

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика»  
Кафедра № 806 «Вычислительная математика и программирование»

# Разреженная идентификация нелинейных динамических систем

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Студент группы М8О-407Б-19: Бирюков Виктор Владимирович  
Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф., проф. каф. 806 Д. Л. Ревизников

Москва — 2023



# Актуальность темы

- Динамические системы описывают большое количество различных процессов.
- Задача извлечения закономерностей из большого объема шумных данных может превышать возможности человека.
- Знание динамической системы, лежащей за данными, позволит использовать соответствующий математический аппарат как часть анализа данных.



Цель — идентификация систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на основе потенциально шумных данных.

Задачи:

- Реализация алгоритма идентификации.
- Выбор и реализация алгоритмов разреженной регрессии.
- Выбор и реализация алгоритмов дифференцирования шумных данных.
- Сравнение различных методов дифференцирования и регрессии.
- Тестирование алгоритма идентификации на известных системах ОДУ.



# Постановка задачи

**Дано:**

- Входные данные представляют из себя массив значений некоторых величин
- Данные могут содержать некоторую шумовую компоненту
- Предполагается, что замеры величин производились через равные промежутки времени

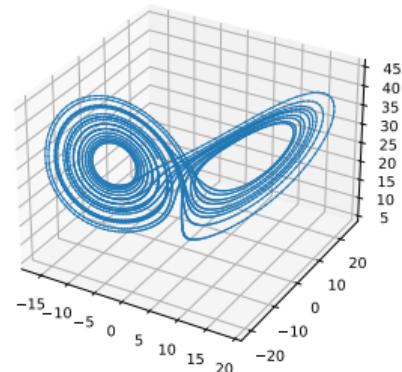
**Необходимо** разработать алгоритм, при помощи которого можно получить динамическую систему (систему ОДУ), которая описывает эволюцию заданных величин.



# Алгоритм решения задачи

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}_X \quad \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \dot{x}_1 & \dot{y}_1 & \dot{z}_1 \\ \dot{x}_2 & \dot{y}_2 & \dot{z}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n & \dot{y}_n & \dot{z}_n \end{bmatrix}_{\dot{X}} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & x^2 & xy & xz & y^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{\Theta(X)} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_W$$

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & -9.97 & 27.7 \\ y & 9.98 & -0.89 \\ z & 0 & 0 \\ xy & 0 & 0 \\ xz & 0 & -0.99 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= -9.97x + 9.98y \\ \dot{y} &= 27.7x - 0.89y - 0.99xz \\ \dot{z} &= -2.67z + 0.99xy \end{aligned}$$

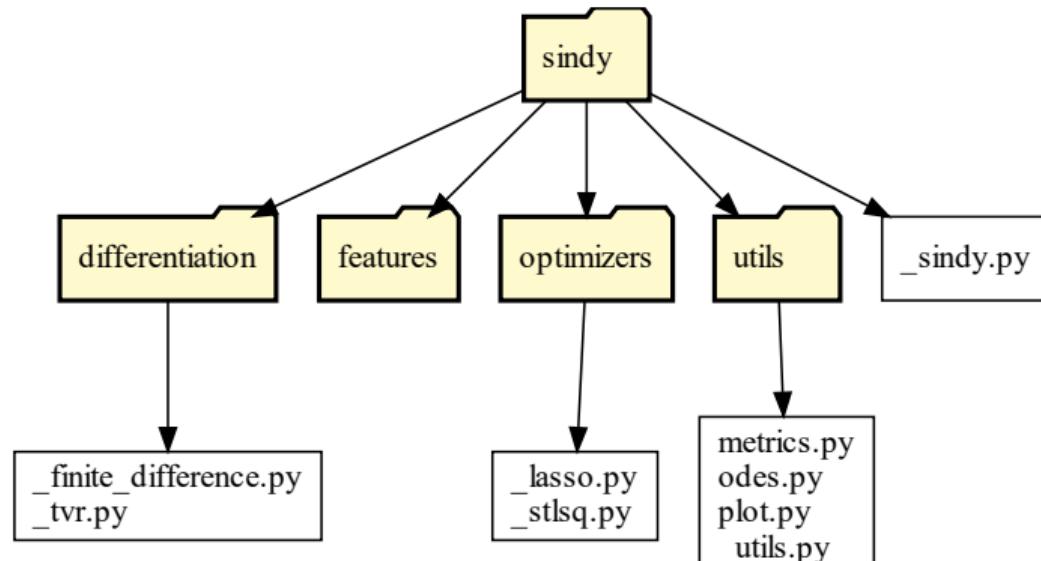


- Язык программирования Python
- Библиотеки научных вычислений NumPy и SciPy
- Библиотека машинного обучения Scikit-learn
- Библиотеки построения графиков Matplotlib и Seaborn

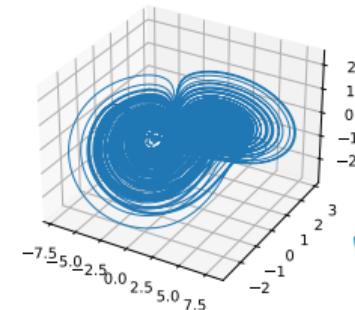
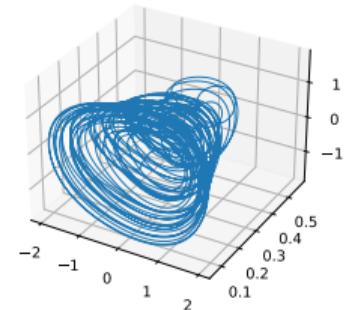
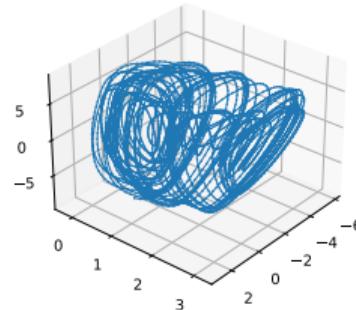
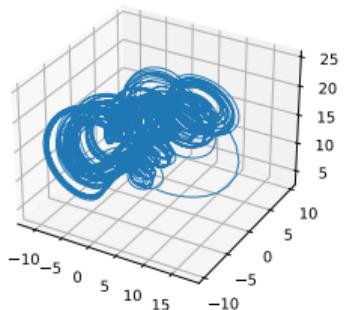
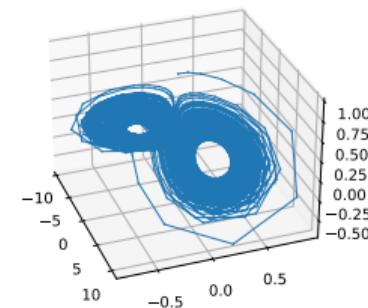
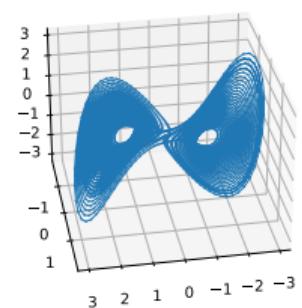
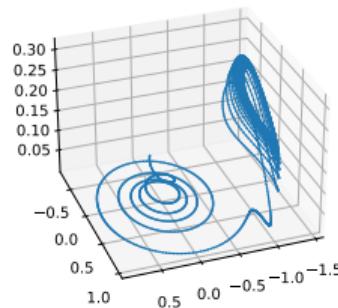
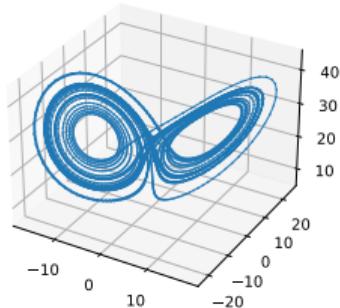


# Архитектура решения

Разработанное решение реализовано в формате модуля языка Python.

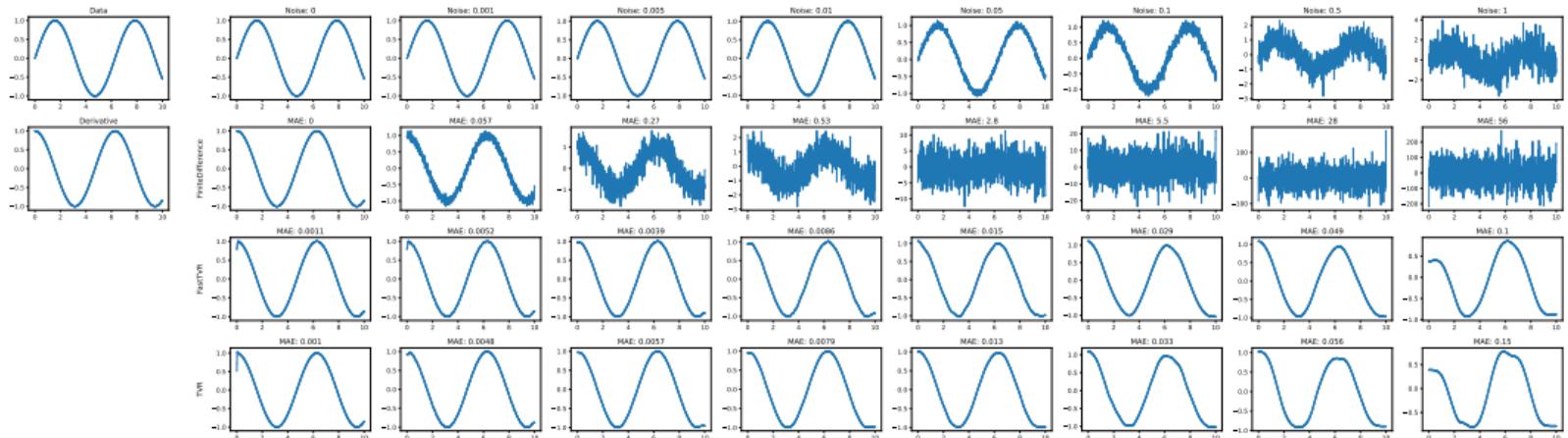


В качестве источника данных использовались различные системы ОДУ:



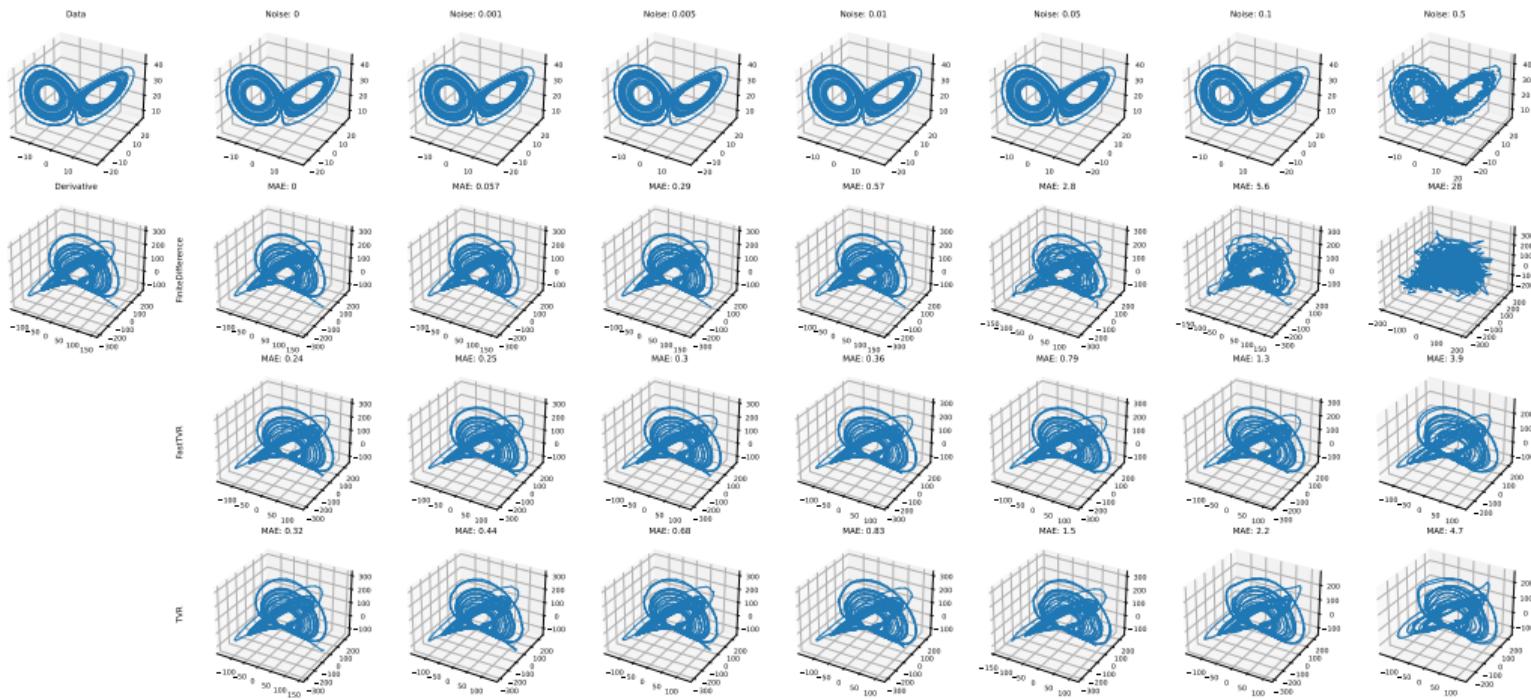
# Результаты разработки

## Численное дифференцирование зашумленных данных



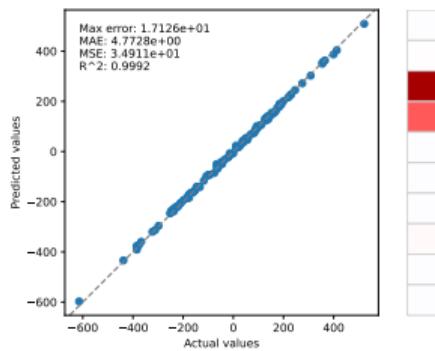
# Результаты разработки

## Численное дифференцирование зашумленных данных

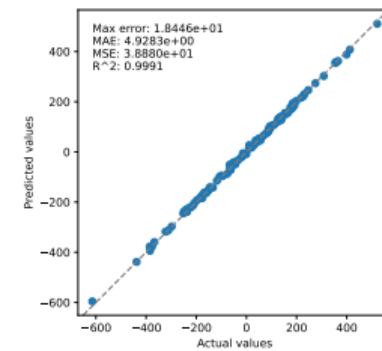


# Результаты разработки

## Разреженная регрессия



Алгоритм Lasso



Алгоритм STLSQ



# Результаты разработки

Структурная идентификация. Исходная система

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

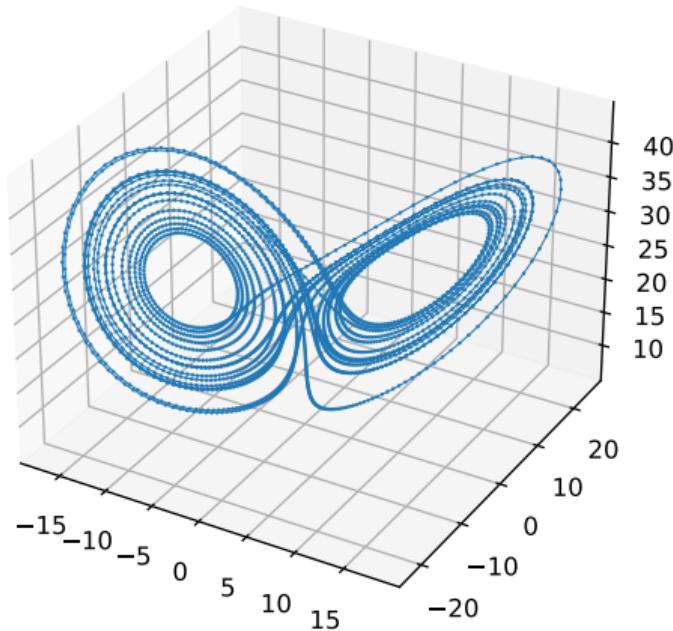
$$\dot{y} = x(r - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

$$\dot{x} = -10x + 10y$$

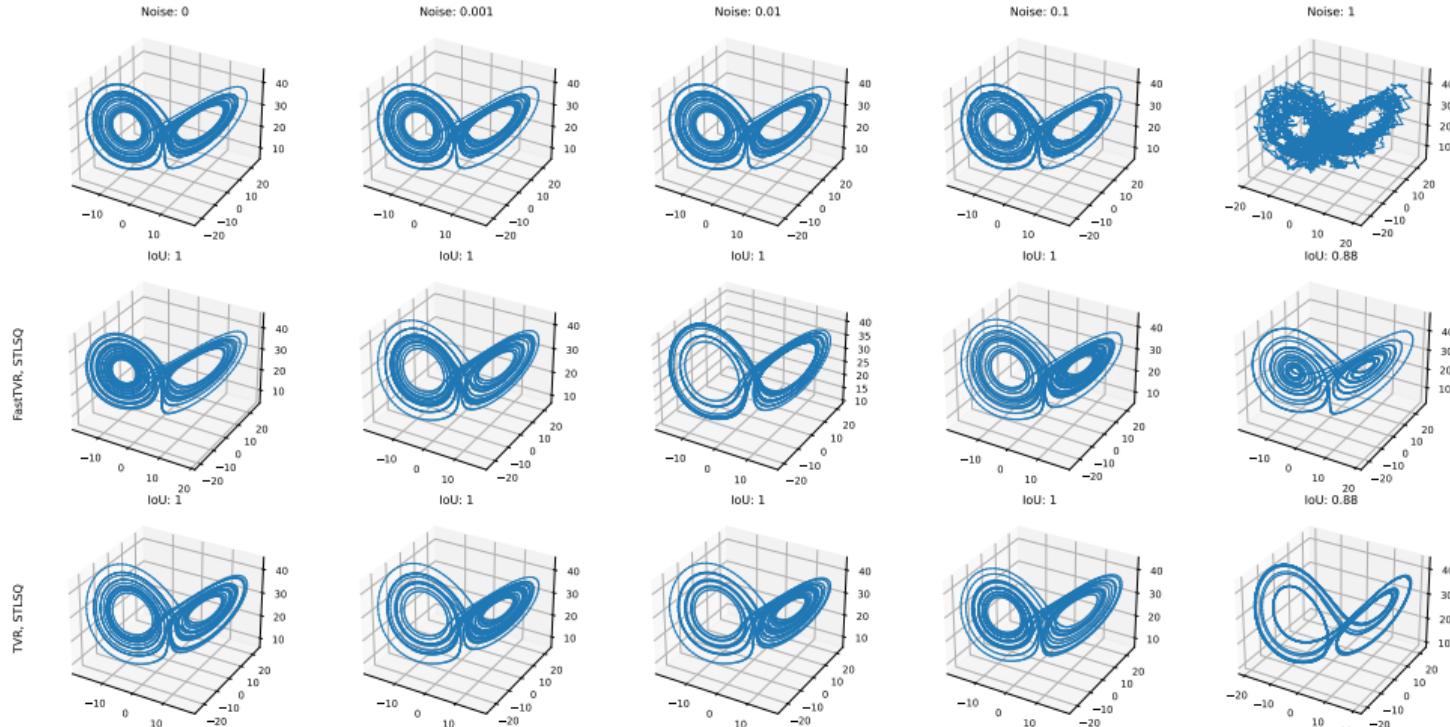
$$\dot{y} = 28x - y - xz$$

$$\dot{z} = -8/3z + xy$$



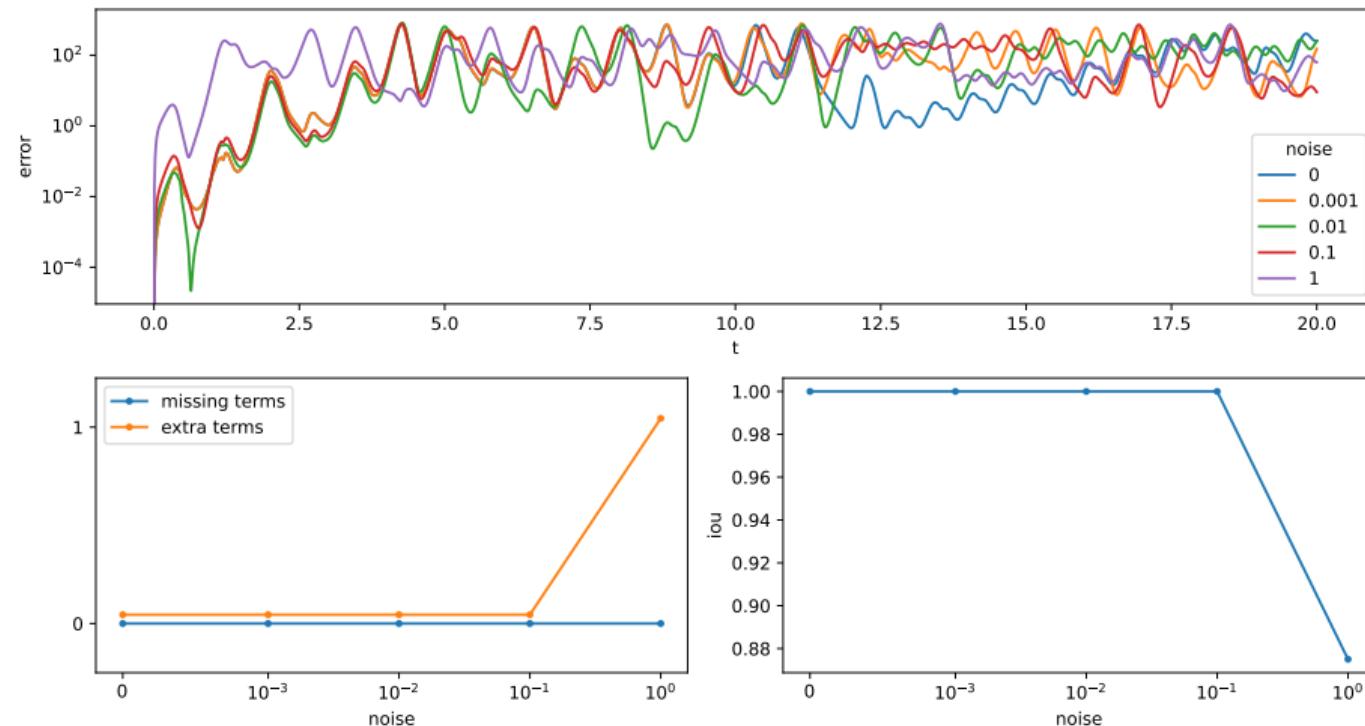
# Результаты разработки

## Структурная идентификация. Фазовые портреты



# Результаты разработки

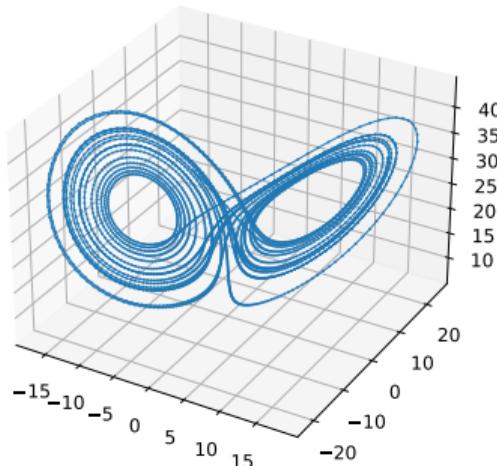
Структурная идентификация. Графики метрик



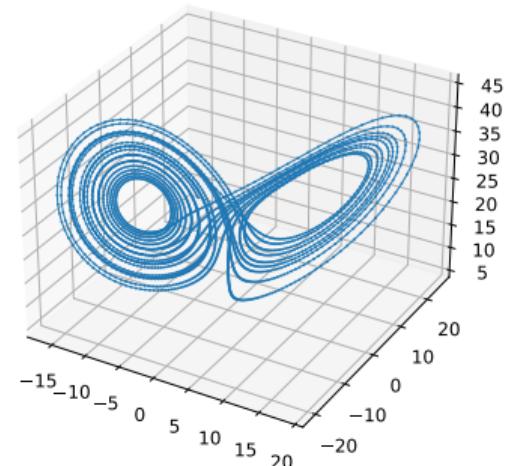
# Результаты разработки

Структурная идентификация. Восстановленные системы

Уровень шума: 0



$$\begin{aligned}\dot{x} &= -9.97x + 9.98y \\ \dot{y} &= 27.7x - 0.89y - 0.99xz \\ \dot{z} &= -2.67z + 0.99xy\end{aligned}$$



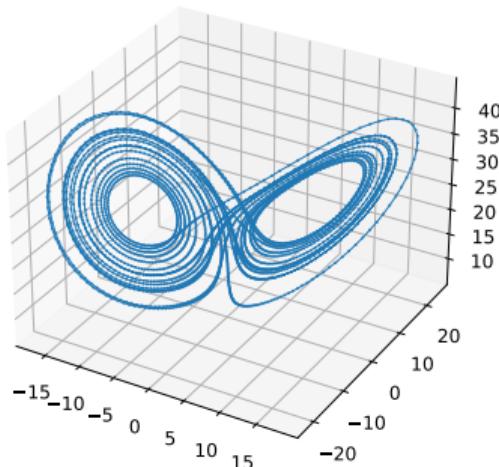
Потерянных слагаемых: 0  
Лишних слагаемых: 0  
IoU: 1



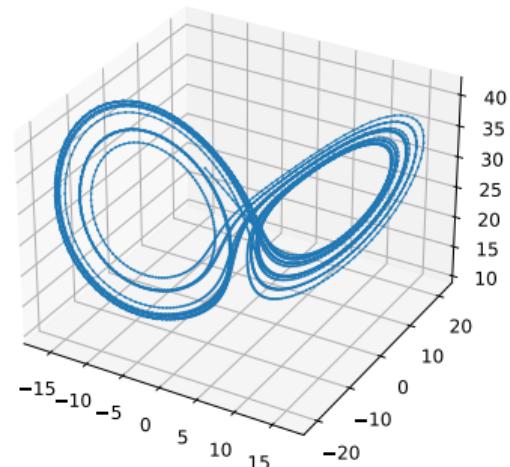
# Результаты разработки

Структурная идентификация. Восстановленные системы

Уровень шума: 0.01



$$\begin{aligned}\dot{x} &= -9.95x + 9.96y \\ \dot{y} &= 27.5x - 0.87y - 0.99xz \\ \dot{z} &= -2.66z + 0.99xy\end{aligned}$$

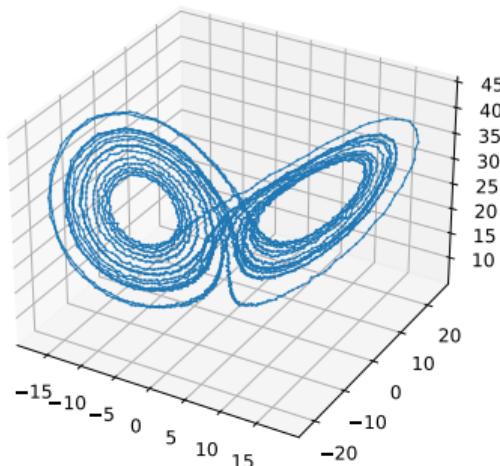


Потерянных слагаемых: 0  
Лишних слагаемых: 0  
IoU: 1

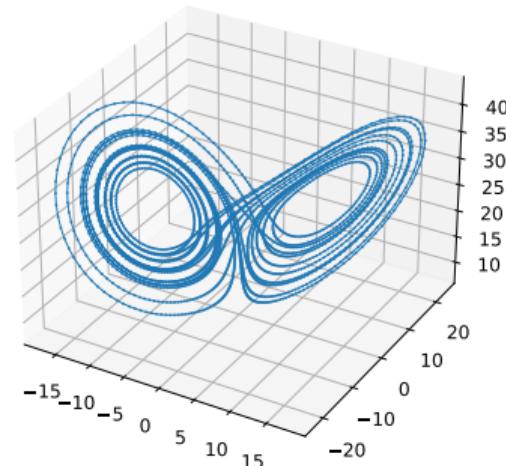
# Результаты разработки

Структурная идентификация. Восстановленные системы

Уровень шума: 0.1



$$\begin{aligned}\dot{x} &= -9.93x + 9.95y \\ \dot{y} &= 27.2x - 0.8y - 0.98xz \\ \dot{z} &= -2.65z + 0.99xy\end{aligned}$$

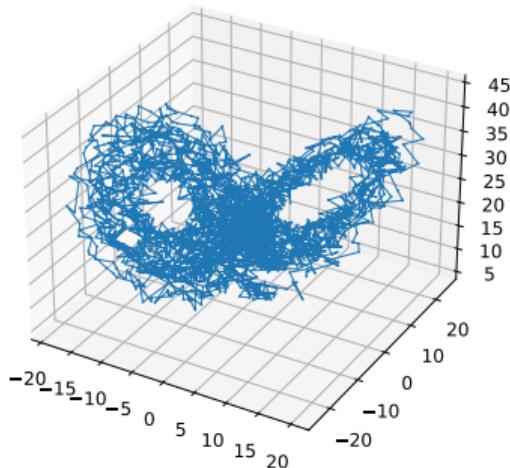


Потерянных слагаемых: 0  
Лишних слагаемых: 0  
IoU: 1

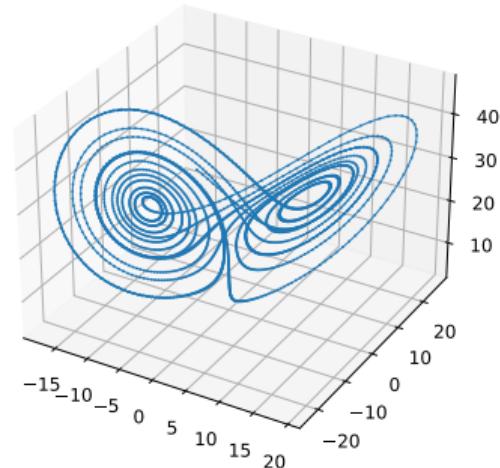
# Результаты разработки

Структурная идентификация. Восстановленные системы

Уровень шума: 1



$$\begin{aligned}\dot{x} &= -8.75x + 8.89y \\ \dot{y} &= 21x + 0.7y - 0.82xz \\ \dot{z} &= -1.65 - 2.43z + 0.94xy\end{aligned}$$



Потерянных слагаемых: 0  
Лишних слагаемых: 1  
IoU: 0.88

- Основной результат заключается в том, что идентификация систем ОДУ по шумным данным вполне осуществима.
  - Для этого необходимо иметь подходящий набор функций предполагаемых слагаемых.
  - Для эффективной борьбы с шумом нужна оценка его величины.
- Разработаны рекомендации по использованию как отдельных методов, так и всего алгоритма в целом.



# Описание программной разработки

Репозиторий с исходным кодом расположен по адресу  
<https://github.com/iktovr/bachelor-diploma>

