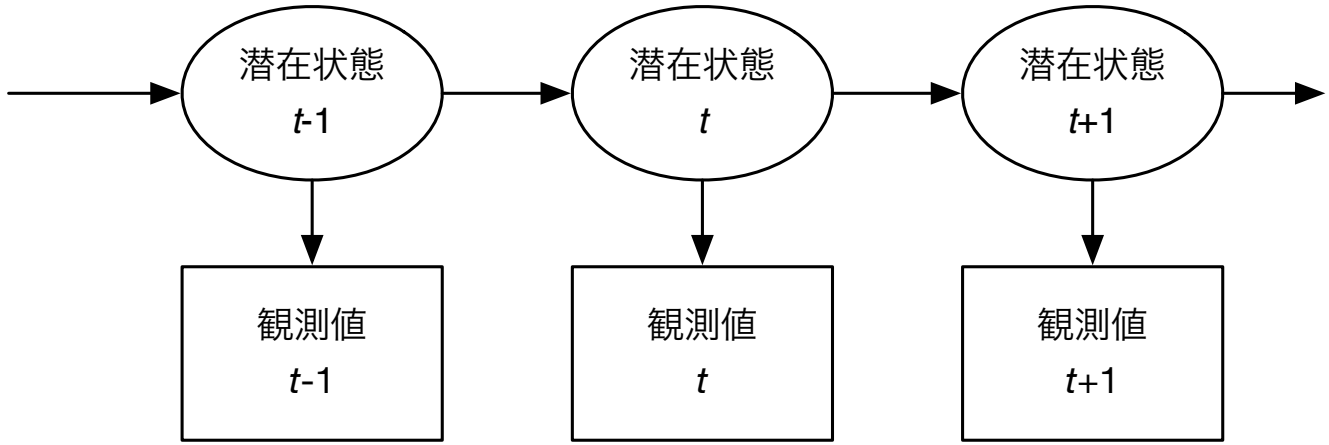
Stan と dlm による状態空間モデル [1]

伊東宏樹

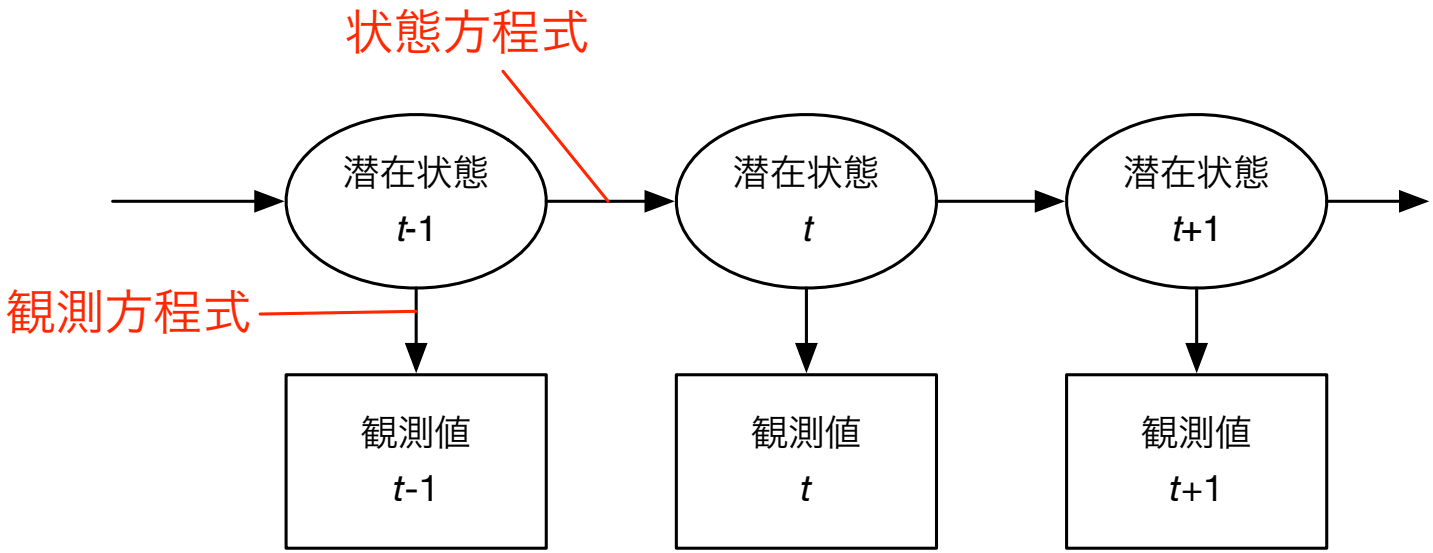
2016-10-29 SappoRo.R #7

[1] ファイル一式は https://github.com/ito4303/SappoRoR7 においておきます

状態空間モデル



状態空間モデル



動的線形モデル

線形・正規分布の状態空間モデル

- 観測方程式

$$\mathbf{y}_t \sim N(\mathbf{F}'\boldsymbol{\theta}_t, \mathbf{V})$$

- 状態方程式

$$\boldsymbol{\theta}_t \sim N(\mathbf{G}\boldsymbol{\theta}_{t-1}, \mathbf{W})$$

- 初期値

$$\boldsymbol{\theta}_0 \sim N(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0)$$

ローカルレベルモデル

1 階差分の動的線形モデル

- 観測方程式

$$y_t = \theta_t + v_t, \quad v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$$
$$\downarrow$$
$$F = 1, V = \sigma_v^2$$

- 状態方程式

$$\theta_t = \theta_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, \sigma_w^2)$$
$$\downarrow$$
$$G = 1, W = \sigma_w^2$$

Stan

- 統計的プログラミング言語
  - MCMC (HMC, NUTS) によるベイズ推定
- 観測方程式と状態方程式をそのまま Stan コードにすれば、状態の推定ができる
  - 『岩波データサイエンス Vol.1』や『Stan と R でベイズ統計モデリング』の松浦さんのコードを参照
- 今回はあえて、Stan の `gaussian_dlm_obs()` 分布と、R の dlm パッケージを使ってみる

gaussian_dlm_obs

$y \sim$ **gaussian_dlm_obs**$(F,\ G,\ V,\ W,\ m0,\ C0)$;

- カルマンフィルタのパラメータ (分散) を推定する
- 引数は dlm パッケージに対応

カルマンフィルタ

- 行列計算により、フィルタリング・平滑化・予測をおこなう [2]

  フィルタリング $\{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$ から θ_t を推定

  平滑化 $\{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$ から $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t\}$ を推定

  予測 $\{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$ から $\{\theta_{t+1}, \theta_{t+2}, \ldots\}$ および $\{y_{t+1}, y_{t+2}, \ldots\}$ を推定

- パラメータとして、観測方程式・状態方程式の共分散行列（と初期値）が必要

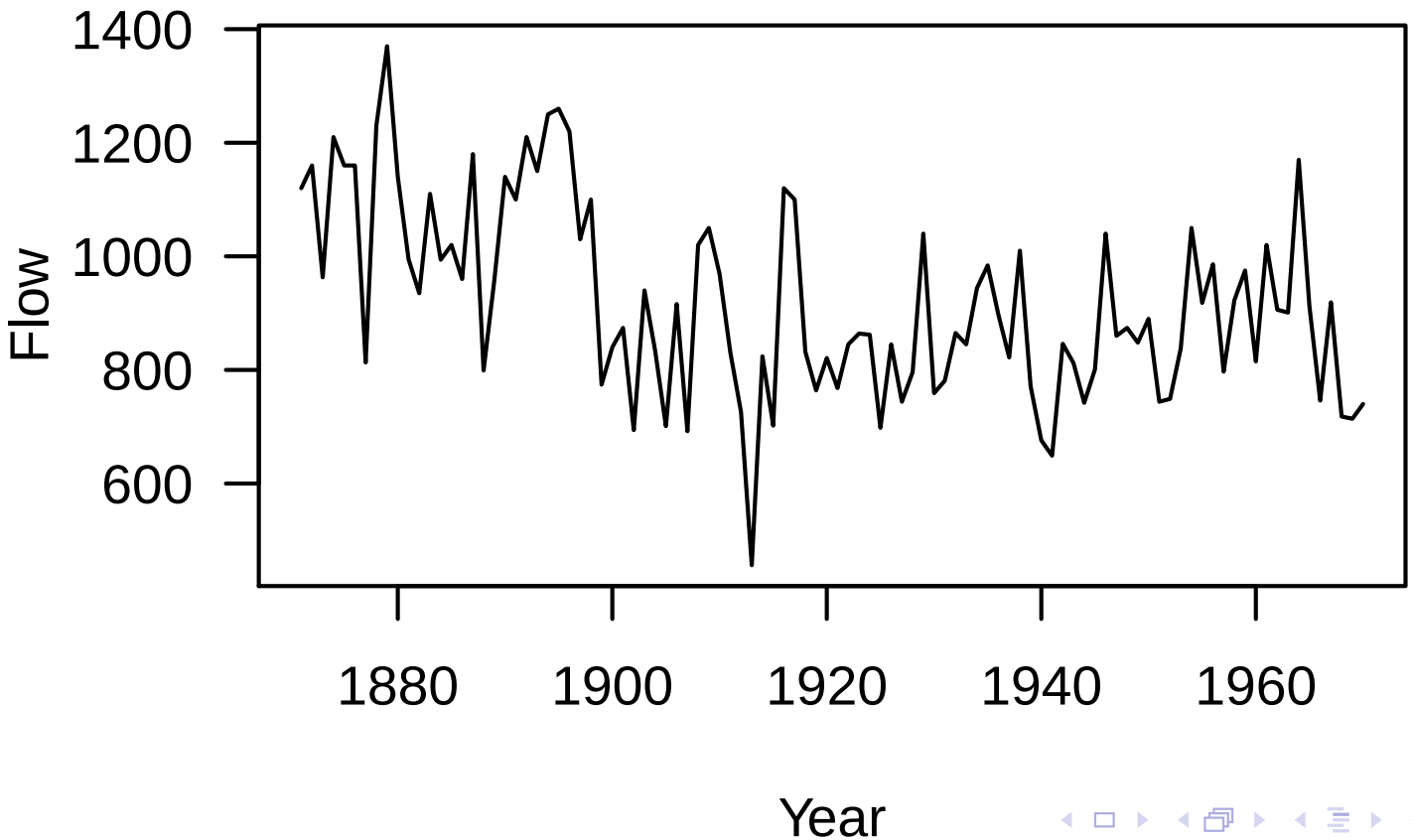
[2] 具体的な計算式は、野村俊一『カルマンフィルタ—R を使った時系列予測と状態空間モデル』共立出版, 2016 などを参照

dlm パッケージ

- 動的線形モデル (Dynamic Linear Model) を扱うパッケージ
- カルマンフィルター
- パラメータの最尤推定
- パラメータのベイズ推定

データ

```
1  ## ナイル川の流量データ
2  data(Nile)
3
```



Stan コード: data ブロック

```
1 data {
2   int<lower=0>  N;    // データ点の数
3   matrix[1, N]  Y;    // データ
4   vector[1]     M0;   // 状態の初期値
5   cov_matrix[1] C0;   // 共分散の初期値
6 }
7
```

Stan コード: transformed data ブロック

```
1  transformed data {
2    matrix[1, 1]  F;
3    matrix[1, 1]  G;
4
5    F[1, 1] = 1;
6    G[1, 1] = 1;
7  }
8
```

Stan コード: parameters ブロックと transformed parameters ブロック

```
 1  parameters {
 2    real<lower=0> s2[2];
 3  }
 4
 5  transformed parameters {
 6    vector[1]     v;
 7    cov_matrix[1] w;
 8
 9    v[1] = s2[1];
10    w[1, 1] = s2[2];
11  }
12
```

Stan コード: model ブロック

```
1  model {
2    Y ~ gaussian_dlm_obs(F, G, v, w, M0, C0);
3  }
4
```

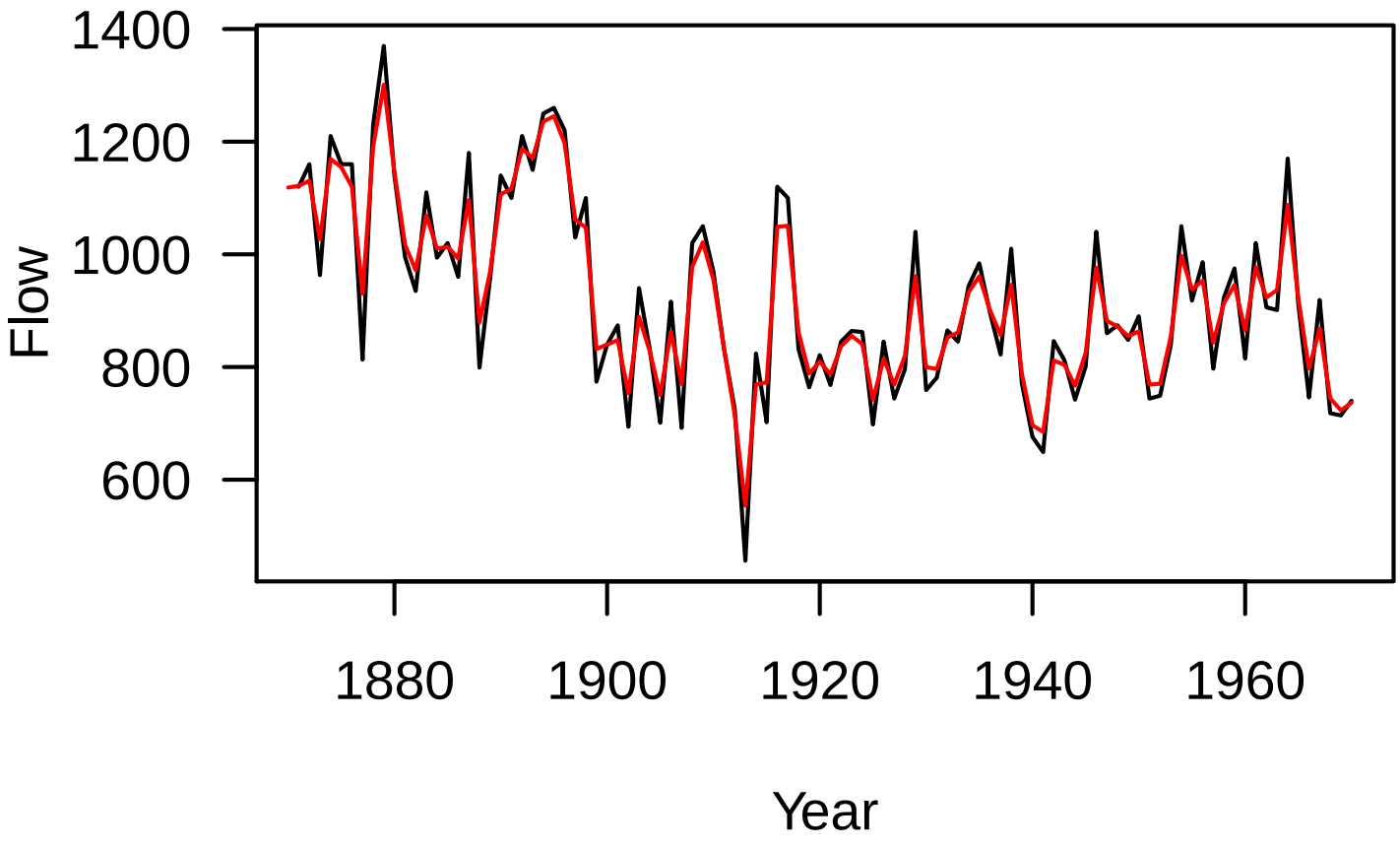
R コード

```
## Stan にわたすデータのリスト
stan_data <- list(N = length(Nile),
                  Y = matrix(Nile, 1),
                  M0 = array(100),
                  C0 = matrix(100, 1, 1))

## あてはめ
fit <- stan("dlm1.stan", data = stan_data,
            pars = c("s2"), seed = 1,
            iter = 2000, warmup = 1000)

```

平滑化

```
1  ## パラメータの事後平均をとりだす
2  s2 <- get_posterior_mean(fit, pars = "s2")[, "mean-
       all␣chains"]
3
4  ## Stan で推定したパラメータで、dlm のモデル定義
5  mod <- dlmModPoly(order = 1,
6                    dV = s2[1], dW = s2[2])
7
8  ## 平滑化
9  smo <- dlmSmooth(Nile, mod)
10
```

平滑化

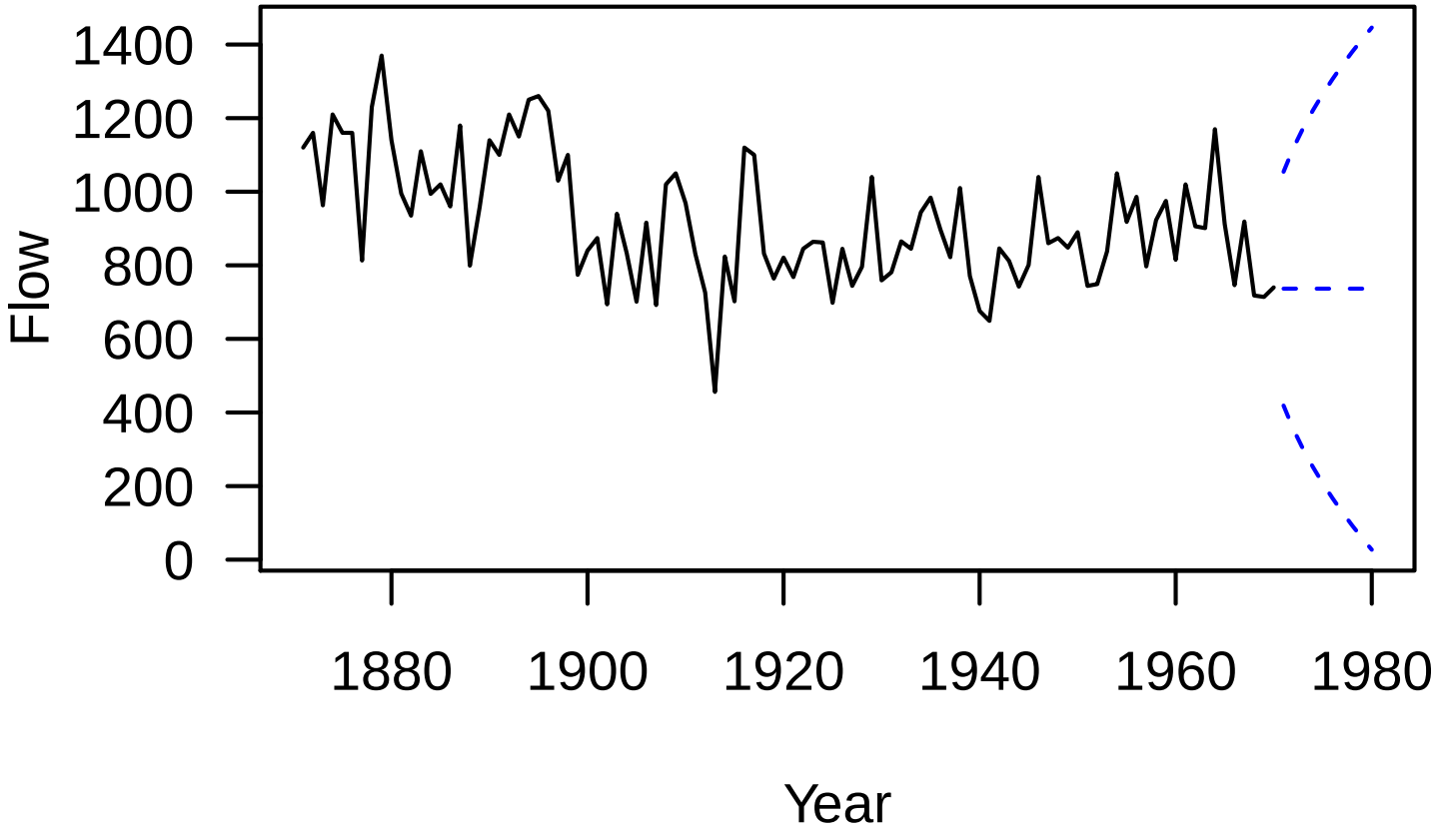


赤線が平滑化した値

予測の R コード

```
1  ## カルマンフィルター
2  filt <- dlmFilter(Nile, mod)
3
4  ## 状態
5  m <- filt$m[-1]
6
7  ## 予測
8  ## 予測する年数
9  nyear <- 10
10
11 ## 予測期間の初期値の設定
12 m0(mod) <- tail(m, 1)
13 C0(mod) <- diag(1) * s2[2]
14
15 fore <- dlmForecast(mod, nAhead = nyear)
16
```

予測



青実線が予測値，青点線は 80%予測区間

トレンドモデル

傾きを組み込んだモデル、あるいは 2 階差分の動的線形モデル

- 観測方程式

$$
\begin{aligned}
& y_t = \theta_{1,t} + v_t \\
& \downarrow \\
& y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{1,t} \\ \theta_{2,t} \end{pmatrix} + v_t \\
& \downarrow \\
& \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V = \sigma_v^2
\end{aligned}
$$

トレンドモデル

- 状態方程式

$$\theta_{1,t} = \theta_{1,t-1} + \theta_{2,t-1} + w_{1,t}$$
$$\theta_{2,t} = \theta_{2,t-1} + w_{2,t}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} \theta_{1,t} \\ \theta_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{1,t-1} \\ \theta_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{1,t} \\ w_{2,t} \end{pmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \sigma_{w1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{w2}^2 \end{pmatrix}$$

data ブロック

```
1  data {
2    int<lower=0>  N;  // データ点の数
3    matrix[1, N]  Y;  // データ
4    vector[2]     M0;
5    cov_matrix[2] C0;
6  }
7
```

transformed data ブロック

```
 1  transformed data {
 2    matrix[2, 1]  F;
 3    matrix[2, 2]  G;
 4
 5    // F
 6    F[1, 1] = 1;
 7    F[2, 1] = 0;
 8
 9    // G
10    G[1, 1] = 1;
11    G[1, 2] = 1;
12    G[2, 1] = 0;
13    G[2, 2] = 1;
14  }
15
```

parameters ブロックと transformed parameters ブロック

```
 1  parameters {
 2    real<lower=0> s2[3];
 3  }
 4
 5  transformed parameters {
 6    vector[1]     v;
 7    cov_matrix[2] w;
 8
 9    v[1] = s2[1];
10    w[1, 1] = s2[2];
11    w[1, 2] = 0;
12    w[2, 1] = 0;
13    w[2, 2] = s2[3];
14  }
15
```

model ブロック

```
1  model {
2    Y ~ gaussian_dlm_obs(F, G, v, w, M0, C0);
3  }
4
```

R コード

```
1  ## Stan にわたすデータのリスト
2  stan_data <- list(N = length(Nile),
3                    Y = matrix(Nile, 1),
4                    M0 = c(100, 1),
5                    C0 = matrix(c(1e7, 0, 0, 1e7), 2,
       2))
6
7  ## あてはめ
8  fit <- stan("dlm2.stan", data = stan_data,
9              pars = c("s2"), seed = 1,
10             iter = 2000, warmup = 1000)
11
```

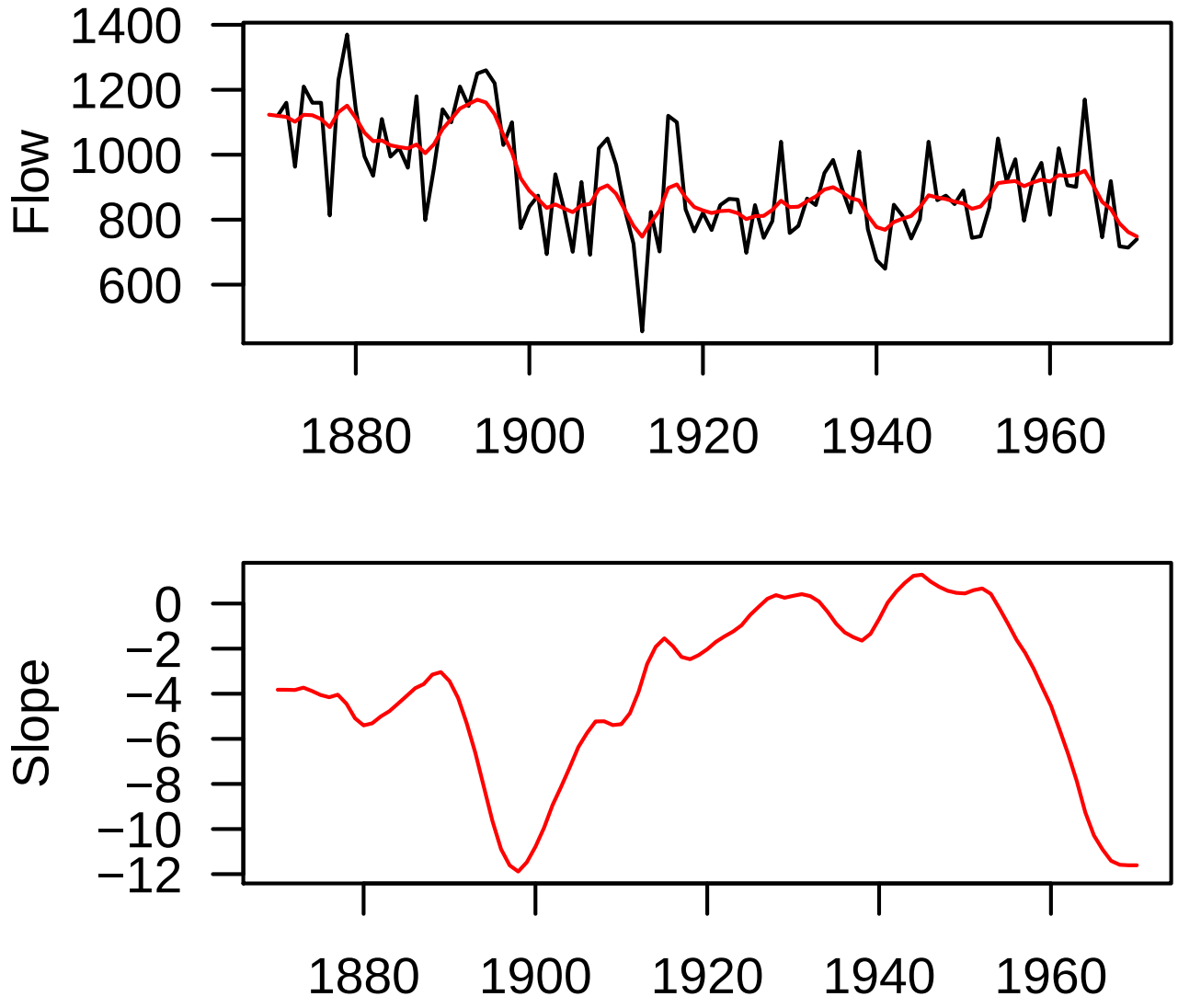
R コード

```
1  ## パラメータの事後平均をとりだす
2  s2 <- get_posterior_mean(fit, pars = "s2")[, "mean-
       all␣chains"]
3
4  ## dlm でのモデル定義
5  mod <- dlmModPoly(order = 2,
6                    dV = s2[1], dW = s2[2:3])
7
8  ## 平滑化
9  smo <- dlmSmooth(Nile, mod)
10
```

予測の R コード

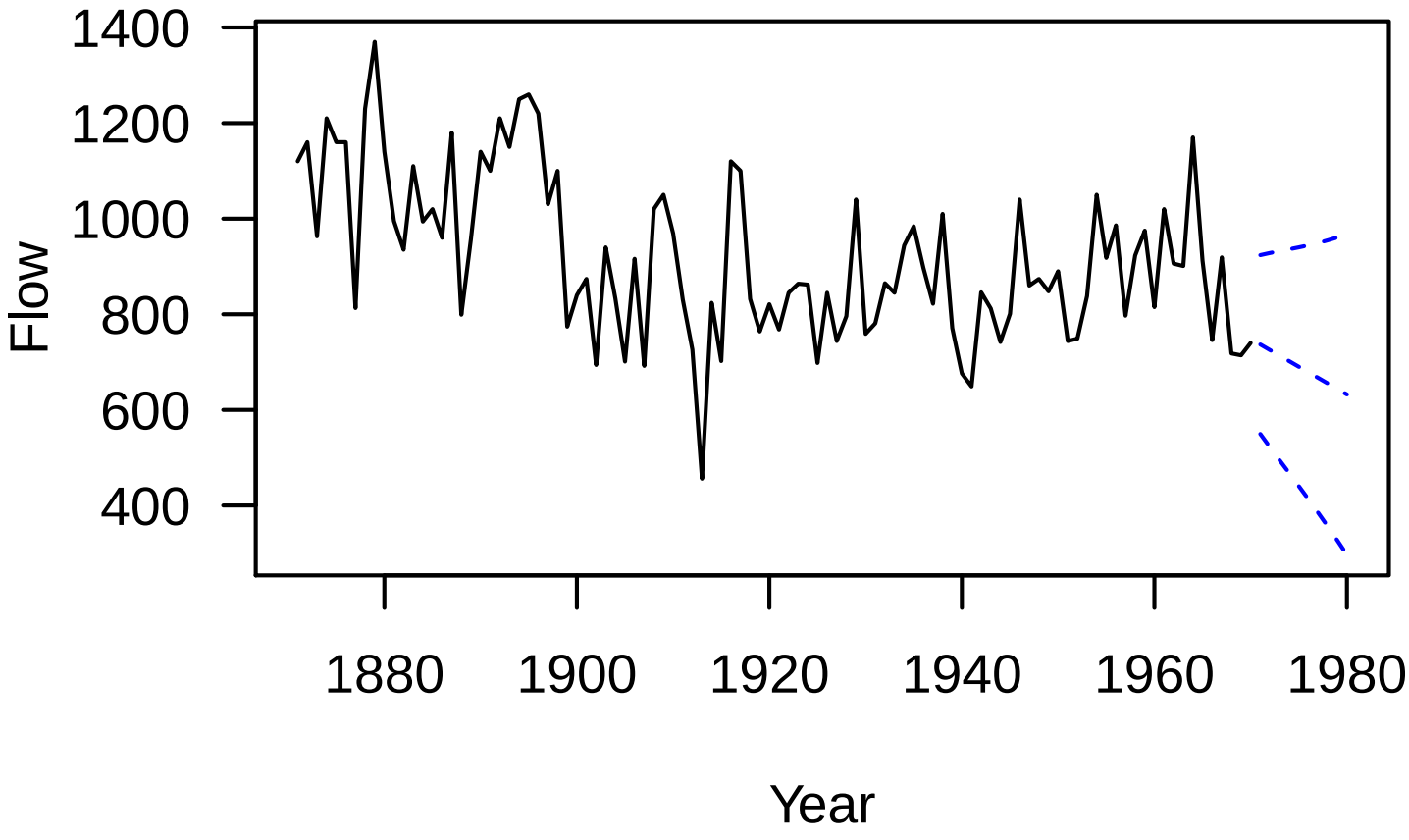
```
1  ## カルマンフィルター
2  filt <- dlmFilter(Nile, mod)
3
4  ## 状態
5  m <- filt$m[-1, ]
6
7  ## 予測
8  ## 予測する年数
9  nyear <- 10
10
11 ## 予測期間の初期値の設定
12 m0(mod) <- m[length(Nile), ]
13 C0(mod) <- diag(2) * s2[2:3]
14
15 fore <- dlmForecast(mod, nAhead = nyear)
16
```

平滑化



赤線が平滑化した値

予測



青実線が予測値，青点線は 80%予測区間

まとめ

- Stan の gaussian_dlm_obs 分布で動的線形モデルのパラメータを推定することができる。
- 推定したパラメータの値を dlm パッケージの関数で使用してカルマンフィルタを適用できる。

まとめ

- とはいえ、普通に状態をベイズ推定するなら、全部 Stan でモデルを書くほうがてっとりばやいかも。