Abschlussprojekt

Ida Hönigmann Fabian Dopf

January 4, 2022

Aufgabe 1: Aufwandsordnung numerischer Verfahren

Teilaufgabe 1a:

TODO Angabe 1a

Beweis. Annahme: $\forall N \in \mathbb{N}$ ist p_N, sodass $y_N \leq CN^{p_N}$ für ein $C > 0$.

Für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ gilt $\exists C_{1N}, C_{2N} > 0$ und $p_{1N}, p_{2N} > 0$ mit $y_N \leq C_{1N}N^{p_{1N}}$ und $y_{2N} \leq C_{2N}(2N)^{p_{2N}}$.

Für $C := max\{C_{1N}, C_{2N}\}$ und $p_N := max\{p_{1N}, p_{2N}\}$ gilt $y_N \leq C_{1N}N^{p_{1N}} \leq CN^{p_N}$ und $y_{2N} \leq C_{2N}(2N)^{p_{2N}} \leq C(2N)^{p_N}$.

TODO ...

$$\log(y_{2N}) - \log(y_N) = \log\left(\frac{y_{2N}}{y_N}\right) = \log\left(\frac{C(2N)^{p_N}}{C \cdot N^{p_N}}\right) = \log(2^{p_N}) = p_N \log(2)$$

$$\implies p_N = \frac{\log(y_{2N}) - \log(y_N)}{\log(2)}$$

□

Teilaufgabe 1b:

TODO Angabe 1b

Beweis.

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{C + \delta_{2N}}{C + \delta_N}\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty} \frac{C + \delta_{2N}}{C + \delta_N}\right) = \log\left(\frac{\lim_{n\to\infty} C + \delta_{2N}}{\lim_{n\to\infty} C + \delta_N}\right) = \log\left(\frac{C}{C}\right) = \log(1) = 0$$

$$\implies p_N = \frac{\log(y_{2N}) - \log(y_N)}{\log(2)} = \frac{\log((C + \delta_{2N})(2N)^p) - \log((C + \delta_N)N^p)}{\log(2)} = \frac{\log\left(\frac{(C+\delta_{2N})(2N)^p}{(C+\delta_N)N^p}\right)}{\log(2)}$$

$$= \frac{\log\left(\frac{(C+\delta_{2N})2^p}{(C+\delta_N)}\right)}{\log(2)} = \frac{p\log(2) + \log\left(\frac{C+\delta_{2N}}{C+\delta_N}\right)}{\log(2)} = p + \frac{\log\left(\frac{C+\delta_{2N}}{C+\delta_N}\right)}{\log(2)} \xrightarrow{n\to\infty} p + 0 = p$$

□

Teilaufgabe 1c:

TODO Angabe 1c

Darstellung ist Gerade. $c = f(1)$ und p ist Steigung, wenn beide Achsen "gleich" skaliert.

Aufgabe 2: Cholesky-Verfahren und Skyline-Matrizen

Teilaufgabe 2a:

TODO Angabe 2a

Beweis. TODO Beweis 2a aufschreiben □

Teilaufgabe 2b:

Beweis. TODO Beweis 2b □

Aufgabe 3: Pseudocode für Cholesky-Zerlegung von Skyline-Matrizen

0.1 Teilaufgabe 3a:

TODO Angabe 3a
TODO Pseudocode

Teilaufgabe 3b:

TODO Angabe 3b
TODO Pseudocode aufschreiben

Aufgabe 4: Aufwand des Algorithmus und Verhalten in Spezialfällen

Teilaufgabe 4a:

TODO Angabe 4a
TODO Aufwand bestimmen

Teilaufgabe 4b:

TODO Angabe 4b
linke Matrix ist quasi vollbesetzt als Skyline-Matrix (mit Nulleinträgen!)
rechte Matrix hat p=q=0 für alle außer letzte Zeile dort p=q=n
effizientere berechnung der cholesky-Zerlegung durch "spiegeln". Also aus $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mache $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $B_{i,j} = A_{(n+1-i),(n+1-j)}$. Umkehrabbildung ist gleich (auch $(i,j) \mapsto (n+1-i, n+1-j)$). Dann erhält man eine Matrix mit der rechten Form, kann die cholesky-zerlegung $LL^T = B$ berechnen und erhält dann, dass L gespiegelt (auch wieder gleich) eine untere Dreiecksmatrix mit $\hat{L}\hat{L}^T = A$.

Aufgabe 5: Implementierung des Algorithmus und empirische Aufwandsschätzung

TODO Angabe 5
TODO Anhang Python-Code (+ Grafik Performance?)