Inferência Bayesiana
Introdução

Contextualização

Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Curso de Graduação em Estatística
Universidade Federal do Paraná

2o semestre de 2019

Inferência

Inferência

- inferência?

Inferência

- inferência?
- inferência estatística?

Inferência

- inferência?
- inferência estatística?
- aprender com os dados!

Inferência

- inferência?
- inferência estatística?
- aprender com os dados!
- como assim ... aprender com os dados!

Inferência

- inferência?
- inferência estatística?
- aprender com os dados!
- como assim ...aprender com os dados!
  Vamos usar alguma notação:

$$y \,:\, \text{dados} \quad \theta \,:\, \text{"quantidades" desconhecidas}$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Inferência

- inferência?
- inferência estatística?
- aprender com os dados!
- como assim …aprender com os dados!
  Vamos usar alguma notação:

$$y \,:\, \text{dados} \quad \theta \,:\, \text{"quantidades" desconhecidas}$$

- inferência é portanto falar sobre $\theta|y$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Inferência

- inferência?
- inferência estatística?
- aprender com os dados!
- como assim ...aprender com os dados!
  Vamos usar alguma notação:

$$y \ : \text{dados} \quad \theta \ : \text{"quantidades" desconhecidas}$$

- inferência é portanto falar sobre $\theta | y$
- mas ...como aprendemos (sobre θ) com os dados (y)?

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Inferência

- inferência?
- inferência estatística?
- aprender com os dados!
- como assim . . . aprender com os dados!
  Vamos usar alguma notação:

$$y : \text{dados} \quad \theta : \text{"quantidades" desconhecidas}$$

- inferência é portanto falar sobre $\theta|y$
- mas . . . como aprendemos (sobre θ) com os dados (y)?
- mas . . . **só** aprendemos (sobre θ) com os dados (y)?

O que usamos para aprender/decidir?

Em uma população (considerada *infinita*) uma proporção θ de indivíduos apresenta determinada característica.
Deseja-se (inferências):

- estimar θ,
- expressar a incerteza sobre esta estimativa,
- verificar se θ (e portanto a população) está fora de normas/referências (proporção max. de 20%), se há evidências de um desvio "relevante" (significativo).

Laboratório de Estatística e Geoinformação

O que usamos para aprender/decidir?

Em uma população (considerada *infinita*) uma proporção θ de indivíduos apresenta determinada característica.
Deseja-se (inferências):

- estimar θ,
- expressar a incerteza sobre esta estimativa,
- verificar se θ (e portanto a população) está fora de normas/referências (proporção max. de 20%), se há evidências de um desvio "relevante" (significativo).

Dados de *uma* amostra (considerada aleatória):
$n = 80$ e $y = 19$ Como proceder?

Laboratório de Estatística e Geoinformação

O que usamos para aprender/decidir?

Um vídeo vale mais que mil palavras!
Vamos usar na discussão apenas de 0 e 50 segundos do vídeo.
(baseado em (**??**))

O que usamos para aprender/decidir?

Um vídeo vale mais que mil palavras!
Vamos usar na discussão apenas de 0 e 50 segundos do vídeo.
(baseado em (**??**))
Por que ocorre o mal entendido?
Elementos:

- O pedido é a informação que o vendedor recebe.
- O vendedor tinha alguma opinião anterior sobre o que poderia ter sido pedido?
- O vendedor ao final acha mais provável que o cliente tenha pedido quatro velas (*four candles*) do que o cabo do garfo (*fork handles*).

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Um vídeo em notação

- "Adivinhar" o que o cliente quer (estado da natureza):

$$\theta_c \text{ vela ou } \quad \theta_h \text{ cabo.}$$

- Pela experiência o vendedor sabe se vende mais velas ou cabos, tem ideia da chance de alguém comprar um ou outro:

$$P[\theta_c] \text{ vela ou } \quad P[\theta_h] \text{ cabo.}$$

- Informação (dado) y é a fala do comprador e esta fala pode ocorrer para cada possível estado da natureza.

$$P[Y|\theta_c] \text{ vela ou } \quad P[Y|\theta_h] \text{ cabo.}$$

- O vendedor ao final acha mais provável que o cliente tenha pedido quatro velas (*four candles*) do que o cabo do garfo (*fork handles*), ou seja, ele avalia:

$$P[\theta_c|y] \text{ vela ou } \quad P[\theta_h|y] \text{ cabo.}$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Revisando o Teorema de Bayes

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$$

Ex: O problema dos testes de diagnóstico

Teste de *screening* para uma determinada doença.

Teste *imperfeito*: acerta 90% dos que tem doença e 80% dos que não tem.

Sabe-se de antemão que a doença ocorre em 2% da população.

Se uma pessoa testou positivo, qual a chance de ter a doença?

Testes de diagnóstico

A notação ”usual”!

$$
\begin{aligned}
P[+|D] &= 0,90 \longrightarrow P[-|D] = 0,10 \\
P[-|\overline{D}] &= 0,80 \longrightarrow P[+|\overline{D}] = 0,20 \\
P[D] &= 0,02 \\
P[D|+] &= ?
\end{aligned}
$$

Testes de diagnóstico

A notação "usual"!

$$
\begin{aligned}
P[+|D] &= 0,90 \longrightarrow P[-|D] = 0,10 \\
P[-|\overline{D}] &= 0,80 \longrightarrow P[+|\overline{D}] = 0,20 \\
P[D] &= 0,02 \\
P[D|+] &= ?
\end{aligned}
$$

$$
P[D|+] = \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]} = 0.0841
$$

Teorema de Bayes

Alterando notação:

$$P[\theta_j|y] = \frac{P[Y|\theta_j] \cdot P[\theta_j]}{\sum_j P[Y|\theta_j] \cdot P[\theta_j]}$$

Teorema de Bayes

Alterando notação:

$$P[\theta_j|y] = \frac{P[Y|\theta_j] \cdot P[\theta_j]}{\sum_j P[Y|\theta_j] \cdot P[\theta_j]}$$

$$\theta \text{ :estado do paciente} : \theta_1 : \text{com a doença}, \theta_2 : \text{sem a doença}$$

$$Y \text{ :resultado do teste} : y_1 : \text{positivo}, y_2 : \text{negativo}$$

Dados:

$$\begin{aligned} P[D] &= P[\theta_1] = 0,02 & P[\overline{D}] &= P[\theta_2] = 0,98 \\ P[+|D] &= P[Y_1|\theta_1] = 0,90 & P[-|D] &= P[Y_2|\theta_1] = 0,10 \\ P[-|\overline{D}] &= P[Y_2|\theta_2] = 0,80 & P[+|\overline{D}] &= P[Y_2|\theta_2] = 0,20 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P[\theta_1|y_1] &= \frac{P[Y_1|\theta_1] \cdot P[\theta_1]}{P[Y_1]} = \frac{P[Y_1|\theta_1] \cdot P[\theta_1]}{P[Y_1|\theta_1] \cdot P[\theta_1] + P[Y_1|\theta_2] \cdot P[\theta_2]} \\ &= \frac{0,90 \cdot 0,02}{0,90 \cdot 0.02 + 0,20 \cdot 0,98} = 0.0841 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

$$P[\theta_j|y] = \frac{P[Y|\theta_j] \cdot P[\theta_j]}{\sum_j P[Y|\theta_j] \cdot P[\theta_j]}$$

Teorema de Bayes

$$P[\theta_j|y] = \frac{P[Y|\theta_j] \cdot P[\theta_j]}{\sum_j P[Y|\theta_j] \cdot P[\theta_j]}$$

No exemplo só haviam dois possíveis estados da natureza:

$$\theta_1 : \text{com a doença}, \theta_2 : \text{sem a doença}$$

O resultado é mais geral, para várias categorias.
Aplicação em problemas de classificação.
Estados da natureza não precisar ser apenas categóricos (ou ainda discretos/enumeráveis)
Os estados da natureza podem ocorrer em um domínio contínuo.

O Teorema de Bayes pode então ser reescrito como:

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta) \cdot f(\theta)}{\int f(y|\theta) \cdot f(\theta) \mathrm{d}\theta}$$

Abordagem Frequentista

- Baseia-se em considerar o comportamento das quantidades de interesse medidas na amostra, supondo que diversas amostras fossem tomadas da população.

Abordagem Frequentista

- Baseia-se em considerar o comportamento das quantidades de interesse medidas na amostra, supondo que diversas amostras fossem tomadas da população.
- Tais quantidades, por serem baseadas em amostras aleatórias são portanto aleatórias, e possuem alguma distribuição de probabilidades.

Abordagem Frequentista

- Baseia-se em considerar o comportamento das quantidades de interesse medidas na amostra, supondo que diversas amostras fossem tomadas da população.
- Tais quantidades, por serem baseadas em amostras aleatórias são portanto aleatórias, e possuem alguma distribuição de probabilidades.
- Tal distribuição de probabilidades é chamada de `distribuição amostral`.

Abordagem Frequentista

- Baseia-se em considerar o comportamento das quantidades de interesse medidas na amostra, supondo que diversas amostras fossem tomadas da população.
- Tais quantidades, por serem baseadas em amostras aleatórias são portanto aleatórias, e possuem alguma distribuição de probabilidades.
- Tal distribuição de probabilidades é chamada de `distribuição amostral`.
- As inferências frequentistas são baseadas em probabilidades medidas nestas distribuições.

Abordagem Frequentista

- Baseia-se em considerar o comportamento das quantidades de interesse medidas na amostra, supondo que diversas amostras fossem tomadas da população.
- Tais quantidades, por serem baseadas em amostras aleatórias são portanto aleatórias, e possuem alguma distribuição de probabilidades.
- Tal distribuição de probabilidades é chamada de `distribuição amostral`.
- As inferências frequentistas são baseadas em probabilidades medidas nestas distribuições.
- Usual nos métodos, técnicas e procedimentos de estatística, especialmente os ligados a cursos e textos básicos e aplicados a diversas áreas.

Abordagem Frequentista

- Baseia-se em considerar o comportamento das quantidades de interesse medidas na amostra, supondo que diversas amostras fossem tomadas da população.
- Tais quantidades, por serem baseadas em amostras aleatórias são portanto aleatórias, e possuem alguma distribuição de probabilidades.
- Tal distribuição de probabilidades é chamada de `distribuição amostral`.
- As inferências frequentistas são baseadas em probabilidades medidas nestas distribuições.
- Usual nos métodos, técnicas e procedimentos de estatística, especialmente os ligados a cursos e textos básicos e aplicados a diversas áreas.
- As distribuições amostrais podem ser obtidas analiticamente em alguns casos (e.g teste-t), aproximadas por distribuições conhecidas, ou obtidas por procedimentos computacionais intensivos (e.g. testes aleatorizados e bootstrap).

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Abordagem frequentista

Inferência se baseia na distribuição amostral

$$\text{Estimativa}: \hat{\theta} = \frac{Y}{n}$$

$$\hat{\theta} \sim \mathrm{N}(\mu = \theta, \sigma^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{n})(\text{distribuição amostral})$$

$$\text{IC}: \hat{\theta} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}$$

$$\text{TH}: (H_1 : \theta > \theta_0) : \hat{\theta} \sim \mathrm{N}(\theta_0, \frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n})$$

$$\text{equivalentemente } z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Abordagem frequentista

Inferência se baseia na distribuição amostral

$$\text{Estimativa} : \hat{\theta} = \frac{Y}{n}$$

$$\hat{\theta} \sim \mathrm{N}(\mu = \theta, \sigma^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{n})(\text{distribuição amostral})$$

$$\text{IC} : \hat{\theta} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}$$

$$\text{TH} : (H_1 : \theta > \theta_0) : \hat{\theta} \sim \mathrm{N}(\theta_0, \frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n})$$

$$\text{equivalentemente } z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

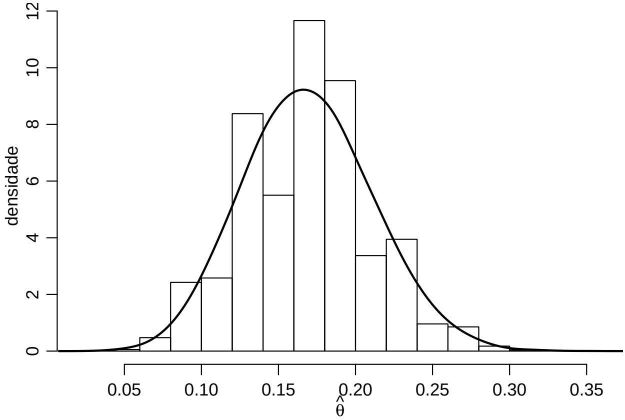
Usa-se $\theta = \hat{\theta}$ (assintótico) ou $\theta = 0,5$ (conservador)

Laboratório de Estatística e Geoinformação

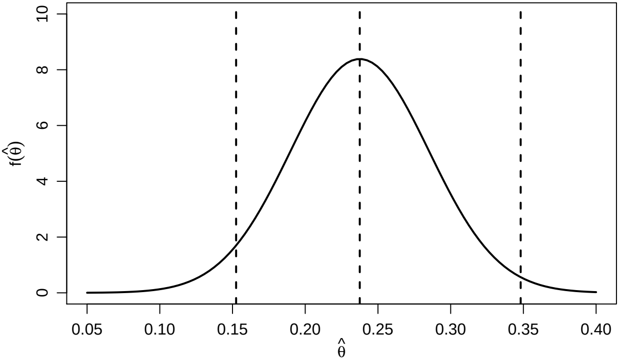
Simulação da distribuição amostral

(código completo em arquivo inf-prop.R) As estimativas variam se tomamos diversas amostras da população:

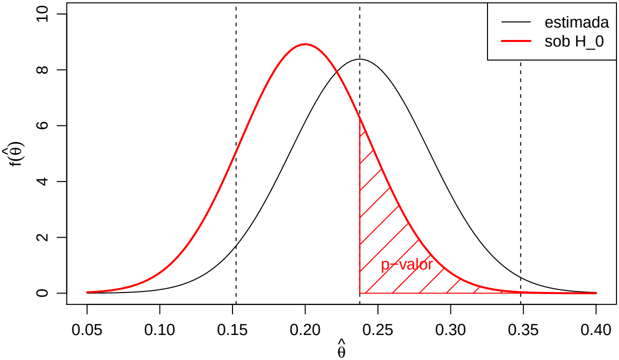
```
summary(ps)
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  0.0375  0.1375  0.1625  0.1693  0.2000  0.3500
```



Distribuição amostral (estimada)



Distribuição amostral



Inferência para proporção - frequentista

Na prática, com recursos computacionais

```
prop.test(19, 80)$conf
```

```
## [1] 0.1524765 0.3481396
## attr(,"conf.level")
## [1] 0.95
```

```
prop.test(19, 80, p=0.20, alt="greater")
```

```
##
##  1-sample proportions test with continuity correction
##
## data:  19 out of 80, null probability 0.2
## X-squared = 0.48828, df = 1, p-value = 0.2423
## alternative hypothesis: true p is greater than 0.2
## 95 percent confidence interval:
##  0.1632771 1.0000000
## sample estimates:
##      p
## 0.2375
```

Inferência para proporção - frequentista

Resumindo:

- Se baseia no comportamento das *possíveis amostras* que poderiam ser retiradas da população

- Interpretação de intervalo de confiança: *o calculado a partir da amostra é um entre os possíveis, sendo que uma proporção dos possíveis (nível de confiança) conteria o verdadeiro valor*

- Interpretação do Teste de Hipótese e valor-p: *mesmo sob H_0 uma proporção das possíveis amostras produziria valores tão ou mais extremos que o visto na amostra. Se esta proporção (p-valor) é baixa (nível de significância) a amostra é considerada incompatível com a hipótese nula e rejeita-se a hipótese nula.*

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Uma alternativa (ainda) frequentista: Teste aleatorizado

Ideia básica:
Reproduzir a essência da ideia frequentista porém obtendo a distribuição amostral por simulação sob H_0

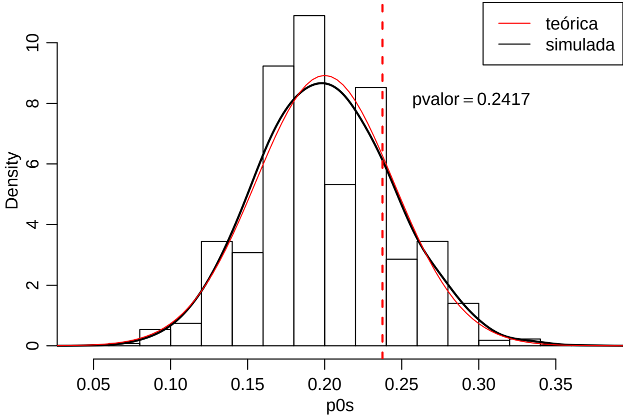
Algorítmo:

- Simular amostras da população sob H_0
- Calcular o valor de interesse ou estatística de teste para cada amostra simulada
- valor-p proporção destes que são mais “extremos” do que o valor observado na amostra

Laboratório de Estatística e Geoinformação

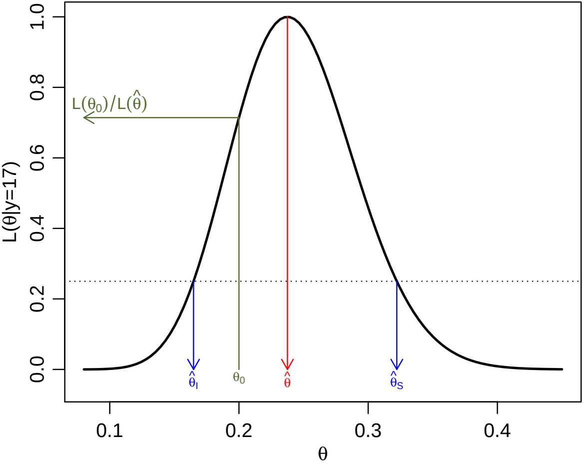
Teste aleatorizado

```
summary(p0s)
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
##  0.0500  0.1750  0.2000  0.2005  0.2250  0.3750
(pvalor <- mean(p0s >= 19/80))
## [1] 0.2417
```



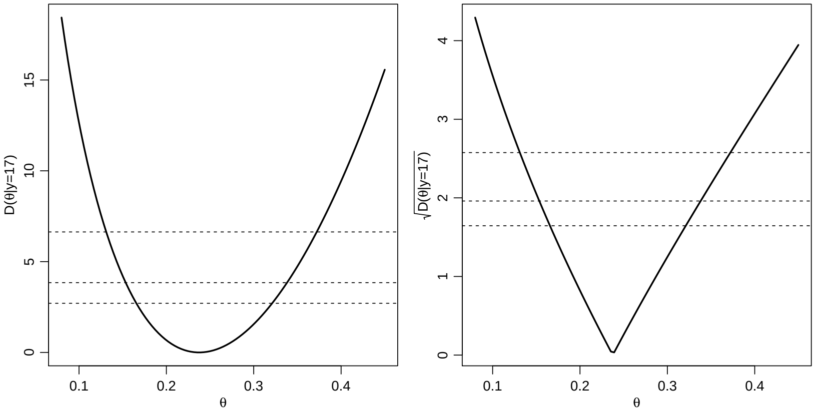
Abordagem pela verossimilhança

Inferência é baseada nas características da
função de verossimilhança



Representação alternativa

Função deviance e cortes que definem intervalos (a 90, 95 e 99%)



Laboratório de Estatística e Geoinformação

Inferência pela verossimilhança

Necessidade de critérios:

- definir o valor para corte da função para obter intervalos de confiança (IC's) ?

- definir limiar para o valor de verossimilhança (relativa ao máximo) para θ_0?

Possíveis soluções:

- critérios de razoabilidade e comparação (e.g. moedas ou a família do Sr. João!)

- argumento frequentista (comportamento "médio" da verossimilhança) estabelece relações:

r	"Caras"	$P[\lvert Z\rvert < \sqrt{c^*}]$
50%	1,00	0,761
26%	1,94	0,899
15%	2,74	0,942
3,6%	4,80	0,990

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Comparando

Inferência frequentista

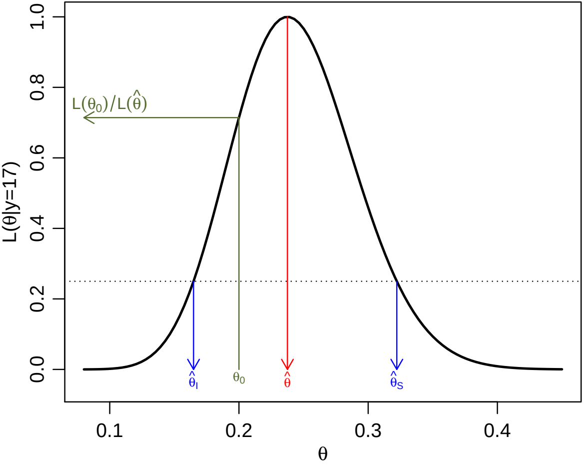
- Estimativa de θ: fornecido por algum método de estimação
- expressão da incerteza: variabilidade da distribuição amostral
- opinião em relação a valor de interesse $\theta_0 = 0,20$: probabilidade na distribuição amostral

Inferência pela verossimilhança

- Estimativa de θ: máximo (supremo) da função
- expressão da incerteza: faixa de valores dentro de um limite de compatibilidade com a amostra, curvatura da função
- opinião em relação a valor de interesse $\theta_0 = 0.20$: comparação da verossimilhança deste valor com a do máximo

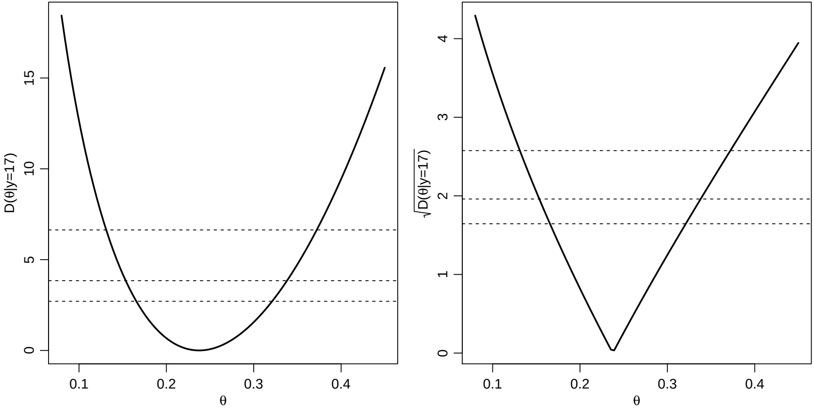
All we need is ... likelihood

Inferência é baseada nas características da
função de verossimilhança



Representação alternativa

Função deviance e cortes que definem intervalos (a 90, 95 e 99%)



Abordagem Bayesiana

O objeto de inferência é a distribuição à posteriori

- A incerteza inicial sobre θ é expressa na forma de uma distribuição priori para θ
- Com amostra atualizamos opinião θ com a informação contida na verossimilhança
- O conhecimento/incerteza atualizados sobre θ é expresso pela distribuição posteriori

Abordagem Bayesiana

O objeto de inferência é a distribuição à posteriori

- A incerteza inicial sobre θ é expressa na forma de uma distribuição priori para θ
- Com amostra atualizamos opinião θ com a informação contida na verossimilhança
- O conhecimento/incerteza atualizados sobre θ é expresso pela distribuição posteriori

Formalmente:

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta) \cdot f(\theta)}{\int f(y|\theta) \cdot f(\theta) \mathrm{d}\theta} \propto f(\theta) \cdot L(\theta|y)$$

ou, usando jargão técnico:

$$\textit{posteriori} \propto \textit{priori} \cdot \textit{verossimilhança}$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Abordagem Bayesiana

No contexto do exemplo de estimação de proporção θ:

- Extensão da definição do modelo:

$$\begin{aligned} [Y|\theta] &\sim B(n, \theta) \\ [\theta] &\sim Pr(a, b) \;\; (\textit{priori}) \end{aligned}$$

- permite obter (via teorema de Bayes)

$$\begin{aligned} [\theta|y] &\propto [Y|\theta][\theta] \\ [\theta|y] &\sim \pi(a^*, b^*) \;\; (\textit{posteriori}) \end{aligned}$$

- Analogias diretas para estimação (pontual e intervalar),
- …mas não diretas ou triviais para testes de hipótese (valores na *posteriori* sem analogias diretas com razão de verossimilhanças).

Abordagem Bayesiana

No contexto do exemplo de estimação de proporção θ:

- Priori: $[\theta] \sim \mathrm{Beta}(a, b)$ (distribuição Beta)

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)+\Gamma(b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}$$

- Verossimilhança: $[Y|\theta] \sim \mathrm{Bin}(n, \theta)$ (em θ, é proporcional à distribuição Beta)

$$L[\theta|y] \equiv f(y|\theta) = \binom{n}{y} \theta^{y}(1-\theta)^{n-y}$$

- Posteriori:

$$f(\theta|y) \propto f(\theta) \cdot L(\theta|y) \propto \theta^{y+a-1}(1-\theta)^{n-y+b-1}$$

  Logo

$$[\theta|y] \sim \mathrm{Beta}(a+y, n-y+b)$$

  (distribuição Beta - conjugada)

A essência de Bayes ilustrada (I)

Exemplo I : estimação da proporção de atributo (θ) na população

Priori: Acredita-se que o atributo ocorre em 40% da população com 70% de chance de estar entre 30 e 50%. Informação expressa como distribuição de probabilidades para θ:

$$[\theta] \sim Beta(9.9, 15)$$

Verossimilhança: Modelo Binomial, amostra n=80 e y=19

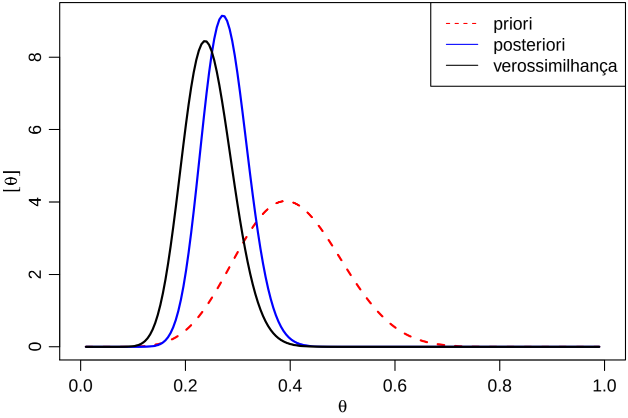
$$[y|\theta] = \binom{80}{19} \theta^{19} (1-\theta)^{80-19}$$

Posteriori: a distribuição de probabilidades para θ após observar os dados:

$$[\theta|y] \sim Beta(29, 76)$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

A essência de Bayes ilustrada (I)



A essência de Bayes ilustrada (I)

```
(prI <- prioriBeta(0.4, c(0.30, 0.50), 0.70))
##     alpha      beta
##  9.912277 14.868415
postBinom(19, 80, prI, plot=FALSE)
## $pars
##                alpha     beta
## priori      9.912277 14.86842
## posteriori 28.912277 75.86842
##
## $summary
##                 moda       media  variancia
## priori     0.3912206 0.271571210 0.40000000
## posteriori 0.2759313 0.009309292 0.00188875
##
## $EMV
## [1] 0.2375
```

A essência de Bayes ilustrada (II)

Uma priori bem diferente:

- Priori: Acredita-se que o atributo ocorre em 8% da população com 90% de chance de estar entre 3 e 20%.

$$[\theta] \sim Beta(2.1, 24)$$

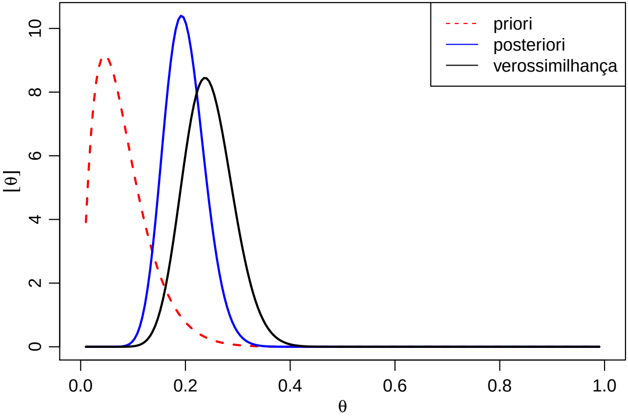
- Verossimilhança: Modelo Binomial, amostra n=80 e y=19

$$[y|\theta] = \binom{80}{19} \theta^{19} (1-\theta)^{80-19}$$

- Posteriori: após observar os dados:

$$[\theta|y] \sim Beta(21, 85)$$

A essência de Bayes ilustrada (II)



A essência de Bayes ilustrada (II)

```
(prII <- prioriBeta(0.08, c(0.03, 0.20), 0.90))
##     alpha      beta
##  2.124901 24.436358
postBinom(19, 80, prII, plot=FALSE)
## $pars
##                 alpha     beta
## priori      2.124901 24.43636
## posteriori 21.124901 85.43636
##
## $summary
##                  moda       media   variancia
## priori     0.0457998 0.192469955 0.080000000
## posteriori 0.1982418 0.002670415 0.001477688
##
## $EMV
## [1] 0.2375
```

A essência de Bayes ilustrada (III)

Uma priori vaga :

- Priori: Não se sabe praticamente nada sobre θ. Expressa-se então que o atributo ocorre em 50% da população mas com 90% de chance de estar entre 5 e 95%.

$$[\theta] \sim Beta(1.2, 1.2)$$

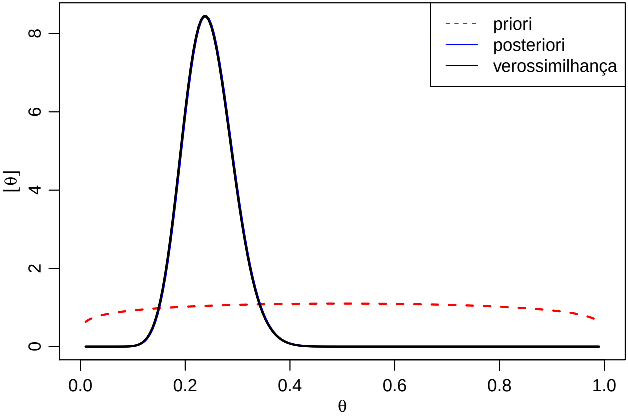
- Verossimilhança: Modelo Binomial, amostra n=80 e y=19

$$[y|\theta] = \binom{80}{19} \theta^{19} (1-\theta)^{80-19}$$

- Posteriori: após observar os dados:

$$[\theta|y] \sim Beta(20, 62)$$

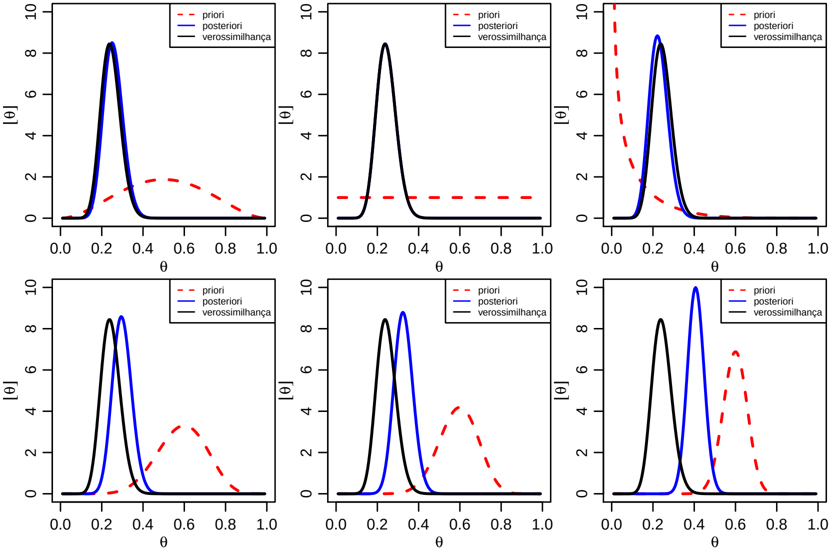
A essência de Bayes ilustrada (III)



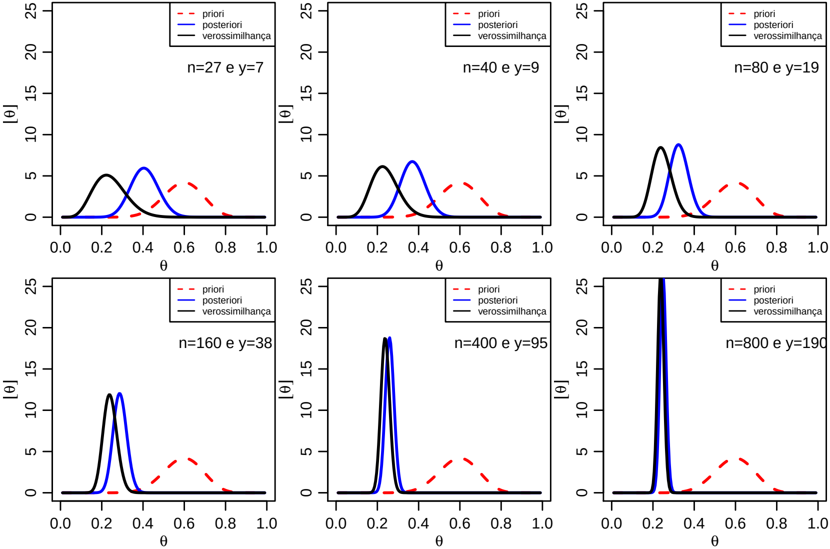
A essência de Bayes ilustrada (III)

```
(prIII <- prioriBeta(0.50, c(0.05, 0.95), 0.90))
##    alpha     beta
## 1.170088 1.170088
postBinom(19, 80, prIII, plot=FALSE)
## $pars
##                alpha      beta
## priori      1.170088  1.170088
## posteriori 20.170088 62.170088
##
## $summary
##                 moda      media   variancia
## priori     0.5000000 0.23861148 0.500000000
## posteriori 0.2449605 0.07484633 0.002219276
##
## $EMV
## [1] 0.2375
```

Efeito da priori (fixando amostra)



Efeito do tamanho da amostra (fixando priori)



Comentários

- Expressão da opinião "a priori" é necessária e sua especificação é um desafio,
- as interpretações de intervalo de confiança são agora probabilísticas, por exemplo pode-se falar em:

$$P[a < \theta < b] = 0.95$$

- bem como, no contexto do exemplo, pode-se falar em

$$P[\theta \geq 0, 20]$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Comparando paradigmas

Qual o valor de θ? (estimação pontual):

- Frequentista: fornecido por algum método de estimação
- Verossimilhança: máximo (supremo) da função de verossimilhança
- Bayesiana: alguma medida resumo da posteriori (média, moda, mediana, ...

Expressão da incerteza sobre θ (estimação intervalar):

- Frequentista: variabilidade na distribuição amostral (intervalo de confiança)
- Verossimilhança: faixa de valores dentro de um limite de compatibilidade com a amostra, curvatura da função
- Bayesiana: variabilidade na distribuição posteriori (intervalo de credibilidade)

Comparando paradigmas

opinião em relação a valor de interesse $\theta_0 = 0,20$ (teste de hipótese):

- Frequentista: probabilidade na distribuição amostral (p-valor)
- Verossimilhança: comparação da verossimilhança deste valor com a do máximo
- Bayesiana: probabilidade na posteriori

Exemplo 2: Comparando dois grupos

Questões de inferência:

- Quais são os parâmetros (quantidades de interesse na população) a serem estimados a partir dos dados?
- Qual a incerteza associada ao(aos) parâmetro(s) de interesse?
- Pode-se afirmar que os grupos diferem quanto ao peso e/ou altura?

As questões podem ser endereçadas pelos paradigmas frequentista, de verosimilhança e bayesiano.
OBS: pode-se adotar o ainda algum métodos não paramétrico mas este é, tipicamente, ainda um método frequentista.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Exemplo 2: Comparando dois grupos (cont)

Uma possível formatação do problema:

$$Grupo1: Y_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$$
$$Grupo2: Y_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Exemplo 2: Comparando dois grupos (cont)

Uma possível formatação do problema:

$$Grupo1: Y_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$$
$$Grupo2: Y_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$$

Reexpressão alternativa (e conveniente)

$$Grupo1: Y_1 \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$
$$Grupo2: Y_2 \sim \mathrm{N}(\mu + \theta, \sigma^2)$$

Parâmetros: μ, θ e σ^2

- Quais são os parâmetros (quantidades desconhecidas na população) a serem estimados a partir dos dados?
- Qual a incerteza associada ao(aos) parâmetro(s) de interesse?
- Pode-se afirmar que os grupos diferem quanto ao peso e/ou altura?

Exemplo 2: Comparando dois grupos (cont)

Sob os paradigmas discutidos aqui baseia-se a inferência em:

- frequentista: distribuição amostral da $\hat{\theta}$
- verossimilhança: na função de verossimilhança (perfilhada) para $\hat{\theta}$
- bayesiano: na distribuição à posteriori para θ

Procedimentos frequentistas incluem testes e procedimentos alternativos tais como não paramétricos, aleatorizados, *bootstrap*.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

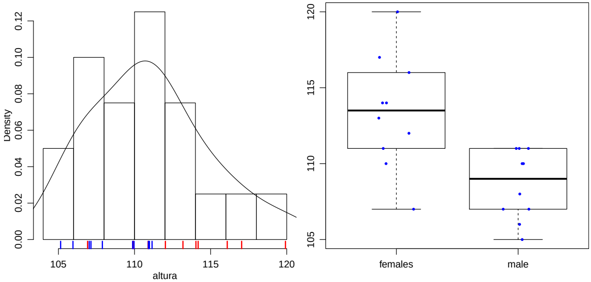
Um outro exemplo

Comparando dois grupos: comprimento da mandíbula (chacal dourado)

```
##    females male
## 1      120  110
## 2      107  111
## 3      110  107
## 4      116  108
## 5      114  110
## 6      111  105
## 7      113  107
## 8      117  106
## 9      114  111
## 10     112  111
```

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Um outro exemplo



Um outro exemplo

- Frequentista:
  - analítica: teste-t, opções e limitações (formulário)
  - computacional: teste aleatorizado – algorítmo
- Verossimilhança (perfilhada) para quantidade de interesse
- Bayesiana – distribuição marginal para parâmetro de interesse

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Inferência frequentista

$$\text{Estimativa}: \hat{\theta} = \overline{y_2} - \overline{y_1}$$

$$\hat{\theta} \sim \mathrm{t}_{\nu}(\cdot)(\text{distribuição amostral})$$

$$\text{IC}: \hat{\theta} \pm t_{1-\alpha/2}(\nu) S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\text{TH}: (H_1 : \theta \neq \theta_0 = 0) : t = \frac{\overline{y_2} - \overline{y_1}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{t}(\nu)$$

$$\nu = n1 + n2 - 2 \ \text{ e } \ S = \hat{\sigma}^2 = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

O teste-t (1)

teste-t para duas amostras supondo variâncias desconhecidas iguais entre os grupos.

```
with(mandible, t.test(females, male, var.equal=TRUE))
```

```
##
##  Two Sample t-test
##
## data:  females and male
## t = 3.4843, df = 18, p-value = 0.002647
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  1.905773 7.694227
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##     113.4     108.6
```

O teste-t - opções

Diferentes "cenários" para o teste-t:

- Amostras independentes
  - Variâncias iguais
  - Variâncias diferentes
- Amostras pareadas (dependentes)

Opções na função para definições do teste-t do *R*:

```
t.test(x, y = NULL,
     alternative = c("two.sided", "less", "greater"),
       mu = 0, paired = FALSE, var.equal = FALSE,
       conf.level = 0.95, ...)
```

Laboratório de Estatística e Geoinformação

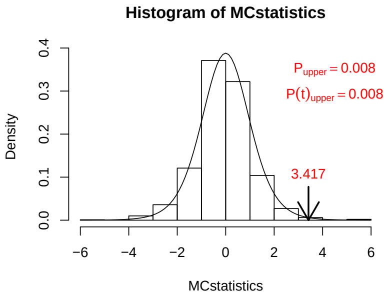
O teste-t (2)

```
with(mandible, t.test(females, male, var.equal=FALSE))
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  females and male
## t = 3.4843, df = 14.894, p-value = 0.00336
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  1.861895 7.738105
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##     113.4     108.6
```

O teste-t (3)

```
with(mandible, t.test(females, male, paired=TRUE))
##
##  Paired t-test
##
## data:  females and male
## t = 3.417, df = 9, p-value = 0.007665
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  1.622226 7.977774
## sample estimates:
## mean of the differences
##                     4.8
```

Um outro exemplo




```
## Paired data
## data statistics =  3.416968784709
##
## probabilities based on Monte Carlo simulations:
## upper.tail lower.tail
##   0.007992   0.992008
##
## probabilities based on the "t" distribution:
## upper.tail lower.tail
##   0.003832   0.996168
```

Inferência pela verossimilhança

Princípios e procedimentos *gerais*:

- Adotar um modelo para os dados
- Notar os parâmetros do modelo
- Obter a função de verossimilhança para os dados obtidos (função dos parâmetros)
- Maximizar a função de verossimilhança (estimativas são os valores dos parâmetros que maximizam a função)
- Obter inferências de interesse sobre parâmetros de interesse

Procedimentos podem ser analíticos (matemáticos) ou numéricos (computacional).

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Inferência pela verossimilhança

Sob modelo adotado: Função de verossimilhança:

```
require(stats4)
ll <- function(mu, theta, lsigma, am1, am2){
    sigma <- exp(lsigma)
    l1 <- sum(dnorm(am1, m=mu, sd=sigma, log=T))
    l2 <- sum(dnorm(am2, m=mu+theta, sd=sigma, log=T))
    return(-(l1+l2))
}
```

Maximização:

```
fit <- mle(ll, start=list(mu=110, theta=0, lsigma=log(10)),
           fixed=list(am1 = mandible$fem, am2 = mandible$male))
```

Inferência pela verossimilhança

Inferências sobre parâmetro de interesse:

```
summary(fit)
```

```
## Maximum likelihood estimation
##
## Call:
## mle(minuslogl = ll, start = list(mu = 110, theta = 0, lsigma = log(10)),
##     fixed = list(am1 = mandible$fem, am2 = mandible$male))
##
## Coefficients:
##          Estimate Std. Error
## mu     113.400003  0.9241214
## theta   -4.800002  1.3069050
## lsigma   1.072381  0.1581138
##
## -2 log L: 99.65276
```

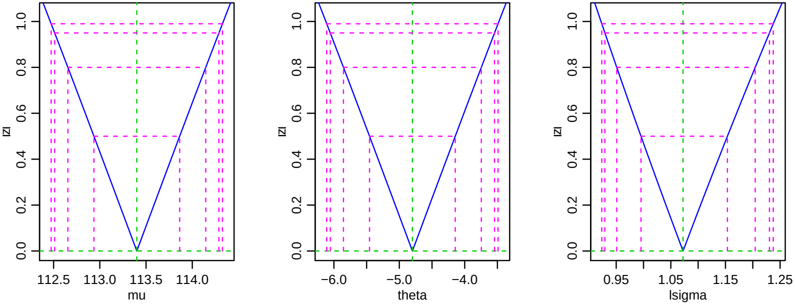
```
confint(fit, level=0.95)
```

```
## Profiling...
##              2.5 %     97.5 %
## mu     111.4978494 115.302151
## theta   -7.4900472  -2.109953
## lsigma   0.7914638   1.417925
```

```
prof <- profile(fit)
```

Inferência pela verossimilhança

Inferências sobre parâmetro de interesse:



Comparando modelos e verossimilhanças

Comparando modelos para os dados (revisitando AULA 07)

$$Y_{ij} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$Y_{ij} \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma^2)$$

$$Y_{ij} \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$$

```
L1 <- lm(mandible~1, data=mand)
L2 <- lm(mandible~sex, data=mand)
c(logLik(L1), logLik(L2))
```

```
## [1] -54.98137 -49.82638
```

```
anova(L1, L2)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: mandible ~ 1
## Model 2: mandible ~ sex
##   Res.Df   RSS Df Sum of Sq     F   Pr(>F)
## 1     19 286.0
## 2     18 170.8  1     115.2 12.14 0.002647 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Verossimilhanças penalizadas para comparação

$$-2\log(Lik) + k * \#\text{par}$$

```
logLik(L1)
## 'log Lik.' -54.98137 (df=2)
logLik(L2)
## 'log Lik.' -49.82638 (df=3)
##
-2 * logLik(L1) + 2 * 2
## 'log Lik.' 113.9627 (df=2)
-2 * logLik(L2) + 2 * 3
## 'log Lik.' 105.6528 (df=3)
c(AIC(L1), AIC(L2))
## [1] 113.9627 105.6528
##
-2 * logLik(L1) + log(20) * 2
## 'log Lik.' 115.9542 (df=2)
-2 * logLik(L2) + log(20) * 3
## 'log Lik.' 108.64 (df=3)
c(BIC(L1), BIC(L2))
## [1] 115.9542 108.6400
```

Inferência Bayesiana

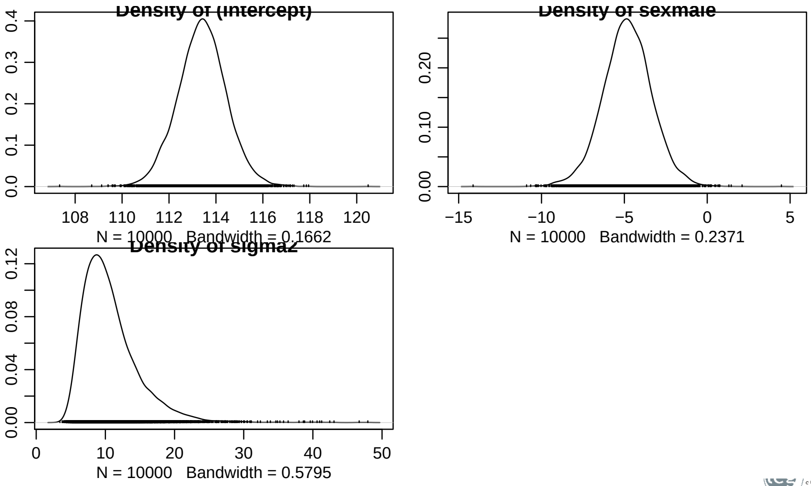
Obtenção de distribuição posteriori para a diferença de médias

```
require(MCMCpack)
Btt <- MCMCregress(mandible ~ sex, dat=mand)
summary(Btt)
```

```
##
## Iterations = 1001:11000
## Thinning interval = 1
## Number of chains = 1
## Sample size per chain = 10000
##
## 1. Empirical mean and standard deviation for each variable,
##    plus standard error of the mean:
##
##                Mean    SD Naive SE Time-series SE
## (Intercept) 113.413 1.040  0.01040        0.01017
## sexmale      -4.817 1.479  0.01479        0.01479
## sigma2       10.728 4.104  0.04104        0.04573
##
## 2. Quantiles for each variable:
##
##                2.5%     25%     50%     75%   97.5%
## (Intercept) 111.374 112.751 113.421 114.078 115.483
## sexmale      -7.807  -5.759  -4.822  -3.867  -1.887
## sigma2        5.454   7.901   9.875  12.523  20.853
```

Inferência Bayesiana

Obtenção de distribuição posteriori para a diferença de médias



Abordagem geral e generalizando

Generalizações … muitas possíveis
Vamos começar reescrevendo

$$
\begin{aligned}
Y_{ij}^{(\lambda)} &\sim \mathrm{N}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2) \\
g(\mu_{ij}) &= f(x_{ij}, \beta) \\
g(\sigma_{ij}^2) &= f(z_{ij}, \varphi)
\end{aligned}
$$

Abordagem geral e generalizando

- Expecificação do modelo associado ao teste-t (amostras independentes, variâncias iguais)

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} &\sim \mathrm{N}(\mu_{ij}, \sigma^2_{ij}) \\
\mu_{ij} &= \beta_o + \beta_1 x_{sex} \\
\sigma^2_{ij} &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

- Mudando a distribuição

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} &\sim \mathrm{G}(\mu_{ij}, \phi_{ij}) \\
\log(\mu_{ij}) &= \beta_o + \beta_1 x_{sex} \\
\phi_{ij} &= \phi
\end{aligned}
$$

Abordagem geral e generalizando

Modelos de regressão (linear) : exemplo do início do curso:
$Y = t$ (tempo) e $x = \sqrt{d}$ (distância)

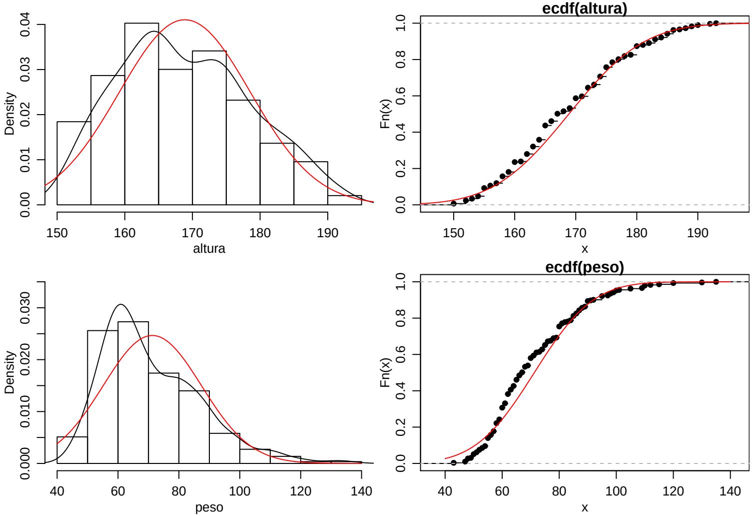
$$
\begin{aligned}
Y_{ij} &\sim \mathrm{N}(\mu_{ij}, \sigma^2_{ij}) \\
\mu_{ij} &= \beta_o + \beta_1 x \quad (\mathrm{ou} X\beta) \\
\sigma^2_{ij} &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

Generalizações

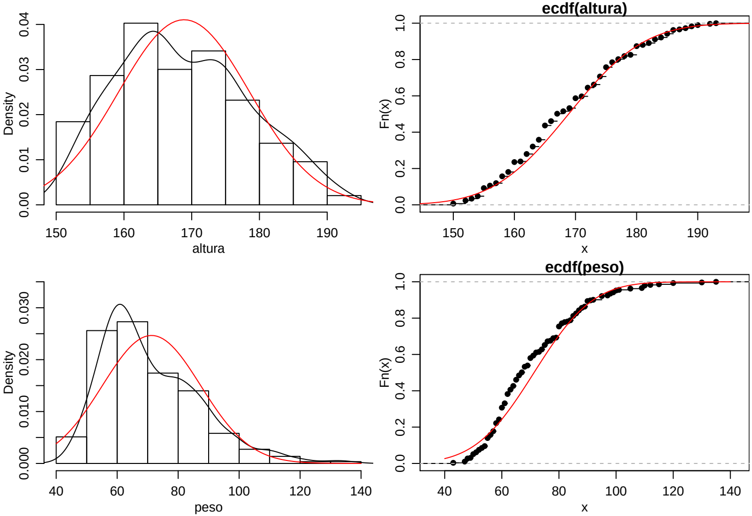
- Regressão linear múltipla
- Regressão para variável transformada
- Regressão heterocedástica
- Modelo linear generalizado
- *splines*
- Regressão não linear
- Modelo aditivo generalizado
- ...

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Juntando dados e probabilidades



Juntando dados e probabilidades

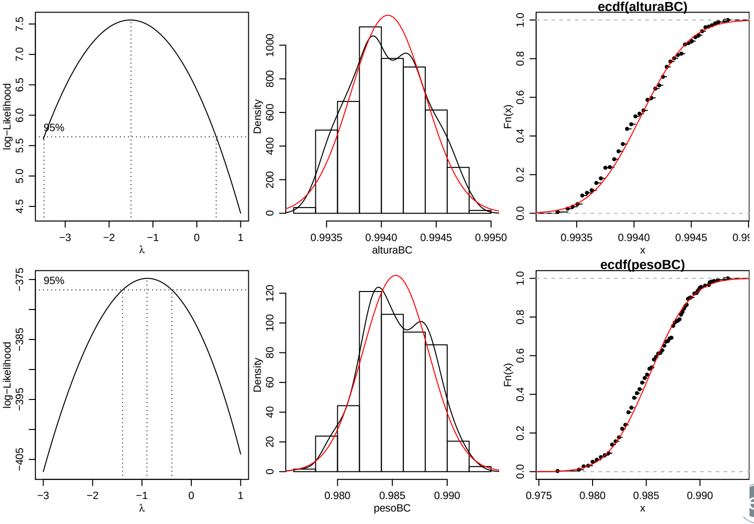


Distribuição normal não parece se ajustar muito bem aos dados

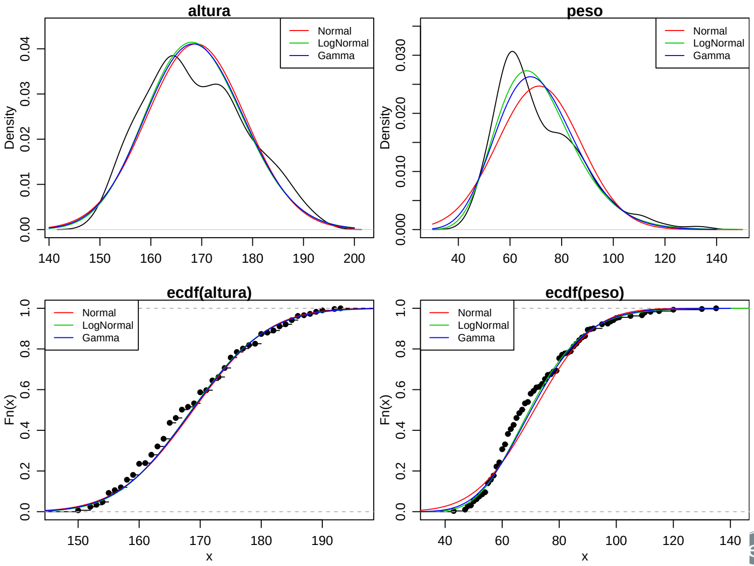
O que fazer?

Opção 1: transformação de dados

Box-Cox : $Y^{*} = \frac{Y^{\lambda} - 1}{\lambda}$



Opção 2: mudando a distribuição



Ajustes de distribuições para altura

```
(alt.n <- MASS:::fitdistr(altura, densfun="normal"))
##       mean            sd
##   168.8771331     9.7033784
##  (  0.5668774) (  0.4008429)
(alt.ln <- MASS:::fitdistr(altura, densfun="lognormal"))
##      meanlog        sdlog
##   5.127532740   0.057155184
##  (0.003339041) (0.002361059)
(alt.g <- MASS:::fitdistr(altura, densfun="gamma"))
##       shape          rate
##   301.8637701     1.7874757
##  ( 24.9194935) (  0.1476821)
(alt.bc <- MASS:::fitdistr(-((1/altura)-1), densfun="normal"))
##        mean            sd
##   9.940592e-01   3.378220e-04
##  (1.973577e-05) (1.395530e-05)
```

Comparando distribuições para altura

```
(altlL <- c(logLik(alt.n), logLik(alt.ln), logLik(alt.g),
            (-1-1)*sum(log(altura)) + logLik(alt.bc)))
## [1] -1081.584 -1079.554 -1080.121 -1078.537
max(altlL) - altlL
## [1] 3.047220 1.017739 1.584323 0.000000
```

Ajustes de distribuições para peso

```
(peso.n <- MASS::fitdistr(peso, densfun="normal"))
##       mean          sd
##   71.2696246   16.1490180
##  ( 0.9434357) ( 0.6671098)
(peso.ln <- MASS::fitdistr(peso, densfun="lognormal"))
##      meanlog        sdlog
##   4.242737888   0.214513437
##  (0.012532009) (0.008861468)
(peso.g <- MASS::fitdistr(peso, densfun="gamma"))
##       shape          rate
##   21.23388710    0.29793750
##  ( 1.74042991) ( 0.02471052)
(peso.bc <- MASS::fitdistr(-((1/peso)-1), densfun="normal"))
##        mean             sd
##   0.9853086959   0.0030175780
##  (0.0001762888) (0.0001246550)
```

Comparando distribuições para peso

```
(pesolL <- c(logLik(peso.n), logLik(peso.ln), logLik(peso.g),
             (-1-1)*sum(log(peso))+logLik(peso.bc)))
## [1] -1230.834 -1207.832 -1213.527 -1201.626
max(pesolL) - pesolL
## [1] 29.207475  6.205728 11.900916  0.000000
```

Opção 3: incluindo variáveis explicativas

Uma notação razoavelmente geral

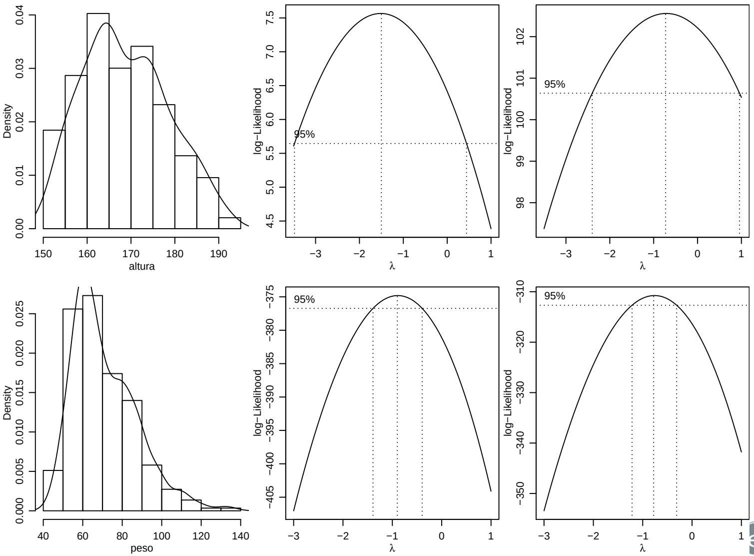
$$Y^\lambda : \text{altura (ou peso)} \sim \mathrm{Dist.}(\mu = \mathrm{E}[Y], \sigma^2 = \mathrm{Var}[Y])$$
$$\text{Modelo 1: } \mathrm{E}[Y] = \mu$$
$$\text{Modelo 2: } \mathrm{E}[Y] = \mu_i, i = 1, 2 \text{(M/F)}$$

Distribuições:

- Normal
- Gama
- Transformação Box-Cox ($\lambda = -1$)

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Revendo Box-Cox: com covariável



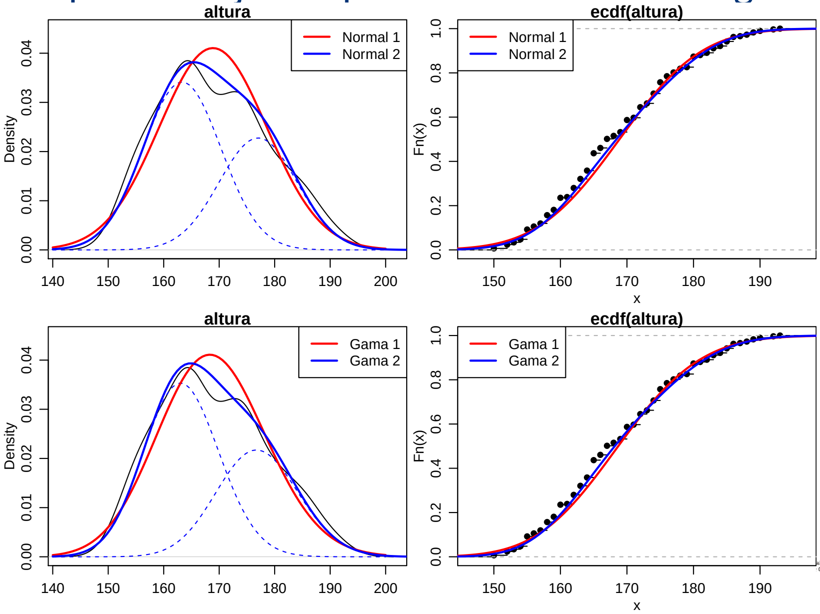
Modelos para altura

Mas será apenas uma questão de escolher a distribuição?

```
## Ajustando distribuições
alt.n <- glm(altura ~ 1, family="gaussian", data=quest)
alt.g <- glm(altura ~ 1, family=Gamma(), data=quest)
alt.bc <- glm(-((1/altura)-1) ~ 1, family="gaussian", data=quest)
## Ajustando distribuições com médias diferentes para  masculino e feminino
alt.n1 <- glm(altura ~ sexo, family="gaussian", data=quest)
alt.g1 <- glm(altura ~ sexo, family=Gamma(), data=quest)
alt.bc1 <- glm(-((1/altura)-1) ~ sexo, family="gaussian", data=quest)
## Verossimilhanças dos ajustes
fits <- rbind(c(logLik(alt.n), logLik(alt.g),
                (-1-1)*sum(log(altura)) + logLik(alt.bc), 2),
              c(logLik(alt.n1), logLik(alt.g1),
                (-1-1)*sum(log(altura)) + logLik(alt.bc1), 3)
              )
dimnames(fits) <- list(c("Modelo 1","Modelo 2"),
                       c("Normal","Gamma","Box-Cox","npar"))
fits
```

```
##               Normal      Gamma    Box-Cox npar
## Modelo 1 -1081.5839 -1080.1117 -1078.5367    2
## Modelo 2  -985.4326  -984.1922  -983.4681    3
```

Comparando ajustes para modelos normal e gama



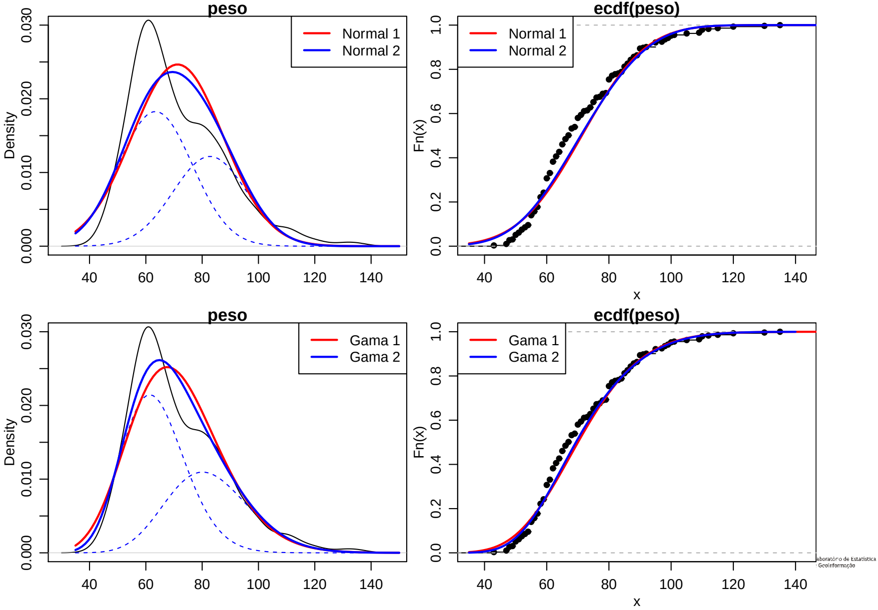
Modelos para peso

Mas será apenas uma questão de escolher a distribuição?

```
## Ajustando distribuições
peso.n <- glm(peso ~ 1, family="gaussian", data=quest)
peso.g <- glm(peso ~ 1, family=Gamma(), data=quest)
peso.bc <- glm(-((1/peso)-1) ~ 1, family="gaussian", data=quest)
## Ajustando distribuições com médias diferentes para  masculino e feminino
peso.n1 <- glm(peso ~ sexo, family="gaussian", data=quest)
peso.g1 <- glm(peso ~ sexo, family=Gamma(), data=quest)
peso.bc1 <- glm(-((1/peso)-1) ~ sexo, family="gaussian", data=quest)
## Verossimilhanças dos ajustes
fits.peso <- rbind(c(logLik(peso.n), logLik(peso.g),
                     (-1-1)*sum(log(peso)) + logLik(peso.bc), 2),
                   c(logLik(peso.n1), logLik(peso.g1),
                     (-1-1)*sum(log(peso)) + logLik(peso.bc1), 3))
dimnames(fits.peso) <- list(c("Modelo 1","Modelo2"),
                            c("Normal","Gamma","Box-Cox","npar"))
fits.peso
```

```
##             Normal     Gamma   Box-Cox npar
## Modelo 1 -1230.834 -1213.532 -1201.626    2
## Modelo2  -1168.506 -1146.421 -1138.016    3
```

Comparando ajustes para modelos normal e gama



Probabilidade e modelagem

- Descrever distribuições de probabilidades e seus parâmetros
- Escolher melhor(es) ajustes
- Respostas a questões práticas
- Modelagem paramétrica como referência
- Verossimilhança como princípio básico
- Outras abordagens e paradigmas

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Expressão da Verossimilhança I

V.A. observável discreta (não há ambiguidade)

$$L(\theta) \equiv P_\theta[\underline{Y} = \underline{y}] = P_\theta[Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n]$$

Sob independência

$$L(\theta) \equiv \prod_{i=1}^{n} P_\theta[Y_i = y_i]$$

Exemplo:

$$Y \sim P(\theta)$$

Dados: $(y_1, \ldots, y_n),$ amostra aleatória

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\exp\{-\theta\}\theta^{y_i}}{y_i!} = \frac{\exp\{-n\theta\}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!} \propto \exp\{-n\theta\}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

Expressão da Verossimilhança II

V.A. contínua: medição à certa precisão $(y_{iI} \leq y_i \leq y_{iS})$

- Forma mais geral (densidade multivariada)

$$L(\theta) = P_\theta[y_{1I} \leq Y_1 \leq y_{1S}, \ldots, y_{nI} \leq Y_n \leq y_{nS}]$$

- Sob independência

$$\begin{aligned} L(\theta) &= P_\theta[y_{1I} \leq Y_1 \leq y_{1S}] \cdot P_\theta[y_{2I} \leq Y_2 \leq y_{2S}] \ldots P_\theta[y_{nI} \leq Y_n \leq y_{nS} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P_\theta[y_{iI} \leq Y_i \leq y_{iS}] \end{aligned}$$

Expressão da Verossimilhança II

V.A. contínua: medição à certa precisão $(y_{iI} \leq y_i \leq y_{iS})$

- Forma mais geral (densidade multivariada)

$$L(\theta) = P_\theta[y_{1I} \leq Y_1 \leq y_{1S}, \ldots, y_{nI} \leq Y_n \leq y_{nS}]$$

- Sob independência

$$\begin{aligned} L(\theta) &= P_\theta[y_{1I} \leq Y_1 \leq y_{1S}] \cdot P_\theta[y_{2I} \leq Y_2 \leq y_{2S}] \ldots P_\theta[y_{nI} \leq Y_n \leq y_{nS} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P_\theta[y_{iI} \leq Y_i \leq y_{iS}] \end{aligned}$$

- Se grau de precisão comum, $(y_i - \delta/2 \leq Y_i \leq y_i + \delta/2)$;

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta[y_i - \delta/2 \leq Y_i \leq y_i + \delta/2] = \prod_{i=1}^{n} \int_{y_i-\delta/2}^{y_i+\delta/2} f(y_i, \underline{\theta}) d(y_i).$$

Expressão da Verossimilhança II (cont)

- alto grau de precisão (δ é pequeno em relação a variabilidade dos dados)

$$L(\theta) \approx \left(\prod_{i=1}^{n} f(y_i, \underline{\theta}) \right) \delta^n,$$

Expressão da Verossimilhança II (cont)

- alto grau de precisão (δ é pequeno em relação a variabilidade dos dados)

$$L(\theta) \approx \left(\prod_{i=1}^{n} f(y_i, \underline{\theta}) \right) \delta^n,$$

- e se δ não depende dos valores dos parâmetros

$$L(\theta) \approx \prod_{i=1}^{n} f(y_i, \underline{\theta})$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Expressão da Verossimilhança II (cont)

- alto grau de precisão (δ é pequeno em relação a variabilidade dos dados)

$$L(\theta) \approx \left(\prod_{i=1}^{n} f(y_i, \underline{\theta}) \right) \delta^n,$$

- e se δ não depende dos valores dos parâmetros

$$L(\theta) \approx \prod_{i=1}^{n} f(y_i, \underline{\theta})$$

- observações não independentes - densidade multivariada:

$$L(\theta) \approx f(\underline{y}, \underline{\theta})$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Referência bibliográfica