, da Osservazione 8.8 (Matrici Derivata Totale Particolari) si sa che $Df(x_0) = \nabla f(x_0)$, dunque la tesi:

$$0 = D_v f(x_0) = Df(x_0) = \nabla f(x_0)$$

□

Definizione 11.10 (Punto Stazionario)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}$

$$x_0 \textbf{ Punto Stazionario} \text{ per } f \quad \rightleftharpoons \quad \left\{\begin{array}{c} f \textbf{ Differenziabile in } x_0 \\ e \\ \nabla f(x_0) = 0 \end{array}\right.$$

Nota. Nella definizione si usa ∇f in luogo di Df perché la f è a valori in $\mathbb{R}$, dunque come visto in Osservazione 8.8 (Matrici Derivata Totale Particolari) Df è $\in \text{Mat}(1 \times n)$, cioè $Df = \nabla f$ per definizione di gradiente.

Osservazione 11.11
Grazie al Corollario 8.14, se f **Differenziabile** in x_0, per verificare che $\nabla f(x_0) = 0$, basta verificare che le **Derivate Parziali** siano tutte pari a 0.

Esercizio 11.12
Esibire un esempio di funzione che ammetta un punto stazionario non di estremo, cioè la tesi del Teorema 11.9 (di Fermat), ma che non verifichi le ipotesi.

Soluzione. $f(x) = x^3$ ha un punto stazionario in $x = 0$, ma sicuramente non è minimo o massimo. ■

Esercizio 11.13
Esibire una funzione che ammetta un punto di estremo non stazionario

Soluzione. In $x = 3$ la funzione

$$\begin{array}{rccc} f & : &]0,3] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

è differenziabile, ma $\nabla f(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \neq 0$, dunque non è stazionario. ■

Nelle seguenti proposizioni verranno usate la Definizione 9.4 (Differenziale Seconda) e la notazione introdotta in Appendice nella sezione B (Forme Quadratiche). Si ricorda che $D^2 f(x_0) = H_f(x_0)$ da Definizione 9.5 (Matrice Hessiana).

Proposizione 11.14
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f \textbf{ Differenziabile 2 volte} \text{ in } x_0 \\ x_0 \text{ punto } \textbf{di massimo} \text{ per } f \end{array}\right\} \implies \begin{cases} \nabla f(x_0) = 0 \\ D^2 f(x_0) = H_f(x_0) \textbf{ Semidefinita Negativa} \end{cases}$$

Dimostrazione. Essendo x_0 punto di massimo per ipotesi, è certo che, per un $h \in \mathbb{R}^n$ in intorno di 0:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \tag{11.14.1}$$

Posto $x = x_0 + h$, si ha che $h = x - x_0$, dunque dalla Proposizione 9.20 (Sviluppo di Taylor al Secondo Ordine con resto di Peano) si ha:

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)h + \frac{1}{2} h^T D^2 f(x_0) h + o\left(\|h\|^2\right)$$
$$f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0) + o\left(\|(x - x_0)\|^2\right)$$

Essendo però $\nabla f(x_0) = 0$ per ipotesi

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0) + o\left(\|(x - x_0)\|^2\right)$$

Il termine di sinistra non è altro che il primo termine della Eq. (11.14.1), dunque

$$\frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0) + o\left(\|(x - x_0)\|^2\right) \leq 0$$

L'*o piccolo* può essere ignorato in quanto, per definizione, tende a zero più velocemente del resto della funzione

$$\frac{1}{2}(x-x_0)^T D^2 f(x_0)(x-x_0) \leq 0$$
$$(x-x_0)^T D^2 f(x_0)(x-x_0) \leq 0$$

Da cui, per la Definizione B.7, deriva che la $D^2 f(z_0)$ è Semidefinita Negativa. □

Proposizione 11.15
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f \textbf{ Differenziabile 2 volte} \text{ in } x_0 \\ x_0 \text{ punto } \textbf{di minimo} \text{ per } f \end{array}\right\} \implies \begin{cases} \nabla f(x_0) = 0 \\ D^2 f(x_0) = H_f(x_0) \textbf{ Semidefinita Positiva} \end{cases}$$

Dimostrazione. Applicare la Proposizione 11.14 a $-f$ □

Esercizio 11.16
Esibire una funzione soddisfacente alla tesi della Proposizione 11.14, ma non alle ipotesi.

11.2 Condizioni Sufficienti

Proposizione 11.17
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f \textbf{ Differenziabile 2 volte} \text{ in } x_0 \\ \nabla f(x_0) = 0 \\ D^2 f(x_0) = H_f(x_0) \textbf{ Definita Negativa} \end{array}\right\} \implies x_0 \textbf{ punto di Massimo Locale} \text{ per } f$$

Dimostrazione. Per un $h \in \mathbb{R}^n$ in intorno di 0 e posto $x = x_0 + h$, sfruttando la Proposizione 9.20 (Sviluppo di Taylor al Secondo Ordine con resto di Peano) si ha:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Df(x_0)h + \frac{1}{2}h^T D^2 f(x_0)h + o\left(\|h\|^2\right)$$
$$f(x_0+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}h^T D^2 f(x_0)h + o\left(\|h\|^2\right)$$

Essendo però $\nabla f(x_0) = 0$ per ipotesi

$$= \frac{1}{2}\underbrace{h^T D^2 f(x_0)h}_{(1)} + o\left(\|h\|^2\right)$$

La (1) è una forma quadratica del tipo $q(h)$ con $D^2 f(x_0)$ definita negativa per ipotesi. Dunque, applicando il Corollario B.11 è possibile minorare con

$$\leq -\frac{1}{2}m\|h\|^2 + o(\|h\|^2)$$
$$= \underbrace{\left(-\frac{1}{2}m + o(1)\right)}_{\leq 0}\underbrace{\|h\|^2}_{\geq 0}$$
$$\leq 0$$

□

Corollario 11.18
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f \textbf{ Differenziabile 2 volte} \text{ in } x_0 \\ \nabla f(x_0) = 0 \\ D^2 f(x_0) = H_f(x_0) \textbf{ Definita Positiva} \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0 \textbf{ punto di Minimo Locale} \text{ per } f$$

Dimostrazione. Analoga alla precedente applicando Proposizione B.10. □

Esercizio 11.19
Applicare, quando possibile, le proposizioni di questa sezione e della precdente alle seguenti funzioni, tutte definite su $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = x^2 + y^2 & f(x,y) = x^2 - y^2 \\ f(x,y) = -x^2 + y^2 & f(x,y) = -x^2 - y^2 \\ f(x,y) = x^4 + y^4 & f(x,y) = x^4 + y^3 \\ f(x,y) = -x^4 - y^4 & f(x,y) = x^2 - y^2 \\ f(x,y) = |x| + y^2 & f(x,y) = -x\,|x| - y^3 \end{array}$$

12 Massimi e Minimi Vincolati

Spesso la ricerca di punti di massimo o minimo di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deve essere ristretta ad un sottoinsieme $B \subset A$ a causa di eventuali vincoli che le variabili indipendenti devono soddisfare. L'insieme B può essere generalmente descritto da una funzione **Vincolo** $\varphi : A \to \mathbb{R}^p$, nel senso che $B = \{x \in A : \varphi(x) \leq 0\}$
Questo problema è usualmente abbreviato in:

$$\max_{\varphi \leq 0} f \qquad \text{oppure} \qquad \min_{\varphi \leq 0} f$$

e può essere diviso in due passi:

1. ricerca dei punti di estremo di f interni a B (problema già affrontato con gli estremi liberi)
2. ricerca dei punti di estremo di f sul bordo di B (si andrà a studiare ora)

Sotto opportune condizioni per φ, infatti:

$$\mathring{B} = \{x \in A : \varphi(x) < 0\} \qquad \text{e} \qquad \partial B \, \{x \in A : \varphi(x) = 0\}$$

Dunque si possono individuare gli estremi in due insiemi diversi in due passaggi separati con modalità diverse.

Nota. Quanto detto è in accordo con la Definizione 11.1 (Massimi e Minimi), che infatti non esclude il caso di punti di estremo vincolati alla frontiera di un insieme.

Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto** e siano

- $f : A \to \mathbb{R}$
- $\varphi : A \to \mathbb{R}^p$ con $p < n$ e $\varphi^{-1}(0) \subset A$

Nota. φ, vincolo, è funzione di p funzioni φ_i per $i = 1, \ldots, p$.

due funzioni $\in \mathbf{C^1}$. Se:

- x_0 è un punto di **estremo relativo** per f **vincolata** a $\varphi = 0$
- $\operatorname{rank}\big(D\varphi(x_0)\big) = p$, cioè $D\varphi(x_0)$ ha **rango** p

Nota. Essendo φ funzione di funzioni, $D\varphi(x_0)$ è una matrice costituita:

$$D\varphi(x_0) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\varphi_1 & \partial_{x_2}\varphi_1 & \cdots & \partial_{x_n}\varphi_1 \\ \partial_{x_1}\varphi_2 & \partial_{x_2}\varphi_2 & \cdots & \partial_{x_n}\varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1}\varphi_p & \partial_{x_2}\varphi_p & \cdots & \partial_{x_n}\varphi_p \end{bmatrix}$$

In cui ogni riga è il gradiente della i-*esima* funzione, $\nabla\varphi_i$.
Richiedere $\operatorname{rank}\big(D\varphi(x_0)\big) = p$ significa imporre che i p vincoli siano tutti linearmente indipendenti, cioè che siano tutti "indicativi" (è inutile avere 2 vincoli uguali).
Inoltre la condizione garantisce che, per ogni vincolo, almeno una delle derivate parziali sia non nulla. Se infatti tutte le derivate parziali di una φ_i fossero nulle, il rango della matrice non sarebbe più p.

Allora esistono p numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla \varphi_i(x_0) \tag{12.1.1}$$

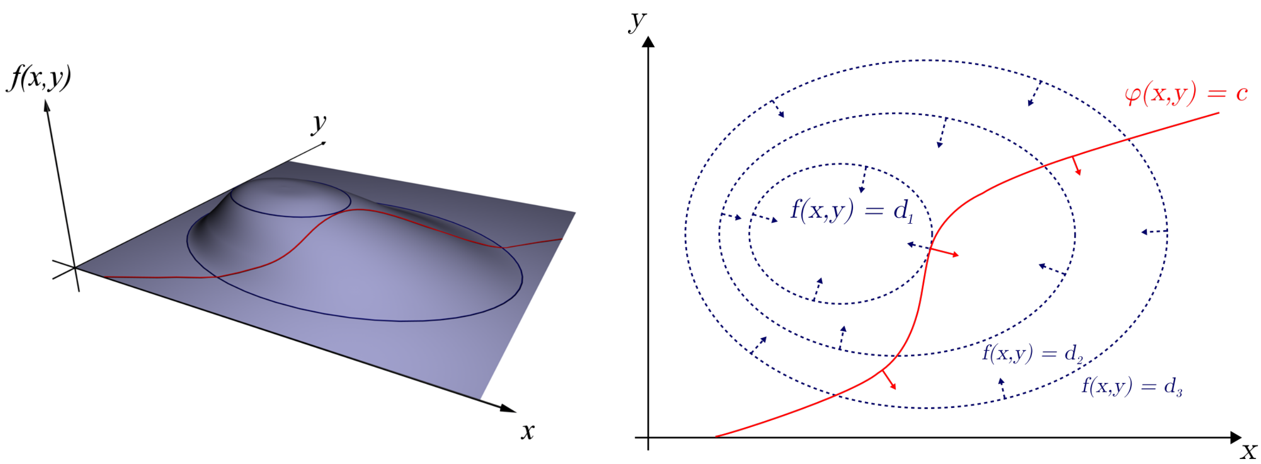
Gli scalari λ_i sono comunemenete chiamati **Moltiplicatori di Lagrange** e i $\nabla \varphi_i(x_0)$ sono i gradienti delle p funzioni vincolo che compongono φ.
Cioè la combinazione lineare di tutti i $\nabla \varphi_i$ corrisponde a ∇f.

> ***Nota.*** La combinazione lineare, per definzione, è somma delle componenti ognuna con un appropriato coefficiente λ_i

Dimostrazione. Omessa. Verrà svolta in seguito per il caso $n = 2, m = 1$ in Teorema 13.8 (dei Moltiplicatori di Lagrange - $n = 2$, $m = 1$). □

Osservazione 12.2
Il Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange) può essere visto come una generalizzazione del Teorema 11.9 (di Fermat) nella ricerca degli estremi di funzioni vincolate.

Osservazione 12.3 (Spiegazione Concetto)



Data una certa $f : A \mapsto \mathbb{R}$, le sue Definizione 13.2 (Curva di Livello) sono i luoghi dei punti soddisfacenti l'equazione $f(x) = d$, con $x \in A$ e $d \in \mathbb{R}$ generico. Si sta ora cercando di massimizzare la f *rispettando il vincolo* $\varphi(x)$, o, detto in modo diverso, di massimizzarla *lungo il vincolo* $\varphi(x)$.
Le Curve di Livello di φ saranno a loro volta luoghi dei punti tali per cui $\varphi(\xi) = c$, con $\xi \in A$ e $c \in \mathbb{R}$ generico.

Le Curve di Livello di f e φ sono, in generale, distinte, dunque le C.D.L. di f possono benissimo intersecare una qualsiasi $\varphi(\xi) = c$. Per definizione di C.D.L., muovendosi lungo una C.D.L. di φ, il valore assunto dalla φ rimarrà costante, mentre il valore di f può variare, come appena detto. Nel caso però in cui $\varphi(\xi) = c$ è **tangente** ad una C.D.L. di f, allora spostandosi lungo la C.D.L. di φ, rimarrà costante anche la f.
Come visto in Definizione 11.10 (Punto Stazionario), f è costante quando $\nabla f(x_0) = 0$ e, come si vedrà in Proposizione 13.6 (Il Gradiente è Perpendicolare alle Curve di Livello) la C.D.L è $\perp \nabla f$. Quanto detto fino ad ora però permette di aggiungere che la f sia costante anche quando $\nabla f \parallel \nabla \varphi$, cioè quando ∇f è **Combinazione Lineare** delle $\nabla \varphi_i$.

Osservazione 12.4
Si noti che anche nel caso $n = 2$, $p = 1$ nella Eq. (12.1.1) non sarebbe coretto spostare λ all'altro termine:

$$\lambda \nabla f(x_0, y_0) = \nabla \varphi(x_0, y_0) \qquad \textbf{(Errato!)}$$

Per quanto questa possa sembrare una semplice divisione per uno scalare, in realtà sarebbe una possibile svista. Il valore di $\nabla f(x_0, y_0)$ infatti non è noto a prescindere e, se fosse nullo, questa scrittura sarebbe in contrasto con l'ipotesi $\nabla \varphi(x_0, y_0) \neq 0$

Esempio 12.5
Nel caso in cui $A \subseteq \mathbb{R}^2$, cioè il caso più comune, si hanno

- $f : A \to \mathbb{R}$
- $\varphi : A \to \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^1$

Perché $p < 2$, dunque sicuramente $p = 1$.

Definizione 12.6 (Funzione Lagrangiana)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**, $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$ con $p < n$, allora si definisce la

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda\varphi(x)$$

cioè, "espandendo" le variabili per chiarezza

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$$

$\mathcal{L}$ è una funzione ausiliaria, nota come **Funzione Lagrangiana**, che lega la f ed il vincolo φ.
I punti stazionari **Vincolati** della f sono i punti stazionari **Liberi** della Lagrangiana.

Osservazione 12.7
Mediante il Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange), la ricerca di punti di estremo per f vincolati a $\varphi = 0$ viene dunque ricondotta alla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla\varphi_i(x_0) \\ \varphi(x_0) = 0 \end{cases} \tag{12.7.1}$$

Esercizio 12.8
Verificare che, con la notazione del Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange), il sistema Eq. (12.7.1) è un sistema di $n + p$ equazioni in $n + p$ incognite.

Soluzione. Da Definizione 12.6 (Funzione Lagrangiana), calcolando $\nabla\mathcal{L}(x, \lambda) = 0$ si ottiene

$$\nabla_{x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p} \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = 0 \iff \begin{cases} \nabla f(x) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla\varphi_i(x) = 0 \\ \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_p(x) = 0 \end{cases}$$

Con la seconda condizione dovuta all'ipotesi del Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange) per cui il vincolo è $\varphi = 0$.
Essendo la Eq. (12.7.1) un'equazione in $n + p$ variabili, anche il sistema in oggetto non può che essere a $n + p$ equazioni in $n + p$ incognite. ■

Esempio 12.9
In $A \subseteq \mathbb{R}^2$, dato un problema del tipo $\max\limits_{\varphi(x,y)=0} f$, cioè la ricerca del massimo di f sul vincolo $\varphi(x, y) = 0$, come detto in Osservazione 12.7, ci si può ricondurre ad un sistema del tipo

$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla \varphi(x_0, y_0) \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \partial_x f(x_0, y_0) = \lambda \partial_x \varphi(x_0, y_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0) = \lambda \partial_y \varphi(x_0, y_0) \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

a 3 equazioni in 3 incognite: (x, y, λ).

Soluzione.

Nota. Questa soluzione è molto simile alla dimostrazione del Teorema 13.8 (dei Moltiplicatori di Lagrange - $n = 2$, $m = 1$).

Per ipotesi del Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange), $\operatorname{rank}\big(D\varphi(x_0, y_0)\big) = p = 1$, dunque come da nota alle ipotesi del Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange):

$$\begin{bmatrix} \partial_x \varphi(x_0, y_0) & \partial_y \varphi(x_0, y_0) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ciò vuol dire che, sicuramente, $\partial_x \varphi(x_0, y_0) \neq 0$ oppure $\partial_y \varphi(x_0, y_0) \neq 0$.

Supponendo $\partial_y \varphi(x_0, y_0) \neq 0$ e sapendo che per ipotesi $\varphi(x, y) = 0$, si applica il Teorema 10.10 (della Funzione Implicita)

Nota. Verifica ipotesi:

1. $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aperto per ipotesi Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange)
2. $f \in \mathbf{C^1}$ per ipotesi Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange), quindi sicuramente continua
3. $(x_0, y_0) \in A$ e $\varphi(x_0, y_0) = 0$ per ipotesi Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange)
4. $f \in \mathbf{C^1}$ per ipotesi Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange), quindi $D_y f$ esiste continua in (x_0, y_0)
5. $D_y f(x_0, y_0)$ ammette inversa perché è stato ipotizzato $\partial_y \varphi(x_0, y_0) \neq 0$ poco sopra

Grazie al Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) si ha che esistono degli intorni $\mathcal{X}$ di x_0 e $\mathcal{Y}$ di y_0 e, per $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, esiste la

$$g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \quad \text{tale che} \quad \varphi(x, y) = 0 \iff y = g(x)$$

Avendo la certezza dell'esistenza della g, è possibile concludere che:

$$(x_0, y_0) \text{ di Estremo per } f(x, y) \text{ ristretta a } \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \quad \iff \quad x_0 \text{ di Estremo per } f\big(x, g(x)\big)$$

Dunque, per il Teorema 11.9 (di Fermat), è garantito che $\nabla f\big(x_0, g(x_0)\big) = 0$. Calcolando ora $\nabla f\big(x_0, g(x_0)\big)$ grazie alla Proposizione 8.37 (Differenziale della Funzione Composta)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x f\big(x_0, g(x_0)\big) + \partial_y f\big(x_0, g(x_0)\big) \cdot g'(x_0) \\ &= \partial_x f\big(x_0, g(x_0)\big) + \partial_y f\big(x_0, g(x_0)\big) \cdot \left(-\frac{\partial_x g(x_0, g(x_0))}{\partial_y g(x_0, g(x_0))}\right) \\ &= \partial_x f\big(x_0, g(x_0)\big) \cdot \partial_y g(x_0, g(x_0)) - \partial_y f\big(x_0, g(x_0)\big) \cdot \partial_x g(x_0, g(x_0)) \end{aligned}$$

Che può essere rappresentato in forma compatta come il det di una matrice Mat(2×2)

$$= \det \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \\ \partial_x g(x_0, y_0) & \partial_y g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Prendendo il primo e l'ultimo elemento del treno di uguaglianze si ha che det $= 0$, dunque, dalle nozioni di Algebra, si sa che questo implica il parallelismo tra i vettori della matrice. Essendo la g e la φ legate implicitamente, è possibile concludere che:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla \varphi(x_0, y_0)$$

■

13 Il Caso $n = 2$, $m = 1$

Quanto esposto in questa sezione può essere esteso al caso $n > 2$ a patto di notevoli cambiamenti nella terminologia geometrica.

Definizione 13.1 (Grafico)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$. La superficie di equazione

$$z = f(x, y)$$

è il **Grafico** di f

Definizione 13.2 (Curva di Livello)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. L'insieme

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in A : \; f(x, y) = c\}$$

è la **Curva di Livello** $\boldsymbol{c}$ di f

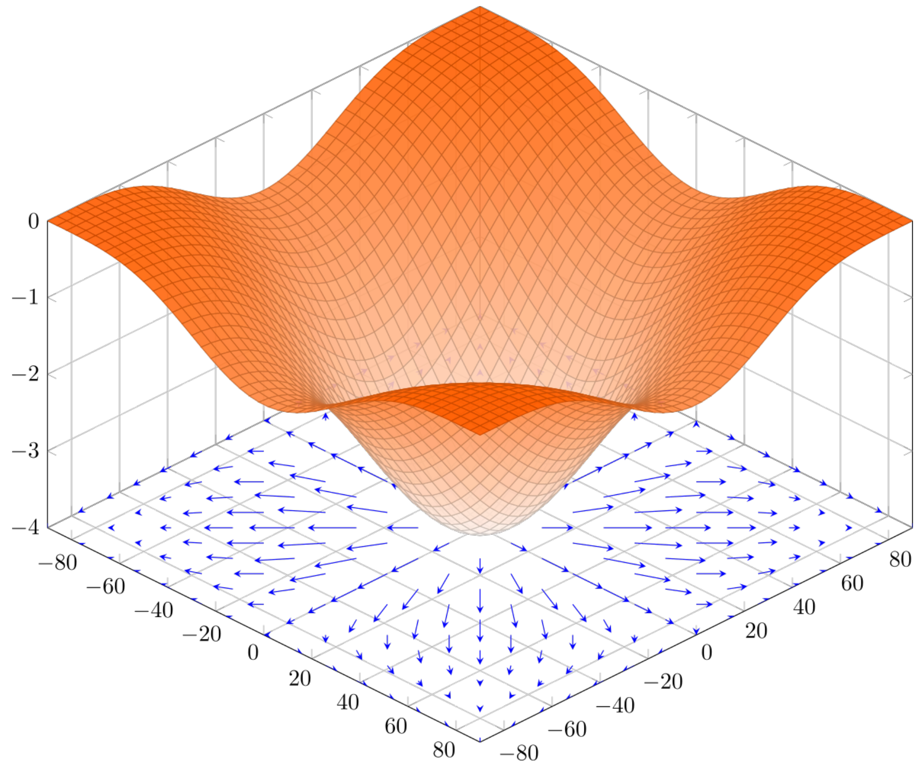
Definizione 13.3 (Piano Tangente)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, f **Differenziabile** in $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$. Allora

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= f(x_0, y_0) + \begin{bmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)\,(y - y_0) \end{aligned}$$

è il **Piano Tangente** alla superficie $x = f(x, y)$ in (x_0, y_0)

Nota. Non c'è ovviamente alcuna differenza tra le tre equazioni sopra.

Osservazione 13.4
Il **Grafico** di f è un **sottoinsieme** di $\mathbb{R}^3$.
Il **Gradiente** e le **Curve di Livello** "vivono" nell'insieme partenza $A \subseteq \mathbb{R}^2$, come si può vedere dal seguente grafico: il gradiente non esce dall'insieme di definizione.



Spesso è comodo identificare A con l'insieme

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in A \text{ e } z = 0\right\}$$

ed in questo caso il gradiente può essere convenzionalmente esteso con una terza coordinata costante 0.

13.1 Il Significato Geometrico del Gradiente

In questo paragrafo si vedrà la relazione "geometrica" tra il gradiente e la funzione stessa. Il **Gradiente** di una funzione in un punto indica infatti la direzione in cui si ha la **massima variazione** del valore di f con **verso** dell'**incremento positivo** di f.

Proposizione 13.5 (Significato del Gradiente)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$, $f : A \to \mathbb{R}$ con f **Differenziabile** in (x_0, y_0).
L'incremento $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ è

- **massimo** quando $\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$ con $\lambda > 0$
- **massimo** quando $\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$ con $\lambda < 0$

Cioè $\nabla f(x_0)$ è un vettore diretto verso la direzione di **massima pendenza**, "verso l'alto."

Dimostrazione. Utilizzando la Definizione 8.7 (Differenziale), declinata nel caso $n = 2$ si ottine

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \qquad \text{per } (h, k) \to (0, 0) \qquad (13.5.1)$$

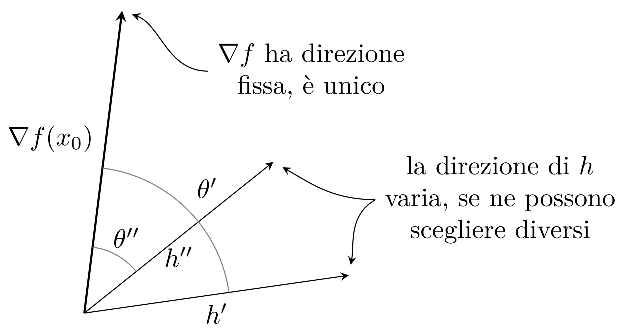
Il $\cdot$ della precedente formula è un prodotto righe per colonne, però, essendo alla ricerca di un massimo, conviene considerarlo come un prodotto scalare tra due vettori. Il risultato del prodotto scalare è infatti un valore in $\mathbb{R}$, campo ordinabile. Dunque, posto θ angolo tra i due vettori:

$$\|\nabla f(x_0, y_0)\| \left\| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right\| \cos(\theta)$$

Il θ che massimizza questo prodotto è sicuramente 0, in quanto $\cos(0) = 1$.
∇f dipende direttamente dalla f, dunque la sua direzione è data ed inalterabile. D'altro canto $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ è un vettore a scelta, dunque la sua direzione è variabile. È possibile allora ottenere una variazione di θ modificando la direzione di quest'ultimo vettore, finché esso non sarà parallelo al gradiente, portando θ a 0.

Si è così dimostrato che l'incremento $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ da Eq. (13.5.1) è massimo quando h ha la direzione del gradiente; dunque il gradiente deve avere direzione e verso del massimo incremento.

Nel caso in cui si abbia verso opposto $\theta = -180° \implies \cos(\theta) = -1$. Quindi con $\lambda < 0$ si ha minimo incremento.



□

Proposizione 13.6 (Il Gradiente è Perpendicolare alle Curve di Livello)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, se:

- f **Differenziabile** in (x_0, y_0)
- (x_0, y_0) **non Stazionario**

Allora

$$\nabla f(x_0, y_0) \text{ è } \textbf{Perpendicolare} \text{ alla } \textbf{Curva di Livello } \{(x, y) \in A : \ f(x, y) = c\}$$

Dimostrazione. Essendo, per ipotesi, (x_0, y_0) non Stazionario, da Definizione 11.10 (Punto Stazionario) si sa per certo che $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, cioè

$$\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$$
$$\iff$$
$$\begin{bmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{bmatrix} \neq 0$$
$$\iff$$
$$\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{oppure} \quad \partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$$

Si supponga dunque $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ ed applicando il Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) si ha che esistono degli intorni $\mathcal{X}$ di x_0 e $\mathcal{Y}$ di y_0 e, per $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, esiste la

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \quad \text{tale che} \quad f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

Nota. Verifica ipotesi:

1. $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e, per ipotesi, $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$. Essendo un punto della parte interna la condizione è verificata perché nel Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) l'apertura di X e Y è richiesta solo per scegliere un punto, appunto, sicuramente nella parte interna degli insiemi
2. $f \in \mathbf{C^1}$ per ipotesi, quindi sicuramente continua
3. $(x_0, y_0) \in A$ per ipotesi e la funzione da invertire vale 0 perché, anche se fosse $f(x_0, y_0) = c \neq 0$, è sempre possibile utilizzare una funzione $g(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - c = 0$ che verifica questa ipotesi e per cui valgono ancora tutte le altre osservazioni fatte qui
4. f differenziabile in (x_0, y_0) per ipotesi, dunque sicuramente esiste $\partial_y f$
5. $D_y f(x_0, y_0)$ ammette inversa perché è stato ipotizzato $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ poco sopra

La $y = \varphi(x)$ quindi esprime implicitamente il vincolo della curva di livello $f(x, y) = c$. È dunque possibile scrivere, separando le coordinate e passando alla matrice associata:

$$f(x, y) = c \quad \Longleftrightarrow \quad y = \varphi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ \varphi(x) \end{bmatrix}$$

Visto che il differenziale di una funzione in un puno rappresenta il versore tangente alla funzione in quel punto, si passa alle derivate $\begin{bmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \end{bmatrix}$, visto che valgono anche le ipotesi del Teorema 10.13. Eseguendo ora il prodotto tra $\nabla f(x_0, y_0)$ e la derivate nel punto (x_0, y_0), si ottiene

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi'(x_0) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)} \end{bmatrix} = \\
&= \partial_x f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dunque, considerando questo come un prodotto scalare, se il risultato è 0 allora l'angolo tra i due vettori non può che essere 90°, da cui la tesi. □

Definizione 13.7 (Piano Tangente ad una Curva)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $f \in \mathbf{C^1}(A; \mathbb{R})$, allora l'**Equazione del Piano Tangente** alla curva nel punto (x_0, y_0) è:

$$\begin{aligned}
z &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\
&= f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)
\end{aligned}$$

Passando alla matrice associata si ottiene la forma del vettore **Perpendicolare** alla curva in (x_0, y_0), cioè:

$$\begin{bmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0) \\ -1 \end{bmatrix}$$

13.2 I Moltiplicatori di Lagrange

Il seguente teorema è una versione più specifica del Teorema 12.1 (dei Moltiplicatori di Lagrange), dunque molte note sono omesse in questo enunciato.

Teorema 13.8 (dei Moltiplicatori di Lagrange - $n = 2$, $m = 1$)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un **Aperto** e siano

- $f : A \to \mathbb{R}$
- $\varphi : A \to \mathbb{R}$ con $\varphi^{-1}(0) \subset A$

due funzioni $\in \mathbf{C^1}$. Se:

- (x_0, y_0) è un punto di **estremo relativo** per f **vincolata** a $\varphi = 0$
- $\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0$

Allora esiste un λ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla\varphi(x_0, y_0) \tag{13.8.1}$$

Lo scalare λ è chiamato **Moltiplicatore di Lagrange**.

Dimostrazione.

Nota. Questa dimostrazione è molto simile alla soluzione dell'Esempio 12.9.

Essendo per ipotesi $\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0$, allora

$$\begin{gathered}\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0 \\ \Longleftrightarrow \\ \big[\partial_x\varphi(x_0, y_0) \quad \partial_y\varphi(x_0, y_0)\big] \neq 0 \\ \Longleftrightarrow \\ \partial_x\varphi(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{oppure} \quad \partial_y\varphi(x_0, y_0) \neq 0\end{gathered}$$

Si supponga dunque $\partial_y\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ ed applicando il Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) si ha che esistono degli intorni $\mathcal{X}$ di x_0 e $\mathcal{Y}$ di y_0 e, per $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, esiste la

$$g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \quad \text{tale che} \quad \varphi(x, y) = 0 \iff y = g(x)$$

Nota. Verifica ipotesi:

1. $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aperto per ipotesi
2. $f \in \mathbf{C^1}$ per ipotesi, quindi sicuramente continua
3. $(x_0, y_0) \in A$ per ipotesi e la funzione da invertire vale 0 perché, anche se fosse $f(x_0, y_0) = c \neq 0$, è sempre possibile utilizzare una funzione $g(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - c = 0$ che verifica questa ipotesi e per cui valgono ancora tutte le altre osservazioni fatte qui
4. f differenziabile in (x_0, y_0) per ipotesi, dunque sicuramente esiste $\partial_y f$
5. $D_y f(x_0, y_0)$ ammette inversa perché è stato ipotizzato $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ poco sopra

Definendo la $F(x) = f\big(x, g(x)\big)$, i punti di estremo della f vincolata a φ saranno di estremo anche per F a patto di rimanere in un intorno di (x_0, y_0) in cui vale il Teorema 10.10 (della Funzione Implicita). F è differenziabile ovunque definita, visto che $f \in \mathbf{C^1}$ per ipotesi, quindi per il Teorema 11.9 (di Fermat), se (x_0, y_0) è di estremo, allora $F'(x_0, y_0) = 0$.

Nota. Essendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si può usare la notazione F' della derivata di Analisi 1.

Calcolando ora $F'(x_0)$ grazie alla Proposizione 8.37 (Differenziale della Funzione Composta)

$$\begin{aligned}
0 &= F'(x_0) \\
&= \partial_x f\big(x_0, g(x_0)\big) + \partial_y f\big(x_0, g(x_0)\big) \cdot g'(x_0) \\
&= \partial_x f\big(x_0, g(x_0)\big) + \partial_y f\big(x_0, g(x_0)\big) \cdot \left(-\frac{\partial_x g(x_0, g(x_0))}{\partial_y g(x_0, g(x_0))}\right) \\
&= \partial_x f\big(x_0, g(x_0)\big) \cdot \partial_y g(x_0, g(x_0)) - \partial_y f\big(x_0, g(x_0)\big) \cdot \partial_x g(x_0, g(x_0))
\end{aligned}$$

Che può essere rappresentato in forma compatta come il det di una matrice $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$

$$= \det \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \\ \partial_x g(x_0, y_0) & \partial_y g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Prendendo il primo e l'ultimo elemento del treno di uguaglianze si ha che $\det = 0$, dunque, dalle nozioni di Algebra, si sa che questo implica il parallelismo tra i vettori della matrice. Essendo la g e la φ legate implicitamente, è possibile concludere che:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla \varphi(x_0, y_0)$$

□

Esercizio 13.9
Dimostrare la Teorema 13.8 (dei Moltiplicatori di Lagrange - $n = 2$, $m = 1$) nel caso in cui $\partial_x \varphi(x_0, y_0) \neq 0$ e $\partial_y \varphi(x_0, y_0) = 0$

Soluzione. È sufficiente applicare il Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) alla ∂_x, gli altri passaggi non variano. ■

Esercizio 13.10
Dare un'interpretazione geometrica della Teorema 13.8 (dei Moltiplicatori di Lagrange - $n = 2$, $m = 1$) in luce della Proposizione 13.6 (Il Gradiente è Perpendicolare alle Curve di Livello).

Soluzione. Fornita in Osservazione 12.3 (Spiegazione Concetto). ■

Esercizio 13.11
Nel piano, determinare il punto della retta passante per $(-1, 2)$ $(1, 4)$ più vicino alla circonferenza centrata in $(0, 0)$ di raggio 2. Utilizzare la sottosezione A.1 (Geometria nel Piano).

Esercizio 13.12
Nel piano, determinare il punto della circonferenza centrata in $(0, 0)$ di raggio 3 più lontano dalla retta passante per $(1, 2)$ $(1, -1)$. Utilizzare la sottosezione A.1 (Geometria nel Piano).

14 Derivate e Integrali

Teorema 14.1 (Fondamentale del Calcolo Integrale)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un **Intervallo** e sia $x_0 \in I$. Data $f \in \mathbf{C^0}(I; R)$ la funzione:

$$\begin{array}{rcll} F & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Si ha $F \in \mathbf{C^1}(I;\mathbb{R})$ e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Dimostrazione. Omessa. Vedasi corso di Analisi 1. □

Proposizione 14.2
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto** e $f \in \mathbf{C^0}(A \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, allora la funzione

$$\begin{array}{rcll} F & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times A & \to & \mathbb{R} \\ & & \alpha, \beta, x & \mapsto & \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C^0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times A; \mathbb{R})$

Dimostrazione. La continuità di F rispetto ad α e β segue dal Teorema 14.1 (Fondamentale del Calcolo Integrale).
Per verificare la continuità di F in $x_0 \in A$, si scelga un $r > 0$ tale per cui $\overline{B(x_0, r)} \subset A$. La f sarà continua in $\overline{B(x_0, r)} \times [\alpha, \beta]$, in quanto, per ipotesi:

$$f \in \mathbf{C^0}(\underbrace{A}_{\overline{B(x_0,r)}\subset A} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}}; \mathbb{R})$$

Inoltre, da Proposizione 2.35 si ottiene che $\overline{B(x_0, r)} \times [\alpha, \beta]$ è compatto. Per questo è possibile applicare il Teorema 3.28 (di Cantor) ed avere certezza che la f è Definizione 3.19 (Funzione Uniformemente Continua) in quell'intervallo. Dalla definizione e passando alla metrica Euclidea in $\mathbb{R}^2$ si può desumere che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x, x_0 \in \left\{\overline{B(x_0, r)} \times [\alpha, \beta]\right\} \text{ con } |x - x_0| < \delta \quad \text{vale } |f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon$$

Dunque, sicuramente, passando al sup resta valido che

$$\sup_{\overline{B(x_0,r)}\times[\alpha,\beta]} \underbrace{|f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon}_{(1)} \tag{14.2.1}$$

A questo punto, utilizzando la definizione di F ci si riconduce ad una forma simile alla (1):

$$|F(\alpha, \beta, x) - F(\alpha, \beta, x_0)| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t) - f(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Grazie all'osservazione di Esercizio 22.8 è possibile minorare

$$\leq \left|\int_{\alpha}^{\beta} |f(x,t) - f(x_0,t)|\,\mathrm{d}t\right|$$

Applicando la Eq. (14.2.1)

$$< \left|\int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon\,\mathrm{d}t\right|$$

Per integrale di funzione costante, infine

$$= (\beta - \alpha)\varepsilon$$

Quindi, riprendendo il primo e l'ultimo termine:

$$|F(\alpha, \beta, x) - F(\alpha, \beta, x_0)| < (\beta - \alpha)\varepsilon$$

che dà la tesi, in quanto si ha la distanza tra le F minorata strettamente da un qualsiasi $\varepsilon > 0$, per cui la distanza deve necessariamente essere nulla. □

Proposizione 14.3
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto** e $f \in \mathbf{C^1}(A \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, allora la funzione

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ & & \alpha, \beta, x & \mapsto & \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C^1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A; \mathbb{R})$ ed inoltre, per ogni $(\alpha, \beta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A$ e per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F(\alpha, \beta, x) &= -f(x, \alpha) \\ \partial_\beta F(\alpha, \beta, x) &= f(x, \beta) \\ \partial_{x_i} F(\alpha, \beta, x) &= \int_\alpha^\beta \partial_{x_i} f(x,t)\,\mathrm{d}t \\ \nabla F(\alpha, \beta, x) &= \int_\alpha^\beta \nabla f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Dimostrazione. Le prime due uguaglianza seguono direttamente dal Teorema 14.1 (Fondamentale del Calcolo Integrale).
Per dimostrare la terza si segue un procedimento analogo a quello di Proposizione 14.2: si scelga un $r > 0$ tale per cui $\overline{B(x_0, r)} \subset A$. Essendo $f \in \mathbf{C^1}$, allora sicuramente $\partial_{x_i} f \in \mathbf{C^0}$, dunque come dall'altra dimostrazione, $\partial_{x_i} f$ sarà Uniformemente Continua in $\overline{B(x_0, r)} \times [\alpha, \beta]$. Grazie a questo si sa che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x, x_0 \in \left\{\overline{B(x_0, r)} \times [\alpha, \beta]\right\} \text{ con } |x - x_0| < \delta$$

vale

$$|\partial_{x_i} f(x,t) - \partial_{x_i} f(x_0, t)| < \varepsilon$$

Dunque, sicuramente, passando al sup resta valido che

$$\sup_{\overline{B(x_0,r)} \times [\alpha,\beta]} \underbrace{|\partial_{x_i} f(x,t) - \partial_{x_i} f(x_0,t)| < \varepsilon}_{(1)} \tag{14.3.1}$$

A questo punto, utilizzando si riconduce la terza uguaglianza ad una forma simile alla (1) spostando il termine di destra al primo membro e calcolanone il valore assoluto:

$$\left|\partial_{x_i} F(\alpha, \beta, x) - \int_\alpha^\beta \partial_{x_i} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| =$$

Applicando la Definizione 7.2 (Derivata Parziale) ad una qualsiasi x_i, dunque con $v = he_i$ per uno qualsiasi dei vettori della base canonica

$$= \left|\frac{F(\alpha, \beta, x + he_i) - F(\alpha, \beta, x)}{h} - \int_\alpha^\beta \partial_{x_i} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Applicando ora la definizione di F e portando il denominatore dentro il segno d'integrale

$$= \left| \int_\alpha^\beta \frac{f(x+he_i,t)-f(x,t)}{h} \,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \partial_{x_i} f(x,t) \,\mathrm{d}t \right|$$

$$= \left| \int_\alpha^\beta \left(\underbrace{\frac{f(x+he_i,t)-f(x,t)}{h}}_{(1)} - \partial_{x_i} f(x,t) \right) \mathrm{d}t \right|$$

Considerando ora la (1) come una funzione in x, le si può applicare il Teorema 8.1 (di Lagrange) e per un certo $\theta \in]0,1[$ si ha che

$$= \left| \int_\alpha^\beta \Big(\partial_{x_i} f(x+\theta h e_i,t) - \partial_{x_i} f(x,t) \Big) \,\mathrm{d}t \right|$$

Grazie all'osservazione di Esercizio 22.8 è possibile minorare

$$\leq \left| \int_\alpha^\beta \Big| \partial_{x_i} f(x+\theta h e_i,t) - \partial_{x_i} f(x,t) \Big| \,\mathrm{d}t \right|$$

Applicando la Eq. (14.3.1) e ricordando che $h = x - x_0$, si sa che se $|h| < \delta$, sicuramente anche $|\theta h| < \delta$ in quanto $\theta \in]0,1[$, dunque

$$< \left| \int_\alpha^\beta \varepsilon \,\mathrm{d}t \right|$$

Per integrale di funzione costante, infine

$$= (\beta - \alpha)\varepsilon$$

Quindi, riprendendo il primo e l'ultimo termine:

$$\left| \partial_{x_i} F(\alpha,\beta,x) - \int_\alpha^\beta \partial_{x_i} f(x,t) \,\mathrm{d}t \right| < (\beta-\alpha)\varepsilon$$

da cui la tesi, in quanto si ha la distanza tra le due funzioni minorata strettamente da un qualsiasi $\varepsilon > 0$, per cui la distanza deve necessariamente essere nulla.
La quarta uguaglianza è diretta conseguenza della terza appena dimostrata.

La continuità delle derivate parziali segue dalla Proposizione 14.2, dunque grazie al Teorema 8.21 (del Differenziale Totale) $F \in \mathbf{C^1}$. □

Corollario 14.4
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**. Date le funzioni

- $\alpha : A \to \mathbb{R}$
- $\beta : A \to \mathbb{R}$
- $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

tutte di classe $\mathbf{C^1}$, allora la funzione

$$\begin{array}{rcl} F : A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C^1}$ ed inoltre, per ogni $x_0 \in A$ si ha

$$\nabla F(x_0) = f\big(x_0,\beta(x_0)\big)\nabla\beta(x_0) - f\big(x_0,\alpha(x_0)\big)\nabla\alpha(x_0) + \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} \nabla f(x_0,t)\,\mathrm{d}t$$

Dimostrazione. Immediata applicando la Proposizione 14.3 e la Proposizione 8.37 (Differenziale della Funzione Composta). □

15 Funzioni a Valori in $\mathbb{C}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto. Ogni funzione $A \to \mathbb{C}$ può essere identificata in modo naturale con una funzione $A \to \mathbb{R}^2$ e viceversa.

> ***Nota.*** Quindi è possibile rappresentare una funzione $A \to \mathbb{C}$ in un piano, detto **piano complesso** o **piano di Gauss**

Esercizio 15.1
Utilizzando questa identificazione, estendere al caso di funzioni $A \to \mathbb{C}$ le definizioni di **continuità, derivabilità, differenziabilità** e degli spazi $\mathbf{C^k}$ date per funzioni $A \to \mathbb{R}$

Proposizione 15.2
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $t_0 \in \mathring{A}$. Allora

- Se due funzioni $f, g : A \to \mathbb{C}$ sono **differenziabili** in t_0, anche le funzioni $f + g$ e $f \cdot g$ sono differenziabili in t_0. Inoltre

$$(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0) \qquad \text{e} \qquad (f \cdot g)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0)$$

- Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, anche λf è **differenziabile** e

$$(\lambda f)'(t_0) = \lambda f'(t_0)$$

- Se $g(t_0) \neq 0$, anche $1/g$ e f/g sono **differenziabili** in t_0 e

$$(1/g)'(t_0) = -\frac{g'(t_0)}{g^2(t_0)} \qquad \text{e} \qquad (f/g)'(t_0) = \frac{f'(t_0)g(t_0) - f(t_0)g'(t_0)}{g^2(t_0)}$$

Dimostrazione. Omessa □

Esercizio 15.3
Dimostrare la Proposizione 15.2

Definizione 15.4 (Funzione Esponenziale con Esponente Complesso)
La **Funzione Esponenziale con Esponente Complesso** è così definita:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Proposizione 15.5
Qualunque sia $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

Dimostrazione. Omessa □

Esercizio 15.6
Dimostrare la Proposizione 15.5, direttamente o attraverso l'Esercizio 20.25

Esercizio 15.7
In questa sezione sulle funzioni a valori complessi non son stati considerati i problemi di massimo/minimo, perché?

Soluzione. Perché $\mathbb{C}$ non è ordinato, dunque non è possibile trovare massimi o minimi. ■

Capitolo 3

Integrali Doppi

Il presente capitolo non è trattato in maniera approfondita poiché:

- Sarebbero necessari molti lunghi teoremi per poter introdurre rigorosamente la teoria di Riemann, inoltre sarebbero fuori contesto nel corso.
- La teoria di Riemann è "superata" da tempo.
  Il primo è più grosso problema di tale teoria è che non permette il passaggio del limite sotto il segno di integrale, cioè per poter scrivere

  $$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)$$

  sono necessarie molte ipotesi restrittive.

Per queste ragioni nell'Analisi è passati alla teoria dell'integrale secondo Lebesgue, molto diversa e piuttosto complicata.

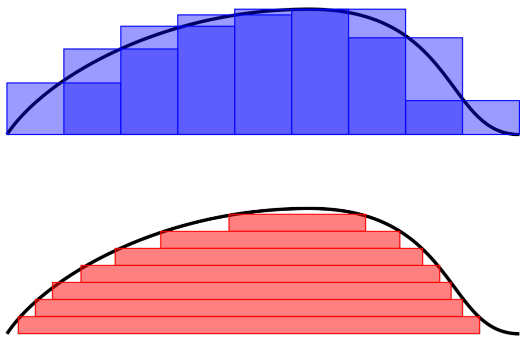


Figura 15.1: Sopra, integrale di Riemann
Sotto, integrale di Lebesgue

Il concetto di Integrale è quindi molto legato ad area e volume. La teoria di Lebesgue riparte da assiomi come questi definendoli e caratterizzandoli per in maniera sistematica e rigorosa cosa si possa e cosa non si possa integrare e dove abbia senso parlare di superfici, volumi, ipervolumi...

16 Regole di Calcolo

Le seguenti formule permettono di ricondurre il calcolo di integrali doppi a quello di integrali semplici.

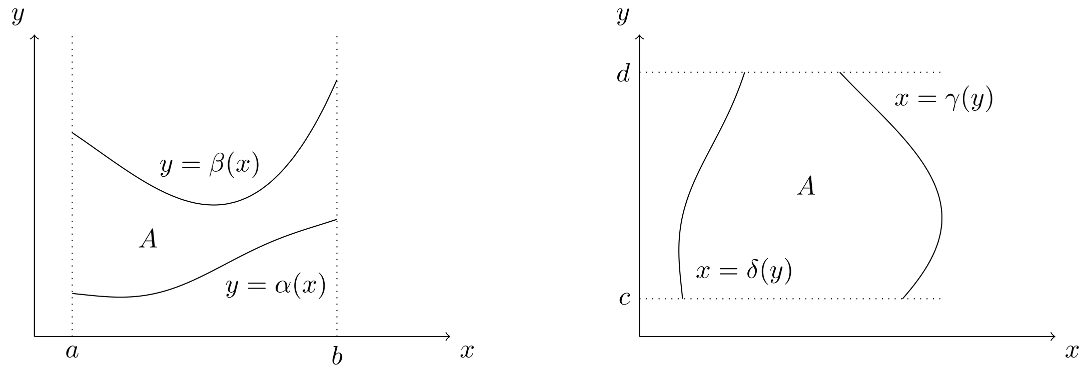


Figura 16.1: Integrali doppi

Se si è nel caso di Figura 16.1 a sinistra, cioè:

$$\begin{array}{rcl} a, b & \in & \mathbb{R}, \quad a < b \\ \alpha, \beta & \in & \mathbf{C^0}\big([a,b]\,, \mathbb{R}\big), \quad \forall x \in [a,b] \;\; \alpha(x) \leq \beta(x) \\ A & = & \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \in [a,b] \;\text{ e }\; y \in [\alpha(x), \beta(x)]\big\} \\ f & \in & \mathbf{C^0}(A, \mathbb{R}) \end{array}$$

allora

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Se invece si è nel caso di Figura 16.1 a destra, cioè:

$$\begin{array}{r} c, d \in \mathbb{R}, \quad c < d \\ \gamma, \delta \in \mathbf{C^0}\big([c,d]\,, \mathbb{R}\big), \quad \forall y \in [c,d] \;\; \gamma(y) \leq \delta(y) \\ A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \in [c,d] \;\text{ e }\; x \in [\gamma(y), \delta(y)]\big\} \\ f \in \mathbf{C^0}(A, \mathbb{R}) \end{array}$$

allora

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Quando entrambe le formule possono essere applicate, esse danno lo stesso risultato.

Nota. Integrali su regioni più complicate possono essere calcolati suddividendo opportunamente il dominio di integrazione ed usando l'addittività rispetto all'insieme su cui si integra.

17 Cambiamento di Variabili

Spesso può essere comodo eseguire un cambiamento delle variabili per calcolare integrali

Proposizione 17.1
Se:

$$\begin{array}{rcl} A & \subseteq & \mathbb{R}^2 \\ \Phi & \in & \mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^2) \\ \Phi & \text{è} & \textbf{Invertibile} \\ \Phi^{-1} & \in & \mathbf{C^1}\left(\Phi(A);\mathbb{R}^2\right) \\ \det D\Phi & \neq & 0 \text{ su } A \\ f & \in & \mathbf{C^0}\left(\Phi(A);\mathbb{R}^2\right) \end{array}$$

Allora:

$$\iint_{\Phi(A)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A \big((f\circ\Phi)(u,v)\big)\,|\det D\Phi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

La quantità $\det D\Phi$ è spesso chiamato **Determinante Jacobiano** (o semplicemente **Jacobiano**) della trasformazione Φ. Infatti, come già detto in Osservazione 8.8 (Matrici Derivata Totale Particolari), la $D\Phi$ è nota come Matrice Jacobiana.

Osservazione 17.2 (Passaggio in Coordinate Polari)
Nel **cambiamento di coordinate** da **rettangolari** a **polari**:

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : &]0,+\infty[\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ & & (\rho,\theta) & \mapsto & \begin{cases} x=\rho\cos(\theta) \\ y=\rho\sin(\theta) \end{cases} \end{array}$$

e $\det D\Phi(\rho,\theta)=\rho$

Esercizio 17.3
Siano $a,b>0$. Calcolare il Determinante Jacobiano della trasformazione:

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : &]0,+\infty[\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ & & (\rho,\theta) & \mapsto & \begin{cases} x=a\,\rho\cos(\theta) \\ y=b\,\rho\sin(\theta) \end{cases} \end{array}$$

Soluzione. Poste $\phi=a\,\rho\cos(\theta)$ e $\psi=b\,\rho\sin(\theta)$ si ha

$$\begin{aligned} \det D\Phi(\rho,\theta) &= \begin{bmatrix} \partial_\rho\phi & \partial_\theta\phi \\ \partial_\rho\psi & \partial_\theta\psi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a\cos(\theta) & -a\,\rho\sin(\theta) \\ b\sin(\theta) & b\,\rho\cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= ab\,\rho\cos^2(\theta)+ab\,\rho\sin^2(\theta) \\ &= ab\,\rho(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) \\ &= ab\,\rho \end{aligned}$$

■

Capitolo 4

Successioni e Serie di Funzioni

In questo capitolo verranno trattate Successioni e Serie di Funzioni di una sola variabile (in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Molti dei risultati esposti (in particolare quelli di sottosezione 19.1 (Convergenza Puntuale), sottosezione 19.4 (Convergenza Uniforme) e sottosezione 19.5 (Convergenza Quadratica)) valgono anche in ambiti più generali.

La sezione 20 (Serie di Funzioni Particolari) invece non può essere facilmente estesa al caso di funzioni di più variabili, si veda Esercizio 20.1.

Questo capitolo si allontana dal corrispettivo nella dispensa ufficiale del corso al fine di fornire una spiegazione più discorsiva dell'argomento. Non è stato tralasciata alcuna delle definizioni, proposizioni o esercizi presenti nella dispensa, ma è stato aggiunto materiale.

Grazie alla dispensa di Sergio Rolando per la spiegazione chiara e dettagliata a cui si ispira la presente trattazione

`http://calvino.polito.it/~rolando/An2s_04_Successioni.Funzioni.pdf`

18 Preliminari

Innanzitutto si ricorda la Definizione 2.1 (Successione), cioè, dato un insieme $X \neq \emptyset$, una **Successione** è una funzione $x : \mathbb{N} \to X$ che associa ad ogni valore di $\mathbb{N}$ un elemento di X.

Si consideri ora la successione $x_n = x^n$, i cui termini sono

$$1 \qquad x^1 \qquad x^2 \qquad \dots \qquad x^n$$

Si tratta della **Successione Geometrica** di *termine iniziale* 1 e *ragione* (la base) x. Questa successione può essere studiata con le conoscenze ottenute in sezione 2 (Successioni e Completezza) fissando x e facendo tendere n ad $+\infty$.

Esempio 18.1
Studiare la convergenza della successione x^n, cioè il $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n$

Soluzione. Fissando $x \in \mathbb{R}$ a diversi valori, studiando la successione numerica x^n per $n \to \infty$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} \nexists & \text{se } x \leq -1 \\ 0 & \text{se } x \in \,]-1, 1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

■

Cambiando però, dal punto di vista concettuale, i ruoli di x ed n, cioè fissando n e considerando x come una variabile reale, si vede che ogni termine della successione è una **funzione** e che quindi la successione è **Successione di Funzioni**

$$f_0(x) = 1 \qquad f_1(x) = x^1 \qquad f_2(x) = x^2 \qquad \dots \qquad f_n(x) = x^n$$

Nota. Le funzioni della successione, a rigore, si chiamano $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ mentre i vari $f_\alpha(x) = x^\alpha$ sono i valori assunti da esse nel punto x

Si giunge dunque alla seguente definizione, tutt'altro che formale

Definizione 18.2 (Successione di Funzioni)
Si definisce **Successione di Funzioni** l'insieme

$$\{f_n : \ n \in \mathbb{N}\} \ \text{di funzioni} \ f_n : \ A \to \mathbb{R}$$

dipendenti da un indice naturale n (oltre cheda una variabile reale x) e definite su un **dominio comune** A.

Definizione 18.3 (Successione delle Somme Parziali)
Sia X uno **Spazio Vettoriale** su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$. Data una **Successione** $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di X, per ogni indice k della successione si definisce una **Successione delle Somme Parziali**. Cioè il k*-esimo* termine di s è la somma dei termini da 0 a k della successione x_n:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$$

Quindi

$$\begin{aligned} s_0 &= x_0 \\ s_1 &= x_0 + x_1 \\ &\vdots \\ s_k &= x_0 + x_1 + \dots + x_k \end{aligned}$$

Definizione 18.4 (Serie)
Sia X uno **Spazio Vettoriale** su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$. Data una **Successione** $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di X, si definisce **Serie associata alla Successione** x_n la somma di tutti i termini della successione:

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n = x_0 + x_1 + \dots$$

Quindi si può definire la Serie usando la Definizione 18.3 (Successione delle Somme Parziali) con $k \to +\infty$

$$s = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

Osservazione 18.5
Le Definizione 18.3 (Successione delle Somme Parziali) e Definizione 18.4 (Serie) non fanno esplicitamente riferimento a successioni del tipo di Definizione 18.2 (Successione di Funzioni), ma ovviamente valgono anche quando x_n è Successione di Funzioni.

Osservazione 18.6
La Definizione 18.4 (Serie) è intimamente legata alla Definizione 18.3 (Successione delle Somme Parziali), infatti per studiare il comportamento della Serie basta studiare la Successione delle Somme Parziali per $k \to +\infty$. Di conseguenza:

$$\begin{aligned}
\text{La Serie è } \textbf{Limitata} \quad &\rightleftharpoons \quad \text{La Successione delle Somme Parziali è } \textbf{Limitata} \\
\text{La Serie è } \textbf{Illimitata} \quad &\rightleftharpoons \quad \text{La Successione delle Somme Parziali è } \textbf{Illimitata} \\
\text{La Serie è } \textbf{Convergente} \quad &\rightleftharpoons \quad \text{La Successione delle Somme Parziali è } \textbf{Convergente}
\end{aligned}$$

Osservazione 18.7
Data una qualsiasi **Successione** s_n, questa può essere vista come una **Successione delle Somme Parziali** di una Serie x_n i cui termini sono così definiti induttivamente:

$$\begin{aligned}
&x_0 = s_0 = x_0 \\
&x_1 = s_1 - s_0 = (x_0 + x_1) - x_0 = x_1 \\
&x_2 = s_2 - s_1 = (x_0 + x_1 + x_2) - (x_0 + x_1) = x_2 \\
&\quad\vdots \\
&x_n = s_n - s_{n-1}
\end{aligned}$$

Quindi ogni definizione o proposizione enunciata in relazione alle successioni ha un *alter ego* relativa alle serie e viceversa. Non sempre per entrambe le versioni di una definizione o proposizione sono equivalentemente interessanti. Vedasi Definizione 19.47.

Osservazione 18.8
Successioni e Serie di Funzioni possono essere viste come:

1. Successioni e Serie numeriche dipendenti da un parametro
2. un mezzo per approssimare funzioni
3. un primo passo verso lo studio di funzioni che a funzioni associano numeri o altre funzioni (questo tipo di funzioni è detto *operatori* o *funzionali*)

19 Tipi Di Convergenza

19.1 Convergenza Puntuale

Tornando a Esempio 18.1, lo stesso procedimento logico può essere applicato a qualsiasi successione di funzioni f_n: si può immaginare di stabilire un valore $\in \mathbb{R}$ per la x e studiare il comportamento della successione numerica dei valori $f_n(x)$ assunti dalle varie f_n in quel punto.
Se la successione numerica della f_n converge, allora si dirà che **la successione di funzioni f_n converge nel punto x.**

Ancora dai risultati di Esempio 18.1, si vede che f_n converge solo per valori $x \in]-1, 1]$, dunque risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Da questa formula si vede che, nei punti in cui $\lim_{n\to+\infty} x^n$ esiste finito, il limite di x^n è **rappresentato** da una **funzione limite puntuale** f del tipo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Definizione 19.1 (Successione Puntualmente Convergente)
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** e $f_n : A \to \mathbb{R}$.
La Successione f_n è **Puntualmente Convergente** su B se:

$$\forall x \in B \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \ \exists \text{ finito}$$

Se f_n è Puntualmente Convergente, allora esiste una **Funzione Limite Puntuale** definita come

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & B & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{array}$$

Cioè la funzione f associa ad ogni punto di B il valore a cui converge la f_n in quel punto.

La convergenza puntuale su B della successione f_n verso f è indicata con

$$f_n \xrightarrow{\text{p}} f \text{ su } B$$

Definizione 19.2 (Serie Puntualmente Convergente)
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** e $f_n : A \to \mathbb{R}$.
La **Serie** $s = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ associata alla Successione f_n è **Puntualmente Convergente** su B se:

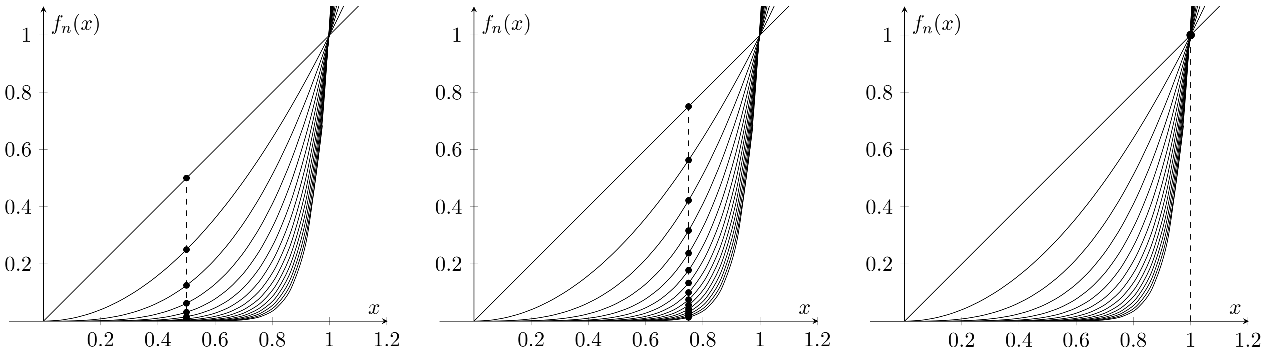
$$\forall x \in B \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \ \exists \text{ finita}$$

Se f_n è Puntualmente Convergente, allora esiste una **Funzione Limite Puntuale** definita come

$$\begin{array}{rcrcl} F & : & B & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \end{array}$$

Cioè la funzione F associa ad ogni punto di B il valore della serie s in quel punto (che poi è la somma di tutti gli f_n della successione, per Definizione 18.4 (Serie)).

Osservazione 19.3
Graficamente, si può vedere che $f_n \xrightarrow{\text{p}} f$ se, fissato un $x_0 \in A$, per $n \to +\infty$ si ha $f_n(x_0) \to f(x_0)$



(a) $x_0 = \frac{1}{2}$ (b) $x_0 = \frac{3}{4}$ (c) $x_0 = 1$

Figura 19.1: Si vede che, al crescere di n, le $f(x_0)$ convergono a 0 (in 19.1a e 19.1b) o 1 (in 19.1c)

Esempio 19.4
La successione

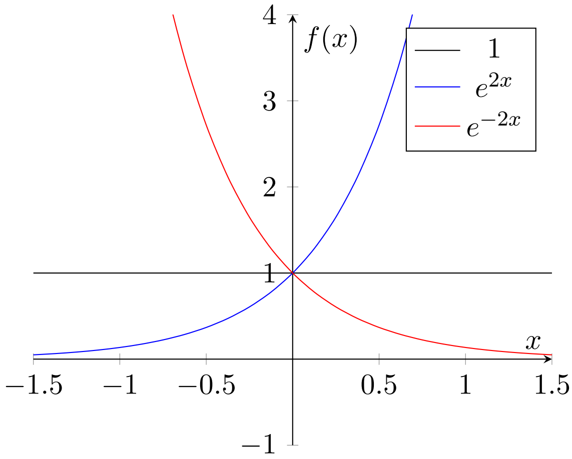
$$f_n(x) = \frac{1}{n} sin(x)$$

è puntualmente convergente a 0 su tutto il dominio delle f_n, cioè $f_n \xrightarrow{\text{p}} 0$ su $B = A = \mathbb{R}$, infatti:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} sin(x) = 0 \quad \forall x \in A$$

Esempio 19.5
La successione

$$f_n(x) = e^{nx}$$



Ha questo comportamento

$$\lim_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}$$

Dunque

$$f_n \xrightarrow{\text{p}} f \qquad \text{su } B =]-\infty, 0]$$

Proposizione 19.6
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** con $f_n : \ A \to \mathbb{R}$ e $f : \ B \to \mathbb{R}$. Allora

$$f_n \xrightarrow{\text{p}} f \text{ su } B \text{ per } n \to +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in B \\ \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Dimostrazione. Da Definizione 19.1 (Successione Puntualmente Convergente) si sa che

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in B$$

Dunque, applicando la Definizione 2.3 (Limite per Successioni)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \quad d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon \qquad \forall x \in B$$

Essendo in f_n e f a valori in $\mathbb{R}$, la d è Metrica Euclidea, dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in B \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

> ***Nota.*** È possibile spostare $\forall x \in B$ "a sinistra dei :", in quanto, per definizione di f dalla Definizione 19.1 (Successione Puntualmente Convergente), $\forall x \in B \quad f(x) = \lim$, quindi la relazione è sempre valida, a prescindere dalla scelta di x.

□

Proposizione 19.7
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** con $f_n : \ A \to \mathbb{R}$ e $F : \ B \to \mathbb{R}$. Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow{\text{p}} F \text{ su } B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in B \\ \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \quad \left| \sum_{n=0}^{k} f_n(x) - F(x) \right| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Dimostrazione. Analoga alla Proposizione 19.6 ricordando la definizione di F in Definizione 18.4 (Serie). □

Proposizione 19.8 (Metaproposizione sulle Proprietà delle Successioni)
Sia $f_n : \ A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : \ B \to \mathbb{R}$
Se $f_n \xrightarrow{\text{p}} f$ su B e se f_n ha la proprietà P, allora la funzione limite puntuale f ha a sua volta la proprietà P.

> ***Nota.*** La continuità (e quindi anche la derivabilità) non è una proprietà che passa alla funzione limite, come visto in Esempio 18.1, dove la f ha un punto di discontinuità in $x = 1$.

Dimostrazione. Verrà svolta per le singole proprietà. □

Esercizio 19.9
Enunciare rigorosamente e dimostrare:

1. Il limite puntuale della somma (prodotto, combinazione lineare) di due successioni di funzioni è la somma (prodotto, combinazione lineare) delle funzioni limiti puntuali
2. Il limite puntuale di una successione di funzioni non negative è una funzione non negativa
3. Il limite puntuale di una successione di funzioni debolmente/strettamente crescenti/decrescenti è una funzione debolmente crescente/decrescente

4. Il Criterio di Cauchy (da Definizione 2.11 (Successione di Cauchy)) per la convergenza puntuale di serie e successioni

5. Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente in un insieme B, allora $f_n \xrightarrow{\text{p}} 0$ su B

Soluzione.

2. Sia $f_n :\ A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ e $f :\ B \to A$
   Se $f_n \xrightarrow{\text{p}} f$ su B e se f_n è non negativa su B, cioè $f_n \geq 0$, allora il limite puntuale f è non negativo, $f \geq 0$, su B.

   Dimostrazione. Da Definizione 19.1 (Successione Puntualmente Convergente), si sa che

   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in B$$

   Ma f_n è, per ipotesi, una successione di valori non negativi, quindi il limite esiste ed è non negativo.

   La dimostrazione è analoga per funzioni non positive. □

3. Sia $f_n :\ A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ e $f :\ B \to A$
   Se $f_n \xrightarrow{\text{p}} f$ su B e se f_n è debolmente crescente su B, allora il limite puntuale f è debolmente crescente su B.

   Dimostrazione. Il fatto che f_n sia debolmente crescente su B implica che

   $$\forall x_1, x_2 \in B \quad x_1 \leq x_2 \implies f_n(x_1) \leq f_n(x_2)$$

   Con $n \to \infty$, essendo nell'insieme B, si ha che $f(x_1) \leq f(x_2)$ per definizione di f da Definizione 19.1 (Successione Puntualmente Convergente).

   La dimostrazione è analoga per funzioni debolmente decrescenti e strettamente/debolmente crescenti.

   □

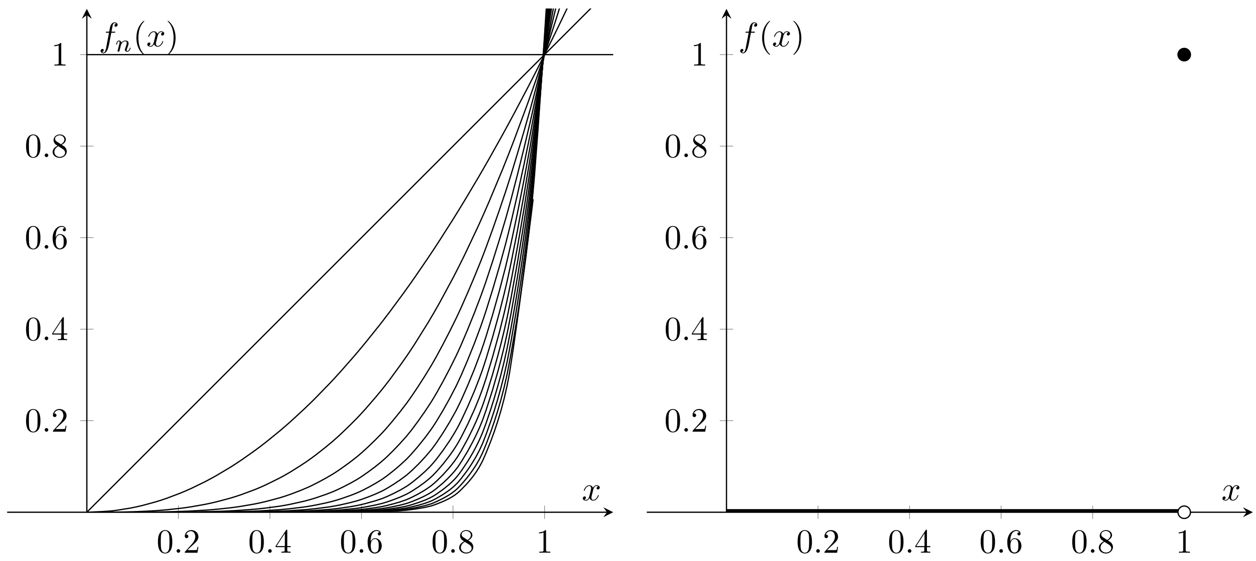
Osservazione 19.10
In riferimento al punto 2 dell'Esercizio 19.9, è necessario sottolineare come non sia invece possibie avere certezze sulla **stretta** positività/negatività del limite puntuale di una successione di funzioni strettamente positive/negative.
Ad esempio, $-\frac{e^x}{n}$ con $x \in [0, 1[$ è strettamente negativa, ma il limite puntuale è costante 0.

Osservazione 19.11
In riferimento al punto 3 dell'Esercizio 19.9, è necessario sottolineare come non sia invece possibie avere certezze sulla **stretta** crescenza/decrescenza del limite puntuale.
Come esempio, vedasi Esempio 18.1 in cui si studia la successione strettamente crescente x^n, il cui limite puntuale è però costante (dunque non **strettamente** crescente) in $B = [0, 1[$.

19.2 L'Insufficienza della Convergenza Puntuale

La Convergenza Puntuale si può rivelare insufficiente per diverse ragioni, tra cui:

- Può spesso esser comodo utilizzare una successione f_n convergente puntualmente a f nel caso in cui f non sia ottenibile in modo esplicito (ad esempio nella soluzione di un'equazione differenziale). Però, come visto in Esempio 18.1, la convergenza puntuale non trasferisce necessariamente proprietà come Continuità, Limitatezza o Derivabilità alla funzione limite puntuale. La successione $f_n = x^n$ di Esempio 18.1, ad esempio, è formata da funzioni $\in \mathbf{C}^\infty([0,1]\,;\mathbb{R})$, però la funzione limite puntuale
$$f = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left]-1, 1\right[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$
non è né continua né, dunque, derivabile nello stesso intervallo.



(a) $f_n(x) = x^n \quad 0 \leq n \leq 15$ (b) $f(x) \quad x \in [0,1]$

Figura 19.2: $f_n(x) \in \mathbf{C}^\infty([0,1]\,;\mathbb{R})$, mentre la funzione limite puntuale f è discontinua.

- Supponendo di voler calcolare l'integrale
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.1}$$
Ma con f non integrabile (o magari anche solo f non integrabile in modo elementare). Si cercherebbe dunque di approssimarlo con una successione di integrali tipo
$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.2}$$
Potrebbe venire naturale di prendere una successione f_n Puntualmente Convergente a f e quindi considerare gli integrali delle f_n della Eq. (19.2) come approssimazioni dell'integrale Eq. (19.1). Questo ragionamento è però valido solo nel caso in cui valga
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.3}$$

Cioè eseguendo il *passaggio al limite sotto il segno di integrale*, operazione di cui si è già parlato nell'introduzione al Capitolo 3 (Integrali Doppi) specificando che, con gli integrali di Riemann, non è affatto scontato sia possibile.
Nel caso della convergenza puntuale non son garantite le iptesi necessarie, dunque non è possibile passare al limite sotto l'integrale, come si vede nel successivo Esempio 19.12.

La Convergenza Puntuale presenta le problematiche evidenziate in quanto non si basa su alcun tipo di concetto di **distanza tra funzioni**. Infatti, ricordando Definizione 19.1 (Successione Puntualmente Convergente), avere convergenza puntuale $f_n \xrightarrow{\text{p}} f$ su un certo insieme A significa che, fissato un qualsiasi $x_0 \in A$, si ha

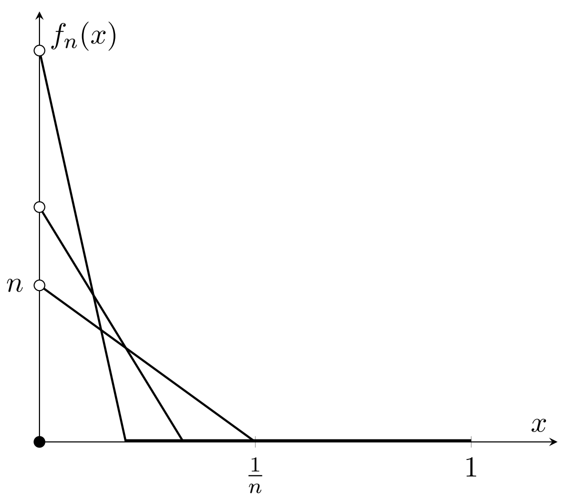
$$\lim_{n\to+\infty} d\big(f_n(x_0), f(x_0)\big) = 0$$

Con d Metrica Euclidea, distanza tra i valori di f_n ed f nel punto x_0 precedentemente fissato. In pratica, i valori di f_n e f vengono considerati **punto per punto** separatamente e la convergenza puntuale non è influenzata da tutti gli altri valori che le funzioni possono assumere in un intorno di x_0.

Esempio 19.12
La successione

$$\begin{aligned} f_n \quad : \quad [0,1] \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \{0\} \cup \left]\frac{1}{n}, 1\right] \\ -n^2x + n & \text{se } x \in \left]0, \frac{1}{n}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$ su $[0,1]$. Infatti, essendo $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, un qualsiasi $x \in [0,1]$ cadrà nell'intervallo $\left]\frac{1}{n}, 1\right]$ in cui f_n è definita essere 0. Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.



Gli integrali delle f_n sono:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(-n^2 x + n\right)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^1 0\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{n^2}{2}x^2 + nx\right]_0^{\frac{1}{n}} \\
&= -\frac{n^2}{2}\frac{1}{n^2} + n\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

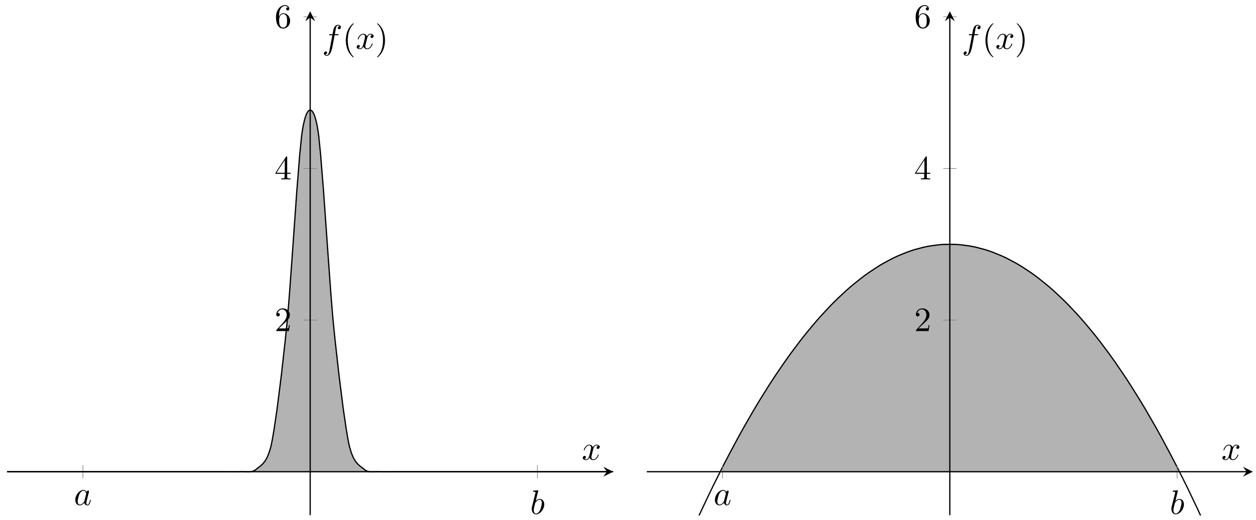
L'integrale della funzione limite puntuale f sarebbe, ovviamente, 0, essendo stato dimostrato prima che $f_n \xrightarrow{\mathrm{p}} 0$, dunque l'uguaglianza di Eq. (19.3) non vale.

19.3 Distanze tra Funzioni

La nozione di distanza si basa, generalmente, su una preesistente nozione di "grandezza": stabilito il modo per valutare la grandezza di un ente, è ragionevole ritenere che due oggetti siano tanto più vicini quanto più è "piccola" la differenza tra essi. Cioè la distanza può essere vista come la "grandezza" della differenza (ovviamente, quando è ammessa la differenza tra gli oggetti). Si è vista l'applicazione di questo criterio in molti esempi di Esempio 1.7 (Esempi di Metriche).

Dovendo valutare la distanza tra funzioni, è dunque necessario prima stabilire come valutare la "grandezza" delle funzioni stesse.

Quale delle seguenti funzioni ha senso definire "più grande"?



(a) Curva gaussiana

(b) Parabola rovesciata

Figura 19.3: Diversi parametri per valutare la "grandezza" di una funzione

Ovviamente dipende dall'aspetto che si intende considerare. La 19.3a potrebbe essere "più grande" perché ha massimo maggiore rispetto a 19.3b, che però d'altro canto ha una maggiore area sottesa.

Questi erano solo due esempi di “grandezza” di una funzione, definiti con le seguenti metriche

$$\|f\|_{\mathbf{C^0}} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad\qquad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$$

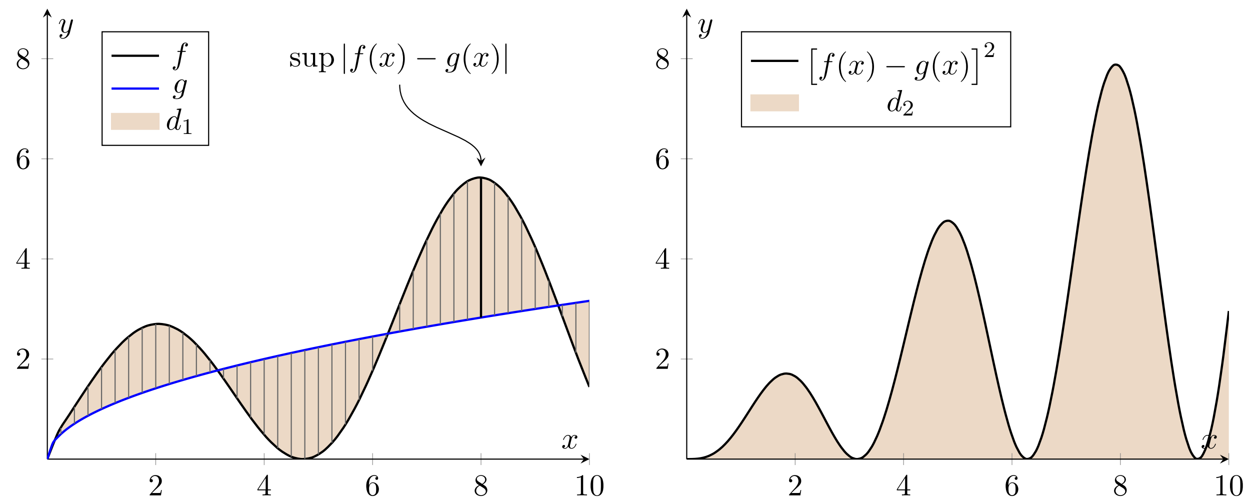
Quella di sinistra è la **Norma Infinito** o **Norma del sup**, mentre a destra **Norma Indice 1**. In aggiunta, si definisce anche la **Norma Indice 2**, che sarà usata in sottosezione 19.5 (Convergenza Quadratica):

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\ \mathrm{d}x}$$

Le distanze indotte dalle seguenti norme saranno dunque

$$d_{\mathbf{C^0}}(f,g) = \|f-g\|_{\mathbf{C^0}} \qquad\qquad d_1 = \|f-g\|_1 \qquad\qquad d_2 = \|f-g\|_2$$

E si parla di **Distanza Infinito** (o **Distanza del sup**), **Distanza Indice 1** e **Distanza Indice 2**.



(a) Significato grafico di Distanza Infinito e Distanza Indice 1

(b) Significato grafico (a meno della radice) di Distanza Indice 2

19.4 Convergenza Uniforme

Si chiama convergenza uniforme la convergenza di una Successione rispetto alla distanza $d_{\mathbf{C^0}}$.

Definizione 19.13 (Successione Uniformemente Convergente)
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** e $f_n :\ A \to \mathbb{R}$.
La Successione f_n è **Uniformemente Convergente** su B se esiste la **Funzione Limite Uniforme** $f :\ B \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_B |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Nota. Nella Definizione 19.1 (Successione Puntualmente Convergente) la f associava ogni punto al valore a cui convergeva la successione in quel punto.
In questo caso invece la f è una funzione *tale per cui* la distanza massima (per via del sup di $d_{\mathbf{C^0}}$) tra f_n e f è 0. Questo vuol dire che la funzione “coincide con la f_n su tutto B”, in quel senso *Uniformemente*. Vedasi Osservazione 19.20.

La convergenza uniforme su B della successione f_n verso f è indicata con

$$f_n \xrightarrow{\text{u}} f \text{ su } B$$

Definizione 19.14 (Serie Uniformemente Convergente)
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** e $f_n : A \to \mathbb{R}$.
La **Serie** $s = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ associata alla Successione f_n è **Uniformemente Convergente** su B se esiste la **Funzione Limite Uniforme** $F : B \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_B \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - F(x) \right| = 0$$

Esempio 19.15

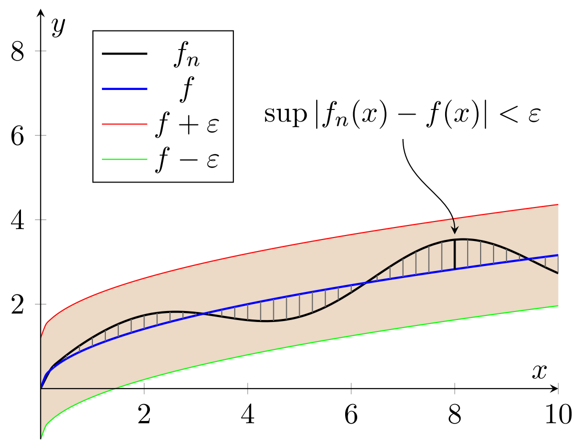


Figura 19.5: Significato grafico della Convergenza Uniforme
Come si vedrà in Proposizione 19.18

Osservazione 19.16
La convergenza uniforme equivale alla convergenza rispetto alla distanza $d_{\mathbf{C^0}}(f,g) = \sup\limits_{x\in A} |g(x) - f(x)|$ ogniqualvolta questa distanza sia definita. La definizione di $d_{\mathbf{C^0}}(f,g)$ come *distanza* è dimostrata in Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)
La $d_{\mathbf{C^0}}(f,g)$ può anche essere definita attraverso la **norma** $\|k\|_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_{x\in A} |k|$ con $k = f - g$ in quanto, in $\mathbb{R}$ norma e valore assoluto coincidono.

Esercizio 19.17
Sia $K \in \mathbb{R}$ un **Compatto**. Verificare che:

1. $\|\cdot\|_{\mathbf{C^0}}$ è una norma su $\mathbf{C^0}(K;\mathbb{R})$
2. $d_{\mathbf{C^0}}$ è una distanza su $\mathbf{C^0}(K;\mathbb{R})$
3. La convergenza rispetto alla distanza $d_{\mathbf{C^0}}$ equivale alla convergenza uniforme su K

Soluzione.

2. Dimostrata in Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)

■

Proposizione 19.18
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** e $f_n : A \to \mathbb{R}$. Sia $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione:

$$f_n \xrightarrow{u} f \text{ su } B \text{ per } n \to +\infty \qquad \iff \qquad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \\ \forall n > \nu \quad \forall x \in B \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Soluzione. Da Definizione 19.13 (Successione Uniformemente Convergente) si sa che

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_B |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Dunque, applicando la Definizione 2.3 (Limite per Successioni)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \quad d\big(|f_n(x) - f(x)|\,, 0\big) < \varepsilon \qquad \forall x \in B$$

Essendo in f_n e f a valori in $\mathbb{R}$, la d è Metrica Euclidea, dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \quad \forall x \in B \quad \big||f_n(x) - f(x)| - 0\big| < \varepsilon$$

Nota. A differenza di quanto fatto in Proposizione 19.6, non è possibile spostare $\forall x \in B$ "a sinistra dei :". La scelta di x non è *"a prescindere"*, ma subordinata alla scelta di ε e ν. Dato dunque un certo ν, allora, per ogni n e x, vale il limite. Vedasi Osservazione 19.20.

■

Proposizione 19.19
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** con $f_n : A \to \mathbb{R}$ e $F : B \to \mathbb{R}$. Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow{u} F \text{ su } B \qquad \iff \qquad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \\ \forall n > \nu \quad \forall x \in B \quad \left| \sum_{n=0}^{k} f_n(x) - F(x) \right| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Dimostrazione. Analoga alla Proposizione 19.18 ricordando la definizione di F in Definizione 18.4 (Serie). □

Osservazione 19.20
La differenza tra Proposizione 19.18 e Proposizione 19.6 (e rispettive proposizioni sulle Serie) giustifica il fatto che la continuità non passi alla Funzione Limite Puntuale, come spiegato in sottosezione 19.2 (L'Insufficienza della Convergenza Puntuale).

Infatti qui ν dipende solo dalla scelta di ε e le x "si guardano tutte insieme", nella Convergenza Puntuale invece ν dipendeva, oltre che dalla ε, anche dalla x. Questo portava ad osservare le x una alla volta.

Corollario 19.21 (Relazione tra Convergenza Uniforme e Puntuale)
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ e $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** e $f_n : A \to \mathbb{R}$. Sia $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione

$$f_n \xrightarrow{u} f \text{ su } B \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \xrightarrow{p} f \text{ su } B$$

Nota. Questo significa che la Convergenza Uniforme ha tutte le proprietà della Convergenza Puntuale.

Nota. L'implicazione inversa non è possibile, come si vede in Esempio 19.22 (La Convergenza Puntuale non implica Convergenza Uniforme).

Dimostrazione. Da Proposizione 19.18 si sa che valgono condizioni analoghe, ma più restrittive, rispetto a quelle di Proposizione 19.6 (vedere note alle due Proposizioni), dunque sicuramente è valida l'implicazione $\Longleftarrow$ di Proposizione 19.6. □

Esempio 19.22 (La Convergenza Puntuale non implica Convergenza Uniforme)
Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = x^n$, allora:

$$f_n \xrightarrow{\text{p}} f \text{ su }]-1,1] \qquad \text{dove} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

Ma su $]-1,1]$ non c'è convergenza uniforme e nemmeno su $]-1,1[$.

Esercizio 19.23
È possibile costruire una successione di funzioni f_n uniformemente convergenti ad una successione f non limitata?

Soluzione. No, perché, come visto in Corollario 19.21 (Relazione tra Convergenza Uniforme e Puntuale) $f_n \xrightarrow{\text{u}} f \implies f_n \xrightarrow{\text{p}} f$, ma per Definizione 19.1 (Successione Puntualmente Convergente) $\nexists$ successione puntualmente convergente a f non limitata. ■

Esercizio 19.24
Determinare, se possibile, sotto quali ipotesi sulla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le seguenti successioni di funzioni sono Uniformemente Convergenti:

$$f_n(x) = f(x) + n \qquad\qquad f_n(x) = f(x+n)$$
$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \qquad\qquad f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$$
$$f_n(x) = nf(x) \qquad\qquad f_n(x) = \frac{f(x)}{n}$$
$$f_n(x) = f(nx) \qquad\qquad f_n(x) = f(\frac{x}{n})$$

Definizione 19.25 (Successione di Funzioni di Cauchy per la Convergenza Uniforme)
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** e $f_n : A \to \mathbb{R}$

La Successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa alla **Condizione di Cauchy** per la **Convergenza Uniforme** su B

$$\rightleftharpoons$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > \nu \quad \forall x \in B \qquad \text{vale} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Proposizione 19.26
Nel caso in cui B sia **Compatto**, la Definizione 19.25 (Successione di Funzioni di Cauchy per la Convergenza Uniforme) coincide alla Definizione 2.11 (Successione di Cauchy).

Dimostrazione. Dalla Definizione 2.33 (Insieme Compatto), si sa che ogni successione ammette una sottosuccessione avente limite in B, dunque si arriva ad avere la distanza $d\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x), f(x)\right)$ tra due elementi di K. □

Definizione 19.27 (Serie di Funzioni di Cauchy per la Convergenza Uniforme)
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** e $f_n : A \to \mathbb{R}$

La Serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ associata alla Successione f_n soddisfa alla **Condizione di Cauchy** per la **Convergenza Uniforme** di serie su B

$$\rightleftharpoons$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > \nu \quad \forall x \in B \qquad \text{vale} \qquad \left| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

Proposizione 19.28
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni** e $f_n : A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c}\text{La Successione } f_n \text{ soddisfa} \\ \text{alla } \textbf{Condizione di Cauchy} \\ \text{per la } \textbf{Convergenza Uniforme} \text{ su } B\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Esiste una funzione} \\ f : B \to \mathbb{R} \\ \text{tale che } f_n \xrightarrow{u} f \text{ su } B\end{array}\right.$$

Dimostrazione. Se la successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa la Definizione 19.25 (Successione di Funzioni di Cauchy per la Convergenza Uniforme) su B
$\Longrightarrow$ ogni successione $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, $\forall x \in B$, è di Cauchy in $\mathbb{R}$
$\Longrightarrow$ essendo $\mathbb{R}$ Completo, per Definizione 2.13 (Spazio Metrico Completo) ogni successione

$$\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \ \forall x \in B$$

avrà limite in $\mathbb{R}$. Sia posta ora $f(x)$ la funzione che associa ad ogni x il limite della $f_n(x)$.

Si verifica che f è la Funzione Limite Uniforme della successione $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ su B. Infatti, posto $\varepsilon > 0$, sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\sup\limits_B |f_h - f_k| < \varepsilon$ per ogni $h, k \in B$. Allora si ha:

$$\sup_B |f_h - f_k| < \varepsilon \quad \forall h, k > \nu$$

Essendo $\sup\limits_B < \varepsilon$, sicuramente si può concludere che $\forall x \in B$

$$\Longrightarrow \forall x \in B \quad |f_h(x) - f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall h, k > \nu$$

Essendo questa forma valida $\forall h, k > \nu$, è possibile andare al lim per $k \to +\infty$

$$\Longrightarrow \forall x \in B \quad \lim_{k \to +\infty} |f_h(x) - f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall h > \nu$$

Per come è stata definita prima f, $\lim\limits_{k \to +\infty} f_k(x) = f(x)$

$$\Longrightarrow \forall x \in B \quad |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall h > \nu$$

Tornando ora al sup

$$\Longrightarrow \sup_B |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall h > \nu$$

Che poi è la Definizione 19.13 (Successione Uniformemente Convergente), dunque

$$\Longrightarrow f_n \xrightarrow{u} f \text{ su } B$$

□

Proposizione 19.29 (Mantenimento della Continuità per la Funzione Limite Uniforme)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni**, $f_n : A \to \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f_n \in \mathbf{C^0}(A; \mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ f_n \xrightarrow{u} f \text{ su } A \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in \mathbf{C^0}(A; \mathbb{R})$$

Dimostrazione. Partendo dalla Definizione 19.13 (Successione Uniformemente Convergente), fissato $x_0 \in A$ ed $\varepsilon > 0$, sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_A |f_n - f| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

Essendo, per ipotesi, $f_n \in \mathbf{C^0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dato un $k > \nu$, anche la funzione f_k sarà continua. A questo punto, fissato un k, in x_0 la f_k avrà un certo δ come suo Modulo di Continuità (definito in Definizione 3.5 (Funzione Continua)). Allora per $d(x, x_0) < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)|$$

Sommando e sottraendo

$$= |f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f(x_0)|$$

Applicando ora la Disuguaglianza Triangolare

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_k(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_k(x) - f_k(x_0)|}_{(2)} + \underbrace{|f_k(x_0) - f(x_0)|}_{(3)}$$

Si ha ora che (1) e (2) sono $< \varepsilon$ per Definizione 19.13 (Successione Uniformemente Convergente), mentre (2) è $< \varepsilon$, direttamente da Definizione 3.5 (Funzione Continua), essendo stato posto $d(x, x_0) < \delta$

$$\leq 3\varepsilon$$

Dunque la f è continua da Definizione 3.5 (Funzione Continua). □

Osservazione 19.30
La Proposizione 19.29 (Mantenimento della Continuità per la Funzione Limite Uniforme) è il motivo per cui in sottosezione 19.2 (L'Insufficienza della Convergenza Puntuale) si è sottolineata l'insufficienza della Convergenza Puntuale. Grazie a questa proprietà della Funzione Limite Uniforme si possono ottenere risultati molto più interessanti.

Corollario 19.31
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una **Successione di Funzioni**, $f_n : A \to \mathbb{R}$ e $F : A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f_n \in \mathbf{C^0}(A; \mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow{u} f \text{ su } A \end{array}\right\} \implies F \in \mathbf{C^0}(A; \mathbb{R})$$

Dimostrazione. F è somma di funzioni che son continue per Proposizione 19.29 (Mantenimento della Continuità per la Funzione Limite Uniforme), dunque è continua. □

Proposizione 19.32
Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ un **Compatto**. Si prenda ora l'insieme di funzioni $\mathbf{C^0}(K; \mathbb{R})$ e la distanza $d_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_K |g(x) - f(x)|$.
Allora $\left(\mathbf{C^0}(K; \mathbb{R}), d_{\mathbf{C^0}}\right)$ è uno Spazio Metrico **Completo**.

Nota. Da Esercizio 2.36, K deve essere Chiuso e Limitato essendo $K \subseteq \mathbb{R}$

Nota. $d_{\mathbf{C^0}}$ è la la Distanza della Convergenza Uniforme introdotta in sottosezione 19.3 (Distanze tra Funzioni).

Dimostrazione.

Nota. La dimostrazione è analoga a quella di Proposizione 2.41.

È già stato dimostrato che $d_{\mathbf{C^0}}$ è una distanza in Esempio 1.7 (Esempi di Metriche).

Presa una successione f_n di Cauchy in $\mathbf{C^0}(K;\mathbb{R})$, allora questa successione soddisfa anche la Definizione 19.25 (Successione di Funzioni di Cauchy per la Convergenza Uniforme), come osservato in Proposizione 19.26. A questo punto, grazie a Proposizione 19.28, deve esistere una funzione $f: K \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \xrightarrow{u} f$ su K.

Infine, avendo scelto per ipotesi f_n nell'insieme $\mathbf{C^0}$, per Proposizione 19.29 (Mantenimento della Continuità per la Funzione Limite Uniforme), f è a sua volta Continua. □

Esercizio 19.33
Nella Proposizione 19.32, dove è stata usata l'ipotesi di compattezza di K?

Soluzione. L'ipotesi è richiesta per poter applicare Proposizione 19.26. Vedasi la dimostrazione di questa proposizione per una spiegazione più dettagliata. ■

Osservazione 19.34
Nella Proposizione 19.32, la **Compattezza** di K assicura anche che tutte le funzioni in $\mathbf{C^0}(K;\mathbb{R})$ siano Definizione 3.19 (Funzione Uniformemente Continua), come da Teorema 3.28 (di Cantor).

Corollario 19.35
La **Funzione Limite Uniforme** f di una **Successione** di funzioni **continue** definite su un **Compatto** è una funzione **Uniformemente Continua**.

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 19.29 (Mantenimento della Continuità per la Funzione Limite Uniforme) si sa che f è continua. Essendo funzione continua in un compatto, allora per Teorema 3.28 (di Cantor) è uniformemente continua. □

Corollario 19.36
Siano $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Compatto** e $C \subseteq \mathbb{R}$ un **Chiuso**.
Allora l'insieme delle funzioni di classe $\mathbf{C^0}(K;C)$ che assumono valori in C è uno spazio metrico **Completo** con la distanza $d_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_K |g(x) - f(x)|$.

Dimostrazione. $\left(\mathbf{C^0}(K;\mathbb{R}), d_{\mathbf{C^0}}\right)$ è uno Spazio Metrico perché, come dimostrato in Esempio 1.7 (Esempi di Metriche), $d_{\mathbf{C^0}}$ è una distanza su $\mathbf{C^0}(K;\mathbb{R})$.

Grazie alla chiusura di C, si può applicare la Proposizione 19.32 ed ottenere la completezza di $\left(\mathbf{C^0}(K;\mathbb{R}), d_{\mathbf{C^0}}\right)$. La chiusura è necessaria per utilizzare Proposizione 2.16. □

Definizione 19.37 (Operatore)
Una funzione che agisce su fuzioni è chiamata **Operatore** o **Funzionale**.

Proposizione 19.38
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si consideri $\mathbf{C^0}\big([a,b]\,;\mathbb{R}\big)$ con la distanza $d_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_{[a,b]} |g(x) - f(x)|$. Definito l'Operatore

$$\begin{array}{rcccc} I & : & \mathbf{C^0}\big([a,b]\,;\mathbb{R}\big) & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Si verifichi che I è **Lineare** e **Lipschitziana** con costante $L = b - a$.

Dimostrazione. La linearità di I segue dalle regole d'integrazione studiate nel corso di Analisi 1 che garantiscono la linearità dell'integrale.

Scelte due funzioni $f, g \in \mathbf{C^0}\big([a, b]\,; \mathbb{R}\big)$, allora:

$$\begin{aligned} |I(f) - I(g)| &= \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \right| \end{aligned}$$

Come si vede in Esercizio 22.8, è ora possibile minorare

$$\leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

Passando alla $d_{\mathbf{C^0}}$, cioè il sup di $|f(x) - g(x)|$, si ha la certezza di poter minorare nuovamente

$$\leq \int_a^b d_{\mathbf{C^0}}(f, g)\,\mathrm{d}x$$

Non avendo più dipendenza diretta da x, è possibile estrarre la distanza

$$\begin{aligned} &= d_{\mathbf{C^0}}(f, g)\,\int_a^b \mathrm{d}x \\ &= d_{\mathbf{C^0}}(f, g)\,(b - a) \end{aligned}$$

Dunque $L = b - a$ □

Corollario 19.39
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se la successione

$$f_n \textbf{ Converge Uniformemente a } f \text{ in } \mathbf{C^0}\big([a, b]\,; \mathbb{R}\big)$$

allora la successione

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \textbf{ Converge a } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nota. Esprimendo in altro modo lo stesso concetto

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Intendendo il membro di sinistra come Convergenza Uniforme

Dimostrazione. Essendo le $f_n \in \mathbf{C^0}$ per iptesi, è possibie applicare la Proposizione 3.11 (Continuità e Continuità per Successioni) e passare il limite fuori dal segno di integrale. Cio è consentito solo perché l'operatore I è stato dimostrato Lineare in Proposizione 19.38. □

Corollario 19.40
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \textbf{ Converge Uniformemente a } F \text{ su } [a, b] \text{ ed inoltre } f_n \in \mathbf{C^0}\big([a, b]\,; \mathbb{R}\big)$$

allora

$$\lim_{N\to+\infty} \int_a^b \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

Nota. Esprimendo in altro modo lo stesso concetto

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

(sotto opportune ipotesi)

Dimostrazione. Immediata da Corollario 19.39 per Definizione 18.4 (Serie). □

Esercizio 19.41
Verificare che la limitatezza del dominio delle funzion f_n è essenziale nel Corollario 19.39 e dunque anche nella Proposizione 19.38.
Considerare ad esempio la successione di funzioni $f_n : \,[0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ date da $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n^2]}$.

Soluzione. La necessità di limitatezza del dominio è intimamente legata all'uso degli integrali. La convergenza su intervalli illimitati presenta sostanziali differenze. ■

Esercizio 19.42
Esibire un esempio di una successione di funzioni $f_n \in \mathbf{C^0}\big([0,+\infty[\,;\mathbb{R}\big)$ tali che per $n \to +\infty$ valgano

$$f_n \xrightarrow{\mathrm{u}} 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^{+\infty} f_n \to +\infty$$

Soluzione. Suggerimento: Modificare Esercizio 19.41. ■

Esercizio 19.43
Data per $n \geq 3$ la successione di funzioni

$$\begin{array}{rcl} f_n \;:\; [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} n^3 x & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2n^2 - n^3 x & \text{se } x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases} \end{array}$$

Determinare se f_n ammette limite puntuale o uniforme su $[0,1]$ e calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$.
Com'è legato questo esercizio al Corollario 19.39?

Proposizione 19.44
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si consideri $\mathbf{C^0}\big([a,b]\,;\mathbb{R}\big)$ con la distanza $d_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_{[a,b]} |g(x) - f(x)|$. Definito l'Operatore

$$\begin{array}{rcl} P \;:\; \mathbf{C^0}\big([a,b]\,;\mathbb{R}\big) & \to & \mathbf{C^0}\big([a,b]\,;\mathbb{R}\big) \\ f & \mapsto & F \end{array}$$

dove

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si verifichi che P è **Lineare** e **Lipschitziana** con costante $L = b - a$.

Dimostrazione.

Nota. La dimostrazione è analoga a quella di Proposizione 19.38.

La linearità di P segue dalle regole d'integrazione studiate nel corso di Analisi 1 che garantiscono la linearità dell'integrale.

Scelte due funzioni $f, g \in \mathbf{C^0}\big([a,b]\,;\mathbb{R}\big)$, allora:

$$\begin{aligned} d\big(P(f), P(g)\big) &= \sup_{[a,b]} \big|P(g) - P(f)\big| \\ &= \sup_{[a,b]} \left| \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &= \sup_{[a,b]} \left| \int_a^x g(t) - f(t)\,\mathrm{d}t \right| \end{aligned}$$

Come si vede in Esercizio 22.8, è ora possibile minorare

$$\leq \sup_{[a,b]} \int_a^x |g(t) - f(t)|\ \mathrm{d}t$$

Ingrandendo l'intervallo d'integrazione, essendo l'argomento dell'integrale dentro il valore assoluto, è possibile minorare ulteriormente

$$\leq \int_a^b |g(t) - f(t)|\ \mathrm{d}t$$

Passando alla $d_{\mathbf{C^0}}$, cioè il sup di $|f(x) - g(x)|$, si ha la certezza di poter minorare nuovamente

$$\leq \int_a^b d_{\mathbf{C^0}}(f,g)\,\mathrm{d}t$$

Non avendo più dipendenza diretta da t, è possibile estrarre la distanza

$$\begin{aligned} &= d_{\mathbf{C^0}}(f,g) \int_a^b \mathrm{d}t \\ &= d_{\mathbf{C^0}}(f,g)\ (b-a) \end{aligned}$$

Dunque $L = b - a$ □

Proposizione 19.45
Nello **Spazio Metrico** $\Big(\mathbf{C^0}\big([0,1]\,;\mathbb{R}\big), d_{\mathbf{C^0}}\Big)$ con $d_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_{[0,1]} |g(x) - f(x)|$, si definisce l'Operatore

$$\begin{array}{cccc} D & : & \mathbf{C^1}\big([0,1]\,;\mathbb{R}\big) & \to & \mathbf{C^0}\big([0,1]\,;\mathbb{R}\big) \\ & & f & \mapsto & f' \end{array}$$

Si verifichi che D è **Lineare**, ma non è **Continua**.

Nota. Essendo f una funzione a valori in $\mathbb{R}^1$, si utilizza la notazione di derivata f' di Analisi 1.

Dimostrazione. La linearità di D segue dalle regole di derivazione studiate nel corso di Analisi 1 che garantiscono la linearità della derivata.

Per verificare la non continuità, sia $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$. Allora, rispetto alla metrica $d_{\mathbf{C^0}}$ della Convergenza Uniforme, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$, ma

$$\lim_{n\to+\infty} Df_n = \lim_{n\to+\infty} f_n' \quad \nexists$$

□

Esempio 19.46

Definizione 19.47

Proposizione 19.48
Sia $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\overline{f}, f : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
se $f_n \overset{u}{\to} f$ su B e $f_n \overset{u}{\to} \overline{f}$ su B allora $f = \overline{f}$

Dimostrazione. $f_n \overset{u}{\to} f$ e $f_n \overset{u}{\to} \overline{f}$, quindi è anche vero che $f_n \overset{p}{\to} f$ e $f_n \overset{p}{\to} \overline{f}$ ma il limite puntuale è unico poichè è il limite di una successione. Allora $f = \overline{f}$ □

Esempio 19.49
$f_n(x) = \frac{1}{n} sin(x)$ con $A \equiv \mathbb{R}$
Abbiamo gia calcolato che $f_n \overset{p}{\to} 0$ su A.
Sia ha anche convergenza uniforme :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \mathbb{R} \, |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} sin(x) \right|$$

Osservo che $|asin(x)| \leq |a|$ quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} sin(x) \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Allora $f_n \overset{u}{\to} f$ su A

Esempio 19.50
$f_n(x) = sin\left(\frac{1}{n}x\right)$ con $A \equiv \mathbb{R}$ ....
....

Esempio 19.51
$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ con $A \equiv \mathbb{R}$
....
....

ESEMPIO:: In dimensione finita non vi è differenza tra "chiuso e limitato" e "compatto", in dimensione infinita cambiamo molte cose. Prensiamo un insieme chiuso e limitato ma non compatto. In $\mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R})$ con $d_{\mathbf{C^0}}(f,g) = \sup_{[0,1]} |g(x) - f(x)|$, prendiamo l'insieme

$$C = \overline{B(0,1)} = \left\{ f \in \mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R}) : |f(x)| \leq 1, \forall x \in [0,1] \right\}$$

1 C è limitato: ha diametro finito.

2 C è chiuso: contiene tutti i sui punti di accumualazione

Se c'è una successione $f_n \overset{u}{\to} f$ su $[0,1]$ allora voglio mostrare che $f \in C$
Se $f_n \overset{u}{\to} f$ su $[0,1]$ allora $f_n \overset{p}{\to} f$ su $[0,1]$. Sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in [0,1]$ vale che $-1 \leq f_n(x) \leq 1$.
Mandando n al limite si ha che $-1 \leq f_(x) \leq 1$.
Inolte f è continua perché limite uniforme di una successione di funzioni continue allora $f \in C$ poiché è una funzione continua compresa tra -1 e 1

3 C non è compatto, cioè esiste almeno una successione dalla quale non è possibie estrarre una sottosuccessione convergente nello stesso spazio.

Se ad esempio $f_n(x) = x^n$
so che $f_n \overset{\text{p}}{\to} f$ su $[0,1]$ e $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in \{1\} \end{cases}$
Tutta la successione di funzioni f_n converge puntualmente a f quindi se estraggo una sottosuccessione comunque venga scelta questa sottosuccessione converge ancora a f puntualmente. Ma la f non è continua mentre il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua allora nessuna sottosuccessione ammette limite uniforme.

Proposizione 19.52
convergono le derivare allora convergono le funzioni
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si consideri una successione di funzioni $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R})$
2. $\exists x_0 \in [a,b] : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = l \in \mathbb{R}$
3. $\exists g \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}) : f_n' \overset{\text{u}}{\to} g$ su $[a,b]$

Allora

1. $\exists f \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R})$
2. $f_n \overset{\text{u}}{\to} f$ su $[a,b]$
3. $f'(x) = g(x)\ \forall x \in [a,b]$

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t$$

per $n \to \infty$

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Quindi le f_n convergono puntualmente alla funzione $f(x)$, per la convergenza uniforme calcolo:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \lim_{n\to+\infty} (|f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} \left|f_n'(t) - g(t)\right|\,\mathrm{d}t \right|) \le$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left[|f_n(x_0) - f(x_0)| + |b-a| \sup_{[a,b]} \left|f_n'(x) - g(x)\right| \right] =$$

Questo perché per ipotesi $f_n' = g$ e il limite fa 0. Allora $f_n \overset{\text{u}}{\to} f$ su $[a,b]$
Inoltre si sa che $f_n \in \mathbf{C^1}$ allora $f_n' \in \mathbf{C^0}$ allora il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua allora g è una funzione continua.
La f è l'integrale di una funzione continua allora la f è derivabile con derivata continua quindi $f' = g$ $\square$

Osservazione 19.53
Necessaria l'ipotesi $f_n(x_0) \to l$.......

Corollario 19.54
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si consideri una successione di funzioni $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R})$
2. $\exists x_0 \in [a,b] : \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) = L \in \mathbb{R}$
3. $\exists g \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}) : \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n' \overset{\text{u}}{\to} g$ su $[a,b]$

Allora

1. $\exists f \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R})$
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \overset{\text{u}}{\to} f$ su $[a,b]$
3. $f'(x) = g(x)\ \forall x \in [a,b]$

Osservazione 19.55
In altre parole questa proposizione afferma che sotto opportune ipotesi

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

Definizione 19.56
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni con $f_n : A \to \mathbb{R}$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente su $A \rightleftharpoons \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{A} |f_n(x)| < +\infty$(è convergente)

Osservazione 19.57
la $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{A} |f_n(x)|$ è una serie numerica

Proposizione 19.58
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni con $f_n : A \to \mathbb{R}$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente su $A \implies \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su A

Dimostrazione. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente su A

$\implies \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x)| < +\infty$

$\implies \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n| < \epsilon$

$\implies \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sup\limits_{x\in A} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |f_n| < \epsilon$

$\implies \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sup\limits_{x\in A} \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right| < \epsilon$

$\implies \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su A. $\square$

Osservazione 19.59
Per le serie:
Convergenza Totale $\implies$ Convergenza Uniforme $\implies$ Convergenza Puntuale.

19.5 Convergenza Quadratica

Proposizione 19.60
La definizione di $d_2(f, g)$ come *distanza* è dimostrata in Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)

Proposizione 19.61

20 Serie di Funzioni Particolari

Questa sezione è dedicata ad alcune tecniche di approssimazione basate su serie di funzioni particolari In generale, un'approssimazione si riconduce ad una formula del tipo

$$[\text{quantità da calcolare}] = [\text{quantità approssimante}] + \textit{errore}$$

La qualità dell'approssimazione è descritta dal senso in cui l'errore è piccolo.

20.1 Serie di Potenze

Esercizio 20.1

Definizione 20.2
Siano $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione con $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$.
Si dice serie di potenze centrata in $z_0 \rightleftharpoons \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Osservazione 20.3
è ovvio che in $z = z_0$ si ha convergenza....???? (dire a zero)

Osservazione 20.4
Per semplicità verrà considerato il caso $z_0 = 0$ ESEMPIO:: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n = e^x$
ESEMPIO:: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$

Proposizione 20.5
Siano $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione in $\mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}$.
La serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge in w (cioè $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ converge) quandi abbiamo la convergenza nella sfera aperta di centro l'origine e raggio $|w|$
Allora $\forall r$ con $0 < r < |w|$, la serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge totalmente in $B(0, r)$

Dimostrazione. TIKZPICTURE:::::
devo dimostrare che $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{B(0,r)} |a_n z^n| < +\infty$.
È facile vedere che $a_n z^n = a_n w^n \left(\frac{z}{w}\right)^n$.
Quindi passando al modulo e poi al sup si ottiene.

$$\sup_{B(0,r)} |a_n z^n| = \sup_{B(0,r)} |a_n w^n| \left|\frac{z}{w}\right|^n \leq$$

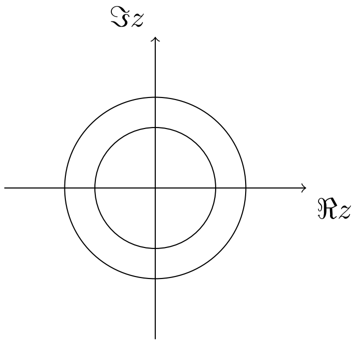
Siccome $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ converge quindi il suo termine generale tende a 0.

$$\leq \sup_{B(0,r)} \left|\frac{z}{w}\right|^n \leq \left(\frac{r}{|w|}\right)^n$$

per ipotesi $r < |w|$ e questo è il termine generale di una serie geometrica convergente.
Ne segue che $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{B(0,r)} |a_n z^n|$ è maggiorato da $\left(\frac{r}{|w|}\right)^n$ e quindi la serie converge totalmente. ☐

Osservazione 20.6
Una volta che abbiamo la convergenza totale abbiamo anche quella uniforme.

Proposizione 20.7
la non convergenza in un punto implica la non convergenza fuori dal cerchio
Sia $a_n : n \in \mathbb{N}$ una successione a valori in $\mathbb{C}$
La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ non converge in w
Allora $\forall z \in \mathbb{C}$ con $|z| > |w|$ la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty}$ non converge in z



Dimostrazione.
Se per assurdo la serie converge in $z \implies$ per il teorema precedente avremmo convergenza in ogni sfera con raggio minore di $\left|\frac{1}{z}\right|$. e quindi anche in w questo nega l'ipotesi.ASSURDO. □

Osservazione 20.8
Come è fatto l'insieme su cui si ha convergenza??
segue da queste due ultime proposizioni che se $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una successione in $\mathbb{C}$ allora l'insieme $\left\{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n converge\right\}$ è un cerchio.
Sulla circonferenza non ci soffermaiamo a capire cosa accade poiché tutto può accadere.

Definizione 20.9
Raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \eqqcolon \rho = \sup\left\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n convergesuB(0,r)\right\}$

Osservazione 20.10
Il raggio di convergenza di una serie di potenze può essere 0, un numero reale positivo o $+\infty$.

Osservazione 20.11
una definizione come $\rho = \inf\left\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n nonconvergesuB(0,r)\right\}$ non sta in piedi poiché questo insieme potrebbe essere vuoto, mentre quello sopra non è mai vuoto, poerché $r = 0$ c'è sempre poiché in 0 si ha sempre convergenza. Ilsecondo potrebbe essere vuoto perché ci sono serie che convergono su tuttoil piano complesso e quindi non si avrebbe nessun r fuori da quale non sia ha convergenza.

Proposizione 20.12
CRITERIO DELLA RADICE.
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, sia $l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Se questo limite esiste, allora il raggio di convergenza è $\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } l = +\infty \\ \frac{1}{l} & \text{se } l \in]0, +\infty[\\ +\infty & \text{se } l = 0 \end{cases}$

Proposizione 20.13
CRITERIO DEL RAPPORTO.
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, sia $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Se questo limite esiste, allora il raggio di convergenza è $\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } l = +\infty \\ \frac{1}{l} & \text{se } l \in]0,+\infty[\\ +\infty & \text{se } l = 0 \end{cases}$ ESEMPIO::$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$

$a_n = \frac{1}{n!} ... \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \overset{n\to+\infty}{\to} 0 \implies \rho = +\infty$

ESEMPIO::$sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ quindi $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ ... & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
...
...
...
ESEMPIO::$sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ quindi $a_n = \begin{cases} ... & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
...
...
...
ESEMPIO:: e^{iy} con $y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(iy)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}(iy)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(iy)^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(y)^{2n} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(y)^{2n+1} = cos(y) + isin(y)$$

1. $i^{2n} = \left(i^2\right)^n = (-1)^n$
2. $i^{2n+1} = i\left(i^2\right)^n = i(-1)^n$

ESEMPIO:: $e^{i\pi} + 1 = cos(\pi) + i \cdot sin(\pi) = 0$
ESEMPIO:: $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ con $\rho = 1$ ESEMPIO:: Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$
QUI GRAFICO ....
....
Questa serieconverge esclusivamente per $|x| < 1$, mentre la funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$, $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$
In $\mathbb{C}$, lafunzione $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ è la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$ che ha raggio di convergenza $\rho = 1$.
Infatti, $f(z)$ è singolare sia in $z = i$ sia in $z = -i$.
ALTRO GRAFICO::::::::::::::::
....

20.2 Serie di Taylor

ESEMPIO:: $ln(1+z)$. Calcolare la Serie di Taylor.

$$D\left[ln(1+z)\right] = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$$

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$$

Lemma 20.14
Sia $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione a valori in $\mathbb{C}$. Le serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza

Dimostrazione. Omessa □

Definizione 20.15
Sia $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$. La funzione f si dice analitica su $]-r, r[\rightleftharpoons f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-r, r[$ per opportuni $a_n \in \mathbb{R}$

Osservazione 20.16
In altre parole chiamiamo analitica una funzione che può essere scritta come somma di una serie di potenze convergente su $]-r, r[$
ESEMPIO:: $x \to e^x$ è analitica su $\mathbb{R}$
ESEMPIO:: $x \to \frac{1}{1+x^2}$ è analitica su $]-1, 1[$

Proposizione 20.17
Se f è analitica su $]-r; r[$ per $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0 \implies f \in \mathbf{C^0}(]-r, r[\,; \mathbb{R})$

Dimostrazione. f è analitica allora posso scriverla come $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cioè la funzione è limite di una serie, se la serie converge totalmente allora converge uniformemente. Il limite uniforme di funzioni continue(in questo caso polinomi) è una funzione continua. cioè la f è continua. □

Proposizione 20.18
PROP+PROOF
Sia $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ e f analitica su $]-r, r[\rightleftharpoons f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \implies$ ho convergenza totale $\implies$ ho convergenza uniforme di funzioni continue

$$\implies f \in \mathbf{C^0}(]-r, r[\,; \mathbb{R}), \quad a_0 = f(0)$$

La serie delle derivate $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ converge totalmente su $]-r, r[$ cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \overset{\text{u}}{\to} g$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} fn(0) \to f(0), f_n \in ????????????$$

Allora la serie delle derivate converge alla derivata della serie

$$\implies \in \mathbf{C^1}(]-r, r[\,;\mathbb{R}), \quad a_1 = f'(0)$$

Questo ragionmento può essere ripetuto:

$$\implies \forall k \in \mathbb{N}, \quad f \in \mathbf{C^k}(]-r, +r[), \quad a_k = k!f^{(k)}(0)$$

e analogamente

$$f \in \mathbf{C}^\infty(]-r, r[\,;\mathbb{R}), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

Osservazione 20.19
Qui abbiamo detto se f è analitica $\implies \ldots$, vorrei fare un qualche tipo di viceversa per poter capire se f è analitica o no.

Proposizione 20.20
Sia $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f \in \mathbf{C}^\infty(]-r, r[\,;\mathbb{R}) \\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \text{ converge totalmente su }]-r, r[\end{array}\right\} \implies f \text{ è analitica .....}$$

Per avere f analitica necessariamente come ipotesi deve esserci $f \in \mathbf{C}^\infty$ e f che si può scrivere come sviluppo in serie di Taylor,dalla proposizione precedente. Questo basta? NO

ESEMPIO:: $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$

1. $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ converge totalmente su $\mathbb{R}$
3. $f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$

1. Vediamo se è $\mathbf{C^0}$, quindi calcolo $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0) \implies f \in \mathbf{C^0}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
   Ora calcoliamo la derivata fuori dallo zero, ne facciamo il limite per $x \to 0$ da destra e da sinitra e vediamo cosa succede.
   Se $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^3}}$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} = 0 \implies f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R};\mathbb{R})$
   ....
   ancora una derivata.......
   ....
   Continuando a derivare avremmo sempre un rapporto di polinomi che moltiplica un esponenziale, e l'esponenziale vince sempre. quindi fa 0. itero il ragionamento......
   ....

2. In (1) abbiamo visto che tutte le derivate nello zero si annullavano, cioè
   $$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$
   è la serie identicamente nulla che banalmente converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$

3. Anche osservandoil grafico è chiaro che la f non è la funzione identicamente nulla cioè è diversa dal suo sviluppo in serie
   $$f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

Il Problema nasce dall'$o(x^n)$ che scriviamo alla fine dello sviluppo n-esimo di questa funzione, perché l'intorno in cui si ha $o(x^n)$ diventa sempre più piccolo. GRAFICO...
GRAFICO...
Mandando l'ordine n all'infinito, l'intervallo su cui si ha l'o piccolo tende a diventare un punto (lo zero). Quindi abbiamo l'ugualianza tra la funzione e il suo sviluppo solo nell'origine.????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
Completiamo le ipotesi con la prossima proposizione:

Proposizione 20.21
Sia $f :]-r,r[\to \mathbb{R}$
$$\left.\begin{array}{c} f \in \mathbf{C}^\infty(]-r,r[\,;\mathbb{R}) \\ \exists H,K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \sup\limits_{]-r,r[} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq HK^n \end{array}\right\} \implies f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

Osservazione 20.22
L'ipotesi centrale .... qui non c'è

Osservazione 20.23
Sia $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (z,w)^n$ una serie di potenze in due variabili.
Quando abbiamo due variabili, non si può parlare di raggio di convergenza. Questa serie è una serie geometrica che converge sse $|zw| < 1$. è difficile parlare di raggio di convergenza perché essendo $z, w \in \mathbb{C}$, se per una variabile servono due dimensioni per due variabili servono quattro dimensioni , e anche se non riusciamo a fare il disegno è evidente che l'insieme su cui la serie converge non è un cerchio(sfera).

Esempio 20.24 (Esempi di Sviluppi in serie di Taylor) $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{(2n+1)}$$

$$sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{(2n+1)}$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{(2n)}$$

$$cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{(2n)}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$arctan(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{(2n+1)}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^2 n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} = \begin{cases} \text{converge sse } \lambda > 1 \\ \text{diverge sse } \lambda \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \text{converge sse } |q| < 1, S = \frac{1}{1-x} \\ \text{diverge sse } |q| > 1 \text{ o } q = 1 \\ \nexists \text{ sse } x = -1 \end{cases}$$

Esercizio 20.25
Determinare le derivate delle funzioni

- $x \to \sin x$
- $x \to \cos x$
- $x \to e^x$

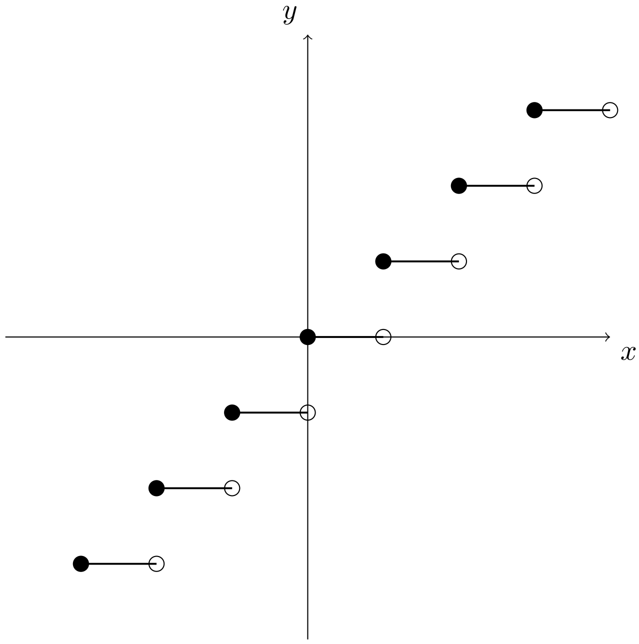
utilizzando Esempio 20.24 (Esempi di Sviluppi in serie di Taylor), il Lemma 20.14 ed il Corollario 19.54.

20.3 Serie di Fourier

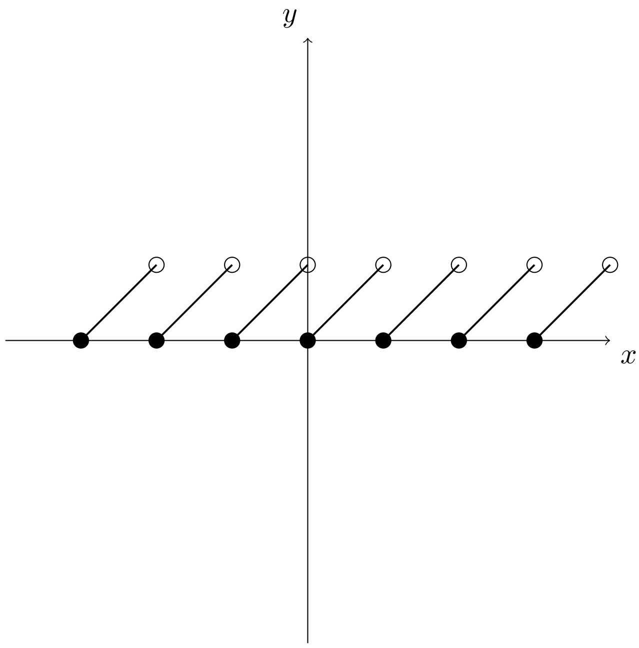
Definizione 20.26
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $T > 0$, f è T-periodica $\rightleftharpoons \forall x \in A \begin{cases} x + T \in A \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

ESEMPIO:: $\lfloor x \rfloor = \text{ parte intera } = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1 \quad \lfloor -e \rfloor = -3$$



è 1-periodica. ESEMPIO:: $mant(x) =$ mantissa di x $= x - \lfloor x \rfloor$



è 1-periodica.

Osservazione 20.27
La funzione costante è T-periodica $\forall T > 0$, ma non ha un periodo minimo, per questo motivo non la consideriamo.

Osservazione 20.28
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ T-periodica. Allora possiamo definire $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ che sia 2π-periodica data da:

$$x \to f\left(\frac{T}{2\pi}x\right), \quad \overline{A} = \frac{2\pi}{T}A$$

Proposizione 20.29
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $T > 0$
f è T-periodica $\implies \forall n \in \mathbb{N}$, f è nT-periodica.

Proposizione 20.30
Sia $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R} \implies \exists! \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.: $\begin{cases} \hat{f} 2\pi - periodica \\ \hat{f}_{|[0,2\pi]} = f \end{cases}$

Dimostrazione. $\forall x \in \mathbb{R}. \exists! \hat{x} \in [0, 2\pi[$ t.c.: $x = 2\pi \cdot k + \hat{x}$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $k = [??????]$

$$\hat{f}(x) = f(\hat{x})$$

□

cioè se noi estendiamo una funzione definita su $[0, 2\pi[$ a tutto $\mathbb{R}$ otteniamo una funzione unica e periodica.

Osservazione 20.31
Con i polinomi di Taylor ....
....
....
....
....
....

Definizione 20.32
Dati $2n + 1$ numeri reali $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ si dice polinomio trigonometrico di coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ la funzione:

$$\begin{aligned} p : [-\pi, \pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\to \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx)) \end{aligned}$$

Osservazione 20.33
Essendo un'approssimazione, si deve aggiungere l'errore. Come è fatto?. Per far uscire conti giusti e comodi andrebbe usata la distanza quadratica , ma questo prevede una lunga parte introduttiva, noi allora lo stimiamo con la distanza infinita.

Definizione 20.34
Date due successioni di numeri reali $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,$\{b_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, si defininisce serie trigonometrica di coefficienti $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,$\{b_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ la serie

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} : [-\pi, \pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\to \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx)) \end{aligned}$$

LEMMA::
Se $h, k \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti uguaglianze:

$* \int_{-\pi}^{\pi} cos(hx)cos(kx) = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ \pi & 0 \neq h = k \\ 2\pi & 0 = h = k \end{cases}$

$* \int_{-\pi}^{\pi} cos(hx)sin(kx) = 0$

$* \int_{-\pi}^{\pi} sin(hx)sin(kx) = \begin{cases} 0 & h \neq k \text{ oppure } h = k = 0 \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$

ESERCIZIO:: IL POLINOMIO DI FOURIER FORNISCE LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE NEL SENSO DELLA DISTANZA QUADRATICA.
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, quale è la funzione a lei più vicina nel senso della distanza quadratica?
Fisso $N \in \mathbb{N}$ e prendo il polinomio trigonometrico di grado N

$$p_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, il problema è quello di minimizzare $d_2(f, p_n)$ quindi un problema di minimo. Stiamo cercando i coefficienti del polinomio trigonometrico quindi studiamo una funzione $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - p_n(x)]^2 \, dx}$.
Essendo la funzione radice quadrata monotona crescente ne studiamo solo il radicando:

$$\varphi(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right]^2 dx$$

Osservazione 20.35
con $f \in \mathbf{C^1}$:

$$F(\alpha, \beta, x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) \, dt$$
$$\partial_\alpha F(\alpha, \beta, x) = -f(x, \alpha) \, dt$$
$$\partial_\beta F(\alpha, \beta, x) = f(x, \beta) \, dt$$
$$\nabla_x F(\alpha, \beta, x) = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla_x f(x, t) \, dt$$

Qudindi applicando al nostro caso otteniamo

$$\partial_{a_0} \varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{a_0} \left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right]^2 \right) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} 2 \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_1 cos(x) \, dx + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} a_N cos(Nx) \, dx +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_1 sin(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} b_N sin(Nx)\,\mathrm{d}x -$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

L'integrale di una sinusoide su un multiplo intero del periodo è 0 quindi

$$= \pi a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{a_0 a_0} = \pi \quad \partial^2_{a_0 a_n} = 0 \quad \partial^2_{a_0 b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \ldots, N$$

$$\partial_{a_k}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{a_k}\left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2cos(kx)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 cos(kx)\,\mathrm{d}x} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_1 cos(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} 2a_k cos(kx) cos(kx)\,\mathrm{d}x \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_N cos(Nx) cos(kx)\,\mathrm{d}x} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_1 sin(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_k sin(kx) cos(kx)\,\mathrm{d}x} \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_N sin(Nx) cos(kx)\,\mathrm{d}x} -$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x =$$

E anche applicando il lemma

$$= 2\pi\left[a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x\right]$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{a_k a_0} = \pi \quad \partial^2_{a_k a_n} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 2\pi & n = k \end{cases} \quad \partial^2_{a_k b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \ldots, N$$

$$\partial_{b_k}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{b_k}\left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2sin(kx)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 sin(kx)\,\mathrm{d}x} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_1 cos(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_k cos(kx) sin(kx)\,\mathrm{d}x} \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_N cos(Nx) sin(kx)\,\mathrm{d}x} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_1 sin(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} 2b_k sin(kx) sin(kx)\,\mathrm{d}x \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_N sin(Nx) sin(kx)\,\mathrm{d}x} -$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x =$$

E anche applicando il lemma

$$= 2\pi \left[b_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x \right]$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{b_k a_0} = \pi \quad \partial^2_{b_k a_n} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 2\pi & n = k \end{cases} \quad \partial^2_{b_k b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \ldots, N$$

Si verifica la condizione $\nabla\varphi = 0$ con

* $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$
* $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x$
* $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x$

La matrice Hessiana di φ risulta

$$H_\varphi = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 2\pi \end{bmatrix}$$

è una matrice diagonale quindi si leggono direttamente tutti gli autovalori che sono strettamente positivi quindi la forma quadratica è definita positiva ed il punto in questione è un punto di minimo assoluto.

Definizione 20.36
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, i coefficienti di Fourier di f sono (ovviamente f deve essere tale da ammetterli finiti):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

La serie di Fourier di f è

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

Proposizione 20.37
Sia $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la somma della serie trigono metrica definita dai coefficienti $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{a_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ e la serie trigonometrica converge uniformemente allora F è una funzione continua e

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

ESEMPIO+DIMOSTRAZIONE:::
sia $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$. Allora:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx)\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n cos(nx)\right)\mathrm{d}x$$

Poiché si ha convergenza uniforme si può portare l'integrale dentro la sommatoria.

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2} + \cancel{\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n cos(nx)\,\mathrm{d}x} + \cancel{\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_n cos(nx)\,\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{a_0}{2}(\pi - (-\pi)) = a_0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}cos(kx)\,\mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx)cos(kx)\right)\mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(nx)cos(kx)\right)\mathrm{d}x}\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{k-1} a_n cos(nx)cos(kx)\right)\mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos(kx)cos(kx)\,\mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n cos(nx)cos(kx)\right)\mathrm{d}x}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi a_k = a_k$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}sin(kx)\,\mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx)sin(kx)\right)\mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(nx)sin(kx)\right)\mathrm{d}x}\right] =$$

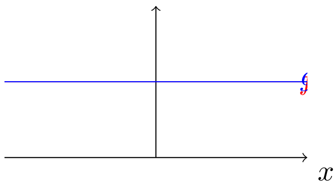
$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{k-1} a_n cos(nx)sin(kx)\right)\mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos(kx)sin(kx)\,\mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n cos(nx)sin(kx)\right)\mathrm{d}x}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi b_k = b_k$$

Osservazione 20.38
Se $d_2(f, \text{polinomio di Fourier})$ è minima $\implies$ il polinomio di Fourier è costruito con i coefficienti di Fourier di f.

Osservazione 20.39
Se f è somma di una serie di funzioni $\implies$ i coefficienti della serie sono i coefficienti di Fourier.

Osservazione 20.40
Funzioni diverse possono avere gli stessi coefficienti di Fourier, cioè $\exists f, g$ con $f \neq g$ ma f e g hanno gli stessi coefficienti di Fourier. ESEMPIO::



SISTEMARE,

Osservazione 20.41
I coefficienti di Fourier non possono identificare univocamente puntualmente una funzione.

Punto Di Vista Geometrico

In R^2 Ci sono 2 vettori $\hat{i}, \hat{j}$ della base, se $\underline{v} \in \mathbb{R}^2 \implies \underline{v} = v_1 \cdot \hat{i} + v_2 \cdot \hat{j}$ con v_1, v_2 componenti di $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$\underline{v} \cdot \hat{i} = v_1 \cdot \hat{i} \cdot \hat{i} + v_2 \cdot \hat{j} \cdot \hat{i} = v_1$$

$$\underline{v} \cdot \hat{j} = v_1 \cdot \hat{i} \cdot \hat{j} + v_2 \cdot \hat{j} \cdot \hat{j} = v_2$$

Questo vale perché $\hat{i}, \hat{j}$ è una base ortonormale. In R^3 Ci sono 3 vettori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ della base, se $\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \implies \underline{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$ con v_1, v_2, v_3 componenti di $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$v_1 = \underline{v} \cdot \hat{i} \quad v_2 = \underline{v} \cdot \hat{j} \quad v_3 = \underline{v} \cdot \hat{k}$$

In R^n Ci sono n vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ della base, se $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \implies \underline{v} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \ldots + v_n \cdot e_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot e_k$ con $v_1, v_2, \ldots, v_n$ componenti di $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$v_k = \underline{v} \cdot e_k$$

Con le Serie di Fourier su esegue la stessa operazione sullo spazi $\mathbf{C^0}([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$. Come elementi di base si ha un insieme di funzioni:

1. $c_0 : x \to 1$
2. $c_1 : x \to cos(x)$
3. $c_2 : x \to cos(2x)$
4. $\ldots$
5. $c_n : x \to cos(nx)$
6. $s_1 : x \to sin(x)$

7. $s_2 : x \to sin(2x)$

8. ...

9. $s_n : x \to sin(nx)$

Si possono osservare due cose:

1. Sono tutte funzioni linearmente indipendenti, poiché l'unica combinazione lineare di questi elementi che da l'elemento nullo è quella a coefficenti tutti nulli.

Definizione 20.42
Il prodotto scalare in $\mathbf{C^0} \rightleftharpoons \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, \mathrm{d}x$ Altre simbologie usate sono: $f \bullet g$, $(f|g)$

Osservazione 20.43
linearità

$$\langle (\alpha \cdot f + \beta \cdot g), h \rangle = \int_{-\pi}^{pi} (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) \cdot h(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\pi}^{pi} [\alpha \cdot f(x) \cdot h(x) + \beta \cdot g(x) \cdot h(x)]\, \mathrm{d}x =$$

$$= \alpha \int_{-\pi}^{pi} \cdot f(x) \cdot h(x)\, \mathrm{d}x + \beta \int_{-\pi}^{pi} \cdot g(x) \cdot h(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$\alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

Ripetiamolo stesso ragionamento applicato in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, e $\mathbb{R}^n$ per ricavare le componenti, possiamo fare questo perché abbiamo una base e abbiamo definito un prodotto scalare.
Se $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) \implies$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dxs = \frac{1}{\pi} \langle f, c_0 \rangle$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \langle f, c_k \rangle$$

$$b_k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \langle f, s_k \rangle$$

Quindi come prima le componenti di un vettore si ottengono moltiplicando(prodotto scalare) il vettore per gli elementi della base.
PER IL LEMMA:

$$\langle c_h, c_k \rangle = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ 2\pi & 0 = h = k \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$$

$$\langle c_h, s_k \rangle = 0$$

$$\langle s_h, s_k \rangle = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$$

Il prodotto scalare di elementi diversi è nullo quindi la base è ortogonale, ma non è ortonormale in quanto il prodotto scalare tra due elementi diversi della base non è unitario.(ecco perché gli $\frac{1}{\pi}$) e $\frac{a_0}{2}$)

In generale in geometria non è difficile normalizzare una base, è sufficiente dividere tutti gli elementi per la loro norma. In questo caso decidiamo di non applicare questo ragionamento poiché la norma vale $\sqrt{\pi}$ e se normalizziamo dobbiamo aggiungere questo termini ......
Il prodotto scalare in $\mathbf{C^0}$ è molto legato alla d_2 infatti:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx}$$

Continuano le analogie:
In $\mathbb{R}^2$ ....
In $\mathbb{R}^3$ ....
.....
......
......
.....
Passando in dimensione infinita, abbiamo una funzione f (come vettore $\underline{v}$) nello spazio, e fare il polinomio di Fourier vuole dire proiettare la funzione f in uno spazio fatto dai primi $2n+1$ elementi della base che è uno spazio di dimensione finita.

Esempio:::: Non ogni funzione ammette coefficienti di Fourier finiti. La funzione

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

non ammette coefficienti di Fourier finiti.
Esempio::: Una funzione può ammettere tutti i coefficienti di Fourier finiti ed una serie di Fourier convergente, ma ad un limite diverso da f.La funzione.

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ha coefficienti di Fourier

$$a_k = 0 \quad \forall k, \qquad \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ pari} \end{cases}$$

e serie di Fourier

$$F_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{sin(2h+1)x}{2h+1}$$

questa serie converge puntualmente in 0 ma $F_f(0) \neq f(0)$

ESEMPIO:: Due funzioni diverse possono avere gli stessi coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : [-\pi, \pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \pi & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Osservazione 20.44
Sia f una funzione pari $\implies bn = 0 \forall n = 1, 2, \dots, +\infty$

Osservazione 20.45
Sia f una funzione dispari $\implies an = 0 \forall n = 0, 1, , \dots, +\infty$

Osservazione 20.46
Siano

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$$

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (\alpha_n cos(nx) + \beta_n sin(nx))$$

Allora

$$F(x) = (f + \varphi)(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (A_n cos(nx) + B_n sin(nx))$$

con $A_n = a_n + \alpha_n$. $B_n = b_n + \beta_n$. cioè i coefficienti di Fourier dipendono linearmente dalla funzione.
Esempio::: $B_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) sin(3x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + \varphi(x)) sin(3x) \, \mathrm{d}x =$
$\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(3x) \, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) sin(3x) \, \mathrm{d}x \right] = b_3 + \beta_3$
Sia $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \liminf_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n cos(nx))$ allora $F = 4f = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (A_n cos(nx) + B_n cos(nx))$
con $A_n = 4a_n$, $B_n = 4b_n$
ESEMPIO Esempio:::$B_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) sin(3x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4f(x) sin(3x) \, \mathrm{d}x = 4b_3$

Definizione 20.47 (Funzione Continua a Tratti)
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Allora f è **continua a tratti** se esiste un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali che:

1. In ogni punto di $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ f è continua
2. $i = 1, 2, \dots, n$ esistono finiti entrambi i limiti:

$$\lim_{x \to x_i^-} f(x) \qquad \lim_{x \to x_i^+} f(x)$$

Osservazione 20.48
Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ e data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, se x_0 è punto interno ad A, è comoda la notazione

$$f(x-) = \lim_{\xi \to x^-} f(\xi) \quad f(x+) = \lim_{\xi \to x^+} f(\xi)$$

Ovviamente se f è continua in x allora $f(x-) = f(x) = f(x+)$ ESEMPIII:::
GRAFICO::::
GRAFICO::::
....
....
....
....

Proposizione 20.49
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, f è continua a tratti $\implies$ esistono finiti tutti i coefficienti di Fourier di f

Proposizione 20.50
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,
-f è continua a tratti
-$\forall \overline{x} \in [-\pi, \pi]$, esistono finiti:

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} = \frac{f(x) - f(\overline{x}-)}{x - \overline{x}}$$

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} = \frac{f(x) - f(\overline{x}+)}{x - \overline{x}}$$

Allora:
La serie di Fourier di f converge puntualmente in $\overline{x}$ e $F_f(\overline{x}) = \frac{f(\overline{x}-)-\overline{x}+}{2}$ (che è il punto medio del salto.)

Osservazione 20.51
NIENTE CUSPIDI E NIENTE TANGENZE VERTICALI.

Corollario 20.52
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,
f è continua a tratti.
Sia $\overline{x} \in [-\pi, \pi]$ un punto in cui f è derivabile. Allora la serie di Fourier F_f di f converge in $\overline{x}$ e $F_f(\overline{x}) = f(\overline{x})$

Proposizione 20.53
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.Se:

- $f \in \mathbf{C^0}([-\pi, \pi]\,; \mathbb{R})$
- $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in [-\pi, \pi]$ t.c.:
  - f è derivabile in x
  - f' continua in x
- $\forall i = 1, 2, \dots, n$ e $\forall x \in [-\pi, \pi]$ esistono finiti

$$\lim_{x \to x_i^-} \frac{f(x) - f(x_i-)}{x - x_i} \qquad \lim_{x \to x_i^+} \frac{f(x) - f(x_i+)}{x - x_i}$$

Allora
La serie di Fourier F_f di f converge a f uniformemente su $[-\pi, \pi]$

Corollario 20.54
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, e $f \in \mathbf{C^1}([-\pi, \pi]\,; \mathbb{R})$.
Allora la serie di Fourier di F_f di f converge uniformemente a f su $[-\pi, \pi]$.

Capitolo 5

Equazioni Differenziali

21 Preliminari

Equazione è un uguaglianza in cui c'è almeno una incognita.
Equazione **Funzionale** è un'equazione le cui incognite sono funzioni.

> ***Nota.*** In un equazione funzionale si cerca l'uguaglianza di: insieme di arrivo, insieme di partenza, corrispondenza.

Equazione **Differenziale** è un particolare tipo di equazione (funzionale) che stabilisce una relazione tra la funzione incognita e le sue derivate.

Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria)
Si dice **Equazione Differenziale Ordinaria** (*Ordinary Differential Equation, ODE*) **di ordine** n nella funzione incognita $x \in \mathbb{R}^k$ un espressione del tipo:

$$f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \tag{21.1.1}$$

> ***Nota.*** La dipendenza delle x dalla t non è indicata esplicitamente, ma si potrebbe scrivere $x(t)$, rigorosamente nella stessa variabile t per tutte le $x^{(i)}$.

Nella Eq. (21.1.1):

- $A \subseteq \mathbb{R}^{1+(1+n)k}$
- $t \in I$ con I intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$
- $f : A \to \mathbb{R}^m$

Dimensionalmente, si può osservare che m e k caratterizzano il problema e son dunque libere. La dimensione di partenza $1 + (1 + n)k$ del problema è obbligata e dovuta alla somma di:

- $1 = \dim(t)$
- $(1 + n)k$
  - $(1 + n)$ il numero totale delle funzioni: n derivate ed x stessa
  - k la dimensione dell'insieme **di arrivo** di ogni funzione incognita $x^{(i)}$

> ***Nota.*** Alternativamente si può indicare f come $f : \boldsymbol{I} \times A \to \mathbb{R}^m$ a patto di considerare $A \subseteq \mathbb{R}^{(1+n)k}$

Soluzione di questa equazione differenziale è una qualunque funzione $x : I \to \mathbb{R}^k$ (in quanto la x è funzione di $t \in I$) definita sull'intervallo I, derivabile n volte in I (e dunque continua in I) e tale che $\forall t \in I$

$$(t, x, x', \dots, x^{(n)}) \in A$$

$$f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

Soluzione massimale di un equazione differenziale ordinaria è una soluzione $x_m : I_m \to \mathbb{R}^k$ tale che nessuna soluzione possa essere definita in un intervallo I con $I_m \subsetneq I$. Cioè è la soluzione definita sull'intervallo maggiore possibile.

Nota. Dalla definizione segue che $x(t) \in \mathring{A}$, in quanto se non fosse in $\mathring{A}$ sarebbe di frontiera, ma un punto di frontiera non può essere derivabile.

Nota. Un'equazione differenziale ammette, in generale, infinite soluzioni, come verificato in Esempio 21.2

Nota. La soluzione di un'equazione differenziale può, analiticamente, essere definita su un intervallo $J \supset I$ (I intervallo di definizione della funz. differenziale f). Non ha però senso considerare il suo comportamento al di fuori di I, in quanto non ha valore dal punto di vista del sistema. Per questo motivo J sarà sempre considerato $J \subseteq I$

Nota. dalla Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria) segue che l'insieme di definizione della soluzione di un'equazione differenziale può essere solo un intervallo

Esempio 21.2
Un'equazione differenziale ammette in generale infinite soluzioni. Ad esempio, $x' = 1$ è risolta da $x(t) = t + \alpha$ per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$

Esercizio 21.3
La soluzione di un'equazione differenziale ordinaria non può avere 3 asintoti.

Soluzione. La soluzione x è funzione continua. In quanto continua non può avere più di 2 asintoti verticali e in quanto funzione non può avere più di 2 asintoti orizzontali. ■

Definizione 21.4 (Equazione Differenziale Ordinaria in Forma Normale)
Un'equazione differenziale è in **Forma Normale** se e solo se si presenta nella forma

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

Cioè se la derivata di ordine più alto è isolata al primo membro.

Osservazione 21.5
Lo studio di un'equazione differenziale ordinaria in forma non normale inizia generalmente con l'utilizzo del Teorema 10.10 (della Funzione Implicita) insieme ai teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie in forma normale

Nota. Nel seguito saranno considerate **solo** Equazioni Differenziali Ordinarie in Forma Normale.

Proposizione 21.6
ogni equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine n è equivalente a una equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine 1, cioè in cui compaiono solamente derivate prime.

Dimostrazione. Data l'equazione

$$x^{(n)} = g(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

sia y il vettore $y = \begin{bmatrix} x & x' & x'' & \cdots & x^{(n-1)} \end{bmatrix}$. Abbiamo ora che le componenti del vettore sono

$$y_1 = x \qquad y_2 = x' \qquad y_3 = x'' \qquad \dots \qquad y_n = x^{(n-1)}$$

ed al contempo

$$y_1' = x' = y_2 \qquad y_2' = x'' = y_3 \qquad y_3' = x''' = y_4 \qquad \cdots \qquad y_{n-1}' = x^{(n-1)} = y_n$$

Cioè, differenziando l'*i-esimo* elemento (funzione) del vettore y, mi "sposto" all'elemento (funzione) $i+1$ di y. A questo punto tutti gli elementi di y sono equazioni differenziali del primo ordine.
Quindi l'equazione può essere scritta come il seguente sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & & \\ y_n' & = & g(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

□

Esempio 21.7
Posto $n = 2$, si ha $x'' = f(t, x, x')$. Come nella dimostrazione della Proposizione 21.6, si pongono $X' = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$
Da cui $X' = f(t, X)$

Definizione 21.8 (Problema di Cauchy del Primo Ordine)
Si dice Problema di Cauchy del Primo Ordine il problema di determinare una soluzione di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, soddisfacente ad una condizione iniziale.

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dove $f : I \times A \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $t_0 \in \mathring{I}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$.
Soluzione di un problema di Cauchy è una funzione $x : J \to \mathbb{R}^n$, definita in un intervallo J contenente t_0 nella sua parte interna, quindi $t_0 \in J \subseteq I$.
La funzione x è soluzione dell'equazione differenziale $x' = f(t, x)$ ed è tale che:

1. $x(t_0) = x_0$
2. $x(J) \subseteq A$
3. x derivabile (in quanto soluzione equazione differenziale)

Quindi il problema di Cauchy aggiunge un vincolo ad un'equazione differenziale, così da isolare una singola soluzione.

Nota. Si considera un intervallo perché l'idea è di studiare l'andamento nel tempo e sarebbe difficile far previsioni con "buchi" di tempo

Nota. La condizione $x(t_0) = x_0$ viene spesso definita condizione iniziale, malgrado la Definizione 21.8 (Problema di Cauchy del Primo Ordine) indichi che $t_0 \in \mathring{I}$, dunque a rigore non dovrebbe essere sulla frontiera di I. Questo è dovuto al fatto che, spesso, t_0 è proprio all'inizio dell'intervallo in cui si cerca la soluzione dell'equazione.
Comunque i risultati esposti continuano a valere con piccole modifiche alle dimostrazioni.

Definizione 21.9 (Problema di Cauchy di Ordine n)
Si dice problema di Cauchy di ordine n il seguente problema:
Determinare una soluzione di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n soddisfacente a n condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = \alpha_0 \\ x'(t_0) = \alpha_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Nota. Le condizioni iniziali devono essere assegnate tutte nello steso istante.

Esempio 21.10
il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ammette, tra le altre, anche le seguenti soluzioni, tecnicamente distinte tra loro

$$\begin{array}{rcccl} f_1 & : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & e^t \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} f_2 & : & [-2,10] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & e^t \end{array}$$

La soluzione massimale è

$$\begin{array}{rcccl} f_M & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & e^t \end{array}$$

con intervallo di partenza $\mathbb{R}$, avente evidentemente diametro maggiore possibile.

Proposizione 21.11
Ogni problema di Cauchy di ordine n è equivalente ad un problema di Cauchy del primo ordine

Dimostrazione. Dalla Proposizione 21.6 □

Proposizione 21.12
Ogni problema di Cauchy del primo ordine con secondo membro continuo

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

è equivalente ad un'equazione integrale del tipo

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, x(\tau)\big) \Big) \,\mathrm{d}\tau \tag{21.12.1}$$

Dimostrazione. Integrando ambo i membri della prima equazione del problema di ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} (x')\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))\,\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))\,\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))\,\mathrm{d}\tau$$

□

Definizione 21.13 (Equazione di Volterra)
La Eq. (21.12.1) viene denominata **equazione integrale di Volterra**.

Nota. Questa equazione ha senso anche per alcune funzioni f non non continue, ma solo misurabili nel primo argomento. Ne consegue che nei Teoremi di esistenza ed unicità (locali/globali) l'ipotesi "f continua" può essere sostituita da "f continua a tratti in $t, \forall x$, continua in x e limitata".

Esempio 21.14 (Un Problema di Cauchy senza soluzione)
Sia

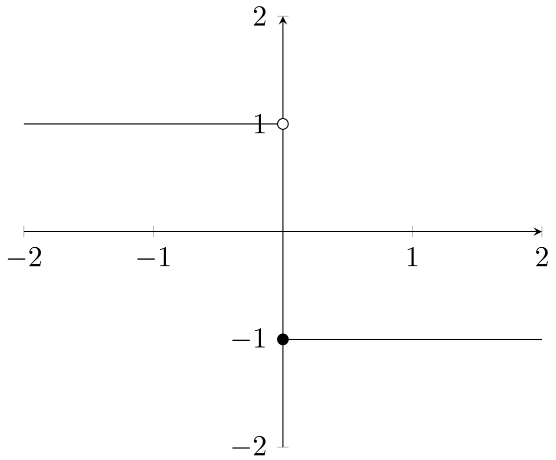
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} +1 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Non ammette soluzioni.

Soluzione.



La f è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma non è possibile trovare una funzione di primo grado, derivabile su tutto $\mathbb{R}$, la cui derivata prima assuma quei valori. Infatti la

$$\begin{cases} x & \text{se } t < 0 \\ -x & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

non è derivabile in $t = 0$, perché le derivate destra e sinistra assumono valori diversi. ■

Esempio 21.15 (Un Problema di Cauchy con infinite soluzioni)
Sia

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ammette le infinite soluzioni

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - a^2) & \text{se } t \in \left]-\infty, a\right] \\ 0 & \text{se } t \in [a, b] \\ \frac{1}{4}(t - b^2) & \text{se } t \in \left[b, +\infty\right[\end{cases}$$

dove $-\infty \leq a \leq 0 \leq b \leq +\infty$

Soluzione. Vedere Esempio 22.6 (Il Baffo/Pennello di Peano) con $x_0 = 0$ e $t_0 = 0$ ■

Osservazione 21.16
Negli esempi precedenti è stata sfruttata la mancanza di regolarità nella dipendenza di f da x.

Viceversa, nella nota alla Definizione 21.13 (Equazione di Volterra), si era notato come la dipendenza di f da t sia molto meno critica.

Esercizio 21.17
Sia $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti Problemi di Cauchy, al variare di t_0 (si supponga $t_0 \neq 0, 1$):

$$\begin{cases} x' = s(t) \\ x(t_0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' + x = s(t) \\ x(t_0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = s(t) \cdot s(1-t) \\ x(t_0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' - x = s(t) \cdot s(1-t) \\ x(t_0) = 1 \end{cases}$$

Esempio 21.18 (Un Problema non di Cauchy)
Il seguente è un **Problema ai Valori al Contorno**.

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases} \tag{21.18.1}$$

Questo problema ammette le infinite soluzioni $x(t) = \alpha \cdot \sin t$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sostituendo le condizioni $x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 1$ a quelle nella Eq. (21.18.1), si ottiene l'unica soluzione $x(t) = \sin t + \cos t$. Con $x(0) = x(\pi) = 1$ non ci sono soluzioni.

Osservazione 21.19 (Problema ben posto nel senso di Hadamard)
in generale un problema si dice **ben posto** o **ben posto nel senso di Hadamard** ogniqualvolta la soluzione:

1. esiste
2. è unica
3. dipende con continuità dai dati

22 Teoria Locale

Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana)
Una funzione $f : I \times A \to \mathbb{R}^n$, con I intervallo in $\mathbb{R}$ e A aperto in $\mathbb{R}^n$, si dice **Localmente lipschitziana** in $x \in A$ **uniformemente** rispetto a $t \in I$ se

$$\forall x_0 \in A, \exists r > 0 e L > 0 : \forall x_1, x_2 \in (B(x_0, r) \cap A), \forall t \in I$$

vale che

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq L \cdot \|x_2 - x_1\| \qquad o, ugualmente \qquad \frac{\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\|}{\|x_2 - x_1\|} \leq L$$

Una funzione è uniformemente lipschitziana (**unif. lips.**) in un'intervallo I se, in parole povere, è possibile individuare per ogni punto di I una sfera B di raggio r in cui la funzione è lipschitziana.

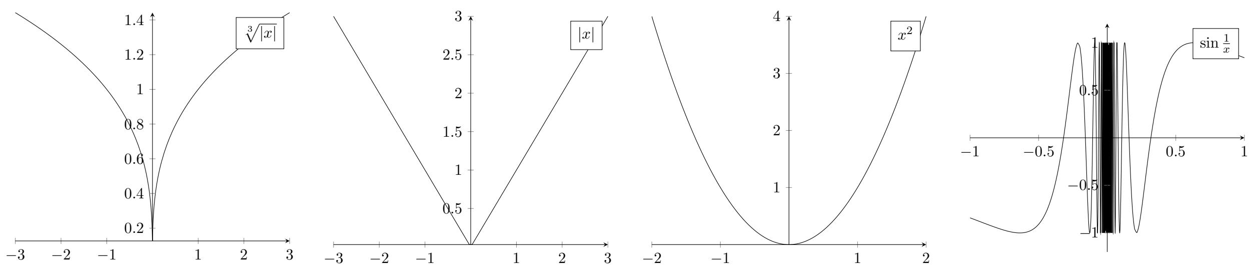
Nota. I termini *localmente* e *uniformemente* son giustificati dal fatto che:

- La località è data dalla limitazione di x_1, x_2 all'interno di $(B(x_0, r) \cap A)$
- L'uniformità è data da $\forall t \in I$

Quindi la f rimane lips. indipendentemente dalla variazione di t (quindi $\forall t \in I$), ma solo per $x_1, x_2 \in (B(x_0, r) \cap A)$ **non** $\forall x \in A$.

Nota. Se f **lips** su $A \implies f$ **loc. lips.** su A.
Concettualmente ci si porta nel caso della sfera B con r pari al raggio di $I \times A$ su cui è definita f

Esempio 22.2



(a) No Loc. lips. No lips.

(b) Sì loc. lips. Sì lips.

(c) Sì loc. lips. No lips.

(d) Sì loc. lips. No lips.

Esempio 22.3
La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ è **loc. lips.** su $\mathbb{R}$ ma non è **globalmente lips.** su $\mathbb{R}$. Vedasi Definizione 3.31 (Funzione Lipschitziana) e grafico della f in Esempio 22.2

Proposizione 22.4
Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Ogni funzione $f \in \mathbf{C^1}(I \times A; \mathbb{R}^n)$ è loc. lips. in $x \in A$ uniformemente rispetto a $t \in I$

Dimostrazione. Il prodotto cartesiano $I \times A$, essendo prodotto cartesiano di aperti in $\mathbb{R}^n$ con metrica euclidea (si suppone sia in uso questa metrica), è a sua volta un aperto. Questo risultato è dovuto alla definizione stessa del prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con metrica euclidea.
Chiamiamo ora $S = I \times A$ l'insieme di partenza della f. Grazie alla Proposizione 2.31 (Poligonale Congiungente due Punti) sappiamo che esiste una poligonale interamente contenuta in S congiungente

due qualunque punti dell'aperto S.
È ora possibile applicare il Teorema 8.51 (degli Accrescimenti Finiti) ad uno qualunque dei segmenti formanti la poligonale appena individuata. Vale quindi la

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{x \in S} \|Df(x)\| \, \|x_1 - x_0\|$$

che è direttamente comparabile alla Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana) della funzione in ciascuno dei segmenti della poligonale, da cui la tesi. □

22.1 Esistenza e Unicità

Proposizione 22.5 (Teorema di Peano)
Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $f : I \times A \in \mathbb{R}^n$ soddisfacente alle ipotesi:

1. $t_0 \in \mathring{I}, x_0 \in \mathring{A}$
2. $f \in \mathbf{C^0}(I \times A; R^n)$

inoltre $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$, per Definizione 21.8 (Problema di Cauchy del Primo Ordine).
Allora esiste un $\delta > 0$ tale che esiste soluzione $x : J \to A$ del problema di Cauchy con $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

> ***Nota.*** δ è un valore arbitrario che serve solo ad identificare l'intervallo J a cui appartiene t_0, non è dato modo per identificare quel δ

Inoltre:

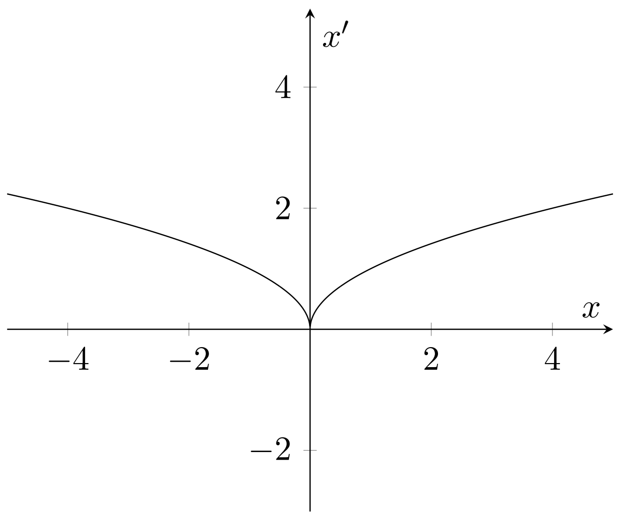
- $J \subseteq I$ da nota Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria), dunque $\varphi(J) \subseteq A$
- $\varphi(t_0) = x_0$
- φ derivabile e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

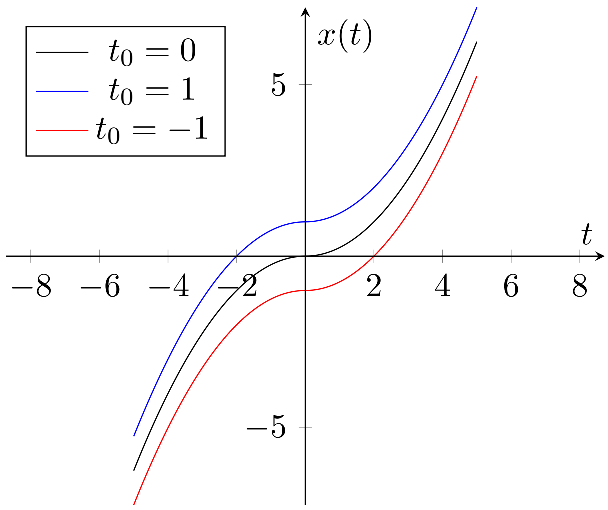
Dimostrazione. Non richiesta □

Esempio 22.6 (Il Baffo/Pennello di Peano)
Trovare le soluzioni del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Soluzione.





(a) Posto $x_0 = 0$

Nota. Con $t_0 = 0$ l'equazione non dipende da t, cioè il sistema è **Autonomo**. Vedere Definizione 24.1 (Equazione Autonoma) per le implicazioni nelle note.

Nota. Con $x_0 = 0$ si ha $x(t) = 0$, che è soluzione $\forall t$, si procede però nel cercare altre soluzioni.

f è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, dunque per Proposizione 22.5 (Teorema di Peano) esiste una soluzione del Problema. Essendo $x' = \sqrt{|x|}$ un'equazione a variabili separabili, si ottiene (considerando $x \geq 0$, quindi $|x| = x$):

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)}{\sqrt{x(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} 1\,\mathrm{d}\tau$$

$$2\left(\sqrt{x(t)} - \sqrt{x(t_0)}\right) + c_1 = t - t_0 + c_2$$

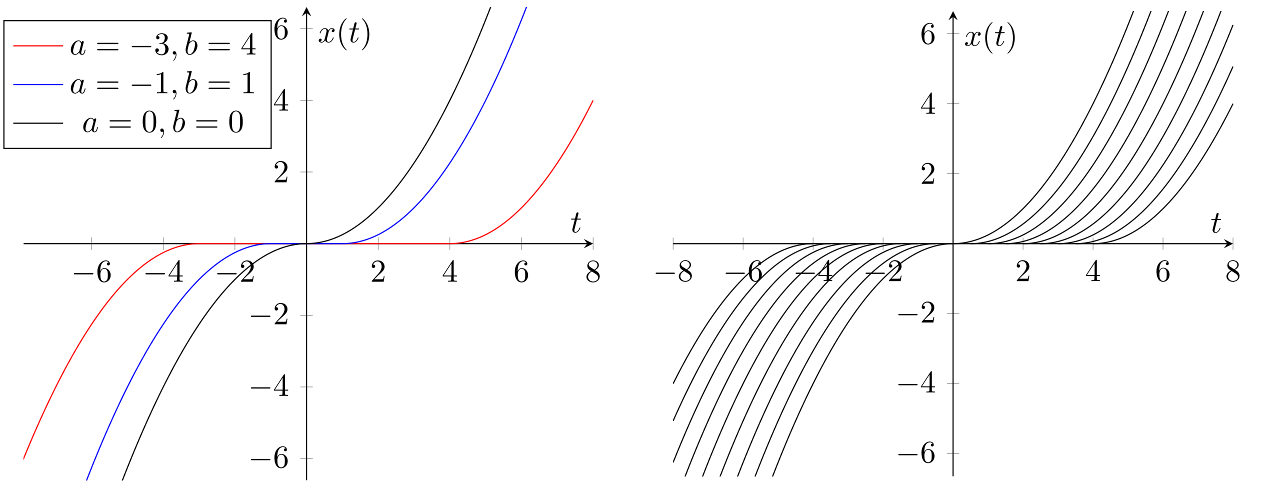
Riunendo c_1 e c_2 in un'unica costante b

$$\begin{aligned} 2\left(\sqrt{x(t)} - \sqrt{x(t_0)}\right) + b &= t - t_0 \\ 2\left(\sqrt{x(t)} - \sqrt{x(t_0)}\right) &= t - t_0 - b \\ x_a(t) &= \left(\sqrt{x_0} + \frac{1}{2}(t - t_0 - b)\right)^2 \\ x_a(t) &= x_0 + \frac{1}{4}(t - t_0 - b)^2 \end{aligned}$$

Aggiungendo anche la soluzione per $x < 0$ (con la costante a, stavolta), si ottiene

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{4}(t - t_0 - a)^2 & \text{se } t \in \,]-\infty, a] \\ x_0 & \text{se } t \in [a, b] \\ x_0 + \frac{1}{4}(t - t_0 - b)^2 & \text{se } t \in [b, +\infty[\end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato infinite soluzioni, ciò evidenzia come il teorema di Peano non garantisca affatto unicità.



(a) Differenti valori di a e b

(b) Il comportamento "a pennello" con molteplici a e b

Figura 22.3: Grafici tracciati con $x_0 = 0$ e $t_0 = 0$

■

Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte)
Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $f : I \times A \to \mathbb{R}^n$ soddisfacente le ipotesi:

1. $t_0 \in \mathring{I}$, $x_0 \in \mathring{A}$. Inoltre da Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria) e note successive: I intervallo e $I \subseteq \mathbb{R}^n$, inoltre $A \subseteq \mathbb{R}^n$
2. $f \in \mathbf{C^0}(I \times A; \mathbb{R}^n)$
3. f è localmente Lipschitziana in $x \in A$ uniformemente rispetto a $t \in I$

Nota. Le prime due ipotesi garantiscono l'esistenza, grazie al Proposizione 22.5 (Teorema di Peano). La terza ipotesi rende il teorema più restrittivo, ma permette anche di giungere ad una conclusione più forte (ed utile).

Nota. Per verificare l'ultima ipotesi si ricordino Proposizione 22.4 e se f **lips.** $\implies$ f **loc. lips.**

Allora ho i seguenti risultati:

1. **Esistenza**:
   da Proposizione 22.5 (Teorema di Peano) $\exists \delta > 0$, con cui si identifica un $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Inoltre $\exists\, \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ è soluzione con le proprietà date da Peano:
   - $J \subseteq I$ da nota Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria), dunque $\varphi(J) \subseteq A$
   - $\varphi(t_0) = x_0$
   - φ derivabile e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$
2. **Unicità**
   Se $\exists\, J_1, J_2$ intervalli con $J_1 \subseteq I, J_2 \subseteq I$ e $\exists\, \varphi_1 : J_1 \to \mathbb{R}^n, \varphi_2 : J_2 \to \mathbb{R}^n$ soluzioni con le seguenti proprietà

- $J_1 \subseteq I$, $J_2 \subseteq I$ da nota Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria), dunque $\varphi_1(J_1) \subseteq A$ e $\varphi_2(J_2) \subseteq A$

  Nota. Si può osservare che, sicuramente, $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$, poiché entrambi gli insiemi contengono almeno t_0 nella loro parte interna.

- $\varphi_1(t_0) = x_0$, $\varphi_2(t_0) = x_0$
- φ_1, φ_2 derivabili e $\left\langle \begin{array}{l} \varphi_1'(t) = f(t, \varphi_1(t))\, \forall t \in J_1 \\ \varphi_2'(t) = f(t, \varphi_2(t))\, \forall t \in J_2 \end{array} \right.$

  Allora $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \quad \forall t \in (J_1 \cap J_2)$
  Cioè, se esistono due soluzioni, allora esse coincidono ovunque siano entrambe definite.

3. **Dipendenza continua dai dati**
   Questa tesi verrà esposta successivamente in Teorema 22.13 (di Cauchy Locale - Seconda Parte)

Dimostrazione. (**Tesi 2**)

Nota. L'idea alla base della dimostrazione è che vogliamo riuscire a trasformare il problema di Cauchy in un problema di punto fisso mediante una funzione avente come parametro x stesso.

Da Definizione 21.13 (Equazione di Volterra) sappiamo che la prima equazione del problema in ipotesi corrisponde all'integrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, x(\tau)\big) \Big)\, \mathrm{d}\tau$$

Definiamo quindi T, funzione del tipo

$$\begin{array}{cccc} T & : & X & \to & X \\ & & \big(T(x)\big)(t) & \mapsto & x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x(\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau \end{array} \tag{22.7.1}$$

Abbiamo così ottenuto un problema di punto fisso ($x = T(x)$). Ora bisogna determinare l'insieme di partenza e l'insieme di arrivo in maniera utile per la dimostrazione. Per poter applicare il Teorema 4.6 (delle Contrazioni) serve che lo spazio di partenza e di arrivo corrispondano.
Prendiamo:

- $\delta_1 > 0$ tale che $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \subseteq I$
- $\rho > 0$ tale che $\overline{B(x_0, \rho)} \subseteq A$
- L costante di Lipshitz di f in $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \times \overline{B(x_0, \rho)}$. È possibile individuare L in quanto f loc. lips. per ipotesi in $I \times A$, e dunque **loc. lips. in sottointervalli/insiemi**

Sia ora

$$V = \sup \left\{ \|f(t, x)\| \,:\, t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]\,, x \in \overline{B(x_0, \rho)} \right\}$$

Nota. V è il maggiore tra i valori assunti dalla derivata prima $\big(x' = f(t, x)\big)$ di una qualsiasi delle soluzioni x contenute nella sfera $\overline{B(x_0, \rho)}$. È massimo di funzione continua (per ipotesi 2) in un compatto (per ipotesi 1, essendo in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e per Proposizione 2.34).

Definiamo dunque un generico $\delta > 0$

$$\delta < \min \left\{ \delta_1, \frac{\rho}{V}, \frac{1}{L} \right\} \tag{22.7.2}$$

Nota. δ è strettamente minore del min perché poi servirà a trovare una contrazione, dunque dovrò avere sicuramente $\delta L < 1$

- δ_1 è raggio di un generico intervallo incluso in I di partenza. δ deve essere minore di δ_1 in quanto non è possibile uscire dall'intervallo I
- $\frac{\rho}{V}$ è rapporto tra il raggio di $\overline{B(x_0,\rho)}$, sfera interamente contenuta in A, e V, valore massimo di f ridotta all'intervallo di cui sopra e alla sfera $\overline{B}$.
  Considerando il reciproco $\frac{V}{\rho}$, possiamo vederlo come una sorta di nuova costante di lips., riportata ad un intervallo più piccolo, non dipendente però da $\Delta f(x)$, ma dal valore di $f(x)$ stessa.
- $1/L = \frac{\|x_2-x_1\|}{\|f(t,x_2)-f(t,x_1)\|}$ dalla Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana), perché f loc. lips. per ipotesi. Dà un'idea di quanto vari la x rispetto alla variazione della $f(x)$

Questo δ, dunque, rappresenta, dal punto di vista concettuale, quale sia la più restrittiva (min) tra tutte le possibili variazioni della $f(x)$ rispetto alla x.
A questo punto, usando δ, definiamo lo spazio X, generato da tutte le funzioni continue sul nuovo intervallo a valori entro una sfera centrata in x_0 con lo stesso raggio di $\overline{B}$

$$X = \left\{g \in \mathbf{C^0}([t_0-\delta, t_0+\delta]\,;\mathbb{R}^n) : \forall t\ \|g(t)-x_0\| \le \rho\right\}$$

Nota. Si scelgono le funzioni continue ($\in \mathbf{C^0}$) perché serve x continua per rendere valida l'equivalenza della funzione di Volterra con il problema di Cauchy. Stando alla nota alla Definizione 21.13 (Equazione di Volterra) sarebbe possibile sceglierla non continua, ma non si considera il caso.

Possiamo passare al punto chiave della dimostrazione, verifichiamo le ipotesi del Teorema 4.6 (delle Contrazioni):

- (X, d) è **spazio metrico completo**
  (X, d_X) è spazio metrico completo se considerato con la distanza della convergenza uniforme $d_X = d_{\mathbf{C^0}}$ per il Corollario 19.36. □
- T è **definita** (è possibile calcolarla)
  L'abbiamo definita all'inizio dall'equazione di Volterra □
- T è $\boldsymbol{X \to X}$
  L'insieme di partenza è valido in quanto sottoinsieme dell'insieme su cui $f(t, xt)$ era definita.
  Per verificare che $y = T(x)$, bisogna verificare che $y \in \mathbf{C^0}([t_0-\delta, t_0+\delta]\,;\mathbb{R}^n)$ e che $y(t) \in \overline{B(x_0,\rho)}\ \ \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$

  Dimostrazione. $y \in \mathbf{C^0}$ nell'intervallo specificato per il Teorema Fodamentale del Calcolo Integrale.
  La seconda condizione si verifica prendendo la Eq. (22.7.1) e calcolando la norma di entrambi i termini

  $$\|y(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right\|$$

  posso ora minorare con il valore assoluto della norma dell'argomento (spiegazione in Esercizio 22.8)

  $$\le \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau))\|\, d\tau \right| \tag{22.7.3}$$

$\|f(\tau, x(\tau))\|$ è sicuramente minorato da V per definizione di quest'ultimo, dunque si ha integrale di costante

$$\leq V \cdot |t - t_0|$$

$|t - t_0| \leq \delta$ per definizione di δ

$$\leq V \cdot \delta$$

nel caso in cui $\min\left\{\delta_1, \frac{\rho}{V}, \frac{1}{L}\right\} = \frac{\rho}{V}$, allora minorato strettamente da ρ per definizione di δ, altrimenti sicuramente minore per min

$$< \rho$$

□

- T è **contrazione**
  Occorre verificare la Eq. (4.1.1)

  Dimostrazione. Per definizione della T e per la proprietà additiva degli integrali

  $$\big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_1)\big)(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, x_2(\tau)\big) - f\big(\tau, x_1(\tau)\big)\Big)\, \mathrm{d}\tau$$

  Dunque, passando alla norma di quanto calcolato sopra ed applicando la minorazione spiegata in Esercizio 22.8

  $$\left\|\big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_1)\big)(t)\right\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau, x_2(\tau)\big) - f\big(\tau, x_1(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| \tag{22.7.4}$$

  Per Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana) passo alle funzioni incognite x_i di f (che son le soluzioni dell'equazione differenziale), minorando

  $$\leq \left|\int_{t_0}^{t} L \cdot \|x_2(\tau) - x_1(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau\right|$$

  Dalla Osservazione 19.16, $\|f - g\|_{\mathbf{C^0}} = \sup_A |f - g| = d_{\mathbf{C^0}}(f, g)$

  $$\begin{aligned} &= \left|\int_{t_0}^{t} L \cdot d_X(x_2, x_1)\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &= L \cdot |t - t_0| \cdot d_X(x_2, x_1) \end{aligned} \tag{22.7.5}$$

  Quindi, concludendo, possiamo passare dal primo membro della Eq. (22.7.4) alla distanza d_X, semplicemente per definizione della distanza, cioè

  $$\left\|\big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_2)\big)(t)\right\| = d_X\big(T(x_2), T(x_1)\big)$$

  Minoriamo questa distanza con la forma appena trovata Eq. (22.7.5). Per quanto riguarda $|t - t_0|$, passiamo al sup di t nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, cioè δ stesso

  $$d_X\big(T(x_2), T(x_1)\big) \leq (\delta \cdot L) \cdot d_X(x_2, x_1)$$

  Essendo, per definizione, δ al più pari ad $\frac{1}{L} \implies \delta \cdot L < 1 \implies T$ è contrazione per Definizione 4.1 (Contrazione). □

È ora possibile applicare il Teorema 4.6 (delle Contrazioni) che garantisce l'**unicità** del punto fisso $x_* \in X$ per la $x = T(x)$, questo implica ovviamente che $T(x)$ abbia un'unica soluzione. Si ha dunque l'unicità della soluzione x del problema di Cauchy in ipotesi sull'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, al quale T è equivalente per definizione in quanto T è Definizione 21.13 (Equazione di Volterra).

Tornando ai J_1, J_2 della Tesi 2:

- Se $(J_1 \cap J_2) \subseteq [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, allora $x_1 = x_2$ in quanto esiste unico punto fisso, come dimostrato sopra.

- Se $(J_1 \cap J_2) \supset [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, allora poniamo

$$t_M = \sup \{t \in (J_1 \cap J_2) : \forall \tau \in [t_0, t], x_1(\tau) = x_2(\tau)\} \tag{22.7.6}$$

$$x_M = x_1(t_M) = x_2(t_M)$$

  Quindi t_M è l'*ultimo istante* in cui x_1 e x_2 coincidono.

  Essendo

  - $t_M \in \mathring{J}_1$, $t_M \in \mathring{J}_2 \implies t_M \in \mathring{I}$ da nota Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria)
  - $x_M \in \mathring{A}$ per nota Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria)

  ci ritroviamo nelle ipotesi di quanto appena dimostrato, solo che con dei nuovi t ed x. Possiamo dunque giungere alla conclusione che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_M) = x_M \end{cases}$$

  ammetta unica soluzione definita in un intorno di t_M del tipo $[t_M - \delta, \boldsymbol{t_M + \delta}]$, cioé x_1 e x_2 coincidono in un intorno di t_M. Il fatto che esista un'unica soluzione oltre t_M (vedere parte in grassetto dell'intorno sopra) contraddice la Eq. (22.7.6), perché non dovrebbe essere possibile trovare una soluzione in comune *oltre* t_M per come è definito. Ripetendo iterativamente questo procedimento si può semplificare la definizione di t_M a

$$t_M = \min \{\sup J_1, \sup J_2\}$$

  Ripetendo quanto fatto con il *primo istante* t_m in cui x_1 e x_2 coincidono, si ottiene

$$t_m = \max \{\inf J_1, \inf J_2\}$$

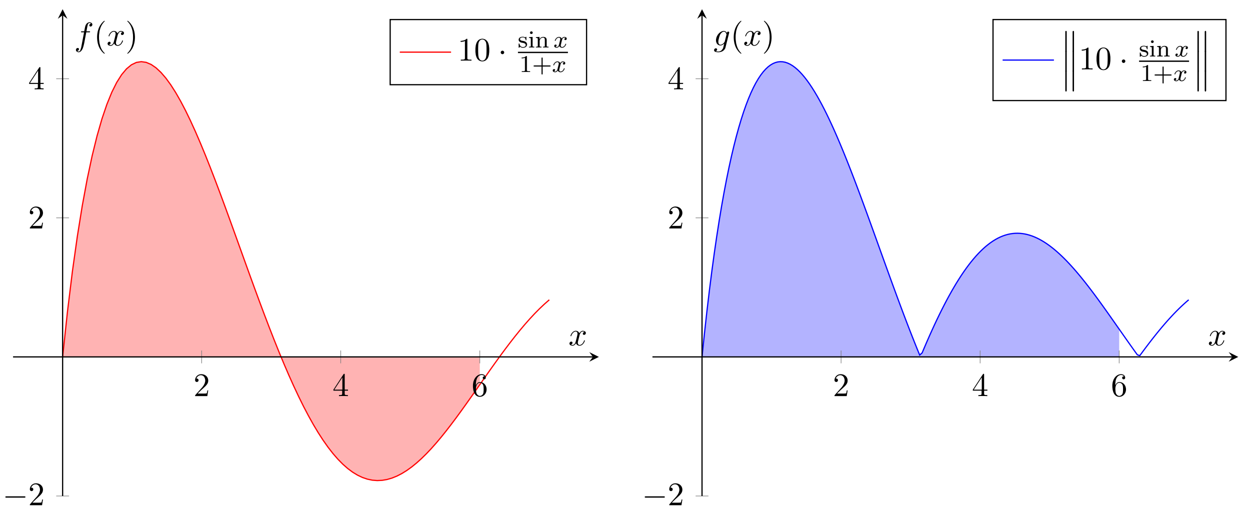
  Quindi, prendendo $[t_m, t_M]$, abbiamo identificato $J_1 \cap J_2$ stessa.

Dunque x_1 e x_2 coincidono in $J_1 \cap J_2$, indipendente dalla relazione tra intersezione e intervallo. □

Nota. La scelta di δ in Eq. (22.7.2) potrebbe essere migliorata utilizzando il Teorema 4.20 (dell'Iterata Contrazione) e scegliendo $\delta < \min \left\{\delta_1, \frac{\rho}{V}\right\}$, indipendentemente dalla costante di lips. della f

Esercizio 22.8
È necessario il modulo in Eq. (22.7.3)?

Soluzione. Si considerino, ad esempio, le seguenti due funzioni



I cui integrali (le aree sottese) assumono questi valori

$$f(x) = \left\| \int_0^6 10 \cdot \frac{\sin x}{1+x}\,\mathrm{d}x \right\| = 4,9413 \qquad g(x) = \left| \int_0^6 \left\| 10 \cdot \frac{\sin x}{1+x} \right\| \mathrm{d}x \right| = 11,935$$

Nella f, viene calcolata la norma del risultato dell'integrazione definita.
Nella g si ha invece la norma della funzione, cioè la parte "sotto l'asse x" della funzione viene ribaltata sopra l'asse dall'operatore norma, come si può vedere dal grafico. Questo implica che, sicuramente, $g \geq f$, in quanto $\int g$ è somma di soli infinitesimi positivi.

Infine, il valore assoluto nella Eq. (22.7.3) è necessario per evitare che, scambiando gli estremi d'integrazione, si ottenga un valore negativo, che non potrebbe mai essere risultato del primo integrale ■

Esercizio 22.9
Perchè il Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte) è chiamato Teorema di Cauchy **locale**?

Soluzione. È dovuto al fatto che il teorema fornisce informazioni solo in un intorno della condizione iniziale t_0, non è assicurata l'esistenza di un'unica funzione risolvente in un intervallo arbitrario. ■

Esercizio 22.10
Confrontare l'**unicità** della soluzione di un'equazione differenziale (Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte)) con l'**unicità** della funzione implicita (Teorema 10.10 (della Funzione Implicita))

22.2 Dipendenza Continua

Nelle applicazioni fisiche, il ruolo della condizione iniziale di un problema di Cauchy è quello del valore assunto da una determinata grandezza fisica, diciamo u_0, misurata al tempo $t = t_0$. Poiché la misura di una grandezza fisica comporta inevitabilmente un errore di rilevazione (per quanto piccolo), è importante caratterizzare quei problemi di Cauchy tali che a fronte di piccole discrepanze $u_0 \neq v_0$ producano soluzioni $(I, u)\,(J, v)$ che differiscano "poco" in $I \cap J$.

Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall)
Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \delta_0 \in [0, +\infty[\\ \ k,\, \delta : [a,b] \to \mathbb{R} \\ \bullet\ k(t) \geq 0,\ \delta(t) \geq 0 \text{ funzioni continue } \forall t \in [a,b] \end{array}\right\} \quad \text{cioè} \quad k,\, \delta \in \mathbf{C^0}([a,b]\,, \mathbb{R}^+)$$

con:

$$\delta(t) \leq \delta_0 + \int_a^t k(\tau)\delta(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Allora

$$\delta(t) \leq \delta_0 e^{\int_a^t k(\tau)\, \mathrm{d}\tau} \quad \forall t \in [a,b]$$

Questo lemma permette di limitare una funzione che soddisfa una disuguaglianza integrale con la soluzione della corrispondente equazione. Ci si porta da una stima implicita di δ (sotto il segno di integrale) ad una stima esplicita.

Dimostrazione. Dividiamo in due casi

- Se $\delta_0 > 0$
  Sia $\Delta(t) = \delta_0 + \int_a^t k(\tau)\delta(\tau)\, \mathrm{d}\tau$. Prendiamo ora il logaritmo di $\Delta(t)$, cioè $\ln\big(\Delta(t)\big)$, e deriviamolo con le regole classiche

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln\big(\Delta(t)\big) &= \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \\ &= \frac{\frac{d}{dt}\delta_0 + \frac{d}{dt}\int_a^t k(\tau)\delta(\tau)\, \mathrm{d}\tau}{\Delta(t)} \end{aligned}$$

  Il primo addendo è derivata di costante, il secondo corrisponde all'argomento dell'integrale per teorema fondamentale del calcolo integrale

$$= \frac{0 + k(t)\delta(t)}{\Delta(t)} = k(t)\frac{\delta(t)}{\Delta(t)}$$

  Essendo poi, per ipotesi, $\delta(t) \leq \Delta(t) \implies \frac{\delta(t)}{\Delta(t)} \leq 1$

$$\leq k(t)$$

  Integrando il primo e l'ultimo termine

$$\begin{aligned} \int_a^t \left(\frac{d}{d\tau} \ln\big(\Delta(\tau)\big)\right) \mathrm{d}\tau &\leq \int_a^t k(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ \ln\big(\Delta(t)\big) - \ln\big(\Delta(a)\big) &\leq \int_a^t k(\tau)\, \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

  da definizione di $\Delta(t)$, $\Delta(a) = \delta_0$

$$\ln\big(\Delta(t)\big) \leq \ln(\delta_0) + \int_a^t k(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

  Passando all'esponenziale

$$\begin{aligned} e^{\ln\left(\Delta(t)\right)} &\leq e^{\left(\ln(\delta_0) + \int_a^t k(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right)} \\ \Delta(t) &\leq e^{\ln(\delta_0)} \cdot e^{\int_a^t k(\tau)\, \mathrm{d}\tau} \\ \Delta(t) &\leq \delta_0 e^{\int_a^t k(\tau)\, \mathrm{d}\tau} \end{aligned}$$

  Da cui la tesi

- Se $\delta_0 = 0$
  Minoriamo, poiché $\delta_0 = 0$, con un $\epsilon > 0$

$$\delta(t) \leq 0 + \int_a^t k(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leq \epsilon + \int_a^t k(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \forall \epsilon > 0$$

  Essendo $\epsilon > 0$, mi trovo con una forma analoga al caso precedente, dunque

$$\delta(t) \leq \epsilon \cdot e^{\int_a^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \qquad \forall \epsilon > 0$$

  Dovendo essere $\delta(t) \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$, posso concludere che

$$\delta(t) \leq 0$$

  Ma, per ipotesi, $\delta(t) \geq 0 \implies \delta(t) = 0$

□

Esercizio 22.12
Verificare che la funzione Δ nella dimostrazione del Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall) è derivabile

Soluzione. È possibile derivare la Δ perché, da Esercizio 7.7, la somma di funzioni derivabili resta derivabile ed il secondo addendo è derivabile per Teorema 14.1 (Fondamentale del Calcolo Integrale) ■

Teorema 22.13 (di Cauchy Locale - Seconda Parte)
Si considerino i seguenti problemi di Cauchy con condizione iniziale individuata nello stesso istante:

$$(1)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} y' = g(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{22.13.1}$$

con $f, g : I \times A \to \mathbb{R}^n$ e soddisfacenti le ipotesi di Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte), cioè:

1. $t_0 \in \mathring{I}$, $x_0, y_0 \in \mathring{A}$. Inoltre da Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria) e note successive: I intervallo e $I \subseteq \mathbb{R}^n$, inoltre $A \subseteq \mathbb{R}^n$
2. $f, g \in \mathbf{C^0}(I \times A; \mathbb{R}^n)$
3. f, g sono localmente Lipschitziane in $x \in A$ uniformemente rispetto a $t \in I$

Allora esiste un $\delta > 0$ tale che sull'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ sono definite una soluzione φ di (1) ed una soluzione ψ di (2). Inoltre esiste $L > 0$ t.c. $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ vale:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta\, \|f - g\|_{\mathbf{C^0}})e^{L|t-t_0|}$$

dove $\|f - g\|_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_{I \times A} \|f(t,x) - g(t,x)\|$

> ***Nota.*** Questo significa che, con problemi diversi tra loro, se (x_0 e y_0), (f e g) sono vicine tra loro ("a coppie"), allora sono vicine anche le soluzioni, ma per t vicine. Pensando t come tempo, cioè una delle applicazioni più classiche, questo implica che non si possano fare previsioni a lungo termine con sistemi diversi.

Dimostrazione. Sia f che g soddisfano le ipotesi del Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte), quindi esistono due soluzioni:

- $\varphi : [t_0 - \delta_f, t_0 + \delta_f] \to \mathbb{R}$ del problema (1)
- $\psi : [t_0 - \delta_g, t_0 + \delta_g] \to \mathbb{R}$ del problema (2)

Sia dunque $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, da cui $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e, d'ora in poi, $t \in J$.
Gli insiemi $\varphi(J)$ e $\psi(J)$ sono compatti perché per Teorema 3.15 (Generale di Weierstrass), essendo J compatto. La loro unione è dunque un compatto, come da Esercizio 2.40.
Utilizzando Definizione 21.13 (Equazione di Volterra), passiamo alle equazioni integrali delle Eq. (22.13.1)

$$(1)\ \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\Big)\,\mathrm{d}\tau \qquad (2)\ \psi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\Big)\,\mathrm{d}\tau \tag{22.13.2}$$

Sottraiamo ora la (1) alla (2) (in norma)

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \psi(t)\| &= \left\| x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\Big)\,\mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t} \Big(g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\Big)\,\mathrm{d}\tau \right\| \\ &= \left\| x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\Big)\,\mathrm{d}\tau \right\| \end{aligned} \tag{22.13.3}$$

Minoriamo ora con la proprietà 3 da Definizione 1.8 (Norma)

$$\leq \|x_0 - y_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\Big)\,\mathrm{d}\tau \right\|$$

Minoriamo ulteriormente come da Esercizio 22.8

$$\leq \|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\right\|\,\mathrm{d}\tau \right|$$

Sommo e sottraggo nell'integrale la quantità $f\big(\tau, \psi(\tau)\big)$ (Si sarebbe potuto fare lo stesso con g)

$$\begin{aligned} &= \|x_0 - y_0\| + \\ &\quad \left| \int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) + f\big(\tau, \psi(\tau)\big) - f\big(\tau, \psi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\right\|\,\mathrm{d}\tau \right| \\ &\leq \|x_0 - y_0\| + \\ &\quad \left| \int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - f\big(\tau, \psi(\tau)\big)\right\|\,\mathrm{d}\tau \right| + \left| \int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau, \psi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\right\|\,\mathrm{d}\tau \right| \end{aligned}$$

Possiamo minorare l'argomento del secondo integrale con il $\sup\limits_{I \times A} \|f(t,x) - g(t,x)\|$, dunque può anche essere estratto in quanto sup è costante

$$\begin{aligned} &\leq \|x_0 - y_0\| + \\ &\quad \left| \int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - f\big(\tau, \psi(\tau)\big)\right\|\,\mathrm{d}\tau \right| + \left| \sup_{I \times A} \|f(t, \psi(\tau)) - g(t, \psi(\tau))\| \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau \right| \\ &= \|x_0 - y_0\| + \\ &\quad \left| \int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - f\big(\tau, \psi(\tau)\big)\right\|\,\mathrm{d}\tau \right| + \left| \sup_{I \times A} \|f(t, \psi(\tau)) - g(t, \psi(\tau))\| \, (t - t_0) \right| \end{aligned}$$

Essendo sicuramente $t - t_0 \leq \delta$ per definizione di quest'ultimo, minoriamo ulteriormente

$$\leq \|x_0 - y_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - f\big(\tau, \psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \left|\sup_{I\times A} \|f(t, \psi(\tau)) - g(t, \psi(\tau))\|\, \delta\right|$$

Ricordando la Osservazione 19.16, sappiamo che $\|f - g\|_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_{I\times A} \|f(t, x) - g(t, x)\|$, dunque passiamo alla distanza su $\mathbf{C^0}$ e togliamo il valore assoluto, in quanto tutti i valori in esso contenuti sono positivi per definizione

$$= \|x_0 - y_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - f\big(\tau, \psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}$$

Sia quindi L costante di Lipshitz di f su $J \times \big(\varphi(J) \cup \psi(J)\big)$, possiamo minorare con

$$\leq \|x_0 - y_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} L \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}$$

Riordinando

$$= \|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}} + \left|\int_{t_0}^{t} L \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau\right|$$

Applichiamo alla forma ottenuta il Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall). Per ipotesi del Lemma è necessario avere $t \in [a, b]$ con $a < b$. Nell'ultimo integrale rimasto abbiamo $a = t_0$, dunque imponiamo $t \geq t_0$ e procediamo.

Nota. Il procedimento è analogo nel caso opposto e verrà integrato sotto.

Applichamo le seguenti sostituzioni nella formula del Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall):

- $k(\tau) = L$
- $\delta(\tau) = \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\|$
- $\delta_0 = \|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}$ (tutti gli altri addendi)

Possiamo dunque minorare ulteriormente la formula precedente con

$$\begin{aligned} &\leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}) e^{\int_{t_0}^{t} L \,\mathrm{d}\tau} \\ &= (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}) e^{L(t - t_0)} \end{aligned}$$

Riprendendo il primo elemento del treno di disuguaglianze Eq. (22.13.3), si ottiene infine

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}) e^{L(t - t_0)}$$

Inseriamo ora il valore assoluto all'esponente per tener in considerazione anche il caso in cui $t \leq t_0$

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}) e^{L|t - t_0|}$$

$\square$

Nota. Con il Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte) ed il Teorema 22.13 (di Cauchy Locale - Seconda Parte) si verifica se un Problema di Cauchy rispetta la Osservazione 21.19 (Problema ben posto nel senso di Hadamard).

Esercizio 22.14
Esibire una dimostrazione dell'unicità della soluzione di un Problema di Cauchy alternativa al Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte) e basata sul Teorema 22.13 (di Cauchy Locale - Seconda Parte).

Esercizio 22.15
Enunciare il Teorema 22.13 (di Cauchy Locale - Seconda Parte) come risultato sulla continuità dell'**operatore di soluzione** di un Problema di Cauchy.

Esempio 22.16
Al variare di $p \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = p \end{cases}$$

ha soluzione $x_p(t) = p \cdot e^t$.

- Se $t \to T \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{p\to 0}\left(\lim_{t\to T}(p \cdot e^t)\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to T}\left(\lim_{p\to 0}(p \cdot e^t)\right) = 0$$
I risultati coincidono, quindi c'è continuità nel parametro.

- Se $T \to +\infty$:
$$\lim_{p\to 0}\left(\lim_{t\to +\infty}(p \cdot e^t)\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to +\infty}\left(\lim_{p\to 0}(p \cdot e^t)\right) = 0$$
I risultati son differenti, ma non solo, infatti stimando con parametri diversi mi troverei in questa situazione:
$$|x_{p_1}(t) - x_{p_2}(t)| = |p_1 - p_2|\, e^t \tag{22.16.1}$$
Cioè una distanza “esponenziale” tra le due soluzioni.

Nota. In questo esempio abbiamo $f(t, x) = x$, quindi $L = 1$, infatti L stessa non appare nella Eq. (22.16.1).

Esempio 22.17
Al variare di $p \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = p \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione $x_p(t) = p \cdot t$, cioè parametri p diversi danno rette con inclinazioni diverse.

- Se $t \to T \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{p\to 0}\left(\lim_{t\to T} x_p(t)\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to T}\left(\lim_{p\to 0} x_p(t)\right) = 0$$
I risultati coincidono, quindi c'è continuità nel parametro.

- Se $T \to +\infty$:
$$\lim_{p\to 0}\left(\lim_{t\to +\infty} x_p(t)\right) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to +\infty}\left(\lim_{p\to 0} x_p(t)\right) = 0$$
Essendo diversi, non c'è continuità.

Nota. Questo esempio evidenzia come la dipendenza continua sussista solo su intervalli finiti.

23 Teoria Globale

Esempio 23.1 (Un Problema di Cauchy senza soluzione globale)
Si trovi la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{23.1.1}$$

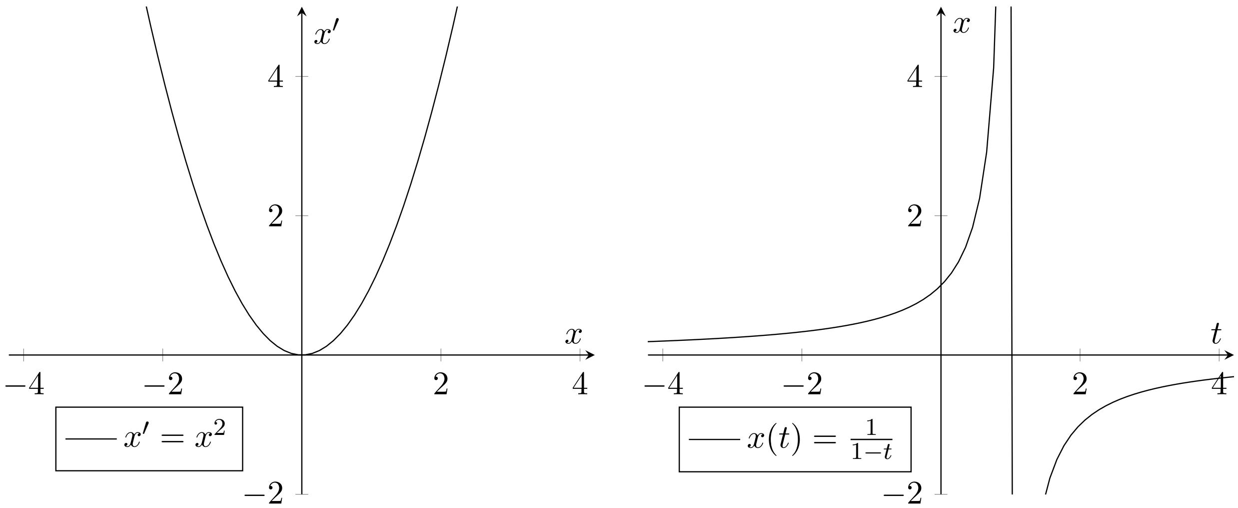
Essendo a variabili separabili, procediamo

$$\frac{dx}{dt} = x^2(t)$$
$$\frac{dx}{x^2(t)} = dt$$
$$\int_0^t \frac{dx}{x^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{d}\tau$$

Applicando al primo membro le normali regole d'integrazione delle funzioni composte otteniamo

$$-\frac{1}{x(t)} + 1 = t$$

Da cui si ricava $x(t) = \frac{1}{1-t}$, che è unica soluzione del Problema di Cauchy ed ha asintoto verticale in $t = 1$.



Per via dell'asintoto, nonostante la $x(t)$ abbia come dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, la soluzione del Problema di Cauchy così definito si ferma a $t = 1$. Ciò perché la condizione iniziale del Problema è $t = 0 \in \,]-\infty, 1]$ e non avrebbe dunque senso considerare la situazione altrove. In questo intervallo di validità potrò applicare localmente il Teorema di Cauchy, ma non è possibile applicarlo globalmente.

Nota. L'argomento di questo capitolo sarà quindi capire quando un modello sia valido globalmente.

Esempio 23.2 (Un Problema di Cauchy con soluzione globale)
Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sin(x^2) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{23.2.1}$$

ammette soluzione globale $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, pur non soddisfacendo alle ipotesi del Teorema 23.4 (di Cauchy Globale per Lipschitziane)

Esempio 23.3
Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{23.3.1}$$

ammette soluzione globale per $x \in [-1, 1]$, ma non per $x \in R \setminus [-1, 1]$

23.1 Il Caso Lipschitziano

Teorema 23.4 (di Cauchy Globale per Lipschitziane)
Data la funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se:

- $I \subset \mathbb{R}$ è **intervallo compatto**
- f è **continua** su $I \times \mathbb{R}^n$
- f è (globalmente) **Lipschitziana** in $x \in \mathbb{R}^n$ **uniformemente** rispetto a $t \in I$

Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{23.4.1}$$

ammette un'unica soluzione definita in tutto l'intervallo I

Dimostrazione. Analogamente a quanto fatto nel Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte), siano:

- $X = \mathbf{C^0}(I, \mathbb{R}^n)$
- T definita come la Eq. (22.7.1), cioè

$$\begin{array}{cccc} T & : & X & \to & X \\ & & \big(T(x)\big)(t) & \mapsto & x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x(\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau \end{array}$$

I punti fissi di T sono tutte e sole le soluzioni di Eq. (23.4.1). Grazie al Teorema 4.20 (dell'Iterata Contrazione), per dimostare l'esistenza di un unico punto fisso, basta dimostrare che un'iterata di T (Definizione 4.19 (Funzione Iterata)) è contrazione.
Nel dettaglio andremo a dimostrare per induzione la seguente forma:

$$\left\| \big(T^m(x_2)\big)(t) - \big(T^m(x_1)\big)(t) \right\| \leq \frac{\big(L \cdot |t - t_0|\big)^m}{m!} \cdot d_X(x_2, x_1)$$

Dove L è costante di Lipschitzianità di f

- $m = 1$: Come in dalla Eq. (22.7.5), sappiamo che

$$\left\| \big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_1)\big)(t) \right\| \leq \big(L \cdot |t - t_0|\big) \cdot d_X(x_2, x_1)$$

- $m > 1$: Con un procedimento analogo a quello usato per giungere alla Eq. (22.7.5), possiamo ottenere

  Nota. Le spiegazioni dei passaggi invariati possono essere viste dal Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte)

$$\left\|\big(T^{m+1}(x_2)\big)(t) - \big(T^{m+1}(x_1)\big)(t)\right\| =$$

Per Definizione 21.13 (Equazione di Volterra)

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f\Big(\tau,\ \big(T^m(x_2)\big)(\tau)\ \Big) - f\Big(\tau,\ \big(T^m(x_1)\big)(\tau)\ \Big)\right) \mathrm{d}\tau \right\| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\Big(\tau,\ \big(T^m(x_2)\big)(\tau)\ \Big) - f\Big(\tau,\ \big(T^m(x_1)\big)(\tau)\ \Big)\right\| \mathrm{d}\tau \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot \left\|\big(T^m(x_2)\big)(\tau) - \big(T^m(x_1)\big)(\tau)\right\| \mathrm{d}\tau \right|
\end{aligned}$$

Grazie alla Lips. di f, dalla Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana), $\left\|\big(T(x_2)\big)(\tau) - \big(T(x_1)\big)(\tau)\right\| \leq L \cdot d_X(x_2, x_1)$, dunque essendo T^m iterata di T, si moltiplica L per sé stesso m volte, da cui L^m.
In modo analogo (penso) si ottiene $\frac{|\tau - t_0|^m}{m!}$. Non lo so...

$$= \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot \frac{(L \cdot |\tau - t_0|)^m}{m!} \cdot d_X(x_2, x_1)\, \mathrm{d}\tau \right|$$

Riordinando i termini

$$= \left| \int_{t_0}^{t} \frac{L^{m+1}}{m!} \cdot d_X(x_2, x_1) \cdot |\tau - t_0|^m \ \mathrm{d}\tau \right|$$

Essendo però i primi due fattori costanti moltiplicative non legate a τ

$$\begin{aligned}
&= \frac{L^{m+1}}{m!} \cdot d_X(x_2, x_1) \cdot \left| \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0|^m \ \mathrm{d}\tau \right| \\
&= \frac{L^{m+1}}{m!} \cdot d_X(x_2, x_1) \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \left| \ \Big[|\tau - t_0|^{m+1} \Big]_{t_0}^{t} \ \right| \\
&= \frac{L^{m+1}}{m!} \cdot d_X(x_2, x_1) \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \left| \ |t - t_0|^{m+1} - |t_0 - t_0|^{m+1} \ \right| \\
&= \frac{L^{m+1}}{m!} \cdot d_X(x_2, x_1) \cdot \frac{1}{m+1} \cdot |t - t_0|^{m+1} \\
&= \frac{\big(L \cdot |t - t_0|\big)^{m+1}}{m!} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot d_X(x_2, x_1) \\
&= \frac{\big(L \cdot |t - t_0|\big)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot d_X(x_2, x_1)
\end{aligned}$$

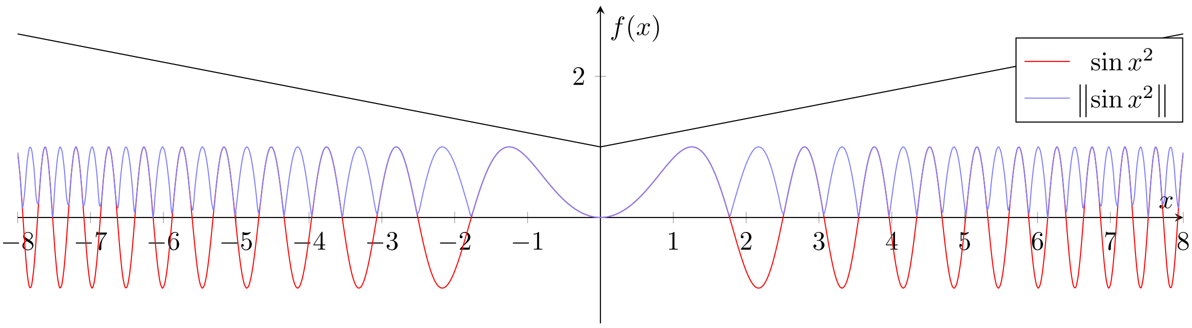
Avendo dimostrato che la minorazione vale per m e per $m + 1$, la dimostrazione per induzione è conclusa. □

23.2 Il Caso Sublineare

Definizione 23.5 (Funzione Sublineare)
Una funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con I intervallo in $\mathbb{R}$, si dice **sublineare** se esistono due costanti $A, B :\ \forall t \in I,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$\|f(t, x)\| \leq A + B\,\|x\|$$

Nota. In sostanza una funzione è sublineare se esiste una retta tale per cui il grafico della funzione è tutto nella regione di piano delimitata da questa retta, cioè il suo grafico "non si impenna".



Esempio 23.6
Le seguenti funzioni sono:

- $x \cdot sin(x)$: Sublineare
- $sin(x^2)$: Sublineare
- $\frac{\arctan x^{12}}{x}$: Sublineare
- $x^2 \cdot sin(x)$: Non sublineare
- x^2: Non sublineare
- e^x: Non sublineare

Esercizio 23.7
Dimostrare che se una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è **(globalmente) Lipschitziana**, allora è **sublineare**

Soluzione.

$$\begin{aligned} &\|f(x)\| = \\ =&\|f(0) + f(x) - f(0)\| \\ \leq&\|f(0)\| + \|f(x) - f(0)\| \end{aligned}$$

Per Definizione 3.31 (Funzione Lipschitziana) minoriamo

$$\leq \|f(0)\| + L\,\|x\|$$

Ponendo ora $A = \|f(0)\|$ e $B = L$, si ottiene

$$= A + B\,\|x\|$$

■

Esercizio 23.8
Esibire un esempio di Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana), ma non **sublineare**

Soluzione. $f(x) = x^2$ è loc. lips. ma non sublineare. ■

Teorema 23.9 (di Cauchy Globale per Sublineari)
Data la funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se

1. $I \subseteq \mathbb{R}$ è un **intervallo**
2. f è **continua** su $I \times \mathbb{R}^n$
3. f è **loc. lips.** in $x \in \mathbb{R}^n$ **uniformemente** rispetto a $t \in I$
4. f è **sublineare**

Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{23.9.1}$$

Ammette un'unica soluzione definita in tutto l'intervallo I

> ***Nota.*** Non è necessario dimostare l'unicità in quanto la soluzione sarà localmente unica in ogni intorno di un punto e quindi si può espandere ad ogni intorno di ogni punto della soluzione.
> È inoltre garantita anche la dipendenza continua, dunque è possibile scegliere un δ (dalla Teorema 22.13 (di Cauchy Locale - Seconda Parte)) grande a piacere

Dimostrazione. Il Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte) assicura esistenda ed unicità della soluzione su un intervallo centrato nell'istante iniziale. È necessario dimostrare che la soluzione può essere estesa a tutto l'intervallo I in questione. Come già parzialmente anticipato in Esempio 23.1 (Un Problema di Cauchy senza soluzione globale), questo non è possibile in due casi:

1. La soluzione ha asintoto verticale

2. La soluzione oscilla intorno ad un punto e non continua oltre

Quindi i casi in cui la soluzione non si può estendere su tutto l'intervallo sono quelli in cui non esiste il limite della soluzione. Si devono dunque evitare tali comportamenti.

Sia $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ la soluzione di Eq. (23.9.1) e sia

$$T_M = \sup\left\{\overline{t_M} \in I : \varphi \textit{ risolve Eq. } (23.9.1) \textit{ su } \left[t_0, \overline{t_M}\right[\ \right\} \tag{23.9.2}$$

> ***Nota.*** T_M è, dunque, l'ultimo tempo fino a cui posso definire una soluzione e la t utilizzata in seguito è $t \in \left[t_0, \overline{t_M}\right[$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau$$

Da cui, passando alle norme e minorando per proprietà 3 della Definizione 1.8 (Norma)

$$\|\varphi(t)\| \le \|x_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau \right\|$$

Grazie all'Esercizio 22.8

$$\le \|x_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) \right\| \, \mathrm{d}\tau \right|$$

Si può poi togliere il valore assoluto, in quanto sicuramente $t \ge t_0$ per definizione e, utilizzando la Definizione 23.5 (Funzione Sublineare)

$$\le \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \Big(A + B\,\|\varphi(\tau)\|\Big)\, \mathrm{d}\tau$$

Separando l'integrale ed essendo il primo addendo indipendente dalla variabile d'integrazione τ

$$\le \|x_0\| + A(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} B\,\|\varphi(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau$$

Si minora ulteriormente, passando a T_M

$$\leq \|x_0\| + A(T_M - t_0) + \int_{t_0}^{t} B\,\|\varphi(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau$$

Dunque, applicando il Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall) con

- $\delta_0 = \|x_0\| + A(T_M - t_0)$
- $\delta(t) = \|\varphi(\tau)\|$
- $\kappa(t) = B$
- $a = t_0$

$$\|\varphi(t)\| \leq \big(\|x_0\| + A(T_M - t_0)\big)e^{\int_{t_0}^{t} B\,\mathrm{d}\tau}$$

Da cui, minorando ulteriormente con T_M

$$\|\varphi(t)\| \leq \big(\|x_0\| + A(T_M - t_0)\big)e^{B(T_M - t_0)} \tag{23.9.3}$$

La $\varphi(t)$ è quindi limitata sull'intervallo $[t_0, T_M[$, dunque non è possibile abbia comportamento asintotico come quello di Esempio 23.1 (Un Problema di Cauchy senza soluzione globale). Ricordando che $\varphi(t)$ è soluzione della Eq. (23.9.1), otteniamo

$$\begin{aligned}\big\|\varphi'(t)\big\| &= \big\|f\big(t, \varphi(t)\big)\big\| \\ &\leq \sup_{t\in[t_0,T_M[} \|f(t,x)\|\end{aligned} \tag{23.9.4}$$

Quindi sia $\varphi(t)$ che $\varphi'(t)$ sono limitate, dunque la φ è **uniformemente continua** su $[t_0, T_M[$, come da Proposizione 3.37. Da Proposizione 3.22, se la $\varphi(t)$ è uniformemente continua, allora è **continua**, cioò implica che $\lim_{t\to T_M^-} \varphi(t) = \varphi(T_M)$.

Essendo $\varphi(T_M) \in \mathbb{R}^n$, posso usare questo punto come condizione iniziale del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(T_M) = \varphi(T_M) \end{cases} \tag{23.9.5}$$

Se $T_M < \sup I$, Eq. (23.9.5) soddisfa le ipotesi del Teorema 22.7 (di Cauchy Locale - Prima Parte), dunque φ può essere estesa oltre T_M ad una funzione definita almeno su $[t_0, T_M + \delta[$ con $\delta > 0$ scelto opportunamente. Questa possibilità di estendere la φ è però in contraddizione con la definizione di T_M in Eq. (23.9.2), dunque si deve concludere che

$$T_M = \sup I$$

Procedimento analogo si può svolgere per

$$T_m = \inf\left\{\overline{t_m} \in I : \varphi \textit{ risolve Eq. } (23.9.1) \textit{ su } \left]\overline{t_m}, t_0\right]\right\}$$

I passaggi rimangono uguali fino a Eq. (23.9.3) che diventa

$$\|\varphi(t)\| \leq \big(\|x_0\| + A(T_M - t_0)\big)e^{B(\boldsymbol{t_0 - T_m})}$$

E, a sua volta, Eq. (23.9.4) diventa

$$\begin{aligned}\|\varphi'(t)\| &= \|f(t,\varphi(t))\| \\ &\geq \min_{t\in]T_m,t_0]} \|f(t,x)\|\end{aligned}$$

Dunque

$$T_m = \inf I$$

Grazie a come sono definiti T_M e T_m, è stata quindi trovata una soluzione sull'intervallo I che si può dire **globale** per quanto appena dimostrato. □

Esempio 23.10 (Esempio critico al Teorema 23.9 (di Cauchy Globale per Sublineari))
Dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = (1-\cos x)x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Esempio 23.11
Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 \cdot \sin x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi 1., 2. e 3. del Teorema 23.9 (di Cauchy Globale per Sublineari), ma $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ non è né **globalmente lipschitziana**, né **sublineare** su $\mathbb{R}$. tuttavia, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, questo problema ammette soluzioni globali definite su tutto $\mathbb{R}$

Esercizio 23.12
Sono date le funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ciascuna soddisfacente alle ipotesi del Teorema 23.9 (di Cauchy Globale per Sublineari). Per un fissato $\overline{x}$ in $\mathbb{R}^n$, sia φ_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f_n(x) \\ x(0) = \overline{x} \end{cases}$$

Verificare che se le f_n convergono uniformemente (ricordando Definizione 19.13 (Successione Uniformemente Convergente)), allora anche le φ_n convergono uniformemente.

24 Equazioni Autonome

Definizione 24.1 (Equazione Autonoma)
Un'**equazione differenziale ordinaria** si dice **autonoma** se e solo se la variabile indipendente (solitamente il tempo) non vi compare esplicitamente.

Nota. L'assenza della variabile indipendente significa, concettualmente, che l'istante iniziale non è importante ai fini dello studio dell'equazione, ma essa dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo.

Nota. In fisica le equazioni differenziali autonome spesso modellizzano sistemi isolati

Proposizione 24.2 (Invarianza per Traslazione Temporale)
Se la funzione $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ risolve il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Allora, qualunque sia $T \in \mathbb{R}$, la funzione $\psi : [a - T, b - T] \to \mathbb{R}^n$ data da $\psi(t) = \varphi(t + T)$ è soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0 - T) = x_0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Posta la $\psi(t) = \varphi(t + T)$

$$\psi'(t_0) = \varphi'(t_0 + T) = f(\varphi(t_0 + T)) = f(\psi(t_0))$$
$$\psi(0) = \varphi(t_0) = x_0$$

□

Proposizione 24.3
Ogni equazione differenziale ordinaria in forma normale con secondo membro continuo è equivalente ad un'equazione autonoma.

Dimostrazione.

$$x' = f(t, x) \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ t' = 1 \end{cases}$$

□

Proposizione 24.4 (Teorema dell'Energia Cinetica)
Un punto materiale non vincolato P di massa m, si muove sotto l'azione di una forza F che dipende solo dalla posizione di P.
Allora la variazione di Energia Cinetica di P è uguale al lavoro compiuto su P da questa forza.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} = (x, y, z)$ la terna di coordinate di P. Per il Secondo Principio della Dinamica e per quanto assunto sulla forza F, il moto di P è descritto dalla seguente equazione differenziale ordinaria vettoriale del secondo ordine

$$m\mathbf{x}'' = F(\mathbf{x})$$

Dunque, moltiplicando ambo i membri

$$m\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}' = F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}'$$

Integrando a sinistra con la $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ posto $f(x) = \mathbf{x}'$

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\mathbf{x}')^2 = F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}'$$

Applicando ora integrazione definita tra 0 e t

$$\frac{1}{2}m\big(\mathbf{x}'(t)\big)^2 - \frac{1}{2}m\big(\mathbf{x}'(0)\big)^2 = \int_0^t F\big(\mathbf{x}(\tau)\big) \cdot \mathbf{x}'(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Passando alla soluzione x ed alla ξ, traiettoria di P

$$\frac{1}{2}m\big(\mathbf{x}'(t)\big)^2 - \frac{1}{2}m\big(\mathbf{x}'(0)\big)^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} F(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

□

Esercizio 24.5
Estendere la dimostrazione della Proposizione 24.4 (Teorema dell'Energia Cinetica) nel caso di n punti soggetti a forze dipendenti unicamente dalle posizioni dei punti.

Esercizio 24.6
Dedurre il Principio di Conservazione dell'Energia nel caso in cui F ammetta un potenziale

Esercizio 24.7
Come viene modificata la Proposizione 24.4 (Teorema dell'Energia Cinetica) se la forza F diopende anche dalla velocità $\mathbf{x}'$?

Esercizio 24.8
È possibile scrivere un'equazione differenziale ordinaria autonoma del primo ordine avente come soluzione la funzione $x(t) = \sin t$ per $t \in [0, \pi]$?
E la funzione $x(t) = t^3$ per $t \in [-1, 1]$?

25 Equazioni Differenziali Lineari

Di seguito verranno utilizzati l'identificazione ed i risultati della sezione 15 (Funzioni a Valori in $\mathbb{C}$), in particolare Esercizio 15.1

Definizione 25.1 (Equazione Differenziale Ordinaria Lineare)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $n \in \mathbb{N}$. Date le $n+1$ funzioni $a_0,\ a_1,\ \dots,a_{n-1},\ f \quad : I \to \mathbb{C}$, si dice **Equazione Differenziale Ordinaria Lineare di ordine n** l'equazione differenziale

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\cdot x' + a_0(t)\cdot x = f(t)$$

Se $f = 0$ l'equazione si dice **Omogenea**.

Proposizione 25.2 (Estensione in $\mathbb{C}$ del Teorema di Cauchy Globale per Lipschitziane)
Sia I un intervallo compatto tale che $\mathring{I} \neq \emptyset$, siano $a_0,\ a_1,\ \dots,a_{n-1},\ f \in \mathbf{C^0}(I;\mathbb{C})$.
Allora per ogni $t_0 \in \mathring{I}$ e $c_0,\ c_1,\ \dots,c_{n-1} \in \mathbb{C}$ il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} & = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k(t)\cdot x^{(k)} + f(t) \\ x(t_0) & = c_0 \\ x'(t_0) & = c_1 \\ & \vdots \\ x^{(n-2)}(t_0) & = c_{n-2} \\ x^{(n-1)}(t_0) & = c_{n-1} \end{cases} \tag{25.2.1}$$

soddisfa alle ipotesi del Teorema 23.4 (di Cauchy Globale per Lipschitziane)

Dimostrazione. Introducendo la variable $X \in \mathbb{C}^n$ ed il dato $C \in \mathbb{C}^n$ definiti da

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Come da Proposizione 21.6, un'equazione differenziale lineare di ordine n può essere trasformata in un sistema di n equazioni del primo ordine, dunque la prima equazione di Eq. (25.2.1), può diventare

$$\begin{cases} X_1' = X_2 \\ X_2' = X_3 \\ \vdots \\ X_{n-1}' = X_n \\ X_n' = -\sum_{k=1}^{n-1} \big(a_k(t)\cdot X_{k+1}\big) + f(t) \end{cases} \tag{25.2.2}$$

Passando dalle singole equazioni del nuovo sistema Eq. (25.2.2) alla variabile unica X in n coordinate, tutta la Eq. (25.2.1) è

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_{n-1}' \\ X_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t) \cdot X_{k+1}\right) + f(t) \end{bmatrix} \\ X(t_0) = C \end{cases}$$

Infine la funzione

$$\begin{array}{rcl} F : I \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ (t, X) & \mapsto & \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t) x^k\right) + f(t) \end{bmatrix} \end{array}$$

è lineare in X (compaiono solo elementi di grado 1) e globalmente lipschitziana in X uniformemente in t, infatti per ogni $X, Y \in \mathbb{C}^n$

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \le \sqrt{1 + \left(\max_k \sup_I \|a_k\|\right)^2} \cdot \|X - Y\|$$

Sono quindi soddisfatte le ipotesi di Teorema 23.4 (di Cauchy Globale per Lipschitziane) e si ha la tesi. $\square$

La locuzione **Lineare**, attribuita alle equazioni differenziali analizzate in questo capitolo, è giustificata dalla proposizione seguente.

Proposizione 25.3
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $n \in \mathbb{N}$. Date le $n+1$ funzioni $a_0, a_1, \dots, , a_{n-1}, f : I \to \mathbb{C}$, l'operatore

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) & \to & \mathbf{C^0}(I; \mathbb{C}) \\ x & \mapsto & x^{(n)} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k(t) \cdot x^{(k)} \end{array}$$

è lineare

Dimostrazione. La linearità di L equivale a:

$$\begin{array}{rl} L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) & \forall x_1, x_2 \in \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) \\ L(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot L(x) & \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) \end{array}$$

Entrambe le condizioni seguono dalle regole di derivazione, come da sezione 15 (Funzioni a Valori in $\mathbb{C}$). $\square$

Proposizione 25.4
L'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = 0 \tag{25.4.1}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C^n}(I; \mathbb{C})$ di dimensione n

Dimostrazione. Se x_1, x_2 sono soluzioni e se $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, allora anche $\lambda x_1 + \mu x_2$ è soluzione, infatti, per la Proposizione 25.3

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) = 0$$

Ciò permette, grazie alla Proposizione 1.6, di concludere che l'insieme delle soluzioni è sottospazio di $\mathbf{C^n}(I; \mathbb{C})$

Fissato $t_0 \in \mathring{I}$ e scelta una base $(E_1, \ldots, E_n)$ di $\mathbb{C}^n$, sia x_k, per $k = 1, \ldots, n$ la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) \cdot x^{(k)} \\ x(t_0) = (E_k)_1 \\ x'(t_0) = (E_k)_2 \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t_0) = (E_k)_{n-1} \\ x^{(n-1)}(t_0) = (E_k)_n \end{cases}$$

Si può concludere che $(x_1, \ldots, x_n)$ sia una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea Eq. (25.4.1).

Infatti se $\overline{x}$ è una soluzione della Eq. (25.4.1), allora esistono coefficienti $a_1, \ldots, a_n$ tali che $\overline{x}(t_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k E_k$. Quindi $\overline{x}$ risolve anche il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) \cdot x^{(k)} \\ x(t_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (E_k)_1 \\ x'(t_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (E_k)_2 \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (E_k)_{n-2} \\ x^{(n-1)}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (E_k)_{n-1} \end{cases}$$

Per costruzione anche la funzione $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k$ risolve lo stesso Problema di Cauchy. Quindi, per la Proposizione 25.2 (Estensione in $\mathbb{C}$ del Teorema di Cauchy Globale per Lipschitziane) ed il Teorema 23.4 (di Cauchy Globale per Lipschitziane), $\overline{x}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k(t)$ per ogni $t \in I$.

Se per opportuni scalari $\lambda_1, \, \dots \, , \lambda_n$ si ha

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k = 0 \\
\implies &\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k(t) = 0 \quad \forall t \in I \\
\implies &\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k^{(h)}(t) = 0 \quad \begin{cases} \forall t \in I \\ \forall h = 0, \, \dots \, , n-1 \end{cases} \\
\implies &\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k^{(h)}(t) = 0 \quad \forall h = 0, \, \dots \, , n-1 \\
\implies &\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot E_k = 0 \\
\implies &\lambda_k = 0 \quad \forall h = 0, \, \dots \, , n-1
\end{aligned}$$

□

Nota. Utilizzando la notazione tipica dell'Algebra Lineare, l'insieme delle soluzioni è $\ker L$, il *nucleo* (*kernel*) dell'operatore lineare L

Definizione 25.5 (Sistema Fondamentale di Soluzioni)
Dato $\ker L$, lo spazio vettoriale delle soluzioni, una base di $\ker L$ è **Sistema Fondamentale di Soluzioni** dell'equazione omogenea

$$x^{(n)} + a_{a-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \, \dots \, + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = 0$$

Definizione 25.6 (Soluzione Particolare)
Soluzione Particolare dell'equazione lineare non omogenea

$$x^{(n)} + a_{a-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \, \dots \, + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = f(t)$$

è una qualunque soluzione di questa equazione.

Proposizione 25.7
Nota una soluzione particolare $\overline{x}$ dell'equazione non omogenea

$$x^{(n)} + a_{a-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \, \dots \, + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = f(t)$$

e noto un sistema fondamentale di soluzioni $(x_1, \, \dots \, , x_n)$ dell'equazione imogenea

$$x^{(n)} + a_{a-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \, \dots \, + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = 0$$

ogni soluzione x dell'equazione non omogenea può essere scritta come

$$x = \overline{x} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

per opportune costanti $\alpha_1, \, \dots \, , \alpha_n \in \mathbb{C}$

Dimostrazione. □

Esercizio 25.8
Risolvere il Problema di Cauchy per una generica equazione lineare del primo ordine

$$\begin{cases} x' + p(t) \cdot x = q(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $p, q \in \mathbf{C^0}(R; R)$.

Soluzione. Suggerimento: moltiplicare ambo i membri dell'equazione per $e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$ ed integrare ■

26 Equazioni Lineari a Coefficienti Costanti

Definizione 26.1 (Equazione Differenziale Ordinaria Lineare a Coefficienti Costanti)
Dati i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in \mathbb{C}$ si dice **Equazione Differenziale Ordinaria Lineare di ordine n a Coefficienti Costanti** l'equazione differenziale

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = b$$

Se $b = 0$, l'equazione si dice **omogenea**.
La sua **Equazione Caratteristica** è l'equazione algebrica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Osservazione 26.2
Nella risoluzione di equazioni differenziali lineari la funzione esponenziale $t \mapsto e^{\lambda t}$ riveste un ruolo molto particolare. Questa funzione è un *autovalore* dell'operatore di derivazione D relativo all'*autovalore* λ, risolve infatti $Dx = \lambda \cdot x$, come da Proposizione 15.5.

Proposizione 26.3
Data l'equazione

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = b$$

allora

$$x(t) = e^{\lambda t} \text{ risolve l'equazione omogenea } \iff \lambda \text{ è soluzione dell'equazione caratteristica.}$$

Dimostrazione. Sia L l'operatore definito dal membro sinistro dell'equazione come nella Proposizione 25.3. Allora se $x(t) = e^{\lambda t}$, si ha che

$$\big(L(x)\big)(t) = \big(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\big)e^{\lambda t}$$

□

Lemma 26.4
Sia $x(t) = t \cdot e^{\lambda t}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ si ha

$$x^{(n)}(t) = \left(\lambda^n t + n\lambda^{n-1}\right) e^{\lambda t}$$

Dimostrazione. Per induzione su n.
Se $n = 0$, allora $x^{(0)} = x$. Supposto vero che

$$x^{(n-1)}(t) = \big(\lambda^{n-1}t + (n-1)\lambda^{n-2}\big)e^{\lambda t}$$

Da cui, derivando rispetto a t, si ottiene la tesi. □

Proposizione 26.5
Data l'equazione

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = b$$

allora

$$x(t) = t \cdot e^{\lambda t} \text{ risolve l'equazione omogenea}$$
$$\iff$$
$$\lambda \text{ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità almeno 2}$$

Dimostrazione. Sia $P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$. Sia ha

$$\begin{aligned}
\big(L(x)\big)(t) &= x^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t) \\
&= \left(\lambda^n t + n\lambda^{n-1}\right) e^{\lambda t} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \left(\lambda^k t + k\lambda^{k-1}\right) + a_0 t\right) e^{\lambda t} \\
&= \left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\right) t e^{\lambda t} + \left(n\lambda^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k k \lambda^{k-1}\right) e^{\lambda t} \\
&= \left(P(\lambda) t + \frac{dP}{d\lambda}(\lambda)\right) e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

□

Proposizione 26.6
Sia $m \in \mathbb{N}$. Data l'equazione

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ \dots \ + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = b$$

allora

$$\begin{gathered}
x(t) = t^m \cdot e^{\lambda t} \text{ risolve l'equazione omogenea} \\
\Longleftrightarrow \\
\lambda \text{ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità almeno } m
\end{gathered}$$

Dimostrazione. Omessa □

Esempio 26.7
L'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti

$$x'' - 2x' + x = 0$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

ed integrale generale

$$\left(x_1(t) = e^t,\ x_2(t) = te^t\right)$$

27 Esempi

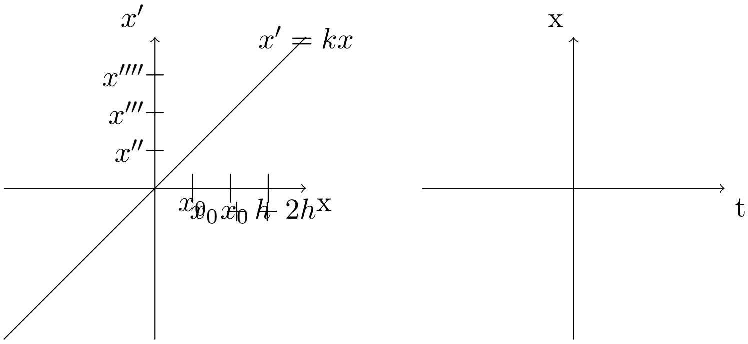
27.1 La Legge di Malthus

Una popolazione, dotata di tutto il necessario per vivere e riprodursi, cresce secondo la legge di Malthus: la velocità di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

$$x' = k \cdot x$$

dove x è il numero di membri della popolazione e k è una costante positiva legata alla prolificità della specie in esame, generalmente calcolata come differenza tra i tassi di natalità e di mortalità.
Il problema di Cauchy è quindi

$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}, k > 0 \text{ e } x_0 = 0$$



blablabla ....
....
Limiti di questo modello:

- la variabile x dovrebbe variare in $\mathbb{N}$, poiché una popolazione ha un numero intero di elementi.
- In molte specie è verosimile che il numero di nati al tempo t dipenda dalla popolazione presente ad un tempo precedente $x(t-T), T > 0$
- Supporre che una popolazione abbia per sempre a disposizione risorse sufficienti può non essere realistico
- Questo modello va bene quando si considerano intervalli di tempo molto lunghi.

Capitolo 6

Calcolo delle Variazioni

28 Preliminari

Il calcolo delle variazioni si occupa dell'ottimizzazione di funzioni $F : X \to \mathbb{R}$, dove X è un insieme di funzioni.
In questo capitolo varranno considerati univocamente funzionali integrali del tipo

$$\begin{array}{rcl} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\, \mathrm{d}t \end{array}$$

eventualmente soggetti a vincoli sui valori $x(a)$ e $x(b)$ o sul valore di un integrale del tipo $\int_a^b \varphi(x(t))\, \mathrm{d}t$.
Dove:

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$X = \left\{ x \in \mathbf{C^1}([a, b]); \mathbb{R}^n \text{ t.c.: } x(a) = x_a, x(b) = x_b \right\}, \text{ con } x_a, x_b \in \mathbb{R}^n$$

Proposizione 28.1
Sia $f \in \mathbf{C^1}(A \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ con $a \subseteq \mathbb{R}^n$
Se $\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_\alpha^\beta f(x, t)\, \mathrm{d}t \end{array}$ Allora:

$$F \in \mathbf{C^1}$$

$$\partial_\alpha F(\alpha, \beta, x) = -f(x, \alpha)$$

$$\partial_\beta F(\alpha, \beta, x) = f(x, \beta)$$

$$\nabla_x F(\alpha, \beta, x) = \int_\alpha^\beta \nabla_x f(x, t)\, \mathrm{d}t$$

Definizione 28.2
?????????????? R OPPURE RN
Sia $I \in \mathbb{R}$ un intervallo. Curva su I $\mathbb{R} \rightleftharpoons$ una funzione $\gamma : I \subseteq \mathbb{R}^n$ che sia continua.

Osservazione 28.3
$\gamma(I)$ si chiama supporto della curva,ed 1'e certamente connesso.(una funzione continua manda intervalli connessi in connessi)

Definizione 28.4
Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva, allora

$$\text{lunghezza della curva}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$l(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : N \in \mathbb{N}\, N > 1, t_0 = a, t_N = b, t_{i-1} < t_i, i = 1, 2, \ldots, N \right\}$$

cioè prendo una curva e la approssimo con una spezzata, la più lunga di tutte le poligonali è la lunghezza della curva.
DISEGNO
DISEGNO

Definizione 28.5
Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si dice rettificabile $\rightleftharpoons f(\gamma) < +\infty$

Osservazione 28.6

$$\sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

per il teorema del valore medio differenziale(accrescimenti finiti)

$$\sum_{i=1}^{N} \left\|\gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1})\right\| =??$$

$$\int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| \,\mathrm{d}t$$

Proposizione 28.7
Se $\gamma \in \mathbf{C^1}([a, b]\,; \mathbb{R}^n) \implies l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t$

Osservazione 28.8
Se γ è la traiettoria di un punto materiale,allora $\|\gamma\|$ è la norma della velocità istantanea, e quindi $l(\gamma)$ è lo spazio che si percorre, cioè l'integrale della velocità valutato tra $t??????t_i$ due istanti di tempo entro i quali si mantiene tale velocità.

Osservazione 28.9
Nel caso specifico sarà:

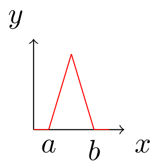
$$X = \left\{x \in \mathbf{C^1}([a, b]\,; \mathbb{R}2) : x(a) = A, x(b) = B\right\}$$

$$\begin{array}{rcc} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b \|x'(t)\| \,\mathrm{d}t \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t, x, x') & \to & \|x'(t)\| \end{array}$$

29 L'Equazione di Eulero

LEMMA:::LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI
Sia $f \in \mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R})$ t.c.: $\forall v \in \mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R})$ con $v(0) = v(1) = 0$ si abbia $\int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = 0$
Allora $f(x) \equiv 0 \forall x \in [0,1]$



Dimostrazione.

Per Assurdo, se $f \not\equiv 0$, allora $\exists\,[0,1]$ t.c. $f(x_0) \neq 0$.
Osservo che se $x_0 = 0$ allora $\exists \overline{x}_0 \in \,]0,1[$ t.c. $f(\overline{x}_0) \neq 0$.
Osservo che se $x_0 = 1$ allora $\exists \overline{x}_0 \in \,]0,1[$ t.c. $f(\overline{x}_0) \neq 0$
Entrambe le osservazioni per la continuità di f, significa che se x_0 è un punto in cui la $f > 0$ allora per la continuità della funzione anche li vicino si hanno valori maggiori di zero.
Quindi si può pensare $x_0 \in \,]0,1[$.
Allora $\exists a, b \in \,]0,1[$ t.c. $x_0 \in \,]a,b[$ e$\forall x \in \,]a,b[$ vale che $|f(x)| \geq |f(x_0)|$ sempre per la continuità di f.
Pensiamo $f(x_0) > 0$ in questo modo $|f(x_0)| = f(x_0)$ e scegliamo la funzione $v(x)$ come disegnata:

$$v(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 - \delta \\ \frac{x}{\delta} - \frac{x_0-\delta}{\delta} & x_0 - \delta < x < x_0 \\ 1 & x = x_0 \\ -\frac{x}{\delta} + \frac{x_0+\delta}{\delta} & x_0 < x < x_0 + \delta \\ 0 & x \geq x_0 + \delta \end{cases} \qquad \text{POSSIBILIPLAUSIBILIERRORI}$$

Se calcoliamo

$$\int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}f(x_0)\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x_0)\frac{b-a}{2} > 0$$

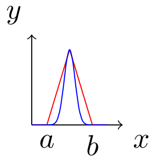
Se avessi preso $f(x_0) < 0$ prendo $v = -v$ e il resto segue... □

Osservazione 29.1
Questo lemma è concettualmente analogo al Teorema di Fermat nel capitolo delle derivate.

Corollario 29.2
LEMMA CASO VETTORIALE.
Sia $f \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ tale che $\forall v \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ con $v(0) = v(1) = 0$ si abbia $\int_0^1 f(x) \bullet v(x)\,\mathrm{d}x = 0$ allora $f(x) \equiv 0\ \forall x \in [0,1]$.

Dimostrazione. Per questa dimostrazione si osservano componente per componente.
$\forall i = 1, 2, \ldots, n$ scelgo $v_j(x) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ v_i(x) & j = i \end{cases}$
A questo punto applico il lemma fondamentale alla componente i-esima f_i di f. □

Corollario 29.3
Sia $f \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall v \in \mathbf{C^k}([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ con $v(0) = v(1) = 0$ si abbia $\int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = 0$ allora $f(x) \equiv 0\ \forall x \in [0,1]$.

Dimostrazione. 

É sempre lo stesso lemma con l'aggiunta che la funzione v sia di classe $\mathbf{C^k}$.
Se si chiama u la funzione blu e v la funzione rossa abbiamo:

$$\int_0^1 f(x)u(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

Se v è un po più regolare , prendiamo $v = u^{(}k+1)(x)$. cioè se vogliamo $v \in \mathbf{C^k}$ prendiamo.....
LA DINMOSTRAZIONE E A ME INCOMPRENSIBILE. □

Teorema 29.4
EQUAZIONE DI EULERO.
Sia $f \in \mathbf{C^2}\left([a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}\right)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.
Sia $X = \left\{x \in \mathbf{C^2}\left([a,b]\,; \mathbb{R}^n\right) : x(a) = A, x(b) = B\right\}$ con $A, B \in \mathbb{R}^n$.
Sia $\begin{array}{ccc} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\,\mathrm{d}t \end{array}$.
Se la funzione $x_* \in X$ è t.c. $F(x_*) = \max\{F(x) : x \in X\}$ [o min]
Allora $\partial_x f(t, x_*(t), x_*'(t)) - \frac{d}{\mathrm{d}t}\partial_{x'} f(t, x_*(t), x_*'(t)) = 0$.
Questa ultima equzione è l'equazione di Eulero-Lagrange del Funzionale F o a volte detta variazione prima del funzionale F. è un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine nella funzione incognita x_*.

Dimostrazione. Sia $\varphi(h) = F(x_* + hv)$, dove $x_* \in X$ e $x_* + hv \in X$, con h piccolo.
L'equazione di Eulero-Lagrange in apparenza complicata è analoga ad un equazione di analisi1 del tipo $f' = 0$ oppure in analisi due a $\nabla f = 0$. solo che ora sono cavoli amari.
Come si sceglie la variazione v in modo che $x_* + hv \in X$, con h piccolo.
X è l'insieme delle funzioni di $\mathbf{C^2}$, si sa che $x_* \in \mathbf{C^2}$, una scelta opportuna di v è $v \in \mathbf{C^2}(]a, b[\,; \mathbb{R}^n)$.
Inotre deve essere che $x_*(a) + hv(a) = A$ e $x_*(b) + hv(b) = B$ per restare dentro l'insieme X. Quindi $v(a) = v(b) = 0$. h è uno scalare e per ipotesi si sa che $F(x_*)$ è punto di massimo, quindi si conclude che $h = 0$ è punto di massimo per la funzione φ.
.... □

e qui finiscono gli appunti almeno per conto mio.

Capitolo 7

Temi Esame

30 T.E. 3 - AA 2019/2020 - 2020/04/24

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3
Si considerino in $\mathbb{R}^+$ le metriche $d(x,y) = |y-x|$ e $D(x,y) = \left|e^{-y^2} - e^{-x^2}\right|$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

1. d e D sono equivalenti.
2. $(\mathbb{R}^+, D)$ non è completo.

Soluzione.

1. Come prima cosa si nota che entrambe le metriche in oggetto sono illimitate, ma in modo "diverso". Infatti, limitando l'analisi a x e scegliendo un y "qualsiasi" (non tendente a nessuno dei due estremi di $\mathbb{R}^+$)

   - La metrica d tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$
   - La metrica D tende a $+\infty$ per $x \to 0$

   Da Definizione 1.12 (Metriche Equivalenti), si sa che per verificare l'equivalenza delle metriche deve valere
   $$\exists c, C \in \,]0, +\infty[\,: \ \forall x, y \in X \quad c \cdot d(x,y) \leq D(x,y) \leq C \cdot d(x,y)$$
   Ma è impossibile trovare un $C \neq +\infty$ tale per cui la D sia minorata da d nel caso in cui $x \to 0$, dunque **non son equivalenti**.

2. A priori, non esiste un modo "standard" per verificare la completezza di un insieme in una data metrica. Se il caso in oggetto è sottoinsieme **Chiuso** ed utilizza la **stessa metrica** di un altro **caso noto** (come Esempio 2.14 (Esempi di Spazi Metrici Completi e non)), allora è possibile utilizzare la Proposizione 2.16.
   Se non si rientra nel caso specifico indicato qui sopra, spesso la risposta è "lo spazio metrico **non** è completo". È però necessario verificarlo individuando una successione di Cauchy che non ammetta limite nell'insieme stesso, negando la Definizione 2.13 (Spazio Metrico Completo).

La forma, e^{-x^2} usata nella metrica D, tende ad 1 per $x \to 0$, dunque viene spontaneo cercare una successione x_n che tenda a 0 per $n \to \infty$. La successione più evidente è, ovviamente, la $x_n = \frac{1}{n}$ che, si vede immediatamente, verifica la Definizione 2.11 (Successione di Cauchy):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > \nu \text{ vale } D(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Verificando ora la convergenza a 0 mediante Definizione 2.3 (Limite per Successioni):

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \left| e^{-0^2} - e^{-\frac{1}{n}^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{e^0} - \frac{1}{e^{\frac{1}{n}^2}} \right| = \left| \frac{1}{1} - \frac{1}{e^0} \right| = |1-1| = 0$$

Ma $0 \in \mathbb{R} \notin \mathbb{R}^+$, per definizione di $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$. Si è dunque individuato un controesempio alla Definizione 2.13 (Spazio Metrico Completo), **negando la completezza**.

■

31 T.E. 2012/2013 scritto n.1

Esercizio 1
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = e^{-|4 \cdot arctan(x \cdot y^2)|}$

A Nessuna delle altre affermazioni è esatta

B f ammette almeno un punto di minimo assoluto

C $\inf^2_R f = 0$

D f ha infiniti punti di massimo

L'esponensiale è una funzione monotona crescente quindi la ricerca di massimi a minimi si sposta alla ricerca dei massimi e minimi dell'esponente.
L'esponente assume sempre valori negativi. Inotre risulta essere una quantità limitata tra $[0; 4\frac{\pi}{0}[$, quindi $\sup^2_R f = e^0 = 1$ e $\inf^2_R f = e^{-2\pi}$
Sono quindi punti di massimo tutti i punti che rendono nullo l'esponente: $arctan(xy^2) = 0 \implies x = 0, \forall yor y = 0, \forall x$ che sono i due assi. Essendo questi punti del dominio allora si può dire $\sup^2_R f = \max^2_R f = 0$
I punti di minimo si hanno per $\left|arctan(xy^2)\right| = \frac{\pi}{2}$ quindi per $x \to \pm\infty$ or $y \to \pm\infty$ essendo questi valori al limite il valore $e^{-2\pi}$ è inf per f
La risposta vera è quindi la D.

Esercizio 2
Sia (X, d) uno spazio metrico e siano A, B sottoinsiemi di X. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

1 $A \subseteq B \implies \partial A \subseteq \partial B$

2 $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$

A Entrambe

B Solo la seconda

C Nessuna delle affermazioni è esatta

D Solo la prima

La prima affermazione è certamente falsa poiché se scelto come spazio metrico R^2 con distanza quella eclidea. Scelgo $A = B((0,0),2), A = B((0,0),1)$ allora si ha che $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(0,0)) = 2\}$ e $\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(0,0)) = 1\}$ e questi due insiemi sono disgiunti.
la seconda è vera ma devo pensarci un po...

Appendici

A Geometria Analitica

A.1 Geometria nel Piano

B Forme Quadratiche

In questa sezione saranno riportati solo i risultati più importanti sulle forme quadratiche, quelli necessari alla ricerca di punti estremanti di funzioni a più variabili. Nel dettaglio, si vedrà come stabilire il segno di una forma quadratica.

Per un'esposizione dettagliata e completa si rimanda ad un libro di Algebra Lineare.

Definizione B.1 (Forma Quadratica)
Forma Quadratica su $\mathbb{R}^n$ è una funzione del tipo

$$\begin{array}{rccc} q & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^T Q\, x \end{array}$$

Dove:

- $x^T \in \mathrm{Mat}(1 \times n)$ è vettore riga trasposto del vettore colonna $x \in \mathrm{Mat}(n \times 1)$
- $Q \in \mathrm{Mat}(n \times n)$

Inoltre, per come è definito il prodotto righe per colonne, la q può essere riscritta come

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}\, x_i\, x_j$$

con q_{ij} elemento nella riga i e nella colonna j della matrice Q.

Esercizio B.2
Dimostrare che q è una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ se e solo se $q(x)$ è un polinomio omogeneo di grado 2 in funzione di x

Soluzione. Direttamente dalla Definizione B.1 (Forma Quadratica) in forma di sommatoria, si ha un polinomio di grado 2 nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}\, x_i\, x_j \quad = \quad q_{11}x_1^2 + q_{12}x_1x_2 + \cdots q_{nn}x_n^2$$

■

Proposizione B.3
Sia q forma quadratica su $\mathbb{R}^n$, allora:

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vale $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. $q(0) = 0$
3. q è **limitata** $\implies$ q è **identicamente nulla** (cioè $q(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$)

Dimostrazione.

1. $q(\lambda x) = (\lambda x)^T Q\, (\lambda x) = \lambda^2 x^T Q\, x = \lambda^2 q(x)$
2. $q(0) = q(0 \cdot 0)$, prendendo poi dal punto precedente, $q(0 \cdot 0) = 0^2\, q(0) = 0$
3. Si dimostra la contronominale (cioè la negazione dell'implicazione inversa)
   q non identicamente nulla $\implies$ $\exists x \in \mathbb{R}^n :\ q(x) \neq 0$ $\implies$ $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ $\implies$ q non limitata

□

Proposizione B.4
Data q forma quadratica su $\mathbb{R}^n$, allora esiste una costante M tale che

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad |q(x)| \leq M \|x\|^2$$

Dimostrazione. Grazie al punto 1 della Proposizione B.3, si sa che

$$|q(x)| = \left| q\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \|x\|^2 \left| q\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right| \tag{B.4.1}$$

$\frac{x}{\|x\|}$ è il **Versore** di x (il vettore direzione con norma $= 1$) quindi, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, si sta lavorando soltanto sui punti appartenenti a $\partial B(0,1)$: la frontiera della sfera di raggio 1.
Sia dunque $M = \max_{\partial B(0,1)} q(x)$. $\partial B(0,1)$ è un compatto, essendo insieme chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$ (vedasi Proposizione 2.34). Grazie alla regolarità di q ed alla compattezza di $\partial B(0,1)$, si può applicare l'Esercizio 3.16 (Teorema di Weierstrass - Analisi 1) ed avere la certezza dell'esistenza di un M finito.
Verificata l'esistenza di M, massimo sulla $\partial B(0,1)$, è sicuramente possibile minorare l'ultimo termine di Eq. (B.4.1) ed ottenere la tesi

$$|q(x)| = \|x\|^2 \left| q\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right| \leq M \|x\|^2$$

□

Corollario B.5
Data q forma quadratica su $\mathbb{R}^n$, allora:

$$\forall \alpha \in [0,2[\qquad q(x) = o(\|x\|^\alpha) \text{ per } x \to 0$$

Dimostrazione. Immediata dalla Proposizione B.4 perché si ha già dimostrato che esista un certo M per cui $q(x) \leq M \|x\|^2$. Basta applicare la Definizione 8.2 (o piccolo) a $x \to 0$ per arrivare alla tesi. □

Proposizione B.6
Data q forma quadratica su $\mathbb{R}^n$, allora:

$$|q(x)| = o(\|x\|^2) \text{ per } x \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Sia $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| = 1$ (quindi x **Versore**). Si applica la Definizione 8.2 (o piccolo)

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{\|q(tx)\|}{\|tx\|^2}$$

Essendo $q(tx) \in \mathbb{R}$, la norma corrisponde al valore assoluto

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|q(tx)|}{\|tx\|^2}$$

Utilizzando il punto 1 della Proposizione B.3 e la proprietà 4 da Definizione 1.8 (Norma)

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|t^2 q(x)|}{|t|^2 \|x\|^2} = \lim_{t \to 0} \frac{|t^2| \, |q(x)|}{|t|^2 \|x\|^2} = \frac{|q(x)|}{\|x\|^2} \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2} = \frac{|q(x)|}{\|x\|^2}$$

Essendo per ipotesi $\|x\| = 1$

$$= |q(x)|$$

Ma, avendo un valore assoluto $= 0$, è sicuramente vero che

$$0 = |q(x)| = q(x)$$

Da cui la tesi

$\Longleftarrow$ Immediatamente applicando la Definizione 8.2 (o piccolo), in quanto si avrebbe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|q(x)\|}{\|x\|^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{\|x\|^2} = 0$$

$\square$

Definizione B.7
Data q forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ individuata dalla matrice Q, allora q è:

- **Definita Positiva** $\rightleftharpoons$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \quad q(x) > 0$ $\rightleftharpoons$ $Q > 0$
- **Semidefinita Positiva** $\rightleftharpoons$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad q(x) \geq 0$ $\rightleftharpoons$ $Q \geq 0$
- **Definita Negativa** $\rightleftharpoons$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \quad q(x) < 0$ $\rightleftharpoons$ $Q < 0$
- **Semidefinita Negativa** $\rightleftharpoons$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad q(x) \leq 0$ $\rightleftharpoons$ $Q \leq 0$

Nota. La definizione più a destra, quella che utilizza i segni $\gtrless$, è sconsigliabile in quanto fuorviante: non esiste relazione d'ordine tra matrici.

Esercizio B.8
Esibire un esempio di forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ per ognuno dei tipi sopra definiti.
Esibire un esempio di forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ non definita.

Soluzione.

1. Semidefinita positiva
$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad q(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

2. Definita positiva
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad q(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) + 3 > 0$$

3. Semidefinita negativa
$$Q = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad q(x, y) = -3x^2$$

4. Definita negativa
$$Q = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \qquad q(x, y) = -x^2 + 2\sqrt{2}xy - 2y^2$$

5. Nè definita nè semidefinita

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad q(x, y) = x^2 - y^2$$

$$q(1, 0) = 1 \qquad\qquad q(0, 1) = -1$$

■

Esercizio B.9
In $\mathrm{Mat}(n \times n)$, sia definita la relazione d'ordine $>$ da

$$M_1 > M_2 \quad \rightleftharpoons \quad M_1 - M_2 > 0$$

La relazione $>$ è una relazione di ordine totale?

Proposizione B.10
Data q forma quadratica su $\mathbb{R}^n$, allora:

$$q \text{ **Definita Positiva**} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists m > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad q(x) \geq m \|x\|^2$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Si procede con un procedimento analogo a quello della Proposizione B.4.
Grazie al punto 1 della Proposizione B.3, si sa che

$$q(x) = q\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 \ q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \tag{B.10.1}$$

Per gli stessi motivi dell'altra dimostrazione, si può porre $m = \min\limits_{\partial B(0,1)} q(x)$ ed avere la certezza che esista finito. Inoltre, sicuramente $m \geq 0$ perché q è definita positiva per ipotesi.
È dunque sicuramente possibile maggiorare l'ultimo termine di Eq. (B.10.1) ed ottenere la tesi

$$q(x) = \|x\|^2 \ q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq m \|x\|^2$$

$\Longleftarrow$ Immediata.

□

Corollario B.11
Data q forma quadratica su $\mathbb{R}^n$, allora:

$$q \text{ **Definita Negativa**} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists m > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad q(x) \leq -m \|x\|^2$$

Dimostrazione. Analoga alla precedente □

Grazie alle seguenti proposizioni viene fornito un metodo più rapido per verificare la definizione/semidefinizione delle forme quadratiche.

Proposizione B.12 (Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt)
Data q forma quadratica **definita positiva** o **negativa** su $\mathbb{R}^n$ con matrice **simmetrica** Q.
Esiste un sistema di coordinate in cui la matrice $\tilde{Q}$ di q è diagonale ed ha come coefficienti

$$Q_1 \qquad \frac{\det Q_2}{\det Q_1} \qquad \frac{\det Q_3}{\det Q_2} \qquad \cdots \qquad \frac{\det Q_n}{\det Q_{n-1}}$$

dove Q_i è la matrice costituita dalle prime i righe ed i colonne di Q ("come negli orlati").

> ***Nota.*** Non è necessario conoscere il sistema di coordinate in cui è valida l'uguaglianza, ai fini dello studio di una Forma Quadratica è sufficiente sapere che esso esiste e che l'uguaglianza è valida.

$$\begin{bmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\det Q_2}{\det Q_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\det Q_n}{\det Q_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Omessa. □

> ***Nota.*** Questa enunciazione dell'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sembra privilegiare le sottomatrici costituite dalle prime righe e dalle prime colonne. È però possibile enunciare una versione di questa proposizione in cui tutte le sottomatrici quadrate costruite attorno alla diagonale hanno gli stessi *privilegi*.

Osservazione B.13
Nella Proposizione B.12 (Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt), l'ipotesi che q sia definita assicura che le diverse Q_i per $i = 1, \ldots, n$ siano non nulle.
Nel caso in cui q non fosse definita sarebbe ancora possibile diagonalizzare q ottenendo una matrice diagonale con gli "ultimi" elementi della diagonale nulli.

Corollario B.14
Data q forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ con matrice **simmetrica** Q.

$$Q \text{ Definita Positiva} \iff \begin{cases} q_1 > 0 \\ \det Q_2 > 0 \\ \det Q_3 > 0 \\ \vdots \\ \det Q_n > 0 \end{cases}$$

$$Q \text{ Definita Negativa} \iff \begin{cases} -q_1 > 0 \\ \det Q_2 > 0 \\ -\det Q_3 > 0 \\ \vdots \\ (-1)^n \ \det Q_n > 0 \end{cases}$$

dove Q_i è la matrice costituita dalle prime i righe ed i colonne di Q ("come negli orlati").

Cioè se tutte le sottomatrici hanno determinante positivo, allora la Q è Definita Positiva. Se invece i determinanti hanno segni alternati (partendo da una negativa), allora è Definita Negativa.

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio B.15
Dimostrare il Corollario B.14. Suggerimento: applicare la Proposizione B.12 (Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt).

Esercizio B.16
Enunciare il Corollario B.14 nel caso $n = 2$ e verificarlo con i metodi dell'algebra elementare. Suggerimento: utilizzare la regola per determinare il segno di un polinomio di secondo grado.