

УДК 519.6;514.174.6

## ОТОБРАЖЕНИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОЖЕСТВ И ЕВКЛИДОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Г. Г. Рябов<sup>1</sup>, В. А. Серов<sup>1</sup>

Разработка дискретных моделей представления части пространства  $\mathbb{R}^3$ , не обладающей свойством выпуклости, и решения на этих моделях задач маршрутизации с метрикой, приближающейся к евклидовой, продолжает оставаться актуальной в областях робототехники, геоинформатики, компьютерного зрения и проектирования СБИС. В данной работе развивается решеточно-клеточная модель в терминах отображений целочисленных множеств  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbb{Z}^3$ ,  $\mathbb{Z}^4$  на себя, построения решеточного веера по заданной погрешности модельной метрики, декомпозиции эквидистантного графа и совместного применения решеточных и полиэдральных моделей в программном комплексе метрико-топологических построений.

**Введение.** Совмещенная решеточно-клеточная структура рассмотрена в [6, 8, 17, 20]. Пусть  $\mathbb{Z}^n$  — множество всех *целых точек*  $n$ -мерного евклидова пространства, т.е. точек с целочисленными координатами. Тогда решеточная часть этой структуры состоит из вершин в точках из  $\mathbb{Z}^2$  и  $\mathbb{Z}^3$  и множества *простых* (не имеющих внутренних целых точек) *ребер*-отрезков, инцидентных вершинам-целым точкам. Решеточная часть образует неориентированный граф, каждой вершине которого (кроме преград) соответствует *метрическая окрестность* на простых ребрах порядка  $k$ , где  $k$  — порядок последовательности Фарея  $\Phi(k)$  [4]. На этом графе, в котором каждому ребру поставлена в соответствие его евклидова длина (ребро взвешено евклидовой длиной), могут быть построены кратчайшие пути. Дуальная к ней клеточная структура служит для отображения преград и границ.

Для заданного источника (множества целых точек) процесс последовательной маркировки всех достижимых вершин числами, равными длине кратчайшего пути от этой вершины до источника, назовем *метрической волной*. Процесс завершается построением *эквидистантного графа* (поля) [20]. В этот граф входят все вершины, из которых достижим источник, и те ребра, по которым реализуются все кратчайшие пути до источника.

В настоящей статье рассматриваются:

- формирование метрической окрестности как *решеточного веера* на основе *отображений* (линейных преобразований) множеств  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbb{Z}^3$ ,  $\mathbb{Z}^4$  на себя;
- построение решеточного веера (*веерная триангуляция*) с числом ребер, близким к минимальному, при заданной *относительной погрешности* между длиной кратчайшего пути в эквидистантном графе и в евклидовой метрике;
- декомпозиция эквидистантного графа для допустимого *спрямления ступенчатых фрагментов* кратчайших путей;
- пример совместного метрико-топологического построения (синтеза) с использованием операций *топологического процессора*.

**2D-случай.** В [8, 17] при построении *метрической окрестности* MN для точки  $(0, 0)$  в секторе  $\{0, \pi/4\}$  простые ребра окрестности соответствуют правильным несократимым дробям (числитель — координата  $y$ , знаменатель — координата  $x$  вершины ребра, отличной от  $(0, 0)$ ) *последовательности Фарея*  $\Phi(k)$  порядка  $k$ . Полная *метрическая окрестность* MN( $k$ ) порядка  $k$  для  $(0, 0)$  образуется зеркальными отображениями построений в секторе  $\{0, \pi/4\}$  относительно прямых  $y = x$ ,  $x = 0$  и  $y = 0$  или зеркальным отображением относительно  $y = x$  и поворотами вокруг  $(0, 0)$ . Для любой точки из  $\mathbb{Z}^2$  такая метрическая окрестность формируется трансляцией из  $(0, 0)$ . Каждому ребру метрической окрестности приписан вес, равный его евклидовой длине. На дуальной клеточной структуре задаются границы и преграды, которые соответствуют дефектам в решеточной структуре. На такой структуре как на неориентированном графе со взвешенными ребрами решаются задачи маршрутизации с приближением к евклидовой метрике в зависимости от выбранного порядка  $k$  метрической окрестности [17].

<sup>1</sup> Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва, Ленинские горы; e-mail: gen-ryabov@yandex.ru, v\_serov@mail.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Пусть  $\mathbb{Z}^2\{\varphi_1, \varphi_2\}$  — множество всех целых точек в секторе  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ , где угол отсчитывается против часовой стрелки. Тогда процесс образования метрической окрестности около точки  $(0, 0)$  на основе последовательности  $\Phi(k)$  в секторе  $\{0, \pi/4\}$  можно связать с множеством отображений  $\mathbb{Z}^2\{0, \pi/2\}$  на себя.

Пусть  $b_i/a_i$  и  $b_{i+1}/a_{i+1}$  — соседние члены в  $\Phi(k)$  и  $A_i = \begin{pmatrix} b_i & b_{i+1} \\ a_i & a_{i+1} \end{pmatrix}$  является матрицей линейного преобразования, определитель которой по модулю равен 1, так как для любых соседних членов в  $\Phi(k)$   $|a_{i+1}b_i - a_ib_{i+1}| = 1$ . Тогда  $\tilde{\mathbb{Z}}^2\{\phi_i, \phi_{i+1}\} = A_i\tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi/2\}$  выполнено для  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , где  $n$  — число членов в  $\Phi(k)$  и  $\phi_i = \arctg(b_i/a_i)$ ,  $\phi_{i+1} = \arctg(b_{i+1}/a_{i+1})$ , или  $\tilde{\mathbb{Z}}^2\{b_i/a_i, b_{i+1}/a_{i+1}\} = A_i\tilde{\mathbb{Z}}^2\{0/1, 1/0\}$ .

Рассмотрим следующую последовательность преобразований:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi/2\} &= \tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi/4\}, & \tilde{\mathbb{Z}}^2\{\pi/4, \pi/2\} &= \text{Ref}\{\tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi/4\}/y=x\}, \\ \tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi/2\} &= \tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi/4\} \cup \tilde{\mathbb{Z}}^2\{\pi/4, \pi/2\}, & \tilde{\mathbb{Z}}^2\{\pi/2, \pi\} &= \text{Ref}\{\tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi/2\}/x=0\}, \\ \tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi\} &= \tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi/2\} \cup \tilde{\mathbb{Z}}^2\{\pi/2, \pi\}, & \tilde{\mathbb{Z}}^2\{\pi, 2\pi\} &= \text{Ref}\{\tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi\}/y=0\}, \end{aligned}$$

где  $\text{Ref}$  — зеркальное отображение сектора  $\tilde{\mathbb{Z}}^2\{\}$  относительно прямой, уравнение которой указано после косой черты.

Поскольку модуль определителя матрицы  $A_i$  равен 1, в каждом секторе  $\tilde{\mathbb{Z}}^2\{\}$  целые точки образуют решетку с соответствующим базисом и единичной площадью минимальной клетки-параллелограмма. Будем называть такое множество построенных смежных решеток *решеточным веером Фарея порядка  $k$*  и обозначать  $L\Phi k$ :  $L\Phi k(0, 0) = \tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi\} \cup \tilde{\mathbb{Z}}^2\{\pi, 2\pi\}$ . Решеточный веер для каждой целой точки  $(x, y)$  является трансляцией веера, построенного для точки  $(0, 0)$ :

$$L\Phi k(x, y) = \text{Trans}\{L\Phi k(0, 0)/(x, y)\}.$$

Вид  $L\Phi 3(0, 0)$  представлен на рис. 1.

Пусть  $P = \{0 < x < X, 0 < y < Y\}$  и каждой целой точке  $(x_i, y_i) \in P$  соответствует  $L\Phi k(x_i, y_i)$ . Тогда

$$\bigcup_{(x_i, y_i) \in P} L\Phi k(x_i, y_i) = L\Phi k(P), \quad (x_i, y_i) \in P,$$

образует граф “суперрешетку” с вершинами в целых точках на  $P$  и простыми ребрами из решеточных вееров. Каждому ребру приписан вес — его евклидова длина.

Отметим свойство “суперрешетки”. Кратчайший взвешенный путь между двумя целыми точками  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  целиком лежит в одном секторе  $\tilde{\mathbb{Z}}^2\{b_i/a_i, b_{i+1}/a_{i+1}\} \in L\Phi k$ , в котором лежит весь евклидов путь, и является, в общем случае, ступенчатой ломаной линией, длина которой при  $\lambda_1, \lambda_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}$  определяется равенством

$$r((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \lambda_1 \sqrt{a_i^2 + b_i^2} + \lambda_2 \sqrt{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}.$$

Обозначим евклидово расстояние  $r_e((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$ . Для каждого сектора  $\tilde{\mathbb{Z}}^2\{\} \in L\Phi k(x_0, y_0)$  определим максимальную относительную погрешность

$$\Delta_{\text{М сектора}}(\tilde{\mathbb{Z}}^2\{\}) = \max \left\{ \frac{r((x_0, y_0), (x_i, y_i)) - r_e((x_0, y_0), (x_i, y_i))}{r_e((x_0, y_0), (x_i, y_i))} \right\}$$

по всем целым точкам сектора. Тогда общая максимальная относительная погрешность  $\Delta_{\text{М}}$  по всем секторам равна  $\max\{\Delta_{\text{М сектора}}\}$ .

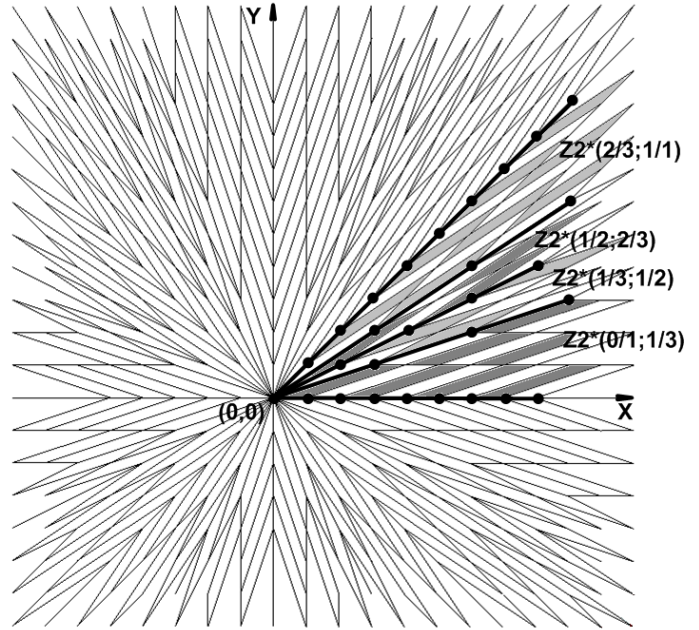


Рис. 1. Решеточный двумерный веер Фарея третьего порядка  $L\Phi 3(0, 0)$ . Структуры смежных решеток веера показаны в первом квадранте

При вычислении максимальной относительной погрешности для подмножества целых точек внутри одного сектора двумерного решеточного веера (рис. 2) на границах сектора возьмем две точки  $B$  и  $C$ , на некотором расстоянии  $R$  (в пределах решеточной структуры) до источника. Соединим их дугой окружности  $BDC$  и хордой  $BC$ . Тогда все точки, полученные в результате специальной операции интерполяции [17, 20] с радиусом  $R$  на ребрах эквидистантного графа внутри этого сектора, будут лежать на хорде  $BC$ , а погрешность определится как расстояние от соответствующей точки на хорде до дуги  $BDC$ .

В точках  $B$  и  $C$  погрешность равна нулю, так как на границах сектора расстояние, рассчитанное метрической волной, совпадает с евклидовым. Максимальная погрешность достигается в точке  $O$  — середине основания равнобедренного треугольника  $ABC$ . Максимальная относительная погрешность для полного веера принимается равной максимальной погрешности по всем секторам данного веера. Формулы для вычисления  $\Delta_m$  сектора приведены на рис. 2. Угол  $\phi$  вычисляется по известным координатам направляющих векторов границы сектора.

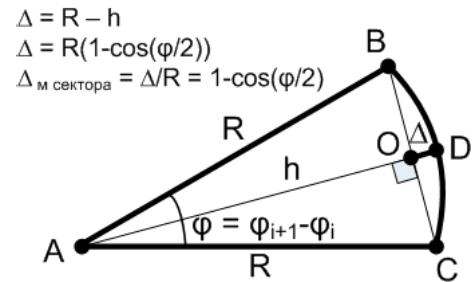


Рис. 2. Вычисление максимальной относительной погрешности для отдельного сектора двумерного решеточного веера

В связи с существенно различными углами секторов в решеточном веере существенно различаются и их относительные погрешности. Так, для любого решеточного веера Фарея максимальной будет  $\Delta_m$  сектора  $\tilde{\mathbb{Z}}^2\{0/1, 1/k\}$  и аналогичных секторов, граничащих с координатными осями. Например, для  $k = 10$ :  $\Delta_m$  сектора  $(\tilde{\mathbb{Z}}^2\{0/1, 1/10\}) = 0.001$ ,  $\Delta_m$  сектора  $(\tilde{\mathbb{Z}}^2\{1/10, 1/9\}) = 0.00001$ . С увеличением  $k$  число членов  $n(k)$  в последовательности  $\Phi(k)$  растет квадратично, согласно оценке Мертенса [4]:  $n(k) = 3k^2/\pi^2 + O(k \log k)$ .

Закключаем, что уменьшение относительных погрешностей связано с квадратичным увеличением  $k$  и, как следствие, значительным увеличением объема вычислений при решении задач маршрутизации [17]. Поэтому актуальна следующая задача.

Задана погрешность  $\Delta$ . Построить метрическую окрестность  $MN^*$ , содержащую наименьшее число ребер  $N^*$  и обеспечивающую при решении задач маршрутизации максимальную относительную погрешность  $\Delta_m$ , не превосходящую  $\Delta$ .

По существу, ставится вопрос о сокращении числа секторов в решеточном веере и, прежде всего, в  $\tilde{\mathbb{Z}}^2\{0, \pi/4\}$ , так как остальные части веера симметричны. Поэтому сначала сформулируем задачу в терминах требований к членам последовательности правильных несократимых дробей.

Пусть  $k$  — наименьшее целое число, при котором  $\Delta_m$  сектора  $(\tilde{\mathbb{Z}}^2\{0/1, 1/k\}) \leq \Delta$ . Тогда требуется построить такую последовательность  $\Phi^*(k) = \{a_i/b_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n^*$ , чтобы при минимальном  $n^*$  выполнялись следующие условия:

$$a_1/b_1 = 0/1; \quad a_2/b_2 = 1/k; \quad a_{n^*}/b_{n^*} = 1/1, \quad (1)$$

$$a_{i+1}b_i - a_ib_{i+1} = 1, \quad (2)$$

$$\arctg(b_{i+1}/a_{i+1}) - \arctg(b_i/a_i) \leq 1/k, \quad (3)$$

где  $i = 1, 2, \dots, (n^* - 1)$ . Возможны два варианта построения — прореживание последовательности  $\Phi(k)$  и итерационный способ построения  $\Phi^*(k)$ . Рассмотрим второй способ, который более конструктивен для 3D- и 4D-случаев.

На начальном шаге последовательность (так же, как и при генерации  $\Phi(k)$ ) состоит из  $0/1$  и  $1/1$ . На каждом последующем шаге вычисляются медиантные суммы соседних дробей (т.е. числитель новой дроби равен сумме числителей, а знаменатель — сумме знаменателей) и образовавшаяся дробь вставляется между этими дробями, если не выполняется условие (3), и отбрасывается, если оно выполнено. Процесс заканчивается, когда последовательность перестает пополняться новыми членами. Выполнение условия (2) происходит автоматически, в силу свойств  $\Phi(k)$ .

Легко видеть, что  $n(k) = n^*(k)$  для  $k \leq 2$ . Затем, с ростом  $k$ ,  $n^*(k) < n(k)$ .

Для оценки роста  $n^*(k)$  рассмотрим число дробей в  $\Phi^*(k)$ , у которых соседние дроби имеют знаменатель, меньший на 1, и обозначим их число через  $m(1)$ , меньший на 2 — через  $m(2)$ , меньший на  $i$  — через  $m(i)$ .

Из правила образования  $\Phi^*(k)$  следует:  $m(1) < 2k$ ,  $m(2) < 2k/4$ ,  $m(3) < 2k/9$ , ...,  $m(i) < 2k/i^2$ . Отсюда  $n^*(k) < 2k \sum 1/i^2 < 4k$ .

Таким образом, отсюда и из оценки Мертенса имеем  $n(k) = O(k^2)$ ,  $n^*(k) = O(k)$ . Для некоторых  $\Delta_M$  данные по числу ребер в  $MN(k)$  и  $MN^*(k)$  сведены в табл. 1.

Таблица 1

Данные по числу ребер в  $MN(k)$  и  $MN^*(k)$  для некоторых значений  $\Delta_M$  в двумерном случае

$k$	1	2	3	4	5	6	11	16	35	110
$\Delta_M(\%)$	7.612	2.76	1.29	0.75	0.49	0.34	0.1	0.05	0.01	0.001
$N(k)$	8	16	32	48	80	96	336	640	3072	29728
$N^*(k)$	8	16	24	40	48	64	136	224	592	2280

**3D-случай.** В трехмерном случае *простое ребро* с одной из вершин в  $(0,0,0)$  соответствует тройке целых чисел, не имеющих общего делителя больше 1. Это эквивалентно утверждению, что в такой тройке по крайней мере два числа взаимно просты. Множество простых ребер, у которых максимальный модуль координаты равен  $k$ , по аналогии с двумерным случаем будем обозначать  $\Phi(k)$  (рис. 3). Очевидно, что  $n(k) = O(k^3)$  и проблема оптимизации трехмерного решеточного веера и уменьшения числа простых ребер в  $MN(k)$  при заданной погрешности стоит еще более остро, чем для двумерного случая.

Аналогом итерационного процесса построения последовательностей несократимых дробей с условиями (1) для трехмерного случая будет процесс последовательного разбиения трехгранных структур следующего типа. Пусть  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$ ,  $(a_3, b_3, c_3)$  — координаты тройки простых ребер, для которых  $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1$ .

Матрица преобразования  $A$  является одной из матриц, которые образуют группу сохраняющих объем линейных преобразований и в которую входит симплектическая группа [5]. Все координаты ребер не отрицательны. Таким образом, ребра лежат в первом октанте, линейно независимы и определяют решетку с минимальной клеткой-параллелепипедом единичного объема. Ребро, равное векторной сумме двух ребер и заменившее одно из них в тройке, не меняет вышеприведенных условий, но трехгранный угол, образованный новой тройкой, будет строго меньше, чем у исходной тройки ребер. Следовательно, для целых точек в этом трехгранном секторе относительная погрешность между евклидовой метрикой и кратчайшим путем в решеточной структуре будет меньше. Для оценки максимальной относительной погрешности будем пользоваться упрощенным выражением  $\Delta_M \text{ сектора} = (1 - \cos(\phi/2))$ , где в качестве угла  $\phi$  берется максимальный из трех плоских углов при вершине трехгранного сектора. Тогда  $\Delta_M = \max \{\Delta_M \text{ сектора}\}$  по всем секторам.

Для наглядности в дальнейшем будем использовать проекцию простых ребер и граней между ними на единичную сферу, получая при этом триангулированное отображение трехмерного решеточного веера на единичной гауссовой сфере.

В качестве исходной тройки выберем ребра с координатами  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$  (рис. 4). Пусть по аналогии с двумерным случаем задана погрешность  $\Delta$ . Заметим, что  $\mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ , образующее множество всех целых точек внутри трехгранного сектора, составляет  $1/48$  часть  $\mathbb{Z}^3$ .

Отыскивается максимальная дуга — проекция грани (в нашем случае  $((0, 0, 1), (1, 1, 1))$ ), векторно складываются соответствующие ребра и получаются тройки  $((0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 2))$  и  $((1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 2))$ . Для каждой из этих троек (далее треугольников) определяется максимальная дуга-проекция

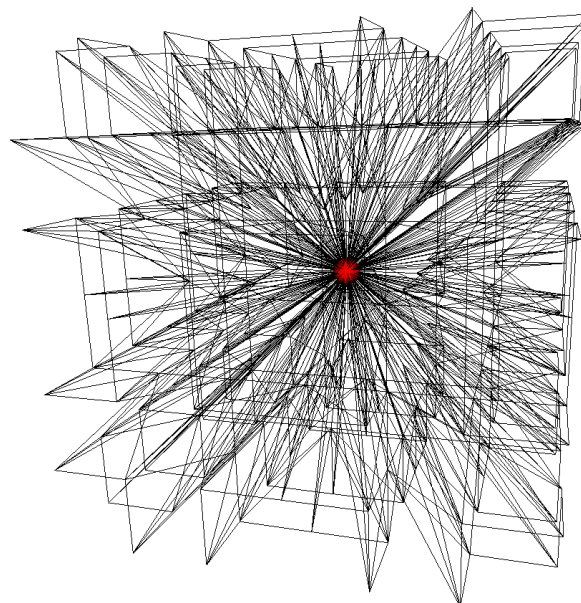


Рис. 3. Решеточный трехмерный веер Фарей третьего порядка

грани и выбирается треугольник с наибольшей дугой.

Если для этого треугольника выполнено неравенство  $\Delta_M$  сектора  $\leq \Delta$ , то деление этого треугольника прекращается и эта тройка заносится в окончательное множество секторов решеточного веера. Затем осуществляется переход к такой же операции над вторым треугольником. Если для первого треугольника  $\Delta_M$  сектора  $> \Delta$ , то эта дуга (в рассматриваемом случае дуга  $((0, 0, 1), (1, 0, 1))$ ) векторным сложением ребер с координатами  $(0, 0, 1)$  и  $(1, 0, 1)$  порождает вместо треугольника  $((0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 2))$  два новых:  $((0, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 2))$  и  $((1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 2))$ ; затем осуществляется переход ко второму треугольнику. Множество обрабатываемых треугольников на произвольном шаге (кроме первого) составляют треугольники, образованные делением на предыдущем шаге. Часть этих треугольников, для которых  $\Delta_M$  сектора  $\leq \Delta$ , пополнит множество троек решеточного веера, а другая часть ( $\Delta_M$  сектора  $> \Delta$ ) будет поделена и образует множество обрабатываемых треугольников следующего шага.

Остается показать, что этот процесс конечен. Это в рассматриваемом случае эквивалентно утверждению, что любой трехгранный угол с ребрами-лучами по простым ребрам с координатами  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$ ,  $(a_3, b_3, c_3)$ , для которых определитель  $|A| = 1$ , при последовательном разбиении граней с максимальным плоским углом методом векторного сложения соответствующих ребер, стремится к нулю. Это, в свою очередь, равносильно утверждению, что угол между двумя неколлинеарными ребрами при их соответствующем последовательном векторном суммировании стремится к нулю, что очевидно. Описанный выше процесс назовем *веерной триангуляцией*. На рис. 4 показана веерная триангуляция для  $\Delta_M = 0.001$  в  $1/48$  части сферы. По аналогии с медиантным сложением соседних дробей в  $\Phi(k)$  [4] и методами редукции из [10], представленный способ веерной триангуляции можно назвать *медиантной редукцией*.

Последовательные зеркальные отображения, аналогичные двумерному случаю, приводят к полному покрытию сферы, отображающему трехмерную метрическую окрестность и решеточный веер (рис. 5). Легко видеть при этом, что координатные оси являются осями симметрии восьмого порядка, диагонали в координатных плоскостях — четвертого порядка, а октантные диагонали — третьего порядка.

Аналогично двумерному случаю, приведем данные по числу ребер в  $MN(k)$  и  $MN^*(k)$  для некоторых  $\Delta_M$  (табл. 2). В таблице также приведено значение  $\Delta_p$  — максимальной относительной погрешности, рассчитанное непосредственно по всем узлам решеточной структуры после метрической волны для малых значений  $k$ . Близость значений  $\Delta_p$  и  $\Delta_M$  для окрестностей одного порядка говорит о правильности предложенного подхода расчета максимальной относительной погрешности. Методика генерации  $MN^*$  при заданном  $\Delta$  переносится и на более высокие размерности, где для  $nD$ -случая исходными точками будет множество  $\{(1, 0, 0, \dots, 0), (1, 1, 0, 0, \dots, 0), \dots, (1, 1, 1, \dots, 1)\}$ ,

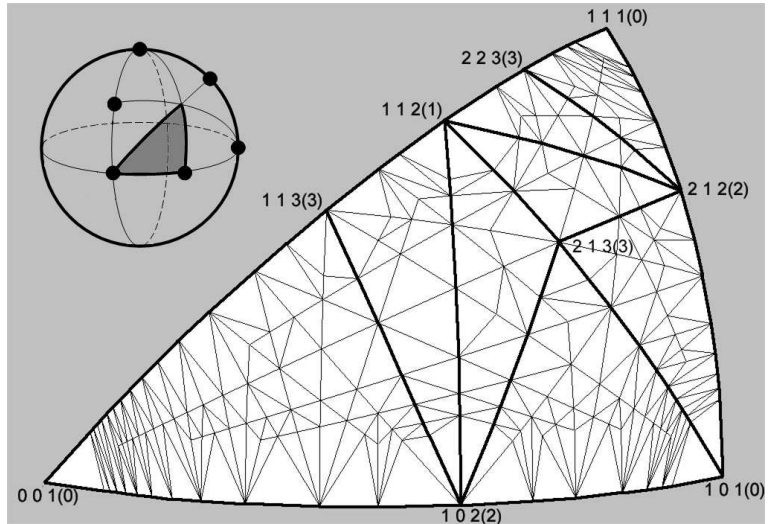


Рис. 4. Проекция вершин и граней трехмерного решеточного веера для точки  $(0, 0, 0)$  на единичную сферу внутри угла, определяемого гранями  $((0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1))$ ,  $((0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ ,  $((0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1))$  для  $\Delta_M = 0.001$ . Более толстыми линиями показаны первые шаги разбиений, а в скобках — номера шагов

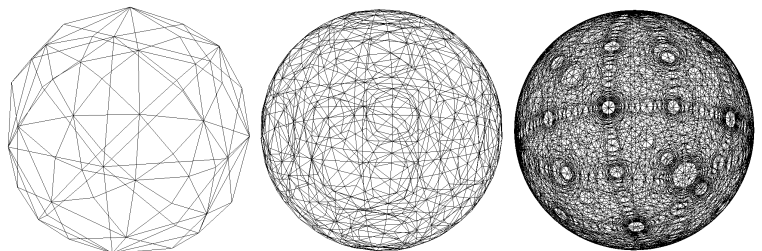


Рис. 5. Проекция на единичную сферу ребер и граней трехмерных окрестностей  $MN^*$  (веерная триангуляция) для  $\Delta_M = 0.1, 0.01, 0.001$ . Окрестности содержат 50, 626 и 7610 ребер соответственно

Таблица 2

Данные по числу ребер в  $MN(k)$  и  $MN^*(k)$  для некоторых значений  $\Delta_M$  в трехмерном случае

$k$	1	2	3	4	5	6	19	28	62
$\Delta_M$ (%)	11.19	4.7	2.41	1.44	1.17	0.78	0.1	0.05	0.01
$\Delta_P$ (%)	12.8	4.9	2.47	1.45	1.16	0.74			
$N(k)$	26	98	290	578	1154	1730	50114	152642	1623746
$N^*(k)$	26	74	194	266	530	722	7610	17042	97490

Таблица 3

Координаты ребер 1/48 части 3D-окрестности для  $\Delta_M = 0.01$

Координаты вершин 1/48 части окрестности			(3,1,3)			
			(2,2,3)	(3,2,4)		
			(2,1,3)	(3,1,4)		
	(1,1,1)	(2,1,2)	(2,0,3)	(2,1,4)	(3,1,5)	
	(1,0,1)	(1,1,2)	(1,1,3)	(1,1,4)	(2,1,5)	
	(0,0,1)	(1,0,2)	(1,0,3)	(1,0,4)	(1,1,5)	(2,1,6)
Модуль максимальной координаты	1	2	3	4	5	6

что составляет  $1/(2^n n!)$  часть  $n$ -мерной сферы. Так, для 4D-случая при заданных  $\Delta = 0.5, 0.1, 0.05$  проекции ребер и граней  $MN^*$  на 4D-единичную сферу (в пространстве  $\mathbb{R}^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ) представлены отображениями внутрь трехмерного единичного шара в подпространстве  $(x_1, x_2, x_3)$ . Ввиду симметричности результат совпадает и для подпространств  $(x_1, x_2, x_4)$ ,  $(x_1, x_3, x_4)$ ,  $(x_2, x_3, x_4)$  (рис. 6). Для практически важного  $\Delta_M = 0.01$  координаты ребер 1/48 части (3D) и 1/384 части (4D)  $MN^*$  с положительными значениями координат приведены в табл. 3 и 4.

**Минимизация эквидистантного графа.** Результатом операции маркировки вершин (метрической волны) является эквидистантный граф. Ребра этого графа не хранятся в явном виде, а могут быть восстановлены на основе информации о структуре метрической окрестности. Это позволяет избежать необходимости хранить большие объемы данных о связях внутри эквидистантного графа.

Теперь задача состоит в том, чтобы максимально оптимизировать полученный эквидистантный граф по критерию минимальности расстояния до источника. Для решения поставленной задачи множество допустимых ребер эквидистантного графа, определяемое метрической окрестностью, расширяется за счет всех возможных ребер с вершинами в целых точках.

Алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе производится отбор всех вершин, которые можно “напрямую” соединить с источником (источниками). Для этого осуществляется перебор с проверкой на пересечение ребра от вершины до источника с преградами. Если пересечения нет, то все пути от данной вершины до источника заменяются на это ребро. На рис. 7 такого рода вершина отмечена символом (1). Подобный отбор позволяет обработать значительную долю вершин и в дальнейшем их не рассматривать.

На втором этапе рассматриваются все оставшиеся точки. Для каждой из них на основе информации

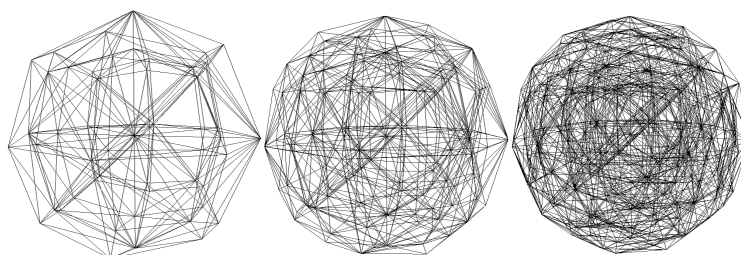


Рис. 6. Двойное гауссово отображение для ребер и граней четырехмерных  $MN^*$ -окрестностей (всереженная тетраэдризация) для  $\Delta_M = 0.5, 0.1, 0.05$ . Сначала проекция в  $\mathbb{R}^4$  на 4D-единичную сферу, затем в подпространство  $(x_1, x_2, x_3)$

Таблица 4

Координаты ребер 1/384 части 4D-окрестности для  $\Delta_M = 0.01$ 

Координаты вершин 1/384 части окрестности				(2,3,3,4)				
				(2,2,3,4)				
			(2,2,3,3)	(1,2,3,4)				
			(2,2,2,3)	(1,2,2,4)				
			(1,1,1,3)	(1,3,3,4)	(1,2,4,5)			
			(1,2,3,3)	(1,1,2,4)	(1,1,4,5)			
			(1,2,2,3)	(1,2,4,4)	(1,2,3,5)			
			(1,1,3,3)	(1,1,3,4)	(0,1,3,5)			
			(1,1,2,3)	(1,1,4,4)	(1,1,2,5)	(1,1,3,6)		
		(1,2,2,2)	(0,2,2,3)	(1,1,1,4)	(1,1,3,5)	(1,2,3,6)		
		(1,1,2,2)	(0,1,3,3)	(0,0,1,4)	(1,3,4,5)	(1,1,4,6)		
	(1,1,1,1)	(0,1,2,2)	(0,1,2,3)	(0,1,1,4)	(1,2,2,5)	(1,2,2,6)		
	(0,1,1,1)	(1,1,1,2)	(0,1,1,3)	(0,1,3,4)	(0,1,2,5)	(1,1,2,6)	(1,2,4,7)	
	(0,0,1,1)	(0,1,1,2)	(0,0,2,3)	(0,2,3,4)	(1,1,1,5)	(1,1,1,6)	(1,1,2,7)	
	(0,0,0,1)	(0,0,1,2)	(0,0,1,3)	(0,1,2,4)	(0,1,1,5)	(0,1,2,6)	(1,2,3,7)	(1,1,2,8)
Модуль максимальной координаты	1	2	3	4	5	6	7	8

о структуре окрестности постепенно восстанавливаются все пути до источника. По мере восстановления каждого пути производится операция замены пары ребер на более короткое ребро (на основе неравенства треугольника) при условии, что оно не пересекает преграду. Сначала заменяются первое и второе ребра, затем новое, полученное ребро и третье, и так далее. Обработка отдельного пути заканчивается, если операция замены на новое ребро невозможна. При такой последовательности действий достаточно хранить только результирующие ребра. Все возможные пути от точки как бы спрямляются до столкновения результирующего ребра с преградой.

В итоге все оставшиеся после первого этапа точки будут напрямую соединены либо с точками, обозначенными символом (1), либо с точками, обозначенными (2), — точка (3), или сами будут являться точками (2), которые можно условно назвать промежуточными источниками. В процессе работы алгоритма информация о полной структуре исходного эквидистантного графа не хранится, а происходит лишь частичное ее восстановление и обработка. Пути от всех точек стягиваются или к промежуточным источникам, или сразу к источнику.

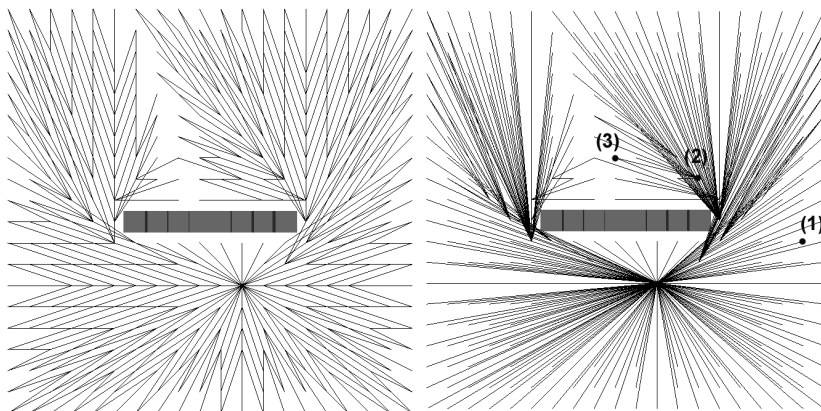


Рис. 7. Результат минимизации двумерного эквидистантного графа: слева — эквидистантный граф, полученный метрической волной с окрестностью третьего порядка, справа — результат минимизации (спрямления путей) этого графа

Полную картину преобразований алгоритма минимизации можно видеть на рис. 7.

На рис. 8 представлен результат работы алгоритма минимизации трехмерного эквидистантного графа, полученного метрической волной с окрестностью третьего порядка. Преграда имеет форму прямоугольной площадки, источник помещен непосредственно под ней. Для наглядности изображен не весь граф, а лишь его часть, находящаяся внутри конуса с вершиной в источнике и осью, направленной от источника к углу площадки-преграды.

Задача интерполяции на ребрах минимизированного эквидистантного графа подобна задаче интерполяции на исходном эквидистантном графе [17, 20].

В табл. 5 показано, насколько в среднем уменьшается длина кратчайшего пути в процентном соотношении при подобных преобразованиях трехмерного эквидистантного графа. Расчеты были сделаны для метрических окрестностей разного порядка. За сто процентов принято расстояние, полученное после маркировки вершин, т.е. после операции метрической волны. Данные рассчитывались на решеточной структуре без преград, так как ситуация с преградами, как было показано выше, аналогична наличию нескольких источников в структуре.

**О комплексном подходе к решению прикладных задач.** Анализ объектов и явлений сложной структуры связан в настоящее время с привлечением в информационные технологии глубоких и общих понятий и результатов математики. Важное место здесь занимают комбинаторные топология и геометрия [1, 2], геометрия чисел [3, 4], симплектическая геометрия [5], которые еще не получили столь же эффективной компьютерной реализации, как линейная алгебра, дифференциальные уравнения, теория графов. Особую актуальность приобретают задачи генерации образов и объектов, где их метрические свойства и свойства их частей могут задаваться числовыми параметрами с учетом обхода преград (невыполнение условия выпуклости). Это приводит к моделям приближения к евклидовой метрике на решеточных структурах.

С другой стороны, операции с симплицальными комплексами на *симплексах с вершинами в целых точках и простыми ребрами*, как показано в [20, 21], могут быть основой процессора, ориентированного на генерацию, хранение и преобразования объектов с контролем за сохранением или контролируемым изменением топологических инвариантов (*топологический процессор*). Симплициально-комплексный подход дает возможность твердо опираться на фундаментальные результаты П. С. Александрова и Л. С. Понтрягина [1, 2].

Таким образом, целочисленная решетка и множества простых ребер могут служить интегрирующим звеном в метрико-топологических построениях. Близкие подходы развиваются в работах [9 – 16].

В ряде работ (большинство из математической морфологии) такие построения прежде всего связаны со скелетонированием образа (сжатие) или с наращиванием скелета для создания будущего образа. Направление и количество таких преобразований определяют те или иные функционалы, зависящие от метрики, определяемой, чаще всего, в условиях или выпуклого пространства, или ограничений на форму преград, или специальных “коридоров” [15, 18, 19, 26, 29].

В качестве этюдного примера рассмотрим следующую задачу, где существенно невыполнение условия выпуклости. На трехмерной решетке целых точек  $(X \times Y \times Z)$  задано множество преград. Задана точка  $(x_0, y_0, z_0)$  как центр шара, определяемого как множество точек, кратчайшие расстояния (не пересекающие преграды) от которых до центра меньше или равны некоторой постоянной величине с заданной точностью  $\Delta$ . При этом требуется построить триангулированную поверхность этого шара, когда она

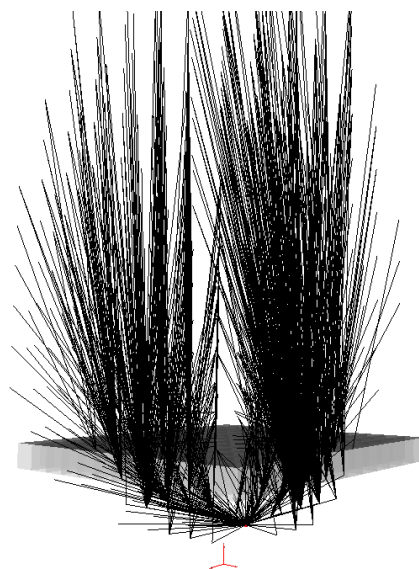


Рис. 8. Результат работы алгоритма минимизации трехмерного эквидистантного графа

Таблица 5

Зависимость среднего уменьшения длины кратчайшего пути от порядка окрестности  $k$  при операции минимизации трехмерного эквидистантного графа

$k$	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{N} \sum (L - L_e)/L$ (%)	7.5	1.9	0.7	0.4	0.2	0.1



представляет собой замкнутое двумерное многообразие без вкрапления в нее преград.

В самом общем виде схему решения такой задачи в макрооперациях топологического процессора по этапам можно представить следующим образом.

1. *Генерация метрической окрестности* с заданной точностью методом верной триангуляции.

2. *Построение эквидистантного графа* для  $(x_0, y_0, z_0)$  с учетом преград методами метрической волны. Каждая целая точка помечена кратчайшим путем до центра будущего шара.

3. *Выбор и покрытие множества*

$$\{0 < x < X, 0 < y < Y, 0 < z < Z\}$$

целочисленными полиэдрами как симплицияльными комплексами-окрестностями методами, изложенными в [20, 21].

4. *Сжатие* (без склеек и разрывов) трехмерного многообразия от границ последовательными слоями, определяемыми метрической маркировкой эквидистантного графа, до встречи с преградой в очередном слое-кандидате на сжатие [6, 20].

5. Выделение двумерного многообразия — *триангулированной границы* как “остатка” трехмерного многообразия. Оно и является одним из искомым построений.

6. Перевод данных в формат языка VRML для последующего анализа и хранения результатов [27].

Заметим, что на этапе 4 можно применить и оператор расширения (от точки  $(x_0, y_0, z_0)$ ) в случае поиска шара с минимальным радиусом.

На рис. 9 представлена одна из поверхностей такого рода для  $X = 50, Y = 50, Z = 50; x_0 = 21, y_0 = 18, z_0 = 21$ . Преграды представляют собой параллелепипеды. Времена выполнения этапов на компьютере с процессором Intel CeleronD 2.66 GHz и 512 MB RAM составляют: первый этап (генерация окрестности) — 0.001 сек., второй этап (эквидистантный граф) — 33 сек., третий-четвертый этапы (топология) — 60 сек., пятый этап (триангулированная граница) — 29 сек., шестой этап (VRML) — 1 сек.

Ведущиеся работы по перенесению инструментального комплекса, рассмотренного в [28], на кластерную суперЭВМ НИВЦ МГУ с 160 процессорами ([www.parallel.ru](http://www.parallel.ru)) позволяют, учитывая степень распараллеливаемости [20], оценить время решения подобных задач на решетке  $1000 \times 1000 \times 1000$  в диапазоне нескольких минут.

**Заключение.** Методы и алгоритмы оперирования с симплицияльными и клеточными комплексами, их отображениями и преобразованиями становятся неотъемлемой частью в решении самых актуальных задач, решаемых на высокопроизводительных вычислительных системах [21–25]. Развитие вышеизложенных методов и доведение инструментальных программ до уровня решения метрико-топологических построений для 4D-, 5D- и 6D-измерений с учетом широкого использования симметрий в многомерных случаях и тенденций развития суперЭВМ является вполне реальной задачей. Так, при решетке  $100^6$  (10 TB оперативной памяти) для 6D-случая прогон топологической волны по всей решетке потребует  $10^{15} - 10^{16}$  операций, что приемлемо для современных мощных вычислительных систем. Однако даже фрагментарная визуализация многомерных объектов, скорее всего реализуемая через полиэкранное отображение трехмерных проекций и сечений, потребует разработки методов “многомерного компьютерного зрения”. Ускорению в развитии этого направления значительно помогло бы появление специализированного топологического процессора, по своему духу аналогичного спецпроцессорам преобразования Фурье и видеокартам.

Авторы приносят глубокую благодарность за поддержку и обсуждение результатов работы академикам РАН Е. П. Велихову, Д. В. Аносову, В. В. Воеводину и В. П. Маслову, членам-корреспондентам РАН Л. Н. Королеву, В. П. Иванникову и Вл. В. Воеводину, профессорам А. В. Тихонравову, Д. Д. Соколову, Г. И. Рузайкину и А. Н. Томилину.

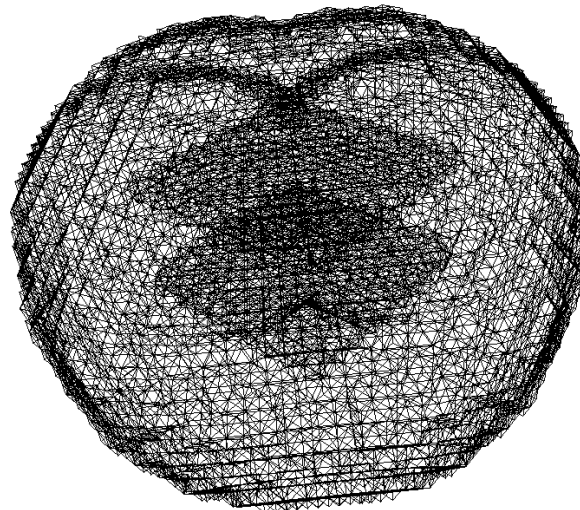


Рис. 9. Триангулированная сфера (“яблоко”) на решетке  $50 \times 50 \times 50$  с центром в точке  $(21, 18, 21)$  и с преградами-параллелепипедами под и над центром,  $\Delta=0.02$ . Триангуляция представлена как граница трехмерного многообразия, покрывающего всю внутренность “яблока”. Графическое воспроизведение внутренней привело бы к полному зачернению образа и поэтому не показано

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С. Комбинаторная топология. М.: Гостехиздат, 1947.
2. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. М.: Наука, 1974.
3. Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
4. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.
5. Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. Симплектическая геометрия. М.: ВИНТИ, 2000.
6. Рябов Г.Г. Дискретные конечные множества и их преобразования. М.: Изд-во ИТМ и ВТ, 1969.
7. Kovalevsky V.A. Finite topology as applied to image analysis // Computer Vision, Graphics, and Image Processing. 1989. **46**. 141–161.
8. Рябов Г.Г. Модели коммутационных свойств конструкций ЭВМ. М.: Изд-во ИТМ и ВТ, 1989.
9. Kovalevsky V.A. Finite topology and image analysis // Advances in Electronics and Electron Physics. 1992. **84**. 197–259.
10. Hamann B. A data reduction scheme for triangulated surfaces // Computer Aided Geometric Design. 1994. **11**, N 2. 197–214.
11. Couprie M., Bertrand G. Simplicity surfaces: a new definition of surfaces in  $Z^3$  // Proc. of SPIE (Vision Geometry VII). San Diego, 1998. **3454**. 40–51.
12. Kenmochi Y., Klette R. Surface area estimation for digitized regular solids // Proc. of SPIE (Vision Geometry IX). San Diego, 2000. **4117**. 100–111.
13. Vittone J., Chassery J. Recognition of digital naive planes and polyhedrization // Proc. of the 9th International Conference Discrete Geometry for Computer Imagery. Uppsala, 2000. **1953**. 296–308.
14. Kenmochi Y., Imiya A. Discrete polyhedrization of a lattice point set // Lecture Notes in Computer Science. Berlin–Heidelberg: Springer, 2001. **2243**. 148–160.
15. Strand R., Borgefors G. Weighted distance transforms for volume images digitized in elongated voxel grids // Pattern Recognition Letters. 2004. **25**, N 5. 571–580.
16. Klette R., Pan M. 3D topological thinning by identifying non-simple voxels // Lecture Notes in Computer Science. Berlin–Heidelberg: Springer, 2004. **3322**. 164–175.
17. Рябов Г.Г. Маршрутизация на решетчато-клеточных структурах // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 1. 107–117.
18. Shuh E.Y., Wu Y.T. Three dimensional euclidean distance transformation and its application to shortest path planning // Pattern Recognition. 2004. **37**, N 1. 79–92.
19. Sitorn J.M., Borgefors G. Distance transforms for three-dimensional grids with non-cubic voxels // Computer Vision and Image Understanding. 2005. **100**, N 3. 294–311.
20. Рябов Г.Г. Метрические и топологические волны на решетках. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005.
21. Рябов Г.Г. Алгоритмические основы топологического процессора // Методы и средства обработки информации. Труды второй Всероссийской научной конференции. М.: Издательский отдел факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2005. 53–58.
22. Desbrun M., Kanso E., Tong Y. Discrete differential forms for computational modeling // Proc. of ACM SIGGRAPH. Boston, 2006. 39–54.
23. Alliez P., Cohen-Steiner D., Yvinec M., Desbrun M. Variational tetrahedral meshing // ACM Transactions on Graphics. 2005. **24**, N 3. 617–625.
24. Боровиков С.Н. Построение нерегулярных треугольных сеток на криволинейных гранях на основе триангуляции Делоне // Математическое моделирование. 2005. **17**, № 8. 31–35.
25. Четверушкин Б.Н., Гасилов В.А., Поляков С.В., Карташева Е.Л., Якобовский М.В. Пакет прикладных программ GIMM для решения задач гидродинамики на многопроцессорных вычислительных системах // Математическое моделирование. 2005. **17**, № 6. 58–74.
26. Klette R., Li F. Shortest paths in a cuboidal world // Lecture Notes in Computer Science. Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. **4040**. 415–429.
27. Аврамова О.Д. Язык VRML. Практическое руководство. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002.
28. Рябов Г.Г., Серов В.А. Среда для комплекса программ обработки воксельных структур // Информационные технологии. 2006. **№ 7**. 22–26.
29. Shouten T.E., Kuppens H.C., van den Broek E.L. Timed fast exact euclidean distance (tFEED) maps // Proc. of SPIE (Real-time imaging IX). San Jose, 2005. **5671**. 52–63.

Поступила в редакцию  
04.12.2006