Obtención de la solución de ecuación de movimiento de una fuerza resistiva proporcional al cuadrado de la velocidad mediante el método de Runge-Kutta

Yefry López Núñez[1]
[1] *Escuela de Física, Universidad de Costa Rica*

1. RESUMEN

Los métodos de Runge-Kutta son una familia de algoritmos para resolución de ecuaciones diferenciales. Una de sus grandes ventajas es que prescinden del cálculo y evaluación de derivadas de la forma f(x,t). El método mas común utilizado es de orden cuatro que requiere el cálculo de k_i valores para luego ser evaluados. Recuérdese que la segunda Ley de Newton permite encontrar las ecuaciones de movimiento para un sistema a partir de una ecuación diferencial de segundo orden. Para este proyecto se resolvió un sistema con un término de bv restrictivo mediante Runge-Kutta de orden cuatro y se compara la solución numérica con la solución analítica. Los términos b y v pueden verse como una resistencia y la velocidad.

2. INTRODUCCIÓN

Un sistema mecánico en un marco inercial puede describirse como

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F_0}{m} \tag{1}$$

Donde F_0 representa una fuerza externa o de contacto. La ecuación [1] representa una ecuación diferencial de segundo orden, por tanto dependiendo de la forma de F_0 puede integrarse dos veces para encontrar la ecuación que describa su posición para cada momento.

Para un sistema con fuerza resistiva proporcional a la velocidad cuadrada la ecuación de movimiento tiene la siguiente forma[1]

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{b}{m}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{2}$$

La resolución del problema de forma analítica se puede realizar de forma sencilla en términos de velocidad

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}(v)^2 \tag{3}$$

La solución de la ecuación diferencial (2) mediante el método de separación de variables tiene como resultado

$$\frac{1}{v(t)} = -\frac{bt}{m} + \frac{1}{v(0)} \tag{4}$$

Una gráfica de $\frac{1}{v(t)}$ contra t debería dar como resultado una línea recta. Donde la pendiente de la regresión estaría dada por $-\frac{b}{m}$ y el intercepto $\frac{1}{v(0)}$.

Por último , al volver integrar la ecuación (3) con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y partiendo desde $t = 0$ la ecuación que modela la posición x sería la siguiente expresión:

$$x - x(0) = \frac{m}{b}\left[ln\left(t + \frac{m}{bv(0)}\right) - ln\left(\frac{m}{bv(0)}\right)\right] \tag{5}$$

Los métodos de Runge-Kutta son una familia de algoritmos para resolución de ecuaciones diferenciales. Una de sus grandes ventajas es que prescinden del cálculo y evaluación de derivadas de la forma f(x,t) [2].Para resolver la ecuación diferencial mediante Runge-Kutta, se expresará la ecuación como

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u = F_1\left(t, x, u\right) \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t} = f(t, x, u) = F_2\left(t, x, u\right) \tag{7}$$

Para llevar a cabo dicha tarea se calculará los valores k_{ij} para calcular los incrementos en el tiempo para x_{m+1} y u_{m+1}.

Con

$$x_{m+1} = x_m + \frac{1}{6}\left(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + 2k_{14}\right) \tag{8}$$

$$u_{m+1} = u_m + \frac{1}{6}\left(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24}\right) \tag{9}$$

3. DISCUSIÓN

Se resolvió el sistema con la fuerza resistiva para dos conjuntos de condiciones iniciales.El primer set parte de $x(0) = 0$ y $v(0) = 0$, para el segundo set se utilizó $x(0) = 4$ y $v(0) = 7$.

Para simplificar el problema se utilizó como base una masa de 1 kg y una constante b de 1.

Los módulos se programaron en el lenguaje C haciendo uso de diferencias funciones para lograr cada meta [3].

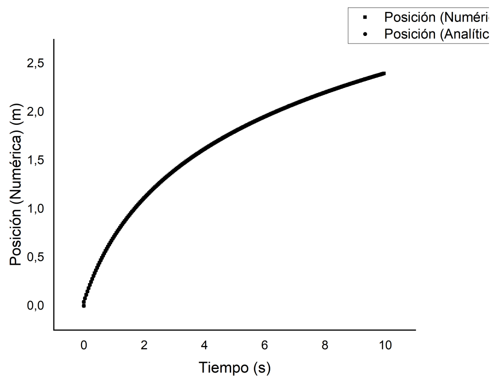

Figura 1: Gráfica de posición contra tiempo para el sistema con resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Superpuestas se encuentran la solución numérica y la solución analítica.

Se observa como la solución numérica y la analítica prácticamente se superponen en el gráfico (1). Era de esperar que la gráfica tuviese una forma logarítmica. Puede verse como el crecimiento en la posición se va haciendo mas paulatino debido al factor resistivo, el sistema avanza mas despacio.

La gráfica de velocidad muestra de forma mas clara el efecto. El factor resistivo provoca que el sistema pierda velocidad conforme avance el tiempo.

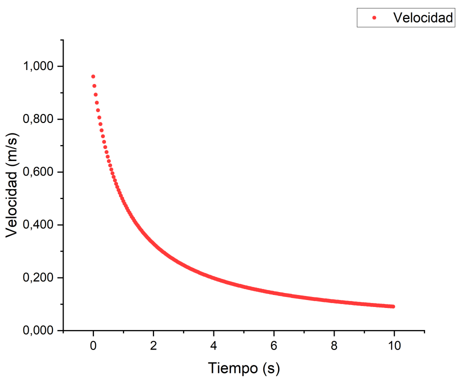

Figura 2: Gráfica de velocidad contra tiempo para el sistema con resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Superpuestas se encuentran la solución numérica y la solución analítica.

De forma clara,el método de Runge-Kutta de 4 orden de nuevo resuelve de forma óptima el sistema de estudio como puede verse en las figuras. El segundo set de condiciones iniciales muestra el mismo comportamiento del caso anterior: el sistema pierde velocidad debido a las fuerza resistiva a la cual se somete.

Pues estudiarse el efecto de la fuerza resistiva tomando diferentes valores para b. Valores de mayor magnitud implicarán que la velocidad decaiga de forma mas acelerada debido a la resistencia.

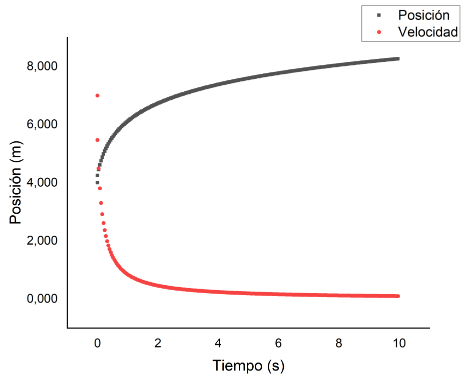

Figura 3: Gráfica de posición y velocidad contra tiempo para el sistema con resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Condiciones iniciales de $x(0) = 4$ y $v(0) = 7$.

4. CONCLUSIONES

Se logró resolver mediante el método de Rugen-Kutta de cuarto orden un sistema con resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad con resultados técnicamente iguales respecto a las soluciones analíticas.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] J. Taylor, *Classical Mechanics* (University Science Books, 2005).

[2] F. J. Burden, R., *Análisis Numérico* (Cengade Learning, 2011).

[3] B. Gottfried, *Programación en C* (McGraw-Hill, 2005).