گرامیان‌ها و تحقق‌های بالانس شده و استفادهٔ آنها در تقلیل درجهٔ سیستم‌ها

محمدعلی معصوم‌نیا*

شهریور ۱۳۷۰

چکیده

در این مقالهٔ آموزشی، گِرامیان‌های کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری را مورد بررسی قرار داده، روش محاسبهٔ آنها را ذکر خواهیم کرد. سپس دربارهٔ تحقق‌های بالانس شده و استفادهٔ آنها در تقلیل درجهٔ سیستم‌های خطی ثابت با زمان، توضیحاتی ارائه می‌کنیم. در انتها، حداکثر خطای تقلیل درجه در این روش را ذکر کرده و با استفاده از این کران بالا دربارهٔ چگونگی انتخاب درجهٔ مناسب برای سیستم تقلیل یافته پیشنهاداتی ارائه خواهیم کرد.

۱ مقدمه

یکی از روش‌هایی که به وفور در تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرد، تقریب رفتار آنها با مدل‌های ساده‌تر و سیستم‌های درجهٔ پایین‌تر می‌باشد. پر واضح است که بررسی رفتار یک سیستم پیچیده به مراتب مشکل‌تر از بررسی رفتار سیستم ساده شدهٔ معادل آن می‌باشد و به این دلیل تقلیل درجه همواره مورد توجه بوده است.

در این مقالهٔ آموزشی، یکی از مهم‌ترین روش‌های موجود برای تقلیل درجهٔ سیستم‌های خطی ثابت با زمان با بُعد محدود را بر اساس استفاده از تحقق‌های بالانس شده[1]، مورد بررسی قرار خواهیم داد [۶]. از نظر کیفی می‌توان گفت که در این روش سعی می‌شود تا با انتخاب مناسب پایه‌های فضای حالت، هر یک از متغیرهای حالت سیستم را به همان اندازه‌ای که کنترل‌پذیر است، مشاهده‌پذیر سازیم و سپس با حذف متغیرهای حالتی که کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری آنها کم است، تعداد متغیرهای حالت را تقلیل داده و در نتیجه بُعد فضای حالت را کم کنیم و درجهٔ معادلات بیان کنندهٔ رفتار سیستم را کاهش دهیم. *(برای اختصار، قسمتی از مقدمهٔ مقاله در اینجا حذف شده و به ذکر ادامهٔ مقاله خواهیم پرداخت. توجه کنید که این متن فقط برای نمایش قابلیتهای برنامهٔ LaTeX-فارسی مورد استفاده قرار گرفته و بعضی از قسمتهای آن ممکن است که به دیگر قسمتهای متن ربطی نداشته باشد.)*

۲ گرامیان‌ها

تحقق زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= C\underline{x}(t) \end{aligned} \tag{۱}$$

در اینجا بردارهای $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$، $\underline{u} \in \mathbf{R}^m$ و $\underline{y} \in \mathbf{R}^l$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی می‌باشند و ماتریس‌های A، B و C نیز دارای ابعاد متناظری هستند. برای این تحقق، گرامیان کنترل‌پذیری (کمی دقیقتر گرامیان دسترس‌پذیری[2]) را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$W_r(\circ, t_f) = \int_\circ^{t_f} e^{A\tau} B B^T e^{A^T\tau} d\tau \tag{۲}$$

می‌توان نشان داد که این ماتریس برای هر زمان محدود t_f معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر جفت (A, B) دسترس‌پذیر (کنترل‌پذیر) باشد [۳]. حال اگر زمان t_f را به سمت بینهایت میل دهیم و اگر تمامی مقادیر ویژهٔ ماتریس A در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند $(\Re[\lambda_i(A)] < \circ, \forall i)$ آنگاه ماتریس

*این متن کوتاه قسمتی از جزوهٔ درس کنترل چند متغیره نویسنده می‌باشد و برای نمایش قابلیت‌های برنامه LaTeX-فارسی در اینجا از آن استفاده کرده‌ایم.

[1] Balanced Realization

[2] Reachability

$W_r = W_r(0,\infty)$ حل یکتای معادلهٔ لیاپونف[3]:

$$AW_r + W_rA^T + BB^T = 0 \tag{۳}$$

خواهد بود. برای اثبات این مطلب، با استفاده از تعریف W_r در (۳) داریم [۲]:

$$\begin{aligned} &A\int_0^\infty e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau + \\ &\qquad \int_0^\infty e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}A^T d\tau = \\ &\int_0^\infty \frac{d}{d\tau}[e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}]d\tau = e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}\Big|_0^\infty \end{aligned} \tag{۴}$$

به علاوه چون تمامی مقادیر ویژهٔ A در سمت چپ محور $j\omega$ قرار دارند، پس:

$$e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}\Big|_0^\infty = -BB^T \tag{۵}$$

و W_r در (۳) صدق می‌کند. توجه کنید که حل معادلهٔ لیاپونف با فرض اینکه مقادیر ویژهٔ A سمت چپ محور $j\omega$ می‌باشند، یکتاست. چون اگر W_1 و W_2 دو جواب معادله (۳) باشند، آنگاه داریم:

$$A(W_1 - W_2) + (W_1 - W_2)A^T = 0 \tag{۶}$$

پس

$$\frac{d}{dt}[e^{At}(W_1 - W_2)e^{A^Tt}] = 0 \tag{۷}$$

به عبارت دیگر برای تمام زمان‌های t ترم داخل کروشه مقداری ثابت است:

$$e^{At}(W_1 - W_2)e^{A^Tt} = \text{مقدار ثابت} \tag{۸}$$

به خصوص رابطهٔ (۸) برای $t = 0$ و $t = \infty$ برقرار است و چون مقادیر ویژهٔ A سمت چپ محور $j\omega$ می‌باشند، پس $W_1 = W_2$ بوده و حل معادلهٔ (۳) یکتا خواهد بود. البته می‌توان نشان داد که در حالت کلّی معادلهٔ ماتریسی:

$$FX + XG + C = 0 \tag{۹}$$

یک جواب یکتا برای ماتریس مجهول X دارد اگر و فقط اگر ماتریس‌های F و G فاقد مقادیر ویژهٔ مشترک باشند [۲]. همینطور اگر داشته باشیم:

$$\Re[\lambda_i(F)] + \Re[\lambda_j(G)] < 0,\ \forall\ i,j \tag{۱۰}$$

Lyapunov[3]

آنگاه این جواب یکتا را می‌توان به صورت $X = \int_0^\infty e^{Ft}Ce^{Gt}dt$ نوشت [۲].

به علاوه گرامیان دسترس‌پذیری $W_r(0,t_f)$ که در رابطهٔ (۲) تعریف شده است، برای هر زمان t_f حداقل مثبت معین می‌باشد چون داریم:

$$\underline{w}^TW_r(0,t_f)\underline{w} = \int_0^{t_f} \underline{z}^T(\tau)\underline{z}(\tau)d\tau > 0 \tag{۱۱}$$

$$\underline{z}(\tau) = B^Te^{A^T\tau}\underline{w} \tag{۱۲}$$

و چنانچه جفت (A,B) دسترس‌پذیر باشد، آنگاه ماتریس $W_r(0,t_f)$ برای تمام زمانهای t_f مثبت معین خواهد بود.

به همین منوال، گرامیان مشاهده‌پذیری[4] را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$W_o(0,t_f) = \int_0^{t_f} e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}d\tau \tag{۱۳}$$

این ماتریس نیز برای تمام زمانهای t_f معکوس‌پذیر است، اگر و فقط اگر جفت (C,A) مشاهده‌پذیر باشد. به علاوه اگر زمان t_f را به بینهایت میل دهیم و اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس A در سمت چپ محور $j\omega$ واقع باشند، آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که ماتریس $W_o = W_o(0,\infty)$ حل یکتای معادلهٔ لیاپونف:

$$A^TW_o + W_oA + C^TC = 0 \tag{۱۴}$$

خواهد بود. چگونگی حل معادلهٔ لیاپونف در مرجع [۱] ارائه شده است. با استفاده از برنامهٔ MATLAB نیز می‌توان معادلهٔ لیاپونف را به سادگی حل نمود [۵].

در ادامه به تعبیر فیزیکی گرامیان‌ها خواهیم پرداخت. در ابتدا فرض کنید که بخواهیم حالت سیستم را از مرکز صفحهٔ حالت $(\underline{x} = 0)$ در زمان $t = -T$ به نقطهٔ $\underline{x} = \underline{x}_0$ در زمان $t = 0$ هدایت نماییم به گونه‌ای که انرژی ورودی کمینه شود. به عبارت دیگر می‌خواهیم مسئلهٔ بهینه‌سازی:

$$\min J = \int_{-T}^{0} \underline{u}^T(t)\underline{u}(t)dt \tag{۱۵}$$

را با شرایط مرزی زیر حل کنیم.

$$\underline{x}(-T) = 0, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \tag{۱۶}$$

Observability[4]

البته رابطهٔ بین ورودی و حالت نیز در معادله (۱) صدق کرده و این رابطه حکم قید مسئلهٔ بهینه‌سازی را دارد. می‌توان نشان داد که ورودی بهینه $\underline{u}^*(t)$ با فرض دسترس‌پذیری بصورت زیر بوده [۴]:

$$\underline{u}^*(t) = B^T e^{-A^T t} W_r^{-1}(0, T)\underline{x}_0 \tag{۱۷}$$

مقدار تابع هزینه بهینه (انرژی کمینه) برای این ورودی بهینه به صورت

$$J^* = \underline{x}_0^T W_r^{-1}(0, T)\underline{x}_0 \tag{۱۸}$$

می‌باشد. البته اگر T را به سمت بینهایت میل دهیم، با فرض اینکه مقادیر ویژهٔ A در سمت چپ محور $j\omega$ واقع باشند، داریم:

$$J^* = \underline{x}_0^T W_r^{-1} \underline{x}_0 \tag{۱۹}$$

توجه کنید که اگر $\underline{x}_0$ در امتداد بردار ویژهٔ W_r با مقدار ویژهٔ «کوچک» قرار داشته باشد، آنگاه J^* «بزرگ» خواهد بود و در نتیجه دست یافتن به این حالت مستلزم استفاده از مقدار زیادی انرژی است. پس این قسمت از فضای حالت به سختی دسترس‌پذیر بوده و یا به عبارت دیگر دسترس‌پذیری آن کم است. پس نزدیک بودن W_r به تکینگی[۵] نمایانگر نزدیک بودن جفت (A, B) به دسترس‌ناپذیری است. *(برای کوتاه کردن متن، در اینجا قسمتی از مقاله حذف شده است.)*

در ریاضیات گرامیان بردارهای $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ را دترمینان ماتریس گرام[۶] G با فرم زیر تعریف می‌کنند:

$$G = \begin{bmatrix} <\underline{w}_1, \underline{w}_1> & \cdots & <\underline{w}_1, \underline{w}_n> \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ <\underline{w}_n, \underline{w}_1> & \cdots & <\underline{w}_n, \underline{w}_n> \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

$<\underline{w}_i, \underline{w}_j>$ نمایانگر ضرب داخلی دو بردار $\underline{w}_i$ و $\underline{w}_j$ است. می‌توان نشان داد که دترمینان ماتریس G صفر است اگر و فقط اگر بردارهای $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ وابسته خطی باشند. توجه کنید که بردارهای $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ می‌توانند بسیار کلی بوده و به هر فضای برداری که ضرب داخلی برای آن قابل تعریف است، تعلق داشته باشند. در مسئلهٔ مشاهده‌پذیری، می‌خواهیم استقلال خطی ستون‌های ماتریس Ce^{At} را بررسی کنیم و در حقیقت گرامیان مشاهده‌پذیری همان ماتریس گرام مربوط به ستونهای مختلف Ce^{At} می‌باشد. در اینحالت $\underline{w}_i$ ستون i_ام ماتریس Ce^{At} است.

۲.۱ تأثیر تغییر پایه‌های فضای برداری بر گرامیان‌ها

در این قسمت نشان خواهیم داد که با انتخاب صحیح پایه‌های فضای برداری می‌توان گرامیان‌های دسترس‌پذیری و مشاهده‌پذیری را قطری و برابر یکدیگر نمود. برای این منظور بردار حالت جدید $\underline{z}$ را بر حسب بردار حالت $\underline{x}$ به صورت زیر تعریف کنید:

$$\underline{x} = T\underline{z} \tag{۲۱}$$

با جایگزینی (۲۱) در (۱) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}} &= T^{-1}AT\underline{z} + T^{-1}B\underline{u} = \hat{A} + \hat{B}\underline{u} \\ \underline{y} &= CT\underline{z} = \hat{C}\underline{x} \end{aligned} \tag{۲۲}$$

حال اگر گرامیان‌های دسترس‌پذیری و مشاهده‌پذیری تحقق (۲۲) را با $\hat{W}_r$ و $\hat{W}_o$ نمایش دهیم، آنگاه با فرض وقوع مقادیر ویژهٔ A در سمت چپ محور $j\omega$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{W}_r &= \int_0^\infty e^{\hat{A}\tau}\hat{B}\hat{B}^T e^{\hat{A}^T\tau} d\tau \\ &= T^{-1}\left(\int_0^\infty e^{A\tau}BB^T e^{A^T\tau} d\tau\right)T^{-T} \\ &= T^{-1}W_r T^{-T} \end{aligned} \tag{۲۳}$$

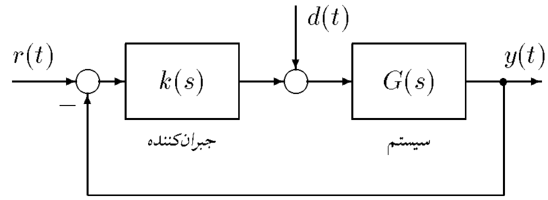
به طریقی مشابه می‌توان نشان داد:

$$\hat{W}_o = T^T W_o T \tag{۲۴}$$

با توجه به (۲۳) و (۲۴) واضح است که با انتخاب T مناسب می‌توان خواص ماتریس‌های $\hat{W}_r$ و $\hat{W}_o$ را به مقدار قابل ملاحظه‌ای تغییر داد و حتی مقادیر ویژهٔ آنها را نیز عوض نمود. توجه کنید که اگر به طور مثال ماتریس T را به صورت $T = \alpha I$ انتخاب کنیم، آنگاه با افزایش مقدار α می‌توان گرامیان مشاهده‌پذیری تحقق جدید را بزرگتر نمود و در همان زمان، گرامیان کنترل‌پذیری آنرا کاهش داد! *(ادامه این مقاله حذف شده است.)*

در این مثال نشان خواهیم داد که برای پایدارسازی بعضی از سیستم‌های ناپایدار با استفاده از پس‌خور باید از کنترل‌کننده‌ای

[۵] Singularity
[۶] Gram Matrix



شکل ۱ : دیاگرام جعبه‌ای سیستم حلقه بسته

استفاده کرد که خود ناپایدار می‌باشد [۷]. برای این منظور سیستم حلقه‌بسته شکل ۱ را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$G(s) = \frac{s}{(s-۱)(s+۵)} \qquad (۲۵)$$

در ابتدا فرض کنید که جبران‌کننده یک بهرهٔ تنها می‌باشد؛ $k(s) = k$. آنگاه با رسم مکان ریشه‌ها به وضوح می‌توان مشاهده کرد که سیستم حلقه بسته برای تمامی مقادیر بهرهٔ k ناپایدار خواهد بود. به علاوه اگر کنترل‌کننده قطبی در سمت راست محور $j\omega$ نداشته باشد، آنگاه با استفاده از قوانین رسم مکان هندسی ریشه‌ها واضح است که تحت هیچ شرایطی نمی‌توان قطب ناپایدار سیستم حلقه باز را به سمت چپ محور $j\omega$ برد و البته هیچگاه نباید قطب در $s = ۱$ یا صفر در $s = ۰$ را حذف نمود چون همانگونه که قبلاً شرح آن رفت، سیستم حلقه بسته در این صورت ناپایدار می‌باشد.

ولی اگر به طور مثال از جبران‌کنندهٔ

$$k(s) = \frac{k}{s-۱} \qquad (۲۶)$$

که خود ناپایدار است استفاده کنیم، آنگاه برای بعضی از مقادیر بهرهٔ k سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود. برای مشاهده این حقیقت در ابتدا معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه بسته را محاسبه می‌کنیم:

$$s^۳ + ۳s^۲ - ۹s + ۵ + ks = ۰ \qquad (۲۷)$$

جدول راوت مربوط به این معادله مشخصه در جدول ۱ آمده است. با استفاده از این جدول واضح است که برای $k > ۳۲/۳$ سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود. پس جبران‌کنندهٔ (۲۶) که خود ناپایدار است با فرض $k > ۳۲/۳$ قادر به پایدارسازی سیستم حلقه بسته می‌باشد و هیچ جبران‌کنندهٔ پایداری نیز نمی‌تواند سیستم حلقه بسته را پایدار نماید.

$s^۳$	۱	$-۹+k$
$s^۲$	۳	۵
$s^۱$	$\frac{-۳۲+۳k}{۳}$	
$s^۰$	۵	

جدول ۱ : جدول راوت معادله مشخصه (۲۷)

مراجع

[۱] Hammerling, *"Numerical Solution of the Stable, Non-negative Definite Lyapunov Equation,"* IMA Journal of Numerical Analysis، جلد دوّم، صفحات ۳۰۳ تا ۳۲۳، سال ۱۹۸۲.

[۲] Kailath, T., *Linear Systems,* Prentice-Hall, 1980.

[۳] Luenberger, D., *Introduction to Dynamic Systems,* Wiley, 1971.

[۴] Luenberger, D., *Optimization by Vector Space Methods,* Wiley, 1969.

[۵] MATLAB, *"The MATHWORKS Inc.,"* 21 Eliot St., South Natick, MA 01706, U.S.A.

[۶] Moore, B., *"Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction,"* IEEE TAC، جلد ۲۶، شمارهٔ ۱، صفحات ۱۷ تا ۳۱، فوریه ۱۹۸۱.

[۷] محمدعلی معصوم‌نیا، پیش نویس *کتاب اصول طرّاحی کنترل کننده‌های خطی*، شهریور ۱۳۶۹.