Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Разработка и реализация алгоритмов представления и операций над кубическими комплексами. Элементы синтеза на кубантах.

Выполнил:
Толстошеев Иван Андреевич,
группа 522

Научный руководитель:
профессор, чл.-корр. РАН
Рябов Геннадий Георгиевич

Москва 2010

1. Введение.

Задача представления пространства в виде, удобном для различных расчётов характеристик объектов этого пространства имеет много решений. Решения этой задачи находят себе применения в различных областях наук. Например, очень часто это применяется при медицинских исследованиях, – при магнитно-резонансной томографии. Еще одна область которая тесно связана с этой задачей — это проектирование микросхем. Во всех этих случаях нам нужно каким-то образом представлять структуру пространства и уметь взаимодействовать с объектами этого пространства.

Кроме взаимодействия с объектами пространства необходим инструмент, позволяющий человеку свободно управлять объектами, получать результаты исследований в наглядной форме, легко обрабатывать полученные результаты.

1.1 Структура пространства.

Существует множество способов представления пространства для удобства комбинаторно-топологических операций. Например, С. П. Новиков [1] рассматривает симплициальные комплексы для подобных целей. Модель симплициальных комплексов - гибкая модель для описания объекта в пространстве. Однако, симплициальные комплексы состоят из симплексов, которые могут иметь различные формы и размеры. Поэтому представление пространств и операции с симплициальными комплексами имеют большую вычислительную и алгоритмическую сложность. В связи с этим, реализация на вычислительной машине алгоритмов, работающих с симплициальными комплексами может встретить много препятствий не только со стороны скорости разработки, но и со стороны мощности компьютера. Для того, чтобы моделировать структуру и объекты в пространстве рассматривается более простая, наглядная, и естественная модель, обладающая рядом замечательных свойств.

Рассматривается дискретная решётчатая модель пространства. Для N-мерного пространства это решётка из целочисленных точек (точек с целочисленными координатами) Z^n в евклидовом пространстве R^n с заданным ортонормированным базисом (репером). Эта модель обладает свойствами, инвариантными относительно размерности пространства. Опишем эту модел ь более подробнее. Рассмотрим единичный куб (I^n) в пространстве R^n . Он обладает набором граней 0,1, … n размерности, где 0-это целая точка (вершина куба), 1 — это одномерное ребро куба, n — это сам I^n. Совокупности таких n-мерных кубов в пространстве R^n образуют кубические комплексы. Кубические комплексы были исследованы С. П. Новиковым [1] . Эти и последующие исследования заложили отношения к кубическим комплексам как к объектам, обладающим широкими возможностями для представления комбинаторно-топологических структур.

В [4] введено понятие кубанта, для этого подробно рассматривается структура n-мерного куба. В I^n можно выделить составные части в виде кубов меньших размерностей — например I^{n-1} — гипергрань n-мерного куба, любая целочисленная вершина куба — 0-мерный куб. Итак, кубант — это конструктивный элемент n- мерного куба, куб меньшей или равной n размерности, принадлежащий исходному кубу.

Комбинируя кубанты в рамках одного n-мерного куба мы можем строить достаточно сложные объекты, а также производить над ними ряд операций.

1.2 Представление кубантов

Введём способ задания кубантов. Пусть есть n-мерный куб, и необходимо выбрать в нём некоторый кубант. Пусть, кроме этого, в R^n задан ортонормированный базис (e_1, e_2, … , e_n), и пусть задано множество всех возможных n-разрядных троичных слов {D}, с разрядами d_i из алфавита {0, 1, 2}. Число всех возможных таких слов равно 3^n. Пусть, также между реперными векторами и номерами разрядов установлено взаимно однозначное соответствие. В некотором слове K из множества D будет содержаться k_2 разрядов со значением 2, k_1 разрядов со значением 1, k_0 разрядов со значением 0, причём $k_0+k_1+k_2=n$. Всем разрядам, принимающим значение 2 ставиться в соответствие k_2 — мерный куб, построенный на соответствующих этим разрядам векторах. Остальные разряды (0 или 1) показывают наличие (1) или отсутствие (0) параллельного переноса на соответствующие им векторы. Проще говоря, трёхразрядный код обозначает два действия — формирования подкуба исходного куба и смещение его внутри исходного куба. В нашей кодировке для трёхмерного куба слову 222 соответствует он сам, а слову 001 — точка с координатами (0,0,1). Отметим, что в данном кодировании кубантов все слова без 2 в их составе в точности соответствуют точкам с теми же координатами. В трёхмерном кубе существует всего 1 кубант размерности 3, 6 кубантов размерности 2, 12 кубантов размерности 1 и 8 кубантов размерности 0. Эту кубанты соответствуют самому кубу, его двумерным граням, его рёбрам и вершинам. Всего различных кубантов в трёхмерном кубе

27, что в точности равно 3^3.

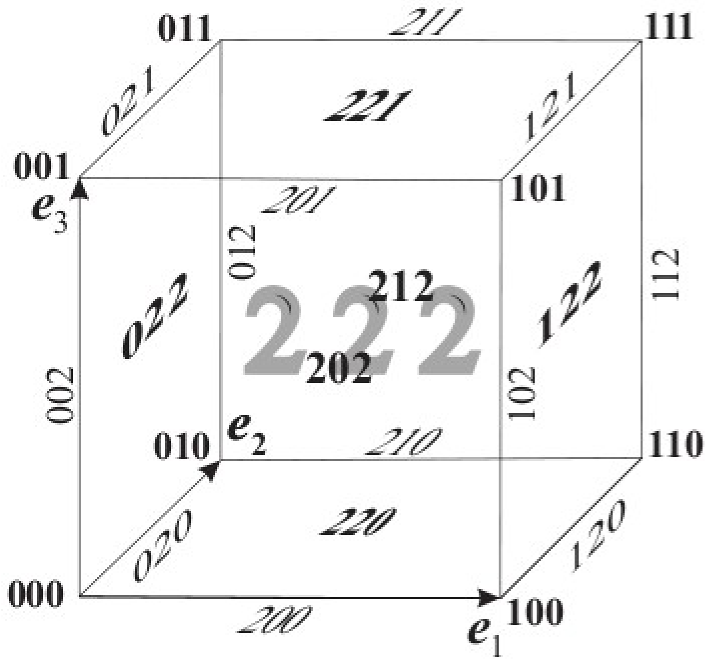

Рис.1 (кодирование кубантов в трёхмерном кубе)

На рисунке 1 изображён трёхмерный куб с отмеченными на нём кубантами.

1.3 Операции над кубантами.

Любые два кубанта в составе n-мерного куба могут находиться в следующих отношениях : не пересекаться, пересекаться или совпадать. Причем, областью пересечения двух кубантов является еще один кубант меньшей размерности, являющийся общей частью двух кубантов. Для простого нахождения пересечения кубантов введём операцию пересечения — поразрядную операцию на множестве слов из {D}.

c1/c2	0	1	2
0	0	∅	0
1	∅	1	1
2	0	1	2

Если при вычислении пересечения кубантов мы получили в одном из разрядов ∅, то это означает, что данные кубанты не имеют пересечения. Например, если мы возьмём кубанты 002212 и 011002, и применим к ним операцию пересечения, то получим результат:

0	0	2	2	1	2
0	1	1	0	0	2
0	∅	1	0	∅	2

Итак мы получили кубант 0∅10∅2, в кодированной записи которого содержится символ ∅, а значит, исходные кубанты не пересекаются.

Получается, что к символам алфавита {0,1,2} добавляется еще один символ - ∅. Наш итоговый алфавит для представления закодированных кубантов будет иметь вид {∅, 0, 1 ,2}. Кубант, содержащий в своей поразрядной записи хотя бы один символ ∅ мы будет называть псевдокубантом.

Так же представляет интерес операция выпуклая оболочка. Пусть даны несколько кубантов в одном I^n. Тогда, для того чтобы найти их наименьший общий кубант (наименьший кубант, содержащий в себе все кубанты из данного набора) мы введём новую поразрядную операцию над словом из множества {D}, описывающего кубант. Эта поразрядная операция описана в следующей таблице:

c1/c2	0	1	2
0	0	2	2
1	2	1	2
2	2	2	2

Например, если мы возьмём кубанты 002212 и 011002, и применим к ним операцию «выпуклая оболочка» то получим результат:

0	0	2	2	1	2
0	1	1	0	0	2
0	2	2	2	2	2

Таким образом, минимальный кубант, который содержит два исходных кубанта — это 022222.

Рассмотрим вычисления расстояния (в виде манхеттеновой метрики, или реберной метрики). Для этого просто вычислим пересечение кубантов, и рассмотрим количество ∅ в поразрядной записи пересечения. Пресечение кубантов обладает замечательным свойством - если это псевдокубант, то количество ∅ в его записи и будет расстояние в терминах манхеттеновой метрики.

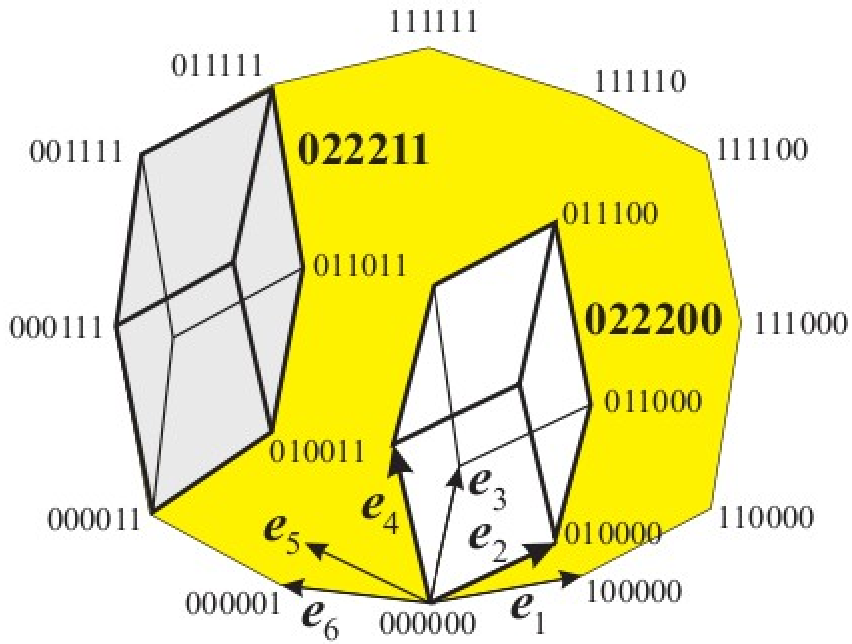

Рис 2. Манхеттеновое расстояние между кубантами 022211 и 022200 равно 2.

Так, на рисунке 2 изображены два кубанта, представимые в закодированном виде как 022211 и 022200. Вычисляя пересечение между ними, мы получим псевдокубант 0222∅∅. В записи этого псевдокубанта содержится 2 символа ∅, поэтому манхеттеновое расстояние между этими кубантами — 2.

Заметим, что все операции, введённые на множестве кубантов одной размерности поразрядные, а значит, их можно быстро вычислить на современных компьютерах. Получается, мы можем представлять сложные топологические объекты в виде совокупности кубантов, а затем быстро рассчитывать необходимые нам характеристики. Так же задача вычисления топологических свойств кубантов достаточно легко распараллеливается, так как объект легко разделяется на множество маленьких подобъектов .

1.4 Цель работы.

Цель этой дипломной работы — исследовать возможности представления объектов в пространстве, используя решетчатую модель пространства. Для этого необходимо разработать программный продукт, который мог бы работать с кубантами, кубическими комплексами. Используя аппарат кубических комплексов мы можем описать и исследовать комбинаторно-топологические свойства достаточно сложных пространственных объектов в многомерных пространствах, а также пополнить программное обеспечение современных компьютерных систем.

1.5 Постановка задачи.

В рамках инструментальной системы и подсистемы «Алгебра кубантов» разработать приложения , позволяющие визуализировать кубанты и кубические комплексы, производить операции над кубантами и кубическими комплексами. Реализовать алгоритмы основных операций, описанных в [4]. Сделать возможность визуализации как в 2D режиме, так и в 3D. Предусмотреть в процессе разработке возможность испольнения части программного комплекса на супер-ЭВМ.

Список литературы:

1. Новиков С.П. Топология. Москва-Ижевск: РХД, 2002.
2. Рябов Г. Г. О путевом кодировании k-граней в n-кубе. // Вычислительные методы и программирование. 2008. 9, №1. 20-22
3. Понтрягин Л. С. Основы комбинаторной топологии. - 3-е изд. - М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит. 1986.
4. Рябов Г. Г. О четверичном кодировании кубических структур. // Вычислительные методы и программирование. 2009. Т. 10. 340-347
5. V. Desoutter, N. Destainville. Flip dynamics in three-dimensional random tilings // arXiv:cond-mat/0406728v3 [cond-mat.stat-mech]
6. Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин, “Кубические многообразия в решётках”, Изв. РАН. Сер. матем., 58:2 (1994), 93–107
7. Manin Yu. I. Classical computing, quantum computing and Shor's factoring algorithm. // arXiv : quant-ph/9903008v1, 2 March, 1999.
8. Деза М., Шторгин М. Вложение графов в гиперкубы и кубические решетки // Успехи матем. Наук. 1997. 52, № 6, 155-156
9. Деза М., Шторгин М. Мозаики и их изометрические вложения. // Изв. РАН Сер. Матем. 2002. 66, №3, 3-22.