Universidad de Costa Rica

Escuela de Física

Tópicos de Métodos Matemáticos de Física FS0733

Práctica: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por el método de Runge-Kutta

I Ciclo del 2020

Profesor David Solano Solano MSc.

1. Integración Numérica por el Método de Runge-Kutta

Para resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

con la condición inicial:

$$y(x_0) = y_0$$

se usa que el resultado de la función incógnita evaluado en $x_m = x_0 + mh$ es:

$$y(x_{m+1}) = y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

en donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_m, y_m) \\ k_2 &= hf(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_m + h, y_m + k_3) \end{aligned}$$

El paso $h = \Delta x$ se escoge lo suficiente pequeño.

2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Para resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})$$

con la condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x_0} = y'(x_0) = u_0$$

Se usa el cambio de variable:

$$u = \frac{dy}{dx}$$

y se resuelve el sistema de dos ecuaciones de 1er orden acopladas:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = u = F_1(x,y,u) \\ \frac{du}{dx} = f(x,y,u) = F_2(x,y,u) \end{cases}$$

Para resolver numéricamente por medio del Método de Runge-Kutta, se deben ir calculando las "k" progresivamente en orden, así:

- Primero: $k_{11} = hF_1(x_m, y_m, u_m)$ y $k_{21} = hF_2(x_m, y_m, u_m)$
- Con las k_{11} y k_{21} se calculan: $k_{12} = hF_1(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{1}{2}k_{11}, u_m + \frac{1}{2}k_{21})$ y $k_{22} = hF_2(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{1}{2}k_{11}, u_m + \frac{1}{2}k_{21})$
- Con las k_{12} y k_{22} se calculan: $k_{13} = hF_1(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{1}{2}k_{12}, u_m + \frac{1}{2}k_{22})$ y $k_{23} = hF_2(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{1}{2}k_{12}, u_m + \frac{1}{2}k_{22})$
- Con las k_{13} y k_{23} se calculan: $k_{14} = hF_1(x_m + h, y_m + k_{13}, u_m + k_{23})$ y $k_{24} = hF_2(x_m + h, y_m + k_{13}, u_m + k_{23})$
- Y finalmente, $y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14})$ y $u_{m+1} = u_m + \frac{1}{6}(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24})$.

Más información se puede encontrar en M. Spiegel. *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas.* 3ra ed. México: 1983, pp 433-435.

Instrucciones:

Mediante el uso del código de ejemplo facilitado por el profesor, escriba un programa propio en C que pueda integrar numéricamente un ecuación diferencial de primer orden por medio del método de Runge-Kutta. Luego, resuelva tanto analítica como numéricamente con su programa las siguientes ecuaciones:

(1) $y' + \frac{y}{x} = 1$, y(2) = 2, $x \in [2, 12]$

(2) $xy' + 3y = x^2$, y(1) = 6/5, $x \in [1, 10]$

(3) $y' = \frac{1}{x-3y}$, y=0 en x = 1, $y \in [0, 0{,}5]$

(4) $y' + ycotx = cosx$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$, $\in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$

Para comparar los resultados, elabore una tabla en una hoja de cálculo con valores en el intervalo incluido en cada ejercicio. La tabla debe contener: (1) una columna con la variable independiente, (2) otra con la variable dependiente integrada analíticamente y (3) en otra con los valores evaluados numéricamente con su programa. Puede graficar los resultados en una hoja de cálculo o mediante el uso de "GNUPLOT" para visualizar con más facilidad.