Analiza Matematyczna 2

Tomasz Janiszewski

8 czerwca 2014

Spis treści

1 Całka Riemanna

Definicja 1 (Ciąg normalny podziałów). Ciąg podziałów $(\pi(n))$ nazywamy normalnym, jeśli $\delta(\pi(n)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Definicja 2 (Sumy całkowe).

Dolna suma całkowa:	$s_n = s_n(\pi_n) = \sum\limits_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$	$m_i^{(n)} = \inf(f(x))$	$x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$
Górna suma całkowa:	$S_n = S_n(\pi_n) = \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$	$M_i^{(n)} = \sup(f(x))$	$x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$
Suma całkowa Riemanna:	$\sigma_n = \sigma_n(\pi_n) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$		$\xi \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$

Definicja 3 (Funkcja całkowalna w sensie Riemanna).
Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b] \Leftrightarrow$ istnieje $\sigma \in \mathbb{R}$ taka,że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów (π_n) oraz dla dowolnego wartościowania tego ciągu (ω_n) mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(\pi_n, \omega_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$, to σ nazywamy całką Riemanna funkcji f na $[a,b]$ i oznaczamy $\int\limits_a^b (f(x)dx$

Twierdzenie 1. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ograniczona) jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b] \Leftrightarrow s = S$*

Twierdzenie 2. *Każda funkcja monotoniczna i ograniczona na $[a,b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$*

Twierdzenie 3. *Każda funkcja ciągła na $[a,b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$*

1.1 Własności całki Riemanna

1. $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ jest zbiorem skończonym $\Rightarrow$ f jest całkowalna na $[a,b] \Leftrightarrow$ g jest całkowalna na $[a,b]$. W przypadku całkowalności $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$
2. $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$
3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ całkowalna na $[a,b] \Rightarrow$ f jest całkowalna na każdym pod przedziale $[a,b]$
4. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in [a,b]$, f jest całkowalna na $[a,c]$ oraz $[c,b] \Rightarrow$ f jest całkowalna na $[a,b]$ oraz $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$
5. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ całkowalna na $[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$
6. $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ całkowalne na $[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$
7. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ całkowalna na $[a,b] \Rightarrow |f|$ też jest całkowalna na $[a,b]$ oraz $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$
8. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ całkowalna na $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \cdot (b-a)$
9. Podstawowy wzór rachunku całkowego
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcja ciągła, $\phi(x)$ — dowolna funkcja pierwotna dla $f(x)$, to znaczy $\phi'(x) = f(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$

10. Całkowanie przez podstawienie
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, funkcja ciągła, $g : [a,b] \to \mathbb{R},\ g \in C^1([a,b])$
$\alpha = g(a),\ \beta = g(b)$
$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(t)dt,$ gdzie $t = g(x)$

Dowód.
Niech $\phi(x)$ będzie funkcją pierwotną dla $f(x)$, to znaczy $\phi'(x) = f(x),\ P = \int\limits_\alpha^\beta f(t)dt = \phi(\beta) - \phi(\alpha)$
$[\phi(g(x))]' = \phi'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) \Rightarrow \phi(g(x))$ to funkcja pierwotna funkcji $f(g(x))g'(x)$
$L = \int\limits_a^b f(g(x))g'(x)dx = \phi(g(b)) - \phi(g(a)) = \phi(\beta) - \phi(\alpha)$
$L = P$ □

11. Całkowanie przez części
$u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ — funkcje klasy C^1
$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx$

Dowód.
$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\int\limits_a^b [u(x)v(x)]'dx = \int\limits_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx + \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx \quad (*)$
$u(x)v(x)$ to funkcja pierwotna $[u(x)v(x)]'$
$\int\limits_a^b [u(x)v(x)]'dxu(b)v(b) - u(a)v(a) = [u(x)v(x)]_a^b \quad (**)$
$(*) : (**) \Rightarrow [u(x)v(x)]_a^b = \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx + \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx$
$\int\limits_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx$ □

12. Twierdzenie o wartości średniej rachunku całkowego $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ — funkcje ciągłe, g jest nieujemna (niedodatnia)
$\exists \xi \in [a,b] \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx$

1.2 Całki niewłaściwe

Definicja 4 (Całka niewłaściwa I rodzaju).
$f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ całkowalna na $[\alpha, \beta]$ $\forall \beta > \alpha$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{\beta \to \infty} \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx \Rightarrow$ granicę tę nazywamy całka niewłaściwą pierwszego rodzaju i oznaczamy $\int\limits_\alpha^\infty f(x)dx := \lim\limits_{\beta \to \infty} \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx$
Ponadto jeśli granica ta istnieje i jest skończona to całkę niewłaściwą nazywamy zbieżną. Natomiast w pozostałych przypadkach całkę niewłaściwą nazywamy rozbieżną.

Definicja 5 (Całka niewłaściwa II rodzaju).
$f : [a, b) \to \mathbb{R}$ całkowalna na $[\alpha, \beta]$ $\quad \forall a < \beta < b$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{\beta \to b^-} \int\limits_a^\beta f(x)dx \Rightarrow$ granicę tę nazywamy całka niewłaściwą drugiego rodzaju i oznaczamy $\int\limits_a^b f(x)dx := \lim\limits_{\beta \to b^-} \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx$
Ponadto jeśli granica ta istnieje i jest skończona to całkę niewłaściwą nazywamy zbieżną. Natomiast w pozostałych przypadkach całkę niewłaściwą nazywamy rozbieżną.

1.3 Kryteria zbieżności

Twierdzenie 4 (Kryterium porównawcze).
$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ całkowalna na $[\alpha, \beta]$ $\quad \forall a < \beta < b$ oraz $\forall x \in [a, b)$ $\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ Wtedy:

- *$\int_a^b g(x)dx$ jest zbieżna $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ też jest zbieżna*

- *$\int_a^b f(x)dx$ jest rozbieżna $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ też jest rozbieżna*

Twierdzenie 5. *$f : [a, b) \to \mathbb{R}$ całkowalna na $[\alpha, \beta]$ $\quad \forall a < \beta < b$ oraz $\int_a^b |f(x)|dx$ jest zbieżna, to $\int_a^b f(x)dx$ też jest zbieżna. Mówimy wtedy, że jest zbieżna bezwzględnie.*

1.4 Zastosowania geometryczne całki Riemanna

Twierdzenie 6 (Pole zbioru płaskiego).

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcja nieujemna i ciągła, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b[, y \in [0, f(x)]$ pole $D = |D| = \int_a^b f(x)dx$

Twierdzenie 7 (Długość łuku).
Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – funkcja klasy C^1. Wówczas długość łuku opisanego równaniem $y = f(x), x \in [a, b]$ dana jest wzorem $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

Twierdzenie 8 (Objętość bryły).
Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – funkcja klasy C^1 oraz V oznacza bryłę powstałą poprzez obrót dookoła osi OX krzywej $y = f(x), x \in [a, b]$. Wówczas objętość V dana jest wzorem $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

2 Szeregi liczbowe

Definicja 6 (sumy szeregu liczbowego).
Jeśli istnieje skończona lub nie $\lim_{n\to\infty} S_n$, to nazywamy ją sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$.
Jeśli $\lim_{n\to\infty} S_n$ jest skończona, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym; w pozostałych przypadkach (to znaczy gdy granica jest nieskończona lub nie istnieje) szereg ten nazywamy rozbieżnym

Twierdzenie 9 (Warunek konieczny zbieżności szeregu).
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny* $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dowód. Zakładamy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Rightarrow (S_n)$ jest zbieżny; oznaczamy $S_n \xrightarrow{n\to\infty} S$
$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} S - S = 0$ □

Przykład 1 (Powyższy warunek nie jest warunkiem dostatecznym).
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *nie jest zbieżny, mimo że* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Twierdzenie 10 (Warunek Cauch'ego zbieżności szeregu).
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny* $\Leftrightarrow$ *spełnia warunek Cauch'ego, to znaczy*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > n > N \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

Twierdzenie 11 (O mnożeniu szeregu przez stałą).
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *wówczas szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *jest zbieżny i* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Twierdzenie 12 (O dodawaniu i odejmowaniu szeregów).
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są zbieżne wówczas szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$

2.1 Kryteria zbieżności szeregów

Twierdzenie 13 (Kryterium porównawcze).
$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, *wówczas*

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny*
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny*

Twierdzenie 14 (Kryterium d'Alemberta).
Niech $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$ *i istnieje granica* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, *wówczas*

- $g < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$
- $g > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$
- $g = 1 \Rightarrow ?$

Twierdzenie 15 (Kryterium Cauch'ego).
Niech $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geqslant 0$ *i oznaczamy* $g = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, *wówczas*

- $g < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

- $g > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

- $g = 1 \Rightarrow ?$

Twierdzenie 16 (Kryterium całkowe zbieżności szeregu)**.**
$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ funkcja nieujemna i nierosnąca. Wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny $\Leftrightarrow \int\limits_{n=1}^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

Twierdzenie 17 (Kryterium Dirichleta)**.**

$$\left.\begin{array}{l} (a_n) \text{ to ciąg nierosnący i taki że } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ (b_n) \text{ to ciąg taki że ciąg sum częściowych jest ograniczony } ^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ jest zbieżny}$$

Twierdzenie 18 (Kryterium Leibniza)**.**
(a_n) to ciąg nierosnący i taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1} = a - 1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ jest zbieżny

Dowód. Niech $b_n = (-1)^{n+1}$, wówczas $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \begin{cases} 1 & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \;\; 0 \leqslant b_1 + b_2 + \dots + b_n \leqslant 1$
to znaczy ciąg $(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ jest ograniczony. Są spełnione założenia kryterium Dirichleta $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}$ jest zbieżny. □

Definicja 7. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Definicja 8. Szereg który jest zbieżny ale nie jest zbieżny bezwzględnie nazywamy zbieżnym warunkowo.

Twierdzenie 19. *Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie $\Rightarrow$ Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i $|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$*

---

[1] to znaczy $\exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_1 + b_2 + \ldots b_n| \leqslant M$

3 Ciągi i szeregi funkcyjne

3.1 Ciągi funkcyjne

Definicja 9 (Punktowej zbieżności).
Mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny do funkcji f (punktowo)

$$\Leftrightarrow \forall x \in A \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{f_n(x)}_{\text{ciąg liczbowy}} = \underbrace{f(x)}_{\text{liczba}} \Leftrightarrow \forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N = N(\varepsilon, x)\ \forall n \geqslant N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

, oznaczamy $f_n \to f$

Definicja 10 (Jednostajnej zbieżności).
Mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny do funkcji f (jednostajnie)

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N = N(\varepsilon, x)\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

, oznaczamy $f_n \rightrightarrows f$

Twierdzenie 20 (Warunek równoważny zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego).
$f, f_n : A \to \mathbb{R}$. *Wówczas* $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Przykład 2 (ciągu który jest zbieżny punktowo ale nie jednostajnie). $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$ *zbieżność punktowa* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Definicja 11 (Warunek Cauch'ego dla zbieżności punktowej i jednostajnej).
$\forall x \in A f_n \to f \Leftrightarrow \forall x \in A$ ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny $\Leftrightarrow \forall x \in A$ ciąg $(f_n(x))$ spełnia warunek Cauch'ego, to znaczy $\forall x \in A \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N\ \forall n, m \geqslant N \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Twierdzenie 21. *Ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie na $A \Leftrightarrow$ spełnia warunek Cauch'ego zbieżności jednostajnej.*

Twierdzenie 22 (o ciągłości granicy ciągu funkcyjnego).
$f, f_n : A \to \mathbb{R}, f_n \rightrightarrows_A f$, *funkcje f_n są ciągłe w punkcie $a \in A \ \ \forall n \in N \Rightarrow f$ jest ciągła w punkcie a*

Twierdzenie 23 (o różniczkowaniu granicy ciągu funkcyjnego).
$A \subset \mathbb{R}$ – przedział są różniczkowalne w każdym punkcie przedziału A. Ciąg (f'_n) jest z zbieżny jednostajnie na A, czyli $\exists x_0 \in A \quad (f'_n(x_0))$ jest zbieżny $\Rightarrow$

- *ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny na A do pewnej funkcji granicznej*
- *funkcja graniczna f jest różniczkowalna na A i $\forall x \in A \quad f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$*

Twierdzenie 24 (o całkowaniu granicy ciągu funkcyjnego).
A – przedział $\subset \mathbb{R}, f, f_n \in C(A), f_n \rightrightarrows_A f \Rightarrow \forall a, b \in A \quad \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$

3.2 Szeregi funkcyjne

Twierdzenie 25 (Warunek Cauch'ego zbieżności jednostajnej).
Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jednostajnie $\Leftrightarrow$ spełnia warunek Cauchego jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego.
$\forall \varepsilon \ \ \exists N\ \forall m > n > N \ \ \forall x \in A \quad |a_{n+1}(x) + \cdots + u_m(x)| < \varepsilon$

Twierdzenie 26 (Kryterium Weierstrassa).
Jeśli istnieje ciąg liczbowy (a_n) taki, że $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in A \quad |u_n(x)| \leqslant a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny jednostajnie (i bezwzględnie)

Przykład 3. *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{2^n}$ *jest zbieżny jednostajnie na* $\mathbb{R}$ *bo* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in \mathbb{R}\quad \frac{sin(nx)}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *jest zbieżny jako ciąg geometryczny.*

Twierdzenie 27 (o ciągłości sumy szeregu funkcyjnego)**.**
$S, u_n : A \to \mathbb{R},\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny jednostajnie do funkcji* S*, funkcje* u_n *są ciągłe na* A $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *też jest ciągła na* A*.*

Twierdzenie 28 (o różniczkowaniu sumy szeregu funkcyjnego)**.**
A *– przedział* $\subset \mathbb{R}$
$u_n : A \to \mathbb{R}$ *są różniczkowalne w każdym punkcie przedziału* A
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ *jest zbieżny jednostajnie na* A
$\exists x_0 \in A\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ *jest zbieżny* $\Rightarrow$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny jednostajnie*
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest różniczkowalna na* A *i* $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$

Twierdzenie 29 (o całkowaniu szeregu funkcyjnego)**.**
A *– przedział* $\subset \mathbb{R}$
$u_n : A \to \mathbb{R}$ *są ciągłe na* A
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny jednostajnie* $\Rightarrow \forall a, b \in A\quad \int\limits_a^b (\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x))dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b (u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x))dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$

3.3 Szeregi potęgowe

Definicja 12. Szeregiem potęgowym nazywamy szereg funkcyjny postaci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, gdzie $a_n \in \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$

Twierdzenie 30 (D'Alemberta)**.**
Jeśli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lambda$, *to promień zbieżności szeregu potęgowego* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *dany jest wzorem:*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \in (0, \infty) \\ +\infty, & \lambda = 0 \\ 0, & \lambda = \infty \end{cases}$$

Twierdzenie 31 (Cauch'ego-Hadamarda)**.**
Promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *dany jest wzorem* $R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \in (0, \infty) \\ +\infty, & \lambda = 0 \\ 0, & \lambda = \infty \end{cases}$ *, gdzie* $\lambda = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Przykład 4 (Szeregu o promieniu zbieżności = 7)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n7^n} x^n$

Przykład 5 (Szeregu zbieżnego tylko dla $x = 0$)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

Przykład 6 (Szeregu zbieżnego tylko dla $x = 5$)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (5 - x)^n$

Przykład 7 (Szeregu zbieżnego $\forall x \in \mathbb{R}$)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Twierdzenie 32 (o ciągłości sumy szeregu potęgowego).
Niech promień zbieżności R szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *będzie dodatni. Wówczas funkcja* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest ciągła na* $(-R, R)$

Twierdzenie 33 (Abela). *Szereg potęgowy jest funkcją ciągłą w każdym punkcie, w którym jest zbieżny (w punktach końcowych przedziału mówimy o ciągłości jednostronnej)*

Twierdzenie 34 (o różniczkowaniu szeregu potęgowego).

- *Oba szeregi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$ *mają te same promienie zbieżności*
- *Jeśli* $R > 0$, *to* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest różniczkowalna na* $(-R, R)$ *i* $f'(x) = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \quad \forall x \in (-R, R)$

Twierdzenie 35 (o całkowaniu szeregu potęgowego).

- *Oba szeregi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x (a_n t^n) dt$ *mają te same promienie zbieżności*
- *Jeśli* $R > 0$, *to* $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *jest całkowalna na* $(0, x)$ *i* $\int\limits_0^x f(t) dt = \int\limits_0^x (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt \quad \forall x \in (-R, R)$

3.4 Szereg Taylora i Maclaurina

Definicja 13 (szeregu Taylora).
Niech $f \in C^{\infty}((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ wtedy szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ nazywamy szeregiem Taylora o środku w punkcie x_0 dla funkcji f.

Definicja 14 (szeregu Maclaurina).
Niech $f \in C^{\infty}((-\delta, \delta))$ wtedy szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ nazywamy szeregiem Maclaurina dla funkcji f.

Przykład 8 (Rozwinięć niektórych funkcji w szereg Macalurina).

- $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$
- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $sinx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $cosx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

4 Przestrzenie metryczne i unormowane

Definicja 15. Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, ρ), gdzie X to niepusty zbiór, a ρ to metryka w tym zbiorze. Elementy X nazywamy punktami zaś $\rho(x, y)$ odległością między x i y

Przykład 9 (Metryka naturalna (euklidesowa))**.** $X = \mathbb{R}^2$ $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

Przykład 10 (Metryka dyskretna)**.** X– *dowolny zbiór niepusty* $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 \ dla \ x = y \\ 1 \ dla \ x \neq y \end{cases}$

Przykład 11 (Metryka taksówkowa (miejska))**.** $X = \mathbb{R}^n$ $\rho(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$

Definicja 16. Kulą (otwartą) o środku w punkcie x_0 i promieniu r w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiór

$$K(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$$

Definicja 17. Kulą domkniętą o środku w punkcie x_0 i promieniu r w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiór

$$\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant r\}$$

Definicja 18. Sferą o środku w punkcie x_0 i promieniu r w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiór

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) = r\}$$

Przykład 12 (Kula w metryce dyskretnej)**.**

$$K(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\} = \begin{cases} \{x_0\} & gdy \ r \in (0, 1] \\ X & gdy \ r \in (1, \infty) \end{cases}$$

Przykład 13 (Kula domknięta w metryce dyskretnej)**.**

$$\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant r\} = \begin{cases} \{x_0\} & gdy \ r \in (0, 1) \\ X & gdy \ r \in [1, \infty) \end{cases}$$

Przykład 14 (Sfera w metryce dyskretnej)**.**

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) = r\} = \begin{cases} \emptyset & gdy \ r \in (0, 1) \cup (1, \infty) \\ X \setminus \{x_0\} & gdy \ r = 1 \end{cases}$$

Definicja 19 (zbieżności ciągu o wyrazach w przestrzeni metrycznej)**.**
Ciąg (a_n) o wyrazach w przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest zbieżny do $a \in X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \forall n \geqslant N \quad \rho(a_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \forall n \geqslant N \quad |\rho(a_n, a) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \rho(a_n, a) \to 0$

Definicja 20. Ciąg (a_n) o wyrazach w przestrzeni metrycznej spełnia warunek Cauch'ego $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \forall n, m > N \quad \rho(a_n, a_m) < \varepsilon$

Twierdzenie 36. *Ciąg (a_n) o wyrazach w przestrzeni metrycznej jest zbieżny $\Rightarrow$ spełnia warunek Cauch'ego*

Przykład 15. *Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ o wyrazach w przestrzeni metrycznej $X = (0, \infty)$ z metryką naturalną spełnia warunek Cauch'ego a mimo to nie jest zbieżny bo jedyny kandydat na granicę – 0 odpada*

Definicja 21 (Przestrzeni metrycznej zupełnej)**.** Przestrzeń metryczna, w której każdy ciąg spełniający warunek Cauch'ego jest zbieżny nazywamy przestrzenią metryczną zupełną.

Twierdzenie 37. *Przestrzeń $X = \mathbb{R}$ i $\rho(x, y) = |x - y|$ jest przestrzenią zupełną*

Twierdzenie 38 (Banach o punkcie stałym)**.**
Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną zupełną i $f : X \to X$ będzie odwzorowaniem zwężającym, to znaczy funkcją spełniająca warunek

$$\exists L \in (0, 1) \ \ \forall x, y \in X \quad \rho(f(x), f(y)) \leqslant L\rho(x, y)$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno $x_0 \in X$ (nazywane punktem stałym odwzorowania), takie że $f(x_0) = x_0$.

4.1 Elementy topologii

Definicja 22 (Zbioru otwartego)**.**
Zbiór A zawarty w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy otwartym jeśli każdy punkt a ze zbioru A należy do A wraz z pewną kulą o środku w a.

$$A \text{ jest otwarty } \Leftrightarrow \forall a \in A \;\; \exists r > 0 \quad K(a, r) \subset A$$

Definicja 23 (Zbioru domkniętego)**.**
Zbiór A zawarty w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy domkniętym $\Leftrightarrow X \setminus A$ jest otwarty

Definicja 24. Wnętrze zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, ρ) to

$$IntA := \{a \in A : \;\; \exists r > 0 \;\; K(a, r) \subset A\}$$

Definicja 25. Domknięcie zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, ρ) to

$$\overline{A} := \{x \in X : \;\; \exists r > 0 \;\; K(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

Przykład 16. *Rozpatrzmy przestrzeń metryczną* (X, ρ)*, gdzie* $X = \mathbb{R}$*,* $\rho(x, y) = |x - y|$

$$Int([a, b)) = (a, b) \qquad \overline{(a, b)} = [a, b]$$

5 Funkcje wielu zmiennych

5.1 Granica funkcji

Definicja 26 (Granicy wg Heinego)**.** Mówimy, że g jest granicą funkcji f w punkcie a

$$\Leftrightarrow \quad \forall\{\mathbf{x}_n \subset D \setminus \{a\}\} \quad [\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = g]$$

Definicja 27 (Granicy wg Cauchego)**.** Mówimy, że g jest granicą funkcji f w punkcie a

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \ \ \forall x \in D \quad 0 < ||\mathbf{x} - a|| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - g| < \varepsilon$$

Definicja 28 (Granicy niewłaściwej wg Heinego)**.**

$$\lim_{x\to a} = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\{\mathbf{x}_n \subset D \setminus \{a\}\} \quad [\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = \pm\infty]$$

Definicja 29 (Granicy niewłaściwej wg Cauchego)**.**

$$\lim_{x\to a} = +\infty \quad \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists\delta > 0 \ \ \forall x \in D \quad 0 < ||\mathbf{x} - a|| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x\to a} = -\infty \quad \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists\delta > 0 \ \ \forall x \in D \quad 0 < ||\mathbf{x} - a|| < \delta \Rightarrow f(x) < M$$

5.2 Ciągłość funkcji

Definicja 30. Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D \Leftrightarrow [\exists \lim_{x\to a} f(x)$ i $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)]$

Definicja 31. Funkcja f jest ciągła $\Leftrightarrow$ jest ciągła w każdym punkcie $a \in D$

Twierdzenie 39 (O ciągłości działań arytmetycznych)**.**
$[f, g : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^k, a \in D; f, g$ *są ciągłe w* $a, x \in \mathbb{R}] \Rightarrow$ *ciągłe w punkcie są następujące funkcje*

- $|f|$
- λf
- $f \pm g$
- fg
- $\frac{f}{g}$ *jeśli tylko* $g(a) \neq 0$

Przykład 17. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(xy) \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \textit{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- *f jest ciągła na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ jako iloraz funkcji ciągłych (wielomianów)*
- *f nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$, bo nie istnieje granica* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

5.3 Pochodne i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Definicja 32 (Pochodnej cząstkowej).
Jeśli istnieje skończona granica $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_{10}+h, x_{20}, \ldots, x_{k0}) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0})}{h}$ to nazywamy ją pochodna cząstkową funkcji f względem zmiennej x_1 w punkcie $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0})$ i oznaczamy $f'_{x_1}(x_0)$

Definicja 33 (Pochodnej kierunkowej).
Pochodną kierunkowa funkcji f w punkcie $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0})$ w kierunku wektora $v = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ o długości 1 (to znaczy $||v|| = 1$) nazywamy granicę $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$ jeśli istnieje i jest skończona. Oznaczamy ją $f'_v(x_0)$

Definicja 34 (Różniczkowalności funkcji).
Niech $G \subset \mathbb{R}^k$ będzie obszarem i $f : G \to \mathbb{R}$. Mówimy że f jest różniczkowalna w punkcie

$$x_0 \in G \Leftrightarrow \exists A = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{||h||} = 0$$

Twierdzenie 40 (Warunek konieczny różniczkowalności).
$f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^m$ to obszar, f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \Rightarrow f$ jest ciągła w punkcie x_0

Dowód. f różniczkowalna w punkcie $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{||h||} = 0$ dla pewnego $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$
Oznaczmy $\eta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{||h||}$, wówczas mamy $\lim\limits_{n\to 0} \eta_{x_0}(h) = 0$
$f(x_0 + h) = \eta_{x_0}(h) = \eta_x(h)||h|| + f(x_0) + Ah$
$\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim\limits_{h\to 0} [\eta_{x_0}(h)] = \lim\limits_{h\to 0} [\underbrace{\eta_x(h)||h||}_{0} + f(x_0) + \underbrace{a_1h_1 + a_2h_2 + \cdots + a_mh_m}_{0}] = f(x_0) \Rightarrow f$ jest ciągła w punkcie x_0 □

Twierdzenie 41 (warunek dostateczny różniczkowalności).
$f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^m$ to obszar
Istnieją pochodne cząstkowe $f'_{x_1}(x) \ldots f'_{x_m}(x)$ w pewnym otoczeniu punktu x_0 i są one ciągłe w punkcie $x_0 \Rightarrow f$ jest różniczkowalna w punkcie x_0

5.4 Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Definicja 35. Niech $f : G \to \mathbb{R}$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^m$ to obszar, ma pochodne cząstkowe $f'_{x_i}, i = 1, \ldots, m$
Jeśli funkcja f'_{x_i} ma pochodną cząstkową po zmiennej x_j to nazywamy ją pochodną czastkową drugiego rzędu i oznaczamy $f''_{x_ix_j} = (f'_{x_i})'_{x_j}$

Twierdzenie 42 (Schwarza).
Niech $f : G \to \mathbb{R}$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^2$ to obszar.
Pochodne mieszane f''_{xy} i f''_{yx} istnieją w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0) \in G$ i są ciągłe w tym punkcie $\Rightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$

Twierdzenie 43 (Wzór Taylora dla funkcje 2 zmiennych).
Jeśli f jest funkcją klasy C^n w pewnym obszarze zawierającym odcinek $\overline{x_0x}$, to wewnątrz tego odcinka znajduje się punkt $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ taki że
$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0) + \frac{df}{dy}(x_0)(y-y_0)\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}(x_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{d^2f}{dy^2}(x_0)(y-y_0)^2\right] + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\frac{d^nf}{dx^idy^j}(x_0)(x-x_0)^i(y-y_0)^{n-i-1} + R_n(x_0)$, *gdzie* $R_n(x_0) = \frac{1}{n!}\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^n}{dx^idY^{n-1}}(c)(x-x_0)^i(y-y_0)^{n-1}$

5.5 Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Definicja 36. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in G$:

- maksimum lokalne jeśli $\exists r > 0\ \forall x \in K(x_0, r) \quad f(x) \leqslant f(x_0)$
- maksimum lokalne właściwe jeśli $\exists r > 0\ \forall x \in K(x_0, r), x \neq x_0 \quad f(x) < f(x_0)$
- minimum lokalne jeśli $\exists r > 0\ \forall x \in K(x_0, r) \quad f(x) \geqslant f(x_0)$
- minimum lokalne właściwe jeśli $\exists r > 0\ \forall x \in K(x_0, r), x \neq x_0 \quad f(x) > f(x_0)$

Twierdzenie 44 (Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych).
Jeśli istnieją pochodne cząstkowe $f'_{x_1}(x_0), f'_{x_2}(x_0), \ldots, f'_{x_k}(x_0)$ i funkcja ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne to $f'_{x_1}(x_0) = f'_{x_2}(x_0) = \cdots = f'_{x_k}(x_0) = 0$

Twierdzenie 45 (Warunek dostateczny istnienia ekstremum dla funkcji 2 zmiennych).
Niech $G \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem, $f \in C^2(G)$ i $(x_0, y_0) \in G$. Jeśli $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ i $W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$ to w punkcie (x_0, y_0) jest ekstremum lokalne właściwe. Ponadto jeśli $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ to jest to minimum lokalne, a jeśli $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ to maksimum lokalne

Definicja 37. Formę kwadratową, a także odpowiadającą jej macierz A nazywamy

- dodatnio określoną $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad \mathbf{x}A\mathbf{x}^T > 0$
- ujemnie określoną $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad \mathbf{x}A\mathbf{x}^T < 0$
- nieujemnie określoną $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad \mathbf{x}A\mathbf{x}^T \geqslant 0$
- niedodatnio określoną $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad \mathbf{x}A\mathbf{x}^T \leqslant 0$
- nieokreśloną $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \mathbf{x}A\mathbf{x}^T < 0,\ \mathbf{y}A\mathbf{y}^T > 0$

Twierdzenie 46 (Kryterium Sylwestera).
Macierz symetryczna $k \times k$:

- *jest dodatnio określona $\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, k\ \det A^{(i)} > 0$*
- *jest ujemnie określona $\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, k\ (-1)^i \det A^{(i)} > 0$*

gdzie $A^{(i)}$ to macierz powstała z A przez skreślenie kolumn i wierszy o numerach większych niż i

Twierdzenie 47 (warunek wystarczający istnienia ekstremum dla funkcji wielu zmiennych).
Niech $G \subset \mathbb{R}^k$ będzie obszarem i niech $f \in C^2(G)$. Jeśli $\mathbf{x_0} \in G, f'x_0(\mathbf{x_0}) = f'x_1(\mathbf{x_0}) = \cdots = f'x_n(\mathbf{x_0})$ to

- *Jeśli macierz $H(\mathbf{x_0})$ jest dodatnio określona, to f ma minimum lokalne w $\mathbf{x_0}$*
- *Jeśli macierz $H(\mathbf{x_0})$ jest ujemnie określona, to f ma maksimum lokalne w $\mathbf{x_0}$*
- *Jeśli macierz $H(\mathbf{x_0})$ jest nieokreślona, to f nie posiada ekstremum lokalnego w $\mathbf{x_0}$*

Twierdzenie 48 (O funkcji uwikłanej).
Załóżmy że F ma ciągłe pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ to istnieje otoczenie $U_{x_0} \ni x_0$ i otoczenie $V_{y_0} \ni y_0$ oraz jedyna funkcja $y : U_{x_0} \to V_{y_0}$ klasy C^1 taka że $\forall x \in U_{x_0} \quad F(x, y(x)) = 0$. Ponadto y ma ciągłą pochodną w U_{x_0} i $y'(x) = \frac{-F_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$, dla $x \in U_{x_0}$

5.6 Całka Riemanna w $\mathbb{R}^n$

Definicja 38. Ciąg podziałów $(\pi(n))$ nazywamy normalnym, jeśli $\delta(\pi(n)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Definicja 39. Jeśli istnieje stała $\delta \in \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego podziału π_n normalnego prostokąta P i dla dowolnego wartościowania w_n mamy $\delta = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(\pi_n, w_n)$, to mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna na P i zapisujemy $\delta = \iint f(x,y)dxdy$, oraz δ nazywamy całką podwójną funkcji f na prostokącie P.

Twierdzenie 49. *Dla każdego ciągu podziałów π_n istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(\pi_n)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\pi_n)$ i granice te zależą od wyboru ciągu podziałów:*

- $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n(\pi_n)$ *(całka podwójna górna),*
- $S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n(\pi_n)$*(całka podwójna dolna)*

6 Funkcje wektorowe

Definicja 40. Niech $D \subset \mathbb{R}^m$, $f_i : D \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$ wtedy funkcją wektorową m zmiennych nazywamy odwzorowanie
$$f : D \to \mathbb{R}^k, f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_k(x_1, \dots, x_m))$$

Definicja 41. Niech $G \subset \mathbb{R}^m$, będzie obszarem a $f : G \to \mathbb{R}^k$ funkcją wektorową m zmiennych. Wówczas:

- f ma granicę w punkcie $\mathbf{x_0} = (x_{10}, \dots, x_{m0})$ który jest punktem skupienia zbioru G, równą $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \forall) < ||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|| < \delta \Rightarrow ||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0})|| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \{\mathbf{x_n}\} \subset G[\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{x_0} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{x_n}) = f(\mathbf{x_0})$

- f jest ciągła w punkcie $\mathbf{x_0} \in G \Rightarrow$ istnieje $\lim\limits_{x \to x_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0})]$

Definicja 42 (Różniczkowalności w punkcie)**.**
Niech $G \subset \mathbb{R}^m$, będzie obszarem a $f : G \to \mathbb{R}^k$ funkcją wektorową m zmiennych. Mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{x}_0 \in G \Leftrightarrow$ istnieje operator liniowy $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ taki że $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0+h) - f(\mathbf{x}_0) - Ah}{||h||} = 0$

Definicja 43. Krzywą w $\mathbb{R}^k$ nazywamy ciągłą funkcje wektorową jednej zmiennej $\gamma : J \to \mathbb{R}^k$. Jeśli funkcja jest różnowartościowa to wtedy krzywą nazywamy łukiem (zwykłym).

Definicja 44. Krzywą $\gamma : J \to \mathbb{R}^k$. Nazywamy łukiem gładkim, jeśli jest łukiem zwykłym i $\gamma_i, \dots, \gamma_k$ są klasy C^1 oraz $\forall t \in J ||\gamma'(x)||^2 \neq 0$

Twierdzenie 50 (Wzór na długość łuku gładkiego)**.**
Jeżeli krzywa $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ *jest łukiem gładkim, to jest prostowalna i jej długość wyraża się wzorem* $d = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

6.1 Miara Jordana

Definicja 45. Miara wewnętrzna Jordana zbioru D to $\sup\{s$: s to suma miar skończonej liczby kostek n-wymiarowych, takich że wnętrza tych kostek są parami rozłączne i każda z tych kostek zawiera się w zbiorze $D\} = \underline{j}(D)$

Definicja 46. Miara zewnętrzna Jordana zbioru D to $\inf\{s$: s to suma miar skończonej liczby kostek n-wymiarowych, pokrywających zbiór $D\} = \overline{j}(D)$

Definicja 47. Zbiór D jest mierzalny w sensie Jordana $\Leftrightarrow$ miara wewnętrzna Jordana zbioru $D =$ miara zewnętrzna Jordana zbioru D. Jeżeli D jest mierzalny w sensie Jordana, to jego miara Jordana $j(D) = \underline{j}(D) = \overline{j}(D)$

Definicja 48. Obszar ograniczony $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy obszarem regularnym jeśli jego brzeg da się rozbić na skończoną liczbę krzywych, które można zapisać w postaci $y = y(x), x \in [a, b]$ i $y \in C([a, b])$ lub $x = x(y), y \in [c, d]$ i $x \in C([c, d])$. Niektóre z tych krzywych mogą się redukować do punktu.

Twierdzenie 51. *Każdy obszar regularny w* $\mathbb{R}^2$ *jest mierzalny w sensie Jordana.*

Dowód. Brzeg każdego obszaru regularnego w $\mathbb{R}^2$ ma miarę Jordana równą 0. Wynika to z definicji i tego że $y = f(x), x \in [a, b]$ i $y \in C([a, b])$ ma miarę Jordana w $\mathbb{R}^2$ równą 0 $\square$