СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ Том 58, № 2, 1994

УДК 515.16+514.17

 Н.П. ДОЛБИЛИН, М.А. ШТАНЬКО, М.И. ШТОГРИН

КУБИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ В РЕШЕТКАХ

Исследуются кубические комплексы и, в частности, кубические многообразия. Найдены необходимые и достаточные условия отображаемости кубического многообразия в стандартную кубическую решетку.

Введение

Рассмотрим n-мерный кубический комплекс Q^n, т.е. абстрактный комплекс, составленный из евклидовых единичных кубов размерности, не превышающей n. Естественный интерес представлял вопрос: можно ли такой комплекс вложить или хотя бы отобразить в n-мерный остов стандартной кубической решетки размерности N, $N \geqslant n$. Здесь под кубической решеткой размерности N понимается стандартное разбиение евклидова пространства $\mathbf{R}^N$ на N-мерные кубы, которое будем обозначать через R_c^N. Остов размерности n решетки R_c^N состоит из всех n-мерных замкнутых кубов из R_c^N. Любой конечный набор замкнутых кубов из R_c^N размерности, не превышающей n, является n-мерным кубическим комплексом, называемым в дальнейшем *решеточным*. Были найдены многочисленные примеры абстрактных кубических комплексов, которые по тем или иным причинам, зачастую не тривиальным, не отображаются в решетку R_c^N ни при каком N (см. [6, 9], а также § 2 данной работы).

В 1984 г. С.П. Новиков ввел, как объект, для рассмотрения кубические комплексы [1] и поставил перед авторами следующие две задачи [6]:

1. При каких условиях данный абстрактный кубический комплекс Q^n может быть отображен (в частности, иммерсирован, или вложен) в решетку R_c^N при некотором N?

2. Пусть в R_c^{n+1} задан n-мерный кубический комплекс, который является циклом по модулю 2. Исследовать и классифицировать параметризации этого цикла.

Вторая задача возникла из метода, предложенного Кацем и Уордом для вычисления статистической суммы для известной модели Изинга (см. [2–5], а также [10]). Решение этой второй задачи для случая $n = 2$, данное в [7, 8], легко может быть перенесено на произвольное n.

Настоящая работа посвящена первой задаче. Ей предшествовали работы [6, 9], в которых рассматривались квадрильяжи на поверхностях, т.е. двумерные кубические комплексы, телами которых являются замкнутые двумерные многообразия. Один из основных результатов этих работ – необходимые и достаточные условия отображаемости квадрильяжа на двумерной сфере в решетку R_c^N достаточно высокой размерности N (точные определения см. ниже). Затем О. Каралашвили рассмотрел кубические комплексы на многомерных многообразиях и доказал следующие две теоремы [11]:

1) *Если кубильяж на многообразии Q^n является простым и фундаментальная группа $\pi_1(Q^n)$ не допускает нетривиальных гомоморфизмов в свободную абелеву группу, то кубильяж Q^n отображается в кубическую решетку достаточно большой размерности.*

2) *Если кубильяж на многообразии Q^n является простым, то его естественное однократное подразделение (удвоение) отображается в стандартную кубическую решетку (достаточно большой размерности).*

Из первого результата следует, например, что если фундаментальная группа простого кубического многообразия Q^n конечна или без центра, то многообразие Q^n отображается в R_c^N; кроме того, если одномерная группа гомологий или когомологий тривиальна, $H_1(Q^n, \mathbf{Z}_2) = 0$ или $H^1(Q^n, \mathbf{Z}_2) = 0$, то простое кубическое многообразие Q^n также отображается в R_c^N.

В настоящей работе основными результатами являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть дано простое кубическое многообразие Q^n. Если каждый его слой гомологичен нулю по модулю 2, то существует решеточное отображение*

$$f\colon\ Q^n \to R_c^N,$$

где N – число всех слоев кубильяжа Q^n.

ТЕОРЕМА 4. *Простое кубическое многообразие Q^n отображается в решетку R_c^N тогда и только тогда, когда найдется такое N_0, $n \leqslant N_0 \leqslant N$, что множество всех слоев многообразия Q^n распадается на N_0 семейств таких, что каждый слой входит в одно и только одно семейство, любые два слоя из одного семейства не имеют общих n-мерных кубов, каждое семейство слоев гомологично нулю по модулю 2.*

Замечание. Гомологичность нулю слоя или семейства слоев понимается как гомологичность нулю естественного срединного сечения слоя или объединения срединных сечений слоев из данного семейства. Срединное сечение слоя является $(n-1)$-мерным кубическим подкомплексом однократного удвоения кубильяжа Q^n и в то же время является $(n-1)$-мерным циклом гомологий по модулю 2 (см. ниже).

По каждому конечному симплициальному комплексу K естественным образом строится канонический кубический комплекс $Q(K)$ (см. § 5 настоящей статьи и работу [17]).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть K – симплициальное многообразие размерности n. Каноническое кубическое многообразие $Q^n(K)$ вкладывается в решетку R_c^N, где N – число слоев кубильяжа $Q^n(K)$.*

Из этих теорем вытекают следствия.

Следствие 1. *Если группа одномерных (ко)гомологий по модулю 2 кубического многообразия Q^n тривиальна, $H_1(Q^n, \mathbf{Z}_2) = 0$ ($H^1(Q^n, \mathbf{Z}_2) = 0$), то кубильяж Q^n отображается в R_c^N при некотором N.*

Это следствие также вытекает из работы [11].

Следствие 2. *Среди решеточных подмногообразий кубической решетки R_c^N встречаются некомбинаторные многообразия и, следовательно, несглаживаемые.*

Это следует из того, что для любого $n \geqslant 5$ существуют симплициальные n-мерные многообразия, которые не являются комбинаторными [12, 13] и, следовательно, несглаживаемые [14, 15].

Следствие 3. *С точностью до комбинаторной эквивалентности класс решеточных подмногообразий кубической решетки R_c^N совпадает с классом триангулированных топологических многообразий (не только комбинаторных).*

По-видимому исследование кубических комплексов является новым направлением в изучении конечных полиэдров. Что касается полученных нами результатов, то в большей степени они направлены на изучение кубических структур и дают возможность обнаружить новые свойства правильных кубических решеток. В частности, показано, что любое полиэдральное многообразие обладает кубическим подразделением, которое вкладывается в стандартную кубическую решетку.

Все основные результаты, полученные в настоящей работе, могут быть распространены с кубических многообразий на произвольные кубические полиэдры. Так, теорема 5, которая в этой работе является приложением общей теоремы, может быть доказана иным способом, пригодным также и для кубических комплексов (см. [17]).

С другой стороны, если ограничиться рассмотрением только многообразий, то методы топологии многообразий позволяют формулировать и получать для многообразий более тонкие результаты, чем для произвольных комплексов.

§ 1. Основные понятия и определения

Кубическим комплексом $\mathfrak{Q}^n$ *называется такое семейство* $\{I_j^k \mid j \in J,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ замкнутых k-мерных кубов I_j^k, что:

1) вместе с каждым своим кубом I_j^k это семейство содержит все его грани;

2) пересечение двух кубов этого семейства, если оно не пусто, совпадает с их общей гранью.

Так определенный кубический комплекс называется *стандартным*. По поводу нестандартных кубических комплексов см. [6, 9]. В настоящей работе, как правило, мы будем пользоваться стандартными конечными кубическими комплексами и только в § 4 будут рассматриваться и нестандартные комплексы.

Тело кубического комплекса $\mathfrak{Q}^n$ будем называть *кубическим полиэдром*. Если кубический полиэдр является n-мерным замкнутым топологическим многообразием, то это многообразие со структурой соответствующего кубического комплекса $\mathfrak{Q}^n$ будем называть *кубическим многообразием*, или *кубильяжем*, и обозначать через Q^n.

Через R_c^N обозначается стандартная N-мерная кубическая решетка, рассматриваемая также как кубический полиэдр в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^N$.

Непрерывное отображение $f\colon\ Q^n \to R_c^N$, называется *решеточным*, если оно каждый k-мерный куб из комплекса $\mathfrak{Q}^n$ отображает изометрично на некоторый k-мерный куб из решетки R_c^N.

Говоря о решеточном отображении кубильяжа Q^n в решетку R_c^N,

$$f\colon\ Q^n \to R_c^N,$$

мы будем слово "решеточное" опускать, так как других отображений мы не рассматриваем.

Два ребра e и e' кубильяжа Q^n называются *эквивалентными*, если существует соединяющая их последовательность ребер $e_1 = e,\ e_2, \ldots, e_k = e'$, в которой каждые два соседние ребра e_i, e_{i+1} являются противоположными сторонами некоторого квадрата из кубильяжа Q^n. В частности, противоположные стороны любого квадрата всегда являются эквивалентными.

Легко проверяется, что так введенное отношение эквивалентности удовлетворяет свойствам рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Множество всех ребер кубильяжа Q^n разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности.

Заметим, что все параллельные ребра данного куба по определению эквивалентны, но не обратно: для некоторых кубильяжей среди эквивалентных ребер в данном кубе могут оказаться и перпендикулярные ребра (относительно примеров таких кубильяжей см. [6, 9]).

Класс эквивалентности ребер называется *простым*, если в этом классе все ребра, принадлежащие одному кубу кубильяжа Q^n, параллельны между собой. Класс эквивалентности ребер называется *ориентируемым* при условии, что все его ребра можно так ориентировать, что если e и e' – два эквивалентных ребра, принадлежащие одному кубу, – параллельны друг другу, то и их ориентации параллельны.

Имеет место следующее утверждение, которое может быть доказано аналогично тому, как это было сделано в работе [6] для двумерных кубильяжей (и сформулировано в терминах полоски):

Если кубильяж Q^n отображается в решетку R_c^N, то выполнено каждое из следующих трех условий:

1) каждый класс эквивалентности ребер является простым;

2) каждый класс эквивалентности ребер является ориентируемым;

3) в любом ориентированном классе эквивалентности никакая вершина не может быть одновременно началом одного ребра и концом другого ребра этого класса.

Всюду ниже в настоящей работе будет предполагаться, если не оговорено противное, что всякий рассматриваемый кубильяж удовлетворяет условиям 1), 2), 3) из указанного выше утверждения; такой кубильяж будет называться *простым кубильяжем*. Кроме этого мы будем предполагать кубильяж связным.

Введем понятие слоя простого кубильяжа Q^n, которое аналогично понятию полоски, рассмотренному в [6, 9].

Фиксируем класс E эквивалентности ребер. Тогда объединение всех n-мерных кубов кубильяжа Q^n, содержащих ребра из класса E, называется *слоем* кубильяжа Q^n, соответствующим этому классу, и обозначается через $L = L(E)$.

Фиксируем ребро $e \in E$, и пусть куб I^n содержит ребро e. Тогда $I^n \in L(E)$. Обозначим через $I_0^{n-1}(e)$ срединное сечение куба I^n, перпендикулярное ребру e. *Срединным сечением* $S(L)$ слоя $L(E)$ будем называть кубический полиэдр, состоящий из всех $(n-1)$-мерных кубов вида $I_0^{n-1}(e)$:

$$S(L) = \bigcup_{e \in E} I_0^{n-1}(e).$$

З а м е ч а н и е. Срединное сечение $S(L)$, вообще говоря, не является многообразием, но оно всегда является $(n-1)$-мерным циклом по модулю 2, так как в каждой $(n-2)$-мерной грани любого $(n-1)$-мерного куба, входящего в срединное сечение $S(L)$, сходятся два и только два $(n-1)$-мерных куба из $S(L)$. Однако если кубильяж Q^n является комбинаторным многообразием, то любое срединное сечение $S(L)$ также является комбинаторным многообразием.

Пусть дано ребро $e \in E$. Рассмотрим куб I^n, который содержит данное ребро e. Обозначим через $I_+^{n-1}(e), I_-^{n-1}(e)$ обе $(n-1)$-мерные грани куба I^n, перпендикулярные ребру e.

По определению край слоя $L(E)$ есть комплекс вида

$$\{I_+^{n-1}(e),\ I_-^{n-1}(e) | e \in E\},$$

а *внутренностью* слоя $\operatorname{Int} L(E)$ называется следующее объединение полуоткрытых n-мерных кубов, входящих в слой $L(E)$:

$$\operatorname{Int} L(E) = \bigcup_{I^n \in L(E)} \{I^n \setminus (I_+^{n-1}(e) \cup I_-^{n-1}(e))\},$$

где $e \in E$ и $e \subset I^n$.

Внутренность простого слоя $L(E)$ является прямым произведением открытого интервала на его срединное сечение. Ввиду условия 3) край простого слоя состоит из двух частей. Грани кубов вида I_+^{n-1} составляют одну компоненту края (берег) этого слоя, а грани вида I_-^{n-1} составляют другую компоненту. Вообще говоря, слой $L(E)$ не является прямым произведением его срединного сечения $S(L)$ на замкнутый отрезок.

В простом кубильяже слой может самокасаться по одному и тому же берегу, но разными берегами он самокасаться не может.

Заметим однако, что если кубильяж вкладывается в решетку R_c^N, то никакой слой не может самокасаться также и одноименными берегами, т.е. каждый слой в этом случае является прямым произведением срединного сечения на замкнутый отрезок.

Для простого кубильяжа срединное сечение любого его слоя является двусторонне вложенным. В этом случае будем говорить, что слой является двусторонним.

§ 2. Критерий отображаемости кубического многообразия в решетку

Рассмотрим в решетке R_c^N естественно связанный с ней ортонормированный базис $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N)$. Зададим на каждом ребре решетки R_c^N направление, совпадающее с направлением соответствующего ему параллельного базисного вектора. При фиксированном отображении $f: Q^n \to R_c^N$ все ребра из кубильяжа Q^n распадаются на классы эквивалентности так, что все попарно эквивалентные ребра при f отображаются в ребра из R_c^N, параллельные некоторому базисному вектору $\mathbf{a}_i$. Припишем каждому ребру $e \in E$ такое направление $\overline{e}$, которое при отображении f переходит в направление ребра $f(e)$; $f(\overline{e}) = \overline{f(e)}$.

Рассмотрим реберный путь γ в кубильяже Q^n с выбранным направлением обхода. При отображении f путь γ переходит в путь $f(\gamma)$, лежащий в решетке R_c^N с индуцированным направлением обхода. Определим сумму $\Sigma(f(\gamma))$ следующим образом: идя вдоль пути $f(\gamma)$ в заданном направлении, будем брать его векторы-звенья со знаком +, если направление ребра решетки совпадает с направлением обхода пути γ, и со знаком –, если направление ребра противоположно направлению обхода пути, т.е.

$$\Sigma(f(\gamma)) = \sum_{e\in\gamma} \operatorname{sign}_{f(e)} \cdot f(e),$$

где

$$\operatorname{sign}_{f(e)} = \begin{cases} +1, & \text{если направления пути } f(\gamma) \text{ и вектора } f(e) \text{ совпадают;} \\ -1, & \text{если направления } f(\gamma) \text{ и } f(e) \text{ противоположны.} \end{cases}$$

$\Sigma(f(\gamma)) = 0$, если путь $f(\gamma)$ замкнут.

Для того чтобы сформулировать критерий отображаемости данного кубильяжа Q^n в решетку R_c^N, мы введем распределение классов эквивалентности ребер кубильяжа по некоторым семействам таких классов. Это распределение классов по семействам может быть достаточно общим, но оно должно удовлетворять следующему условию: если два класса принадлежат одному семейству, то никакой куб кубильяжа Q^n не содержит одновременно представителей обоих классов. Впредь будем говорить, что множество всех классов эквивалентности ребер распределяется на N семейств F_1, $F_2, \dots, F_N$, если

1) на каждом классе фиксирована ориентация;

2) каждый ориентированный класс эквивалентности принадлежит одному и только одному семейству F_i;

3) если какой-то класс из семейства F_i имеет ребра в данном кубе кубильяжа Q^n, то никакой другой класс эквивалентности ребер из F_i не имеет ребер в этом кубе, т.е. в любом кубе из Q^n перпендикулярные друг другу ребра входят в классы эквивалентности, принадлежащие разным семействам.

Пусть задан ориентированный реберный путь $\gamma = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ в кубильяже Q^n, и пусть sign e_i равняется +1, если направление обхода пути γ на ребре e_i совпадает с ориентацией ребра e_i, и –1 в противоположном случае. Выпишем следующую сумму:

$$\Sigma_F(\gamma) = \sum_{e\in\gamma} \operatorname{sign}_e \cdot F(e),$$

где через $F(e)$ обозначено семейство, содержащее ребро e. Заметим, что суммирование здесь проводится по ребрам-звеньям пути γ. При этом ребро e может входить в эту сумму несколько раз и, вообще говоря, с различными знаками. После приведения подобных членов сумма $\Sigma_F(\gamma)$ сводится к целочисленной линейной комбинации вида $\sum_{i=1}^{N} n_i \cdot F_i$. Таким образом, сумма $\Sigma_F(\gamma)$ является элементом Z-модуля $\mathcal{F}$ с образующими $F_1, F_2, \ldots, F_N$.

Если для данного пути γ и заданного модуля $\mathcal{F}$ коэффициент при каждом F_i равен нулю, то назовем такой путь *нулевым* (в модуле $\mathcal{F}$).

Очевидно, что для любого разбиения множества ориентированных классов эквивалентности на семейства $F_1, F_2, \ldots, F_N$ существует отображение g множества $\Gamma = \{\gamma\}$ всех ориентированных путей в соответствующий модуль $\mathcal{F}$, т.е. $g : \Gamma \to \mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 1 (критерий отображаемости). *Для данного натурального N заданный n-мерный простой кубильяж Q^n отображается в n-остов N-мерной кубической решетки R_c^N:*

$$f\colon\ Q^n \to R_c^N,$$

где $N = \dim \operatorname{Aff} f(Q^n)$, тогда и только тогда, когда существуют такая ориентация классов эквивалентности и разбиение их на N семейств $F_1, \ldots, F_N$, что любой замкнутый реберный путь в кубильяже Q^n является нулевым в соответствующем модуле $\mathcal{F}$.

Доказательство. Заметим сначала, что если кубильяж Q^n отображается в решетку R_c^N и $N = \dim \operatorname{Aff} f(Q^n)$, то действительно существуют указанные в теореме ориентация и разбиения множества классов на семейства.

Докажем теперь обратное утверждение. Возьмем в кубильяже Q^n некоторую точку O. Припишем ей N нулевых координат. Пусть, далее, A – любая другая вершина кубильяжа Q^n и $\gamma = OA$ – реберный путь, соединяющий O с A. Ему соответствует в $\mathcal{F}$ элемент

$$g(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} n_i \cdot F_i.$$

По условию теоремы любой замкнутый реберный путь γ является нулевым. Поэтому элемент $g(\gamma)$ не зависит от выбора пути OA, но зависит от выбора точки A. Таким образом, каждой вершине кубильяжа Q^n с фиксированной начальной вершиной O можно однозначно приписать N координат $(n_1, \ldots, n_N)$ – коэффициенты элемента $g(\gamma)$.

Так введенные на множестве вершин кубильяжа Q^n координаты $(n_1, \ldots, n_N)$ согласованы в том смысле, что на каждом кубе $K \subset Q^n$ координаты его вершин равны соответственно координатам вершин некоторого единичного куба $K' \subset \mathbf{R}^N$ в кубической решетке.

Куб $K_i \subset Q^n$ евклидов. Поэтому существует и притом единственное изометрическое отображение

$$f_i\colon\ K_i \to R_c^N$$

такое, что вершины $\upsilon \in K_i \subset Q^n$ и вершины $\upsilon' = f_i(\upsilon) \in K' \subset R_c^N$ имеют соответственно равные координаты.

Заметим, что отображение произвольно взятой грани куба при этом совпадает с ограничением отображения самого куба на эту грань. Построим отображение

$$f\colon\ Q^n \to R_c^N,$$

склеенное из рассматриваемых локально изометрических отображений f_i, т.е. таких, что $f|_{K_i} = f_i$. Так как отображения f_i различных кубов $K_i \in Q^n$ согласованы между собой там, где эти кубы пересекаются, то построенное отображение непрерывно. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Эта теорема справедлива и для нестандартных кубильяжей на многообразиях. Если же кубильяж допускает вложение в решетку, то он заведомо является стандартным (см. [9]).

ТЕОРЕМА 2 (критерий вложимости). *Для данного натурального N заданный n-мерный стандартный простой кубильяж Q^n вкладывается в n-остов N-мерной кубической решетки R_c^N:*

$$f\colon\ Q^n \to R_c^N,$$

где $N = \dim \operatorname{Aff} f(Q^n)$, тогда и только тогда, когда существуют такие ориентации классов эквивалентности ребер и распределение их по N семействам $F_1, F_2, \ldots, F_N$, что любой замкнутый и только замкнутый реберный путь γ в n-кубильяже Q^n является нулевым относительно Z-модуля $\mathcal{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала, что если при отображении f, существующем по теореме 1, никакие две вершины кубильяжа не отображаются в одну и ту же вершину остова, то никакие две произвольные точки кубильяжа Q^n не отображаются в одну и ту же точку. Действительно, предположим, что при отображении f какие-то две различные точки многообразия Q^n отображаются в одну и ту же точку решетки R_c^N. Пусть эта точка принадлежит внутренности некоторого куба I^k решетки R_c^N, $1 \leqslant k \leqslant n$. В силу того, что отображение f решеточное, прообраз $f^{-1}(I^k)$ этого куба содержит по крайней мере два k-мерных куба I_1^k и I_2^k из кубильяжа Q^n таких, что $f(I_1^k) = f(I_2^k) = I^k$. Поскольку кубильяж Q^n стандартный, то эти кубы не могут иметь все вершины общими. Следовательно, у кубов I_1^k и I_2^k имеются по меньшей мере две вершины, принадлежащие разным кубам, которые отображаются в одну и ту же вершину куба I^k.

Итак, для доказательства теоремы достаточно доказать, что никакие две вершины кубильяжа при отображении f не отображаются в одну и ту же вершину. Предположим, что при отображении f некоторые две вершины $A, B \in Q^n$ отобразились в одну и ту же вершину: $f(A) = f(B) \in R_c^N$. Возьмем произвольный реберный путь γ, соединяющий точки A и B в кубильяже Q^n. Образ $f(\gamma)$ есть замкнутый реберный путь в решетке R_c^N, так как $f(A) = f(B)$. Поэтому незамкнутый путь γ является нулевым относительно Z-модуля $\mathcal{F}$, индуцированного отображением f, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $f(A) \neq f(B)$. Теорема 2 доказана.

§ 3. Теоремы об отображаемости кубического многообразия в решетку

Рассмотрим кубическое многообразие Q^n и некоторый его слой L^n. Будем говорить, что слой L^n гомологичен нулю в Q^n по модулю 2, если его срединное сечение $S^{n-1}(L^n)$ (см. п. 1) гомологично нулю по модулю 2 в Q^n.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть дано простое кубическое многообразие Q^n. Если каждый его слой гомологичен нулю по модулю 2, то существует отображение*

$$f\colon\ Q^n \to R_c^N,$$

где N – число всех классов эквивалентности ребер кубильяжа Q^n.

Доказательство. Придадим каждому классу эквивалентности ребер одну из двух возможных ориентаций, все равно какую. В силу гомологичности 0 соответствующего слоя сечение $S^{n-1}(L^n)$ разбивает многообразие Q^n на две не связанные друг с другом части (см. [16, с. 318]). Обозначим их через Q_+^n и Q_-^n.

Возьмем замкнутый ориентированный реберный путь и проверим для него выполнимость критерия отображаемости. Он может переходить из Q_+^n в Q_-^n и обратно лишь по ребрам из соответствующего класса эквивалентности. В силу замкнутости пути γ алгебраическая сумма ребер этого класса, возникающая при обходе вдоль пути γ (см. § 2), равна 0. Поэтому рассматриваемый путь γ является нулевым в модуле $\mathcal{F} = \langle F_1,\dots, F_N\rangle$, где F_i состоит из единственного класса эквивалентности. Теперь в силу критерия отображаемости существует решеточное отображение $f\colon Q^n \to R_c^N$. Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть Q^n – простое кубическое многообразие. Оно отображается в решетку R_c^N тогда и только тогда, когда существует такое N_0, $n \leqslant N_0 \leqslant N$, что совокупность всех срединных сечений многообразия Q^n можно распределить по N_0 семействам так, что никакие два срединные сечения из одного семейства попарно не пересекаются и каждый $(n-1)$-мерный цикл, образованный из всех срединных сечений данного семейства, гомологичен нулю по модулю 2.*

Доказательство (аналогичное доказательству теоремы 3). Рассмотрим одно из семейств слоев, скажем F_i, $i = 1, 2, \dots, N$, указанных в формулировке теоремы. Поскольку объединение срединных сечений слоев, входящих в семейство F_i, образует $(n-1)$-мерный цикл, гомологичный нулю по модулю 2, то этот цикл разрезает многообразие Q^n на две не связанные друг с другом части Q_+^n и Q_-^n. Каждое ребро из F_i имеет один конец в Q_+^n, а другой в Q_-^n. Поэтому каждое ребро из F_i мы ориентируем так, что начало принадлежит, скажем, Q_+^n, а конец ребра принадлежит Q_-^n. Далее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3. Теорема 4 доказана.

Следствие. *Из этой теоремы следует теорема об удвоении (бисекции)*, доказанная в [11]: *если произвести бисекцию произвольного простого кубильяжа Q^n, то получившийся новый кубильяж $(Q^n)'$ отображается в решетку R_c^N, где N – число классов ребер исходного кубильяжа Q^n.*

Напомним, что *удвоением* (*бисекцией*) кубильяжа Q^n называется кубильяж $(Q^n)'$, полученный из Q^n делением каждого n-куба I^n из Q^n на 2^n равных куба гиперплоскостями, параллельными всем $(n-1)$-мерным граням куба I^n.

Замечание. Доказанная теорема верна и для нестандартных кубильяжей.

§ 4. Свойства отображаемых кубических многообразий

Пусть $N = N(Q, f) = \dim \mathrm{Aff}(f(Q^n))$, где $\mathrm{Aff}(f(Q^n))$ – аффинная оболочка образа $f(Q^n)$. Пусть также

$$N_{\max}(Q) = \max_f N(Q, f).$$

Аналогично,

$$N_{\min}(Q) = \min_f N(Q, f).$$

Предложение 1. *Пусть дано некоторое кубическое многообразие Q^n. Число $N_{\max}(Q)$ равно числу всех различных классов эквивалентности ребер кубильяжа Q^n тогда и только тогда, когда каждое срединное сечение гомологично нулю по модулю 2.*

Доказательство. Если дано, что каждое срединное сечение гомологично нулю по модулю 2, то по теореме 3 существует отображение f, для которого $N(Q, f)$ равно N, где N – число всех различных классов эквивалентности ребер кубильяжа Q^n. Таким образом, $N = N(Q, f) \leqslant N_{\max}(Q)$, а с другой стороны очевидно, что $N \geqslant N_{\max}(Q)$. Следовательно, $N = N_{\max}(Q)$, т.е. в одну сторону предложение 1 доказано.

Обратно, пусть дано отображение f: $Q^n \to R_c^N$ такое, что $N(Q, f) = N_{\max}(Q) = N$, где число N есть число всех слоев кубильяжа Q^n. Теперь заметим, что каждому слою отвечает своя координатная ось. Откуда вытекает, что любое срединное сечение гомологично нулю по модулю 2, так как оно получается сечением всего образа $f(Q^n)$ некоторой $(N-1)$-мерной плоскостью, перпендикулярной соответствующей оси в $\mathbf{R}^N$. Предложение 1 доказано.

Следствие. *Если в Q^n каждый слой гомологичен нулю по модулю 2 и для отображений*

$$f_1\colon\ Q^n \to R_c^{N_{\max}},\quad f_2\colon\ Q^n \to R_c^{N_{\max}}$$

выполняется

$$N(Q, f_1) = N(Q, f_2) = N_{\max}(Q),$$

то $f_1(Q)$ и $f_2(Q)$ совпадают с точностью до движения из группы симметрий решетки. Более того, образ $f_1(Q^n)$ лежит в пределах одного N-куба.

Предложение 2. *Если данный кубильяж Q^n обладает тем свойством, что любой его слой гомологичен нулю по модулю 2, то для любого целого d, $N_{\min}(Q) \leqslant d \leqslant N_{\max}(Q)$, существует отображение f, для которого $N(Q, f) = d$ (см.* [6, 9]).

Доказательство. Рассмотрим отображение $f_{\min}\colon Q^n \to R_c^{N_{\min}}$. Заметим, что при отображении $f_{\min}$ совокупность всех N слоев распадается на $N_{\min}$ семейств так, что удовлетворяются условия теоремы 4.

Обозначим число всех слоев данного кубильяжа Q^n через N. По теореме 3$N_{\max}(Q) = N$. Рассмотрим соответствующее отображение $f_{\max}: Q^n \to R_c^N$. Для этого отображения очевидно, что каждое семейство состоит из одного слоя.

Если теперь при каком-либо отображении f хотя бы одно семейство содержит по меньшей мере два слоя, то мы можем один из этих слоев выделить в отдельное семейство. Для нового разбиения на семейства выполняются условия теоремы 4. Значит, существует отображение f', для которого $N(Q, f') = N(Q, f) + 1$. Эта процедура осуществима всякий раз, когда существуют семейства, содержащие более одного слоя, и продолжается до тех пор, пока в каждом семействе не останется по одному слою, что соответствует отображению $f_{\max}$. Предложение 2 доказано.

З а м е ч а н и е. Пусть дан кубильяж многообразия Q^n, L – какой-либо его слой и $(Q^n)'$ – удвоение кубильяжа Q^n. Тогда

1) если L – простой двусторонний слой в Q^n, то срединное сечение $S(L)$ разрезает L на два слоя L_1 и L_2 в $(Q^n)'$, каждый из которых простой и двусторонний, причем семейство $\{L_1, L_2\}$ гомологично нулю по модулю 2;

2) если L – простой односторонний слой, то разрезание вдоль его срединного сечения $S(L)$ превращает его в единственный односторонний слой в $(Q^n)'$, гомологичный нулю по модулю 2.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть дано кубическое многообразие Q^n, все слои которого простые (но не обязательно двусторонние). Тогда удвоение $(Q^n)'$ данного кубильяжа Q^n отображается в кубическую решетку R^N_c, где N – число слоев кубильяжа Q^n.*

Доказательство предложения 3 следует из теоремы 4 с учетом только что высказанного замечания. При условии двусторонности каждого слоя это предложение было доказано в [11].

Заметим, что в действительности нам не нужно удваивать кубильяж по всем слоям, а следует произвести срединные сечения лишь слоев, не гомологичных нулю.

П р е д л о ж е н и е. 4. *Пусть дано простое n-мерное кубическое многообразие Q^n. Предположим, что у него имеется только n различных слоев. Тогда такой кубильяж (вообще говоря, не стандартный) отображается в кубическую решетку R^N_c.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что каждый слой из данных n слоев нашего кубильяжа проходит по всему кубильяжу Q^n, т.е. каждый n-мерный куб кубильяжа Q^n входит в этот слой. Далее заметим, что срединное сечение заданного слоя разрезает каждый n-мерный куб на две половины. Поскольку слой является простым, двусторонним и самокасаться может только по одноименному берегу, то мы получаем, что в каждой паре разрезанных половинок n-мерного куба одна половинка относится к одному берегу, а вторая половинка относится к другому берегу. Соберем все вместе половинки, относящиеся отдельно к одному берегу и отдельно относящиеся ко второму берегу. Получаем, что для данного слоя его срединное сечение разрезает все многообразие Q^n на две различные части, поскольку этот слой исчерпывает весь кубильяж Q^n. Таким образом, каждое срединное сечение гомологично нулю по модулю 2. Из этого следует, что выполняются условия теоремы 3 (при предположении нестандартности см. замечание к теореме 3). Следовательно, кубильяж Q^n согласно теореме 3 отображается в кубическую решетку R^N_c. Предложение 4 доказано.

З а м е ч а н и е. Предложение 4 является n-мерной версией утверждения о двух полосках [6, 9]. Установленное отображение не является вложением.

П р е д л о ж е н и е 5. *Если кубическое многообразие Q^n отображается в кубическую решетку некоторой размерности, то кубильяж Q^n состоит из четного числа n-мерных кубов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим цепочку n-мерных кубов данного n-мерного простого кубильяжа Q^n. Рассмотрим объединение некоторых n-мерных кубов кубильяжа Q^n, определяемых по следующему правилу: пусть задан произвольный n-мерный куб, зафиксируем на нем некоторую $(n - 1)$-мерную грань, которую обозначим через I^{n-1}. Так как Q^n – многообразие, то по $(n - 1)$-грани I^{n-1} однозначно примыкает к исходному кубу еще только один n-мерный куб. У второго куба однозначно определена $(n - 1)$-мерная грань, противоположная грани I^{n-1}. По этой противоположной грани прибавим третий куб, и т.д. Продолжим этот процесс, прибавляя n-мерные кубы друг к другу по противоположным $(n - 1)$-мерным граням до тех пор, пока этот процесс не остановится. Объединение получившихся n-мерных кубов называется *цепочкой*. В силу простоты кубильяжа Q^n всякая цепочка замкнется без предварительного повторного прохождения по уже пройденным кубам. По каждой из

2^{n-1} вершины $(n-1)$-мерной грани I^{n-1} будет определяться реберный путь, отвечающий данной цепочке. Докажем, что каждый из этих реберных путей замкнется в той же самой вершине исходной $(n-1)$-мерной грани I^{n-1} (в момент замыкания цепочки). В самом деле, предположим, что это не так, т.е. реберный путь, начинающийся в вершине A отмеченной $(n-1)$-мерной грани исходного куба I^n, закончится в вершине $B \neq A$, где B является вершиной той же самой отмеченной грани I^{n-1}, что и вершина A.

Легко видеть, что существуют (но определяемые, вообще говоря, не однозначно) две противоположные $(n-2)$-мерные грани куба I^{n-1}, содержащие соответственно вершину A и B. Обозначим их через $I^{n-2}(A)$ и $I^{n-2}(B)$. Рассмотрим ребро e куба I^{n-1}, перпендикулярное одновременно кубам $I^{n-2}(A)$ и $I^{n-2}(B)$. Обозначим через $L^n(e)$ отвечающий этому ребру слой кубильяжа Q^n. Рассмотрим срединное сечение слоя $L^n(e)$. Это срединное сечение разрезает весь слой $L^n(e)$ на две части. В силу двусторонности одна часть лежит по одну сторону этого срединного сечения, другая – по другую сторону. Следовательно, реберный путь AB не может переходить из одной части в другую, не пересекая срединного сечения. Полученное противоречие доказывает, что $A = B$.

По условию предложения 5 существует отображение $f: Q^n \to R_c^N$. Два куба из Q^n будем называть *параллельными*, если при отображении f они переходят в параллельные кубы (или в один и тот же куб) в решетке R_c^N. Множество n-мерных кубов кубильяжа Q^n распадается на *классы параллельности*. Докажем, что в каждом классе параллельности находится четное число n-мерных кубов. Действительно, рассмотрим какой-нибудь куб I^n. Проведем через I^n некоторую цепочку, однозначно определяемую выбором $(n-1)$-мерной грани I_0^{n-1} куба I^n. Рассмотрим реберный путь, соответствующий этой цепочке. Заметим два обстоятельства: во-первых, по построению каждому ребру-звену этого реберного пути отвечает один и только один n-мерный куб из рассматриваемой цепочки, и, во-вторых, все $(n-1)$-мерные грани кубов, входящих в данную цепочку, параллельны между собой. Поскольку в каждом замкнутом реберном пути параллельных ребер-звеньев четное число, то n-мерных кубов, параллельных между собой в цепочке, четное число.

Итак, рассматриваемая цепочка содержит из данного класса параллельных между собой кубов четное число кубов. Если не все кубы из данного класса входят в рассматриваемую цепочку, то через какой-нибудь из оставшихся кубов опять проводим цепочку, соответствующую грани $(I_0^{n-1})'$, которая параллельна грани I_0^{n-1}. Тогда эта цепочка не пересекается с первой цепочкой ни по одному n-мерному кубу. Если эти две цепочки опять не исчерпывают всех кубов из данного класса параллельности, то мы строим следующую цепочку и т.д.

Таким образом, каждый класс параллельных n-мерных кубов состоит из четного числа n-мерных кубов кубильяжа Q^n. Так как множество всех n-мерных кубов кубильяжа Q^n распадается на несколько непересекающихся классов параллельности, то всех n-мерных кубов в Q^n четное число. Предложение 5 доказано.

§ 5. Вложение кубического подразделения симплициального многообразия в решетку

Рассмотрим конечный симплициальный комплекс K. С ним связан канонически построенный по комплексу K кубический комплекс $Q = Q(K)$ (см. [17]).

Напомним определение канонического кубического комплекса $Q(K)$.

Произведем барицентрическое подразделение $B(K)$ комплекса K, а затем укрупним это подразделение следующим образом: все k-мерные барицентрические симплексы

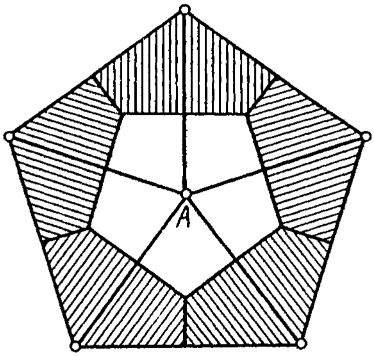

Рис. 1

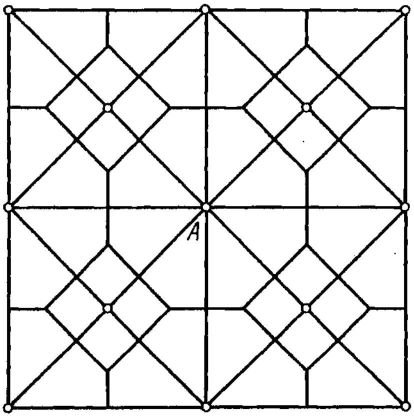

Рис. 2

любого k-мерного симплекса из K, примыкающие к какой-либо одной его вершине, объединим в новую k-мерную клетку, $k \leqslant n$. Заметим, что объединение происходит в пределах одного и того же симплекса комплекса K. Полученная k-мерная клетка комбинаторно изоморфна k-кубу. Рассмотрим клеточный комплекс, составленный из этих комбинаторных кубов. Легко видеть, что этот комплекс является каноническим кубическим комплексом $Q(K)$, однозначно отвечающим симплициальному комплексу K (см. [17]).

Вершину канонического кубического комплекса $Q(K)$, которая является вершиной симплициального комплекса K, будем называть *s-вершиной*. Возьмем s-вершину A и обозначим ее звезду в симплициальном комплексе K через $\mathrm{St}_K(A)$, а ее звезду в кубическом комплексе $Q(K)$ через $\mathrm{St}_Q(A)$ (см. рис. 1).

Пусть телом симплициального комплекса K является многообразие размерности n. Тогда структура канонического кубического многообразия $Q(K)$ обладает следующими двумя важными свойствами. Первое: каждый его слой является разностью звезд $\mathrm{St}_K(A)\setminus\mathrm{Int}(\mathrm{St}_Q(A))$, взятых в некоторой его s-вершине A, и, обратно, всякая такая разность является слоем. Второе: множество всех кубических звезд с центрами в s-вершинах комплекса $Q(K)$ образуют покрытие многообразия Q^n (см. рис. 2).

Таким образом, каждой s-вершине $A \in Q(K)$ соответствует слой $L(A) =$ $= \mathrm{St}_K(A)\setminus\mathrm{Int}(\mathrm{St}_Q(A))$, и каждый слой кубильяжа Q^n является таковым для некоторой вершины $A \in K$. Поэтому каждый слой $L(A)$ кубильяжа $Q^n(K)$ есть прямое произведение границы звезды $\mathrm{St}_K(A)$ на отрезок (см. рис. 1 и 2). Отсюда следует важное

З а м е ч а н и е. Каждый слой канонического кубильяжа $Q(K) = Q^n$ является простым, двусторонним и гомологичен нулю по модулю 2.

На основании теоремы 3 существует отображение

$$f : Q(K) \to R_c^N.$$

Z-модуль $\mathcal{F}$ имеет образующие $F_1, F_2, \ldots, F_N$, взаимно однозначно соответствующие слоям кубильяжа $Q(K)$. Так как множество слоев взаимно однозначно соответствует множеству s-вершин комплекса $Q(K)$, то число N слоев кубильяжа Q^n равно числу s-вершин в комплексе $Q(K)$.

Имеет место другой важный факт: возьмем s-вершину A и ее звезду $\mathrm{St}_Q(A)$. Так как каждому классу ребер или соответствующему слою отвечает своя образующая F_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, в модуле $\mathcal{F}$, то, в частности, всем ребрам звезды $\mathrm{St}_Q(A)$, выходящим из A, соответствуют разные образующие F_i модуля $\mathcal{F}$. Таким образом, отображение f переводит все m ребер, выходящих из вершины A, в m попарно перпендикулярных ребер, выходящих из $f(A)$, в кубической решетке R_c^N. Следовательно, ограничение отображения f на звезде $\mathrm{St}_Q(A)$ будет изоморфизмом.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть тело симплициального комплекса K есть многообразие. Тогда каноническое для K кубическое многообразие $Q^n = Q(K)$ вкладывается в кубическую решетку R_c^N, где N – число слоев кубильяжа Q^n или (что то же самое) число вершин исходного комплекса K.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку каждый слой кубильяжа Q^n гомологичен нулю по модулю 2, то согласно теореме 3 кубильяж Q^n отображается в кубическую решетку $f : Q^n \to R_c^N$.

Согласно теореме 2 достаточно доказать, что каждый незамкнутый реберный путь γ в кубильяже Q^n не нулевой в модуле $\mathcal{F} = \langle F_1, F_2, \ldots, F_N \rangle$. Докажем это.

Пусть γ – произвольный незамкнутый реберный путь в кубильяже Q^n, состоящий более чем из одного ребра, и пусть A', A'' – его концы. Поскольку звезды $\mathrm{St}_Q(A)$ кубического комплекса $Q(K)$, взятые в s-вершинах, покрывают многообразие Q_n, то можно предполагать, что A' есть вершина кубильяжа Q^n, принадлежащая (замкнутой) звезде $\mathrm{St}_Q(A)$ некоторой s-вершины A комплекса $Q(K)$ (см. рис. 2). Для второй вершины A'' имеются две возможности:

1) A'' не принадлежит замкнутой звезде $\mathrm{St}_Q(A)$;

2) A'' принадлежит замкнутой звезде $\mathrm{St}_Q(A)$.

Рассмотрим первый случай. Легко видеть, что у реберного пути $A'A''$ его концы A' и A'' лежат по разные стороны слоя $L(A) = \mathrm{St}_K(A) \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{St}_Q(A))$ (см. рис. 2). Следовательно, реберный путь $\gamma = A'A''$ пересекает слой $L(A)$ нечетное число раз, и соответствующий элемент $\Sigma_F(\gamma) \in \mathcal{F}$ не равен нулю из-за образующего, соответствующего слою $L(A)$.

Рассмотрим второй случай. Пусть оба конца реберного пути γ принадлежат звезде $\mathrm{St}_Q(A)$. Соединим точки A'' и A' ломаной γ', полностью лежащей в звезде $\mathrm{St}_Q(A)$. Выше было установлено, что звезда $\mathrm{St}_Q(A)$ при отображении f, существующем согласно теореме 3, изоморфно вкладывается в решетку R_c^N. Поэтому $\Sigma_F(\gamma') \neq 0$, а в то же время $\Sigma_F(\gamma \cup \gamma') = 0$. Следовательно, $\Sigma_F(\gamma) \neq 0$. Теорема 5 доказана.

З а м е ч а н и е. По существу сейчас было доказано, что для всякого симплициального многообразия размерности n его канонический кубильяж вкладывается в n-мерный остов одного N-мерного куба, где N – число s-вершин в триангуляции многообразия.

С л е д с т в и е 1. *Каждое симплициальное замкнутое многообразие комбинаторно эквивалентно некоторому решгточному многообразию.*

С л е д с т в и е 2. *Среди решеточных многообразий существуют несглаживаемые и даже не имеющие* PL-*структуры* (см. [12–15]).

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы авторами было замечено любопытное обстоятельство: каждое четномерное замкнутое симплициальное многообразие, вообще говоря, не комбинаторное, состоит из четного числа симплексов главной размерности. Потом оказалось, что это может быть очень легко доказано и в более общей ситуации.

П р е д л о ж е н и е 6. *Пусть задан n-мерный симплициальный комплекс K такой, что каждая его $(n-1)$-мерная грань инцидентна в точности двум n-мерным симплексам. Тогда если n четно, то комплекс K состоит из четного числа n-мерных симплексов.*

Заметим, что любое нечетномерное симплициальное многообразие имеет триангуляции как с четным числом симплексов, так и с нечетным.

В этой работе наряду с вопросами существования отображений и вложений кубильяжей в кубическую решетку затрагивался вопрос о единственности такого сорта отображений (см. следствие из предложения 1). Легко также показать, что если в отображаемом кубильяже Q^n каждый слой пересекается с любым другим его слоем, то отображение этого кубильяжа в решетку является единственным с точностью до движения в классе всех отображений кубильяжа Q^n в евклидово пространство $\mathbf{R}^N$, которые переводят каждый куб из Q^n в некоторый конгруэнтный ему куб из пространства $\mathbf{R}^N$.

Из нерешенных вопросов выделим следующую проблему:

Пусть в $\mathbf{R}^3$ вложен кубильяж замкнутой двумерной поверхности. Является ли этот вложенный полиэдр неизгибаемым в $\mathbf{R}^3$ при условии жесткости его квадратных граней?

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

1. *Новиков С.П.* Топология. I // Итоги Науки и Техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 12. М.: ВИНИТИ, 1986.
2. *Onsager L.* Crystal Statistics. I. Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition // Phys. Rev. 1944. V. 65. P. 117–149.
3. *Кас М., Ward J.C.* A Combinatorial Solution of the Two-Dimensional Ising Model // Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 1332–1337.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976.
5. *Фейнман Р.* Статистическая механика. М.: Мир, 1978.
6. *Долбилин Н.П., Штанько М.А., Штогрин М.И.* Кубические подкомплексы в правильных решетках // ДАН СССР. 1986. Т. 291, № 2. С. 277–279.
7. *Долбилин Н.П., Седракян А.Г., Штанько М.А., Штогрин М.И.* Топология семейства параметризаций двумерных циклов, возникающих в трехмерной модели Изинга // ДАН СССР. 1987. Т. 295, № 1. С. 19–23.
8. *Долбилин Н.П., Штанько М.А., Штогрин М.И.* Проблема параметризации циклов по модулю 2 в трехмерной кубической решетке // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, № 2. С. 355–377.
9. *Долбилин Н.П., Штанько М.А., Штогрин М.И.* Квадрильяжи и параметризации решеточных циклов: Сб. посв. 100-летию Б.Н. Делоне // Тр. МИАН. 1991. Т. 196. С. 66–85.
10. *Долбилин Н.П., Штанько М.А., Штогрин М.И.* Комбинаторные вопросы двумерной модели Изинга: Сб. посв. 100-летию Б.Н. Делоне // Тр. МИАН. 1991. Т. 196. С. 51–65.
11. *Каралашвили О.Р.* Об отображениях кубических многообразий в стандартную решетку евклидова пространства: Сб. посв. 100-летию Б.Н. Делоне // Тр. МИАН. 1991. Т. 196. С. 86–89.
12. *Siebenmann L.C.* Are nontriangulable manifolds triangulables?: Topology Manifolds. Chicago: Markham Publ. Comp., 1970. P. 77–84.

13. *Штанько М.А.* Основная гипотеза для полиэдров // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 774–778.
14. *Милнор Дж., Сташев Дж.* Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
15. *Hirsch M.W., Mazur B.* Smoothing of piecewise linear manifolds // Ann. of Math. Studies № 80. Princeton: Princeton Univ. Press, 1974.
16. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.
17. *Штанько М.А., Штогрин М.И.* О вложении кубических многообразий и комплексов в кубическую решетку // УМН. 1992. Т. 47, № 1(283). С. 219–220.

Поступило в редакцию
14.I.1993