

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра № 806 «Вычислительная математика и программирование»

Разреженная идентификация нелинейных динамических систем

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Студент группы М8О-407Б-19: Бирюков Виктор Владимирович
Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф., проф. каф. 806 Д. Л. Ревизников

Москва — 2023



Актуальность темы

- Динамические системы описывают большое количество различных процессов.
- Задача извлечения закономерностей из большого объема шумных данных может превышать возможности человека.
- Знание динамической системы, лежащей за данными, позволит использовать соответствующий математический аппарат как часть анализа данных.



Цель и задача работы

Цель — идентификация систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на основе потенциально шумных данных.

Задачи:

- Реализация алгоритма идентификации.
- Реализация алгоритмов разреженной регрессии.
- Реализация алгоритмов дифференцирования шумных данных.
- Тестирование алгоритма идентификации на известных системах ОДУ.
- Сравнение различных методов дифференцирования и регрессии.



Дано:

- Входные данные представляют из себя массив значений некоторых величин
- Данные могут содержать некоторую шумовую компоненту
- Предполагается, что замеры величин производились через равные промежутки времени

Необходимо разработать алгоритм, при помощи которого можно получить динамическую систему (систему ОДУ), которая описывает эволюцию заданных величин.



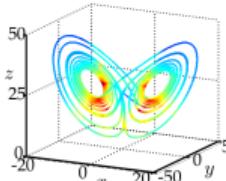
Алгоритм решения задачи

I. True Lorenz System

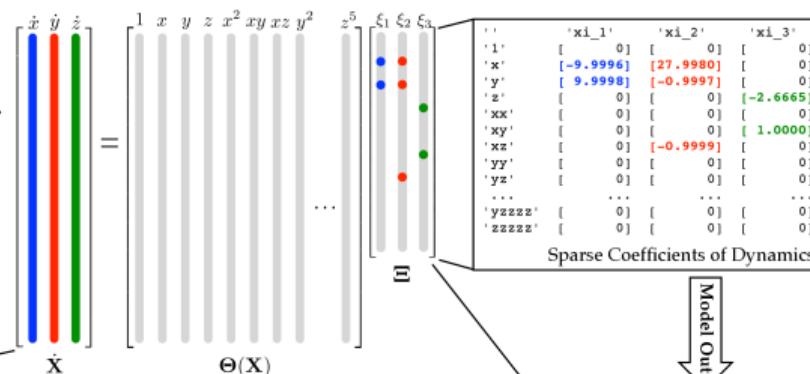
$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - \beta z.$$



Data In

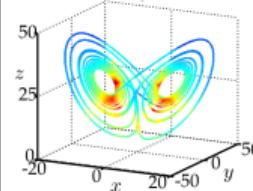


III. Identified System

$$\dot{x} = \Theta(x^T)\xi_1$$

$$\dot{y} = \Theta(x^T)\xi_2$$

$$\dot{z} = \Theta(x^T)\xi_3$$



Brunton et al., 2016

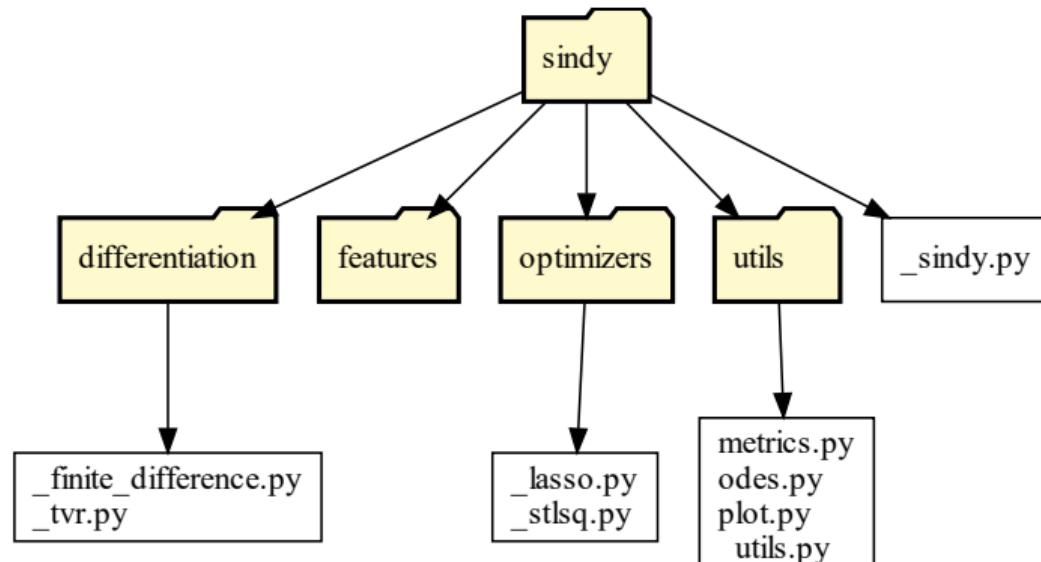


- Язык программирования Python
- Библиотеки научных вычислений NumPy и SciPy
- Библиотека машинного обучения Scikit-learn
- Библиотеки построения графиков Matplotlib и Seaborn



Архитектура решения

Разработанное решение реализовано в формате модуля языка Python.



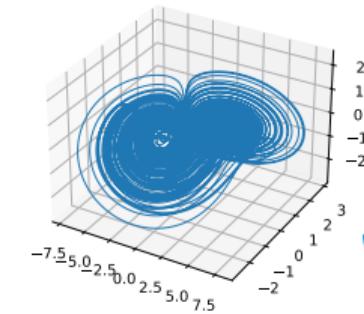
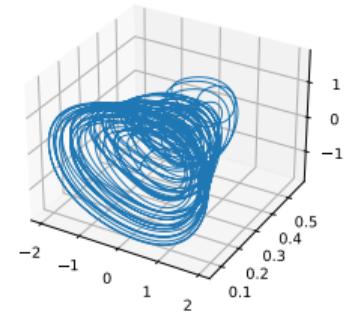
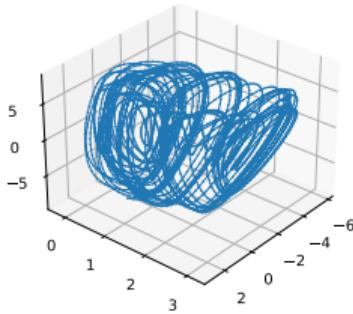
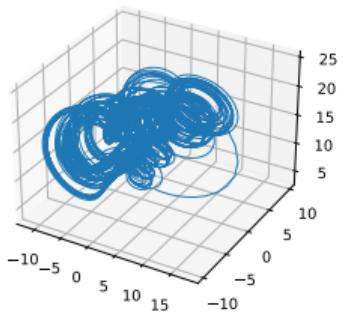
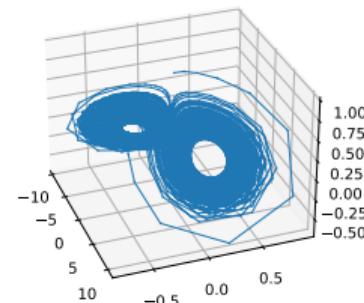
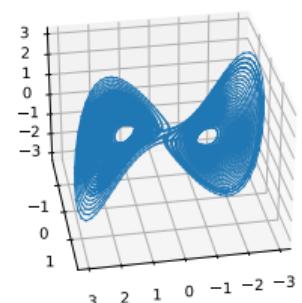
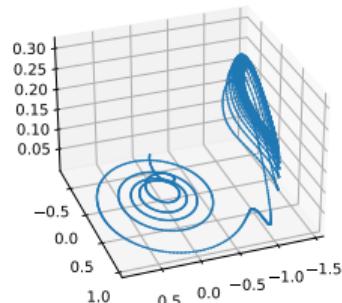
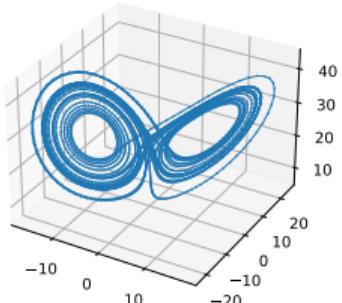
Описание программной разработки

Репозиторий с исходным кодом расположен по адресу
<https://github.com/iktovr/bachelor-diploma>



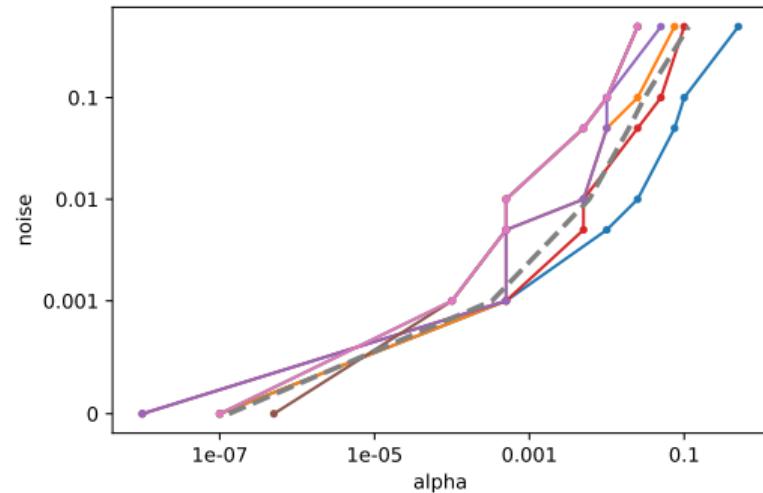
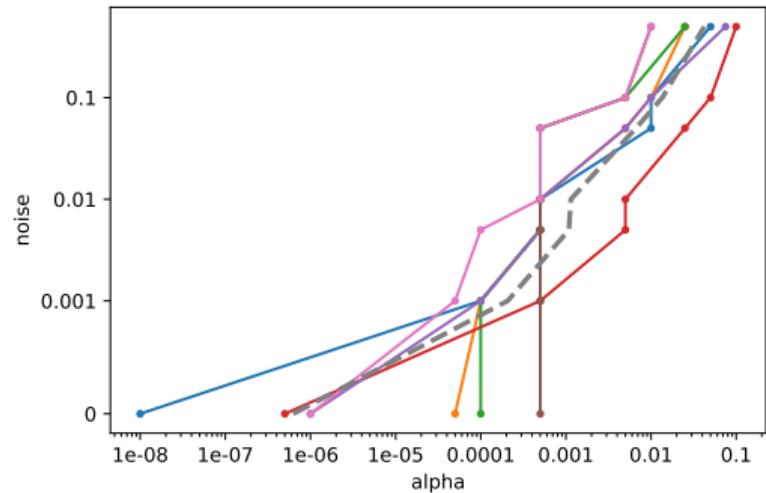
Работа с данными

В качестве источника данных использовались различные системы ОДУ:



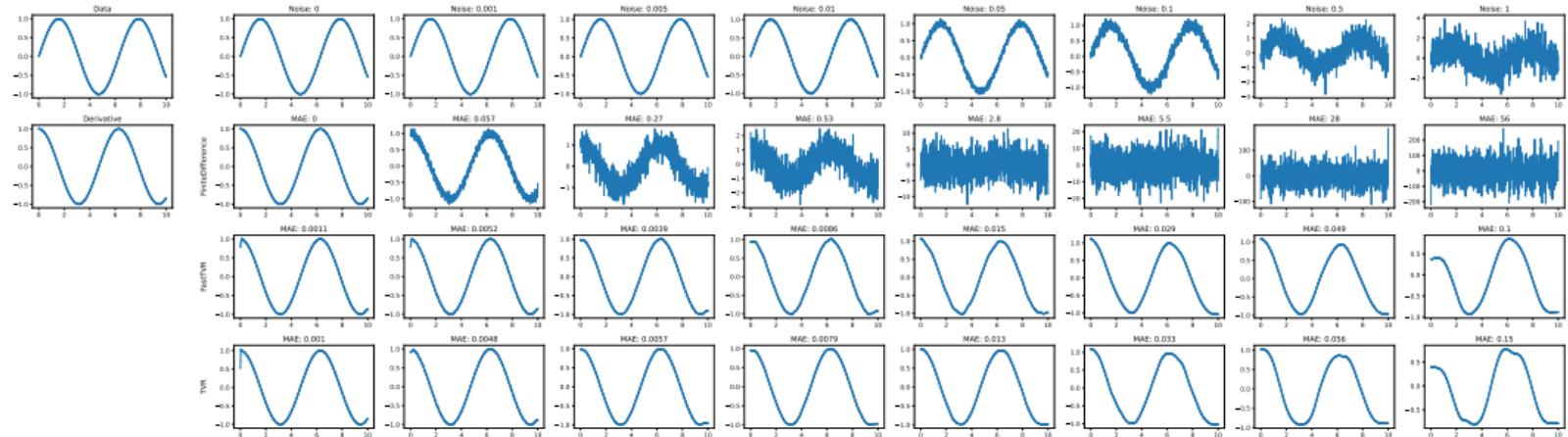
Результаты разработки

Численное дифференцирование



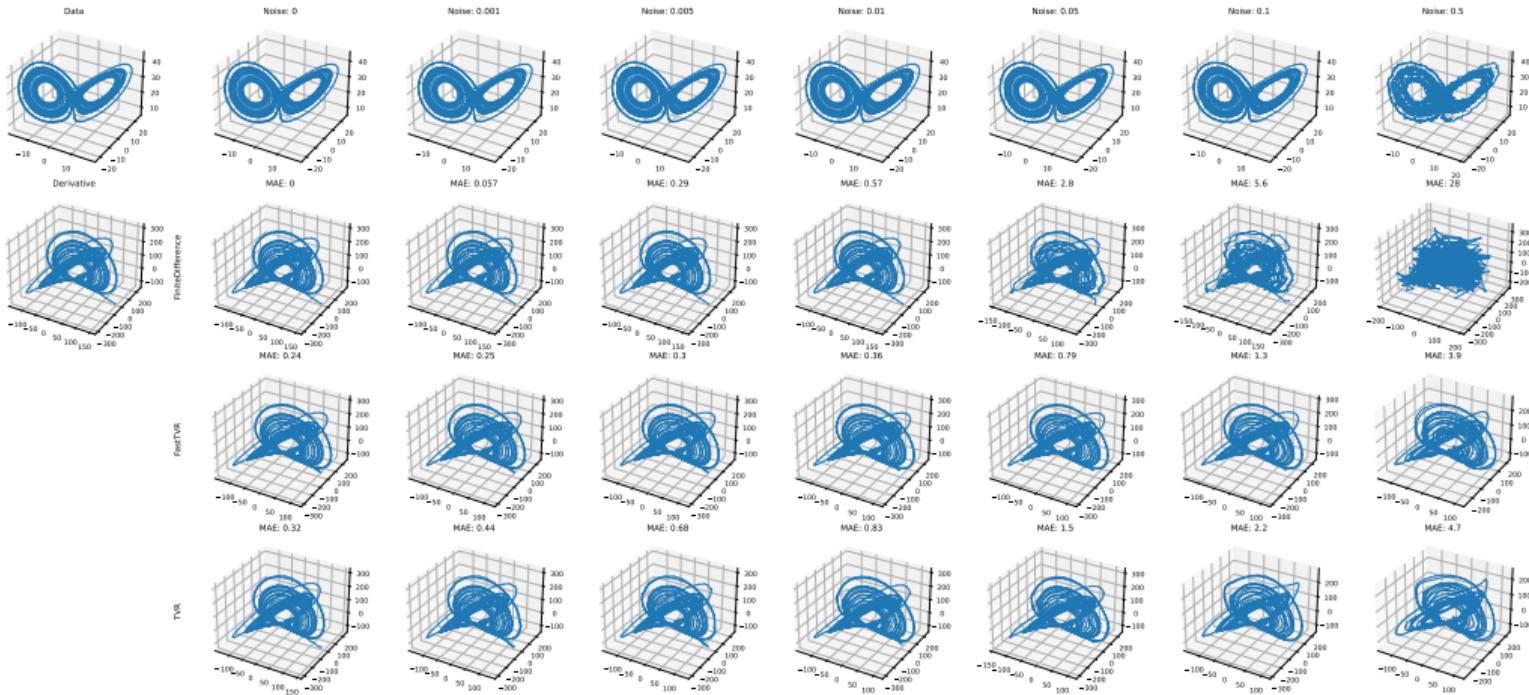
Результаты разработки

Численное дифференцирование



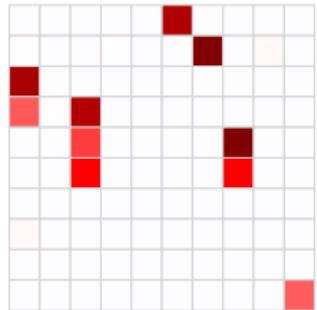
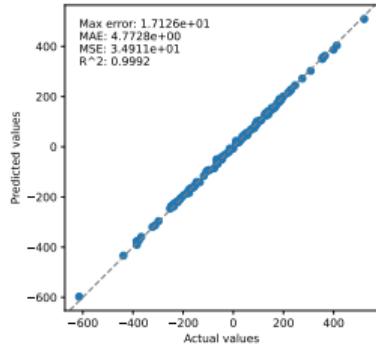
Результаты разработки

Численное дифференцирование

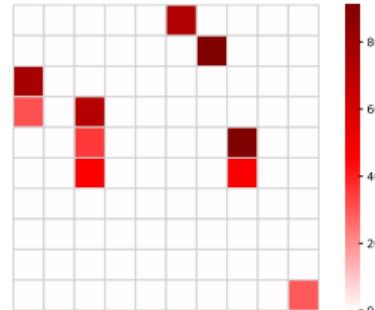
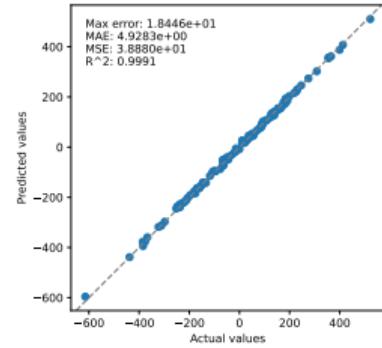


Результаты разработки

Разреженная регрессия



Алгоритм Lasso

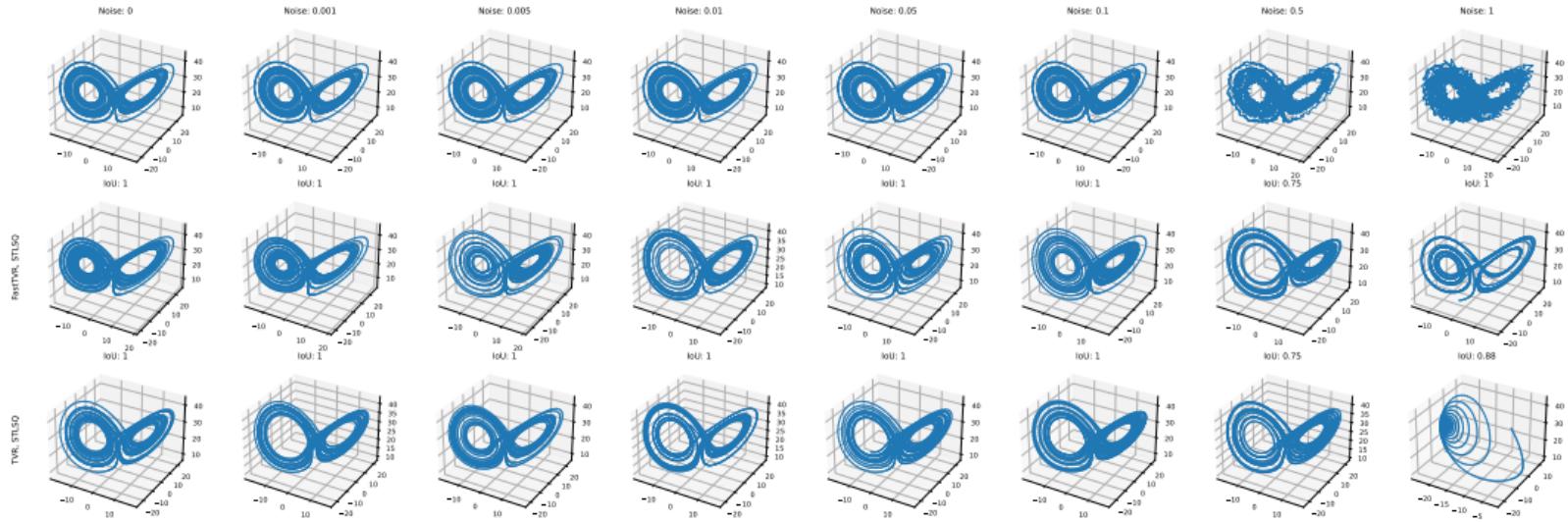


Алгоритм STLSQ



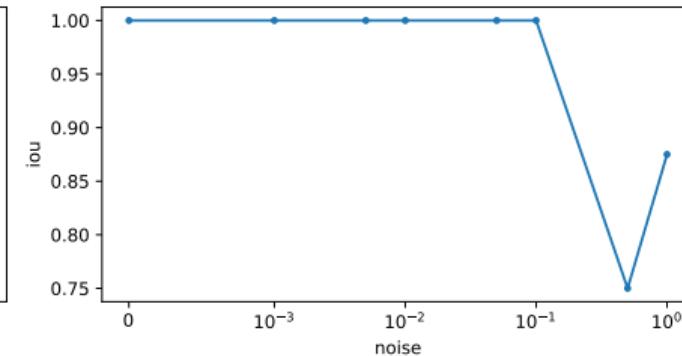
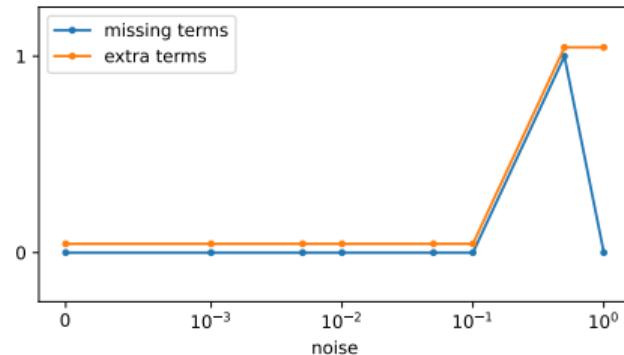
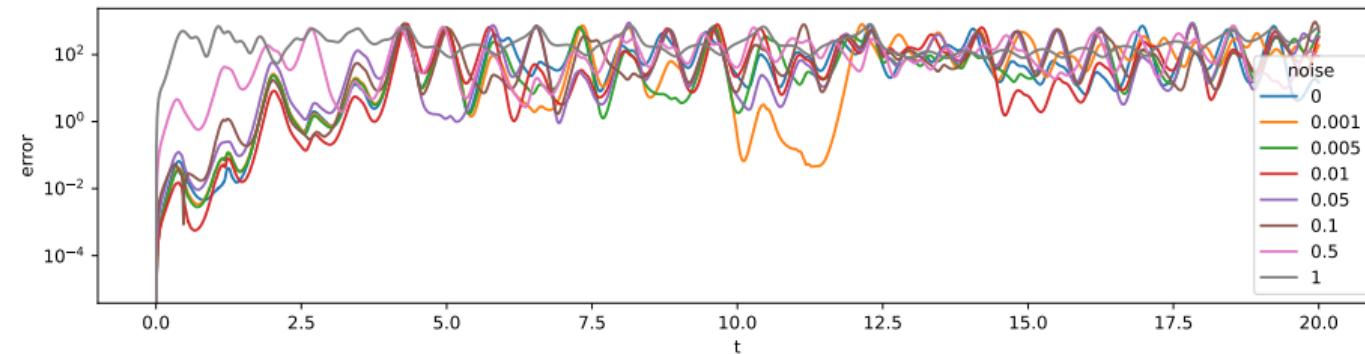
Результаты разработки

Идентификация



Результаты разработки

Идентификация



Результаты разработки

Идентификация

$$\dot{x} = -10x + 10y$$

$$\dot{y} = 27.79x - 0.917y - 0.993xz$$

$$\dot{z} = -2.67z + 0.999xy$$

$$\dot{x} = -9.974x + 9.979y$$

$$\dot{y} = 27.78x - 0.919y - 0.993xz$$

$$\dot{z} = -2.667z + 0.999xy$$

$$\dot{x} = -9.97x + 9.978y$$

$$\dot{y} = 27.63x - 0.861y - 0.989xz$$

$$\dot{z} = -2.668z + 0.999xy$$

$$\dot{x} = -9.91x + 9.928y$$

$$\dot{y} = 27.34x - 0.833y - 0.982xz$$

$$\dot{z} = -2.647z + 0.989xy$$

$$\dot{x} = -9.605x + 9.683y$$

$$\dot{y} = 25.55x - 0.939xz$$

$$\dot{z} = 1.2 - 2.658z + 0.977xy$$

$$\dot{x} = 2.741 - 0.438x + 4.448y$$

$$\dot{y} = 23.03x + 0.327y - 0.877xz$$

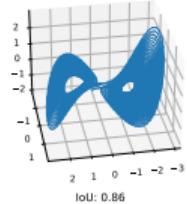
$$\dot{z} = -2.541z + 0.955xy$$



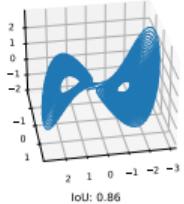
Результаты разработки

Идентификация

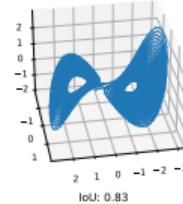
Noise: 0



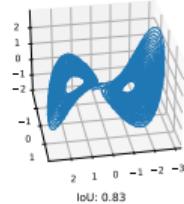
Noise: 0.001



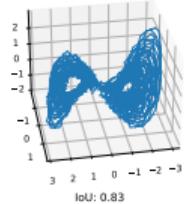
Noise: 0.005



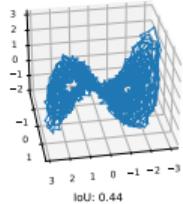
Noise: 0.01



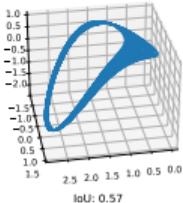
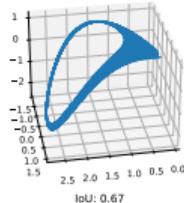
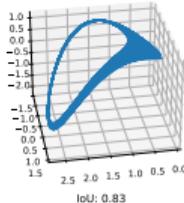
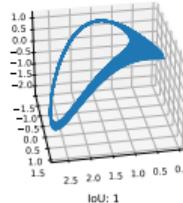
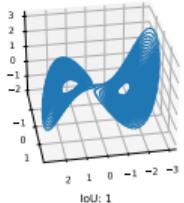
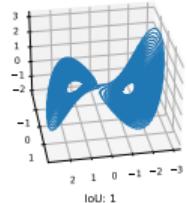
Noise: 0.05



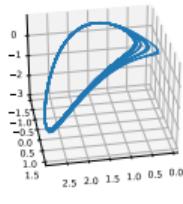
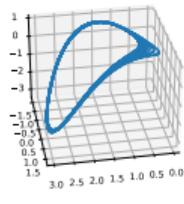
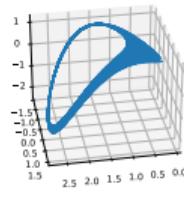
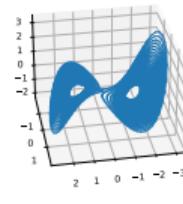
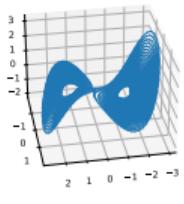
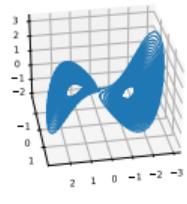
Noise: 0.1



FastTVR, STLSQ

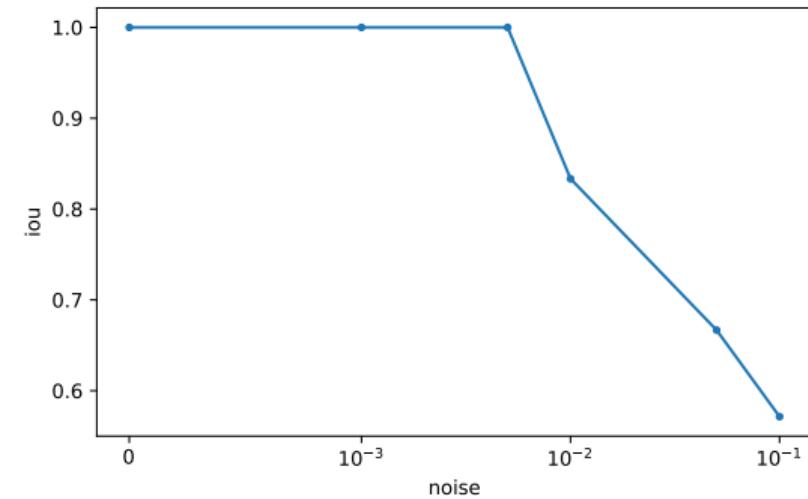
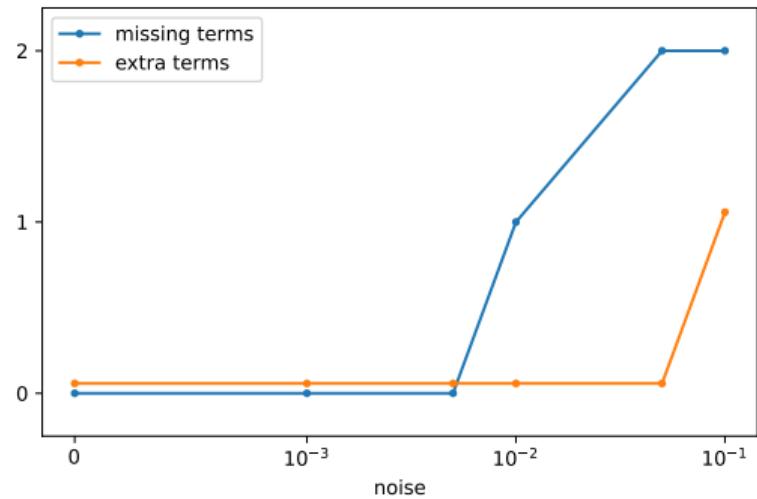


TVR, STLSQ



Результаты разработки

Идентификация



Результаты разработки

Идентификация

$$\dot{x} = 0.977y$$

$$\dot{y} = -0.186x + 0.975z$$

$$\dot{z} = 0.992y - 0.021z - 0.798x^2y$$

$$\dot{x} = 0.977y$$

$$\dot{y} = -0.186x + 0.976z$$

$$\dot{z} = 0.993y - 0.021z - 0.799x^2y$$

$$\dot{x} = 0.984y$$

$$\dot{y} = -0.185x + 0.978z$$

$$\dot{z} = 1.006y - 0.021z - 0.802x^2y$$

$$\dot{x} = 0.982y$$

$$\dot{y} = -0.187x + 0.979z$$

$$\dot{z} = 1.046y - 0.81x^2y$$

$$\dot{x} = 0.963y$$

$$\dot{y} = 0.948z$$

$$\dot{z} = 0.9y - 0.729x^2y$$

$$\dot{x} = 0.905y$$

$$\dot{y} = 0.917z$$

$$\dot{z} = 0.757y - 0.642x^2y - 0.167yz^2$$



Оценка результата

- Основной результат заключается в том, что идентификация систем ОДУ по шумным данным вполне осуществима.
- Однако, для этого необходимо иметь подходящий набор функций предполагаемых слагаемых.
- Для эффективной борьбы с шумом нужно также оценивать его величину.
- Также были разработаны рекомендации по использованию как отдельных алгоритмов, так и всего алгоритма в целом.

