

Коррекция многогранников  
по теневым контурам в целом  
(план работы)

Палачев Илья

24 декабря 2012 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Методы решения</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Полученные результаты</b>	<b>4</b>

## 1 Постановка задачи

В данной работе рассматривается проблема уточнения многогранника, построенного по набору теневых контуров.

Пусть имеется набор  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_N$  теневых контуров, полученных в результате фотографирования реального камня, а также алгоритм, позволяющий построить трехмерную модель камня (многогранник) с некоторой точностью.

Тогда можно вновь построить теневые контуры для построенного многогранника и сравнить их с исходными данными. Разница между исходными и построенными контурами определяет точность построения модели.

Требуется подвинуть вершины и грани этого многогранника таким образом, чтобы улучшить (по возможности оптимально) приближение модели, т. е. улучшить наложение построенных контуров на исходные.

Теневые контуры  $S_k$  рассматриваются как упорядоченные последовательности ребер  $\tilde{e}_{k1}, \tilde{e}_{k2}, \dots, \tilde{e}_{kn_k}$ , лежащих в заданной плоскости (плоскости проекции  $\tilde{\pi}_k$ ). Каждому такому ребру соответствует некоторое ребро  $e_{s(ki)}$  на многограннике.

Будем минимизировать следующий функционал:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} \rho(\tilde{e}_{ki}, pr_k(e_{s(ki)})) \rightarrow \min \quad (1)$$

где  $pr_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \tilde{\pi}_k$  – проектор на плоскость  $\tilde{\pi}_k$ ,  $\rho$  – некоторая метрика расстояния между отрезками на плоскости.

## 2 Методы решения

Пусть ребро  $e_{s(ki)}$ , соединяющее грани  $\pi_1$  и  $\pi_2$  есть прообраз ребра  $\tilde{e}_{ki}$  в плоскости  $\tilde{\pi}_k$  при отображении  $pr_k$ . Данное отображение есть проектор вдоль оси проектирования  $\nu_k$  – нормали к плоскости  $\tilde{\pi}_k$ .

Построим плоскость  $\alpha_{ki}$ , проходящую через ребро  $e_{s(ki)}$  и параллельную оси  $\nu_k$ .

Тогда в качестве расстояния между ребрами можно взять сумму расстояний от вершин ребра  $\tilde{e}_{ki}$  до плоскости  $\alpha_{ki}$ :

$$\rho(e_{s(ki)}, \tilde{e}_{ki}) = \rho(\tilde{A}_{ki1}, \alpha_{ki}) + \rho(\tilde{A}_{ki2}, \alpha_{ki}) = \frac{|a_{ki}x_{ki1} + b_{ki}y_{ki1} + c_{ki}z_{ki1} + d_{ki}|}{\sqrt{a_{ki}^2 + b_{ki}^2 + c_{ki}^2}} + \frac{|a_{ki}x_{ki2} + b_{ki}y_{ki2} + c_{ki}z_{ki2} + d_{ki}|}{\sqrt{a_{ki}^2 + b_{ki}^2 + c_{ki}^2}}, \quad (2)$$

где  $\tilde{A}_{ki1}$  и  $\tilde{A}_{ki2}$  – вершины ребра  $\tilde{e}_{ki}$

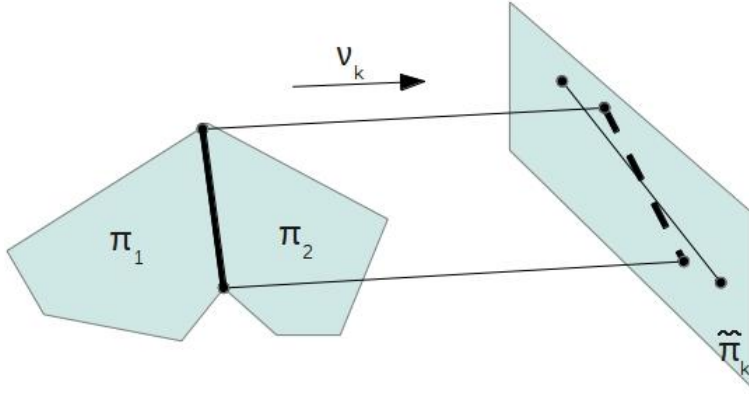


Рис. 1: Соответствие между ребрами

Коэффициенты плоскости  $\alpha_{ki}$  должно выразить в терминах переменных, относительно которых минимизируется функционал, то есть через коэффициенты этих плоскостей многогранника. Ребро  $e_{s(ki)}$  лежит в плоскостях  $\pi_1, \pi_2$  и  $\alpha_{ki}$ , поэтому оно перпендикулярно нормальям этих плоскостей:  $n_1, n_2$  и  $n_{ki}$ . Следовательно, эти три нормали лежат в одной плоскости. Нормали  $n_1, n_2$  не совпадают, значит, они образуют базис в плоскости, перпендикулярной ребру  $e_{s(ki)}$ , и вектор  $n_{ki}$  можно представить в виде их линейной комбинации. Для удобства положим:

$$n_{ki} = \gamma n_1 + (1 - \gamma) n_2$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + (1 - \gamma) \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Отсюда можно выразить коэффициент  $\gamma$ :

$$\gamma = -\frac{a_2\nu_x + b_2\nu_y + c_2\nu_z}{(a_1 - a_2)\nu_x + (b_1 - b_2)\nu_y + (c_1 - c_2)\nu_z} \quad (3)$$

Заметим, что в этом случае выражается и коэффициент  $d$ , так как иначе три плоскости не могут иметь общую прямую.  $d = \gamma d_1 + (1 - \gamma)d_2$

Теперь осталось только подставить эти коэффициенты в выражение для функционала.

$$\begin{aligned}
I = \sum_{i=1}^K \sum_{\{j: e_i \rightsquigarrow pr_j\}} \{ & [(\gamma_{ij}a_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})a_{s(ij2)})\tilde{x}_{l(ij1)} + (\gamma_{ij}b_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})b_{s(ij2)})\tilde{y}_{l(ij1)} + \\
& + (\gamma_{ij}c_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})c_{s(ij2)})\tilde{z}_{l(ij1)} + (\gamma_{ij}d_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})d_{s(ij2)})]^2 + \\
& [(\gamma_{ij}a_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})a_{s(ij2)})\tilde{x}_{l(ij2)} + (\gamma_{ij}b_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})b_{s(ij2)})\tilde{y}_{l(ij2)} + \\
& + (\gamma_{ij}c_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})c_{s(ij2)})\tilde{z}_{l(ij2)} + (\gamma_{ij}d_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})d_{s(ij2)})]^2 \} \quad (4)
\end{aligned}$$

В этом выражении индекс  $i$  пробегает по номерам всех ребер, а индекс  $j$  – по номерам всех теневых контуров, в котором видно текущее  $i$ -е ребро  $e_i$ .  $s(ij1)$  и  $s(ij2)$  обозначают номера плоскостей многогранника, граничащих по ребру  $e_i$ , а  $l(ij1)$  и  $l(ij2)$  – номера вершин  $j$ -го теневого контура, в которые проецируется  $e_i$ .

Частная производная этого функционала будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial a_k} = \sum_{\{i: e_i \in \pi_k\}} \sum_{\{j: e_i \rightsquigarrow pr_j\}} \{ & 2\gamma_{ij}[(\gamma_{ij}a_k + (1 - \gamma_{ij})a_{s(ij2)})(\tilde{x}_{l(ij1)}^2 + \tilde{x}_{l(ij2)}^2) + \\
& + (\gamma_{ij}b_k + (1 - \gamma_{ij})b_{s(ij2)})(\tilde{x}_{l(ij1)}\tilde{y}_{l(ij1)} + \tilde{x}_{l(ij2)}\tilde{y}_{l(ij2)}) + \\
& + (\gamma_{ij}c_k + (1 - \gamma_{ij})c_{s(ij2)})(\tilde{x}_{l(ij1)}\tilde{z}_{l(ij1)} + \tilde{x}_{l(ij2)}\tilde{z}_{l(ij2)}) + \\
& + (\gamma_{ij}d_k + (1 - \gamma_{ij})d_{s(ij2)})(\tilde{x}_{l(ij1)} + \tilde{x}_{l(ij2)})] \}
\end{aligned}$$

Если рассматривать также случай бликовых контуров, то функционал примет несколько более сложный вид:

$$\begin{aligned}
I = & \sum_{i=1}^K \sum_{\{j: e_i \rightsquigarrow pr_j\}} \{[(\gamma_{ij}a_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})a_{s(ij2)})\tilde{x}_{l(ij1)} + (\gamma_{ij}b_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})b_{s(ij2)})\tilde{y}_{l(ij1)} + \\
& + (\gamma_{ij}c_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})c_{s(ij2)})\tilde{z}_{l(ij1)} + (\gamma_{ij}d_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})d_{s(ij2)})]^2 + \\
& [(\gamma_{ij}a_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})a_{s(ij2)})\tilde{x}_{l(ij2)} + (\gamma_{ij}b_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})b_{s(ij2)})\tilde{y}_{l(ij2)} + \\
& + (\gamma_{ij}c_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})c_{s(ij2)})\tilde{z}_{l(ij2)} + (\gamma_{ij}d_{s(ij1)} + (1 - \gamma_{ij})d_{s(ij2)})]^2\} + \\
& + \sum_{i=1}^K \sum_{\{j: e_i \rightsquigarrow pr_j^b\}} \{[(\gamma_{ij}(-r_{zs^b(ij)}b_{s^b(ij1)} + r_{ys^b(ij)}c_{s^b(ij1)}) + (1 - \gamma_{ij})(r_{zs^b(ij)}b_{s^b(ij2)} - r_{ys^b(ij)}c_{s^b(ij2)}))\tilde{x}_{l^b(ij1)} + \\
& + (\gamma_{ij}(r_{zs^b(ij)}a_{s^b(ij1)} - r_{xs^b(ij)}c_{s^b(ij1)}) + (1 - \gamma_{ij})(-r_{zs^b(ij)}a_{s^b(ij2)} + r_{xs^b(ij)}c_{s^b(ij2)}))\tilde{y}_{l^b(ij1)} + \\
& + (\gamma_{ij}(-r_{ys^b(ij)}a_{s^b(ij1)} + r_{xs^b(ij)}b_{s^b(ij1)}) + (1 - \gamma_{ij})(r_{ys^b(ij)}a_{s^b(ij2)} - r_{ys^b(ij)}b_{s^b(ij2)}))\tilde{z}_{l^b(ij1)} + \\
& + ((1 - \gamma_{ij}) - \gamma_{ij}(\vec{n}_{s^b(ij1)}, \vec{n}_{s^b(ij2)}))d_{s^b(ij1)} + (\gamma_{ij} - (1 - \gamma_{ij})(\vec{n}_{s^b(ij1)}, \vec{n}_{s^b(ij2)}))d_{s^b(ij1)}]^2 + \\
& + [(\gamma_{ij}(-r_{zs^b(ij)}b_{s^b(ij1)} + r_{ys^b(ij)}c_{s^b(ij1)}) + (1 - \gamma_{ij})(r_{zs^b(ij)}b_{s^b(ij2)} - r_{ys^b(ij)}c_{s^b(ij2)}))\tilde{x}_{l^b(ij2)} + \\
& + (\gamma_{ij}(r_{zs^b(ij)}a_{s^b(ij1)} - r_{xs^b(ij)}c_{s^b(ij1)}) + (1 - \gamma_{ij})(-r_{zs^b(ij)}a_{s^b(ij2)} + r_{xs^b(ij)}c_{s^b(ij2)}))\tilde{y}_{l^b(ij2)} + \\
& + (\gamma_{ij}(-r_{ys^b(ij)}a_{s^b(ij1)} + r_{xs^b(ij)}b_{s^b(ij1)}) + (1 - \gamma_{ij})(r_{ys^b(ij)}a_{s^b(ij2)} - r_{ys^b(ij)}b_{s^b(ij2)}))\tilde{z}_{l^b(ij2)} + \\
& + ((1 - \gamma_{ij}) - \gamma_{ij}(\vec{n}_{s^b(ij1)}, \vec{n}_{s^b(ij2)}))d_{s^b(ij1)} + (\gamma_{ij} - (1 - \gamma_{ij})(\vec{n}_{s^b(ij1)}, \vec{n}_{s^b(ij2)}))d_{s^b(ij1)}]^2\} + \\
& + \sum_{k=1}^M \lambda_k (a_k^0 a_k + b_k^0 b_k + c_k^0 c_k) \quad (5)
\end{aligned}$$

### 3 Полученные результаты