
Modulformen I

Sommersemester 2018
Vorlesung von Prof. Dr. Winfried Kohnen

Vorlesungsmitschrieb von
Patrick Arras
Jonas Müller

Heidelberg, den 6. Mai 2018

Vorwort

Dies ist ein nicht offizielles Skript der Vorlesung Modulformen 1 aus dem Sommersemester 2018 gehalten von Professor Winfried Kohnen an der Universität Heidelberg. Das Skript wurde in der Vorlesung mitgetext und mit pdf_latex kompiliert. Deshalb kann es Fehler enthalten und wir übernehmen keine Garantie für die Richtigkeit.

Bei Fehlern, kann ich unter folgender Mailadresse erreicht werden:

jj@mathphys.stura.uni-heidelberg.de

Die aktuellste Version des Skriptes befindet sich immer unter

<https://github.com/jenuk/modulformen/blob/master/script.pdf>

Die L^AT_EX-Source Dateien findet man hier, auf Fehler kann hier alternativ über neues Issue aufmerksam gemacht werden:

<https://github.com/jenuk/modulformen/tree/master>

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iv
1 Grundlegende Tatsachen	1
1.1 Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)	1
1.1.1 Fundamentalbereich	1
1.1.2 Modulform	2
1.1.3 Beispiele für Modulformen	4
1.1.4 Valenzformel und Anwendungen	5
1.2 Die Modulnvariante j	9
2 Heckeoperatoren	13
2.1 Vorbemerkung, Motivation	13
2.2 Die Heckeoperatoren $T(n)$	15
Index	19
Liste der Sätze	21

1 Grundlegende Tatsachen

1.1 Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

1.1.1 Fundamentalbereich

Wie üblich sei

$$\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$$

die obere Halbebene und

$$\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}.$$

Dann operiert $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ z = \frac{az + b}{cz + d},$$

das heißt $E \circ z = z$ und $(M_1 M_2) \circ z = M_1 \circ (M_2 \circ z)$. Hierbei beachte man, dass

$$\operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

$\Gamma(1) = \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ ist eine diskrete Untergruppe, spezielle Matrizen in $\Gamma(1)$ sind

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Translation $T \circ z = z + 1$ und Stürzung $S \circ z = -\frac{1}{z}$.

Man interessiert sich für die Operation von diskreten Untergruppen $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ insbesondere $\Gamma = \Gamma(1)$.

Definition 1.1.1. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ heißt FUNDAMENTALBEREICH für die Operationen von $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{H} , falls:

- (i) \mathcal{F} ist offen,
- (ii) zu jedem $z \in \mathbb{H}$ existiert ein $M \in \Gamma$ mit $M \circ z \in \overline{\mathcal{F}}$,

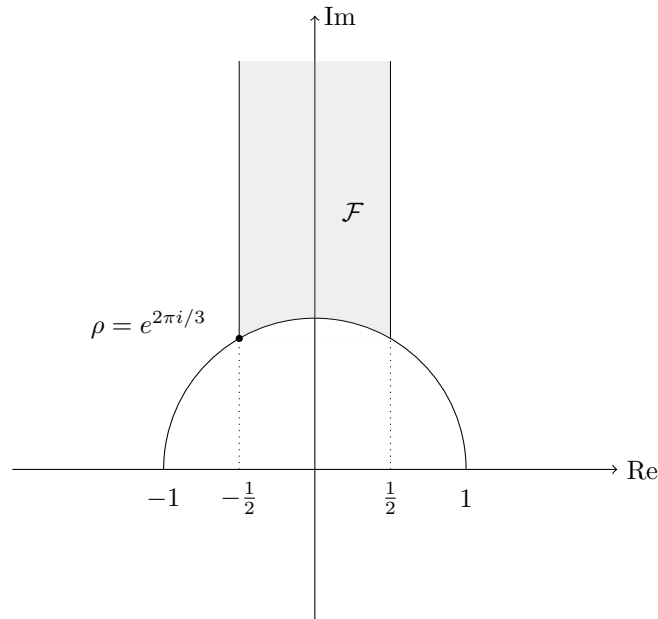


Abbildung 1.1: Der Fundamentalbereich \mathcal{F}_1 der vollen Modulgruppe.

(iii) Sind $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$ und $z_2 = M \circ z_1$ mit $M \in \Gamma$, dann gilt $M = \pm E$ und somit $z_1 = z_2$.

Beispiel 1.1.2. Die Menge $\mathcal{F}_1 := \{z = x + iy \mid |x| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\Gamma(1)$ auf \mathbb{H} , dieser wird auch MODULFIGUR genannt. Siehe [Abbildung 1.1](#).

Bemerkung 1.1.3. Identifikationen in $\overline{\mathcal{F}_1}$ finden nur auf dem Rand statt. (Die Geraden $x = \pm \frac{1}{2}$ werden miteinander identifiziert unter T bzw T^{-1} , Punkte auf den Kreisbögen rechts oder links von i werden unter S identifiziert.

Satz 1.1.4. Die Gruppe $\Gamma(1)$ wird erzeugt von S und T .

1.1.2 Modulform

Definition 1.1.5. Eine Abbildung $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt MODULFUNKTION vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ für $\Gamma(1)$, falls gilt:

- (i) f ist auf \mathbb{H} meromorph,
- (ii) $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$,
- (iii) f ist meromorph in ∞ .

Bedeutung von (iii): Wendet man (ii) an mit $M = T$, so erhält man $f(z+1) = f(z)$. Sei $\mathcal{R} = \{q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1\}$. Die Abbildung $z \mapsto q = e^{2\pi iz}$ bildet \mathbb{H} auf \mathcal{R} ab und $F(q) := f(z)$ ist wohldefiniert und holomorph bis auf mögliche Polstellen, die sich prinzipiell gegen $q = 0$ häufen könnten. Bedingung (iii) fordert nun, dass $q = 0$ eine unwesentliche isolierte Singularität¹ von F ist. Nach Funktionentheorie 1 hat dann F eine Laurententwicklung

$$F(q) = \sum_{n \geq n_0} a_n q^n \quad \text{für } 0 < |q| < |q_0|$$

wobei $n_0 \in \mathbb{Z}$ fest. Damit erhalten wir also

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n e^{2\pi i n z} \quad \text{für } 0 < y_0 < y$$

Definition 1.1.6. Ein solches f heißt MODULFORM falls f auf \mathbb{H} und in ∞ holomorph ist (letzteres bedeutet, dass F in $q = 0$ hebbbar ist, also $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z}$ für alle $z \in \mathbb{H}$). Eine Modulform heißt Spitzenform, falls $a_0 = 0$.

Bemerkung 1.1.7. Die Fourierkoeffizienten a_n sind im Allgemeinen wichtige und interessante Größen (z.B. Darstellungsanzahlen von natürlichen Zahlen durch quadratische Formen, etwa $r_4(n) = \#\{(x, y, z, w) \in \mathbb{Z}^4 \mid n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2\}$ oder die Anzahl von Punkten auf elliptischen Kurven über \mathbb{F}_p).

Definition 1.1.8. Sei $\gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Man setzt

$$(f|_k M)(z) := (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

für $z \in \mathbb{H}$, dies ist der PETERSSONSCHE STRICHOPERATOR.

Dann gilt $f|_k E = f$ und $f|_k(M_1 M_2) = (f|_k M_1)|_k M_2$ für alle $M_1, M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Es folgt:

- (i) Es gilt $(f|_k M)(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z)$ für alle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ genau dann, wenn dies für S und T gilt, d.h. $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$ und $f(z+1) = f(z)$, da S und T $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugen.

¹Das heißt es handelt sich um eine hebbare Singularität oder eine Polstelle.

1.1. Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

- (ii) Eine Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann eine Modulform vom Gewicht k , wenn f eine Fourierreiheentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

hat und zusätzlich gilt

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$$

1.1.3 Beispiele für Modulformen

Thetareihen

Definition 1.1.9. Sei $A \in M_m(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann heißt

$$\vartheta_A(z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g]z} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

eine THETAREIHE, wobei $A[g] := g^t A g$ für $g \in \mathbb{Z}^m \cong M_{m,1}(\mathbb{Z})$.

Satz 1.1.10.

- (i) $\vartheta_A(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf $y \geq y_0 > 0$. Insbesondere ist $\vartheta_A(z)$ auf \mathbb{H} holomorph.
- (ii) Es gilt die Theta-Transformationsformel: $\vartheta_{A^{-1}} = \sqrt{\det A} \cdot \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{m}{2}} \vartheta_A(z)$.

Satz 1.1.11. Sei $A \in M_m(\mathbb{Z})$ symmetrisch, positiv definit, gerade² und $\det A = 1$. Dann gilt $8|m$ und $\vartheta_A(z)$ ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{m}{2}$ für $\Gamma(1)$.

Beachte $\vartheta_A(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} r_A(n) q^n$ wobei $r_A(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n durch die ganzzahlige, positive definite quadratische Form $x \mapsto \frac{1}{2} x^t A x$ auf \mathbb{R}^m ist.

Eisensteinreihen

Definition 1.1.12. Sei $k \in \mathbb{Z}$, k gerade und $k \geq 4$. Dann heißt

$$G_k(z) = \sum'_{m,n} \frac{1}{(mz + n)^k} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

²Das heißt für alle $\mu \in \{1, \dots, m\}$ gilt $a_{\mu\mu}$ ist gerade

EISENSTEINREIHE vom Gewicht k .³

Satz 1.1.13.

- (i) $G_k(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf $D_\varepsilon = \{z = x + iy \mid y \geq \varepsilon, x^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$, insbesondere also holomorph auf \mathbb{H} .
- (ii) G_k ist Modulform vom Gewicht k für $\Gamma(1)$.
- (iii) Es gilt

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.

Setze $E_k := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$ die NORMALISIERTE EISENSTEINREIHE. Benutze nun

$$\zeta(k) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}-1} 2^{k-1} B_k}{k!} \pi^k$$

für k gerade und $k \geq 2$. Damit folgt

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei alle B_k rationale Zahlen sind. Speziell gilt

$$B_4 = -\frac{1}{30} \quad \implies \quad E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n,$$

$$B_6 = \frac{1}{42} \quad \implies \quad E_6 = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n) q^n.$$

1.1.4 Valenzformel und Anwendungen

Satz 1.1.14 (VALENZFORMEL). Sei f eine Modulfunktion vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$, $f \neq 0$. Dann gilt

$$\text{ord}_\infty f + \frac{1}{2} \text{ord}_i f + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho f + \sum_{\substack{z \in \Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \\ z \not\sim i, \rho}} \text{ord}_z f = \frac{k}{12}.$$

$$^3 \sum'_{m,n} := \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}}$$

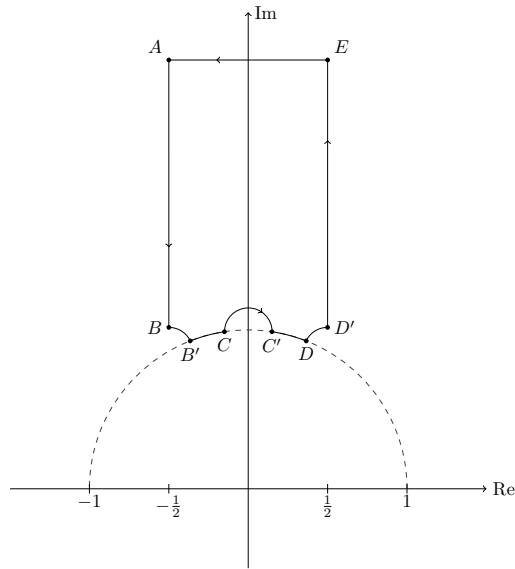


Abbildung 1.2: Die Kurve \mathcal{C} wobei A und E so gewählt sind, dass \mathcal{C} alle Null- und Polstellen enthält.

Hierbei ist $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und

$$\text{ord}_{\infty} f := \text{ord}_{q=0} F(q)$$

mit $F(q) = f(z)$ für $q = e^{2\pi i z}$.

Beweis. Zum Nachweis reduziert man auf den Fall, dass f außer in $z = \rho, -\bar{\rho}, i$ keine Null- oder Polstellen auf $\partial\overline{F_1}$ hat und berechnet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Wobei die Kurve \mathcal{C} wie in [Abbildung 1.2](#) gewählt ist.

q.e.d.

Definition 1.1.15. Sei

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728} (E_4^3(z) - E_6^2(z))$$

die DISKRIMINANTENFUNKTION. Dann ist Δ eine Spitzenform vom Gewicht $k = 12$ mit $\Delta(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{H}$ und $\text{ord}_{\infty} \Delta = 1$, d. h. $\Delta = q + \dots$

Bemerkung 1.1.16. Δ ist in gewisser Weise die „erste“ von 0 verschiedene Spitzenform und wurde von vielen Mathematikern studiert.

Beispiel 1.1.17.

- (i) Schreibe $\Delta(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n)q^n$, dann heißt $n \mapsto \tau(n)$ RAMANUJAN-FUNKTION. Es gilt: $\tau(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \geq 1$. Ferner lässt sich zeigen, dass $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$, mithilfe von $B_{12} = -\frac{691}{2730}$.
- (ii) Vermutung: $\tau(n) \neq 0$ für alle $n \geq 1$ (Lehner)

Sei M_k der \mathbb{C} -Vektorraum der Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ und $S_k \subseteq M_k$ der Unterraum der Spitzenformen.

Bemerkung 1.1.18. $M_k = \{0\}$ für k ungerade, da $f((-E) \circ z) = f(z) = (-1)^k f(z)$.

Satz 1.1.19. Sei $k \in \mathbb{Z}$ gerade. Dann gilt:

- (i) $M_k = \{0\}$ für $k < 0$ und $M_2 = \{0\}$.
- (ii) $M_0 = \mathbb{C}$.
- (iii) $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$, falls $k \geq 4$.
- (iv) Die Abbildung $f \mapsto f \cdot \Delta$ gibt einen Isomorphismus von M_{k-12} auf S_k .
- (v) $\dim M_k < \infty$.

Satz 1.1.20. Sei $k \geq 0$ gerade. Dann gilt:

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12} \\ 1 + \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Beispiel 1.1.21.

- (i) $M_4 = \mathbb{C}E_4$.
- (ii) $M_6 = \mathbb{C}E_6$.
- (iii) $M_8 = \mathbb{C}E_8 = \mathbb{C}E_4^2$.
- (iv) $M_{10} = \mathbb{C}E_{10} = \mathbb{C}E_4E_6$.
- (v) $M_{12} = \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}\Delta$.

1.1. Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

(vi) $M_{14} = \mathbb{C}E_{14}$.

Satz 1.1.22. Sei $k \geq 0$ gerade. Dann bilden $E_4^\alpha E_6^\beta$ mit $4\alpha + 6\beta = k$ eine Basis von M_k , insbesondere gilt also

$$M_k = \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta \geq 0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \mathbb{C}E_4^\alpha E_6^\beta$$

.

Beweis. Wir zeigen zunächst induktiv, dass die Monome M_k erzeugen. Für $k \leq 10$ ist dies nach Beispiel 1.1.21 klar. Sei also $k \geq 12$. Man bestimme eine beliebige Kombination $\alpha, \beta \geq 0$ mit $4\alpha + 6\beta = k$ und setze $g := E_4^\alpha E_6^\beta \in M_k$ mit konstantem Term gleich 1.

Sei nun $f \in M_k$ beliebig mit konstantem Term a_0 . Dann ist $f - a_0 \cdot g \in S_k$. Nach Satz 1.1.19, iv) gilt daher $f - a_0 \cdot g = \Delta \cdot h$ mit $h \in M_{k-12}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist h eine Linearkombination von Monomen $E_4^\gamma E_6^\delta$ mit $4\gamma + 6\delta = k - 12$. Aber $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ und daher ist $f - a_0 \cdot g$ Linearkombination von Monomen $E_4^{\gamma+3} E_6^\delta$ und $E_4^\gamma E_6^{\delta+2}$. Wegen

$$4(\gamma + 3) + 6\delta = k - 12 + 12 = k$$

$$4\gamma + 6(\delta + 2) = k - 12 + 12 = k$$

ist also auch f als Linearkombination von Monomen der behaupteten Form schreibbar. Somit erzeugen die Monome tatsächlich M_k .

Noch zu zeigen ist, dass die Monome über \mathbb{C} linear unabhängig sind. Beweis durch Widerspruch: *Angenommen*, es existiere eine nicht-triviale lineare Relation

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \geq 0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \lambda_{\alpha, \beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0.$$

Fall 1: Sei $k \equiv 0 \pmod{4}$. Dann sind alle β gerade, also schreibe jeweils $\beta = 2\beta'$ mit $\beta' \geq 0$. Es folgt $\alpha = \frac{k}{4} - 3\beta'$ und somit

$$E_4^\alpha E_6^\beta = E_4^{\frac{k}{4} - 3\beta'} E_6^{2\beta'} = E_4^{\frac{k}{4}} \left(\frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'}.$$

Da $E_4^{\frac{k}{4}}$ nicht die Nullfunktion ist, ergibt sich eine nicht-triviale Polynom-Relation für $\frac{E_6^2}{E_4^3}$, d. h. die meromorphe Funktion $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ ist Nullstelle eines nicht-trivialen Polynoms über \mathbb{C} . Da \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist (jedes nicht-konstante Polynom über \mathbb{C} zerfällt vollständig über \mathbb{C} in Linearfaktoren), ist $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ somit konstant.

Wir zeigen $\frac{E_6^2}{E_4^3} \equiv 0$ mit einem *Trick*: Es gilt $E_6(-\frac{1}{z}) = z^6 E_6(z)$, denn $E_6 \in M_6$. Auswerten in $z = i = -\frac{1}{i}$ liefert $E_6(i) = 0$. Ferner gilt

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{2\pi i n z} \implies E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{-2\pi n}.$$

Da alle Summanden positiv sind, folgt $E_4(i) \neq 0$ und somit $\frac{E_6^2(i)}{E_4^3(i)} = 0$. Dies impliziert jedoch da $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ konstant ist bereits $E_6 \equiv 0$. \nmid

Fall 2: Sei $k \equiv 2 \pmod{4}$, dann sind alle β ungerade. Analoges Vorgehen zum ersten Fall liefert ebenfalls einen Widerspruch.

Somit sind die Monome über \mathbb{C} linear unabhängig.

g.e.d.

Bemerkung 1.1.23. Der Satz impliziert additive Faltungsformeln für die multiplikativen Funktionen $\sigma_{k-1}(n)$ (weiterhin $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 4$ gerade). „Multiplikativ“ bedeutet hier

$$\text{ggT}(m, n) = 1 \implies \sigma_{k-1}(m \cdot n) = \sigma_{k-1}(m) \cdot \sigma_{k-1}(n).$$

Beispiel 1.1.24. $E_8 = E_4^2$, ferner $E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n$, also $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(n-m) \sigma_3(m)$.

Allgemeiner kann man E_k ausdrücken als Linearkombination von Monomen der Form $E_4^\alpha E_6^\beta$ und erhält hieraus Formeln für $\sigma_{k-1}(n)$.

1.2 Die Modulvariante j

Definition 1.2.1. Sei $j := \frac{E_4^3}{\Delta}$.

Satz 1.2.2.

- (i) j ist holomorph auf \mathbb{H} und hat einen einfachen Pol in ∞ .
- (ii) j ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.
- (iii) j liefert eine Bijektion $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$.

Beweis.

- (i) Da $\Delta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$, ist $j(z)$ holomorph auf \mathbb{H} . Ferner gilt

$$\text{ord}_\infty j = \text{ord}_\infty E_4^3 - \text{ord}_\infty \Delta = 0 - 1 = -1.$$

1.2. Die Modulinvariante j

- (ii) Da $E_4^3, \Delta \in M_{12}$ folgt die Aussage.
- (iii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist zu zeigen, dass die Modulfunktion $j_\lambda := j - \lambda$ vom Gewicht Null eine modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ eindeutig bestimmte Nullstelle hat. Man wendet auf j_λ die Valenzformel an! Es gilt $\text{ord}_z j_\lambda \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ und $\text{ord}_\infty j_\lambda = -1$. Da $k = 0$ folgt mit der Valenzformel

$$-1 + n + \frac{n'}{2} + \frac{n''}{3} = 0$$

mit $n, n', n'' \in \mathbb{N}_0$. Also

$$n + \frac{n'}{2} + \frac{n''}{3} = 1 \quad (1.1)$$

Man prüft nach: die einzigen Lösungen $(n, n', n'') \in \mathbb{N}_0^3$ von (1.1) sind $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ und $(0, 0, 3)$. Dies impliziert die Behauptung. *g.e.d.*

Satz 1.2.3. Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.
- (ii) f ist Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts.
- (iii) f ist eine rationale Funktion in j .

Beweis.

- (iii) \Rightarrow (ii) Sei $f = \frac{P(j)}{Q(j)}$ wobei $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m$ mit $a_\nu \in \mathbb{C}$, $a_m \neq 0$ und $Q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$ mit $b_\nu \in \mathbb{C}$, $b_n \neq 0$ mit $Q \not\equiv 0$, insbesondere also auch $Q(j) \not\equiv 0$. Wegen $j = \frac{E_4^3}{\Delta}$ folgt

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_0 + a_1 \frac{E_4^3}{\Delta} + \dots + a_m \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^m}{b_0 + b_1 \frac{E_4^3}{\Delta} + \dots + b_n \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^n} \\ &= \frac{(a_0 \Delta^m + a_1 E_4^3 \Delta^{m-1} + \dots + a_m (E_4^3)^m) \cdot \Delta^n}{(b_0 \Delta^n + b_1 E_4^3 \Delta^{n-1} + \dots + b_n (E_4^3)^n) \cdot \Delta^m}. \end{aligned}$$

Hier sind Zähler und Nenner Modulformen vom Gewicht $12(m+n)$. Also folgt die Behauptung.

- (ii) \Rightarrow (i) klar

- (i) \Rightarrow (iii) Sei f eine Modulfunktion vom Gewicht Null und $f \not\equiv 0$. Seien z_1, \dots, z_r die modulo $\Gamma(1)$ verschiedenen Polstellen von f und m_1, \dots, m_r deren Ordnungen. Sei

$$P(z) := \prod_{\nu=1}^r (j(z) - j(z_\nu))^{m_\nu}.$$

Dann gilt

$$\text{ord}_{z_\nu} P = \text{ord}_{z_\nu} (j(z) - j(z_\nu))^{m_\nu} = m_\nu \text{ord}_{z_\nu} (j(z) - j(z_\nu)) \geq m_\nu.$$

Dann ist $P(z)f(z)$ eine Modulfunktion vom Gewicht Null und holomorph auf \mathbb{H} . Da $P(z)$ ein Polynom in j ist, genügt es die Behauptung für $P(z)f(z)$ zu zeigen. Insbesondere kann man voraussetzen, dass f holomorph auf \mathbb{H} ist. Da $\text{ord}_\infty \Delta = 1$, gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ so dass $g := \Delta^n f$ in unendlich holomorph ist. Dann ist $f = \frac{g}{\Delta^n}$ und g ist eine Modulform vom Gewicht $12n$. Nach Satz 1.1.22 ist g eine Linearkombination von Monomen $E_4^\alpha E_6^\beta$ mit $4\alpha + 6\beta = 12n$. Es genügt somit die Behauptung für $\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^n}$ zu zeigen. Insbesondere gilt $3|\alpha$ und $2|\beta$, schreibe $\alpha = 3p$ und $\beta = 2q$. Dann gilt

$$\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^n} = \frac{(E_4^3)^p (E_6^2)^q}{\Delta^{p+q}} = j^p (j - 1728)^q,$$

$$\text{denn } j - 1728 = j - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} = \frac{E_4^3}{\Delta} - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} = \frac{E_6^2}{\Delta}.$$

q.e.d.

Bemerkung 1.2.4.

- (i) Der Quotient $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}$ besitzt in natürlicher Weise die Struktur einer Riemannschen Fläche isomorph zu $S^2 \setminus \{\text{Punkt}\}$ indem man die Ränder in $\overline{\mathcal{F}_1}$ identifiziert. Fügt man den Punkt ∞ hinzu, so erhält man $\overline{\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}} := \Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \cup \{\infty\} \cong S^2$ (die Sphäre in \mathbb{R}^3). Satz 1.2.2 (iii) besagt dann, dass j ein Isomorphismus von $\overline{\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}} \cong S^2 \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$ ist. Satz 1.2.3 entspricht dann der Tatsache, dass die einzigen meromorphen Funktionen auf S^2 die rationalen Funktionen sind.
- (ii) Man kann zeigen (schwer!)

$$\Delta(z) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} j &= \frac{E_4^3}{\Delta} = \frac{1}{q} \left(1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n \right)^3 \frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}} \\ &= \frac{1}{q} \left(1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n \right)^3 \prod_{n \geq 1} \left(\sum_{m \geq 0} q^{mn} \right)^{24} \end{aligned}$$

1.2. Die Modulnvariante j

$$= \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n \geq 1} c(n) q^n \quad \text{mit } c(n) \in \mathbb{N}.$$

Also hat die j -Funktion eine Fourierentwicklung in q , wobei die Koeffizienten positive ganzen Zahlen sind.

- (iii) Man zeigt leicht: $\frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)} = 1 + \sum_{n \geq 1} p(n) q^n$ wobei $p(n)$ die Anzahl der Partionen von n ist, d. h. die Anzahl der Zerlegungen von n als Summe positiver, ganzer Zahlen (Beispielsweise $p(4) = 5$, denn $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$). Man sagt: die erzeugende Reihe von $p(n)$ wird durch $\frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)}$ gegeben.

Beachte $1 + \sum_{n \geq 1} p(n) q^n = \frac{e^{\pi i \frac{z}{12}}}{\eta(z)}$ wobei $\eta(z) = e^{\pi i \frac{z}{12}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$ die sogenannte DEDEKINDISCHE η -FUNKTION ist. Beachte $\eta^{24} = \Delta$. η sollte also eine Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ sein. Mit Hilfe der Theorie der Modulformen kann man zeigen $p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3n}} \cdot e^{\pi \sqrt{\frac{3}{2}n}}$ für $n \rightarrow \infty$ (hier $a(n) \sim b(n)$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 1$).

2 Heckeoperatoren

2.1 Vorbemerkung, Motivation

Definition 2.1.1. Definiere die Gruppe

$$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid ad - bc > 0 \right\},$$

welche $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ als Untergruppe enthält.

Definition 2.1.2.

(i) Seien $z \in \mathbb{H}$ und

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}),$$

dann setze

$$M \circ z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

(ii) Für $k \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ und $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ setze

$$(f|_k M)(z) := (ad - bc)^{\frac{k}{2}} (cz + d)^{-k} f(M \circ z).$$

Diese Definitionen verallgemeinern die früheren Definitionen für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (siehe 1.1.1). Beachte, dass weiterhin für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$f|_k \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = f.$$

Lemma 2.1.3.

(i) Die Abbildung $(M, z) \mapsto M \circ z$ definiert eine Operation von $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ auf \mathbb{H} .

(ii) Man hat $f|_k M_1 M_2 = (f|_k M_1)|_k M_2$.

2.1. Vorbemerkung, Motivation

Beweis.

- (i) Rechne nach und beachte hierbei, dass $\operatorname{Im} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = (ad-bc) \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$.
- (ii) Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2^+(\mathbb{R})$ setze $j(M, z) := cz + d$. Dann gilt für beliebige Matrizen $M_1, M_2 \in \operatorname{GL}_2^+(\mathbb{R})$, dass

$$j(M_1 M_2, z) = j(M_1, M_2 \circ z) \cdot j(M_2, z),$$

woraus wegen $(cz + d)^{-k} = j(M, z)^{-k}$ die Behauptung folgt.

g.e.d.

Ziel: Definition gewisser linearer Operatoren $T: M_k \rightarrow M_k$ auf den Vektorräumen M_k (Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$) durch geeignete Mittelbildung.

Idee: Sei $\mathcal{M} \subseteq \operatorname{GL}_2^+(\mathbb{R})$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften (mit \cdot die gewöhnliche Matrizenmultiplikation):

- (i) $\Gamma(1) \cdot \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$
- (ii) $\mathcal{M} \cdot \Gamma(1) \subseteq \mathcal{M}$
- (iii) \mathcal{M} zerfällt in endlich viele disjunkte Rechtsnebenklassen, d.h.

$$\mathcal{M} = \dot{\bigcup}_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} \Gamma(1) \cdot M,$$

wobei die Vereinigung disjunkt und endlich ist.

Für eine Modulform $f \in M_k$ setze dann

$$f|T_{\mathcal{M}} := \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} f|_k M.$$

Dann ist $f|T_{\mathcal{M}}$ wohldefiniert, denn jede Rechtsnebenklasse $\Gamma(1) \cdot M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}$ besteht aus Vertretern der Form NM mit $N \in \Gamma(1)$ und es gilt

$$f|_k NM = (f|_k N)|_k M = f|_k M$$

wegen Lemma 2.1.3, ii) und $f|_k N = f$ für beliebiges $N \in \Gamma(1)$, da $f \in M_k$.

Ferner: Sei eine Matrix $N \in \Gamma(1)$ gegeben. Dann ist

$$(f|T_{\mathcal{M}})|_k N = \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} f|_k MN = \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} f|_k M = f|T_{\mathcal{M}},$$

denn mit M durchläuft auch MN ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen. (Begründung: Sind zwei Matrizen $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ nicht äquivalent unter Linksmultiplikation mit $\Gamma(1)$, so gilt dies trivialerweise auch für $M_1 N, M_2 N$. Auch ist

$$\mathcal{M}N = \left(\dot{\bigcup}_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} \Gamma(1) \cdot M \right) N = \dot{\bigcup}_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} \Gamma(1) \cdot MN = \mathcal{M},$$

denn nach Voraussetzung gilt sowohl $\mathcal{M}N \subseteq \mathcal{M}$ als auch $\mathcal{M} = \mathcal{M}N^{-1}N \subseteq \mathcal{M}N$.)

Folgerung: $f|T_{\mathcal{M}}$ hat das Transformationsverhalten einer Modulform vom Gewicht k .

2.2 Die Heckeoperatoren $T(n)$

Definition 2.2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$\mathcal{M}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = n \right\}.$$

Beobachtung: $\mathcal{M}(n)$ ist invariant unter Links- und Rechtsmultiplikation von $\Gamma(1)$.

Lemma 2.2.2.

$$\mathcal{M}(n) = \bigcup_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b(\bmod d)}} \Gamma(1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

wobei die Vereinigung über alle Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ geht, derart dass $a, b, d \in \mathbb{Z}$, $ad = n$, $d > 0$, und b ein volles Restsystem modulo d durchläuft (also z.B. $b \in \{1, 2, \dots, d\}$).

Beweis. Die Inklusion \supseteq ist klar, zeige also noch \subseteq . Sei dazu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$. Da $ad - bc = n > 0$, können a und c nicht gleichzeitig Null sein. Deswegen existiert $t := \text{ggT}(a, c) \in \mathbb{N}$. Also sind $-\frac{c}{t}$ und $\frac{a}{t}$ teilerfremd und es existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{c}{t} & \frac{a}{t} \end{pmatrix} \in \Gamma(1).$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{c}{t} & \frac{a}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Man kann also voraussetzen, dass $c = 0$. Wegen $\det M = n$ gilt dann $ad = n$. Multipliziert man gegebenenfalls mit $-E$, so kann man annehmen, dass $d > 0$. Schließlich multipliziere für $\nu \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \implies \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + \nu d \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Durch geeignete Wahl von $\nu \in \mathbb{Z}$ kann man erreichen, dass $b + \nu d$ in einem vorgegebenen Restsystem modulo d liegt. Damit ist die Inklusion \subseteq gezeigt.

Noch zu zeigen ist, dass die Vereinigung disjunkt ist (die Endlichkeit ist nach Konstruktion klar). Angenommen, für zwei Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

2.2. Die Heckeoperatoren $T(n)$

(mit $ad = n = a'd'$, $d > 0$, $d' > 0$ und b, b' Vertreter zweier Restklassen modulo d bzw. d') existiere ein $N \in \Gamma(1)$, sodass

$$N \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Dann folgt, dass die untere linke Komponente von N Null ist, $N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ also die Gestalt

$$N = \begin{pmatrix} \pm 1 & \nu \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

mit $\nu \in \mathbb{Z}$ hat. Damit ist

$$N \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \nu \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm a & \pm b + \nu d \\ 0 & \pm d \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Es folgt $d' = \pm d$ und da $d, d' > 0$ nach Voraussetzung bereits $d = d'$. Die Diagonalelemente von N sind also beide $+1$ und es folgt $b' = b + \nu d$. Wegen $d = d'$ stammen b, b' beide aus dem gleichen Restsystem modulo d . Da sie sich nur um ein Vielfaches von d unterscheiden, folgt

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

g.e.d.

Definition 2.2.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Man setze dann für $f \in M_k$

$$f|T(n) := n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(n)} f|_k M.$$

Satz 2.2.4.

- (i) Durch $T(n)$ wird eine lineare Abbildung $M_k \rightarrow M_k$ definiert. Diese lässt S_k invariant (gemeint ist: Spitzenformen werden auf Spitzenformen geschickt). Man nennt $T(n)$ den n -ten HECKE-OPERATOR.
- (ii) Ist $f = \sum_{m \geq 0} a(m)q^m \in M_k$, so gilt

$$f|T(n) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right) q^m.$$

Beachte: Der konstante Term von $f|T(n)$ ist gleich

$$n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{d|n} d^{k-1} a(0) = n^{\frac{k}{2}-1} \sigma_{k-1}(n) a(0)$$

Beispiel 2.2.5. Sei $n = p$ prim. Dann ist

$$\begin{aligned} f|T(p) &= p^{\frac{k}{2}-1} \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{d|(m,p)} d^{k-1} a\left(\frac{mp}{d^2}\right) \right) q^m \\ &= p^{\frac{k}{2}-1} \sum_{m \geq 0} \left(a(mp) + p^{k-1} a\left(\frac{m}{p}\right) \right) q^m, \end{aligned}$$

wobei $a\left(\frac{m}{p}\right) := 0$ für $p \nmid m$, denn

$$\sum_{d|(m,p)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) = a(mp) + \begin{cases} 0 & \text{falls } p \nmid m \\ p^{k-1} a\left(\frac{m}{p}\right) & \text{falls } p \mid m \end{cases}$$

Beweis.

- (i) Nach den Überlegungen in 2.1 wissen wir, dass $f|T(n)$ das Transformationsverhalten einer Modulform vom Gewicht k besitzt. Auch ist $f|T(n)$ als Summe holomorpher Funktionen selbst holomorph auf \mathbb{H} . Zu zeigen verbleibt noch, dass $f|T(n)$ holomorph in ∞ ist und den Raum S_k invariant lässt. Beides folgt direkt aus Teil ii) des Satzes.
- (ii) Nächste VL ... *g.e.d.*

Satz 2.2.6.

$$(i) \quad T(m)T(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

Speziell gilt (vergleiche mit Ramanujan- τ -Funktion:

- (i) $T(m)T(n) = T(mn)$, falls $(m, n) = 1$.
- (ii) $T(p)T(p^n) = T(p^{n+1}) + p^{k+1}T(p^{n-1})$ für p prim und $n \geq 1$.

Index

Dedekindische η -Funktion, 12

Diskriminantenfunktion, 6

Eisensteinreihe, 5

Fundamentalebereich, 1

Hecke-Operator, 16

Modulfigur, 2

Modulform, 3

Modulfunktion, 2

normalisierte Eisensteinreihe, 5

Peterssonsscher Strichoperator, 3

Ramanujan-Funktion, 7

Thetareihe, 4

Liste der Sätze

1.1.1 Satz (Valenzformel)	5
-------------------------------------	---