Tema 5. Introducción a la Lógica Borrosa

Luis Miguel Bergasa, Eduardo Sebastián

Introducción a la Lógica Borrosa

Índice

Introducción a la Lógica Borrosa

Introducción e Historia

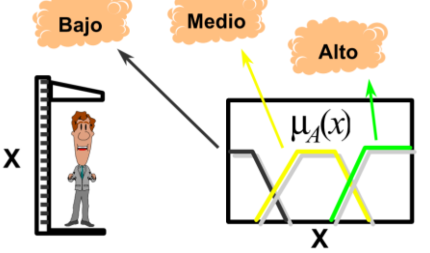
- **Los sistemas digitales y la lógica clásica presentan problemas al abordar problemas de control complejos reales**
  - Información masiva redundante e imprecisa
  - Ej: control de movimiento de un robot bípedo

- **Surgen los sistemas inteligentes para abordarlos**
  - Redes neuronales
    - Imitan la capacidad de aprendizaje del cerebro humano
  - Sistemas borrosos
    - Emulan el razonamiento aproximado del cerebro
    - No trabajan con lógica binaria sino con conceptos vagos

Introducción a la Lógica Borrosa

Introducción e Historia

- **La lógica borrosa trata con la información de forma imprecisa**
  - No trabaja con lógica binaria, o valores numéricos precisos sino con conceptos vagos (alto, bajo, medio, templado)
  - ¿Cuál es la altura del profesor?



  - ¿Temperatura del agua de la ducha? Templada (pero no 40ºC)

Introducción e Historia

- **Propiedades**
  - La lógica borrosa es una **extensión de la lógica booleana**
  - Soluciona **problemas no lineales y no muy bien definidos**
  - Permite usar el conocimiento de expertos (**razonamiento humano**)
  - Cada afirmación es un problema **"de grado de verdad"**

  - **Simplicidad de cálculos** (sumas, productos y comparaciones) que se pueden realizar sobre procesadores sencillos y baratos

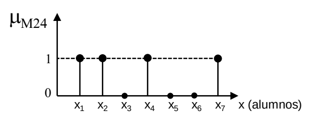
Introducción e Historia

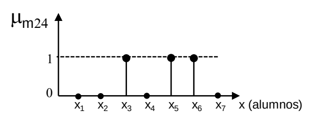
- **Historia**
  - **1965**. Principios formulados por Zadeh (Universidad de Berkeley)
  - **1973**. Teoría básica de los controladores → No bien acogida
  - **1974**. Mamdani aplica lógica borrosa a un sistema de control de una máquina de vapor
  - **80's**. Gran desarrollo en Japón y menos en USA y Europa
  - **90's**. Debido a los buenos resultados en Japón, USA y Europa empiezan a interesarse
  - **00's**. Grandes empresas lo usan en sus productos: NASA, Boeing, Ford, Sony, etc
  - **Actualidad**: se usa muchísimo de forma habitual pero no se destaca
    - Robots caminantes, vehículos autónomos, lavadoras, cámaras de fotos, buscadores de Internet, etc.

Introducción a la Lógica Borrosa

Conjuntos borrosos

- **Conjunto**
  - Clase definida mediante una condición de pertenencia
- **Función de pertenencia**
  - Función matemática (μ) que asigna a cada elemento del universo de entrada un valor de pertenencia al conjunto entre [0,1]
- **Conjunto clásico, CRISP (todo o nada)**
  - Incluye o excluye totalmente a cada elemento
  - El grado de pertenencia es binario y su función también, $\mu \in \{0,1\}$
  - Ejemplo: Alumnos mayores o menores de 24 años



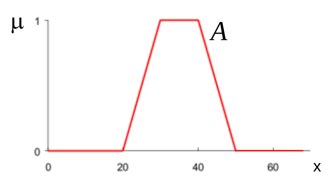


Introducción a la Lógica Borrosa

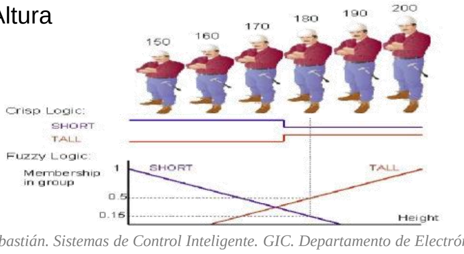
Conjuntos borrosos

- **Conjunto borroso**
  - Conjunto con una función de pertenencia o condición relajada, $\mu \in [0,1]$

$$
\begin{array}{ll}
x < 20 & \mu_A(x) = 0 \\
20 \le x < 30 & \mu_A(x) \in [0,1] \\
30 \le x < 40 & \mu_A(x) = 1 \\
40 \le x < 50 & \mu_A(x) \in [0,1] \\
x \ge 50 & \mu_A(x) = 0
\end{array}
$$



- **Comparación conjuntos Borroso/Crisp**
  - Ejemplo: Altura



Introducción a la Lógica Borrosa

Conjuntos borrosos

- **Definición de conjunto borroso**

Elemento genérico

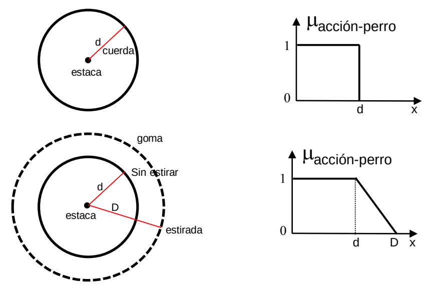
$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in X\}$$

Variable

Función de pertenencia

Universo de discurso de la variable borrosa

- **Ejemplo perro-estaca**

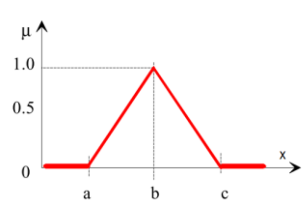


Introducción a la Lógica Borrosa

Conjuntos borrosos

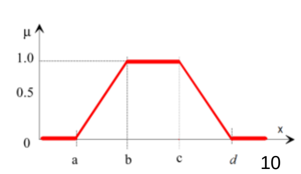
- **Clasificación conjuntos borrosos**
  - En función de la forma de la función de pertenencia
  - **Ordinarios:** Para cada valor de entrada existe un único valor de pertenencia. Los principales son:
    - **Triangulares**

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \le x \le c \\ 0 & c \le x \end{cases}$$



    - **Trapezoidales**

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \le c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \le x \le d \\ 0 & d \le x \end{cases}$$



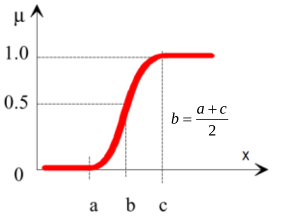
Introducción a la Lógica Borrosa

Conjuntos borrosos

- **Sigmoidales**

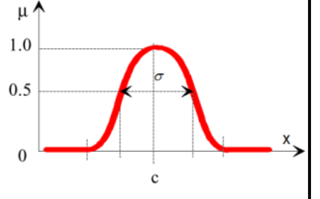
$$\mu(x) = \frac{1}{1+\exp(-k\cdot(x-b))}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & a \le x \le b \\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2 & b \le x \le c \\ 0 & c \le x \end{cases}$$



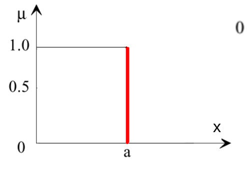
- **Gaussiano**

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$



- **Singleton**

$$\mu(x) = 1 \quad x = a$$
$$\mu(x) = 0 \quad x \neq a$$

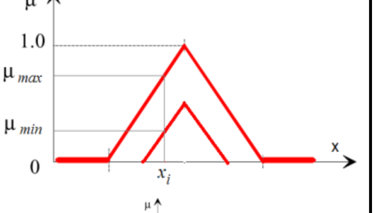


Luis M. Bergasa, Eduardo Sebastián. Sistemas de Control Inteligente. GIC. Departamento de Electrónica. UAH

Introducción a la Lógica Borrosa

Conjuntos borrosos

- **Clasificación conjuntos borrosos**
  - **Con intervalo de pertenencia:** Para cada valor de entrada existe un intervalo de pertenencia. Se usan para modelar casos extraños o raros de incertidumbre.



- **Propiedades conjuntos borroso**
  - Igualdad de conjuntos

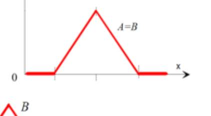
$$A = B \quad si \quad \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

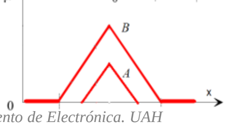
  - Subconjuntos borrosos

$$A \subset B \quad si \quad \mu_A(x) \le \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

  - Conjunto vacío

$$A = 0 \quad si \quad \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$$





Luis M. Bergasa, Eduardo Sebastián. Sistemas de Control Inteligente. GIC. Departamento de Electrónica. UAH

Introducción a la Lógica Borrosa

Conjuntos borrosos

- **Definiciones**
  - **Soporte**

    $Support(A) = \{x / \mu_A(x) > 0\}$
  - **α-corte**

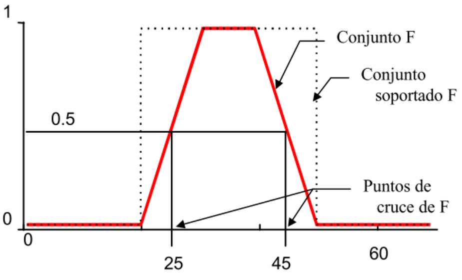
    $A_\alpha = \{x / \mu_A(x) \geq \alpha\}$
  - **Núcleo**

    $Core(A) = \{x / \mu_A(x) = 1\}$
  - **Puntos de cruce**

    $Crossover(A) = \{x / \mu_A(x) = \alpha\}$
  - **Altura**
    - Máximo grado de pertenencia de los elementos del universo de discurso

      $height(A) = \max\{\mu_A(x) / x \in X\}$
  - **Conjunto convexo**

    $\forall x, y \in X \ \exists \lambda \in [0,1] / \ \mu_A(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$



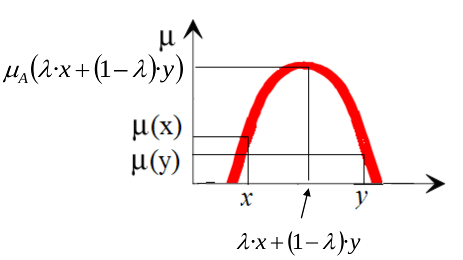
Luis M. Bergasa, Eduardo Sebastián. Sistemas de Control Inteligente. GIC. Departamento de Electrónica. UAH

Introducción a la Lógica Borrosa

Conjuntos borrosos

- **Definiciones**
  - **Conjunto convexo**
    - Función Gaussiana es convexa, aunque tiene partes cóncavas
    - Los conjunto cóncavos no son aplicables a fenómenos físicos

$$\forall x, y \in X \ \exists \lambda \in [0,1] / \ \mu_A(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$



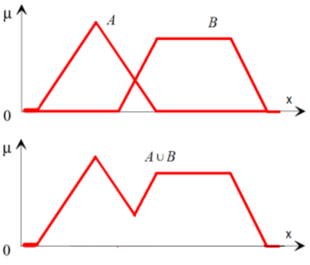
  - **Conjunto normal**
    - Conjunto de altura unidad

Luis M. Bergasa, Eduardo Sebastián. Sistemas de Control Inteligente. GIC. Departamento de Electrónica. UAH

Introducción a la Lógica Borrosa

Operaciones sobre conjuntos borrosos

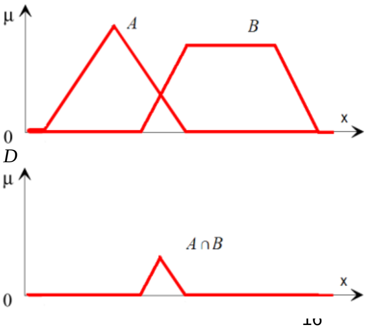
- Las operaciones sobre conjuntos borrosos generan un nuevo conjunto borroso definido sobre los conjuntos de entrada
- **Unión:** $\mu_{A\cup B}(x) = S\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
  - El operador borroso se denomina S-norma o T-conorma
  - Interpretaciones:
    - 1) $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\ \forall\ x \in X$ Mas utilizado. Unión ordinaria o clásica
    - 2) $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$
    - 3) $\mu_{A\cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$
  - Propiedades operador S-norma:
    - Conmutativa $S(A,B) = S(B,A)$
    - Asociativa $S(A,S(B,C)) = S(S(A,B),C)$
    - Monotonicidad $S(A,B) \geq S(C,B)\ si\ A \geq C\ y\ B \geq D$
    - Elemento neutro $S(0,A) = A$



Introducción a la Lógica Borrosa

Operaciones sobre conjuntos borrosos

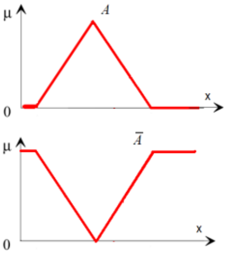
- **Intersección:** $\mu_{A\cap B}(x) = T\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
  - El operador borroso se denomina T-norma o S-conorma
  - Operador dual de la S-norma
  - Interpretaciones:
    - 1) $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\ \forall\ x \in X$ Mas utilizado. Intersección ordinaria o clásica
    - 2) $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$
    - 3) $\mu_{A\cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$
  - Propiedades operador S-norma:
    - Conmutativa $T(A,B) = T(B,A)$
    - Asociativa $T(A,T(B,C)) = T(T(A,B),C)$
    - Monotonicidad $T(A,B) \geq T(C,B)\ si\ A > C\ y\ B \geq D$
    - Elemento neutro $T(1,A) = A$



Introducción a la Lógica Borrosa

Operaciones sobre conjuntos borrosos

- **Negación:** $\mu_{\overline{A}}(x) = N\{\mu_A(x)\}$
  - El operador complementario
  - Interpretación: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)\ \forall\ x \in X$
  - Propiedades del operador negación:
    - Condición de contorno $N(0)=1 \quad N(1)=0$
    - Ordenación inversa $A \geq B \quad N(A) \leq N(B)$
    - Involución $N(N(A)) = A$



- **Leyes de Morgan**

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \qquad S(A,B) = 1 - T(\overline{A},\overline{B})$$

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \qquad T(A,B) = 1 - S(\overline{A},\overline{B})$$

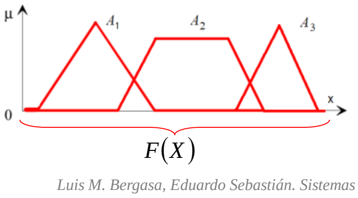
Operadores T-norma y S-norma son duales

- **Otros operadores**
  - **Normalización** $\mu_{normalización(A)}(x) = \dfrac{\mu_A(x)}{\max[\mu_A(x)]}$
  - **Concentración** $\mu_{concentración(A)}(x) = (\mu_A(x))^2$
  - **Dilatación** $\mu_{dilatación(A)}(x) = (\mu_A(x))^{1/2}$

Introducción a la Lógica Borrosa

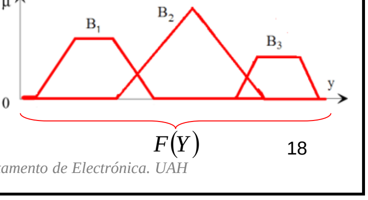
Principio de extensión

- **Principio de extensión**
  - Base del proceso de inferencia en los sistemas borrosos
  - Permite convertir conceptos no-borrosos en borrosos
  - **Enunciado:**
    - Sean $X, Y \in \Re^n$ e $Y = f(X)$ una función analítica real de variable real
    - Conocida *f*, que relaciona la variables X e Y, y el conjunto de partes borrosas (conjuntos) definido sobre la variable X, (F(X)), se puede conocer el conjunto de partes borrosas definido sobre la variable Y, (F(Y)), y al revés mediante f^{-1}
    - *f* es una función analítica de base real que induce una función borrosa de variable borrosa.



$$f : F(X) \xrightarrow{f} F(Y)$$

$$f^{-1} : F(Y) \xrightarrow{f^{-1}} F(X)$$



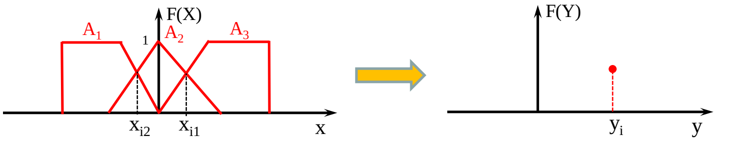
Principio de extensión

- **Principio de extensión**
  - **Matemáticamente:** $\mu_B(y) = \sup remo_{x=f^{-1}(y)} \mu_A(x) \quad \forall x \in X, y \in Y$
  - **Ejemplo:**

$$y = x^2 \begin{cases} x = presión \\ y = temperatura \end{cases}$$

    - Para cada $y_i \in Y$ se calculan los puntos xi a través de f

$$y_i = x_i^2 \rightarrow \begin{cases} x_{i1} = \sqrt{y_i} \\ x_{i1} = -\sqrt{y_i} \end{cases} \rightarrow \mu_B(y_i) = \sup remo\left(\mu_A(x_{i1}), \mu_A(x_{i2})\right)$$



  - **Inversa:** $\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \sup remo_{y=f(x)} \mu_B(y) \qquad f^{-1}(f(x)) \neq x$

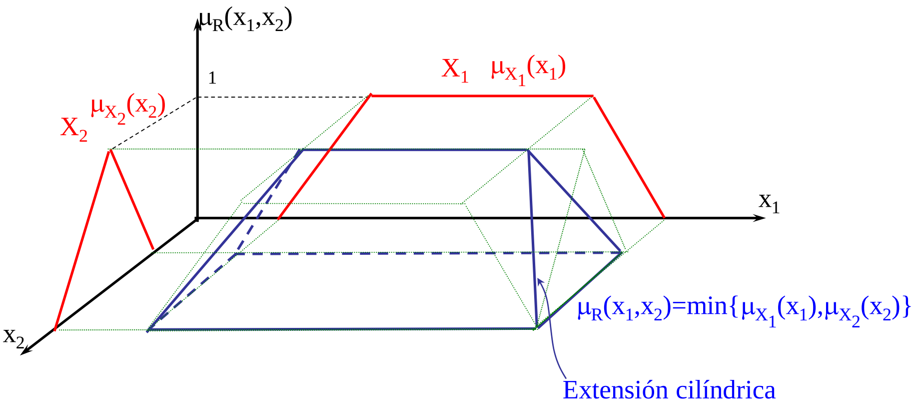
Relaciones Borrosas

- **Relación Borrosa:**
  - La relación borrosa entre los conjuntos X_1, X_2 definidos sobre las variables x_1, x_2 es el conjunto borroso definido sobre el producto cartesiano de los conjuntos borrosos $R(X)$ / $X=X_1 x X_2$
  - La función de pertenencia de la relación borrosa da la fuerza con la que la relación une a los conjuntos
  - Al conjunto borroso consecuencia de la relación también se le denomina ***extensión cilíndrica***
  - Matemáticamente en términos borrosos es una intersección

$$\mu_R(X) = \min\{\mu_{X_1}(x_1), \mu_{X_2}(x_2)\}$$

Relaciones Borrosas

- **Relación Borrosa:**

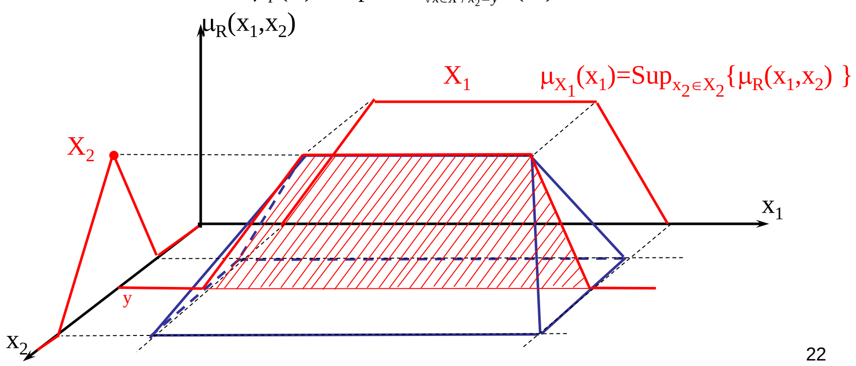


Relaciones Borrosas

- **Proyecciones**
  - Se definen como la pertenencia de la relación borrosa a cada uno de los conjuntos de los que proviene
  - En términos de función de pertenencia

$$P(Y) = \mathrm{Proy}_Y R(X)$$
$$X = X_1 \times X_2$$
$$Y = Subespacio\ de\ X$$

$$\mu_P(Y) = \sup remo_{\forall x \in X \,/\, x_2 = y} R(X)$$



Introducción a la Lógica Borrosa

Relaciones Borrosas

- **Composiciones:**
  - Si se tienen dos conjuntos *X, Y* relacionados a través de la relación borrosa *P(X,Y)*
  - Si los conjuntos *Y, Z* están relacionados mediante la relación borrosa *Q(Y,Z)*
  - Se puede saber la relación borrosa entre los conjuntos *X* y *Z*

Operador composición

$$R(X,Z) = P(X,Y) \circ Q(Y,Z)$$

$$\mu_R(x,z) = \sup remo_{y \in Y} \min\{\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)\}$$

  - Matemáticamente es equivalente a una sustitución algebraica.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ z = x^2 \end{array}\right\} \rightarrow z = 9y^2$$

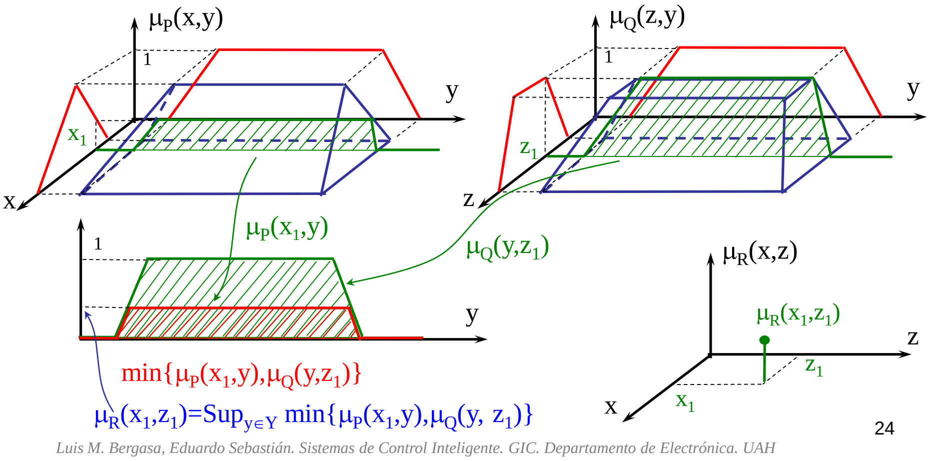
Introducción a la Lógica Borrosa

Relaciones Borrosas

- **Composiciones:**

$$R(X,Z)=P(X,Y) \text{ o } Q(Y,Z)$$

$$\mu_R(x,z)=\mathrm{Sup}_{y \in Y} \min\{\mu_P(x,y),\mu_Q(y,z)\}$$



Introducción a la Lógica Borrosa

Razonamiento aproximado

- **Definiciones**
  - **Variable lingüística:** variable cuyos valores son palabras de un determinado lenguaje (natural o artificial) que expresan una magnitud física
  - **Termino lingüístico:** Los valores que puede tomar una variable lingüística
  - **Universo o dominio:** Conjunto de términos lingüísticos
  - **Ejemplo:**

Variable lingüística   Término lingüístico

$$\textit{Temperatura}=\{\underbrace{\textit{Fría, Tibia, Caliente}}_{\text{Universo de discurso}}\}$$

Introducción a la Lógica Borrosa

Razonamiento aproximado

- **Proposición borrosa**
  - Aseveración que asigna a una variable borrosa un término lingüístico
  - Reglas que definen la base de conocimiento del sistema
  - **Proposición atómica (entrada borrosa):**

p_1: $\boldsymbol{\tau \; es \; A_i}$ **Ejemplo:** *La Temperatura es Alta*

Variable   Término lingüístico

  - **Proposición condicional (regla borrosa):**
    - Relación borrosa entre A_i e B_i
    - Conectivas borrosas: **and** (conjunción), **or** (disyunción), **not** (negación)

p_2: $\boldsymbol{si\ \underbrace{\tau\ es\ A_i}_{\text{Antecedente}}\ entonces\ \underbrace{v\ es\ B_j}_{\text{Consecuente}}}$

Ejemplo: $Si\ \tau_1\ es\ A_{11}\ and\ \tau_2\ es\ A_{12}\ entonces\ v\ es\ B_1$

$Si\ \tau_1\ es\ A_{11}\ or\ \tau_2\ es\ A_{12}\ and\ not\ \tau_2\ es\ A_{12}\ entonces\ v\ es\ B_1\ and\ v\ es\ B_2$

Introducción a la Lógica Borrosa

Razonamiento aproximado

- **Inferencia borrosa**
  - Obtiene la **salida borrosa** (consecuente borroso) a partir de las **entradas borrosas** (proposición atómica) y las **reglas** (proposición condicional)
  - Cumple el mecanismo "Modus pones generalizado". A partir de una serie de premisas (proposiciones atómicas) se obtiene una serie de consecuentes mediante una lógica de control (reglas)

p: si t es A entonces v es B (condición o regla)

q: t es A' (dato de entrada)

---

entonces: v es B'

R (A, B) $\mu_R(t,v)=\min\{\mu_B(v),\mu_A(t)\}$

B'=A' o R (A, B) $\mu_{B'}(v)=\text{Supremo}_{t\in T}\min\{\mu_{A'}(t),\mu_R(t,v)\}$

$$\mu_{B'}(v)=\underbrace{\text{Supremo}_{t\in T}\min\{}_{\text{Operador Mandani}}\mu_{A'}(t),\ \min\{\mu_B(v),\mu_A(t)\}\}$$

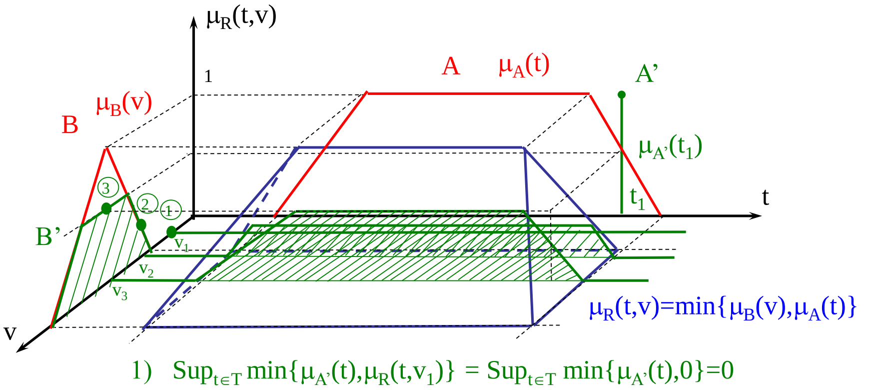
Operador Mandani $\mu_{A'}(t)=\min\{\mu_{A'}(t),\mu_A(t)\}$

Luis M. Bergasa, Eduardo Sebastián. Sistemas de Control Inteligente. GIC. Departamento de Electrónica. UAH

Introducción a la Lógica Borrosa

Razonamiento aproximado

- **Inferencia borrosa**



1) $\text{Sup}_{t\in T}\min\{\mu_{A'}(t),\mu_R(t,v_1)\} = \text{Sup}_{t\in T}\min\{\mu_{A'}(t),0\}=0$

2) $\mu_B(v_2)\leq \mu_{A'}(t_1)$ -> $\text{Sup}_{t\in T}\min\{\mu_{A'}(t),\mu_R(t,v_2)\} = \mu_B(v_2)$

3) $\mu_B(v_2)> \mu_{A'}(t_1)$ -> $\text{Sup}_{t\in T}\min\{\mu_{A'}(t),\mu_R(t,v_3)\} = \mu_{A'}(t_1)$

Luis M. Bergasa, Eduardo Sebastián. Sistemas de Control Inteligente. GIC. Departamento de Electrónica. UAH

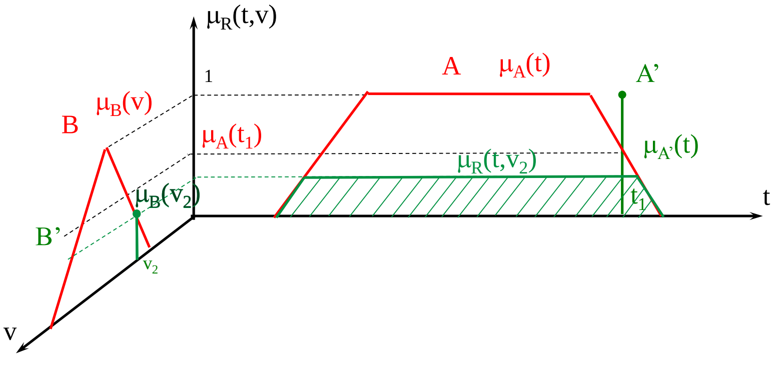
Introducción a la Lógica Borrosa

Razonamiento aproximado

- **Inferencia borrosa**

  2) $\mu_B(v_2) \leq \mu_{A'}(t_1) \rightarrow \mu_B(v_2) = \mathrm{Sup}_{t\in T} \min\{\mu_{A'}(t), \mu_R(t,v_2)\} = \mu_B(v_2)$

  $\mu_R(t,v_2) = \min\{\mu_B(v_2), \mu_A(t)\}$



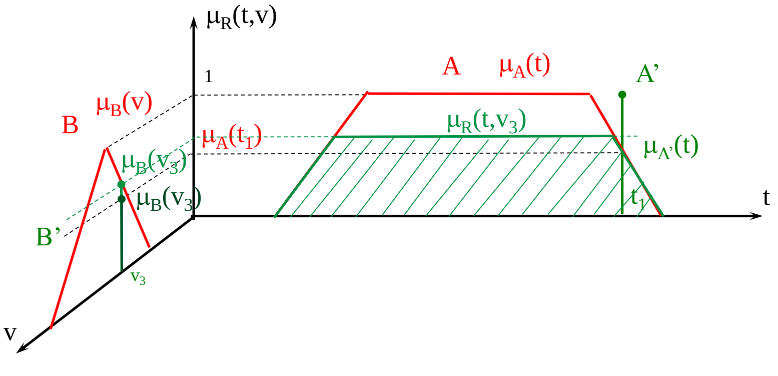
Introducción a la Lógica Borrosa

Razonamiento aproximado

- **Inferencia borrosa**

  3) $\mu_B(v_3) > \mu_{A'}(t_1) \rightarrow \mu_B(v_3) = \mathrm{Sup}_{t\in T} \min\{\mu_{A'}(t), \mu_R(t,v_3)\} = \mu_{A'}(t_1)$

  $\mu_R(t,v_3) = \min\{\mu_B(v_3), \mu_A(t)\}$



Razonamiento aproximado

- **Razonamiento Multicondicional**

p_1: si t es A_1 entonces v es B_1 (condición o regla)
p_2: si t es A_2 entonces v es B_2 (condición o regla)
p_3: si t es A_3 entonces v es B_3 (condición o regla)
:
p_k: si t es A_k entonces v es B_k (condición o regla)
q: t es A' (dato de entrada)

entonces: v es B'

Operador agregación: *max=supremo*

Una única regla

$$B' = \underset{i\in k}{U}\ \underbrace{(A' \circ R_i(A_i,B_i))}_{\text{Una única regla}}$$

$$\mu_{B'}(v) = \text{Supremo}_{i\in k}(\text{Supremo}_{t\in T}\ \min\{\mu_{A'}(t), \mu_{Ri}(t,v)\})$$

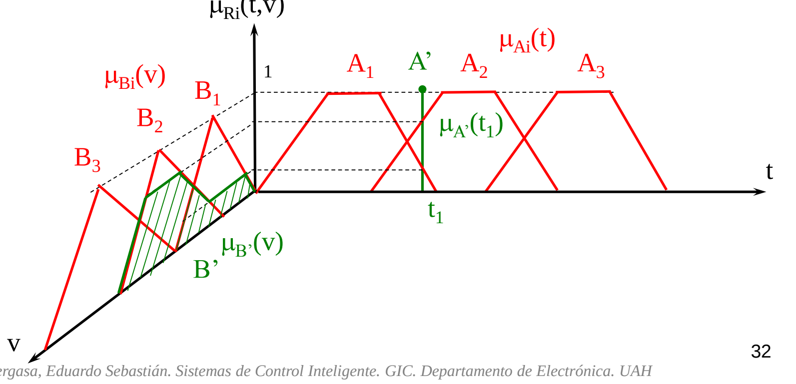
Razonamiento aproximado

- **Razonamiento Multicondicional**

p_1: si t es A_1 entonces v es B_1
p_2: si t es A_2 entonces v es B_2
p_3: si t es A_3 entonces v es B_3

$$B' = U_{i\in k}\ (A' \circ R_i(A_i,B_i))$$

$$\mu_{B'}(v) = \text{Supremo}_{i\in k}(\text{Supremo}_{t\in T}\ \min\{\mu_{A'}(t), \mu_{Ri}(t,v)\})$$



Introducción a la Lógica Borrosa

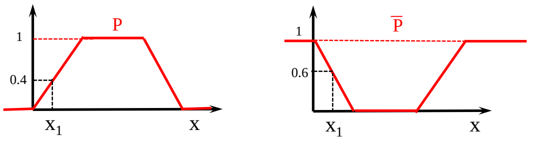
Principio de Tautología

- **Lógica clásica**

$$P \cup \overline{P} = 1$$

- **Lógica borrosa**

$$\mu_P(x_1) = 0.4$$
$$\mu_{\overline{P}}(x_1) = 1 - 0.4 = 0.6$$



Luis M. Bergasa, Eduardo Sebastián. Sistemas de Control Inteligente. GIC. Departamento de Electrónica. UAH