
Modulformen I

Sommersemester 2018
Vorlesung von Prof. Dr. Winfried Kohnen

Vorlesungsmitschrieb von
Patrick Arras
Jonas Müller

Heidelberg, den 17. Juni 2018

Vorwort

Dies ist ein nicht offizielles Skript der Vorlesung Modulformen 1 aus dem Sommersemester 2018 gehalten von Professor Winfried Kohnen an der Universität Heidelberg. Das Skript wurde in der Vorlesung mitgetext und mit pdf_latex kompiliert. Deshalb kann es Fehler enthalten und wir übernehmen keine Garantie für die Richtigkeit.

Bei Fehlern kann ich unter folgender Mailadresse erreicht werden:

jj@mathphys.stura.uni-heidelberg.de

Die aktuellste Version des Skriptes befindet sich immer unter

<https://github.com/jenuk/modulformen/blob/master/script.pdf>

Die L^AT_EX-Source Dateien findet man hier, auf Fehler kann hier alternativ über neues Issue aufmerksam gemacht werden:

<https://github.com/jenuk/modulformen/tree/master>

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iv
1 Grundlegende Tatsachen	1
1.1 Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)	1
1.1.1 Fundamentalbereich	1
1.1.2 Modulform	2
1.1.3 Beispiele für Modulformen	4
1.1.4 Valenzformel und Anwendungen	5
1.2 Die Modulnvariante j	9
2 Heckeoperatoren	13
2.1 Vorbemerkung, Motivation	13
2.2 Die Heckeoperatoren $T(n)$	15
2.3 Folgerungen	21
2.4 Exkurs: Produktdarstellung der Diskriminantenfunktion	24
3 Das Petersson'sche Skalarprodukt	27
3.1 Invariantes Maß und Skalarprodukt	27
3.2 Anwendung: Eine Charakterisierung der Eisensteinreihen	32
4 Poincaré-Reihen	35
4.1 Anwendungen	35
4.1.1 Die Ramanujan τ -Funktion	40
4.1.2 Die Petersson'schen Formeln	41
4.1.3 Hecke-Operatoren sind hermitesch	42
5 Die Eichler-Selberg-Spurformel auf $SL_2(\mathbb{Z})$	47
Index	53
Liste der Sätze	55

1 Grundlegende Tatsachen

1.1 Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

1.1.1 Fundamentalbereich

Wie üblich sei

$$\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$$

die obere Halbebene und

$$\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}.$$

Dann operiert $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ z = \frac{az + b}{cz + d},$$

das heißt $E \circ z = z$ und $(M_1 M_2) \circ z = M_1 \circ (M_2 \circ z)$. Hierbei beachte man, dass

$$\operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

$\Gamma(1) = \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ ist eine diskrete Untergruppe, spezielle Matrizen in $\Gamma(1)$ sind

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Translation $T \circ z = z + 1$ und Stürzung $S \circ z = -\frac{1}{z}$.

Man interessiert sich für die Operation von diskreten Untergruppen $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ insbesondere $\Gamma = \Gamma(1)$.

Definition 1.1.1. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ heißt FUNDAMENTALBEREICH für die Operationen von $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{H} , falls:

- (i) \mathcal{F} ist offen,
- (ii) zu jedem $z \in \mathbb{H}$ existiert ein $M \in \Gamma$ mit $M \circ z \in \overline{\mathcal{F}}$,

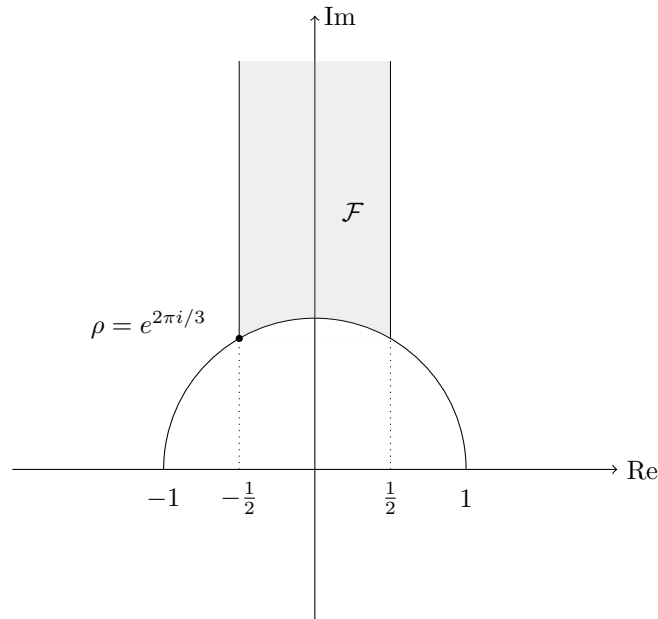


Abbildung 1.1: Der Fundamentalbereich \mathcal{F}_1 der vollen Modulgruppe.

(iii) Sind $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$ und $z_2 = M \circ z_1$ mit $M \in \Gamma$, dann gilt $M = \pm E$ und somit $z_1 = z_2$.

Beispiel 1.1.2. Die Menge $\mathcal{F}_1 := \{z = x + iy \mid |x| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\Gamma(1)$ auf \mathbb{H} , dieser wird auch MODULFIGUR genannt. Siehe [Abbildung 1.1](#).

Bemerkung 1.1.3. Identifikationen in $\overline{\mathcal{F}_1}$ finden nur auf dem Rand statt. (Die Geraden $x = \pm \frac{1}{2}$ werden miteinander identifiziert unter T bzw T^{-1} , Punkte auf den Kreisbögen rechts oder links von i werden unter S identifiziert.

Satz 1.1.4. Die Gruppe $\Gamma(1)$ wird erzeugt von S und T .

1.1.2 Modulform

Definition 1.1.5. Eine Abbildung $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt MODULFUNKTION vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ für $\Gamma(1)$, falls gilt:

- (i) f ist auf \mathbb{H} meromorph,
- (ii) $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$,
- (iii) f ist meromorph in ∞ .

Bedeutung von (iii): Wendet man (ii) an mit $M = T$, so erhält man $f(z+1) = f(z)$. Sei $\mathcal{R} = \{q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1\}$. Die Abbildung $z \mapsto q = e^{2\pi iz}$ bildet \mathbb{H} auf \mathcal{R} ab und $F(q) := f(z)$ ist wohldefiniert und holomorph bis auf mögliche Polstellen, die sich prinzipiell gegen $q = 0$ häufen könnten. Bedingung (iii) fordert nun, dass $q = 0$ eine unwesentliche isolierte Singularität¹ von F ist. Nach Funktionentheorie 1 hat dann F eine Laurententwicklung

$$F(q) = \sum_{n \geq n_0} a_n q^n \quad \text{für } 0 < |q| < |q_0|$$

wobei $n_0 \in \mathbb{Z}$ fest. Damit erhalten wir also

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n e^{2\pi i n z} \quad \text{für } 0 < y_0 < y$$

Definition 1.1.6. Ein solches f heißt MODULFORM falls f auf \mathbb{H} und in ∞ holomorph ist (letzteres bedeutet, dass F in $q = 0$ hebbbar ist, also $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z}$ für alle $z \in \mathbb{H}$). Eine Modulform heißt Spitzenform, falls $a_0 = 0$.

Bemerkung 1.1.7. Die Fourierkoeffizienten a_n sind im Allgemeinen wichtige und interessante Größen (z. B. Darstellungsanzahlen von natürlichen Zahlen durch quadratische Formen, etwa $r_4(n) = \#\{(x, y, z, w) \in \mathbb{Z}^4 \mid n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2\}$ oder die Anzahl von Punkten auf elliptischen Kurven über \mathbb{F}_p).

Definition 1.1.8. Sei $\gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$. Man setzt

$$(f|_k M)(z) := (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

für $z \in \mathbb{H}$, dies ist der PETERSSONSCHER STRICHOPERATOR.

Dann gilt $f|_k E = f$ und $f|_k(M_1 M_2) = (f|_k M_1)|_k M_2$ für alle $M_1, M_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$. Es folgt:

- (i) Es gilt $(f|_k M)(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z)$ für alle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ genau dann, wenn dies für S und T gilt, d. h. $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$ und $f(z+1) = f(z)$, da S und T $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugen.

¹Das heißt es handelt sich um eine hebbare Singularität oder eine Polstelle.

1.1. Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

- (ii) Eine Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann eine Modulform vom Gewicht k , wenn f eine Fourierreiheentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

hat und zusätzlich gilt

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$$

1.1.3 Beispiele für Modulformen

Thetareihen

Definition 1.1.9. Sei $A \in M_m(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann heißt

$$\vartheta_A(z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g]z} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

eine THETAREIHE, wobei $A[g] := g^t A g$ für $g \in \mathbb{Z}^m \cong M_{m,1}(\mathbb{Z})$.

Satz 1.1.10.

- (i) $\vartheta_A(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf $y \geq y_0 > 0$. Insbesondere ist $\vartheta_A(z)$ auf \mathbb{H} holomorph.
- (ii) Es gilt die Theta-Transformationsformel: $\vartheta_{A^{-1}} = \sqrt{\det A} \cdot \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{m}{2}} \vartheta_A(z)$.

Satz 1.1.11. Sei $A \in M_m(\mathbb{Z})$ symmetrisch, positiv definit, gerade² und $\det A = 1$. Dann gilt $8|m$ und $\vartheta_A(z)$ ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{m}{2}$ für $\Gamma(1)$.

Beachte $\vartheta_A(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} r_A(n) q^n$ wobei $r_A(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n durch die ganzzahlige, positive definite quadratische Form $x \mapsto \frac{1}{2} x^t A x$ auf \mathbb{R}^m ist.

Eisensteinreihen

Definition 1.1.12. Sei $k \in \mathbb{Z}$, k gerade und $k \geq 4$. Dann heißt

$$G_k(z) = \sum'_{m,n} \frac{1}{(mz+n)^k} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

²Das heißt für alle $\mu \in \{1, \dots, m\}$ gilt $a_{\mu\mu}$ ist gerade

EISENSTEINREIHE vom Gewicht k .³

Satz 1.1.13.

- (i) $G_k(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf $D_\varepsilon = \{z = x + iy \mid y \geq \varepsilon, x^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$, insbesondere also holomorph auf \mathbb{H} .
- (ii) G_k ist Modulform vom Gewicht k für $\Gamma(1)$.
- (iii) Es gilt

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.

Setze $E_k := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$ die NORMALISIERTE EISENSTEINREIHE. Benutze nun

$$\zeta(k) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}-1} 2^{k-1} B_k}{k!} \pi^k$$

für k gerade und $k \geq 2$. Damit folgt

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei alle B_k rationale Zahlen sind. Speziell gilt

$$B_4 = -\frac{1}{30} \quad \implies \quad E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n,$$

$$B_6 = \frac{1}{42} \quad \implies \quad E_6 = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n) q^n.$$

1.1.4 Valenzformel und Anwendungen

Satz 1.1.14 (VALENZFORMEL). Sei f eine Modulfunktion vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$, $f \neq 0$. Dann gilt

$$\text{ord}_\infty f + \frac{1}{2} \text{ord}_i f + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho f + \sum_{\substack{z \in \Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \\ z \neq i, \rho}} \text{ord}_z f = \frac{k}{12}.$$

$${}^3 \sum'_{m,n} := \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}}$$

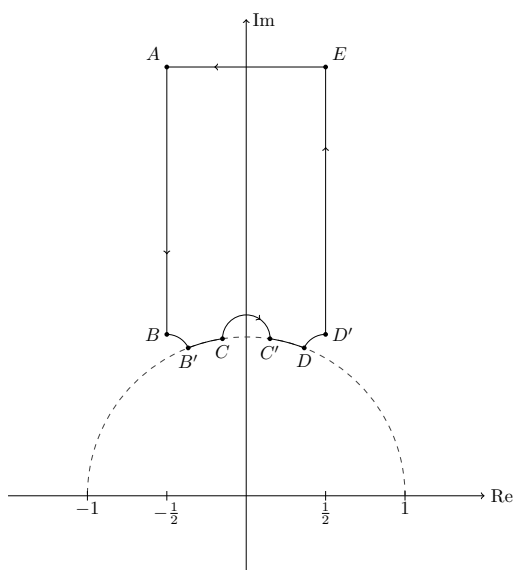


Abbildung 1.2: Die Kurve \mathcal{C} wobei A und E so gewählt sind, dass \mathcal{C} alle Null- und Polstellen enthält.

Hierbei ist $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und

$$\text{ord}_{\infty} f := \text{ord}_{q=0} F(q)$$

mit $F(q) = f(z)$ für $q = e^{2\pi iz}$.

Beweis. Zum Nachweis reduziert man auf den Fall, dass f außer in $z = \rho, -\bar{\rho}, i$ keine Null- oder Polstellen auf $\partial\overline{F_1}$ hat und berechnet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Wobei die Kurve \mathcal{C} wie in [Abbildung 1.2](#) gewählt ist.

g.e.d.

Definition 1.1.15. Sei

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728} (E_4^3(z) - E_6^2(z))$$

die DISKRIMINANTENFUNKTION. Dann ist Δ eine Spitzenform vom Gewicht $k = 12$ mit $\Delta(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{H}$ und $\text{ord}_{\infty} \Delta = 1$, d. h. $\Delta = q + \dots$

Bemerkung 1.1.16. Δ ist in gewisser Weise die „erste“ von 0 verschiedene Spitzenform und wurde von vielen Mathematikern studiert.

Beispiel 1.1.17.

- (i) Schreibe $\Delta(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n)q^n$, dann heißt $n \mapsto \tau(n)$ RAMANUJAN-FUNKTION. Es gilt: $\tau(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \geq 1$. Ferner lässt sich zeigen, dass $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$, mithilfe von $B_{12} = -\frac{691}{2730}$.
- (ii) Vermutung: $\tau(n) \neq 0$ für alle $n \geq 1$ (Lehner)

Sei M_k der \mathbb{C} -Vektorraum der Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ und $S_k \subseteq M_k$ der Unterraum der Spitzenformen.

Bemerkung 1.1.18. $M_k = \{0\}$ für k ungerade, da $f((-E) \circ z) = f(z) = (-1)^k f(z)$.

Satz 1.1.19. Sei $k \in \mathbb{Z}$ gerade. Dann gilt:

- (i) $M_k = \{0\}$ für $k < 0$ und $M_2 = \{0\}$.
- (ii) $M_0 = \mathbb{C}$.
- (iii) $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$, falls $k \geq 4$.
- (iv) Die Abbildung $f \mapsto f \cdot \Delta$ gibt einen Isomorphismus von M_{k-12} auf S_k .
- (v) $\dim M_k < \infty$.

Satz 1.1.20. Sei $k \geq 0$ gerade. Dann gilt:

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12} \\ 1 + \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Beispiel 1.1.21.

- (i) $M_4 = \mathbb{C}E_4$.
- (ii) $M_6 = \mathbb{C}E_6$.
- (iii) $M_8 = \mathbb{C}E_8 = \mathbb{C}E_4^2$.
- (iv) $M_{10} = \mathbb{C}E_{10} = \mathbb{C}E_4E_6$.
- (v) $M_{12} = \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}\Delta$.
- (vi) $M_{14} = \mathbb{C}E_{14}$.

1.1. Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

Satz 1.1.22. Sei $k \geq 0$ gerade. Dann bilden $E_4^\alpha E_6^\beta$ mit $4\alpha + 6\beta = k$ eine Basis von M_k , insbesondere gilt also

$$M_k = \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta \geq 0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \mathbb{C} E_4^\alpha E_6^\beta$$

Beweis. Wir zeigen zunächst induktiv, dass die Monome M_k erzeugen. Für $k \leq 10$ ist dies nach Beispiel 1.1.21 klar. Sei also $k \geq 12$. Man bestimme eine beliebige Kombination $\alpha, \beta \geq 0$ mit $4\alpha + 6\beta = k$ und setze $g := E_4^\alpha E_6^\beta \in M_k$ mit konstantem Term gleich 1.

Sei nun $f \in M_k$ beliebig mit konstantem Term a_0 . Dann ist $f - a_0 \cdot g \in S_k$. Nach Satz 1.1.19, iv) gilt daher $f - a_0 \cdot g = \Delta \cdot h$ mit $h \in M_{k-12}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist h eine Linearkombination von Monomen $E_4^\gamma E_6^\delta$ mit $4\gamma + 6\delta = k - 12$. Aber $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ und daher ist $f - a_0 \cdot g$ Linearkombination von Monomen $E_4^{\gamma+3} E_6^\delta$ und $E_4^\gamma E_6^{\delta+2}$. Wegen

$$4(\gamma + 3) + 6\delta = k - 12 + 12 = k$$

$$4\gamma + 6(\delta + 2) = k - 12 + 12 = k$$

ist also auch f als Linearkombination von Monomen der behaupteten Form schreibbar. Somit erzeugen die Monome tatsächlich M_k .

Noch zu zeigen ist, dass die Monome über \mathbb{C} linear unabhängig sind. Beweis durch Widerspruch: *Angenommen*, es existiere eine nicht-triviale lineare Relation

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \geq 0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \lambda_{\alpha, \beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0.$$

Fall 1: Sei $k \equiv 0 \pmod{4}$. Dann sind alle β gerade, also schreibe jeweils $\beta = 2\beta'$ mit $\beta' \geq 0$. Es folgt $\alpha = \frac{k}{4} - 3\beta'$ und somit

$$E_4^\alpha E_6^\beta = E_4^{\frac{k}{4} - 3\beta'} E_6^{2\beta'} = E_4^{\frac{k}{4}} \left(\frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'}.$$

Da $E_4^{\frac{k}{4}}$ nicht die Nullfunktion ist, ergibt sich eine nicht-triviale Polynom-Relation für $\frac{E_6^2}{E_4^3}$, d. h. die meromorphe Funktion $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ ist Nullstelle eines nicht-trivialen Polynoms über \mathbb{C} . Da \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist (jedes nicht-konstante Polynom über \mathbb{C} zerfällt vollständig über \mathbb{C} in Linearfaktoren), ist $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ somit konstant.

Wir zeigen $\frac{E_6^2}{E_4^3} \equiv 0$ mit einem *Trick*: Es gilt $E_6(-\frac{1}{z}) = z^6 E_6(z)$, denn $E_6 \in M_6$. Auswerten in $z = i = -\frac{1}{i}$ liefert $E_6(i) = 0$. Ferner gilt

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{2\pi i n z} \implies E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{-2\pi n}.$$

Da alle Summanden positiv sind, folgt $E_4(i) \neq 0$ und somit $\frac{E_6^2(i)}{E_4^3(i)} = 0$. Dies impliziert jedoch da $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ konstant ist bereits $E_6 \equiv 0$. \nmid

Fall 2: Sei $k \equiv 2 \pmod{4}$, dann sind alle β ungerade. Analoges Vorgehen zum ersten Fall liefert ebenfalls einen Widerspruch.

Somit sind die Monome über \mathbb{C} linear unabhängig.

q.e.d.

Bemerkung 1.1.23. Der Satz impliziert additive Faltungsformeln für die multiplikativen Funktionen $\sigma_{k-1}(n)$ (weiterhin $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 4$ gerade). „Multiplikativ“ bedeutet hier

$$\text{ggT}(m, n) = 1 \implies \sigma_{k-1}(m \cdot n) = \sigma_{k-1}(m) \cdot \sigma_{k-1}(n).$$

Beispiel 1.1.24. $E_8 = E_4^2$, ferner $E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n$, also $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(n-m) \sigma_3(m)$.

Allgemeiner kann man E_k ausdrücken als Linearkombination von Monomen der Form $E_4^\alpha E_6^\beta$ und erhält hieraus Formeln für $\sigma_{k-1}(n)$.

1.2 Die Modulvariante j

Definition 1.2.1. Sei $j := \frac{E_4^3}{\Delta}$.

Satz 1.2.2.

- (i) j ist holomorph auf \mathbb{H} und hat einen einfachen Pol in ∞ .
- (ii) j ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.
- (iii) j liefert eine Bijektion $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$.

Beweis.

- (i) Da $\Delta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$, ist $j(z)$ holomorph auf \mathbb{H} . Ferner gilt

$$\text{ord}_\infty j = \text{ord}_\infty E_4^3 - \text{ord}_\infty \Delta = 0 - 1 = -1.$$

- (ii) Da $E_4^3, \Delta \in M_{12}$ folgt die Aussage.

1.2. Die Modulinvariante j

- (iii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist zu zeigen, dass die Modulfunktion $j_\lambda := j - \lambda$ vom Gewicht Null eine modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eindeutig bestimmte Nullstelle hat. Man wendet auf j_λ die Valenzformel an! Es gilt $\mathrm{ord}_z j_\lambda \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ und $\mathrm{ord}_\infty j_\lambda = -1$. Da $k = 0$ folgt mit der Valenzformel

$$-1 + n + \frac{n'}{2} + \frac{n''}{3} = 0$$

mit $n, n', n'' \in \mathbb{N}_0$. Also

$$n + \frac{n'}{2} + \frac{n''}{3} = 1 \quad (1.1)$$

Man prüft nach: die einzigen Lösungen $(n, n', n'') \in \mathbb{N}_0^3$ von (1.1) sind $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ und $(0, 0, 3)$. Dies impliziert die Behauptung. *g.e.d.*

Satz 1.2.3. Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.
- (ii) f ist Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts.
- (iii) f ist eine rationale Funktion in j .

Beweis.

- (iii) \Rightarrow (ii) Sei $f = \frac{P(j)}{Q(j)}$ wobei $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m$ mit $a_\nu \in \mathbb{C}$, $a_m \neq 0$ und $Q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$ mit $b_\nu \in \mathbb{C}$, $b_n \neq 0$ mit $Q \not\equiv 0$, insbesondere also auch $Q(j) \not\equiv 0$. Wegen $j = \frac{E_4^3}{\Delta}$ folgt

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_0 + a_1 \frac{E_4^3}{\Delta} + \dots + a_m \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^m}{b_0 + b_1 \frac{E_4^3}{\Delta} + \dots + b_n \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^n} \\ &= \frac{(a_0 \Delta^m + a_1 E_4^3 \Delta^{m-1} + \dots + a_m (E_4^3)^m) \cdot \Delta^n}{(b_0 \Delta^n + b_1 E_4^3 \Delta^{n-1} + \dots + b_n (E_4^3)^n) \cdot \Delta^m}. \end{aligned}$$

Hier sind Zähler und Nenner Modulformen vom Gewicht $12(m+n)$. Also folgt die Behauptung.

(ii) \Rightarrow (i) klar

- (i) \Rightarrow (iii) Sei f eine Modulfunktion vom Gewicht Null und $f \not\equiv 0$. Seien z_1, \dots, z_r die modulo $\Gamma(1)$ verschiedenen Polstellen von f und m_1, \dots, m_r deren Ordnungen. Sei

$$P(z) := \prod_{\nu=1}^r (j(z) - j(z_\nu))^{m_\nu}.$$

Dann gilt

$$\text{ord}_{z_\nu} P = \text{ord}_{z_\nu} (j(z) - j(z_\nu))^{m_\nu} = m_\nu \text{ord}_{z_\nu} (j(z) - j(z_\nu)) \geq m_\nu.$$

Dann ist $P(z)f(z)$ eine Modulfunktion vom Gewicht Null und holomorph auf \mathbb{H} . Da $P(z)$ ein Polynom in j ist, genügt es die Behauptung für $P(z)f(z)$ zu zeigen. Insbesondere kann man voraussetzen, dass f holomorph auf \mathbb{H} ist. Da $\text{ord}_\infty \Delta = 1$, gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ so dass $g := \Delta^n f$ in unendlich holomorph ist. Dann ist $f = \frac{g}{\Delta^n}$ und g ist eine Modulform vom Gewicht $12n$. Nach [Satz 1.1.22](#) ist g eine Linearkombination von Monomen $E_4^\alpha E_6^\beta$ mit $4\alpha + 6\beta = 12n$. Es genügt somit die Behauptung für $\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^n}$ zu zeigen. Insbesondere gilt $3|\alpha$ und $2|\beta$, schreibe $\alpha = 3p$ und $\beta = 2q$. Dann gilt

$$\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^n} = \frac{(E_4^3)^p (E_6^2)^q}{\Delta^{p+q}} = j^p (j - 1728)^q,$$

$$\text{denn } j - 1728 = j - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} = \frac{E_4^3}{\Delta} - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} = \frac{E_6^2}{\Delta}. \quad \text{g.e.d.}$$

Bemerkung 1.2.4.

- (i) Der Quotient $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}$ besitzt in natürlicher Weise die Struktur einer Riemannschen Fläche isomorph zu $S^2 \setminus \{\text{Punkt}\}$ indem man die Ränder in $\overline{\mathcal{F}_1}$ identifiziert. Fügt man den Punkt ∞ hinzu, so erhält man $\overline{\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}} := \Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \cup \{\infty\} \cong S^2$ (die Sphäre in \mathbb{R}^3). [Satz 1.2.2](#) (iii) besagt dann, dass j ein Isomorphismus von $\overline{\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}} \cong S^2 \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$ ist. [Satz 1.2.3](#) entspricht dann der Tatsache, dass die einzigen meromorphen Funktionen auf S^2 die rationalen Funktionen sind.
- (ii) Man kann zeigen (schwer!)

$$\Delta(z) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} j &= \frac{E_4^3}{\Delta} = \frac{1}{q} \left(1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n \right)^3 \frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}} \\ &= \frac{1}{q} \left(1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n \right)^3 \prod_{n \geq 1} \left(\sum_{m \geq 0} q^{mn} \right)^{24} \\ &= \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n \geq 1} c(n) q^n \quad \text{mit } c(n) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Also hat die j -Funktion eine Fourierentwicklung in q , wobei die Koeffizienten positive ganzen Zahlen sind.

1.2. Die Modulinvariante j

- (iii) Man zeigt leicht: $\frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)} = 1 + \sum_{n \geq 1} p(n)q^n$ wobei $p(n)$ die Anzahl der Partionen von n ist, d. h. die Anzahl der Zerlegungen von n als Summe positiver, ganzer Zahlen (Beispielsweise $p(4) = 5$, denn $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$). Man sagt: die erzeugende Reihe von $p(n)$ wird durch $\frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)}$ gegeben.

Beachte $1 + \sum_{n \geq 1} p(n)q^n = \frac{e^{\pi i \frac{z}{12}}}{\eta(z)}$ wobei $\eta(z) = e^{\pi i \frac{z}{12}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$ die sogenannte DEDEKINDISCHE η -FUNKTION ist. Beachte $\eta^{24} = \Delta$. η sollte also eine Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ sein. Mit Hilfe der Theorie der Modulformen kann man zeigen $p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3n}} \cdot e^{\pi \sqrt{\frac{3}{2}n}}$ für $n \rightarrow \infty$ (hier $a(n) \sim b(n)$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 1$).

2 Heckeoperatoren

2.1 Vorbemerkung, Motivation

Definition 2.1.1. Definiere die Gruppe

$$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid ad - bc > 0 \right\},$$

welche $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ als Untergruppe enthält.

Definition 2.1.2.

(i) Seien $z \in \mathbb{H}$ und

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}),$$

dann setze

$$M \circ z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

(ii) Für $k \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ und $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ setze

$$(f|_k M)(z) := (ad - bc)^{\frac{k}{2}} (cz + d)^{-k} f(M \circ z).$$

Diese Definitionen verallgemeinern die früheren Definitionen für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (siehe 1.1.1). Beachte, dass weiterhin für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$f|_k \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = f.$$

Lemma 2.1.3.

(i) Die Abbildung $(M, z) \mapsto M \circ z$ definiert eine Operation von $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ auf \mathbb{H} .

(ii) Man hat $f|_k M_1 M_2 = (f|_k M_1)|_k M_2$.

2.1. Vorbemerkung, Motivation

Beweis.

- (i) Rechne nach und beachte hierbei, dass $\operatorname{Im} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = (ad-bc) \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$.
- (ii) Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2^+(\mathbb{R})$ setze $j(M, z) := cz + d$. Dann gilt für beliebige Matrizen $M_1, M_2 \in \operatorname{GL}_2^+(\mathbb{R})$, dass

$$j(M_1 M_2, z) = j(M_1, M_2 \circ z) \cdot j(M_2, z),$$

woraus wegen $(cz + d)^{-k} = j(M, z)^{-k}$ die Behauptung folgt.

g.e.d.

Ziel: Definition gewisser linearer Operatoren $T: M_k \rightarrow M_k$ auf den Vektorräumen M_k (Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$) durch geeignete Mittelbildung.

Idee: Sei $\mathcal{M} \subseteq \operatorname{GL}_2^+(\mathbb{R})$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften (mit \cdot die gewöhnliche Matrizenmultiplikation):

- (i) $\Gamma(1) \cdot \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$
- (ii) $\mathcal{M} \cdot \Gamma(1) \subseteq \mathcal{M}$
- (iii) \mathcal{M} zerfällt in endlich viele disjunkte Rechtsnebenklassen, d.h.

$$\mathcal{M} = \dot{\bigcup}_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} \Gamma(1) \cdot M,$$

wobei die Vereinigung disjunkt und endlich ist.

Für eine Modulform $f \in M_k$ setze dann

$$f|T_{\mathcal{M}} := \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} f|_k M.$$

Dann ist $f|T_{\mathcal{M}}$ wohldefiniert, denn jede Rechtsnebenklasse $\Gamma(1) \cdot M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}$ besteht aus Vertretern der Form NM mit $N \in \Gamma(1)$ und es gilt

$$f|_k NM = (f|_k N)|_k M = f|_k M$$

wegen Lemma 2.1.3, ii) und $f|_k N = f$ für beliebiges $N \in \Gamma(1)$, da $f \in M_k$.

Ferner: Sei eine Matrix $N \in \Gamma(1)$ gegeben. Dann ist

$$(f|T_{\mathcal{M}})|_k N = \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} f|_k MN = \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} f|_k M = f|T_{\mathcal{M}},$$

denn mit M durchläuft auch MN ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen. (Begründung: Sind zwei Matrizen $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ nicht äquivalent unter Linksmultiplikation mit $\Gamma(1)$, so gilt dies trivialerweise auch für $M_1 N, M_2 N$. Auch ist

$$\mathcal{M}N = \left(\dot{\bigcup}_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} \Gamma(1) \cdot M \right) N = \dot{\bigcup}_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} \Gamma(1) \cdot MN = \mathcal{M},$$

denn nach Voraussetzung gilt sowohl $\mathcal{M}N \subseteq \mathcal{M}$ als auch $\mathcal{M} = \mathcal{M}N^{-1}N \subseteq \mathcal{M}N$.)

Folgerung: $f|T_{\mathcal{M}}$ hat das Transformationsverhalten einer Modulform vom Gewicht k .

2.2 Die Heckeoperatoren $T(n)$

Definition 2.2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$\mathcal{M}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = n \right\}.$$

Beobachtung: $\mathcal{M}(n)$ ist invariant unter Links- und Rechtsmultiplikation von $\Gamma(1)$.

Lemma 2.2.2.

$$\mathcal{M}(n) = \bigcup_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b(\bmod d)}} \Gamma(1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

wobei die Vereinigung über alle Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ geht, derart dass $a, b, d \in \mathbb{Z}$, $ad = n$, $d > 0$, und b ein volles Restsystem modulo d durchläuft (also z.B. $b \in \{1, 2, \dots, d\}$).

Beweis. Die Inklusion \supseteq ist klar, zeige also noch \subseteq . Sei dazu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$. Da $ad - bc = n > 0$, können a und c nicht gleichzeitig Null sein. Deswegen existiert $t := \text{ggT}(a, c) \in \mathbb{N}$. Also sind $-\frac{c}{t}$ und $\frac{a}{t}$ teilerfremd und es existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{c}{t} & \frac{a}{t} \end{pmatrix} \in \Gamma(1).$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{c}{t} & \frac{a}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Man kann also voraussetzen, dass $c = 0$. Wegen $\det M = n$ gilt dann $ad = n$. Multipliziert man gegebenenfalls mit $-E$, so kann man annehmen, dass $d > 0$. Schließlich multipliziere für $\nu \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \implies \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + \nu d \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Durch geeignete Wahl von $\nu \in \mathbb{Z}$ kann man erreichen, dass $b + \nu d$ in einem vorgegebenen Restsystem modulo d liegt. Damit ist die Inklusion \subseteq gezeigt.

Noch zu zeigen ist, dass die Vereinigung disjunkt ist (die Endlichkeit ist nach Konstruktion klar). Angenommen, für zwei Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

2.2. Die Heckeoperatoren $T(n)$

(mit $ad = n = a'd'$, $d > 0$, $d' > 0$ und b, b' Vertreter zweier Restklassen modulo d bzw. d') existiere ein $N \in \Gamma(1)$, sodass

$$N \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Dann folgt, dass die untere linke Komponente von N Null ist, $N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ also die Gestalt

$$N = \begin{pmatrix} \pm 1 & \nu \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

mit $\nu \in \mathbb{Z}$ hat. Damit ist

$$N \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \nu \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm a & \pm b + \nu d \\ 0 & \pm d \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Es folgt $d' = \pm d$ und da $d, d' > 0$ nach Voraussetzung bereits $d = d'$. Die Diagonalelemente von N sind also beide $+1$ und es folgt $b' = b + \nu d$. Wegen $d = d'$ stammen b, b' beide aus dem gleichen Restsystem modulo d . Da sie sich nur um ein Vielfaches von d unterscheiden, folgt

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

g.e.d.

Definition 2.2.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Man setze dann für $f \in M_k$

$$f|T(n) := n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(n)} f|_k M.$$

Satz 2.2.4.

- (i) Durch $T(n)$ wird eine lineare Abbildung $M_k \rightarrow M_k$ definiert. Diese lässt S_k invariant (gemeint ist: Spitzenformen werden auf Spitzenformen geschickt). Man nennt $T(n)$ den n -ten HECKE-OPERATOR.
- (ii) Ist $f = \sum_{m \geq 0} a(m)q^m \in M_k$, so gilt

$$f|T(n) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right) q^m.$$

Beachte: Der konstante Term von $f|T(n)$ ist gleich

$$n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{d|n} d^{k-1} a(0) = n^{\frac{k}{2}-1} \sigma_{k-1}(n) a(0)$$

Beispiel 2.2.5. Sei $n = p$ prim. Dann ist

$$\begin{aligned} f|T(p) &= p^{\frac{k}{2}-1} \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{d|(m,p)} d^{k-1} a\left(\frac{mp}{d^2}\right) \right) q^m \\ &= p^{\frac{k}{2}-1} \sum_{m \geq 0} \left(a(mp) + p^{k-1} a\left(\frac{m}{p}\right) \right) q^m, \end{aligned}$$

wobei $a\left(\frac{m}{p}\right) := 0$ für $p \nmid m$, denn

$$\sum_{d|(m,p)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) = a(mp) + \begin{cases} 0 & \text{falls } p \nmid m \\ p^{k-1} a\left(\frac{m}{p}\right) & \text{falls } p \mid m \end{cases}$$

Beweis.

(i) Nach den Überlegungen in [Abschnitt 2.1](#) wissen wir, dass $f|T(n)$ das Transformationsverhalten einer Modulform vom Gewicht k besitzt. Auch ist $f|T(n)$ als Summe holomorpher Funktionen selbst holomorph auf \mathbb{H} . Zu zeigen verbleibt noch, dass $f|T(n)$ holomorph in ∞ ist und den Raum S_k invariant lässt. Beides folgt direkt aus Teil ii) des Satzes.

(ii) Benutze [Lemma 2.2.2](#), damit folgt

$$\begin{aligned} f|T(n) &= n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod d}} f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod d}} n^{\frac{k}{2}} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{m>0 \\ ad=n, d>0 \\ b \bmod d}} d^{-k} a(m) e^{2\pi i m \frac{az+b}{d}} \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{m>0 \\ d|n, d>0}} d^{-k} a(m) e^{2\pi i m \frac{n}{d^2} z} \left(\sum_{b \bmod d} e^{2\pi i m \frac{b}{d}} \right). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\sum_{b \bmod d} e^{2\pi i m \frac{b}{d}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } d \nmid m \\ d & \text{falls } d \mid m \end{cases}$$

2.2. Die Heckeoperatoren $T(n)$

Allgemein $1 + q + \dots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1} = 0$, falls $q \neq 1$ und $q^N = 1$, wende dies an mit $q = e^{2\pi i \frac{m}{d}}$, $N = d$. Damit erhalten wir, wobei zu beachten ist, dass die Vertauschung wegen absoluter Konvergenz gerechtfertigt sind

$$\begin{aligned}
 f|T(n) &= n^{k-1} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 0 \pmod{d} \\ d|n, d > 0}} d^{-k+1} a(m) e^{2\pi i \frac{mn}{d^2} z} & (m \mapsto md) \\
 &= \sum_{\substack{m \geq 0 \\ d|n, d > 0}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} a(md) e^{2\pi i \frac{mn}{d} z} & \left(d \mapsto \frac{n}{d}\right) \\
 &= \sum_{\substack{m \geq 0 \\ d|n, d > 0}} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d}\right) e^{2\pi i m d z} & (md \mapsto m) \\
 &= \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 0 \pmod{d} \\ d|n, d > 0}} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) e^{2\pi i m z} \\
 &= \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{d|m, d|n} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right) q^m.
 \end{aligned}$$

g.e.s.

Satz 2.2.6. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$T(m)T(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

Speziell gilt (vergleiche mit Ramanujan- τ -Funktion):

- (i) $T(n)T(m) = T(mn)$ falls $\text{ggT}(m, n) = 1$
- (ii) $T(p)T(p^\nu) = T(p^{\nu+1}) + p^{k-1}T(p^{\nu-1})$ für p prim und $\nu \geq 1$.

Beachte dass (ii) äquivalent ist zur Identität

$$\frac{1}{1 - T(p)X + p^{k-1}X^2} = \sum_{\nu \geq 0} T(p^\nu)X^\nu$$

Beweis. in mehreren Schritten: 1. Schritt: Beweis von (i): Seien m, n teilerfremd. Benutze **Lemma 2.2.2**, dann gilt

$$f|T(m)T(n) = (mn)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=m \\ d>0, b \pmod{d}}} \left(\sum_{\substack{a'd'=n \\ d'>0, b' \pmod{d'}}} f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \right)$$

$$= (mn)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=m \\ d>0, b \bmod d}} \left(\sum_{\substack{a'd'=n \\ d'>0, b' \bmod d'}} f|_k \begin{pmatrix} aa' & ab'+bd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix} \right).$$

Durchläuft d alle positiven Teiler von m und d' alle positiven Teiler von n , so durchläuft $D := dd'$ alle positiven Teiler von mn , denn $\text{ggT}(m, n) = 1$. Setzt man $A := aa'$, so gilt dann $AD = mn$. Ferner gilt: Durchläuft b ein volles Restsystem mod d und b' ein solches mod d' , so durchläuft $B = ab + bd'$ ein volles Restsystem mod dd' , denn in der Tat genügt es zu zeigen, dass diese Zahlen inkongruent mod dd' sind, denn dann sind dies genau dd' paarweise inkongruente Zahlen. Angenommen

$$ab'_1 + b_1d' \equiv ab'_2 + b_2d' \pmod{dd'},$$

dann gilt

$$a(b'_1 - b'_2) \equiv d(b_2 - b_1) \pmod{dd'}.$$

Dies impliziert $a(b'_1 - b'_2) \equiv 0 \pmod{d'}$. Aber $\text{ggT}(a, d') = 1$, denn $a|m$ und $d'|n$ und $\text{ggT}(m, n) = 1$ nach Voraussetzung. Also folgt $b'_1 \equiv b'_2 \pmod{d'}$, also $b'_1 = b'_2$. Es folgt jetzt $b_2 \equiv b_1 \pmod{d}$, also $b_2 = b_1$. Also folgt die Behauptung. Und damit

$$f|T(m)T(n) = (mn)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{AD=mn \\ D>0, B \bmod D}} f|_k \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = f|_k T(mn).$$

2. Schritt: Beweis von (ii): Es gilt nach [Lemma 2.2.2](#):

$$f|T(p) = p^{\frac{k}{2}-1} \left(f|_k \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{\mu \bmod p} f|_k \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & p \end{pmatrix} \right)$$

und

$$f|T(p^\nu) = (p^\nu)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu-\beta} & b \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\begin{aligned} f|T(p)T(p^\nu) &= (p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}-1} \left(\sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{\nu-\beta} & b \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix} + \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta \\ \mu \bmod p}} f|_k \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{\nu-\beta} & b \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix} \right) \\ &= (p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}-1} \left(\sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu+1-\beta} & pb \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix} + \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta \\ \mu \bmod p}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu-\beta} & b+\mu p^\beta \\ 0 & p^{\beta+1} \end{pmatrix} \right) \quad (2.1) \end{aligned}$$

2.2. Die Heckeoperatoren $T(n)$

Betrachte 2. Summe in (2.1): Durchläuft b ein Restsystem modulo p^β und μ ein Restsystem modulo p , so durchläuft $b + \mu p^\beta$ ein solches modulo $p^{\beta+1}$ (denn insgesamt $p^{\beta+1}$ Zahlen, paarweise inkongruent modulo $p^{\beta+1}$). Man sieht daher, dass die 2. Summe gleich

$$f|T(p^{\nu+1}) - (p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Betrachte 1. Summe in (2.1). Diese ist gleich

$$(p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}-1} \left(f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu+1-\beta} & pb \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix} \right).$$

Man erhält also

$$f|_k T(p)T(p^\nu) = f|T(p^{\nu+1}) + (p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}-1} \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} |_k \begin{pmatrix} p^{\nu-\beta} & b \\ 0 & p^{\beta-1} \end{pmatrix}}_{=:R}$$

In R ersetze β durch $\beta + 1$, erhalte

$$R = \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu-1 \\ b \bmod p^{\beta+1}}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu-1-\beta} & b \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix},$$

Man setze $b = \tilde{b} + \mu p^\beta$ wobei μ modulo p und \tilde{b} modulo p^β läuft

$$R = \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu-1 \\ \tilde{b} \bmod p^\beta \\ \mu \bmod p}} f|_k \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |_k \begin{pmatrix} p^{\nu-1-\beta} & \tilde{b} \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix}$$

da f Periode 1 hat, erhält man

$$(p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}-1} R = p^{k-1} (p^{\nu-1})^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu-1 \\ \tilde{b} \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu-1-\beta} & \tilde{b} \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix} = p^{k-1} f|_k T(p^{\nu-1})$$

3. Schritt: zeige durch Induktion nach $s \in \mathbb{N}$ (Übungsaufgabe), dass

$$T(p^\nu)T(p^s) = \sum_{\alpha=0}^{\min\{\nu, s\}} (p^\alpha)^{k-1} T(p^{\nu+s-2\alpha}),$$

was sich mit Teilern der Form $d = p^\alpha$ umschreiben lässt zu

$$T(p^\nu)T(p^s) = \sum_{d|(p^\nu, p^s)} d^{k-1} T\left(\frac{p^{\nu+s}}{d^2}\right).$$

4. Schritt: der allgemeine Fall! Induktion über die verschiedenen Primteiler von m . Sei $m = p^r m'$, $n = p^s n'$ mit $p \nmid m'$, $p \nmid n'$. Dann folgt mit i), dass

$$\begin{aligned} T(m)T(n) &= T(m'p^r)T(n'p^s) = T(m')T(p^r)T(n')T(p^s) \\ &= T(m')T(n')T(p^r)T(p^s). \end{aligned}$$

Wendet man dieses Argument nun induktiv auf $T(m')T(n')$ und weitere gemeinsame Primteiler an, so kann man davon ausgehen, dass m', n' nach endlich vielen Iterationen teilerfremd sind. Dann kann man mit i) und Schritt 3 schreiben

$$T(m)T(n) = \left(\sum_{d|(m',n')} d^{k-1} T\left(\frac{m'n'}{d^2}\right) \right) \left(\sum_{t|(p^r,p^s)} t^{k-1} T\left(\frac{p^r p^s}{t^2}\right) \right),$$

was sich nach erneuter Anwendung von i) vereinfacht zu

$$T(m)T(n) = \sum_{\substack{d|(m',n') \\ t|(p^r,p^s)}} (dt)^{k-1} T\left(\frac{p^r m' p^s n'}{(dt)^2}\right)$$

und mit $D = dt$ schließlich zu

$$T(m)T(n) = \sum_{D|(m,n)} D^{k-1} T\left(\frac{mn}{D^2}\right).$$

g.e.d.

2.3 Folgerungen

Satz 2.3.1. Die Hecke-Operatoren $T(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ erzeugen eine kommutative \mathbb{C} -Algebra von Endomorphismen von M_k , welche S_k stabil lässt. Die Algebra wird sogar bereits von den Hecke-Operatoren $T(p)$ für p prim erzeugt.

Beweis. Die Kommutativität folgt direkt aus [Satz 2.2.6](#). Wir zeigen noch, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ der Hecke-Operator $T(n)$ durch Hecke-Operatoren der Form $T(p)$ mit p prim darstellbar ist. Sei dazu $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ die Primzahlzerlegung von n , dann ist nach [Satz 2.2.6](#), i)

$$T(n) = \prod_{i=1}^r T(p_i^{\alpha_i}).$$

Ferner gilt nach [Satz 2.2.6](#), ii)

$$T(p)T(p^\nu) = T(p^{\nu+1}) + p^{k-1}T(p^{k-1}),$$

also lässt sich beispielsweise durch Wahl von $\nu = 1$ und Umstellen der Gleichung der Hecke-Operator $T(p^2)$ als Funktion von $T(p^1) = T(p)$ und $T(p^0) = T(1) = \text{id}_{M_k}$ ausdrücken. Induktiv gilt dies für alle Hecke-Operatoren der Form $T(p_i^{\alpha_i})$, sodass sich $T(n)$ bereits als Funktion der $T(p_i)$ darstellen lässt. Damit erzeugen die Hecke-Operatoren $T(p)$ mit p prim bereits die gesamte Algebra. *g.e.d.*

2.3. Folgerungen

Definition 2.3.2. Sei $f \in M_k$ mit $k > 0$. Dann heißt f HECKE-EIGENFORM, falls gilt

- (i) $f \not\equiv 0$,
- (ii) $f|T(n) = \lambda(n)f$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $\lambda(n) \in \mathbb{C}$.

Satz 2.3.3. Sei $f = \sum_{m \geq 0} a(m)q^m \in M_k$ eine Hecke-Eigenform mit $f|T(n) = \lambda(n)f$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

- (i) $a(n) = \lambda(n) \cdot a(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $a(1) \neq 0$,
- (iii)

$$\lambda(m)\lambda(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Speziell ist für $(m, n) = 1$

$$\lambda(m)\lambda(n) = \lambda(mn)$$

sowie für $\nu \geq 1$ und p prim

$$\lambda(p)\lambda(p^\nu) = \lambda(p^{\nu+1}) + p^{k-1}\lambda(p^{\nu-1}).$$

Beweis.

- (i) Nach Satz 2.2.4, ii) gilt

$$\lambda(n)f = f|T(n) = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right) q^m.$$

Koeffizientenvergleich bei q^1 liefert sofort $\lambda(n) \cdot a(1) = a(n)$.

- (ii) Angenommen, $a(1) = 0$. Dann ist nach i) auch $a(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $f = a(0)$ konstant und daher in M_0 . Da für eine Hecke-Eigenform $f \in M_k$ nach Definition $k > 0$ gefordert wird, folgt aus $f \in M_0 \cap M_k$ bereits $f \equiv 0$, was im Widerspruch zur Definition der Hecke-Eigenformen steht.

- (iii) Folgt aus Satz 2.2.6 und wegen $f \not\equiv 0$. Genauer gilt

$$f|T(m)T(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} f|T\left(\frac{mn}{d^2}\right) \implies \lambda(m)\lambda(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

q.e.d.

Definition 2.3.4. Man nennt $f = \sum_{m \geq 0} a(m)q^m$ eine normalisierte Hecke-Eigenform, falls $a(1) = 1$.

Bemerkung 2.3.5. Durch Division durch $a(1) \neq 0$ lässt sich jede Hecke-Eigenform normalisieren. Beachte jedoch, dass zum Beispiel die „normalisierten Eisensteinreihen“ E_k zwar Hecke-Eigenformen, aber keine normalisierten Hecke-Eigenformen sind. Die beiden Normalisierungsbegriffe unterscheiden sich also.

Frage: Gibt es immer Hecke-Eigenformen? Gibt es vielleicht sogar eine Basis von Hecke-Eigenformen?

Bemerkung 2.3.6.

(i) Man zeigt „leicht“, dass die Eisensteinreihe

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad \text{mit} \quad \sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$$

eine Hecke-Eigenform ist mit $E_k|T(n) = \sigma_{k-1}(n)E_k$ für alle $n \geq 1$.

In der Tat: Der konstante Term von $E_k|T(n)$ ist gleich $\sigma_{k-1}(n)$, siehe 2.2.4. Die höheren Terme ergeben sich nach demselben Satz als

$$-\frac{2k}{B_k} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \sigma_{k-1}\left(\frac{mn}{d^2}\right) = -\frac{2k}{B_k} \sigma_{k-1}(m) \sigma_{k-1}(n)$$

wegen

$$\sum_{d|(m,n)} d^\alpha \sigma_\alpha\left(\frac{mn}{d^2}\right) = \sigma_\alpha(m) \sigma_\alpha(n).$$

für beliebiges $\alpha \in \mathbb{N}$. Diese Identität lässt sich leicht induktiv zeigen (Übungsaufgabe), besitzt jedoch nur für $\alpha = k - 1$ im Kontext der Modulformen eine sinnvolle Interpretation.

(ii) Es ist $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$, wobei $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n$ mit $\tau(n) \in \mathbb{Z}$ und $\tau(1) = 1$. Daher ist Δ eine normalisierte Hecke-Eigenform in S_{12} . Insbesondere ist

$$\tau(m)\tau(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{11} \tau\left(\frac{mn}{d^2}\right),$$

$$\tau(m)\tau(n) = \tau(mn) \quad \text{für } (m, n) = 1,$$

$$\tau(p)\tau(p^\nu) = \tau(p^{\nu+1}) + p^{11} \tau(p^{\nu-1}) \quad \text{für } p \text{ prim.}$$

(iii) Man kann S_k mit einem Skalarprodukt versehen, derart dass die $T(n)$ hermitesch bezüglich dieses Skalarproduktes sind. Dann folgt aus der Linearen Algebra bereits, dass die $T(n)$ *simultan* diagonalisierbar sind. Dies garantiert die Existenz einer Basis von Hecke-Eigenformen.

2.4 Exkurs: Produktdarstellung der Diskriminantenfunktion

Satz 2.4.1. Für die Diskriminantenfunktion Δ gilt die Produktentwicklung

$$\Delta(z) := \frac{1}{1728} (E_4^3(z) - E_6^2(z)) = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^{24},$$

wobei wie üblich $q := \exp(2\pi iz)$ ist.

Beweis. Ein erster Beweis dieser Identität stammt von Jacobi; ein weiterer Beweis, der allein mit elementaren Mitteln auskommt, wird auf Übungsblatt 4 geführt werden. Im Folgenden soll ein vergleichsweise einfacher Beweis von Professor Kohnen selbst vorgestellt werden, der unter anderem auf die Hecke-Operatoren zurückgreift.

1. Schritt: Wir leiten eine zur Behauptung äquivalente Aussage her. Nehme also an, die Produktdarstellung gelte, dann können wir die logarithmische Ableitung bilden (verifiziere durch Nachrechnen unter Beachtung der Produktregel):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta'}{\Delta} &= 2\pi i - 2\pi i \cdot 24 \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{q^m}{1 - q^m} \\ &= 2\pi i \left(1 - 24 \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{a=1}^{\infty} q^{ma} \right) \\ &= 2\pi i \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \right). \end{aligned}$$

Es genügt also, folgende Aussage zu zeigen:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = 2\pi i E_2, \tag{*}$$

wobei $E_2(z) := 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n$. Dies ist der ...

2.Schritt: Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte nun wie in [Definition 2.2.1](#)

$$\mathcal{M}(n) := \{ M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det(M) = n \}.$$

Wohl bekannt ist aus [Lemma 2.2.2](#), dass

$$\mathcal{M}(n) = \bigcup_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b(\bmod d)}} \Gamma(1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

und damit $\# \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(n) = \sigma_1(n)$. Definiere nun einen „multiplikativen Hecke-Operator“ \mathfrak{M}_n , der eine Modulform f vom Gewicht k bezüglich $\Gamma(1)$ auf eine solche von Gewicht $\sigma_1(n) \cdot k$ abbildet durch

$$\mathfrak{M}_n(f) := \prod_{\gamma \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(n)} f|_k \gamma = \prod_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \pmod{d}}} f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Dies ist wohldefiniert (argumentiere dazu wie bei $T(n)$ in [Abschnitt 2.1](#)). Wendet man dies nun auf $f = \Delta$ an, dann ist $\mathfrak{M}_n(f) = \mathfrak{M}_n(\Delta)$ eine Modulform vom Gewicht $12\sigma_1(n)$ ohne Nullstellen in \mathbb{H} und mit $\text{ord}_\infty(\mathfrak{M}_n(\Delta)) = \sigma_1(n)$.

Aus der Valenzformel folgt jetzt $\mathfrak{M}_n(\Delta) = c \cdot \Delta^{\sigma_1(n)}$ für ein $c \in \mathbb{C}^\times$. Durch logarithmisches Ableiten beider Seiten von [Gleichung 1](#) erhalten wir mit $f = \Delta$ und $\mathfrak{M}_n(\Delta) = c \cdot \Delta^{\sigma_1(n)}$, dass

$$\sigma_1(n) \frac{\Delta'}{\Delta} = \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \pmod{d}}} d^{-2} n \frac{\Delta'}{\Delta} \left(\frac{az+b}{d} \right) = \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \pmod{d}}} \frac{\Delta'}{\Delta} \Big|_2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad (2)$$

denn die Ableitung von

$$f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = n^{\frac{k}{2}} d^{-k} f \left(\frac{az+b}{d} \right)$$

ist für beliebiges $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\left(f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right)' = n^{\frac{k}{2}} d^{-k} \frac{a}{d} f' \left(\frac{az+b}{d} \right) = n^{\frac{k}{2}} d^{-k-2} n f' \left(\frac{az+b}{d} \right).$$

Setzt man $\frac{\Delta'}{\Delta} = 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} a(m) q^m$, so ergibt sich aus [Gleichung 2](#) unter formaler Anwendung der Hecke-Operatoren (siehe Beweis von [Satz 2.2.4](#), ii)) für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$

$$\sigma_1(n) a(m) = \sum_{d|(m,n)} da \left(\frac{mn}{d^2} \right).$$

Einsetzen von $m = 1$ liefert

$$\sigma_1(n) a(1) = a(n)$$

und garantiert damit, dass $\frac{\Delta'}{\Delta}$ von der Form

$$\frac{\Delta'}{\Delta}(z) = 2\pi i \left(a(0) + a(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \right)$$

ist. Multipliziert man nun beide Seiten mit $\Delta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) q^m$ und beachtet dabei $\tau(1) = 1$ sowie $\tau(2) = -24$, ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$a(0) = 1 \quad \text{und} \quad a(1) = -24,$$

womit alles gezeigt ist.

q.e.d.

3 Das Petersson'sche Skalarprodukt

3.1 Invariantes Maß und Skalarprodukt

Ziel: Definition eines „natürlichen“ Skalarprodukts auf S_k . Hierzu benötigt man zunächst ein $\Gamma(1)$ -invariantes Maß auf \mathbb{R}^2 .

Definition 3.1.1. Für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ setze man

$$d\omega(z) := \frac{dx \, dy}{y^2}$$

Satz 3.1.2. Die Differentialform $dw = \frac{dy \, dy}{y^2}$ für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ ist $SL_2(\mathbb{R})$ -invariant, d. h. $dw(M \circ z) = dw$ für alle $M \in SL_2(\mathbb{R})$.

Beweis. Es gilt $d\omega(z) = \frac{i}{2y^2} dz \, \overline{dz}$, denn

$$\begin{aligned} dz \, \overline{dz} &= (dx + i \, dy)(dx - i \, dy) \\ &= dx \, dx - i \, dx \, dy + i \, dy \, dx + dy \, dy \\ &= 0 - i \, dx \, dy - i \, dx \, dy + 0 \\ &= -2i \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Sei nun $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, dann gilt unter Verwendung von

$$\frac{d(M \circ z)}{dz} = \frac{d \frac{az+b}{cz+d}}{dz} = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

die Behauptung nach

$$\begin{aligned} d\omega(M \circ z) &= \frac{i}{2(\operatorname{Im}(M \circ z))^2} d(M \circ z) \, \overline{d(M \circ z)} \\ &= \frac{i}{2 \frac{y^2}{|cz+d|^4}} \frac{dz}{(cz+d)^2} \frac{\overline{dz}}{(cz+d)^2} \end{aligned}$$

3.1. Invariantes Maß und Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2 \frac{y^2}{|cz+d|^4}} \frac{dz}{(cz+d)^2} \frac{\overline{dz}}{\overline{(cz+d)^2}} \\
&= \frac{i|cz+d|^4}{2y^2} \cdot \frac{1}{|cz+d|^4} \cdot dz \overline{dz} \\
&= \frac{i}{2y^2} dz \overline{dz} \\
&= d\omega(z).
\end{aligned}$$

g. e. d.

Ansatz: $f, g \in S_k$, setze:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\overline{\mathcal{F}}} y^k f(z) \overline{g(z)} d\omega$$

wobei \mathcal{F} ein Fundamentalbereich ist.

Bemerkung 3.1.3. Sei $\eta = \frac{dz}{y}$. Dann gilt $d\eta = \frac{dx dy}{y^2}$, denn

$$d\eta = d\left(\frac{dx}{y} + i \frac{dy}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} dy dx + i \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy dy = \frac{dx dy}{y^2}.$$

Erinnerung. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ heißt Fundamentalbereich (für $\Gamma(1)$), falls gilt

- (i) \mathcal{F} ist offen,
- (ii) für alle $z \in \mathbb{H}$ existiert $M \in \Gamma(1)$ mit $M \circ z \in \overline{\mathcal{F}}$,
- (iii) sind $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$ und $z_2 = M \circ z_1$ mit $M \in \Gamma(1)$, dann gilt $M = \pm E$ und $z_1 = z_2$.

Beobachtung: Für $A \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist der Rand ∂A abgeschlossen, daher meßbar. Wir werden oft fordern, dass ∂F eine Nullmenge ist.

Beispiel 3.1.4. Der Rand des Standardfundamentalbereich

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{H} \mid |x| < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\}$$

ist eine Nullmenge.

Satz 3.1.5. Seien \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 Fundamentalbereiche derart, dass $\partial\mathcal{F}_1$ und $\partial\mathcal{F}_2$ Nullmengen sind. Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar und $\Gamma(1)$ -invariant, d. h. $f(M \circ z) = f(z)$ für alle $M \in \Gamma(1)$. Ferner gelte

$$\int_{\overline{\mathcal{F}_1}} |f| \, dw < \infty,$$

d. h. also dass $|f|$ über $\overline{\mathcal{F}_1}$ integrierbar ist, dies impliziert, dass f über $\overline{\mathcal{F}_1}$ integrierbar ist.

Dann ist f auch über $\overline{\mathcal{F}_2}$ integrierbar und

$$\int_{\overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw = \int_{\overline{\mathcal{F}_2}} f \, dw.$$

Beweis. Nach Eigenschaft (ii) eines Fundamentalbereichs gilt (mit $\Gamma(1)' = \Gamma(1)/\pm E$)

$$\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \Gamma(1)'} M^{-1} \circ \overline{\mathcal{F}_1} = \bigcup_{M \in \Gamma(1)'} M \circ \overline{\mathcal{F}_2}.$$

Nach (iii) gilt $M \circ \mathcal{F}_1 \cap N \circ \mathcal{F}_1 = \emptyset$ für $M \neq \pm N$. Wegen $\overline{\mathcal{F}_1} = \mathcal{F}_1 \cup \partial\mathcal{F}_1$ und da $\partial\mathcal{F}_1$ eine Nullmenge, folgt, dass

$$M \circ \overline{\mathcal{F}_1} \cap N \circ \overline{\mathcal{F}_2} \text{ eine Nullmenge für } M \neq \pm N,$$

denn

$$\begin{aligned} M \circ \overline{\mathcal{F}_1} \cap N \circ \overline{\mathcal{F}_1} &= M \circ (\mathcal{F}_1 \cup \partial\mathcal{F}_1) \cap N \circ (\mathcal{F}_1 \cup \partial\mathcal{F}_1) \\ &= (M \circ \mathcal{F}_1 \cup M \circ (\partial\mathcal{F}_1)) \cap (N \circ \mathcal{F}_1 \cup N \circ (\partial\mathcal{F}_1)) \\ &= (M \circ \mathcal{F}_1 \cap N \circ \mathcal{F}_1) \cup (M \circ \mathcal{F}_1 \cap N \circ (\partial\mathcal{F}_1)) \cup \dots \end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_{\overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw = \int_{\bigcup_{M \in \Gamma(1)'} M \circ \overline{\mathcal{F}_2} \cap \overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw,$$

wobei zu beachten ist, dass es sich um eine abzählbare Vereinigung von meßbaren Mengen handelt und die Durchschnitte haben Maß Null, also gilt die abzählbare Additivität des Integrals:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw &= \sum_{M \in \Gamma(1)'} \int_{M \circ \overline{\mathcal{F}_2} \cap \overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw = \sum_{M \in \Gamma(1)'} \int_{\overline{\mathcal{F}_2} \cap M^{-1}\overline{\mathcal{F}_1}} f(M \circ z) \, dw(M \circ z) \\ &= \sum_{M \in \Gamma(1)'} \int_{\overline{\mathcal{F}_2} \cap M^{-1}\overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw = \dots = \int_{\overline{\mathcal{F}_2}} f \, dw. \end{aligned}$$

q. e. d.

3.1. Invariantes Maß und Skalarprodukt

Beispiel 3.1.6. Für jeden Fundamentalbereich \mathcal{F} , so dass $\partial\mathcal{F}$ eine Nullmenge ist, gilt

$$\text{vol}(\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}) = \int_{\overline{\mathcal{F}}} dw = \frac{\pi}{3} < \infty$$

Beweis. Es genügt nach [Satz 3.1.5](#) den Fall von $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ zu betrachten wobei \mathcal{F}_1 der Standard Fundamentalbereich ist (siehe [Beispiel 3.1.4](#)).

Es gilt für $\mathcal{F}_c := \mathcal{F}_1 \cap \{z \in \mathbb{H} \mid y \leq c\}$

$$\int_{\overline{\mathcal{F}_1}} \frac{dx dy}{y^2} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\overline{\mathcal{F}_c}} \frac{dx dy}{y^2} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\overline{\mathcal{F}_c}} d\eta = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\partial\overline{\mathcal{F}_c}} \frac{dz}{y},$$

wobei die letzte Gleichheit wegen dem Satz von Stokes und [Bemerkung 3.1.3](#) folgt.

Das Integral über die Gerade $z(t) = ic + t$ für $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ergibt

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c} dt = -\frac{1}{c} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0.$$

Die Integrale über die beiden Geradenstücke heben sich auf, wegen entgegengesetzter Orientierung und da y invariant unter $z \mapsto z + 1$. Damit bleibt das Integral über den Kreisbogen, dieser wird parametrisiert durch

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{für} \quad \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

Integral ist reellwertig und hat damit den Wert

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{i(\cos t + i \sin t)}{\sin t} dt = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \text{Re} \left(\frac{i \cos t - \sin t}{\sin t} \right) dt = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (-1) dt = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

g. e. d.

Satz 3.1.7. Für $f \in M_k$ setze man $g(z) := y^{\frac{k}{2}} |f(z)|$ für $z \in \mathbb{H}$. Dann gilt

- (i) g ist invariant unter $\Gamma(1)$,
- (ii) ist $f \in S_k$, dann ist g auf \mathbb{H} beschränkt.

Beweis.

- (i) Es gilt

$$g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \left(\text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)^{\frac{k}{2}} \left|f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right| = \left(\frac{y}{|cz+d|^2}\right)^{\frac{k}{2}} |cz+d|^k |f(z)| = g(z).$$

- (ii) Es ist $\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \Gamma(1)} M \circ \overline{\mathcal{F}}$. Da nach (i) g invariant unter $\Gamma(1)$ ist, genügt es zu zeigen, dass g auf $\overline{\mathcal{F}_1}$ beschränkt ist. Aber

$$\overline{\mathcal{F}_1} \cap \overline{\mathcal{F}_c} \text{ ist kompakt.}$$

Wegen Stetigkeit genügt es also zu zeigen, dass g für $y \rightarrow \infty$ beschränkt ist. Sei $f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)e^{2\pi i n z}$, beachte $n \geq 1$, denn $f \in S_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |g(z)| &= y^{\frac{k}{2}} |f(z)| = y^{\frac{k}{2}} \left| e^{2\pi z} \sum_{n \geq 1} a(n) e^{2\pi i(n-1)z} \right| \\ &\leq y^{\frac{k}{2}} e^{-2\pi y} \left(\sum_{n \geq 1} |a(n)| e^{-2\pi(n-1)y} \right) \\ &= y^{\frac{k}{2}} e^{-2\pi y} e^{2\pi c} \left(\sum_{n \geq 1} |a(n)| e^{-2\pi n c} \right) \\ &= \frac{y^{\frac{k}{2}}}{e^{2\pi y}} \cdot K \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

g.e.d.

Definition 3.1.8. Für $f, g \in M_k$ derart, dass $fg \in S_{2k}$, setze

$$\langle f, g \rangle := \int_{\overline{\mathcal{F}}} f(z) \overline{g(z)} y^k dw, \quad (3.1)$$

wobei \mathcal{F} ein Fundamentalbereich wie oben ist.

Satz 3.1.9.

- (i) (3.1) ist absolut konvergent und hängt nicht von der Auswahl von \mathcal{F} ab.
- (ii) $S_k \times S_k \rightarrow \mathbb{C}$, $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf S_k .

Beweis.

- (i) Beachte $fg \in S_{2k}$ und $\left| f(z) \overline{g(z)} \right| y^k = y^k |f(z)g(z)|$, wende Satz 3.1.7 (ii) an und bemerke $\int_{\overline{\mathcal{F}}} dw < \infty$. Unabhängig von \mathcal{F} folgt aus Satz 3.1.5.
- (ii) Klar.

g.e.d.

3.2 Anwendung: Eine Charakterisierung der Eisensteinreihen

Satz 3.2.1. Sei $k \in 2\mathbb{Z}$, $k \geq 4$. Sei $C_k := \{ f \in M_k \mid \langle f, g \rangle = 0 \ \forall g \in S_k \}$ ein Unterraum von M_k . Dann gilt $C_k = \mathbb{C}E_k$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

Lemma 3.2.2. Es gilt $M_k = C_k \oplus S_k$ (und $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$).

Beweis. Sei $f \in C_k \cap S_k$. Dann $\langle f, f \rangle = 0$, also $f = 0$.

Sei $f \in M_k$. Die Abbildung $S_k \rightarrow \mathbb{C}$, $g \mapsto \langle g, f \rangle$ ist ein lineares Funktional. Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert daher ein eindeutig bestimmtes Element $g_0 \in S_k$, so dass $\langle g, f \rangle = \langle g, g_0 \rangle$ für alle $g \in S_k$. Daher $\langle g, f - g_0 \rangle = 0$ für alle $g \in S_k$, d. h. $\langle f - g_0, g \rangle = 0$ für alle $g \in S_k$. Also ist $f - g_0 \in C_k$ nach Definition und somit

$$f = \underbrace{(f - g_0)}_{\in C_k} + \underbrace{g_0}_{\in S_k}.$$

g.e.d.

Es folgt

$$\dim C_k = \dim M_k - \dim S_k = 1 + \dim S_k - \dim S_k = 1.$$

Daher genügt es zu zeigen, dass $E_k \in C_k$, d. h. $\langle E_k, g \rangle = 0$ für alle $g \in S_k$.

Lemma 3.2.3. Es gilt

$$E_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \setminus \Gamma(1)} (1|_k M)(z),$$

wobei $\Gamma(1)_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ und $(1|_k M) = (cz + d)^{-k}$.

Beweis. Es gilt $E_k = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$ mit $G_k = \sum'_{m,n} \frac{1}{(mz+n)^k}$. Ist $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, so schreibe $(m, n) = \lambda(c, d)$ wobei $\lambda = \text{ggT}(m, n) \in \mathbb{N}$ und $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\text{ggT}(c, d) = 1$. Also

$$G_k(z) = \underbrace{\zeta(k)}_{=\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}} \cdot \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1}} (cz + d)^{-k}.$$

Damit

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1}} (cz + d)^{-k}.$$

Daher genügt es zu zeigen

$$\sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \setminus \Gamma(1)} (1|_k M)(z) = \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1}} (cz + d)^{-k}.$$

Jeder Summand links hat die Gestalt $(cz + d)^{-k}$ mit $\text{ggT}(c, d) = 1$. Umgekehrt ist zu zeigen: Jedes $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\text{ggT}(c, d) = 1$ lässt sich vervollständigen zu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ eindeutig bis auf Links-Multiplikation eines Elementes in $\Gamma(1)_\infty$. Es gilt:

- $\text{ggT}(c, d) = 1$, also existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$, denn \mathbb{Z} ist ein Hauptidealring. Also $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$.
- $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$.
- Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$. Dann $ad - bc = 1 = a'd - b'c$. Also $(a - a')d = (b - b')c$, also $\frac{c}{d} = \frac{a-a'}{b-b'}$. Da $\text{ggT}(c, d) = 1$ folgt $a - a' = nc, b - b' = nd$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Das heißt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$.

g.e.d.

Man kann dies schreiben als

$$E_k(z) = \sum_{M \in \Gamma(1)'_\infty \setminus \Gamma(1)'} (1|_k M)(z),$$

wobei $\Gamma(1)' = \Gamma(1)/\{\pm E\}$ und $\Gamma(1)'_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} / \{\pm E\}$.

Sei $g \in S_k$, zu zeigen ist $\langle E_k, g \rangle = 0$.

Nach Definition

$$\langle E_k, g \rangle = \int_{\mathcal{F}} E_k(z) \overline{g(z)} y^k \, dw = \int_{\mathcal{F}} \left(\sum_{M \in \Gamma(1)'_\infty \setminus \Gamma(1)'} (1|_k M)(z) \overline{g(z)} (\text{Im } z)^k \right) dw(z)$$

Beachte

$$\begin{aligned} (1|_k M)(z) \overline{g(z)} (\text{Im } z)^k &= (1|_k M)(z) \overline{g(M \circ z) (1|_k M)(z)} (\text{Im } M \circ z)^k |(1|_k M)(z)|^{-2} \\ &= \overline{g(M \circ z)} (\text{Im } M \circ z)^k. \end{aligned}$$

Sei $\tilde{\mathcal{F}} := \bigcup_{M \in \Gamma(1)'_\infty \setminus \Gamma(1)'} M \circ \overline{\mathcal{F}}$ ein Fundamentalbereich für die Untergruppe $\Gamma(1)'_\infty \subseteq \Gamma(1)'$, welche durch $z \mapsto z + n$ operiert. Dann folgt, wobei die zweite Gleichheit durch Substitution und Vertauschung erfolgt, diese ist aufgrund der absoluten Konvergenz gerechtfertigt:

$$\langle E_k, g \rangle = \sum_{M \in \Gamma(1)'_\infty \setminus \Gamma(1)'} \int_{M \circ \overline{\mathcal{F}}} \overline{g(z)} y^{k-2} \, dx \, dy = \int_{\tilde{\mathcal{F}}} \overline{g(z)} y^{k-2} \, dx \, dy.$$

3.2. Anwendung: Eine Charakterisierung der Eisensteinreihen

Man zeigt formal: Integral ist unabhängig der Auswahl des Fundamentalbereichs \mathcal{G} . Man wähle für \mathcal{G} einen Streifen der Breite 1, etwa $\mathcal{G} = \{ z = x + iy \in \mathbb{H} \mid |x| < \frac{1}{2} \}$. Dann

$$\langle E_k, g \rangle = \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \overline{g(z)} y^{k-2} dx dy$$

Sei $g(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) e^{2\pi i n z} = \sum_{n \geq 1} a(n) e^{2\pi i n x} e^{-2\pi n y}$, daher $\overline{g(z)} = \sum_{n \geq 1} \overline{a(n)} e^{-2\pi n y} e^{-2\pi i n x}$.

$$\langle E_k, g \rangle = \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \geq 1} \overline{a(n)} e^{-2\pi n y} y^{k-2} e^{-2\pi i n x} \right) dx dy = 0$$

Vertausche Summe und Integral (denn $g \in S_k$) und beachte $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i n x} dx = 0$, da $n \neq 0$. *g.e.d.*

4 Poincaré-Reihen

Motivation: Die Abbildung $S_k \rightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto a_f(n) = n$ -ter Fourierkoeffizient von f ist ein lineares Funktional. Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz existiert ein eindeutig bestimmtes \tilde{P}_n für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$a_f(n) = \langle f, \tilde{P}_n \rangle \quad \text{für alle } f \in S_k.$$

Frage: Kann man \tilde{P}_n explizit angeben? Antwort: ja!

Definition 4.0.1. Sei $k \in 2\mathbb{Z}$, $k \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die formale Reihe

$$P_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

die n -te Poincaré Reihe vom Gewicht k für $\Gamma(1)$. Summiert wird über alle $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\text{ggT}(c,d) = 1$ und zu jedem solchen Paar ist $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ zu bestimmen, so dass $ad-bc = 1$, d. h. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$. Dies ist unabhängig von der Auswahl von a, b , denn ist auch a', b' ein solches Paar, so gilt $a' = a + mc$, $b' = b + md$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ und somit

$$\frac{a'z + b'}{cz + d} = \frac{az + b}{cz + d} + m$$

mit $m \in \mathbb{Z}$ und $e^{2\pi i n m} = 1$.

4.1 Anwendungen

Bemerkung 4.1.1. Es gilt $P_0 = E_k$, wie man durch Vergleich mit [Lemma 3.2.3](#) leicht einsieht.

Satz 4.1.2.

- (i) Die Reihe P_n konvergiert auf Kompakta in \mathbb{H} gleichmäßig absolut, stellt also dort eine holomorphe Funktion dar. Es gilt $P_n \in S_k$ für $n \geq 1$.

4.1. Anwendungen

(ii) Es gilt

$$\langle f, P_n \rangle = \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}} a_f(n).$$

für alle $f \in S_k$ mit $f = \sum_{m \geq 1} a_f(m) q^m$.

Beweis.

(i) Wegen $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$ ist

$$\left| e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \right| \leq 1$$

und daher

$$\sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} |cz+d|^{-k} \cdot \left| e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \right| \leq \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} |cz+d|^{-k},$$

sodass die Reihe der Absolutbeträge nach [Lemma 3.2.3](#) durch die Eisensteinreihe von Gewicht k majorisiert wird. Letztere konvergiert nach FT 2 auf Kompakta in \mathbb{H} gleichmäßig absolut.

Zeige noch $P_n \in S_k$ für $n \geq 1$. Schreibe zunächst

$$P_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \setminus \Gamma(1)} (e^n|_k M)(z),$$

mit $e^n(z) := e^{2\pi i n z}$ und beachte, dass $e^n|_k M = e^n$ für $M \in \Gamma(1)_\infty$. Hierbei ist wie in [Lemma 3.2.3](#)

$$\Gamma(1)_\infty := \left\{ M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}.$$

Für $P_n \in S_k$ müssen wir zeigen, dass $P_n|_k M = P_n$ für alle $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und zudem in $z = i\infty$ verschwindet. Wie im Fall der Eisensteinreihen ist hierfür zu zeigen, dass

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} P_n(z) = 0,$$

also

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_n(z_\nu) = 0$$

für jede Folge von $z_\nu \in \mathbb{H}$ mit $z_\nu \rightarrow i\infty$. Wegen gleichmäßiger Konvergenz gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_n(z_\nu) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} \lim_{\nu \rightarrow \infty} (cz_\nu + d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az_\nu+b}{cz_\nu+d}}$$

und alle Grenzwerte unter der Summe sind 0. In der Tat ist der Exponentialterm wegen $\frac{az_\nu+b}{cz_\nu+d} \in \mathbb{H}$ beschränkt und für $c \neq 0$ strebt $(cz_\nu + d)^{-k}$ gegen 0. Andererseits ist für $c = 0$ der vordere Term gleich d^{-k} und somit beschränkt, während

$$\frac{az_\nu+b}{d} \rightarrow i\infty \implies e^{2\pi i n \frac{az_\nu+b}{d}} \rightarrow 0.$$

Damit ist alles gezeigt.

(ii) Unter Benutzung der Darstellung

$$P_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \setminus \Gamma(1)} (e^n|_k M)(z)$$

zeigt man mit dem gleichen „Konvolutionstrick“ wie im Beweis von [Satz 3.2.1](#), dass

$$\langle f, P_n \rangle = \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(z) e^{\overline{2\pi i n z}} y^{k-2} dx dy.$$

Man stelle sich hierzu vor, dass \mathbb{H} als disjunkte Vereinigung von Bildern des exakten Fundamentalbereichs unter Linksmultiplikation mit $M \in \Gamma(1)$ entsteht. Teilt man nun $\Gamma(1)_\infty$ heraus, also alle Translationen, so verbleibt noch der Streifen $|x| < \frac{1}{2}, y > 0$.

Es gilt weiter für beliebiges $f \in S_k$ mit Darstellung $f(z) = \sum_{m \geq 1} a(m) q^m$, wie üblich $q = \exp(2\pi i z)$ und $z = x + iy$, dass

$$\begin{aligned} \langle f, P_n \rangle &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{m \geq 1} a(m) e^{2\pi i m x} e^{-2\pi m y} e^{-2\pi i n x} e^{-2\pi n y} y^{k-2} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{m \geq 1} a(m) e^{2\pi i (m-n)x} e^{-2\pi (n+m)y} y^{k-2} dx dy. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i r x} dx = \delta_{r,0} := \begin{cases} 1, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases} \quad (\text{Kronecker-Delta})$$

für beliebiges $r \in \mathbb{Z}$ folgt

$$\begin{aligned} \langle f, P_n \rangle &= \int_0^\infty \sum_{m \geq 1} a(m) \delta_{m,n} e^{-2\pi (n+m)y} y^{k-2} dy \\ &= a(n) \int_0^\infty e^{-4\pi n y} y^{k-2} dy \\ &= a(n) \frac{1}{(4\pi n)^{k-1}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-y} y^{k-2} dy}_{=\Gamma(k-1)} \\ &= a(n) \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}}. \end{aligned}$$

g.e.d.

4.1. Anwendungen

Korollar 4.1.3. Die Poincaré-Reihen $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zu einem festen Gewicht $k \geq 4$ mit k gerade, erzeugen den Raum S_k .

Beweis. Angenommen die P_n erzeugen nicht ganz S_k , dann existiert ein $f \in S_k$ mit $\langle f, P_n \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit [Satz 4.1.2](#), ii) folgt hieraus aber $a(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $f \equiv 0$. *g.e.d.*

Satz 4.1.4. Die Reihe P_n hat die Fourier-Entwicklung

$$P_n(z) = \sum_{m \geq 1} g_n(m) q^m$$

mit

$$g_n(m) := \delta_{m,n} + 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sum_{c \geq 1} \left[\frac{1}{c} \cdot K(m, n, c) \cdot J_{k-1} \left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c} \right) \right].$$

Hierbei ist die Kloosterman-Summe K definiert als

$$K(m, n, c) := \sum_{\substack{d \pmod{c} \\ (c,d)=1}} e^{2\pi i \frac{md+n\bar{d}}{c}},$$

wobei $\bar{d} \in \mathbb{Z}$ mit $\bar{d}d \equiv 1 \pmod{c}$ ist, und die Besselfunktion J_{k-1} definiert als

$$J_{k-1}(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-\frac{1}{4}x^2)^\ell}{\ell!(k-1+\ell)!}.$$

Beweis. Nach Definition ist

$$P_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}}.$$

Ist $c = 0$, so folgt aus $\text{ggT}(c, d) = 1$ bereits $d = a = \pm 1$ und unabhängig von $b \in \mathbb{Z}$ ergibt sich zweimal der Term

$$\frac{1}{2}(\pm 1)^{-k} e^{2\pi i n \frac{\pm z+b}{\pm 1}} = \frac{1}{2} e^{2\pi i n z} e^{\pm 2\pi i n b} = \frac{1}{2} e^{2\pi i n z},$$

zusammengenommen also $e^{2\pi i n z}$. Die übrigen Terme ergeben den Beitrag

$$\sum_{\substack{c \geq 1, d \in \mathbb{Z} \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} = \sum_{c \geq 1} \sum_{\substack{d' \pmod{c} \\ \text{ggT}(c,d')=1 \\ ad'-b'c=1}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (c(z+\nu)+d')^{-k} e^{2\pi i n \frac{a(z+\nu)+b'}{c(z+\nu)+d'}}.$$

Die rechte Seite entsteht aus der linken, indem man für festes $c \geq 1$ und ein festes Vertretersystem $d'(\bmod c)$ jedes $d \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(c, d) = 1$ in der Form $d = d' + c\nu$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$ und d' im vorgegebenen Vertretersystem schreibt. Schreibt man zudem mit geeignetem $b' \in \mathbb{Z}$ auch $b = b' + a\nu$, so wird die Bedingung $ad - bc = 1$ zu

$$1 = ad - bc = a(d' + c\nu) - (b' + a\nu)c = ad' - b'c$$

und die obige Darstellung folgt durch Ausklammern von c und a . Im Folgenden schreiben wir wieder d und b statt d' und b' .

Lemma 4.1.5. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $c > 0$. Sei $\gamma > 0$ beliebig (insbesondere nicht unbedingt ganzzahlig). Dann gilt

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (c(z + \nu) + d)^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a(z+\nu)+b}{c(z+\nu)+d}} = \frac{2\pi(-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\gamma}}{c}\right) e^{\frac{2\pi i}{c}(\gamma a + md)} e^{2\pi i m z}.$$

Beweis. Es genügt, diese Aussage nur für den Fall $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zu zeigen, d.h.

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (z + \nu)^{-k} e^{-2\pi i \gamma \frac{1}{z+\nu}} = 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(4\pi\sqrt{m\gamma}) e^{2\pi i m z}.$$

In der Tat: Ersetzt man in dieser Gleichung z durch $z + \frac{d}{c}$ und γ durch $\frac{\gamma}{c^2}$ und multipliziert dann mit $c^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a}{c}}$, so wird die linke Seite zu

$$\begin{aligned} c^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a}{c}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(z + \frac{d}{c} + \nu\right)^{-k} e^{-2\pi i \frac{\gamma}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c} + \nu}} &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (cz + d + c\nu)^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a}{c} - 2\pi i \frac{\gamma}{c} \frac{1}{cz + d + c\nu}} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (c(z + \nu) + d)^{-k} e^{\frac{2\pi i \gamma}{c} \left(a - \frac{1}{c(z+\nu)+d}\right)} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (c(z + \nu) + d)^{-k} e^{\frac{2\pi i \gamma}{c} \frac{ac(z+\nu)+ad-1}{c(z+\nu)+d}} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (c(z + \nu) + d)^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a(z+\nu)+b}{c(z+\nu)+d}} \end{aligned}$$

sowie die rechte Seite zu

$$c^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a}{c}} 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{mc^2}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(4\pi\sqrt{\frac{m\gamma}{c^2}}\right) e^{2\pi i m(z + \frac{d}{c})} \quad (4.1)$$

4.1. Anwendungen

$$\begin{aligned}
&= c^{-k+2\frac{k-1}{2}} 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\gamma}}{c}\right) e^{2\pi i \gamma \frac{a}{c} + 2\pi i m z + 2\pi i m \frac{d}{c}} \\
&= \frac{2\pi(-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\gamma}}{c}\right) e^{\frac{2\pi i}{c}(\gamma a + md)} e^{2\pi i m z}.
\end{aligned}$$

Die linke Seite von (4.1) konvergiert gleichmäßig absolut auf kompakten Mengen in \mathbb{H} und hat den Limes 0 für $q \rightarrow \infty$ (gleicher Beweis wie in Satz 4.1.2). Sie hat daher eine Fourierreentwicklung $\sum_{m \geq 1} c(m)q^m$ mit

$$c(m) = \int_{ic}^{ic+1} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (z + \nu)^{-k} e^{-2\pi\gamma \frac{1}{z+\nu}} \right) e^{-2\pi i m z} dz \stackrel{z \mapsto is}{=} -i^{-k+1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-k} e^{-2\pi \frac{\gamma}{s}} e^{2\pi m s} ds$$

Es gilt nach „Abramowitz-Stegun“, Seite 1026, Formel 29.3.80:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-k} e^{-\frac{\alpha}{s}} e^{ts} ds = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(2\sqrt{\alpha t})$$

Setzt man $\alpha = 2\pi\gamma$, $t = 2\pi m$, so folgt

$$c(m) = -i^{-k+1} \cdot 2\pi i \left(\frac{2\pi m}{2\pi\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(2\sqrt{2\pi\gamma - 2\pi m}) = (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot 2\pi \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(2\pi\sqrt{m\gamma})$$

wie behauptet.

g.e.d.

Nach dem Lemma folgt nun

$$P_n(z) = e^{2\pi n z} + \sum_{c \geq 1} \sum_{\substack{d \bmod c \\ \text{ggT}(d,c)=1}} \frac{2\pi(-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{m-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(na+md)} e^{2\pi i m z}$$

und die Behauptung folgt nach Vertauschung der Summation über c und m (absolute Konvergenz). Beachte $ad \equiv 1 \pmod{c}$.

g.e.d.

4.1.1 Die Ramanujan τ -Funktion

Satz 4.1.6. Sei $\Delta(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n)q^n \in S_{12}$ ($\tau(1) = 1$, $\tau(2) = -24, \dots$). Dann gilt

$$\tau(n) \neq 0 \iff P_{n,12} \neq 0$$

$$\iff g_n(n) \neq 0$$

wobei $g_n(n)$ der n -te Fourier-Koeffizient von $P_{n,12}$ ist (siehe Satz 4.1.4).

Beweis. Es gilt $P_n = c_n \cdot \Delta$ mit $c_n \in \mathbb{C}$. Durch Vergleich des ersten Fourier-Koeffizienten folgt $c_n \in \mathbb{R}$. Aus $\langle \Delta, P_n \rangle \sim \tau(n)$ (siehe [Satz 4.1.2](#) (ii)) folgt $c_n \langle \Delta, \Delta \rangle \sim \tau(n)$, also gilt $\tau(n) = 0$ genau dann, wenn $c_n = 0$. Aber $c_n = 0$ genau dann, wenn $P_n \equiv 0$ genau dann, wenn $g_n(n) \sim \langle P_n, P_n \rangle = 0$. Hieraus folgt die Behauptung. Wobei $x \sim y \iff x = ky$. *g.e.d.*

Bemerkung 4.1.7. Es wird vermutet, dass $\tau(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Lehmer).

4.1.2 Die Petersson'schen Formeln und Abschätzungen für Fourier-Koeffizienten

Sei $\{f_1, f_2, \dots, f_g\}$ irgendeine orthogonale Basis von S_k (nach dem Gram-Schmidt-Verfahren kann man z. B. jedes $f \in S_k \setminus \{0\}$ zu irgendeiner orthogonalen Basis $\{f, \dots, f_g\}$ ergänzen). Dann gilt nach [Satz 4.1.2](#) (ii) für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}} \sum_{\nu=0}^g \frac{\overline{a_\nu(n)} f_\nu}{\langle f_\nu, f_\nu \rangle}$$

wenn $f_\nu = \sum_{m \geq 1} a_\nu(m) q^m$. Nimmt man auf beiden Seiten den m -ten Fourier-Koeffizienten so erhält man

$$g_n(m) = \frac{(k-2)!}{(2\pi n)^{k-1}} \sum_{\nu=1}^g \frac{a_\nu(m) \overline{a_\nu(m)}}{\langle f_\nu, f_\nu \rangle}$$

Damit folgt

$$g_n(n) = \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}} \sum_{\nu=1}^g \frac{|a_\nu(n)|^2}{\langle f_\nu, f_\nu \rangle}$$

Speziell ist

$$|a_\nu(n)|^2 \leq \|f\|^2 \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} g_n(n)$$

Für $g_n(n)$ substituiert man aus [Satz 4.1.4](#) explizite Formeln. Benutzt man $J_n(x) = \mathcal{O}(\min\{x^{-\frac{1}{2}}, x^n\})$ (einfach) und $k(n, n, c) = \mathcal{O}_\varepsilon((n, c)^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}+\varepsilon}})$ (Weilsche Abschätzung, tieflegend) so erhält man nach einigen Rechnungen

$$g_n(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

also folgt

$$a_\nu(n) = \mathcal{O}_\varepsilon(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon}).$$

Satz 4.1.8. Sei $f \in S_k$. Dann gilt $a(n) = \mathcal{O}_\varepsilon(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon})$, für $\varepsilon > 0$.

4.1. Anwendungen

Bemerkung 4.1.9.

- (i) Man kann leicht zeigen, dass $a(n) \ll_f n^{\frac{k}{2}}$ (siehe später)
- (ii) Mit der Theorie der L-Reihen zu Modulformen kann man

$$a(n) \ll_{f,\varepsilon} n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon}$$

zeigen

- (iii) Nach Deligne (sehr tieflegend) gilt sogar $a(n) \ll_{f,\varepsilon} n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ (Ramanujan-Petersson-Vermutung). Dies ist bestmöglich, denn nach Rankin gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_f(n)|^2}{n^{k-1}} = \infty$$

4.1.3 Hecke-Operatoren sind hermitesch

Satz 4.1.10. Sei P_m für $m \in \mathbb{N}$ die m -te Poincaré-Reihe in S_k . Dann

$$P_m | T(m) = \sum_{d|(m,n)} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} P_{\frac{mn}{d^2}}.$$

Beweis. Nach Definition ist

$$P_m = \frac{1}{2} \sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \backslash \Gamma(1)} e^m |_k M$$

unabhängig vom Vertretersystem von $\Gamma(1)_\infty \backslash \Gamma(1)$. Es gilt

$$2P_m | T(m) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{M \in \Gamma(1)_\infty \backslash \Gamma(1) \\ N \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(n)}} e^m |_k MN = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{R \in \Gamma(1)_\infty \backslash \mathcal{M}(n)} e^m | R$$

Wir behaupten nun, dass die Menge

$$\{ MN \mid N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : ad = n, d > 0, b \bmod d, \}$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2 : \text{ggT}(\gamma, \delta) = 1 \text{ und } (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \text{ fixiert s. d. } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \}$$

ein Vertretersystem für $\Gamma(1)_\infty \backslash \mathcal{M}(n)$ ist.

Wir zeigen zunächst, dass die gesamten Matrizen inäquivalent modulo $\Gamma(1)_\infty$ sind. Angenommen

$$\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} NM = N' M'$$

mit $\nu \in \mathbb{Z}$ und N , N' und M , M' wie oben. Daraus folgt

$$N'^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} N = M' M^{-1}$$

also

$$\begin{pmatrix} \frac{d'}{d} & \frac{d'b-b'd+\nu d'd}{n} \\ 0 & \frac{d}{d'} \end{pmatrix} = M' M^{-1}$$

Da $M' M^{-1}$ Komponenten in \mathbb{Z} hat, folgt $\frac{d}{d'}, \frac{d'}{d} \in \mathbb{Z}$, also $d = \pm d'$, also $d = d'$ und $a' = a$ und somit

$$M' M^{-1} \in \Gamma(1)_\infty$$

d. h. $M' = M$, da Vertretersystem modulo $\Gamma(1)_\infty$. Dann folgt aber $\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} N = N'$, bzw. $b' = b + \nu d$, also $b = b'$ und damit $N' = N$. Die Matrizen in der oben angegebenen Menge sind also tatsächlich inäquivalent modulo $\Gamma(1)_\infty$.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass sich jedes $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$ schreiben lässt als

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

mit $\nu \in \mathbb{Z}$ und $ad = n$, $d > 0$, $b \pmod{d}$ und $(\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2$, $\text{ggT}(\gamma, \delta) = 1$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Man bestimmt zunächst $(\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\text{ggT}(\gamma, \delta) = 1$, sodass $C\delta - D\gamma = 0$, dann ist

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n),$$

also

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \tilde{b} \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{b} \in \mathbb{Z}$, $ad = n$. Indem man gegebenenfalls mit $-E$ multipliziert, d. h. (γ, δ) durch $(-\gamma, -\delta)$ ersetzt, kann man auch $d > 0$ erreichen. Wähle nun $\nu \in \mathbb{Z}$, sodass $b = b + \nu d$. Dies zeigt die Behauptung, dass die oben angegebene Menge ein Vertretersystem für $\Gamma(1)_\infty \backslash \mathcal{M}(n)$ ist.

Es gilt nun

$$2P_m | T(n) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \backslash \Gamma(1)} \left(\sum_{\substack{ad=n, d>0 \\ b \pmod{d}}} e^m |_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) |_k M.$$

Die innere Summe ist gleich

$$\sum_{d|n} n^{\frac{k}{2}} d^{-n} e^{2\pi i m \left(\frac{n}{d^2} z + \frac{b}{d} \right)} = n^{\frac{k}{2}} \sum_{d|(m,n)} d^{1-k} e^{2\pi i \frac{mn}{d^2} z},$$

4.1. Anwendungen

wegen

$$\sum_{b \pmod{d}} e^{2\pi i \frac{b}{d} m} = \begin{cases} d, & d|m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

g.e.d.

Satz 4.1.11. Die Operatoren $T(n)$, $n \in \mathbb{N}$ eingeschränkt auf S_k sind hermitesch bezüglich des Petersson-Skalarproduktes, d.h.

$$\langle f|T(n), g \rangle = \langle f, g|T(n) \rangle \quad \forall f, g \in S_k.$$

Beweis. Man zeigt dies normalerweise, indem man Modulformen zu sogenannten Kongruenzuntergruppen von $\Gamma(1)$ und deren Skalarprodukt definiert und dann gewisse Invarianzeigenschaften des Skalarproduktes (beim Übergang von einer Untergruppe zur anderen) beachtet. Wir werden hier die Behauptung unter Benutzung von [Satz 4.1.10](#) beweisen. Da die P_m mit $m \in \mathbb{N}$ den Raum S_k erzeugen, genügt es zu zeigen, dass

$$\langle f|T(n), P_m \rangle = \langle f, P_m|T(n) \rangle.$$

Man schreibe $f = \sum_{l \geq 1} a(l)q^l$ und $f|T(n) = \sum_{l \geq 1} b(l)q^l$. Nach [Satz 4.1.2](#), ii) ist

$$\begin{aligned} \langle f|T(n), P_m \rangle &= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} b(m) \\ &= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right). \end{aligned}$$

Andererseits ist nach [Satz 4.1.10](#):

$$\begin{aligned} \langle f, P_m|T(n) \rangle &= \sum_{d|(m,n)} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \langle f, P_{\frac{mn}{d^2}} \rangle \\ &= \sum_{d|(m,n)} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \frac{(k-2)!}{(4\pi \frac{mn}{d^2})^{k-1}} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) \\ &= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right). \end{aligned}$$

g.e.d.

Korollar 4.1.12. Die Eigenwerte von $T(n)$ sind reell.

Beweis. Ist nach Satz 4.1.11 und LA 1 klar.

g.e.d.

Korollar 4.1.13. Seien f, g normalisierte Eigenformen in S_k . Dann ist entweder $f = g$ oder $\langle f, g \rangle = 0$.

Beweis. Seien $f = \sum_{n \geq 1} a(n)q^n$ und $g = \sum_{n \geq 1} b(n)q^n$. Wegen $a(1) = b(1) = 1$ ist dann $f|T(n) = a(n)f$ und $g|T(n) = b(n)g$. Daher gilt mit Satz 4.1.11

$$a(n)\langle f, g \rangle = \langle f|T(n), g \rangle = \langle f, g|T(n) \rangle = \overline{b(n)}\langle f, g \rangle = b(n)\langle f, g \rangle.$$

Aus $\langle f, g \rangle \neq 0$ folgt damit $a(n) = b(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f = g$.

g.e.d.

Lemma 4.1.14. Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $\{T_\mu\}_{\mu \in I}$ eine Familie von hermiteschen, miteinander kommutierenden Endomorphismen von V . Dann besitzt V eine orthogonale Basis bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren aller Operatoren T_μ mit $\mu \in I$.

Beweis. Sei W die Menge der \mathbb{C} -linearen Endomorphismen von V , aufgefasst als reeller Vektorraum. Wegen $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ ist auch $\dim_{\mathbb{R}} W < \infty$. Die T_μ erzeugen daher einen endlich-dimensionalen Unterraum von W , sodass es genügt, die Aussage für endlich viele Operatoren T_1, \dots, T_m zu zeigen.

Wir zeigen zunächst durch Induktion nach m , dass V einen gemeinsamen nichttrivialen Eigenvektor von T_1, \dots, T_m enthält. Für $m = 1$ ist dies klar, da V wegen T_1 hermitesch einen nichttrivialen Eigenvektor von T_1 enthält. Sei nun $m \geq 2$ und λ ein Eigenwert von T_1 mit zugehörigem Eigenraum $V_\lambda := \{v \in V \mid T_1 v = \lambda v\}$. Für alle $\mu \in \{2, \dots, m\}$ besteht nach Voraussetzung die Kommutativität $T_\mu T_1 = T_1 T_\mu$ und daher gilt $T_\mu V_\lambda \subseteq V_\lambda$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt nun V_λ einen nichttrivialen gemeinsamen Eigenvektor von T_2, \dots, T_m . Dieser ist nach Definition von V_λ auch Eigenvektor von T_1 .

Wir zeigen abschließend die Aussage des Lemmas durch Induktion nach $\dim_{\mathbb{C}} V$. Für $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ ist die Aussage klar. Sei also $m = \dim_{\mathbb{C}} V \geq 2$. Man schreibe $V = \mathbb{C}v \oplus (\mathbb{C}v)^\perp$, wobei v ein Eigenvektor aller T_μ mit $\mu \in \{1, \dots, m\}$ ist. Da die T_μ hermitesch sind und $\mathbb{C}v$ invariant lassen, lassen sie auch $(\mathbb{C}v)^\perp$ invariant. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $(\mathbb{C}v)^\perp$ bereits eine orthogonale Basis von Eigenvektoren für alle T_μ . Hieraus folgt die Behauptung.

g.e.d.

Korollar 4.1.15. Der Raum S_k besitzt eine orthogonale Basis von gemeinsamen Eigenfunktionen für alle $T(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Folgt direkt aus dem obigen Lemma mit $V = S_k$ und $\{T_\mu\}_{\mu \in I} = \{T(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

g.e.d.

4.1. Anwendungen

Bemerkung 4.1.16. Nach [Korollar 4.1.13](#) ist diese orthogonale Basis bis auf Permutation und Multiplikation mit Skalaren in \mathbb{C}^\times eindeutig bestimmt.

5 Die Eichler-Selberg-Spurformel auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Sei von nun an stets $k \geq 4$ gerade und wie üblich $T(m)$ mit $m \geq 1$ der m -te Hecke-Operator auf $M_k(\Gamma(1))$. Wir wissen bereits, dass wir $T(m)$ zu einem Endomorphismus auf S_k einschränken können.

Ziel: Bestimmung einer analytischen (einfach) und arithmetischen (schwer) Formel für die Spur $\mathrm{Tr} T(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Sei \mathbb{H} wie üblich die obere Halbebene und h eine Funktion $h : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, z') \mapsto h(z, z')$, welche in beiden Variablen eine Spitzenform von Gewicht k darstellt, d.h.

$$h(\cdot, z') \in S_k \quad \forall z' \in \mathbb{H} \quad \text{und} \quad h(z, \cdot) \in S_k \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Für $f \in S_k$ definieren wir dann $f * h$ als die Funktion

$$f * h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, z' \mapsto (f * h)(z') := \int_{\mathcal{F}} f(z) \overline{h(z, -z')} y^{k-2} dx dy \quad (z = x + iy). \quad (5.1)$$

Dies ist im Wesentlichen das Petersson-Skalarprodukt $\langle f, h(\cdot, -z') \rangle$. Wir wollen zunächst zeigen, dass $T(m) : S_k \rightarrow S_k$ als ein Integral dieses Typs geschrieben werden kann mit einem bestimmten Kern $h = h_m$ (bis auf eine Konstante). Aus diesen Überlegungen folgt dann auch sogleich eine analytische Formel für $\mathrm{Tr} T(m)$.

Sei f_1, \dots, f_r eine Basis von normierten, simultanen, orthogonalen Eigenformen für die $T(m)$, d. h.

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i q^n$$

$$a_1^i = 1$$

$$T(m)f_i = a_m^i f_i$$

$$\langle f_i, f_j \rangle = 0 \iff i \neq j.$$

Für $m \geq 1$ definieren wir

$$h_m(z, z') = \sum_{ad-bc=m} (cz z' + dz' + az + b)^{-k},$$

dabei erstreckt sich die Summe über alle ganzzahligen Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit Determinante m . Offenbar gilt ebenso

$$h_m(z, z') = \sum_{ad-bc=m} (cz + d)^{-k} \left(z' + \frac{az + b}{cz + d} \right)^{-k} = \sum_{M \in \mathcal{M}(m)} (z' + z)^{-k}|_{k,z} M$$

Man zeigt schnell wegen $k \geq 4$, dass die Reihe auf kompakten Teilmengen $K \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ absolut und gleichmäßig konvergiert und dort in beiden Variablen holomorphe Funktionen darstellt. Da $\mathcal{M}(m) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(m)$, $M \mapsto ML$ mit $L \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, folgt $h(z, z')|_{k,z} L = h(z, z')$.

Da weiter

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} \sum_{M \in \mathcal{M}(m)} (z + z')^{-k}|_{k,z} M = \sum_{M \in \mathcal{M}(m)} \lim_{z \rightarrow i\infty} (z' + z)^{-k}|_{k,z} M = 0,$$

folgt $h_m(-, z') \in S_k$ und $h_m(z, -) \in S_k$ aus Symmetriegründen.

Satz 5.0.1. Sei

$$C_k = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} \pi}{2^{(k-3)}(k-1)}. \quad (5.2)$$

Dann gilt

- (i) Die Funktion $C_k^{-1} m^{k-1} h_m(z, z')$ ist ein Kern für den Operator $T(m): S_k \rightarrow S_k$, das heißt:

$$(f * h_m)(z') = C_k m^{-k+1} (T(m)f)(z') \quad (5.3)$$

- (ii) Es gilt die Identität

$$C_k^{-1} m^{k-1} h_m(z, z') = \sum_{i=1}^r a_m^i \frac{f_i(z) \cdot f_i(z')}{\langle f_i, f_i \rangle} \quad (5.4)$$

- (iii) Die Spur $\mathrm{Tr} T(m)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{Tr} T(m) = C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} h_m(z, -\bar{z}) y^{k-2} dx dy \quad (5.5)$$

Beweis. Sei zunächst $m = 1$. Falls $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, dann gilt

$$(c\bar{z} + d)^{-k} f(z) y^k = f(\gamma z) \cdot \mathrm{Im}(\gamma z)^k$$

Aus der Definition von h_m erhalten wir demnach

$$f(z)\overline{h_1(z, z')}y^k = \sum_{\gamma \in \Gamma(1)} (\overline{z'} + \gamma\overline{z})^{-k} f(\gamma z) \mathrm{Im}(\gamma z)^k$$

und demnach

$$\begin{aligned} (f * h_1)(z') &= \int_{\mathcal{F}} \sum_{\gamma \in \Gamma(1)} (-z' + \gamma\overline{z})^{-k} f(\gamma z) \mathrm{Im}(\gamma z)^k \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\partial\mathcal{F}} (-z' + \overline{z})^{-k} f(z) y^{k-2} dx dy \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (x - iy - z')^{-k} f(x + iy) y^{k-2} dx dy \end{aligned} \tag{5.6}$$

Nach Cauchy's Formel (und da f Spitzenform) gilt

$$\int_{-\infty}^\infty (x - iy - z')^{-k} f(x + iy) dx = \frac{2\pi i}{(k-1)!} f^{(k-1)}(2iy + z')$$

Daraus folgt, dass die rechte Seite von (5.6) wie folgt umgeformt werden kann

$$\begin{aligned} (f * h_1)(z') &= \frac{4\pi i}{(k-1)!} \int_0^\infty y^{k-2} f^{(k-1)}(2iy + z') dy \\ &= \frac{4\pi i}{(k-1)!} \int_0^\infty \frac{1}{(2i)^{k-2}} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} f'(2ity + z') \Big|_{t=1} dy \\ &= \frac{4\pi i}{(k-1)!} \frac{1}{(2i)^{k-2}} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \int_0^\infty f'(2ity + z') dy \Big|_{t=1} \\ &= \frac{4\pi i}{(k-1)!} \frac{1}{(2i)^{k-2}} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \left(0 - \frac{f(z')}{2it} \right) \Big|_{t=1} \\ &= C_k f(z') \end{aligned}$$

Das beweist (5.3) im Fall $m = 1$. Für den allgemeinen Fall beachte

$$\begin{aligned}
T(m)h_1(z, z') &= T(m) \sum_{\gamma \in \Gamma(1)} (z' + z)^{-k}|_{k,z}\gamma \\
&= m^{k-1} \sum_{\substack{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(m) \\ \gamma \in \Gamma(1)}} (z' + z)^{-k}|_{k,z}\gamma M \\
&= m^{k-1} \sum_{R \in \mathcal{M}(m)} (z' + z)^{-k}|_{k,z}R \\
&= m^{k-1}h_m
\end{aligned}$$

Damit folgt (i).

Für (ii) beachte, dass wir h_m schreiben können mit z_1, \dots, z_r paarweise verschieden und $z_\nu \not\equiv i, \rho \pmod{\Gamma(1)}$ als

$$h_m(z, z') = \sum_{i,j=1}^r c_{ij} f_i(z) f_j(z')$$

Denn wir können $h_m(z, z') = h_1(z) f_1(z') + \dots + h_r(z) f_r(z')$, da f_1, \dots, f_r eine Basis der Spitzenformen sind, mit Funktionen $h_j: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. Diese sind auch Spitzenformen, denn die Matrix in

$$\begin{pmatrix} h_1(z, z_1) \\ \vdots \\ h_m(z, z_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(z_1) & \dots & f_r(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(z_r) & \dots & f_r(z_r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1(z) \\ \vdots \\ h_r(z) \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, sonst würden $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ existieren, so dass $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r = 0$ ist und dies steht im Widerspruch dazu, dass die f_j eine Basis bilden. Somit sind die h_j Linearkombination von Spitzenformen und somit selbst Spitzenformen und als Linearkombination von den f_j darstellbar.

Wende nun (5.1) auf die Funktion $f = f_\mu$ mit $1 \leq \mu \leq r$, an:

$$\begin{aligned}
(f_\mu * h_m)(z') &= \int_{\mathcal{F}} f_\mu(z) \sum_{i,j}^r \overline{c_{ij} f_i(z) f_j(-\overline{z'})} y^{k-2} dx dy \\
&= \sum_{i,j}^r \overline{c_{ij} f_j(z')} \int_{\mathcal{F}} f_\mu(z) \overline{f_i(z)} dx dy \\
&= \sum_{j=1}^r \overline{c_{\mu j} f_j(z')} \langle f_\mu, f_\mu \rangle \stackrel{(i)}{=} C_k m^{1-k} a_m^\mu f_\mu(z')
\end{aligned}$$

Da f_1, \dots, f_r eine Basis, folgt

$$c_{\mu j} = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \neq \mu \\ C_k m^{1-k} \langle f_\mu, f_\mu \rangle^{-1} & \text{falls } j = \mu \end{cases}$$

Damit folgt (ii).

Für (iii) beachte

$$\begin{aligned} C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} h_m(z, -\bar{z}) y^{k-2} dx dy &= \int_{\mathcal{F}} \sum_{i=1}^r a_m^i \frac{f_i(z) f_i(-\bar{z})}{\langle f_i, f_i \rangle} y^{k-2} dx dy \\ &= \sum_{i=1}^r a_m^i \int_F \frac{f_i(z) \overline{f_i(z)}}{\langle f_i, f_i \rangle} y^{k-2} dx dy \\ &= \sum_{i=1}^r a_m^i = \text{Tr } T(m) \end{aligned}$$

g.e.s.

Die zweite arithmetische Darstellung liefert eine explizite Beschreibung der Spur. Dafür müssen wir etwas ausholen.

Definition 5.0.2. Ein Polynom $q \in \mathbb{Z}[X, Y]$ mit $q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ heißt ganze, binäre QUADRATISCHE FORM. Diese ist induziert von der Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

via $q(x, y) = (x, y) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

q heißt positiv definit, falls $q(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Wir bezeichnen $D = b^2 - 4ac$ als die DISKRIMINANTE von q .

Zwei quadratische Formen q und q' heißen äquivalent, falls es eine Matrix $U \in SL_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $Q' = U^t Q U$, man kann zeigen, dass Q eine Klasseninvariante ist. Die Rückrichtung ist im Allgemeinen falsch.

Definiere eine Abbildung

$$H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

durch

- (i) $H(n) = 0$ für $n > 0$,
- (ii) $H(0) = -\frac{1}{12}$,

-
- (iii) $H(n)$ ist für $n > 0$ die Zahl der Äquivalenzklassen positiv definiter binärer ganzer quadratischen Formen mit Diskriminante $D = b^2 - 4ac = -n < 0$, wobei Klassen mit Repräsentanten der Form $d \cdot (X^2 + Y^2)$ respektive $e \cdot (X^2 + XY + Y^2)$ mit Vielfachheit $\frac{1}{2}$ beziehungsweise $\frac{1}{3}$ gezählt werden sollen.

Man kann zeigen, dass $H(n)$ wohldefiniert ist. Definiere zudem Polynome via

$$(1 - tx + Nx^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+2}(t, N)x^k$$

Mit diesen Werkzeugen gilt nun

Theorem 5.0.3 (SPURFORMEL, EICHLER-SELBERG). Sei $k \geq 4$ gerade und $m > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\mathrm{Tr} T(m) = -\frac{1}{2} \sum_{t=-\infty}^{\infty} P_k(t, m) H(4m - t^2) - \frac{1}{2} \sum_{d|m} \min\left(d, \frac{m}{d}\right)^{k-1}.$$

Beweis. Wir übergehen den langen Beweis und verweisen auf Sergo Lang, Introduction to modular forms. *g.e.d.*

Index

Dedekindische η -Funktion, 12

Diskriminantenfunktion, 6

Eisensteinreihe, 5

Fundamentalebereich, 1

Hecke-Eigenform, 22

Hecke-Operator, 16

Modulfigur, 2

Modulform, 3

Modulfunktion, 2

normalisierte Eisensteinreihe, 5

Peterssonsscher Strichoperator, 3

quadratische Form, 51

Diskriminante einer quadratischen
Form, 51

Ramanujan-Funktion, 7

Thetareihe, 4

Liste der Sätze

1.1.1 Satz (Valenzformel)	5
-------------------------------------	---