О методах восстановления геометрических тел по измерениям опорной функции и их приложении к задаче восстановления тел по теневым контурам

- Илья Палачев, апрель 2015

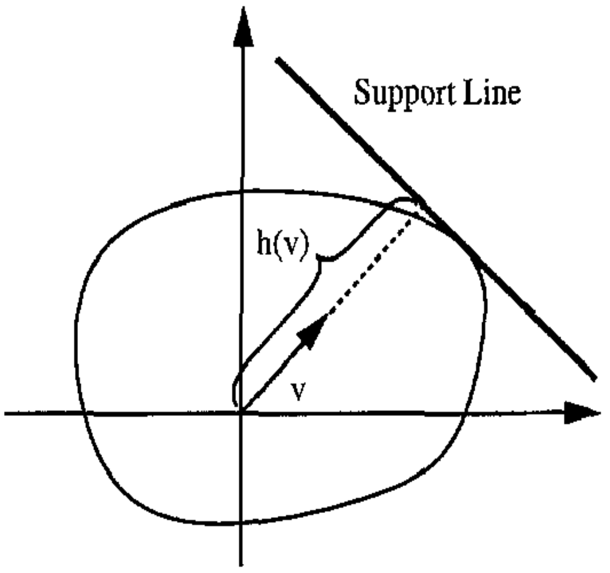
Часть I: Исторический обзор

- Опорные методы – универсальный теоретический аппарат, применимый для решения практических задач совершенно разного рода

Определение опорной функции выпуклого тела

- Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое тело
- Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ – единичная сфера
- Опорной функцией тела $K \subset \mathbb{R}^n$ называется

$$\mathrm{h}_K : S^{n-1} \to \mathbb{R}$$
$$\mathrm{h}_K(u) = \sup_{x \in K}(x, u)$$



- Теорема:

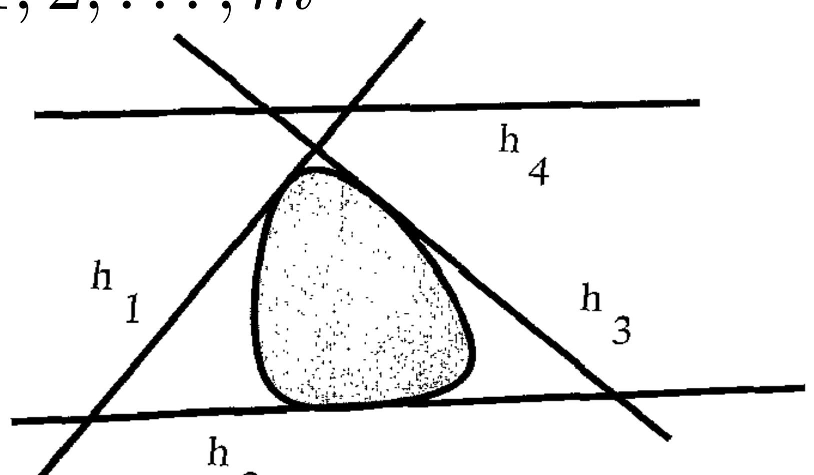
$$h_K \equiv h_P \quad \Leftrightarrow \quad K \equiv P$$

Согласованность измерений опорной функции

- Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_m \in S^{n-1}$ – опорные направления
- Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_m \in \mathbb{R}$ – опорные числа (измерения опорной функции с погрешностью)
- Данный набор опорных чисел называется согласованным, если существует такое выпуклое тело, что

$$h_K(u_i) = h_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

- Пример несогласованного набора:



Оценка опорной функции и восстановление тела

- Пусть $h^0 = (h_1^0, h_2^0, \ldots, h_m^0)$ – набор измерений опорной функции
- Пусть H – множество всех согласованных наборов
- Оценкой опорной функции в метрике X называется такой согласованный набор $h^* = (h_1^*, h_2^*, \ldots, h_m^*)$, что:

$$||h^* - h^0||_X = \min_{h \in H} ||h - h^0||_X$$

- Метрикой X может быть, например, L_1, L_2, L_∞
- По согласованному набору можно восстановить „идеальное тело“

Структура опорного конуса: двумерный случай

- H – опорный конус (множество всех согласованных наборов)
- Prince, Willsky [1], Lele, Kulkarni, Willsky [2]:

$$u_i = (cos\theta_i, sin\theta_i)$$

$$\boxed{H = \{h \in \mathbb{R}^m | Ch \geq 0\}}$$

- C – опорная матрица:

$$C = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_2 - \theta_M) & \sin(\theta_1 - \theta_M) & 0 & 0 & \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \sin(\theta_3 - \theta_2) & -\sin(\theta_3 - \theta_1) & \sin(\theta_2 - \theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_4 - \theta_3) & -\sin(\theta_4 - \theta_2) & \sin(\theta_3 - \theta_2) & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \sin(\theta_M - \theta_{M-1}) & 0 & 0 & \sin(\theta_1 - \theta_M) & -\sin(\theta_1 - \theta_{M-1}) \end{bmatrix}.$$

Задача двумерного восстановления

- В зависимости от метрики, задача вычисления оценки может быть сформулирована как:
- В L_2 – задача квадратичного программирования:

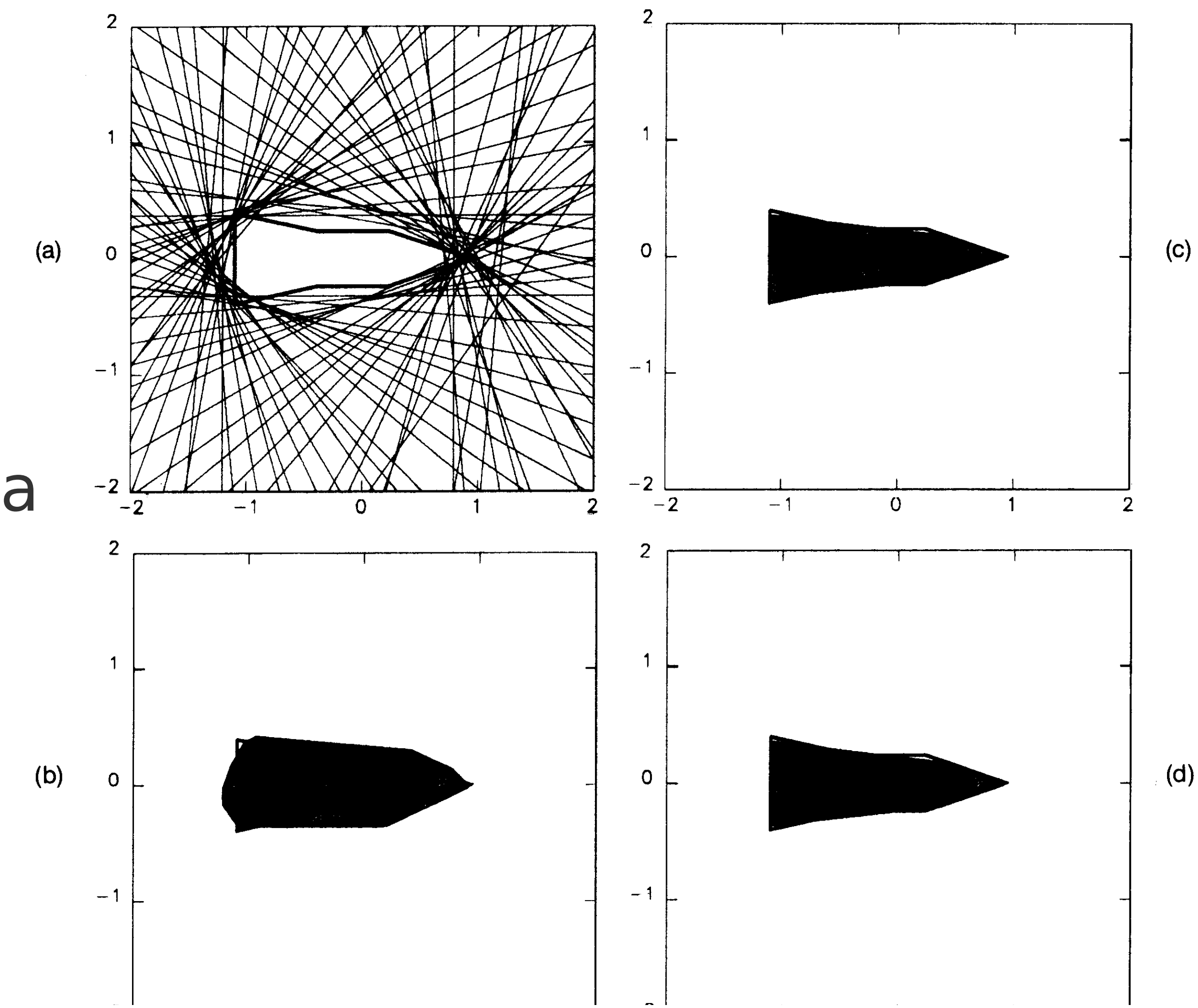
$$||h - h^0||_2 \to \inf \quad s.t.\ Ch \geq 0$$

- В L_1 – задача линейного программирования:

$$||h - h^0||_1 \to \inf \quad s.t.\ Ch \geq 0$$

Приложения задачи двумернго восстановления

- Геометрическая томография [1]
- Восстановление изображения цели с данных лазерного радара [2]



Структура опорного конуса: трёхмерный случай

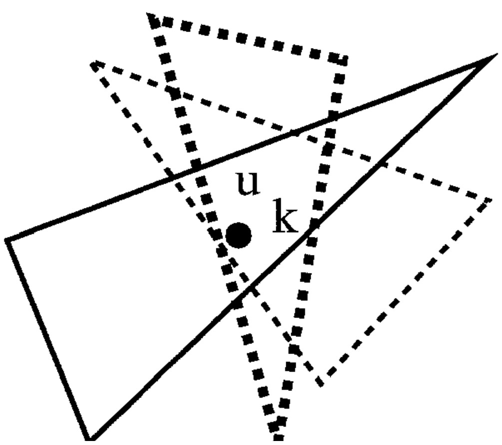
- Karl, Kulkarni, Verghese, Willsky [3]:

$$\boxed{H = \{h \in \mathbb{R}^m | Ch \geq 0\}}$$

- Или, в эквивалентной форме:

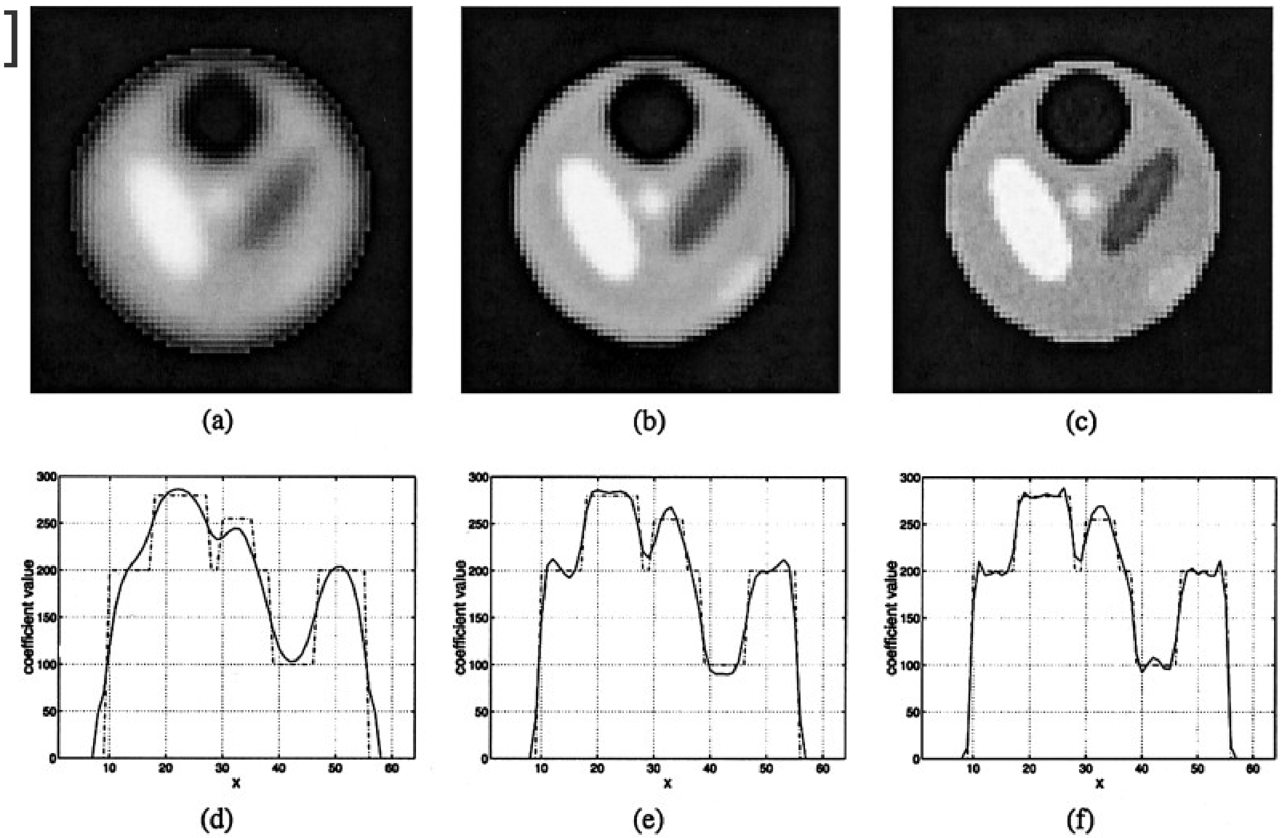
$$\begin{vmatrix} h_1 & u_1^T \\ h_2 & u_2^T \\ h_3 & u_3^T \\ h_4 & u_4^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & u_1^T \\ 1 & u_2^T \\ 1 & u_3^T \\ 1 & u_4^T \end{vmatrix} \geq 0$$

для всех „локальных положительных четвёрок“:



Приложение задачи трёхмерного восстановления

- Gregor, Rannou [4] – магнитно-резонансная визуализация (MRI)
- Время нахождения условий больше, чем время решения задачи оптимизации.



Метод точек касания

- Gardner, Kiderlen [5]: новая (эквивалентная) формулировка условий согласованности:

$$(x_i, u_i) \geq (x_j, u_i), \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, m, i \neq j$$

- Где x_i – „точка касания“: $(x_i, u_i) = h_i$
- Минимизируемый функционал:

$$||(x_i, u_i) - h^0||_X \to \inf$$

- Pros: легкое нахождение условий
- Cons: квадратичное число условий

Структура опорного конуса: трёхмерный случай

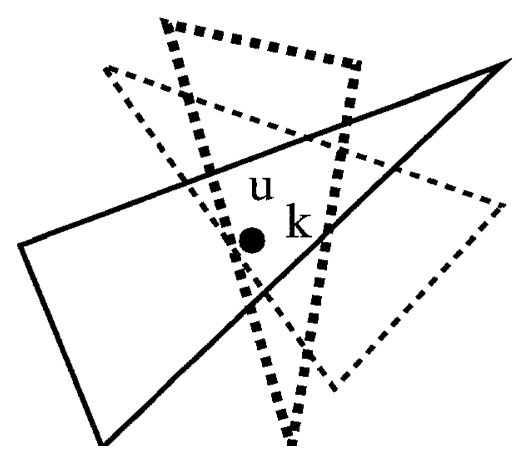
- Karl, Kulkarni, Verghese, Willsky [3]:

$$\boxed{H = \{h \in \mathbb{R}^m | Ch \geq 0\}}$$

- Или, в эквивалентной форме:

$$\begin{vmatrix} h_1 & u_1^T \\ h_2 & u_2^T \\ h_3 & u_3^T \\ h_4 & u_4^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & u_1^T \\ 1 & u_2^T \\ 1 & u_3^T \\ 1 & u_4^T \end{vmatrix} \geq 0$$

для всех „локальных положительных четвёрок“:

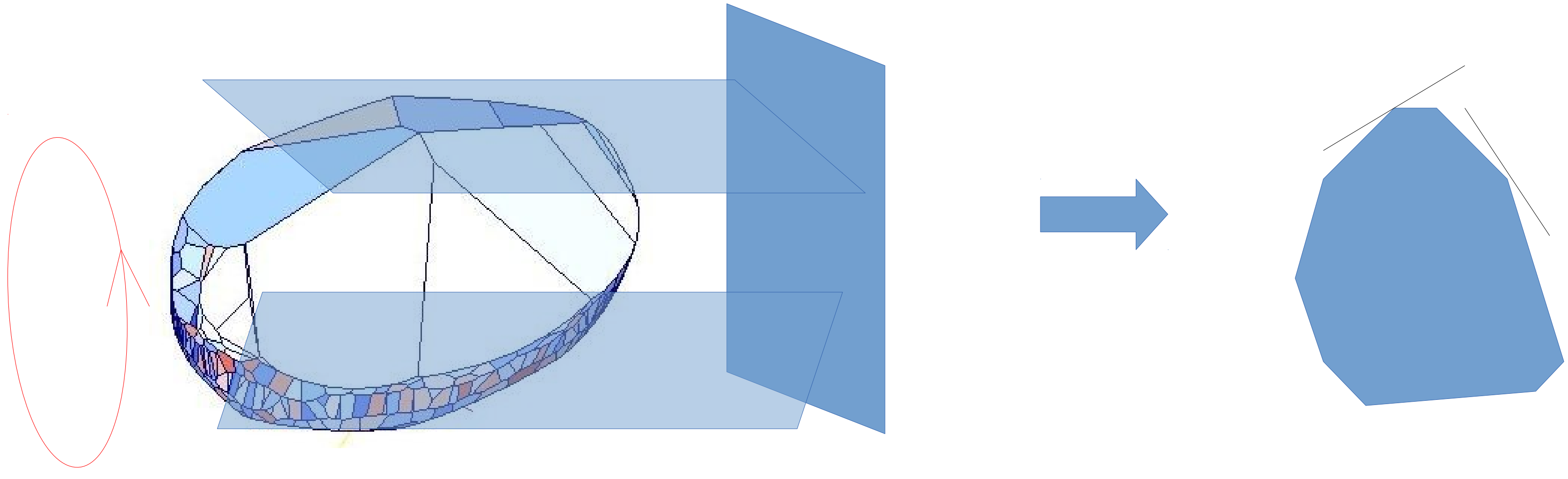


Часть II: Новые подходы и приложения

- Интерпретация задачи восстановления по теневым контурам как опорной задачи
- Новая формулировка для опорных задач
- Подход для увеличения быстродействия метода

Теневые контуры – измерения опорной функции

- Теневой цилиндр можно интерпретировать как непрерывное семейство измерений опорной функции тела на большом круге сферы
- Можно ли применить для данного случая теорию, развивавшуюся исключительно для конечного набора измерений опорной функции?



Преобразование двойственности

- Определение:

$$\delta : (a, b, c) \mapsto \{ax + by + cz = 1\}$$

$$\delta : \{ax + by + cz = 1\} \mapsto (a, b, c)$$

- Свойства:
  - Отображает выпуклые многогранники в выпуклые многогранники
  - Отображает невыпуклости в многогранниках в самопересечения, и наоборот
  - Отображает многогранники без самопересечений в локально выпуклые, и наоборот
  - Сохраняет отношение инцидентности

Дополнительные условия локальности

- В метрике L_∞ задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\to \inf \\ s.t.\ \ (x_i, u_i) &\geq (x_j, u_i) \\ |(x_i, u_i) - h_i^0| &< \varepsilon \end{aligned}$$

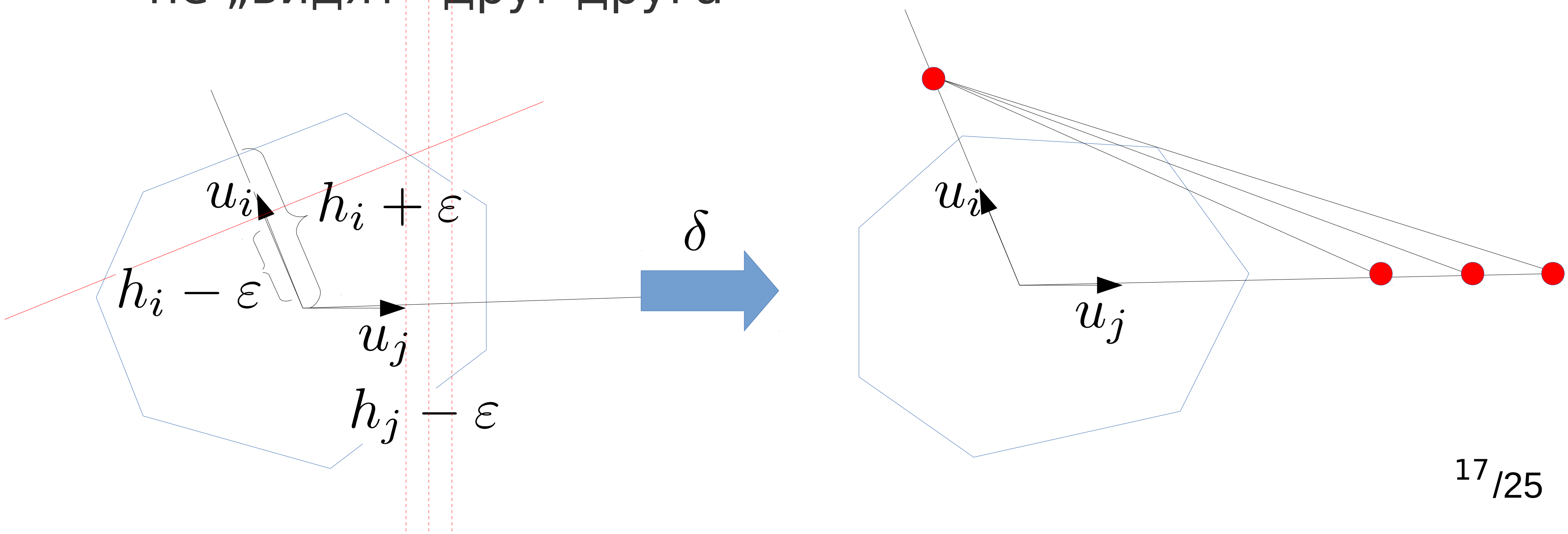
Условия локальности

где ε – дополнительная переменная

- Идея: Добавить условия локальности также и для L_1 и L_2 задач

Исключение избыточных условий

- Задачу можно упростить, если заранее найти какое-нибудь ε^0, для которого область допустимых значений непуста
- Условие (i, j) можно отбросить, если двойственные образы плоскостей по $h_i - \varepsilon$ и $h_j - \varepsilon$ не „видят“ друг друга



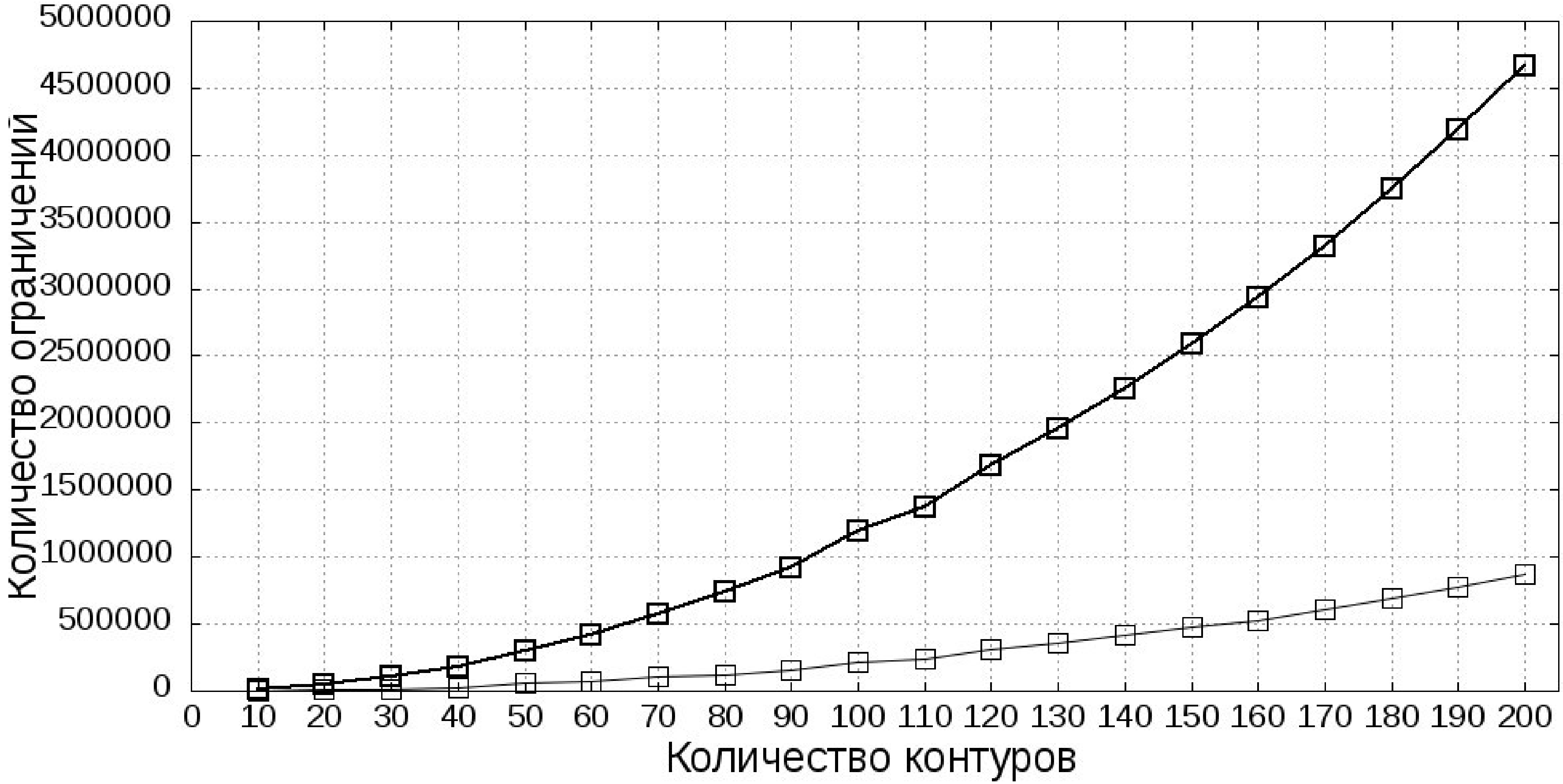
Результат исключения избыточных условий

- Необходимуя величину ε^0 можно получить, если построить наивную оценку – пересечение теневых цилиндров
- 85-95% условий определяются как избыточные
- Число ограничений перестаёт быть квадратичным
- Это позволяет применить метод на размерностях на несколько порядков больше
- Реализация Gregor и Rannou [4] требовала 33 минуты на поиск условий + 10 минут на решение ЗКП на кластере („16 networked 500-MHz Linux PCs, each equipped with 512 Mbytes of memory“) на 1645 x 64 измерениях
- Matlab-реализация Gardner и Kiderlen [5] тестировалась не более чем на 50 измерениях (100 секунд на ЗКП, 10 секунд на ЗЛП)

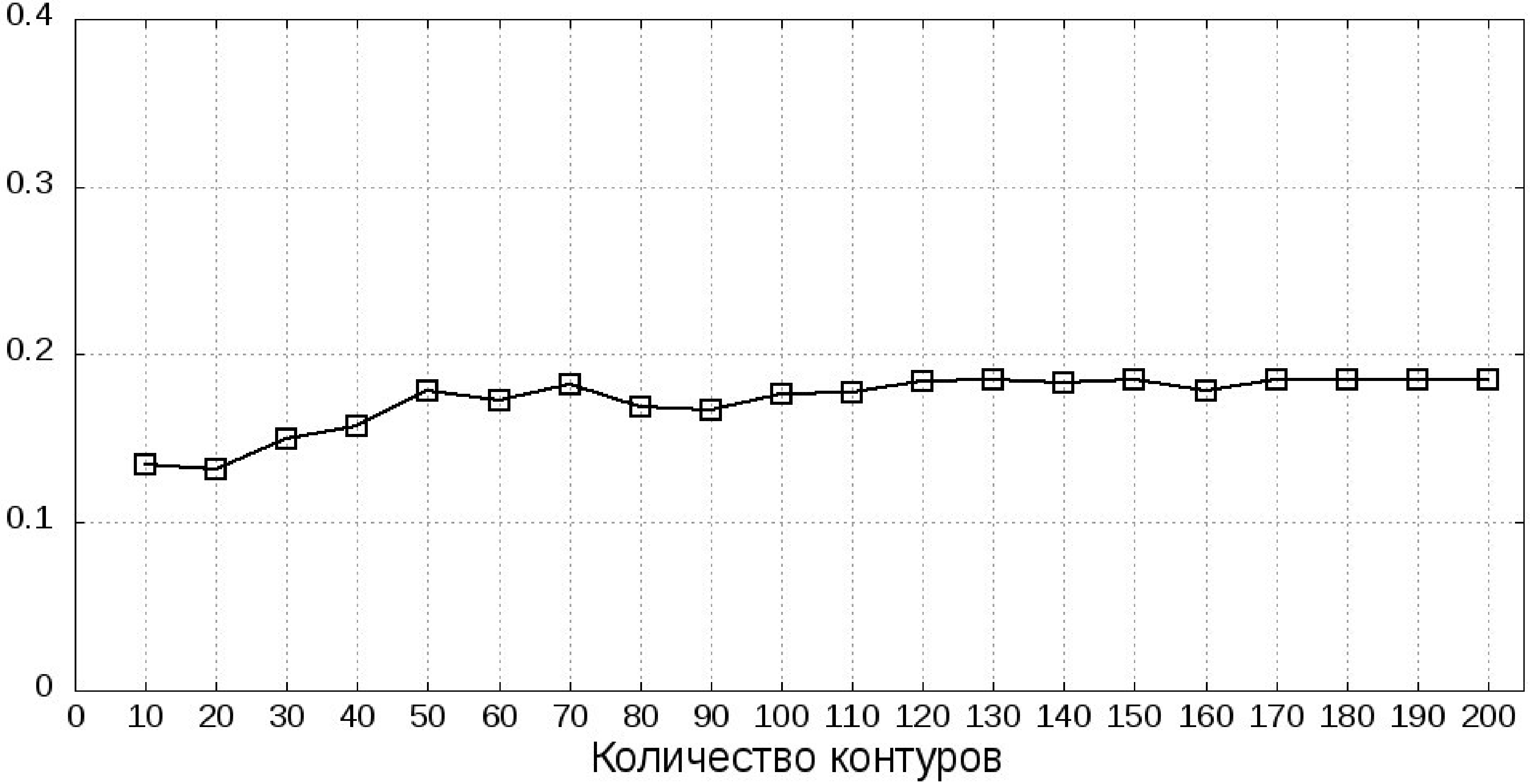
Прототип реализации алгоритма: исключение избыточных условий

- Входные данные – от 10 до 200 теневых контуров по ~15 сторон
- Геометрические алгоритмы взяты из CGAL: www.cgal.org
- В качестве решателя задачи пересечения отрезка и многогранника использовался класс AABB_tree
- Время построения условий квадратичным перебором пар – **10 с для 200 контуров**
- Идея: обходом триангуляции Делоне в ширину можно избежать квадратичного перебора
- Полученное решение удовлетворяет всем ограничениям, в том числе отброшенным

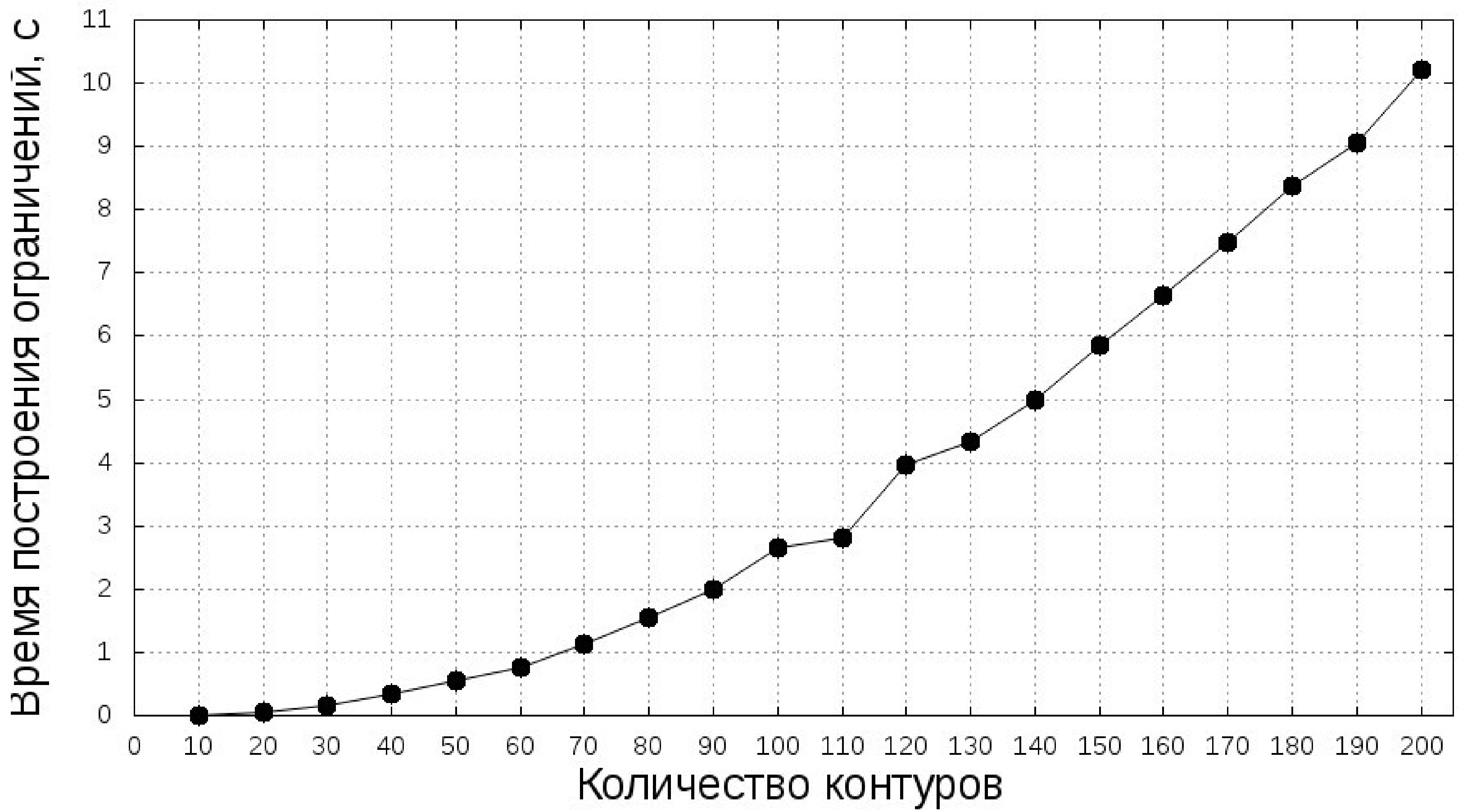
Число исключенных условий



Доля оставшихся условий



Скорость алгоритма исключения



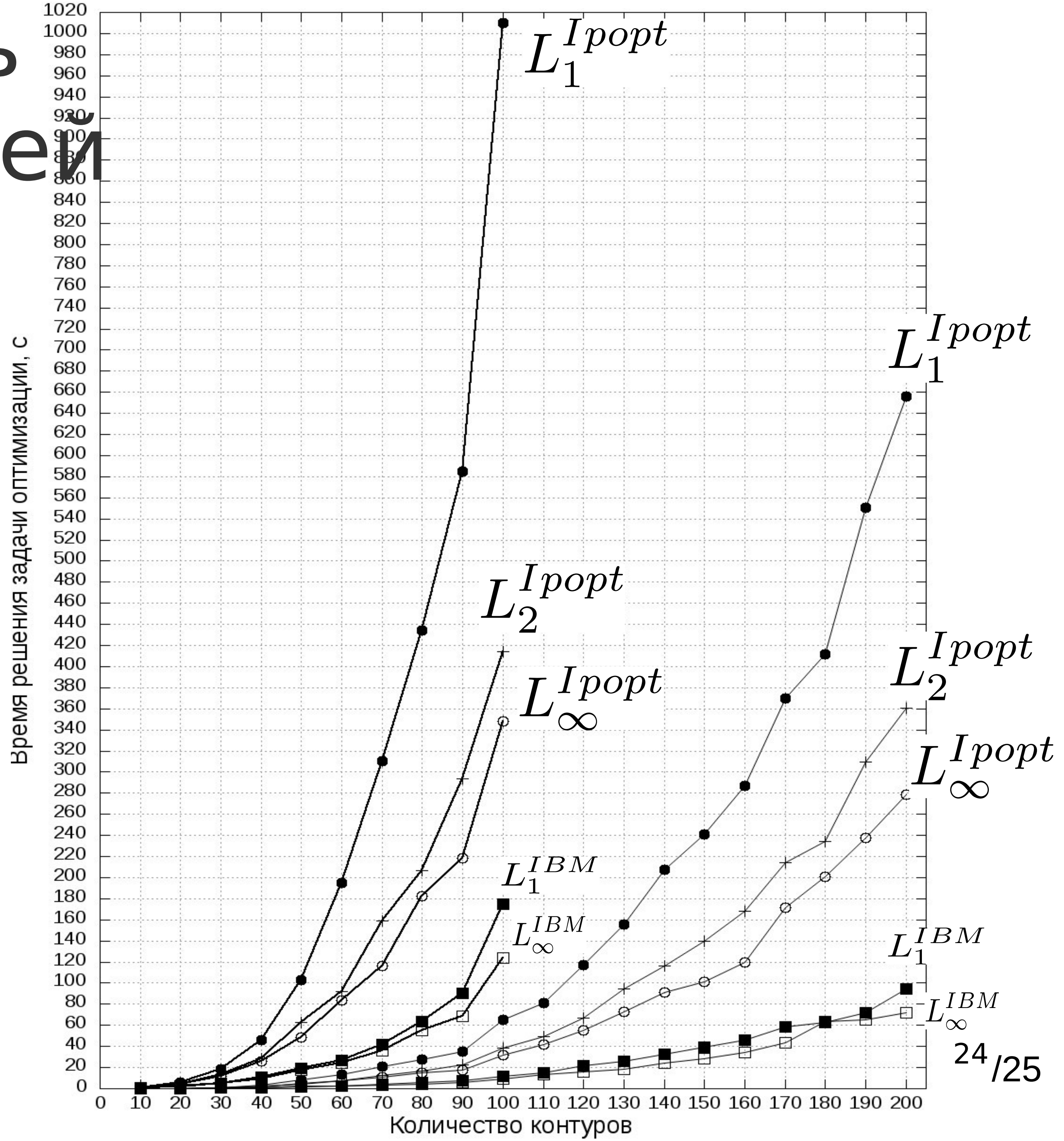
Прототип реализации алгоритма: решение задач ЛП / КП

- В качестве решателей задачи линейного программирования использовались:
  - GLPK: https://www.gnu.org/software/glpk/
  - CLP: https://projects.coin-or.org/Clp
  - Ipopt: https://projects.coin-or.org/Ipopt
  - IBM ILOG CPLEX:

    http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/

Скорость решателей

Жирными линиями помечено время решения исходной задачи (без отбрасывания контуров), тонкими линиями – время решения модифицированной задачи (с отбрасыванием контуров)



Список литературы

- [1] Prince, Willsky - Reconstructing convex sets fro m support line measurements, 1987
- [2] Lele, Kulkarni, Willsky - Convex-polygon estimat ion from support-line measurements, 1992
- [3] Karl, Kulkarni, Verghese, Willsky - Local tests fo r consistency of support hyperplane data, 1995
- [4] Gregor, Rannou - Three-dimensional support funct ion estimation and application for projection magnet ic resonance imaging, 2001
- [5] Gardner, Kiderlen - A new algorithm for 3D recons truction from support functions, 2007
- [6] Turlach - On the estimation of a convex set and it s support function