

CE-227: Inferência Bayesiana – 2ª Prova (26/11/2019)

GRR: _____ Nome: _____

- Vimos em aula o exemplo de taxas bayesianas baseadas na distribuição de Poisson. Vamos agora considerar um exemplo semelhante, porém com a distribuição Binomial. Considere que temos uma amostra de N grupos, cada um com n_i indivíduos onde conta-se o número y_i com determinada característica. Como contexto ilustrativo considere que registra-se o números de aprovados em diferentes turmas de uma disciplina.
 - Escreva o modelo, adotando a priori conjugada. Explique cada termo e identifique o parâmetro de interesse.
 - Obtenha a posteriori.
 - A distribuição posteriori é a inferência completa sobre o parâmetro. Entretanto se for necessário um relato resumindo a informação final (posteriori) em um único valor qual(uais) seriam as opções.
 - Caso desejar-se reportar a posteriori por um intervalo de valores, como seriam obtidos os limites de tal intervalo? Forneça ao menos duas maneiras explicando a forma de obtenção e comentando a diferença entre elas. Explique ainda por que este intervalo **não** é chamado de *intervalo de confiança*.
 - Explique como obter (segundo a análise bayesiana) a predição do número de aprovados para uma novo grupo com n_p indivíduos.
 - Explique como o procedimento bayesiano empírico seria efetivado neste caso.
- Considere um modelo Gama para a distribuição de uma amostra aleatória de uma variável, ou seja,

$$f(y|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} \exp\{-\beta y\}.$$

Considere ainda prioris também Gama, independentes, para cada parâmetro.

- Obtenha a expressão da posteriori conjunta, a uma constante de proporcionalidade.
 - Indique como pode ser obtida a distribuição posteriori marginal de cada parâmetro, isto é, $f(\alpha|y)$ e $f(\beta|y)$.
 - Obtenha a distribuição posteriori condicional de cada parâmetro, isto é, $f(\alpha|\beta, y)$ e $f(\beta|\alpha, y)$.
 - Explique como seriam obtidas amostras de posteriori neste caso, (i) por simulação direta da posteriori (ii) pelo algoritmo de Gibbs.
 - Neste exemplo, nos passos do Gibbs as amostras são obtidas diretamente de alguma distribuição conhecida ou é necessário usar algum algoritmo de rejeição (MCMC ou algum outro). Justifique.
- Descreva o modelo sendo ajustado e a estrutura dos dados que seria necessária nas seguintes declarações de modelos em JAGS.

```
(a) model{
  for(i in 1:n){
    Y[i] ~ dbern(q[i])
    logit(q[i]) <- beta[1] + beta[2]*X[i,1] + beta[3]*X[i,2]
  }
  for(j in 1:3){
    beta[j] ~ dnorm(0,0.1)
  }
}

(b) model{
  for(i in 1:n){
    Y[i] ~ dpois(mu[i])
    mu[i] <- N[i] * lambda
  }
  lambda ~ dgamma(a, beta)
  tau ~ dgamma(c, d)
  beta <- 1/tau
  a <- 1.2
  c <- 1.5
  d <- 2
}
```