Эффективный метод скаляризации и поиска конкурентного решения без итеративных вычислений для Липшицевых функций

Латыпов Ильгам Магданович

Московский физико-технический институт

Кафедра: Интеллектуальный анализ данных

Научный руководитель: кандидат т. н. наук Ю. В. Дорн

2024

Пример для мотивации

При оптимизации топологии телекоммуникационных сетей необходимо балансировать между несколькими метриками:

1. Задержка в сети
2. Пропускная способность
3. Устойчивость сети
4. ...

Мы хотим получить сеть, которая будет хороша по всем метрикам, но для этого по каждой метрике требуется решить сложную задачу оптимизации.

Проблема

Проблема

Существуют задачи многокритериальной оптимизации, в которых функции либо сложно вычислить, либо их перерасчёт невозможен.

Исследовательская задача

Необходимо поставить задачу оптимизации для такого случая и предложить метод её приближенного решения. Метод должен работать только с уже известными значениями функций.

Результаты

- Поставлена и обобщена задача оптимизации для поиска конкурентного решения.
- Предложен метод нахождения приближенного решения для липшицевых и монотонных функций.

Обозначения

- $x \in \mathbb{R}^n$
- Множество решений K является выпуклым, замкнутым и снабжено нормой $\|\cdot\|$
- функции $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \quad i = \overline{1, m}$
- Пусть $x_i = \arg\min_{x \in K} f_i(x)$.
- $f_i(x_i) = f_i(x_i)$

Definition (γ-конкурентная точка)

x называется γ-конкурентной точкой, если для всех i выполняется:

$$f_i(x) \leq (1+\gamma) f_i^* \tag{1}$$

Задача оптимизации

$$\begin{aligned} &\min_{x,\gamma} \gamma && (T_1) \\ &\text{s.t.} \quad x \in K \\ &\qquad f_i(x) - f_i(x_i) \leq \gamma f_i(x_i), \quad i \in \overline{1, m} \end{aligned}$$

Метод

Definition (Условие Липшица)

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}+$ удовлетворяет условию Липшица на K с нормой $\|\cdot\|$:

$$\exists L > 0 : \ \forall x, y \in K : \ |f(x) - f(y)| \le L\|x - y\|$$

- Для всех $i = \overline{1, m}$ для $f_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$:
  - Удовлетворяет условию Липшица 2 с константой L_i на K.
  - Вычислена в точке $x_i : f_i(x_i)$.
  - Функция минимизируется.

Мы ищем $x \in K$, который является допустимым для T_1.
Метод не должен вычислять функции во время поиска решения.

Метод

Предлагаемая переформулировка

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,\gamma} \gamma && (T_2)\\
&\text{s.t.} \;\; x \in K \\
&\qquad \|x - x_i\| \le \frac{1}{L_i}(\gamma f_i(x_i)) \;\; \forall i \in \overline{1, m} \\
&\qquad f_i(x) - f_i(x_i) \le \gamma f_i(x_i) \;\; i \in \overline{1, m} \quad (\mathrm{T1})
\end{aligned}
$$

Объяснение

Рассмотрим допустимые x, γ из T_2. Тогда для всех $i = \overline{1, m}$:

$$
\|x_i - x\| \le \frac{\gamma f_i(x_i)}{L_i} \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_i)| \le \gamma f_i(x_i) \qquad (2)
$$

Это означает, что x, γ являются допустимыми для T_1.

Пример для обобщения

Example (Функция, которую нельзя пересчитать)

Служба доставки работала с различными стратегиями – точками x_i и вычисляла метрики – $f_i(x_i)$. Теперь они хотят установить некоторые параметры, которые будут гарантировать значения метрик, если ситуация будет похожа на уже известные.

Definition (γ-конкурентная точка)

x называется относительно γ-конкурентной точкой для функций f_i и точек x_i, если для всех i:

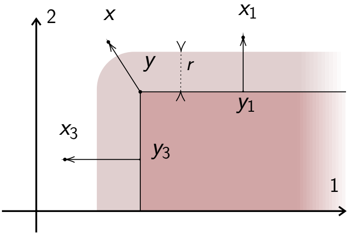
$$f_i(x) \leq (1+\gamma) f_i(x_i) \tag{3}$$

Метод

Мы можем использовать монотонность функций по параметрам для упрощения ограничений. Для этого введем оператор $\mathtt{clip}_f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathtt{clip}_f(x, y)_i = \begin{cases} \max(x_i - y_i, 0) & f \text{ возрастает по } x_i \\ \min(y_i - x_i, 0) & f \text{ убывает по } x_i \\ x_i - y_i & \text{иначе} \end{cases} \tag{4}$$

$$\min c^T x$$
$$Ax \leq b$$



Метод

$$\begin{aligned} \min_{x,\gamma} \; & \gamma \\ \text{s.t. } & x \in K \\ & \|x - x_i\| \le \frac{1}{L_i}(\gamma f_i(x_i)) \quad \forall i \in \overline{1, m} \end{aligned} \tag{T_2}$$

$$\longmapsto$$

$$\begin{aligned} \min_{x,\gamma} \; & \gamma \\ \text{s.t. } & x \in K \\ & \|clip(x, x_i, f_i)\| \le \frac{1}{L_i}(\gamma f_i(x_i)) \quad \forall i \in \overline{1, m} \end{aligned} \tag{T_3}$$

Теоретические результаты

Теорема

$$\min_{x,\gamma} \gamma \qquad (T_3)$$

$$\text{s.t. } x \in K$$

$$\|clip_{f_i}(x, x_i)\| \leq \frac{1}{L_i}(\gamma f_i(x_i)) \quad \forall i \in \overline{1, m}$$

$$f_i(x) - f_i(x_i) \leq \gamma f_i(x_i) \quad i \in \overline{1, m} \qquad \text{(T1)}$$

Theorem (Latypov, 2024)

Решение (x, γ) *задачи* T_3 *является выполнимой точкой для* T_1

Theorem (Latypov, 2024)

Пусть γ^* *является решением задачи* T_3. *Если у нас есть аппроксимации констант Липшица* $\widetilde{L_i} = \kappa_i L_i$, *тогда решая задачу* T_3, *в которой константы Липшица заменены на* $\widetilde{L_i}$, *мы получаем* x, *для которого* $|f(x) - f_i(x_i)| \leq \frac{\kappa_{\max}}{\kappa_i}\gamma^* f_i(x_i)$. *Здесь* $\kappa_{\max} = \max_{i=\overline{1,m}} \kappa_i$.

Функция

$$f(b, \xi) = c_b^T \cdot b + c_a^T \cdot \max(r_\xi - b, 0)$$

Каждый вектор из $\mathbb{R}^n$, $c_b \leq c_a$ покомпонентно.

Пояснение

Представим, что компания потребляет случайное количество ресурсов r_ξ в каждом периоде. В начале периода можно купить b по более низкой цене. При необходимости они докупают недостающие ресурсы по более высокой цене.

- Компания проработала m периодов и наблюдала для $i \in \overline{1, m} : r_\xi, c_b^i, c_a^i$ количество ресурсов b_i.
- $K = \{b : c_b^T \cdot b \leq B\}$

Эксперимент: результаты

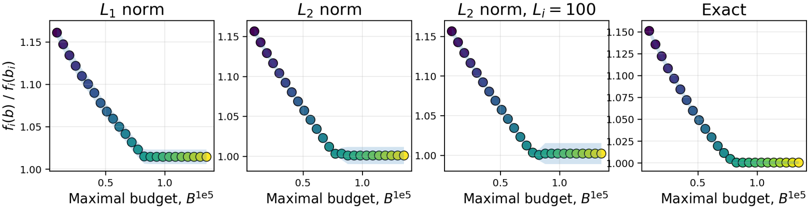


Рис.: Зависимость относительных приростов функции от бюджета для разных подходов.

Эксперимент: результаты

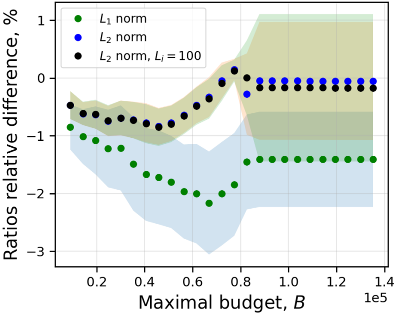


Рис.: Относительная разница результатов аппроксимаций с точным решением.

Итоги

Выносится на защиту:

- Предложен метод скаляризации с хорошей интерпретацией и метод поиска приближенного решения, не требующий вычисления функций.
- Проведен теоретический анализ для случая неточных параметров.
- Представленные эксперименты демонстрируют полезность предложенного метода.