

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

Курсовая работа

на тему

*“Поиск угла поворота для совмещения
отцентрированных контуров”*

Научный руководитель:

Валединский Владимир Дмитриевич

Выполнил:

студент 410 группы

Калигин Николай Николаевич

Оглавление

Введение	3
Постановка задачи	3
Краткое описание намеченных действий.....	3
Переход в полярную систему координат	4
Интерполяция на равномерную сетку.....	5
Разложение периодических функций в ряды Фурье.....	6
Пример приближения функции частичной суммой ряда Фурье	7
Поиск оптимального угла поворота.....	8
Область поиска угла	8
Поиск оптимального угла разложением до первого порядка	8
Метод золотого сечения	9
Промежуточное тестирование	9
Совместная работа алгоритмов	12
Вывод.....	15
Список литературы.....	16

Введение

Постановка задачи

Изображения, полученные с помощью современной техники, например фотоаппаратов, используются на сегодняшний день повсеместно в различных областях человеческой деятельности. Многие камеры могут самостоятельно выполнять стандартные операции корректировки изображений, избавляя вас от необходимости прибегать к помощи компьютера. Так, например, вы можете настроить резкость или убрать лишний цвет. Как правило, коррекция выполняется еще до того, как снимок сделан, и затем заданные вами настройки накладываются на изображение, записываемое в память. Динамика современной жизни заставляет делать многие снимки буквально набегу, что сказывается на их качестве. Достойного качества снимка можно добиться, совмещая несколько кадров. Но порой хорошее качество снимка нужно не только для эстетического удовольствия, но и для технических расчетов. В этом случае по полученным данным определяются какие-то физические свойства объекта. Чтобы свойства, полученные при съемке, наиболее соответствовали реальным данным, приходится проводить коррекционную обработку.

Рассмотрим следующую задачу. Даны два отцентрированных контура. Предположительно они эквивалентны с точностью до поворота на угол α вокруг центра. Задача заключается в том, чтобы найти этот угол.

Краткое описание намеченных действий

- Перейдём в полярную систему координат для дальнейшей работы с контурами.
- Проведем интерполяцию каждого контура на равномерную сетку.
- Разложим получившиеся периодические функции в ряды Фурье.
- Найдем норму, которая будет показывать насколько сильно различие контуров.
- Найдем искомый угол поворота.

Переход в полярную систему координат

На практике получить два эквивалентных контура очень трудно даже снимая один и тот же объект несколько раз. Поэтому дополнением к поставленной задаче является поиск некоторой нормы, которая говорила бы нам о том, в какой степени различаются рассматриваемые контуры.

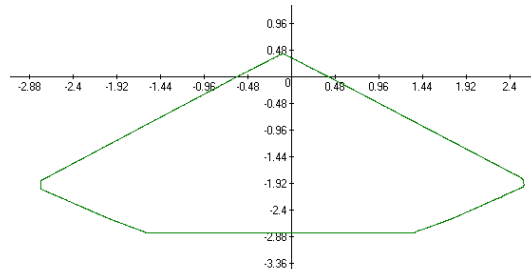


Рисунок 1

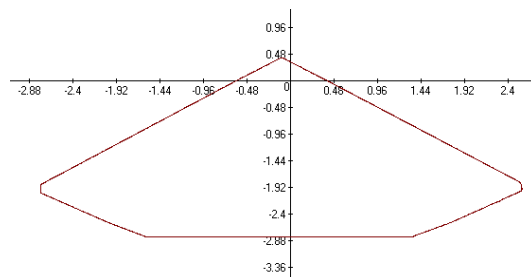


Рисунок 2

Каждый контур задан набором координат в декартовой системе (x, y) . Декартовы координаты (x, y) могут быть преобразованы в полярные координаты (φ, ρ) , используя тригонометрические функции синус и косинус. Преобразуем координаты в полярные. Будем считать, что $\varphi \in (-\pi; \pi]$, тогда достаточно воспользоваться следующими формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{y}\right), & \text{если } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \pi, & \text{если } x < 0 \text{ и } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \pi, & \text{если } x < 0 \text{ и } y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0 \text{ и } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0 \text{ и } y < 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ и } y = 0 \end{cases}$$

Теперь заметим, что каждому контуру стала соответствовать 2π -периодическая функция $\rho = \rho(\varphi)$.

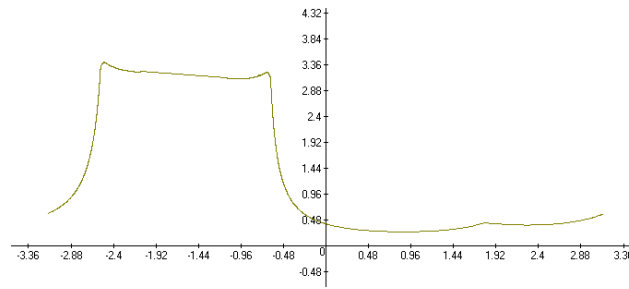


Рисунок 3

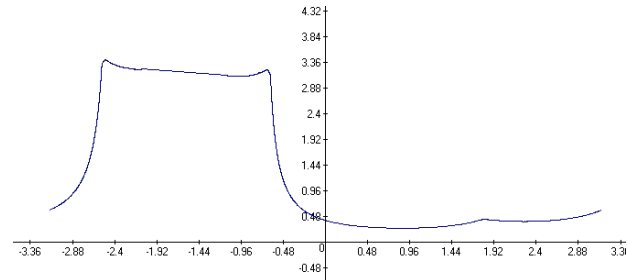


Рисунок 4

Интерполяция на равномерную сетку

Можно проводить различные операции с данными функциями, в том числе и интегрировать. Для того чтобы проинтегрировать данные функции, проведём их интерполяцию на равномерную сетку.

В декартовой системе координат прямую можно задать уравнением $Ax + By + C = 0$.

Соответствующую ей прямую в полярных координатах можно задать уравнением $A\rho\cos\varphi + B\rho\sin\varphi + C = 0$. Соединим все точки контура прямыми и получим ломанную кривую. Можно считать, что ни одна прямая не проходит через начало координат. Положим для удобства коэффициент $C = -1$. Тогда по двум точкам (φ_1, ρ_1) и (φ_2, ρ_2) можно вычислить коэффициенты прямой через них проходящей из следующей системы:

$$\begin{cases} A\rho_1\cos\varphi_1 + B\rho_1\sin\varphi_1 - 1 = 0 \\ A\rho_2\cos\varphi_2 + B\rho_2\sin\varphi_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Найдем коэффициенты прямой.

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1\sin\varphi_1 \\ 1 & \rho_2\sin\varphi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_1\cos\varphi_1 & \rho_1\sin\varphi_1 \\ \rho_2\cos\varphi_2 & \rho_2\sin\varphi_2 \end{vmatrix}} \quad B = \frac{\begin{vmatrix} \rho_1\cos\varphi_1 & 1 \\ \rho_2\cos\varphi_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_1\cos\varphi_1 & \rho_1\sin\varphi_1 \\ \rho_2\cos\varphi_2 & \rho_2\sin\varphi_2 \end{vmatrix}}$$

Зная, какой прямой соединены точки, можно брать точки с этой прямой с каким-то заданным шагом φ_0 . Это и будет наша интерполяция на равномерную сетку.

Полученная интерполяция дает разбиение отрезка $[-\pi; \pi]$. Теперь мы можем проинтегрировать функцию, соответствующую контуру методом трапеций.

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\varphi_i - \varphi_{i-1})(\rho_i + \rho_{i-1})$$

Этот навык необходим в данной задаче, потому что далее мы будем раскладывать периодические функции в ряд Фурье и работать уже с полученными рядами.

Разложение периодических функций в ряды Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f \in L_2[-\pi; \pi]$ называют функциональный ряд вида:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad \text{где}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Ряд Фурье сходиться к функции f в пространстве $L_2[-\pi; \pi]$. Иными словами, если обозначить через $S_k(x)$ частичные суммы ряда, то их среднеквадратическое отклонение от функции f стремиться к нулю.

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_k(x))^2 dx = 0$$

Вспомним, что мы ищем угол поворота одного контура, относительно другого, для их совмещения, т.е. для 2π -периодических функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ существует такой угол α , что $f_1(x) = f_2(x + \alpha)$. Функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответствуют частичные суммы их рядов Фурье $S_1(x)$ и $S_2(x)$.

Рассмотрим следующую функцию $\Phi(\alpha) = \|f_1(\varphi) - f_2(\varphi + \alpha)\|^2$ и проведем для неё следующие рассуждения.

$$f_1(\varphi) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(n\varphi) + b'_n \sin(n\varphi)),$$

$$f_2(\varphi + \alpha) = \frac{a''_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a''_n \cos n(\varphi + \alpha) + b''_n \sin n(\varphi + \alpha)).$$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(n\varphi) + b'_n \sin(n\varphi)) - \frac{a''_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a''_n \cos n(\varphi + \alpha) + b''_n \sin n(\varphi + \alpha)) \right\|^2 = \\ & = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin(n\varphi) - \sum_{n=1}^{\infty} a''_n \cos n(\varphi + \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} b''_n \sin n(\varphi + \alpha) \right\|^2 = \\ & = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n - a''_n \cos(n\alpha) - b''_n \sin(n\alpha)) + \sum_{n=1}^{\infty} (b'_n + a''_n \sin(n\alpha) - b''_n \sin(n\alpha)) \right\|^2 = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n - a''_n \cos(n\alpha) - b''_n \sin(n\alpha))^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (b'_n + a''_n \sin(n\alpha) - b''_n \sin(n\alpha))^2 \end{aligned}$$

Функция $\Phi(\alpha)$ будет той самой нормой, о которой говорилось вначале. Это наш показатель различия двух контуров. Теперь нужно найти такой угол α , при котором значение функции $\Phi(\alpha)$ минимально. Такой угол α будет искомым.

Пример приближения функции частичной суммой ряда Фурье

По теореме Карлесона если $f \in L_2[-\pi; \pi]$ (как в нашем случае), то её ряд Фурье сходится к ней почти всюду. Наглядно работу с рядами можно продемонстрировать, если для простого контура, составленного всего по двенадцати точкам, провести все описанные выше действия (см. Рисунок 5). Функция $S_k(x)$ будет «обвивать» функцию $f(x)$ (см. Рисунок 6).

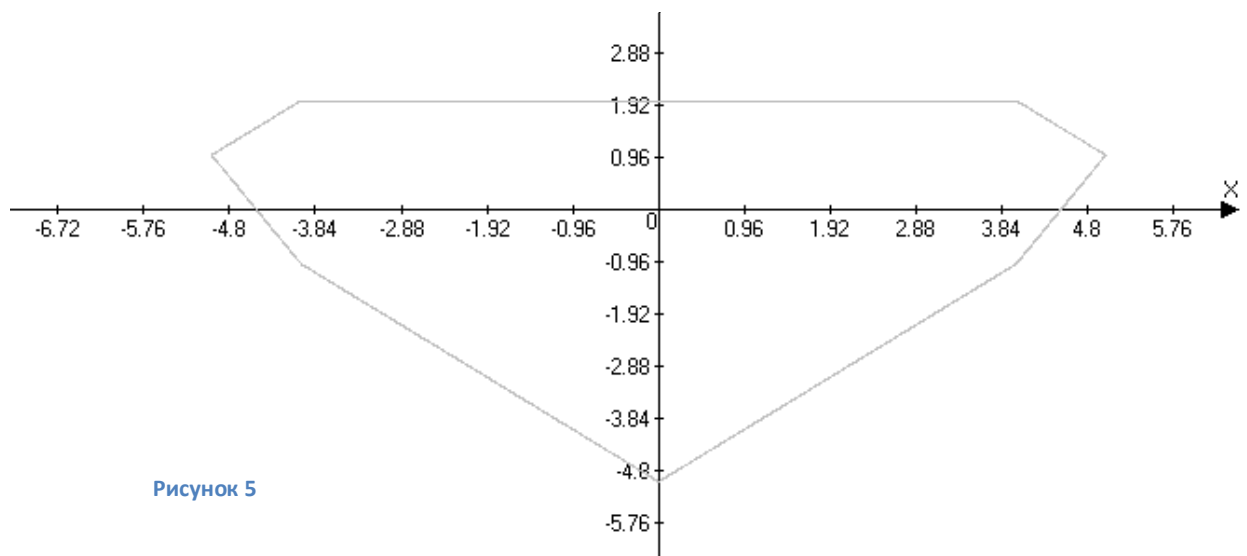


Рисунок 5



Рисунок 6

Контур, изображенный на Рисунке 5, состоит из прямых. При увеличении изображения можно увидеть каким образом функция частичной суммы $S_{1000}(x)$ приближает исходную функцию $f(x)$.

Поиск оптимального угла поворота

Область поиска угла

После того, как мы нашли коэффициенты рядов Фурье каждого контура, займемся поиском угла при котором значение функции $\Phi(\alpha)$ минимально. В идеале $\Phi(\alpha) = 0$. Заметим, что $\Phi(\alpha)$ это тоже ряд Фурье, и равенство его нулю говорит о равенстве нулю его коэффициентов.

Пользуясь сходимостью рядов Фурье, мы используем частичные суммы ряда и вычисляем конечное число коэффициентов. Фактически мы пользуемся функцией $\Phi_k(\alpha) = \|S_1(\varphi) - S_2(\varphi + \alpha)\|^2$. Коэффициенты данного ряда образуют N систем из двух уравнений.

$$\begin{cases} a'_n - a''_n \cos(n\alpha) - b''_n \sin(n\alpha) = 0 \\ b'_n + a''_n \sin(n\alpha) - b''_n \cos(n\alpha) = 0 \end{cases}, \text{ где } n = 1 \dots N$$

Решая эти системы, мы находим N углов $\alpha_1 \dots \alpha_N$. Они довольно кучно расположены в окрестности предполагаемого угла поворота. Так расположение углов α_k для контуров, изображенных на Рисунке 1 и Рисунке 2 можно посмотреть на Рисунке 7. Эти углы принадлежат отрезку $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$, которому, предположительно, принадлежит и наш угол.



Рисунок 7

Поиск оптимального угла разложением до первого порядка

При нахождении минимума функции $\Phi_k(\alpha)$ хотелось бы обойтись как можно меньшим числом операций. Это наводит на мысль воспользоваться разложением слагаемых $\Phi_k(\alpha)$ в ряд Тейлора до первого порядка в точке α_0 . Тогда мы получим функцию $\Phi_k^1(\alpha)$, которая будет квадратичной, и её минимум будет достигаться в вершине. Для найденной вершины разложение и поиск экстремума можно будет повторить.

Подробнее рассмотрим эту идею. Синусы и косинусы мы заменим на их линейные приближения. Коэффициенты линейной функции, полученные из тригонометрических функций, взятых в точке $n\alpha_0$, обозначим A_1^n, B_1^n, A_2^n и B_2^n .

$$\cos(n\alpha) = -n \sin(n\alpha_0) \alpha + (\cos(n\alpha_0) + n\alpha_0 \sin(n\alpha_0)) = A_1^n \alpha + B_1^n,$$

$$\sin(n\alpha) = n \cos(n\alpha_0) \alpha + (\sin(n\alpha_0) - n\alpha_0 \cos(n\alpha_0)) = A_2^n \alpha + B_2^n.$$

В явном виде $\Phi_k^1(\alpha)$ нам не понадобится, пользоваться мы будем её производной, от которой будем брать корень, как последующую точку разложения. Обозначим эту производную, как $D_k^1(\alpha)$.

$$\begin{aligned} D_k^1(\alpha) = & \sum_{n=1}^N \left(2(A_1^n a''_n + A_2^n b''_n) (-a'_n + a''_n (B_1^n + A_1^n \alpha) + b''_n (B_2^n + A_2^n \alpha)) \right) + \\ & + \sum_{n=1}^N (2(a'_n A_2^n - A_1^n b''_n) (b'_n - B_1^n b''_n + a'_n B_2^n + a''_n A_2^n \alpha - A_1^n b''_n \alpha)) \end{aligned}$$

Этот алгоритм оправдывает себя скоростью и однозначностью результата. После нескольких итераций ответ получается таким же, каким бы он был, если бы мы взяли какой-то другой угол из нашего отрезка. В этом есть плюсы и минусы. Явный плюс это стабильность и однозначность. Но однозначность порой портит результат. В этом и есть минус алгоритма. Рассмотрим такую ситуацию. Мы взяли какой-то угол, который оказался очень близок к оптимальному углу (оптимальный угол обозначим α_{opt}). Прodelали несколько итераций и получили ответ. Все бы хорошо, но ответ получился хуже, чем начальный угол. Это происходит собственно из-за того, что мы пользуемся только первым порядком при разложении.

Метод золотого сечения

Метод золотого сечения это метод поиска значений функции на заданном отрезке. В нашем случае это отрезок $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$ (та самая область поиска угла). В основе метода лежит принцип деления в пропорциях золотого сечения. Наиболее широко метод золотого сечения известен, как метод поиска экстремума в решении задач оптимизации. Этот метод схож с троичным поиском, когда отрезок делят на три части. Но в нашем случае будет более эффективен и полезен, т.к. за одну итерацию вычисление функции занимает больше всего времени.

Опишем алгоритм формально для поиска минимума функции $f(x)$. Пусть $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ пропорция золотого сечения.

Пусть заданы начальные границы a и b отрезка и точность ε .

А: Найдем начальные точки деления и значения функции в них.

$$x_1 = b - \frac{(b-a)}{\phi} \quad x_2 = a + \frac{(b-a)}{\phi} \quad y_1 = f(x_1) \quad y_2 = f(x_2)$$

В: если $y_1 \leq y_2$

$$b = x_2 \quad x_2 = x_1 \quad x_1 = b - \frac{(b-a)}{\phi} \quad y_2 = y_1 \quad y_1 = f(x_1)$$

иначе

$$a = x_1 \quad x_1 = x_2 \quad x_2 = a + \frac{(b-a)}{\phi} \quad y_1 = y_2 \quad y_2 = f(x_2)$$

С: если $|b - a| < \varepsilon$,

$$x = \frac{a+b}{2} \text{ конец алгоритма}$$

иначе

переход к В.

Промежуточное тестирование

Ниже будут размещены результаты работы двух алгоритмов. Было проведено 200 тестов. Каждый раз рассматривалось два контура подобных тем, что были изображены на Рисунке 1 и Рисунке 2. Данные расположены по столбцам и устроены следующим образом:

<номер теста> тест	
угол, найденный методом золотого сечения (α_1)	Значение функции $\Phi_{1000}(\alpha_1)$
угол, найденный разложением до первого порядка (α_2)	Значение функции $\Phi_{1000}(\alpha_2)$

084 тест

-0.0070366126839953 149.5772190225285400
-0.0001882100612479 3.7713587883907556

085 тест

-0.0196320351327565 158.3205678882438900
-0.0001887844537610 3.8287983174734892

086 тест

-0.0070366148053981 150.9940840181883700
-0.0001095127228254 1.2950175645958786

087 тест

-0.0000000006509689 0.0000049835645159
-0.0001768936840581 3.3703513323487084

088 тест

-0.0000000000084119 0.0000095657749849
-0.0001438025602646 2.2497117428162405

089 тест

-0.0000000002162425 0.0000179129081315
-0.0002552439674127 7.0402685368401361

090 тест

0.0000000000303437 0.0000060326289926
-0.0001923579742073 4.0429431373020019

091 тест

-0.0038645594285551 144.8680143163477100
-0.0003114933298006 10.5339648420073290

092 тест

0.0000000000422098 0.0000087747983648
-0.0001506362060000 2.5115749573607227

093 тест

-0.0000000004489536 0.0000103301940895
-0.0001188783282969 1.5712644425567182

094 тест

0.0000000004373590 0.0000018048565572
0.0000482916590451 0.2602711856014572

095 тест

-0.0000000001986629 0.0000041358442848
-0.0000160065934822 0.0286355744832771

096 тест

-0.0000000005155998 0.0000245352408526
-0.0000350384561444 0.1373016420296861

097 тест

-0.0000000003313106 0.0000034836811561
-0.0000820752172266 0.7531845390058111

098 тест

0.0133396969740062 162.5471451311798300
-0.0000620243661887 0.4323566744799456

099 тест

0.0000000002313567 0.0000012001681421
-0.0000265458661313 0.0791867684114694

100 тест

0.0000000001306891 0.0000036665565737
-0.0000893201430970 0.8976086868828579

101 тест

-0.0000000001254564 0.0000105692612556
-0.0001475130603178 2.4486695798550278

102 тест

0.0000000003036952 0.0000043999003149
-0.0001372034203970 2.1251401501420273

103 тест

0.0000000000504203 0.0000038545241458
-0.0001014139601168 1.1654475397898578

104 тест

-0.0133396956513465 164.2310761973993500
-0.0000785754796003 0.7007458654973003

105 тест

0.0000000001854854 0.0000046898313132
0.0000017718597148 0.0003612314167045

106 тест

0.0000000002774678 0.0000021224725336
-0.0000760411475040 0.6548989025274112

107 тест

-0.0000000008314894 0.0000044579524082
0.0000316000628737 0.1128464848281217

108 тест

-0.0000000001286088 0.0000074037754575
-0.0000543854355471 0.3338006885963847

109 тест

-0.0038645590970142 147.3030210664105900
-0.0000680126253705 0.5201633622989702

110 тест

0.0000000001318490 0.0000098241998869
-0.0000662854508561 0.4926969830195720

111 тест

0.0000000001512706 0.0000078125490117
-0.0001233043025917 1.6968960997825309

112 тест

-0.0000000000420897 0.0000078732881035
-0.0001338096154318 1.9932163739609774

113 тест

-0.0000000000109869 0.0000078854211222
-0.0001349847384907 2.0257936323946724

114 тест

-0.0000000000529293 0.0000077237775828
-0.0001137009448504 1.4374360050660078

115 тест

-0.0070366171801829 155.4028034858907300
-0.0002357907143298 6.1249975150972711

116 тест

-0.0000000000521380 0.0000065141416895
-0.0002163607120730 5.1450499113524035

117 тест

0.0000000000689053 0.0000069935548182
-0.0000755983814666 0.6339620327434681

118 тест

0.000000000355089 0.0000064759349257
0.0000377709871740 0.1578545219990777

119 тест

0.0000000002704439 0.0000068796314128
0.0000569546289648 0.3569803888933438

120 тест

0.0000000004308517 0.0000061265130630
-0.0000025191166740 0.0007013032821723

121 тест

-0.0000000000825500 0.0000059404772335
-0.0000362435592949 0.1431031287284291

122 тест

-0.0000000000450500 0.0000061561767834
0.0000200898998356 0.0437697445677418

123 тест

0.0000000001752476 0.0000059190815723
-0.0000050395368039 0.0027478619717198

124 тест

-0.0000000001630544 0.0000061251485949
0.0000134825135156 0.0195481050526684

125 тест

0.0000000000589316 0.0000056587046710
-0.0000164720876807 0.0290850334456923

126 тест

-0.0070366145240267 149.1378893465417800
-0.0000720909586580 0.5550439271387017

127 тест

0.0000000001129155 0.0000185894832782
-0.0001548362857767 2.5531973392477583

128 тест

-0.00000000009962112 0.0000166166802437
-0.0000956797200301 0.9764823096096070

129 тест

-0.0000000003440059 0.0000166972757598
-0.0000876344754944 0.8189507828375437

130 тест

0.0000000001816915 0.0000061703392250
-0.0000888146897962 0.8386543727534918

131 тест

-0.0000000000147266 0.0000011561730834
-0.0000706908198854 0.5304621442266383

132 тест

-0.0000000000669533 0.0000089051889757
-0.0000656297466320 0.4593889040536922

133 тест

-0.0000000000198104 0.0000085463151952
-0.0000356285899250 0.1357176767687996

134 тест

-0.0000000000762122 0.0000088560943798
-0.0000654458478771 0.4588271841286860

135 тест

0.0000000002399259 0.0000010665564182
-0.0000638416852925 0.4366442477522264

136 тест

-0.0000000003702676 0.0000016872501395
-0.0001098706798091 1.2960341890777203

137 тест

-0.0000000000563644 0.0000068191684664
-0.0001215546418474 1.5969576858836692

138 тест

0.0000000003094341 0.0000065431100628
-0.0001064243697274 1.2306255351913822

139 тест

-0.0000000002257324 0.0000181412772473
-0.0001805234963539 3.5338070186130728

140 тест

-0.0000000002301963 0.0000134562383817
-0.0001824986172754 3.6421498264927727

141 тест

0.0000000005858131 0.0000113541962593
-0.0002345805206365 6.0206587870875685

142 тест

-0.0000000003649363 0.0000158636828868
-0.0001090881812066 1.3145391585037904

143 тест

0.0000000000328433 0.0000064889129405
0.0000609683858285 0.4136722558627434

144 тест

0.0000000003396355 0.000008884870409
0.0000441164962776 0.2163028815584659

145 тест

0.0000000001121863 0.0000056653595399
-0.0000192721606673 0.0414550219322302

146 тест

-0.0000000000348818 0.0000056097553765
-0.0000137933805642 0.0212510981721042

147 тест

0.0000000002067378 0.0000190904958817
-0.0000658508256004 0.4844000098198947

148 тест

-0.0000000001946132 0.0000083071413108
-0.0000445618160181 0.2223305465624139

149 тест

-0.0000000004223195 0.0000056599389331
-0.0000523105177198 0.3070313301742206

150 тест

-0.000000000079924 0.0000056044474352
-0.0000238869626133 0.0642230649809598

151 тест

0.0070366172977177 157.5510523282598600
-0.0000250388786824 0.0708014854125527

152 тест

0.0000000001069463 0.0000094836728874
-0.0001632354212115 3.0042888884233645

153 тест

0.0000000000656496 0.0000068681069250
-0.0001201027244591 1.6343581415472677

154 тест

-0.0000000000140638 0.0000059378332651
-0.0000817036800966 0.7587527649580239

155 тест

0.0000000002435756 0.0000070875160202
-0.0000939458424175 1.0029227085642791

156 тест

-0.0000000003045708 0.0000095067453794
-0.0000359751558151 0.1471360395477854

157 тест

0.0000000005659360 0.0000096279507385
-0.0000009202411957 0.0001055432472157

158 тест

0.0000000004600036 0.0000068664442851
-0.000118048358797 1.4102713009579622

159 тест

-0.0000000002502873 0.0000087478415853
-0.0000286405447614 0.0924511306950867

160 тест

-0.0000000005730009 0.0000081076172458
-0.0001686721293554 3.1798655763266104

161 тест

0.0000000003015735 0.0000069492398541
-0.0001272897182526 1.8116160375502335

162 тест

0.0000000005050702 0.0000094789277852
-0.0000992899407806 1.1019869006338801

163 тест

0.0000000000195264 0.0000097839862065
-0.0001070911136478 1.2803463157141926

164 тест

0.000000000571617 0.0000071777144815
-0.0000431284350636 0.2073042290352394

165 тест

-0.0000000001149711 0.0000079815865990
-0.0001509655082853 2.5368051684705497

166 тест

-0.0000000002468776 0.0000066008676572
-0.0002163746401507 5.1854846492465132

167 тест

-0.0000000003604596 0.0000095063396865
-0.0001940118099095 4.1754662424506455

168 тест		179 тест		190 тест	
-0.0000000000511503	0.0000083793056351	-0.0000000002132531	0.0000143293836782	0.0000000000756606	0.0000178812584098
-0.0000182090846209	0.0370243508349346	-0.0001770432792980	3.4182598519945149	-0.0000392818324726	0.1727270888188749
169 тест		180 тест		191 тест	
0.0000000002147789	0.0000081857778034	0.0038645576369463	143.2938587770300700	0.0070366153858069	156.4626148049167100
-0.0001608008100783	2.8689825638165538	-0.0000801863904270	0.7031058138493577	-0.0001064437027560	1.2679119577917319
170 тест		181 тест		192 тест	
0.0000000000930613	0.0000098352973137	0.0000000003935913	0.0000094419969537	0.0000000001129612	0.0000040235831185
-0.0002313623270068	5.8966626895441721	-0.0001435036700696	2.2480396120020774	-0.0000934476442872	0.9821633885054453
171 тест		182 тест		193 тест	
-0.0000000000340886	0.0000093682696101	0.0000000006336029	0.0000213434886024	-0.000000000070875	0.0000005115013847
-0.0001241946210064	1.7084105756478889	-0.0000995421594505	1.0825785448760803	0.0000039679568694	0.0017655358953521
172 тест		183 тест		194 тест	
0.0000000001790106	0.0000159976910889	-0.0000000003002092	0.0000193918404474	-0.0000000002504407	0.0000307165966377
0.0000060421670889	0.0040494118927326	-0.0001417399262833	2.1958572486991628	0.0000305353203774	0.1045861084790129
173 тест		184 тест		195 тест	
0.0000000000066739	0.0000009722105058	-0.0038645583866696	144.0513435049429600	-0.0000000000294111	0.0000228051225801
0.0000418986092295	0.1939357406896356	-0.0000857454735041	0.8080877732241895	-0.0000143841768123	0.0233150592256847
174 тест		185 тест		196 тест	
-0.0000000000285523	0.0000056529988939	-0.0070366154001952	154.4943586360508900	-0.00000000008048337	0.0000206697409735
-0.0000602876118313	0.4002135714908319	-0.0001384625858676	2.1151331095785189	-0.0000672396357149	0.5090763949550948
175 тест		186 тест		197 тест	
0.0000000003073697	0.0000079203303236	0.0000000000860804	0.0000108909645542	-0.0038645586592030	147.7111390403078400
-0.0000951197416839	0.9925119497403864	-0.0001769608059093	3.4572705352931403	-0.0000150250519554	0.0254951321585966
176 тест		187 тест		198 тест	
0.0000000004871513	0.0000136694779134	-0.0000000006464647	0.0000209048489421	0.0000000001651253	0.0000084653900745
-0.0001235083587061	1.6675867187139353	-0.0001448691382720	2.3236101238892384	-0.0000927534629075	0.9711278852750874
177 тест		188 тест		199 тест	
-0.0000000006130633	0.0000087788219127	-0.0000000004869561	0.0000168926586997	-0.0000000000854542	0.0000143060688675
-0.0000965741917169	1.0194749627059931	-0.0000949301628303	1.0031653412017785	-0.0000577173517984	0.3774375762069376
178 тест		189 тест			
-0.0038645581092021	143.1976823525226900	0.0038645580484981	146.6932225445834200		
-0.0001602758985558	2.7963200035422759	-0.0000827909913890	0.7672357029509899		

По этим данным видно, что метод золотого сечения не всегда дает достаточно точный результат, но чаще случаи, когда угол, полученный этим методом, на порядок точнее угла, полученного методом разложения до первого порядка. В чём же причина «осечек» метода золотого сечения?

Рассмотрим функцию $\Phi_k(\alpha)$. Она обладает очень высоким абсолютным значением производной. Она очень быстро убывает к нулю, а потом так же быстро от нуля и растёт. При этом она подобно примеру, изображенному на Рисунке 6, обвивает функцию, похожую на квадратичную. Это и не удивительно т.к. уже был сделан вывод о том, что $\Phi(\alpha)$ это ряд Фурье. Это и мешает методу золотого сечения. Алгоритм попадает в локальный минимум, которых может быть несколько у функции в области поиска, и там и остается, не доходя до глобального минимума. Когда мы переходим к функции $\Phi_k^1(\alpha)$ и используем другой алгоритм, локальные минимумы пропадают вместе с тригонометрическими функциями. Однако так же пропадает и точность.

Совместная работа алгоритмов

Само собой напрашивается следующая идея. Стоит скомбинировать два алгоритма. Каким образом это можно сделать? Заметим, что алгоритмом, где используется разложение в ряд Тейлора, мы получаем угол, довольно близкий к оптимальному углу. Далее мы можем уже применить метод золотого сечения, но не в области поиска, а в окрестности этого угла. Таким образом, происходит сокращение итераций метода золотого сечения, за счет сужения области поиска. И происходит увеличение точности полученного результата.

Ниже будут размещены результаты совместной работы двух алгоритмов. Было также проведено 200 тестов. Каждый раз рассматривалось два контура подобных тем, что были изображены на Рисунке 1 и Рисунке 2. Данные расположены по столбцам и устроены следующим образом:

<номер теста> тест	
угол, который является оптимальным (α_1)	Значение функции $\Phi_{1000}(\alpha_1)$
угол, использующийся для сужения области поиска (α_2)	Значение функции $\Phi_{1000}(\alpha_2)$

000 тест		028 тест		056 тест	
0.0000000006187341	0.0000364903138242	0.0000000006513053	0.0000507949100304	0.000000000693206	0.000095662613970
-0.0001246371718166	1.7671189009773765	-0.0001227632305449	1.6307082194319931	-0.0001082886065607	1.3347757457412919
001 тест		029 тест		057 тест	
-0.0000000002130293	0.0000241248027327	-0.0000000003163261	0.0000436100344758	0.0000000001703451	0.0000049777254698
-0.0001780904338699	3.6086038252644590	-0.0002952444263004	9.2910604517626361	-0.0001829264793312	3.7797065235655833
002 тест		030 тест		058 тест	
0.0000000004096501	0.0000330686559986	0.000000000746728	0.0000257695558007	-0.0000000001732699	0.0000322244956006
0.0000666720871369	0.5100554328342735	-0.0002146695838851	4.9521294632701194	-0.0001153057199251	1.5066832931610441
003 тест		031 тест		059 тест	
-0.000000000805675	0.0000081882589490	-0.0000000002624840	0.0000065304541933	-0.0000000002952412	0.0000012300527117
-0.0000813677608900	0.7610093193291561	-0.0000868712406082	0.8154543010420964	-0.0000286293822705	0.0924918511957937
004 тест		032 тест		060 тест	
0.0000000006909011	0.0000441342332882	0.0000000005822236	0.0000358004620970	0.0000000001783417	0.0000038101573169
-0.0001061538794230	1.2948973975183360	-0.0001240312104408	1.6571291196022209	-0.0001452630827729	2.3638227619485916
005 тест		033 тест		061 тест	
-0.0000000001101888	0.0000248640548080	-0.0000000008049678	0.0000277302773459	0.0000000001654072	0.0000088719085519
-0.0000575191984062	0.3806065470465036	-0.0002731711318762	7.9580266870958818	-0.0001433837479721	2.2979350037946342
006 тест		034 тест		062 тест	
-0.0000000000137681	0.0000182943669021	-0.0000000000050650	0.0000095483044920	0.0000000001856534	0.0000152670448008
-0.0000034109607204	0.0013553627916555	-0.0001738201856548	3.2677860196233621	-0.0001873760353104	3.9056957356660380
007 тест		035 тест		063 тест	
-0.0000000000137951	0.0000435432992049	0.0000000004034102	0.0000539906162225	0.0000000001650442	0.0000201159777174
-0.0000798452222234	0.7295171056496855	-0.0000952681513459	0.9892018510124941	-0.0001595609290454	2.8507332235678340
008 тест		036 тест		064 тест	
0.0000000001499531	0.0000089648045849	-0.0000000003492336	0.0000146813504847	0.0000000000049173	0.0000103560273870
-0.0001045770553130	1.2458732296674511	-0.0001719519186975	3.2119332424444162	-0.0002104226124788	4.9189825115851527
009 тест		037 тест		065 тест	
-0.0000000006396600	0.0000191634410257	-0.0000000002566086	0.0000167121882724	-0.0000000001255011	0.0000116204092239
-0.0002394464514335	6.4314798189983975	-0.0000677992883806	0.5052758255376695	-0.0002031738199393	4.5849503517581498
010 тест		038 тест		066 тест	
0.0000000001343195	0.0000251427758793	-0.0000000001769864	0.0000257413708750	-0.0000000001182395	0.0000117622401886
-0.0002009754875190	4.5339322001641351	-0.0001844894310232	3.7356249240880910	-0.0001857387605896	3.8328176839512449
011 тест		039 тест		067 тест	
0.0000000002168974	0.0000460484631450	-0.0000000001054830	0.0000211324028683	-0.0000000002815762	0.0000074334465587
-0.0001766720386458	3.5135672928065329	-0.0002116982123821	4.9343109086624475	-0.0000845919707114	0.7976372497559606
012 тест		040 тест		068 тест	
0.0000000001706265	0.0000016791151263	-0.0000000001570007	0.0000314403749506	-0.000000000700927	0.0000047919086286
-0.0000923702260967	0.9604987637061758	-0.0003301412151795	11.9100197164667690	0.0000410155505497	0.1864322437835273
013 тест		041 тест		069 тест	
0.0000000000163958	0.0000092589270660	0.0000000000485753	0.0000162224770942	0.0000000001494656	0.0000097362972418
-0.0001482877637980	2.4737264989086500	-0.0003045133310527	10.2107854408305840	0.0000201170474671	0.0447918083745962
014 тест		042 тест		070 тест	
-0.0000000001157595	0.0000159642748905	0.0000000005126800	0.0000497573135545	0.0000000005997249	0.0000183233889607
-0.0002143121706274	5.1386115498744820	-0.0001100455454066	1.3600133175218541	0.0000900149099301	0.8932268156445751
015 тест		043 тест		071 тест	
-0.0000000004848838	0.0000189088434375	-0.0000000003027867	0.0000151315076442	-0.0000000002744889	0.0000059524566062
-0.0002910333727694	9.4007903930048045	0.0000066490379189	0.0050043896345193	-0.0000501172689057	0.2748792767063067
016 тест		044 тест		072 тест	
-0.0000000001877021	0.0000207897794278	0.0000000001235600	0.0000362902655343	0.0000000001488151	0.0000341729598775
-0.0003055336703646	10.3348916763192840	0.0001219258727557	1.6745418154411389	-0.0001585233915527	2.7231187063115434
017 тест		045 тест		073 тест	
-0.0000000002600935	0.0000202144851695	0.0000000000524629	0.0000191733556185	-0.0000000001156095	0.0000234747953973
-0.0002490567979792	6.8781317405474462	-0.0000871631429513	0.8575032918418967	-0.0001268349965597	1.7389582891815363
018 тест		046 тест		074 тест	
0.0000000002699103	0.0000244023559569	-0.0000000002917609	0.0000339896399801	-0.0000000004568929	0.0000297041179069
0.0000378927592047	0.1611241859400590	-0.0001889406539901	4.0097291603976872	-0.0001892574967878	3.8415511530017263
019 тест		047 тест		075 тест	
0.0000000001305778	0.0000108259168545	0.0000000001833940	0.0000338470407962	-0.0000000002613037	0.0000210690150745
0.0000009456937228	0.0001104180322309	-0.0001983553139545	4.4084874188969243	-0.0000831814398950	0.7438146486737005
020 тест		048 тест		076 тест	
0.0000000000978570	0.0000235876122180	-0.0000000001551118	0.0000144819364465	-0.0000000000640475	0.0000231476810804
-0.0000284651607296	0.0900485315565798	-0.0001440285131711	2.3368231704451623	-0.0001623451621679	2.8136522268902615
021 тест		049 тест		077 тест	
-0.0000000005736483	0.0000246351198614	-0.0000000000942460	0.0000228584991823	0.0000000006736650	0.0000484625629807
-0.0001005514247988	1.1160436898251258	-0.0000544758740075	0.3372537771540740	-0.0001725632729598	3.1799567413005252
022 тест		050 тест		078 тест	
-0.0000000001705800	0.0000242421180012	0.0000000001572551	0.0000469269106452	0.0000000001222987	0.0000265705832682
-0.0001107704129653	1.3476924636615328	-0.0001417374968506	2.2812245266802789	-0.0002195441972104	5.1211931635681260
023 тест		051 тест		079 тест	
0.0000000000480991	0.0000195409234640	0.0000000001315438	0.0000144433507309	0.0000000001078994	0.0000193215442503
-0.0001504921331147	2.4638862223567477	-0.0001091941410120	1.3605717932507426	-0.0001038870487172	1.1544239617671055
024 тест		052 тест		080 тест	
-0.0000000001970798	0.0000095084253266	-0.0000000005172360	0.0000177125415812	0.0000000002150221	0.0000169738279653
-0.0001587417598950	2.7289791403723540	-0.0002088141096740	4.9419579195577601	-0.0000609872795103	0.3972054548693503
025 тест		053 тест		081 тест	
-0.0000000001848752	0.0000247489704767	0.0000000001055288	0.0000085427512081	0.0000000003026004	0.0000195313434394
-0.0001513414550742	2.4889070876561989	-0.0000861368256510	0.8482213146328883	-0.0001055267150825	1.1882489241963028
026 тест		054 тест		082 тест	
0.0000000001295105	0.0000202416333913	0.0000000003252666	0.0000319968201528	0.0000000004740045	0.0000198938387921
-0.0000747229448448	0.6072948445247247	-0.0000373002866975	0.1593008957069610	-0.0001323379790995	1.8684373831051013
027 тест		055 тест		083 тест	
0.0000000002205255	0.0000576639545717	0.0000000000091338	0.0000046915227859	0.0000000000239917	0.0000183054037318
-0.0001097406958198	1.3055594569766802	-0.0000446636691759	0.2280919902748108	-0.0001099712363860	1.2941646887323388

084 тест		112 тест		140 тест	
0.0000000001882193	0.0000161911469498	-0.0000000000420978	0.0000078732881035	-0.0000000002301799	0.0000134562383817
-0.0001882100612479	3.7713587883907556	-0.0001338096154318	1.9932163739609774	-0.0001824986172754	3.6421498264927727
085 тест		113 тест		141 тест	
0.000000000003578192	0.0000422590556283	-0.00000000000109903	0.0000078854211222	0.00000000005857971	0.0000113541962593
-0.0001887844537610	3.8287983174734892	-0.0001349847384907	2.0257936323946724	-0.0002345805206365	6.0206587870875685
086 тест		114 тест		142 тест	
0.0000000003086060	0.0000228731709444	-0.0000000000529231	0.0000077237775828	-0.0000000003649400	0.0000158636828868
-0.0001095127228254	1.2950175645958786	-0.0001137009448504	1.4374360050660078	-0.0001090881812066	1.3145391585037904
087 тест		115 тест		143 тест	
-0.0000000006509659	0.0000049835645159	-0.0000000003161633	0.0000277045971757	0.0000000000328407	0.0000064889129405
-0.0001768936840581	3.3703513323487084	-0.0002357907143298	6.1249975150972711	0.0000609683858285	0.4136722558627434
088 тест		116 тест		144 тест	
-0.0000000000084143	0.0000095657749849	-0.0000000000521364	0.0000065141416895	0.0000000003396332	0.000008884870409
-0.0001438025602646	2.2497117428162436	-0.0002163607120730	5.1450499113524035	0.0000441164962776	0.2163028815584666
089 тест		117 тест		145 тест	
-0.0000000002162239	0.0000179129081315	0.0000000000689203	0.0000069935548182	0.0000000001121949	0.0000056655395399
-0.0002552439674127	7.0402685368401361	-0.0000755983814666	0.6339620327434681	-0.0000192721606673	0.0414550219322302
090 тест		118 тест		146 тест	
0.000000000303431	0.0000060326289926	0.000000000355178	0.0000064759349257	-0.000000000348941	0.0000056097553765
-0.0001923579742073	4.0429431373020019	0.0000377709871740	0.1578545219990777	-0.0000137933805642	0.0212510981721042
091 тест		119 тест		147 тест	
0.0000000000144282	0.0000165866697467	-0.0000000002704513	0.0000068796314128	-0.0000000002067479	0.0000190904958817
-0.0003114933298006	10.5339648420073290	0.0000569546289648	0.3569803888933438	-0.0000658508256004	0.4844000098198947
092 тест		120 тест		148 тест	
0.0000000000422036	0.0000087747983648	0.0000000004308445	0.0000061265130630	-0.0000000001946040	0.0000083071413108
-0.0001506362060000	2.5115749573607227	-0.0000025191166740	0.0007013032821724	-0.0000445618160181	0.2223305465624151
093 тест		121 тест		149 тест	
-0.0000000004489614	0.0000103301940895	-0.0000000000825583	0.0000059404772335	-0.0000000004223157	0.0000056599389331
-0.0001188783282969	1.5712644425567182	-0.0000362435592949	0.1431031287284291	-0.0000523105177198	0.3070313301742206
094 тест		122 тест		150 тест	
0.0000000004373538	0.0000018048565572	-0.0000000000450522	0.0000061561767834	-0.0000000000079954	0.0000056044474352
0.0000482916590451	0.2602711856014572	0.0000200898998356	0.0437697445677418	-0.0000238869626133	0.0642230649809598
095 тест		123 тест		151 тест	
-0.0000000001986555	0.0000041358442848	0.0000000001752494	0.0000059190815723	-0.0000000002061232	0.0000057050583395
-0.0000160065934822	0.0286355744832771	-0.0000050395368039	0.0027478619717198	-0.0000250388786824	0.0708014854125527
096 тест		124 тест		152 тест	
-0.0000000005155918	0.0000245352408526	-0.0000000001630589	0.0000061251485949	0.0000000001069417	0.0000094836728874
-0.0000350834561444	0.1373016420296861	0.0000134825135156	0.0195481050526684	-0.0001632354212115	3.0042888884233614
097 тест		125 тест		153 тест	
-0.0000000003313185	0.0000034836811561	0.0000000000589400	0.0000056587046710	0.0000000000656555	0.0000068681069250
-0.0000820752172266	0.7531845390058111	-0.0000164720876807	0.0290850334456923	-0.0001201027244591	1.6343581415472668
098 тест		126 тест		154 тест	
0.0000000000943867	0.0000090530433903	0.0000000003415833	0.0000087404533352	-0.0000000000140666	0.0000059378332651
-0.0000620243661887	0.4323566744799456	-0.0000720909586580	0.5550439271387017	-0.0000817036800966	0.7587527649580239
099 тест		127 тест		155 тест	
0.0000000002313585	0.0000012001681421	0.0000000001129144	0.0000185894832782	0.0000000002435701	0.0000070875160202
-0.0000265458661313	0.0791867684114694	-0.0001548362857767	2.5531973392477583	-0.0000939458424175	1.0029227085642791
100 тест		128 тест		156 тест	
0.0000000001306898	0.0000036665565737	-0.00000000009962044	0.0000166166802437	-0.0000000003045585	0.0000095067453794
-0.0000893201430970	0.8976086868828581	-0.0000956797200301	0.9764823096096070	-0.0000359751558151	0.1471360395477854
101 тест		129 тест		157 тест	
-0.0000000001254647	0.0000105692612556	-0.0000000003439953	0.0000166972757598	0.0000000005659294	0.0000096279507385
-0.0001475130603178	2.4486695798550278	-0.0000876344754944	0.8189507828375437	-0.0000009202411957	0.0001055432472157
102 тест		130 тест		158 тест	
0.0000000003036998	0.0000043999003149	0.0000000001816955	0.0000061703392250	0.0000000004599942	0.0000068664442851
-0.0001372034203970	2.1251401501420273	-0.0000888146897962	0.8386543727534918	-0.0001118048358797	1.4102713009579622
103 тест		131 тест		159 тест	
0.0000000000504169	0.0000038545241458	-0.0000000000147238	0.0000011561730834	-0.0000000002502867	0.0000087478415853
-0.0001014139601168	1.1654475397898578	-0.0000706908198854	0.5304621442266383	-0.0000286405447614	0.0924511306950867
104 тест		132 тест		160 тест	
0.0000000002864246	0.0000027576036013	-0.0000000000669501	0.0000089051889757	-0.0000000005729989	0.0000081076172458
-0.0000785754796003	0.7007458654973003	-0.0000656297466320	0.4593889040536922	-0.0001686721293554	3.1798655763266104
105 тест		133 тест		161 тест	
0.0000000001854875	0.0000046898313132	-0.0000000000198116	0.0000085463151952	0.0000000003015768	0.0000069492398541
0.0000017718597148	0.0003612314167045	-0.0000356285899250	0.1357176767687996	-0.0001272897182526	1.8116160375502335
106 тест		134 тест		162 тест	
0.0000000002774638	0.0000021224725336	-0.0000000000762082	0.0000088560943798	0.0000000005050797	0.0000094789277852
-0.0000760411475040	0.6548989025274112	-0.0000654458478771	0.4588271841286860	-0.0000992899407806	1.1019869006338801
107 тест		135 тест		163 тест	
-0.00000000008314951	0.0000044579524082	0.0000000002399284	0.0000010665564182	0.0000000000195135	0.0000097839862065
0.000031600628737	0.1128464848281217	-0.0000638416852925	0.4366442477522264	-0.0001070911136478	1.2803463157141926
108 тест		136 тест		164 тест	
-0.0000000001286121	0.0000074037754575	-0.0000000003702650	0.0000016872501395	0.0000000000571587	0.0000071777144815
-0.0000543854355471	0.3338006885963849	-0.0001098706798091	1.2960341890777203	-0.0000431284350636	0.2073042290352394
109 тест		137 тест		165 тест	
-0.0000000000089994	0.0000073516898362	-0.0000000000563677	0.0000068191684664	-0.0000000001149778	0.0000079815865990
-0.0000680126253705	0.5201633622989702	-0.0001215546418474	1.5969576858836692	-0.0001509655082853	2.5368051684705497
110 тест		138 тест		166 тест	
0.0000000001318439	0.0000098241998869	0.0000000003094278	0.0000065431100628	-0.0000000002468827	0.0000066008676572
-0.0000662854508561	0.4926969830195719	-0.0001064243697274	1.2306255351913822	-0.0002163746401507	5.1854846492465132
111 тест		139 тест		167 тест	
0.0000000001512737	0.0000078125490117	-0.0000000002257247	0.0000181412772473	-0.0000000003604642	0.0000095063396865
-0.0001233043025917	1.6968960997825309	-0.0001805234963539	3.5338070186130728	-0.0001940118099095	4.1754662424506455

168 тест		179 тест		190 тест	
-0.0000000000511569	0.0000083793056351	-0.0000000002132506	0.0000143293836782	0.0000000000756616	0.0000178812584098
-0.0000182090846209	0.0370243508349346	-0.0001770432792980	3.4182598519945149	-0.0000392818324726	0.1727270888188749
169 тест		180 тест		191 тест	
0.0000000002147763	0.0000081857778034	-0.0000000002269186	0.0000134177034285	0.0000000001668206	0.0000060341175895
-0.0001608008100783	2.8689825638165538	-0.0000801863904270	0.7031058138493577	-0.0001064437027560	1.2679119577917319
170 тест		181 тест		192 тест	
0.0000000000930543	0.0000098352973137	0.0000000003935927	0.0000094419969537	0.0000000001129586	0.0000040235831185
-0.0002313623270068	5.8966626895441721	-0.0001435036700696	2.2480396120020774	-0.0000934476442872	0.9821633885054453
171 тест		182 тест		193 тест	
-0.0000000000340963	0.0000093682696101	0.0000000006335904	0.0000213434886024	-0.0000000000070862	0.0000005115013847
-0.0001241946210064	1.7084105756478889	-0.0000995421594505	1.0825785448760803	0.0000039679568694	0.0017655358953521
172 тест		183 тест		194 тест	
0.0000000001790168	0.0000159976910889	-0.0000000003002235	0.0000193918404474	-0.0000000002504407	0.0000307165966377
0.0000060421670889	0.0040494118927326	-0.0001417399262833	2.1958572486991628	0.0000305353203774	0.1045861084790129
173 тест		184 тест		195 тест	
0.0000000000066752	0.0000009722105058	-0.0000000001954173	0.0000263318929385	-0.0000000000294107	0.0000228051225801
0.0000418986092295	0.1939357406896356	-0.0000857454735041	0.8080877732241895	-0.0000143841768123	0.0233150592256847
174 тест		185 тест		196 тест	
-0.0000000000285454	0.0000056529988939	-0.0000000000648030	0.0000271157513462	-0.00000000008048175	0.0000206697409735
-0.0000602876118313	0.4002135714908319	-0.0001384625858676	2.1151331095785215	-0.0000672396357149	0.5090763949550948
175 тест		186 тест		197 тест	
0.0000000003073675	0.0000079203303236	0.0000000000860762	0.0000108909645542	0.00000000005617723	0.0000150056528980
-0.0000951197416839	0.9925119497403864	-0.0001769608059093	3.4572705352931403	-0.0000150250519554	0.0254951321585966
176 тест		187 тест		198 тест	
0.00000000004871551	0.0000136694779134	-0.00000000006464544	0.0000209048489421	0.0000000001651309	0.0000084653900745
-0.0001235083587061	1.6675867187139353	-0.0001448691382720	2.3236101238892384	-0.0000927534629075	0.9711278852750874
177 тест		188 тест		199 тест	
-0.0000000006130696	0.0000087788219127	-0.00000000004869563	0.0000168926586997	-0.00000000000854444	0.0000143060688675
-0.0000965741917169	1.0194749627059931	-0.0000949301628303	1.0031653412017785	-0.0000577173517984	0.3774375762069376
178 тест		189 тест			
-0.00000000004130360	0.0000090816670615	-0.0000000003582335	0.0000116246735302		
-0.0001602758985558	2.7963200035422759	-0.0000827909913890	0.7672357029509899		

Вывод

В ходе работы были использованы различные алгоритмы и методы анализа. С их помощью задача была решена, а полученные навыки, функции и идеи могут использоваться дальнейшем. Одним из выводов, который можно сделать является следующий. Если поставленную задачу можно решить двумя способами, то возможно стоит посмотреть, нельзя ли их скомбинировать. Потому вместе они могут дать гораздо больше, чем каждый по отдельности.

Список литературы

Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу [Книга].

Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике [Книга].

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа [Книга].

Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы [Книга].

Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение [Книга].