Эффективный метод скаляризации и поиска конкурентного решения без итеративных вычислений для Липшицевых функций

Ильгам Магданович Латыпов
Научный руководитель: к.т.н. Ю. В. Дорн

Кафедра интеллектуальных систем ФПМИ МФТИ
Специализация: Интеллектуальный анализ данных
Направление: 03.04.01 Прикладные математика и физика

2024

конкурентное решение для Липшицевых функций

Проблема

Методы скаляризации многокритериальных задач имеют низкую интерпретируемость: они требуют подбор параметров и полученные ими решения не интуитивны. Также в случае потери доступа к вычислению функций невозможно решить задачу оптимизации.

Требуется

Поставить задачу оптимизации с хорошо интерпретируемым решением и предложить метод ее приближенного решения. Метод должен использовать только заранее вычисленные значения функций.

Решение

Поставить задачу оптимизации, основываясь на определении конкурентного решения. Для решения поставленной задачи использовать липшицевость и монотонность функций.

Задача многокритериальной оптимизации

Требуется найти

$$\min_x f(x) \triangleq (f_1(x), ..., f_m(x))^\top, \qquad (T_0)$$
$$\text{s.t. } x \in K.$$

где:

- функции $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, m}$.
- Множество решений K является выпуклым, замкнутым и снабжено нормой $\|\cdot\|$.

Простой метод скаляризации, пример

$$f(x) \triangleq \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x).$$

Конкурентная точка и его недостаток

Определение (γ-конкурентная точка(стар.))

x называется γ-конкурентной точкой для функций f_i, если для всех $i \in \overline{1, m}$:

$$f_i(x) \leq (1 + \gamma) \min_y f_i(y). \tag{1}$$

Функция, оракул которой больше недоступен, пример

Компания работала несколько периодов со стратегиями x_i и пронаблюдала метрики – $f_j(x_i)$. Необходимо найти стратегию используя только существующие знания. Информации об оптимальности действий компании нет. Доступа к оракулу для вычисления функции нет.

Обобщение конкурентности и метод скаляризации

Определение (γ-конкурентная точка)

x называется γ-конкурентной точкой для функций f_i и точек x_i, если для всех $i \in \overline{1, m}$:

$$f_i(x) \leq (1+\gamma) f_i(x_i). \tag{2}$$

Обозначение: $f_i(x_i) =: v_i$.

Предлагаемый метод скаляризации

$$\begin{aligned} &\min_{x,\gamma} \gamma, && (T_1) \\ &\text{ s.t. } \ x \in K, \\ &\qquad\quad f_i(x) - v_i \leq \gamma v_i, \quad i \in \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Предположения для аппроксимации

Определение (Условие Липшица)

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица на X с нормой $\|\cdot\|$ и константой Липшица L:

$$\forall x, y \in X: \ |f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|.$$

Предположения на функции

Для всех $i = \overline{1, m}$ для $f_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$:

1. Удовлетворяет условию Липшица с константой L_i на K.
2. Вычислена в точке $x_i : v_i = f_i(x_i)$.
3. Функция минимизируется.

Требуется найти $x \in K$, которая является допустимой для T_1. Методу доступны только вычисленные значения функций.

Предлагаемый метод аппроксимации

Аппроксимация задачи оптимизации

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,\gamma}, \gamma && (T_2)\\
&\text{s.t.}\ \ x \in K, \\
&\qquad \|x - x_i\| \le \frac{1}{L_i}\gamma v_i \ \ \forall i \in \overline{1, m}, \\
&\qquad f_i(x) - v_i \le \gamma v_i \ \ i \in \overline{1, m}. \quad (\text{T1})
\end{aligned}
$$

Доказательство корректности

Рассмотрим допустимые x, γ из T_2. Тогда для всех $i = \overline{1, m}$:

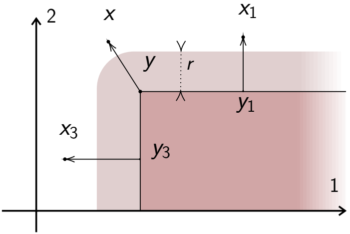
$$
\|x_i - x\| \le \frac{\gamma v_i}{L_i} \Longrightarrow |f_i(x) - v_i| \le \gamma v_i. \tag{3}
$$

Это означает, что x, γ являются допустимыми для T_1.

Воспользуемся монотонностью функции f по параметрам x для упрощения ограничений. Введем оператор $\texttt{clip}_f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\texttt{clip}_f(x, y)_i = \begin{cases} \max(x_i - y_i, 0), & f \text{ возрастает по } x_i, \\ \min(y_i - x_i, 0), & f \text{ убывает по } x_i, \\ x_i - y_i, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

$$\min c^\top x$$
$$Ax \leq b$$



$$
\begin{aligned}
&\min_{x,\gamma} \gamma, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (T_3)\\
&\quad \text{s.t. } x \in K,\\
&\qquad\qquad \|\mathtt{clip}_{f_i}(x, x_i)\| \le \frac{1}{L_i}\gamma f_i(x_i) \quad \forall i \in \overline{1, m},\\
&\qquad\qquad {\color{blue} f_i(x) - v_i \le \gamma v_i \quad i \in \overline{1, m}. \quad (\mathrm{T}1)}
\end{aligned}
$$

Теорема (Латыпов, 2024)

Решение (x, γ) задачи T_3 является выполнимой точкой для T_1.

Теорема (Латыпов, 2024)

Пусть γ^* является решением задачи T_3. И известны аппроксимации констант Липшица $\widetilde{L_i} = \kappa_i L_i$. Пусть x – решение задачи T_3, в которой константы Липшица заменены на $\widetilde{L_i}$. Тогда для x верно: $|f(x) - v_i| \le \frac{\kappa_{\max}}{\kappa_i}\gamma^* v_i$. Здесь $\kappa_{\max} = \max_{i=\overline{1,m}} \kappa_i$.

Вычислительный эксперимент: потребление ресурсов

Функция

$$F(b, \xi) = c_b^T \cdot b + c_a^T \cdot \max(r_\xi - b, 0). \tag{5}$$

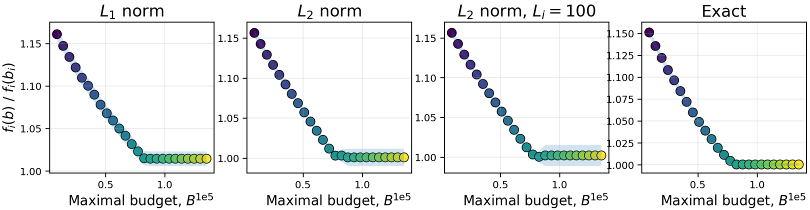
Каждый вектор из $\mathbb{R}^n$, $c_b \leq c_a$ покомпонентно.

Пояснение

Представим, что компания потребляет случайное количество ресурсов r_ξ в течение m периодов. В начале периода можно купить b по более низкой цене. При необходимости они докупают недостающие ресурсы по более высокой цене.

Компания проработала m периодов и наблюдала для $i \in \overline{1, m} : r_\xi, c_b^i, c_a^i$ количество ресурсов b_i.
$K = \{b : c_b^T \cdot b \leq B\}$.

Зависимость относительных приростов функции от бюджета для разных подходов

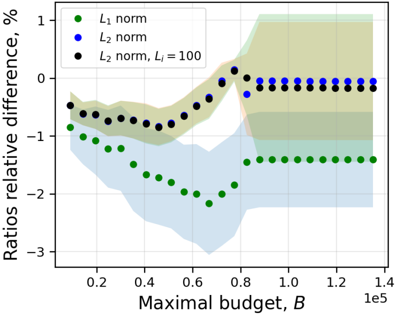


$$f_i(x) \leq (1+\gamma) f_i(x_i) \longrightarrow$$

$$\frac{f_i(x)}{f_i(x_i)} \leq (1+\gamma). (6)$$

1. Результаты работы разных норм похожи.
2. Замена констант на неточные не сломало алгоритм.

Сравнение результатов аппроксимации с точным решением в зависимости от бюджета



1. В рассмотренной задаче качество решения для аппроксимаций падает менее чем на 2% в силу простоты рассмотренной задачи.
2. L_1 аппроксимация работает хуже на рассмотренном примере. Это следствие разреженности решений.

Выносится на защиту

1. Предложен метод скаляризации не требующий подбора параметров.
2. Предложен метод поиска приближенного решения для липшицевых функций не использующий итеративную оптимизацию.
3. Проведен теоретический анализ для случая неточных параметров.

Публикации

Работа “Balancing Efficiency and Interpretability: A New Approach to Multi-Objective Optimization with High Computation Costs in Lipschitz Functions” Latypov & Dorn представлена на конференции «XIV International Conference on Network Analysis», 2024.