

---

# Modulformen I

Sommersemester 2018  
Vorlesung von Prof. Dr. Winfried Kohnen

---

Vorlesungsmitschrieb von  
Patrick Arras  
Jonas Müller

Heidelberg, den 29. Juni 2018



# Vorwort

Dies ist ein nicht offizielles Skript der Vorlesung Modulformen 1 aus dem Sommersemester 2018 gehalten von Professor Winfried Kohnen an der Universität Heidelberg. Das Skript wurde in der Vorlesung mitgetext und mit pdf<sub>l</sub>atex kompiliert. Deshalb kann es Fehler enthalten und wir übernehmen keine Garantie für die Richtigkeit.

Bei Fehlern kann ich unter folgender Mailadresse erreicht werden:

[jj@mathphys.stura.uni-heidelberg.de](mailto:jj@mathphys.stura.uni-heidelberg.de)

Die aktuellste Version des Skriptes befindet sich immer unter

<https://github.com/jenuk/modulformen/blob/master/script.pdf>

Die L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Source Dateien findet man hier, auf Fehler kann hier alternativ über neues Issue aufmerksam gemacht werden:

<https://github.com/jenuk/modulformen/tree/master>



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>1 Grundlegende Tatsachen</b>	<b>1</b>
1.1 Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)	1
1.1.1 Fundamentalbereich	1
1.1.2 Modulform	2
1.1.3 Beispiele für Modulformen	4
1.1.4 Valenzformel und Anwendungen	5
1.2 Die Modulnvariante $j$	9
<b>2 Heckeoperatoren</b>	<b>13</b>
2.1 Vorbemerkung, Motivation	13
2.2 Die Heckeoperatoren $T(n)$	15
2.3 Folgerungen	21
2.4 Exkurs: Produktdarstellung der Diskriminantenfunktion	24
<b>3 Das Petersson'sche Skalarprodukt</b>	<b>27</b>
3.1 Invariantes Maß und Skalarprodukt	27
3.2 Anwendung: Eine Charakterisierung der Eisensteinreihen	32
<b>4 Poincaré-Reihen</b>	<b>35</b>
4.1 Anwendungen	35
4.1.1 Die Ramanujan $\tau$ -Funktion	40
4.1.2 Die Petersson'schen Formeln	41
4.1.3 Hecke-Operatoren sind hermitesch	42
<b>5 Die Eichler-Selberg-Spurformel auf <math>SL_2(\mathbb{Z})</math></b>	<b>47</b>
<b>Index</b>	<b>65</b>
<b>Liste der Sätze</b>	<b>67</b>



# 1 Grundlegende Tatsachen

## 1.1 Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

### 1.1.1 Fundamentalbereich

Wie üblich sei

$$\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$$

die obere Halbebene und

$$\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}.$$

Dann operiert  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$  durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ z = \frac{az + b}{cz + d},$$

das heißt  $E \circ z = z$  und  $(M_1 M_2) \circ z = M_1 \circ (M_2 \circ z)$ . Hierbei beachte man, dass

$$\operatorname{Im} \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

$\Gamma(1) = \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  ist eine diskrete Untergruppe, spezielle Matrizen in  $\Gamma(1)$  sind

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Translation  $T \circ z = z + 1$  und Stürzung  $S \circ z = -\frac{1}{z}$ .

Man interessiert sich für die Operation von diskreten Untergruppen  $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  insbesondere  $\Gamma = \Gamma(1)$ .

**Definition 1.1.1.** Eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$  heißt FUNDAMENTALBEREICH für die Operationen von  $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{H}$ , falls:

- (i)  $\mathcal{F}$  ist offen,
- (ii) zu jedem  $z \in \mathbb{H}$  existiert ein  $M \in \Gamma$  mit  $M \circ z \in \overline{\mathcal{F}}$ ,

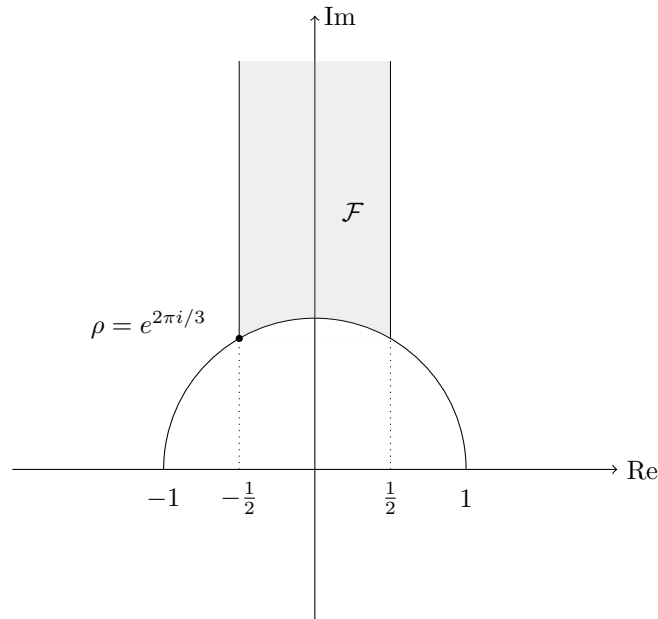


Abbildung 1.1: Der Fundamentalbereich  $\mathcal{F}_1$  der vollen Modulgruppe.

(iii) Sind  $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$  und  $z_2 = M \circ z_1$  mit  $M \in \Gamma$ , dann gilt  $M = \pm E$  und somit  $z_1 = z_2$ .

**Beispiel 1.1.2.** Die Menge  $\mathcal{F}_1 := \{z = x + iy \mid |x| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$  ist ein Fundamentalbereich für die Operation von  $\Gamma(1)$  auf  $\mathbb{H}$ , dieser wird auch MODULFIGUR genannt. Siehe [Abbildung 1.1](#).

**Bemerkung 1.1.3.** Identifikationen in  $\overline{\mathcal{F}_1}$  finden nur auf dem Rand statt. (Die Geraden  $x = \pm \frac{1}{2}$  werden miteinander identifiziert unter  $T$  bzw  $T^{-1}$ , Punkte auf den Kreisbögen rechts oder links von  $i$  werden unter  $S$  identifiziert.

**Satz 1.1.4.** Die Gruppe  $\Gamma(1)$  wird erzeugt von  $S$  und  $T$ .

### 1.1.2 Modulform

**Definition 1.1.5.** Eine Abbildung  $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  heißt MODULFUNKTION vom Gewicht  $k \in \mathbb{Z}$  für  $\Gamma(1)$ , falls gilt:



- (i)  $f$  ist auf  $\mathbb{H}$  meromorph,
- (ii)  $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$  für alle  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ ,
- (iii)  $f$  ist meromorph in  $\infty$ .

*Bedeutung von (iii):* Wendet man (ii) an mit  $M = T$ , so erhält man  $f(z+1) = f(z)$ . Sei  $\mathcal{R} = \{q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1\}$ . Die Abbildung  $z \mapsto q = e^{2\pi iz}$  bildet  $\mathbb{H}$  auf  $\mathcal{R}$  ab und  $F(q) := f(z)$  ist wohldefiniert und holomorph bis auf mögliche Polstellen, die sich prinzipiell gegen  $q = 0$  häufen könnten. Bedingung (iii) fordert nun, dass  $q = 0$  eine unwesentliche isolierte Singularität<sup>1</sup> von  $F$  ist. Nach Funktionentheorie 1 hat dann  $F$  eine Laurententwicklung

$$F(q) = \sum_{n \geq n_0} a_n q^n \quad \text{für } 0 < |q| < |q_0|$$

wobei  $n_0 \in \mathbb{Z}$  fest. Damit erhalten wir also

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n e^{2\pi i n z} \quad \text{für } 0 < y_0 < y$$

**Definition 1.1.6.** Ein solches  $f$  heißt MODULFORM falls  $f$  auf  $\mathbb{H}$  und in  $\infty$  holomorph ist (letzteres bedeutet, dass  $F$  in  $q = 0$  hebbbar ist, also  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z}$  für alle  $z \in \mathbb{H}$ ). Eine Modulform heißt Spitzenform, falls  $a_0 = 0$ .

**Bemerkung 1.1.7.** Die Fourierkoeffizienten  $a_n$  sind im Allgemeinen wichtige und interessante Größen (z.B. Darstellungsanzahlen von natürlichen Zahlen durch quadratische Formen, etwa  $r_4(n) = \#\{(x, y, z, w) \in \mathbb{Z}^4 \mid n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2\}$  oder die Anzahl von Punkten auf elliptischen Kurven über  $\mathbb{F}_p$ ).

**Definition 1.1.8.** Sei  $\gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Man setzt

$$(f|_k M)(z) := (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

für  $z \in \mathbb{H}$ , dies ist der PETERSSONSCHER STRICHOPERATOR.

Dann gilt  $f|_k E = f$  und  $f|_k(M_1 M_2) = (f|_k M_1)|_k M_2$  für alle  $M_1, M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Es folgt:

- (i) Es gilt  $(f|_k M)(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z)$  für alle  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$  genau dann, wenn dies für  $S$  und  $T$  gilt, d.h.  $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$  und  $f(z+1) = f(z)$ , da  $S$  und  $T$   $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  erzeugen.

<sup>1</sup>Das heißt es handelt sich um eine hebbare Singularität oder eine Polstelle.

## 1.1. Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

---

- (ii) Eine Funktion  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann eine Modulform vom Gewicht  $k$ , wenn  $f$  eine Fourierreiheentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

hat und zusätzlich gilt

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$$

### 1.1.3 Beispiele für Modulformen

#### Thetareihen

**Definition 1.1.9.** Sei  $A \in M_m(\mathbb{R})$  symmetrisch und positiv definit. Dann heißt

$$\vartheta_A(z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g]z} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

eine THETAREIHE, wobei  $A[g] := g^t A g$  für  $g \in \mathbb{Z}^m \cong M_{m,1}(\mathbb{Z})$ .

**Satz 1.1.10.**

- (i)  $\vartheta_A(z)$  ist gleichmäßig absolut konvergent auf  $y \geq y_0 > 0$ . Insbesondere ist  $\vartheta_A(z)$  auf  $\mathbb{H}$  holomorph.
- (ii) Es gilt die Theta-Transformationsformel:  $\vartheta_{A^{-1}} = \sqrt{\det A} \cdot \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{m}{2}} \vartheta_A(z)$ .

**Satz 1.1.11.** Sei  $A \in M_m(\mathbb{Z})$  symmetrisch, positiv definit, gerade<sup>2</sup> und  $\det A = 1$ . Dann gilt  $8|m$  und  $\vartheta_A(z)$  ist eine Modulform vom Gewicht  $\frac{m}{2}$  für  $\Gamma(1)$ .

*Beachte*  $\vartheta_A(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} r_A(n) q^n$  wobei  $r_A(n)$  die Anzahl der Darstellungen von  $n$  durch die ganzzahlige, positive definite quadratische Form  $x \mapsto \frac{1}{2} x^t A x$  auf  $\mathbb{R}^m$  ist.

#### Eisensteinreihen

**Definition 1.1.12.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k$  gerade und  $k \geq 4$ . Dann heißt

$$G_k(z) = \sum'_{m,n} \frac{1}{(mz + n)^k} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

---

<sup>2</sup>Das heißt für alle  $\mu \in \{1, \dots, m\}$  gilt  $a_{\mu\mu}$  ist gerade

EISENSTEINREIHE vom Gewicht  $k$ .<sup>3</sup>

**Satz 1.1.13.**

- (i)  $G_k(z)$  ist gleichmäßig absolut konvergent auf  $D_\varepsilon = \{z = x + iy \mid y \geq \varepsilon, x^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$ , insbesondere also holomorph auf  $\mathbb{H}$ .
- (ii)  $G_k$  ist Modulform vom Gewicht  $k$  für  $\Gamma(1)$ .
- (iii) Es gilt

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei  $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  und  $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ .

Setze  $E_k := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$  die NORMALISIERTE EISENSTEINREIHE. Benutze nun

$$\zeta(k) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}-1} 2^{k-1} B_k}{k!} \pi^k$$

für  $k$  gerade und  $k \geq 2$ . Damit folgt

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei alle  $B_k$  rationale Zahlen sind. Speziell gilt

$$B_4 = -\frac{1}{30} \quad \implies \quad E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n,$$

$$B_6 = \frac{1}{42} \quad \implies \quad E_6 = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n) q^n.$$

### 1.1.4 Valenzformel und Anwendungen

**Satz 1.1.14 (VALENZFORMEL).** Sei  $f$  eine Modulfunktion vom Gewicht  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f \neq 0$ . Dann gilt

$$\text{ord}_\infty f + \frac{1}{2} \text{ord}_i f + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho f + \sum_{\substack{z \in \Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \\ z \not\sim i, \rho}} \text{ord}_z f = \frac{k}{12}.$$

---


$$^3 \sum'_{m,n} := \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}}$$

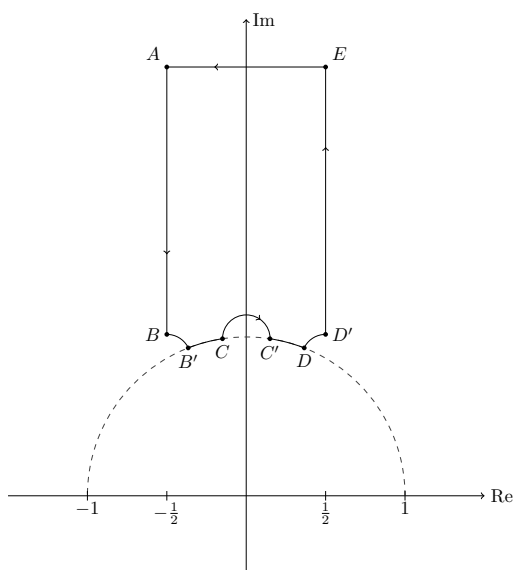


Abbildung 1.2: Die Kurve  $\mathcal{C}$  wobei  $A$  und  $E$  so gewählt sind, dass  $\mathcal{C}$  alle Null- und Polstellen enthält.

Hierbei ist  $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  und

$$\text{ord}_{\infty} f := \text{ord}_{q=0} F(q)$$

mit  $F(q) = f(z)$  für  $q = e^{2\pi i z}$ .

**Beweis.** Zum Nachweis reduziert man auf den Fall, dass  $f$  außer in  $z = \rho, -\bar{\rho}, i$  keine Null- oder Polstellen auf  $\partial\overline{F_1}$  hat und berechnet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Wobei die Kurve  $\mathcal{C}$  wie in [Abbildung 1.2](#) gewählt ist.

*g.e.d.*

**Definition 1.1.15.** Sei

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728} (E_4^3(z) - E_6^2(z))$$

die DISKRIMINANTENFUNKTION. Dann ist  $\Delta$  eine Spitzenform vom Gewicht  $k = 12$  mit  $\Delta(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{H}$  und  $\text{ord}_{\infty} \Delta = 1$ , d. h.  $\Delta = q + \dots$

**Bemerkung 1.1.16.**  $\Delta$  ist in gewisser Weise die „erste“ von 0 verschiedene Spitzenform und wurde von vielen Mathematikern studiert.

**Beispiel 1.1.17.**

- (i) Schreibe  $\Delta(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n)q^n$ , dann heißt  $n \mapsto \tau(n)$  RAMANUJAN-FUNKTION. Es gilt:  $\tau(n) \in \mathbb{Z}$  für alle  $n \geq 1$ . Ferner lässt sich zeigen, dass  $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$ , mithilfe von  $B_{12} = -\frac{691}{2730}$ .
- (ii) Vermutung:  $\tau(n) \neq 0$  für alle  $n \geq 1$  (Lehner)

Sei  $M_k$  der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Modulformen vom Gewicht  $k \in \mathbb{Z}$  und  $S_k \subseteq M_k$  der Unterraum der Spitzenformen.

**Bemerkung 1.1.18.**  $M_k = \{0\}$  für  $k$  ungerade, da  $f((-E) \circ z) = f(z) = (-1)^k f(z)$ .

**Satz 1.1.19.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$  gerade. Dann gilt:

- (i)  $M_k = \{0\}$  für  $k < 0$  und  $M_2 = \{0\}$ .
- (ii)  $M_0 = \mathbb{C}$ .
- (iii)  $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ , falls  $k \geq 4$ .
- (iv) Die Abbildung  $f \mapsto f \cdot \Delta$  gibt einen Isomorphismus von  $M_{k-12}$  auf  $S_k$ .
- (v)  $\dim M_k < \infty$ .

**Satz 1.1.20.** Sei  $k \geq 0$  gerade. Dann gilt:

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12} \\ 1 + \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

**Beispiel 1.1.21.**

- (i)  $M_4 = \mathbb{C}E_4$ .
- (ii)  $M_6 = \mathbb{C}E_6$ .
- (iii)  $M_8 = \mathbb{C}E_8 = \mathbb{C}E_4^2$ .
- (iv)  $M_{10} = \mathbb{C}E_{10} = \mathbb{C}E_4E_6$ .
- (v)  $M_{12} = \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}\Delta$ .
- (vi)  $M_{14} = \mathbb{C}E_{14}$ .

## 1.1. Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

---

**Satz 1.1.22.** Sei  $k \geq 0$  gerade. Dann bilden  $E_4^\alpha E_6^\beta$  mit  $4\alpha + 6\beta = k$  eine Basis von  $M_k$ , insbesondere gilt also

$$M_k = \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta \geq 0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \mathbb{C} E_4^\alpha E_6^\beta$$

**Beweis.** Wir zeigen zunächst induktiv, dass die Monome  $M_k$  erzeugen. Für  $k \leq 10$  ist dies nach Beispiel 1.1.21 klar. Sei also  $k \geq 12$ . Man bestimme eine beliebige Kombination  $\alpha, \beta \geq 0$  mit  $4\alpha + 6\beta = k$  und setze  $g := E_4^\alpha E_6^\beta \in M_k$  mit konstantem Term gleich 1.

Sei nun  $f \in M_k$  beliebig mit konstantem Term  $a_0$ . Dann ist  $f - a_0 \cdot g \in S_k$ . Nach Satz 1.1.19, iv) gilt daher  $f - a_0 \cdot g = \Delta \cdot h$  mit  $h \in M_{k-12}$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist  $h$  eine Linearkombination von Monomen  $E_4^\gamma E_6^\delta$  mit  $4\gamma + 6\delta = k-12$ . Aber  $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$  und daher ist  $f - a_0 \cdot g$  Linearkombination von Monomen  $E_4^{\gamma+3} E_6^\delta$  und  $E_4^\gamma E_6^{\delta+2}$ . Wegen

$$4(\gamma + 3) + 6\delta = k - 12 + 12 = k$$

$$4\gamma + 6(\delta + 2) = k - 12 + 12 = k$$

ist also auch  $f$  als Linearkombination von Monomen der behaupteten Form schreibbar. Somit erzeugen die Monome tatsächlich  $M_k$ .

Noch zu zeigen ist, dass die Monome über  $\mathbb{C}$  linear unabhängig sind. Beweis durch Widerspruch: *Angenommen*, es existiere eine nicht-triviale lineare Relation

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \geq 0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \lambda_{\alpha, \beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0.$$

*Fall 1:* Sei  $k \equiv 0 \pmod{4}$ . Dann sind alle  $\beta$  gerade, also schreibe jeweils  $\beta = 2\beta'$  mit  $\beta' \geq 0$ . Es folgt  $\alpha = \frac{k}{4} - 3\beta'$  und somit

$$E_4^\alpha E_6^\beta = E_4^{\frac{k}{4} - 3\beta'} E_6^{2\beta'} = E_4^{\frac{k}{4}} \left( \frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'}.$$

Da  $E_4^{\frac{k}{4}}$  nicht die Nullfunktion ist, ergibt sich eine nicht-triviale Polynom-Relation für  $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ , d. h. die meromorphe Funktion  $\frac{E_6^2}{E_4^3}$  ist Nullstelle eines nicht-trivialen Polynoms über  $\mathbb{C}$ . Da  $\mathbb{C}$  algebraisch abgeschlossen ist (jedes nicht-konstante Polynom über  $\mathbb{C}$  zerfällt vollständig über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren), ist  $\frac{E_6^2}{E_4^3}$  somit konstant.

Wir zeigen  $\frac{E_6^2}{E_4^3} \equiv 0$  mit einem *Trick*: Es gilt  $E_6(-\frac{1}{z}) = z^6 E_6(z)$ , denn  $E_6 \in M_6$ . Auswerten in  $z = i = -\frac{1}{i}$  liefert  $E_6(i) = 0$ . Ferner gilt

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{2\pi i n z} \implies E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{-2\pi n}.$$

Da alle Summanden positiv sind, folgt  $E_4(i) \neq 0$  und somit  $\frac{E_6^2(i)}{E_4^3(i)} = 0$ . Dies impliziert jedoch da  $\frac{E_6^2}{E_4^3}$  konstant ist bereits  $E_6 \equiv 0$ .  $\nmid$

*Fall 2:* Sei  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , dann sind alle  $\beta$  ungerade. Analoges Vorgehen zum ersten Fall liefert ebenfalls einen Widerspruch.

Somit sind die Monome über  $\mathbb{C}$  linear unabhängig.

*g.e.d.*

**Bemerkung 1.1.23.** Der Satz impliziert additive Faltungsformeln für die multiplikativen Funktionen  $\sigma_{k-1}(n)$  (weiterhin  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 4$  gerade). „Multiplikativ“ bedeutet hier

$$\text{ggT}(m, n) = 1 \implies \sigma_{k-1}(m \cdot n) = \sigma_{k-1}(m) \cdot \sigma_{k-1}(n).$$

**Beispiel 1.1.24.**  $E_8 = E_4^2$ , ferner  $E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n)q^n$ , also  $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(n-m)\sigma_3(m)$ .

Allgemeiner kann man  $E_k$  ausdrücken als Linearkombination von Monomen der Form  $E_4^\alpha E_6^\beta$  und erhält hieraus Formeln für  $\sigma_{k-1}(n)$ .

## 1.2 Die Modulvariante $j$

**Definition 1.2.1.** Sei  $j := \frac{E_4^3}{\Delta}$ .

**Satz 1.2.2.**

- (i)  $j$  ist holomorph auf  $\mathbb{H}$  und hat einen einfachen Pol in  $\infty$ .
- (ii)  $j$  ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.
- (iii)  $j$  liefert eine Bijektion  $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$ .

**Beweis.**

- (i) Da  $\Delta(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{H}$ , ist  $j(z)$  holomorph auf  $\mathbb{H}$ . Ferner gilt

$$\text{ord}_\infty j = \text{ord}_\infty E_4^3 - \text{ord}_\infty \Delta = 0 - 1 = -1.$$

- (ii) Da  $E_4^3, \Delta \in M_{12}$  folgt die Aussage.

## 1.2. Die Modulinvariante $j$

- (iii) Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann ist zu zeigen, dass die Modulfunktion  $j_\lambda := j - \lambda$  vom Gewicht Null eine modulo  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  eindeutig bestimmte Nullstelle hat. Man wendet auf  $j_\lambda$  die Valenzformel an! Es gilt  $\mathrm{ord}_z j_\lambda \geq 0$  für alle  $z \in \mathbb{H}$  und  $\mathrm{ord}_\infty j_\lambda = -1$ . Da  $k = 0$  folgt mit der Valenzformel

$$-1 + n + \frac{n'}{2} + \frac{n''}{3} = 0$$

mit  $n, n', n'' \in \mathbb{N}_0$ . Also

$$n + \frac{n'}{2} + \frac{n''}{3} = 1 \quad (1.1)$$

Man prüft nach: die einzigen Lösungen  $(n, n', n'') \in \mathbb{N}_0^3$  von (1.1) sind  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  und  $(0, 0, 3)$ . Dies impliziert die Behauptung. *g.e.s.*

**Satz 1.2.3.** Sei  $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  eine meromorphe Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $f$  ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.
- (ii)  $f$  ist Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts.
- (iii)  $f$  ist eine rationale Funktion in  $j$ .

**Beweis.**

- (iii)  $\Rightarrow$  (ii) Sei  $f = \frac{P(j)}{Q(j)}$  wobei  $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m$  mit  $a_\nu \in \mathbb{C}$ ,  $a_m \neq 0$  und  $Q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$  mit  $b_\nu \in \mathbb{C}$ ,  $b_n \neq 0$  mit  $Q \not\equiv 0$ , insbesondere also auch  $Q(j) \not\equiv 0$ . Wegen  $j = \frac{E_4^3}{\Delta}$  folgt

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_0 + a_1 \frac{E_4^3}{\Delta} + \dots + a_m \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^m}{b_0 + b_1 \frac{E_4^3}{\Delta} + \dots + b_n \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^n} \\ &= \frac{(a_0 \Delta^m + a_1 E_4^3 \Delta^{m-1} + \dots + a_m (E_4^3)^m) \cdot \Delta^n}{(b_0 \Delta^n + b_1 E_4^3 \Delta^{n-1} + \dots + b_n (E_4^3)^n) \cdot \Delta^m}. \end{aligned}$$

Hier sind Zähler und Nenner Modulformen vom Gewicht  $12(m+n)$ . Also folgt die Behauptung.

- (ii)  $\Rightarrow$  (i) klar
- (i)  $\Rightarrow$  (iii) Sei  $f$  eine Modulfunktion vom Gewicht Null und  $f \not\equiv 0$ . Seien  $z_1, \dots, z_r$  die modulo  $\Gamma(1)$  verschiedenen Polstellen von  $f$  und  $m_1, \dots, m_r$  deren Ordnungen. Sei

$$P(z) := \prod_{\nu=1}^r (j(z) - j(z_\nu))^{m_\nu}.$$



Dann gilt

$$\text{ord}_{z_\nu} P = \text{ord}_{z_\nu} (j(z) - j(z_\nu))^{m_\nu} = m_\nu \text{ord}_{z_\nu} (j(z) - j(z_\nu)) \geq m_\nu.$$

Dann ist  $P(z)f(z)$  eine Modulfunktion vom Gewicht Null und holomorph auf  $\mathbb{H}$ . Da  $P(z)$  ein Polynom in  $j$  ist, genügt es die Behauptung für  $P(z)f(z)$  zu zeigen. Insbesondere kann man voraussetzen, dass  $f$  holomorph auf  $\mathbb{H}$  ist. Da  $\text{ord}_\infty \Delta = 1$ , gibt es  $n \in \mathbb{N}_0$  so dass  $g := \Delta^n f$  in unendlich holomorph ist. Dann ist  $f = \frac{g}{\Delta^n}$  und  $g$  ist eine Modulform vom Gewicht  $12n$ . Nach [Satz 1.1.22](#) ist  $g$  eine Linearkombination von Monomen  $E_4^\alpha E_6^\beta$  mit  $4\alpha + 6\beta = 12n$ . Es genügt somit die Behauptung für  $\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^n}$  zu zeigen. Insbesondere gilt  $3|\alpha$  und  $2|\beta$ , schreibe  $\alpha = 3p$  und  $\beta = 2q$ . Dann gilt

$$\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^n} = \frac{(E_4^3)^p (E_6^2)^q}{\Delta^{p+q}} = j^p (j - 1728)^q,$$

$$\text{denn } j - 1728 = j - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} = \frac{E_4^3}{\Delta} - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} = \frac{E_6^2}{\Delta}. \quad \text{g.e.d.}$$

**Bemerkung 1.2.4.**

- (i) Der Quotient  $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}$  besitzt in natürlicher Weise die Struktur einer Riemannschen Fläche isomorph zu  $S^2 \setminus \{\text{Punkt}\}$  indem man die Ränder in  $\overline{\mathcal{F}_1}$  identifiziert. Fügt man den Punkt  $\infty$  hinzu, so erhält man  $\overline{\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}} := \Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \cup \{\infty\} \cong S^2$  (die Sphäre in  $\mathbb{R}^3$ ). [Satz 1.2.2](#) (iii) besagt dann, dass  $j$  ein Isomorphismus von  $\overline{\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}} \cong S^2 \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$  ist. [Satz 1.2.3](#) entspricht dann der Tatsache, dass die einzigen meromorphen Funktionen auf  $S^2$  die rationalen Funktionen sind.
- (ii) Man kann zeigen (schwer!)

$$\Delta(z) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} j &= \frac{E_4^3}{\Delta} = \frac{1}{q} \left( 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n \right)^3 \frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}} \\ &= \frac{1}{q} \left( 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n \right)^3 \prod_{n \geq 1} \left( \sum_{m \geq 0} q^{mn} \right)^{24} \\ &= \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n \geq 1} c(n) q^n \quad \text{mit } c(n) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Also hat die  $j$ -Funktion eine Fourierentwicklung in  $q$ , wobei die Koeffizienten positive ganzen Zahlen sind.

## 1.2. Die Modulinvariante $j$

---

- (iii) Man zeigt leicht:  $\frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)} = 1 + \sum_{n \geq 1} p(n)q^n$  wobei  $p(n)$  die Anzahl der Partionen von  $n$  ist, d. h. die Anzahl der Zerlegungen von  $n$  als Summe positiver, ganzer Zahlen (Beispielsweise  $p(4) = 5$ , denn  $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ ). Man sagt: die erzeugende Reihe von  $p(n)$  wird durch  $\frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)}$  gegeben.

Beachte  $1 + \sum_{n \geq 1} p(n)q^n = \frac{e^{\pi i \frac{z}{12}}}{\eta(z)}$  wobei  $\eta(z) = e^{\pi i \frac{z}{12}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$  die sogenannte DEDEKINDISCHE  $\eta$ -FUNKTION ist. Beachte  $\eta^{24} = \Delta$ .  $\eta$  sollte also eine Modulform vom Gewicht  $\frac{1}{2}$  sein. Mit Hilfe der Theorie der Modulformen kann man zeigen  $p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3n}} \cdot e^{\pi \sqrt{\frac{3}{2}n}}$  für  $n \rightarrow \infty$  (hier  $a(n) \sim b(n)$  genau dann, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 1$ ).

## 2 Heckeoperatoren

### 2.1 Vorbemerkung, Motivation

**Definition 2.1.1.** Definiere die Gruppe

$$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid ad - bc > 0 \right\},$$

welche  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  als Untergruppe enthält.

**Definition 2.1.2.**

(i) Seien  $z \in \mathbb{H}$  und

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}),$$

dann setze

$$M \circ z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

(ii) Für  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$  und  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  setze

$$(f|_k M)(z) := (ad - bc)^{\frac{k}{2}} (cz + d)^{-k} f(M \circ z).$$

Diese Definitionen verallgemeinern die früheren Definitionen für  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  (siehe 1.1.1).  
Beachte, dass weiterhin für alle  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  gilt:

$$f|_k \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = f.$$

**Lemma 2.1.3.**

(i) Die Abbildung  $(M, z) \mapsto M \circ z$  definiert eine Operation von  $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{H}$ .

(ii) Man hat  $f|_k M_1 M_2 = (f|_k M_1)|_k M_2$ .

## 2.1. Vorbemerkung, Motivation

**Beweis.**

- (i) Rechne nach und beachte hierbei, dass  $\operatorname{Im} \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) = (ad-bc) \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$ .
- (ii) Für  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2^+(\mathbb{R})$  setze  $j(M, z) := cz + d$ . Dann gilt für beliebige Matrizen  $M_1, M_2 \in \operatorname{GL}_2^+(\mathbb{R})$ , dass

$$j(M_1 M_2, z) = j(M_1, M_2 \circ z) \cdot j(M_2, z),$$

woraus wegen  $(cz + d)^{-k} = j(M, z)^{-k}$  die Behauptung folgt.

*g.e.d.*

*Ziel:* Definition gewisser linearer Operatoren  $T: M_k \rightarrow M_k$  auf den Vektorräumen  $M_k$  (Modulformen vom Gewicht  $k \in \mathbb{Z}$ ) durch geeignete Mittelbildung.

*Idee:* Sei  $\mathcal{M} \subseteq \operatorname{GL}_2^+(\mathbb{R})$  eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften (mit  $\cdot$  die gewöhnliche Matrizenmultiplikation):

- (i)  $\Gamma(1) \cdot \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$
- (ii)  $\mathcal{M} \cdot \Gamma(1) \subseteq \mathcal{M}$
- (iii)  $\mathcal{M}$  zerfällt in endlich viele disjunkte Rechtsnebenklassen, d.h.

$$\mathcal{M} = \dot{\bigcup}_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} \Gamma(1) \cdot M,$$

wobei die Vereinigung disjunkt und endlich ist.

Für eine Modulform  $f \in M_k$  setze dann

$$f|T_{\mathcal{M}} := \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} f|_k M.$$

Dann ist  $f|T_{\mathcal{M}}$  wohldefiniert, denn jede Rechtsnebenklasse  $\Gamma(1) \cdot M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}$  besteht aus Vertretern der Form  $NM$  mit  $N \in \Gamma(1)$  und es gilt

$$f|_k NM = (f|_k N)|_k M = f|_k M$$

wegen Lemma 2.1.3, ii) und  $f|_k N = f$  für beliebiges  $N \in \Gamma(1)$ , da  $f \in M_k$ .

*Ferner:* Sei eine Matrix  $N \in \Gamma(1)$  gegeben. Dann ist

$$(f|T_{\mathcal{M}})|_k N = \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} f|_k MN = \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} f|_k M = f|T_{\mathcal{M}},$$

denn mit  $M$  durchläuft auch  $MN$  ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen. (Begründung: Sind zwei Matrizen  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$  nicht äquivalent unter Linksmultiplikation mit  $\Gamma(1)$ , so gilt dies trivialerweise auch für  $M_1 N, M_2 N$ . Auch ist

$$\mathcal{M}N = \left( \dot{\bigcup}_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} \Gamma(1) \cdot M \right) N = \dot{\bigcup}_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}} \Gamma(1) \cdot MN = \mathcal{M},$$

denn nach Voraussetzung gilt sowohl  $\mathcal{M}N \subseteq \mathcal{M}$  als auch  $\mathcal{M} = \mathcal{M}N^{-1}N \subseteq \mathcal{M}N$ .)

*Folgerung:*  $f|T_{\mathcal{M}}$  hat das Transformationsverhalten einer Modulform vom Gewicht  $k$ .

## 2.2 Die Heckeoperatoren $T(n)$

**Definition 2.2.1.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Setze

$$\mathcal{M}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = n \right\}.$$

*Beobachtung:*  $\mathcal{M}(n)$  ist invariant unter Links- und Rechtsmultiplikation von  $\Gamma(1)$ .

**Lemma 2.2.2.**

$$\mathcal{M}(n) = \bigcup_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b(\bmod d)}} \Gamma(1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

wobei die Vereinigung über alle Matrizen  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  geht, derart dass  $a, b, d \in \mathbb{Z}$ ,  $ad = n$ ,  $d > 0$ , und  $b$  ein volles Restsystem modulo  $d$  durchläuft (also z.B.  $b \in \{1, 2, \dots, d\}$ ).

**Beweis.** Die Inklusion  $\supseteq$  ist klar, zeige also noch  $\subseteq$ . Sei dazu  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$ . Da  $ad - bc = n > 0$ , können  $a$  und  $c$  nicht gleichzeitig Null sein. Deswegen existiert  $t := \text{ggT}(a, c) \in \mathbb{N}$ . Also sind  $-\frac{c}{t}$  und  $\frac{a}{t}$  teilerfremd und es existieren  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  mit

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{c}{t} & \frac{a}{t} \end{pmatrix} \in \Gamma(1).$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{c}{t} & \frac{a}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Man kann also voraussetzen, dass  $c = 0$ . Wegen  $\det M = n$  gilt dann  $ad = n$ . Multipliziert man gegebenenfalls mit  $-E$ , so kann man annehmen, dass  $d > 0$ . Schließlich multipliziere für  $\nu \in \mathbb{Z}$  mit

$$\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \implies \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + \nu d \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Durch geeignete Wahl von  $\nu \in \mathbb{Z}$  kann man erreichen, dass  $b + \nu d$  in einem vorgegebenen Restsystem modulo  $d$  liegt. Damit ist die Inklusion  $\subseteq$  gezeigt.

Noch zu zeigen ist, dass die Vereinigung disjunkt ist (die Endlichkeit ist nach Konstruktion klar). Angenommen, für zwei Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

## 2.2. Die Heckeoperatoren $T(n)$

---

(mit  $ad = n = a'd'$ ,  $d > 0$ ,  $d' > 0$  und  $b, b'$  Vertreter zweier Restklassen modulo  $d$  bzw.  $d'$ ) existiere ein  $N \in \Gamma(1)$ , sodass

$$N \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Dann folgt, dass die untere linke Komponente von  $N$  Null ist,  $N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  also die Gestalt

$$N = \begin{pmatrix} \pm 1 & \nu \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

mit  $\nu \in \mathbb{Z}$  hat. Damit ist

$$N \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \nu \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm a & \pm b + \nu d \\ 0 & \pm d \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Es folgt  $d' = \pm d$  und da  $d, d' > 0$  nach Voraussetzung bereits  $d = d'$ . Die Diagonalelemente von  $N$  sind also beide  $+1$  und es folgt  $b' = b + \nu d$ . Wegen  $d = d'$  stammen  $b, b'$  beide aus dem gleichen Restsystem modulo  $d$ . Da sie sich nur um ein Vielfaches von  $d$  unterscheiden, folgt

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

*g.e.d.*

**Definition 2.2.3.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Man setze dann für  $f \in M_k$

$$f|T(n) := n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(n)} f|_k M.$$

**Satz 2.2.4.**

- (i) Durch  $T(n)$  wird eine lineare Abbildung  $M_k \rightarrow M_k$  definiert. Diese lässt  $S_k$  invariant (gemeint ist: Spitzenformen werden auf Spitzenformen geschickt). Man nennt  $T(n)$  den  $n$ -ten HECKE-OPERATOR.
- (ii) Ist  $f = \sum_{m \geq 0} a(m)q^m \in M_k$ , so gilt

$$f|T(n) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right) q^m.$$

*Beachte:* Der konstante Term von  $f|T(n)$  ist gleich

$$n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{d|n} d^{k-1} a(0) = n^{\frac{k}{2}-1} \sigma_{k-1}(n) a(0)$$

**Beispiel 2.2.5.** Sei  $n = p$  prim. Dann ist

$$\begin{aligned} f|T(p) &= p^{\frac{k}{2}-1} \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{d|(m,p)} d^{k-1} a\left(\frac{mp}{d^2}\right) \right) q^m \\ &= p^{\frac{k}{2}-1} \sum_{m \geq 0} \left( a(mp) + p^{k-1} a\left(\frac{m}{p}\right) \right) q^m, \end{aligned}$$

wobei  $a\left(\frac{m}{p}\right) := 0$  für  $p \nmid m$ , denn

$$\sum_{d|(m,p)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) = a(mp) + \begin{cases} 0 & \text{falls } p \nmid m \\ p^{k-1} a\left(\frac{m}{p}\right) & \text{falls } p \mid m \end{cases}$$

**Beweis.**

- (i) Nach den Überlegungen in [Abschnitt 2.1](#) wissen wir, dass  $f|T(n)$  das Transformationsverhalten einer Modulform vom Gewicht  $k$  besitzt. Auch ist  $f|T(n)$  als Summe holomorpher Funktionen selbst holomorph auf  $\mathbb{H}$ . Zu zeigen verbleibt noch, dass  $f|T(n)$  holomorph in  $\infty$  ist und den Raum  $S_k$  invariant lässt. Beides folgt direkt aus Teil ii) des Satzes.
- (ii) Benutze [Lemma 2.2.2](#), damit folgt

$$\begin{aligned} f|T(n) &= n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod d}} f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod d}} n^{\frac{k}{2}} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{m>0 \\ ad=n, d>0 \\ b \bmod d}} d^{-k} a(m) e^{2\pi i m \frac{az+b}{d}} \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{m>0 \\ d|n, d>0}} d^{-k} a(m) e^{2\pi i m \frac{n}{d^2} z} \left( \sum_{b \bmod d} e^{2\pi i m \frac{b}{d}} \right). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\sum_{b \bmod d} e^{2\pi i m \frac{b}{d}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } d \nmid m \\ d & \text{falls } d \mid m \end{cases}$$

## 2.2. Die Heckeoperatoren $T(n)$

Allgemein  $1 + q + \dots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1} = 0$ , falls  $q \neq 1$  und  $q^N = 1$ , wende dies an mit  $q = e^{2\pi i \frac{m}{d}}$ ,  $N = d$ . Damit erhalten wir, wobei zu beachten ist, dass die Vertauschung wegen absoluter Konvergenz gerechtfertigt sind

$$\begin{aligned}
 f|T(n) &= n^{k-1} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 0 \pmod{d} \\ d|n, d > 0}} d^{-k+1} a(m) e^{2\pi i \frac{mn}{d^2} z} & (m \mapsto md) \\
 &= \sum_{\substack{m \geq 0 \\ d|n, d > 0}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} a(md) e^{2\pi i \frac{mn}{d} z} & \left(d \mapsto \frac{n}{d}\right) \\
 &= \sum_{\substack{m \geq 0 \\ d|n, d > 0}} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d}\right) e^{2\pi i m d z} & (md \mapsto m) \\
 &= \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 0 \pmod{d} \\ d|n, d > 0}} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) e^{2\pi i m z} \\
 &= \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{d|m, d|n} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right) q^m.
 \end{aligned}$$

*g.e.s.*

**Satz 2.2.6.** Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$T(m)T(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

Speziell gilt (vergleiche mit Ramanujan- $\tau$ -Funktion):

- (i)  $T(n)T(m) = T(mn)$  falls  $\text{ggT}(m, n) = 1$
- (ii)  $T(p)T(p^\nu) = T(p^{\nu+1}) + p^{k-1}T(p^{\nu-1})$  für  $p$  prim und  $\nu \geq 1$ .

Beachte dass (ii) äquivalent ist zur Identität

$$\frac{1}{1 - T(p)X + p^{k-1}X^2} = \sum_{\nu \geq 0} T(p^\nu)X^\nu$$

**Beweis.** in mehreren Schritten: 1. Schritt: Beweis von (i): Seien  $m, n$  teilerfremd. Benutze **Lemma 2.2.2**, dann gilt

$$f|T(m)T(n) = (mn)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=m \\ d>0, b \pmod{d}}} \left( \sum_{\substack{a'd'=n \\ d'>0, b' \pmod{d'}}} f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \right)$$



$$= (mn)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=m \\ d>0, b \bmod d}} \left( \sum_{\substack{a'd'=n \\ d'>0, b' \bmod d'}} f|_k \begin{pmatrix} aa' & ab'+bd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix} \right).$$

Durchläuft  $d$  alle positiven Teiler von  $m$  und  $d'$  alle positiven Teiler von  $n$ , so durchläuft  $D := dd'$  alle positiven Teiler von  $mn$ , denn  $\text{ggT}(m, n) = 1$ . Setzt man  $A := aa'$ , so gilt dann  $AD = mn$ . Ferner gilt: Durchläuft  $b$  ein volles Restsystem mod  $d$  und  $b'$  ein solches mod  $d'$ , so durchläuft  $B = ab + bd'$  ein volles Restsystem mod  $dd'$ , denn in der Tat genügt es zu zeigen, dass diese Zahlen inkongruent mod  $dd'$  sind, denn dann sind dies genau  $dd'$  paarweise inkongruente Zahlen. Angenommen

$$ab'_1 + b_1d' \equiv ab'_2 + b_2d' \pmod{dd'},$$

dann gilt

$$a(b'_1 - b'_2) \equiv d(b_2 - b_1) \pmod{dd'}.$$

Dies impliziert  $a(b'_1 - b'_2) \equiv 0 \pmod{d'}$ . Aber  $\text{ggT}(a, d') = 1$ , denn  $a|m$  und  $d'|n$  und  $\text{ggT}(m, n) = 1$  nach Voraussetzung. Also folgt  $b'_1 \equiv b'_2 \pmod{d'}$ , also  $b'_1 = b'_2$ . Es folgt jetzt  $b_2 \equiv b_1 \pmod{d}$ , also  $b_2 = b_1$ . Also folgt die Behauptung. Und damit

$$f|T(m)T(n) = (mn)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{AD=mn \\ D>0, B \bmod D}} f|_k \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = f|_k T(mn).$$

2. Schritt: Beweis von (ii): Es gilt nach [Lemma 2.2.2](#):

$$f|T(p) = p^{\frac{k}{2}-1} \left( f|_k \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{\mu \bmod p} f|_k \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & p \end{pmatrix} \right)$$

und

$$f|T(p^\nu) = (p^\nu)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu-\beta} & b \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\begin{aligned} f|T(p)T(p^\nu) &= (p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}-1} \left( \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{\nu-\beta} & b \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix} + \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta \\ \mu \bmod p}} f|_k \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{\nu-\beta} & b \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix} \right) \\ &= (p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}-1} \left( \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu+1-\beta} & pb \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix} + \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta \\ \mu \bmod p}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu-\beta} & b+\mu p^\beta \\ 0 & p^{\beta+1} \end{pmatrix} \right) \quad (2.1) \end{aligned}$$

## 2.2. Die Heckeoperatoren $T(n)$

Betrachte 2. Summe in (2.1): Durchläuft  $b$  ein Restsystem modulo  $p^\beta$  und  $\mu$  ein Restsystem modulo  $p$ , so durchläuft  $b + \mu p^\beta$  ein solches modulo  $p^{\beta+1}$  (denn insgesamt  $p^{\beta+1}$  Zahlen, paarweise inkongruent modulo  $p^{\beta+1}$ ). Man sieht daher, dass die 2. Summe gleich

$$f|T(p^{\nu+1}) - (p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Betrachte 1. Summe in (2.1). Diese ist gleich

$$(p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}-1} \left( f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu+1-\beta} & pb \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix} \right).$$

Man erhält also

$$f|_k T(p)T(p^\nu) = f|T(p^{\nu+1}) + (p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}-1} \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq \beta \leq \nu \\ b \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} |_k \begin{pmatrix} p^{\nu-\beta} & b \\ 0 & p^{\beta-1} \end{pmatrix}}_{=:R}$$

In  $R$  ersetze  $\beta$  durch  $\beta + 1$ , erhalte

$$R = \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu-1 \\ b \bmod p^{\beta+1}}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu-1-\beta} & b \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix},$$

Man setze  $b = \tilde{b} + \mu p^\beta$  wobei  $\mu$  modulo  $p$  und  $\tilde{b}$  modulo  $p^\beta$  läuft

$$R = \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu-1 \\ \tilde{b} \bmod p^\beta \\ \mu \bmod p}} f|_k \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |_k \begin{pmatrix} p^{\nu-1-\beta} & \tilde{b} \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix}$$

da  $f$  Periode 1 hat, erhält man

$$(p^{\nu+1})^{\frac{k}{2}-1} R = p^{k-1} (p^{\nu-1})^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \nu-1 \\ \tilde{b} \bmod p^\beta}} f|_k \begin{pmatrix} p^{\nu-1-\beta} & \tilde{b} \\ 0 & p^\beta \end{pmatrix} = p^{k-1} f|_k T(p^{\nu-1})$$

3. Schritt: zeige durch Induktion nach  $s \in \mathbb{N}$  (Übungsaufgabe), dass

$$T(p^\nu)T(p^s) = \sum_{\alpha=0}^{\min\{\nu, s\}} (p^\alpha)^{k-1} T(p^{\nu+s-2\alpha}),$$

was sich mit Teilern der Form  $d = p^\alpha$  umschreiben lässt zu

$$T(p^\nu)T(p^s) = \sum_{d|(p^\nu, p^s)} d^{k-1} T\left(\frac{p^{\nu+s}}{d^2}\right).$$

4. Schritt: der allgemeine Fall! Induktion über die verschiedenen Primteiler von  $m$ . Sei  $m = p^r m'$ ,  $n = p^s n'$  mit  $p \nmid m'$ ,  $p \nmid n'$ . Dann folgt mit i), dass

$$\begin{aligned} T(m)T(n) &= T(m'p^r)T(n'p^s) = T(m')T(p^r)T(n')T(p^s) \\ &= T(m')T(n')T(p^r)T(p^s). \end{aligned}$$

Wendet man dieses Argument nun induktiv auf  $T(m')T(n')$  und weitere gemeinsame Primteiler an, so kann man davon ausgehen, dass  $m', n'$  nach endlich vielen Iterationen teilerfremd sind. Dann kann man mit i) und Schritt 3 schreiben

$$T(m)T(n) = \left( \sum_{d|(m',n')} d^{k-1} T\left(\frac{m'n'}{d^2}\right) \right) \left( \sum_{t|(p^r,p^s)} t^{k-1} T\left(\frac{p^r p^s}{t^2}\right) \right),$$

was sich nach erneuter Anwendung von i) vereinfacht zu

$$T(m)T(n) = \sum_{\substack{d|(m',n') \\ t|(p^r,p^s)}} (dt)^{k-1} T\left(\frac{p^r m' p^s n'}{(dt)^2}\right)$$

und mit  $D = dt$  schließlich zu

$$T(m)T(n) = \sum_{D|(m,n)} D^{k-1} T\left(\frac{mn}{D^2}\right).$$

*g.e.d.*

## 2.3 Folgerungen

**Satz 2.3.1.** Die Hecke-Operatoren  $T(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  erzeugen eine kommutative  $\mathbb{C}$ -Algebra von Endomorphismen von  $M_k$ , welche  $S_k$  stabil lässt. Die Algebra wird sogar bereits von den Hecke-Operatoren  $T(p)$  für  $p$  prim erzeugt.

**Beweis.** Die Kommutativität folgt direkt aus [Satz 2.2.6](#). Wir zeigen noch, dass für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  der Hecke-Operator  $T(n)$  durch Hecke-Operatoren der Form  $T(p)$  mit  $p$  prim darstellbar ist. Sei dazu  $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$  die Primzahlzerlegung von  $n$ , dann ist nach [Satz 2.2.6](#), i)

$$T(n) = \prod_{i=1}^r T(p_i^{\alpha_i}).$$

Ferner gilt nach [Satz 2.2.6](#), ii)

$$T(p)T(p^\nu) = T(p^{\nu+1}) + p^{k-1}T(p^{k-1}),$$

also lässt sich beispielsweise durch Wahl von  $\nu = 1$  und Umstellen der Gleichung der Hecke-Operator  $T(p^2)$  als Funktion von  $T(p^1) = T(p)$  und  $T(p^0) = T(1) = \text{id}_{M_k}$  ausdrücken. Induktiv gilt dies für alle Hecke-Operatoren der Form  $T(p_i^{\alpha_i})$ , sodass sich  $T(n)$  bereits als Funktion der  $T(p_i)$  darstellen lässt. Damit erzeugen die Hecke-Operatoren  $T(p)$  mit  $p$  prim bereits die gesamte Algebra. *g.e.d.*

### 2.3. Folgerungen

**Definition 2.3.2.** Sei  $f \in M_k$  mit  $k > 0$ . Dann heißt  $f$  HECKE-EIGENFORM, falls gilt

- (i)  $f \not\equiv 0$ ,
- (ii)  $f|T(n) = \lambda(n)f$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $\lambda(n) \in \mathbb{C}$ .

**Satz 2.3.3.** Sei  $f = \sum_{m \geq 0} a(m)q^m \in M_k$  eine Hecke-Eigenform mit  $f|T(n) = \lambda(n)f$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann gilt

- (i)  $a(n) = \lambda(n) \cdot a(1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $a(1) \neq 0$ ,
- (iii)

$$\lambda(m)\lambda(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ . Speziell ist für  $(m, n) = 1$

$$\lambda(m)\lambda(n) = \lambda(mn)$$

sowie für  $\nu \geq 1$  und  $p$  prim

$$\lambda(p)\lambda(p^\nu) = \lambda(p^{\nu+1}) + p^{k-1}\lambda(p^{\nu-1}).$$

**Beweis.**

- (i) Nach Satz 2.2.4, ii) gilt

$$\lambda(n)f = f|T(n) = \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right) q^m.$$

Koeffizientenvergleich bei  $q^1$  liefert sofort  $\lambda(n) \cdot a(1) = a(n)$ .

- (ii) Angenommen,  $a(1) = 0$ . Dann ist nach i) auch  $a(n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit ist  $f = a(0)$  konstant und daher in  $M_0$ . Da für eine Hecke-Eigenform  $f \in M_k$  nach Definition  $k > 0$  gefordert wird, folgt aus  $f \in M_0 \cap M_k$  bereits  $f \equiv 0$ , was im Widerspruch zur Definition der Hecke-Eigenformen steht.

- (iii) Folgt aus Satz 2.2.6 und wegen  $f \not\equiv 0$ . Genauer gilt

$$f|T(m)T(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} f|T\left(\frac{mn}{d^2}\right) \implies \lambda(m)\lambda(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

*q.e.d.*

**Definition 2.3.4.** Man nennt  $f = \sum_{m \geq 0} a(m)q^m$  eine normalisierte Hecke-Eigenform, falls  $a(1) = 1$ .

**Bemerkung 2.3.5.** Durch Division durch  $a(1) \neq 0$  lässt sich jede Hecke-Eigenform normalisieren. Beachte jedoch, dass zum Beispiel die „normalisierten Eisensteinreihen“  $E_k$  zwar Hecke-Eigenformen, aber keine normalisierten Hecke-Eigenformen sind. Die beiden Normalisierungsbegriffe unterscheiden sich also.

*Frage:* Gibt es immer Hecke-Eigenformen? Gibt es vielleicht sogar eine Basis von Hecke-Eigenformen?

**Bemerkung 2.3.6.**

(i) Man zeigt „leicht“, dass die Eisensteinreihe

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad \text{mit } \sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$$

eine Hecke-Eigenform ist mit  $E_k|T(n) = \sigma_{k-1}(n)E_k$  für alle  $n \geq 1$ .

In der Tat: Der konstante Term von  $E_k|T(n)$  ist gleich  $\sigma_{k-1}(n)$ , siehe 2.2.4. Die höheren Terme ergeben sich nach demselben Satz als

$$-\frac{2k}{B_k} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \sigma_{k-1}\left(\frac{mn}{d^2}\right) = -\frac{2k}{B_k} \sigma_{k-1}(m) \sigma_{k-1}(n)$$

wegen

$$\sum_{d|(m,n)} d^\alpha \sigma_\alpha\left(\frac{mn}{d^2}\right) = \sigma_\alpha(m) \sigma_\alpha(n).$$

für beliebiges  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Diese Identität lässt sich leicht induktiv zeigen (Übungsaufgabe), besitzt jedoch nur für  $\alpha = k - 1$  im Kontext der Modulformen eine sinnvolle Interpretation.

(ii) Es ist  $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$ , wobei  $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n$  mit  $\tau(n) \in \mathbb{Z}$  und  $\tau(1) = 1$ . Daher ist  $\Delta$  eine normalisierte Hecke-Eigenform in  $S_{12}$ . Insbesondere ist

$$\tau(m)\tau(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{11} \tau\left(\frac{mn}{d^2}\right),$$

$$\tau(m)\tau(n) = \tau(mn) \quad \text{für } (m, n) = 1,$$

$$\tau(p)\tau(p^\nu) = \tau(p^{\nu+1}) + p^{11} \tau(p^{\nu-1}) \quad \text{für } p \text{ prim.}$$

(iii) Man kann  $S_k$  mit einem Skalarprodukt versehen, derart dass die  $T(n)$  hermitesch bezüglich dieses Skalarproduktes sind. Dann folgt aus der Linearen Algebra bereits, dass die  $T(n)$  *simultan* diagonalisierbar sind. Dies garantiert die Existenz einer Basis von Hecke-Eigenformen.

## 2.4 Exkurs: Produktdarstellung der Diskriminantenfunktion

**Satz 2.4.1.** Für die Diskriminantenfunktion  $\Delta$  gilt die Produktentwicklung

$$\Delta(z) := \frac{1}{1728} (E_4^3(z) - E_6^2(z)) = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^{24},$$

wobei wie üblich  $q := \exp(2\pi iz)$  ist.

**Beweis.** Ein erster Beweis dieser Identität stammt von Jacobi; ein weiterer Beweis, der allein mit elementaren Mitteln auskommt, wird auf Übungsblatt 4 geführt werden. Im Folgenden soll ein vergleichsweise einfacher Beweis von Professor Kohnen selbst vorgestellt werden, der unter anderem auf die Hecke-Operatoren zurückgreift.

1. Schritt: Wir leiten eine zur Behauptung äquivalente Aussage her. Nehme also an, die Produktdarstellung gelte, dann können wir die logarithmische Ableitung bilden (verifiziere durch Nachrechnen unter Beachtung der Produktregel):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta'}{\Delta} &= 2\pi i - 2\pi i \cdot 24 \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{q^m}{1 - q^m} \\ &= 2\pi i \left( 1 - 24 \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{a=1}^{\infty} q^{ma} \right) \\ &= 2\pi i \left( 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \right). \end{aligned}$$

Es genügt also, folgende Aussage zu zeigen:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = 2\pi i E_2, \tag{*}$$

wobei  $E_2(z) := 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n$ . Dies ist der ...

2. Schritt: Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachte nun wie in [Definition 2.2.1](#)

$$\mathcal{M}(n) := \{ M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det(M) = n \}.$$

Wohl bekannt ist aus [Lemma 2.2.2](#), dass

$$\mathcal{M}(n) = \bigcup_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \pmod{d}}} \Gamma(1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

und damit  $\# \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(n) = \sigma_1(n)$ . Definiere nun einen „multiplikativen Hecke-Operator“  $\mathfrak{M}_n$ , der eine Modulform  $f$  vom Gewicht  $k$  bezüglich  $\Gamma(1)$  auf eine solche von Gewicht  $\sigma_1(n) \cdot k$  abbildet durch

$$\mathfrak{M}_n(f) := \prod_{\gamma \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(n)} f|_k \gamma = \prod_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b(\bmod d)}} f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Dies ist wohldefiniert (argumentiere dazu wie bei  $T(n)$  in [Abschnitt 2.1](#)). Wendet man dies nun auf  $f = \Delta$  an, dann ist  $\mathfrak{M}_n(f) = \mathfrak{M}_n(\Delta)$  eine Modulform vom Gewicht  $12\sigma_1(n)$  ohne Nullstellen in  $\mathbb{H}$  und mit  $\text{ord}_\infty(\mathfrak{M}_n(\Delta)) = \sigma_1(n)$ .

Aus der Valenzformel folgt jetzt  $\mathfrak{M}_n(\Delta) = c \cdot \Delta^{\sigma_1(n)}$  für ein  $c \in \mathbb{C}^\times$ . Durch logarithmisches Ableiten beider Seiten von [Gleichung 1](#) erhalten wir mit  $f = \Delta$  und  $\mathfrak{M}_n(\Delta) = c \cdot \Delta^{\sigma_1(n)}$ , dass

$$\sigma_1(n) \frac{\Delta'}{\Delta} = \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b(\bmod d)}} d^{-2} n \frac{\Delta'}{\Delta} \left( \frac{az+b}{d} \right) = \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b(\bmod d)}} \frac{\Delta'}{\Delta} \Big|_2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad (2)$$

denn die Ableitung von

$$f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = n^{\frac{k}{2}} d^{-k} f \left( \frac{az+b}{d} \right)$$

ist für beliebiges  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$\left( f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right)' = n^{\frac{k}{2}} d^{-k} \frac{a}{d} f' \left( \frac{az+b}{d} \right) = n^{\frac{k}{2}} d^{-k-2} n f' \left( \frac{az+b}{d} \right).$$

Setzt man  $\frac{\Delta'}{\Delta} = 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} a(m) q^m$ , so ergibt sich aus [Gleichung 2](#) unter formaler Anwendung der Hecke-Operatoren (siehe Beweis von [Satz 2.2.4](#), ii)) für beliebige  $m, n \in \mathbb{N}$

$$\sigma_1(n) a(m) = \sum_{d|(m,n)} da \left( \frac{mn}{d^2} \right).$$

Einsetzen von  $m = 1$  liefert

$$\sigma_1(n) a(1) = a(n)$$

und garantiert damit, dass  $\frac{\Delta'}{\Delta}$  von der Form

$$\frac{\Delta'}{\Delta}(z) = 2\pi i \left( a(0) + a(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \right)$$

ist. Multipliziert man nun beide Seiten mit  $\Delta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) q^m$  und beachtet dabei  $\tau(1) = 1$  sowie  $\tau(2) = -24$ , ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$a(0) = 1 \quad \text{und} \quad a(1) = -24,$$

womit alles gezeigt ist.

*q.e.d.*





## 3 Das Petersson'sche Skalarprodukt

### 3.1 Invariantes Maß und Skalarprodukt

*Ziel:* Definition eines „natürlichen“ Skalarprodukts auf  $S_k$ . Hierzu benötigt man zunächst ein  $\Gamma(1)$ -invariantes Maß auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition 3.1.1.** Für  $z = x + iy \in \mathbb{H}$  setze man

$$d\omega(z) := \frac{dx \, dy}{y^2}$$

**Satz 3.1.2.** Die Differentialform  $dw = \frac{dy \, dy}{y^2}$  für  $z = x + iy \in \mathbb{H}$  ist  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ -invariant, d. h.  $dw(M \circ z) = dw$  für alle  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ .

**Beweis.** Es gilt  $d\omega(z) = \frac{i}{2y^2} dz \, \overline{dz}$ , denn

$$\begin{aligned} dz \, \overline{dz} &= (dx + i \, dy)(dx - i \, dy) \\ &= dx \, dx - i \, dx \, dy + i \, dy \, dx + dy \, dy \\ &= 0 - i \, dx \, dy - i \, dx \, dy + 0 \\ &= -2i \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Sei nun  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ , dann gilt unter Verwendung von

$$\frac{d(M \circ z)}{dz} = \frac{d \frac{az+b}{cz+d}}{dz} = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

die Behauptung nach

$$\begin{aligned} d\omega(M \circ z) &= \frac{i}{2(\mathrm{Im}(M \circ z))^2} d(M \circ z) \, \overline{d(M \circ z)} \\ &= \frac{i}{2 \frac{y^2}{|cz+d|^4}} \frac{dz}{(cz+d)^2} \overline{\frac{dz}{(cz+d)^2}} \end{aligned}$$

### 3.1. Invariantes Maß und Skalarprodukt

---

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2} \frac{y^2}{|cz+d|^4} \frac{dz}{(cz+d)^2} \frac{\overline{dz}}{\overline{(cz+d)^2}} \\
&= \frac{i|cz+d|^4}{2y^2} \cdot \frac{1}{|cz+d|^4} \cdot dz \overline{dz} \\
&= \frac{i}{2y^2} dz \overline{dz} \\
&= d\omega(z).
\end{aligned}$$

*g.e.d.*

*Ansatz:*  $f, g \in S_k$ , setze:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathcal{F}} y^k f(z) \overline{g(z)} d\omega$$

wobei  $\mathcal{F}$  ein Fundamentalbereich ist.

**Bemerkung 3.1.3.** Sei  $\eta = \frac{dz}{y}$ . Dann gilt  $d\eta = \frac{dx dy}{y^2}$ , denn

$$d\eta = d\left(\frac{dx}{y} + i \frac{dy}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} dy dx + i\left(-\frac{1}{y^2}\right) dy dy = \frac{dx dy}{y^2}.$$

**Erinnerung.** Eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$  heißt Fundamentalbereich (für  $\Gamma(1)$ ), falls gilt

- (i)  $\mathcal{F}$  ist offen,
- (ii) für alle  $z \in \mathbb{H}$  existiert  $M \in \Gamma(1)$  mit  $M \circ z \in \overline{\mathcal{F}}$ ,
- (iii) sind  $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$  und  $z_2 = M \circ z_1$  mit  $M \in \Gamma(1)$ , dann gilt  $M = \pm E$  und  $z_1 = z_2$ .

*Beobachtung:* Für  $A \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  ist der Rand  $\partial A$  abgeschlossen, daher meßbar. Wir werden oft fordern, dass  $\partial F$  eine Nullmenge ist.

**Beispiel 3.1.4.** Der Rand des Standardfundamentalbereich

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{H} \mid |x| < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\}$$

ist eine Nullmenge.

**Satz 3.1.5.** Seien  $\mathcal{F}_1$  und  $\mathcal{F}_2$  Fundamentalbereiche derart, dass  $\partial\mathcal{F}_1$  und  $\partial\mathcal{F}_2$  Nullmengen sind. Sei  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  meßbar und  $\Gamma(1)$ -invariant, d. h.  $f(M \circ z) = f(z)$  für alle  $M \in \Gamma(1)$ . Ferner gelte

$$\int_{\overline{\mathcal{F}_1}} |f| \, dw < \infty,$$

d. h. also dass  $|f|$  über  $\overline{\mathcal{F}_1}$  integrierbar ist, dies impliziert, dass  $f$  über  $\overline{\mathcal{F}_1}$  integrierbar ist.

Dann ist  $f$  auch über  $\overline{\mathcal{F}_2}$  integrierbar und

$$\int_{\overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw = \int_{\overline{\mathcal{F}_2}} f \, dw.$$

**Beweis.** Nach Eigenschaft (ii) eines Fundamentalbereichs gilt (mit  $\Gamma(1)' = \Gamma(1)/_{\pm E}$ )

$$\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \Gamma(1)'} M^{-1} \circ \overline{\mathcal{F}_1} = \bigcup_{M \in \Gamma(1)'} M \circ \overline{\mathcal{F}_2}.$$

Nach (iii) gilt  $M \circ \mathcal{F}_1 \cap N \circ \mathcal{F}_1 = \emptyset$  für  $M \neq \pm N$ . Wegen  $\overline{\mathcal{F}_1} = \mathcal{F}_1 \cup \partial\mathcal{F}_1$  und da  $\partial\mathcal{F}_1$  eine Nullmenge, folgt, dass

$$M \circ \overline{\mathcal{F}_1} \cap N \circ \overline{\mathcal{F}_2} \text{ eine Nullmenge für } M \neq \pm N,$$

denn

$$\begin{aligned} M \circ \overline{\mathcal{F}_1} \cap N \circ \overline{\mathcal{F}_1} &= M \circ (\mathcal{F}_1 \cup \partial\mathcal{F}_1) \cap N \circ (\mathcal{F}_1 \cup \partial\mathcal{F}_1) \\ &= (M \circ \mathcal{F}_1 \cup M \circ (\partial\mathcal{F}_1)) \cap (N \circ \mathcal{F}_1 \cup N \circ (\partial\mathcal{F}_1)) \\ &= (M \circ \mathcal{F}_1 \cap N \circ \mathcal{F}_1) \cup (M \circ \mathcal{F}_1 \cap N \circ (\partial\mathcal{F}_1)) \cup \dots \end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_{\overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw = \int_{\bigcup_{M \in \Gamma(1)'} M \circ \overline{\mathcal{F}_2} \cap \overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw,$$

wobei zu beachten ist, dass es sich um eine abzählbare Vereinigung von meßbaren Mengen handelt und die Durchschnitte haben Maß Null, also gilt die abzählbare Additivität des Integrals:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw &= \sum_{M \in \Gamma(1)'} \int_{M \circ \overline{\mathcal{F}_2} \cap \overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw = \sum_{M \in \Gamma(1)'} \int_{\overline{\mathcal{F}_2} \cap M^{-1}\overline{\mathcal{F}_1}} f(M \circ z) \, dw(M \circ z) \\ &= \sum_{M \in \Gamma(1)'} \int_{\overline{\mathcal{F}_2} \cap M^{-1}\overline{\mathcal{F}_1}} f \, dw = \dots = \int_{\overline{\mathcal{F}_2}} f \, dw. \end{aligned}$$

*g. e. d.*

### 3.1. Invariantes Maß und Skalarprodukt

**Beispiel 3.1.6.** Für jeden Fundamentalbereich  $\mathcal{F}$ , so dass  $\partial\mathcal{F}$  eine Nullmenge ist, gilt

$$\text{vol}(\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}) = \int_{\overline{\mathcal{F}}} dw = \frac{\pi}{3} < \infty$$

**Beweis.** Es genügt nach [Satz 3.1.5](#) den Fall von  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$  zu betrachten wobei  $\mathcal{F}_1$  der Standard Fundamentalbereich ist (siehe [Beispiel 3.1.4](#)).

Es gilt für  $\mathcal{F}_c := \mathcal{F}_1 \cap \{z \in \mathbb{H} \mid y \leq c\}$

$$\int_{\overline{\mathcal{F}_1}} \frac{dx dy}{y^2} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\overline{\mathcal{F}_c}} \frac{dx dy}{y^2} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\overline{\mathcal{F}_c}} d\eta = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\partial\overline{\mathcal{F}_c}} \frac{dz}{y},$$

wobei die letzte Gleichheit wegen dem Satz von Stokes und [Bemerkung 3.1.3](#) folgt.

Das Integral über die Gerade  $z(t) = ic + t$  für  $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  ergibt

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c} dt = -\frac{1}{c} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0.$$

Die Integrale über die beiden Geradenstücke heben sich auf, wegen entgegengesetzter Orientierung und da  $y$  invariant unter  $z \mapsto z + 1$ . Damit bleibt das Integral über den Kreisbogen, dieser wird parametrisiert durch

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{für} \quad \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

Integral ist reellwertig und hat damit den Wert

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{i(\cos t + i \sin t)}{\sin t} dt = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \text{Re} \left( \frac{i \cos t - \sin t}{\sin t} \right) dt = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (-1) dt = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

*g. e. d.*

**Satz 3.1.7.** Für  $f \in M_k$  setze man  $g(z) := y^{\frac{k}{2}} |f(z)|$  für  $z \in \mathbb{H}$ . Dann gilt

- (i)  $g$  ist invariant unter  $\Gamma(1)$ ,
- (ii) ist  $f \in S_k$ , dann ist  $g$  auf  $\mathbb{H}$  beschränkt.

**Beweis.**

- (i) Es gilt

$$g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \left(\text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)^{\frac{k}{2}} \left|f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right| = \left(\frac{y}{|cz+d|^2}\right)^{\frac{k}{2}} |cz+d|^k |f(z)| = g(z).$$

- (ii) Es ist  $\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \Gamma(1)} M \circ \overline{\mathcal{F}}$ . Da nach (i)  $g$  invariant unter  $\Gamma(1)$  ist, genügt es zu zeigen, dass  $g$  auf  $\overline{\mathcal{F}_1}$  beschränkt ist. Aber

$$\overline{\mathcal{F}_1} \cap \overline{\mathcal{F}_c} \text{ ist kompakt.}$$

Wegen Stetigkeit genügt es also zu zeigen, dass  $g$  für  $y \rightarrow \infty$  beschränkt ist. Sei  $f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) e^{2\pi i n z}$ , beachte  $n \geq 1$ , denn  $f \in S_k$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |g(z)| &= y^{\frac{k}{2}} |f(z)| = y^{\frac{k}{2}} \left| e^{2\pi z} \sum_{n \geq 1} a(n) e^{2\pi i(n-1)z} \right| \\ &\leq y^{\frac{k}{2}} e^{-2\pi y} \left( \sum_{n \geq 1} |a(n)| e^{-2\pi(n-1)y} \right) \\ &= y^{\frac{k}{2}} e^{-2\pi y} e^{2\pi c} \left( \sum_{n \geq 1} |a(n)| e^{-2\pi n c} \right) \\ &= \frac{y^{\frac{k}{2}}}{e^{2\pi y}} \cdot K \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

*g.e.d.*

**Definition 3.1.8.** Für  $f, g \in M_k$  derart, dass  $fg \in S_{2k}$ , setze

$$\langle f, g \rangle := \int_{\overline{\mathcal{F}}} f(z) \overline{g(z)} y^k dw, \quad (3.1)$$

wobei  $\mathcal{F}$  ein Fundamentalbereich wie oben ist.

**Satz 3.1.9.**

- (i) (3.1) ist absolut konvergent und hängt nicht von der Auswahl von  $\mathcal{F}$  ab.
- (ii)  $S_k \times S_k \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  ist ein Skalarprodukt auf  $S_k$ .

**Beweis.**

- (i) Beachte  $fg \in S_{2k}$  und  $|f(z) \overline{g(z)}| y^k = y^k |f(z) g(z)|$ , wende Satz 3.1.7 (ii) an und bemerke  $\int_{\overline{\mathcal{F}}} dw < \infty$ . Unabhängig von  $\mathcal{F}$  folgt aus Satz 3.1.5.
- (ii) Klar.

*g.e.d.*

## 3.2 Anwendung: Eine Charakterisierung der Eisensteinreihen

**Satz 3.2.1.** Sei  $k \in 2\mathbb{Z}$ ,  $k \geq 4$ . Sei  $C_k := \{ f \in M_k \mid \langle f, g \rangle = 0 \ \forall g \in S_k \}$  ein Unterraum von  $M_k$ . Dann gilt  $C_k = \mathbb{C}E_k$ .

**Beweis.** Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

**Lemma 3.2.2.** Es gilt  $M_k = C_k \oplus S_k$  (und  $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ ).

**Beweis.** Sei  $f \in C_k \cap S_k$ . Dann  $\langle f, f \rangle = 0$ , also  $f = 0$ .

Sei  $f \in M_k$ . Die Abbildung  $S_k \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g \mapsto \langle g, f \rangle$  ist ein lineares Funktional. Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert daher ein eindeutig bestimmtes Element  $g_0 \in S_k$ , so dass  $\langle g, f \rangle = \langle g, g_0 \rangle$  für alle  $g \in S_k$ . Daher  $\langle g, f - g_0 \rangle = 0$  für alle  $g \in S_k$ , d. h.  $\langle f - g_0, g \rangle = 0$  für alle  $g \in S_k$ . Also ist  $f - g_0 \in C_k$  nach Definition und somit

$$f = \underbrace{(f - g_0)}_{\in C_k} + \underbrace{g_0}_{\in S_k}.$$

*g.e.s.*

Es folgt

$$\dim C_k = \dim M_k - \dim S_k = 1 + \dim S_k - \dim S_k = 1.$$

Daher genügt es zu zeigen, dass  $E_k \in C_k$ , d. h.  $\langle E_k, g \rangle = 0$  für alle  $g \in S_k$ .

**Lemma 3.2.3.** Es gilt

$$E_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \setminus \Gamma(1)} (1|_k M)(z),$$

wobei  $\Gamma(1)_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$  und  $(1|_k M) = (cz + d)^{-k}$ .

**Beweis.** Es gilt  $E_k = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$  mit  $G_k = \sum'_{m,n} \frac{1}{(mz+n)^k}$ . Ist  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , so schreibe  $(m, n) = \lambda(c, d)$  wobei  $\lambda = \text{ggT}(m, n) \in \mathbb{N}$  und  $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$  mit  $\text{ggT}(c, d) = 1$ . Also

$$G_k(z) = \underbrace{\zeta(k)}_{=\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}} \cdot \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1}} (cz + d)^{-k}.$$

Damit

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1}} (cz + d)^{-k}.$$

Daher genügt es zu zeigen

$$\sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \setminus \Gamma(1)} (1|_k M)(z) = \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1}} (cz + d)^{-k}.$$

Jeder Summand links hat die Gestalt  $(cz + d)^{-k}$  mit  $\text{ggT}(c, d) = 1$ . Umgekehrt ist zu zeigen: Jedes  $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$  mit  $\text{ggT}(c, d) = 1$  lässt sich vervollständigen zu  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$  eindeutig bis auf Links-Multiplikation eines Elementes in  $\Gamma(1)_\infty$ . Es gilt:

- $\text{ggT}(c, d) = 1$ , also existieren  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $ad - bc = 1$ , denn  $\mathbb{Z}$  ist ein Hauptidealring. Also  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ .
- $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$ .
- Seien  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ . Dann  $ad - bc = 1 = a'd - b'c$ . Also  $(a - a')d = (b - b')c$ , also  $\frac{c}{d} = \frac{a-a'}{b-b'}$ . Da  $\text{ggT}(c, d) = 1$  folgt  $a - a' = nc, b - b' = nd$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Das heißt  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$ .

*g.e.d.*

Man kann dies schreiben als

$$E_k(z) = \sum_{M \in \Gamma(1)'_\infty \setminus \Gamma(1)'} (1|_k M)(z),$$

wobei  $\Gamma(1)' = \Gamma(1)/\{\pm E\}$  und  $\Gamma(1)'_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} / \{\pm E\}$ .

Sei  $g \in S_k$ , zu zeigen ist  $\langle E_k, g \rangle = 0$ .

Nach Definition

$$\langle E_k, g \rangle = \int_{\mathcal{F}} E_k(z) \overline{g(z)} y^k \, dw = \int_{\mathcal{F}} \left( \sum_{M \in \Gamma(1)'_\infty \setminus \Gamma(1)'} (1|_k M)(z) \overline{g(z)} (\text{Im } z)^k \right) dw(z)$$

Beachte

$$\begin{aligned} (1|_k M)(z) \overline{g(z)} (\text{Im } z)^k &= (1|_k M)(z) \overline{g(M \circ z) (1|_k M)(z)} (\text{Im } M \circ z)^k |(1|_k M)(z)|^{-2} \\ &= \overline{g(M \circ z)} (\text{Im } M \circ z)^k. \end{aligned}$$

Sei  $\tilde{\mathcal{F}} := \bigcup_{M \in \Gamma(1)'_\infty \setminus \Gamma(1)'} M \circ \overline{\mathcal{F}}$  ein Fundamentalbereich für die Untergruppe  $\Gamma(1)'_\infty \subseteq \Gamma(1)'$ , welche durch  $z \mapsto z + n$  operiert. Dann folgt, wobei die zweite Gleichheit durch Substitution und Vertauschung erfolgt, diese ist aufgrund der absoluten Konvergenz gerechtfertigt:

$$\langle E_k, g \rangle = \sum_{M \in \Gamma(1)'_\infty \setminus \Gamma(1)'} \int_{M \circ \overline{\mathcal{F}}} \overline{g(z)} y^{k-2} \, dx \, dy = \int_{\tilde{\mathcal{F}}} \overline{g(z)} y^{k-2} \, dx \, dy.$$

### 3.2. Anwendung: Eine Charakterisierung der Eisensteinreihen

---

Man zeigt formal: Integral ist unabhängig der Auswahl des Fundamentalbereichs  $\mathcal{G}$ . Man wähle für  $\mathcal{G}$  einen Streifen der Breite 1, etwa  $\mathcal{G} = \{z = x + iy \in \mathbb{H} \mid |x| < \frac{1}{2}\}$ . Dann

$$\langle E_k, g \rangle = \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \overline{g(z)} y^{k-2} dx dy$$

Sei  $g(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) e^{2\pi i n z} = \sum_{n \geq 1} a(n) e^{2\pi i n x} e^{-2\pi n y}$ , daher  $\overline{g(z)} = \sum_{n \geq 1} \overline{a(n)} e^{-2\pi n y} e^{-2\pi i n x}$ .

$$\langle E_k, g \rangle = \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n \geq 1} \overline{a(n)} e^{-2\pi n y} y^{k-2} e^{-2\pi i n x} \right) dx dy = 0$$

Vertausche Summe und Integral (denn  $g \in S_k$ ) und beachte  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i n x} dx = 0$ , da  $n \neq 0$ . *g.e.d.*



## 4 Poincaré-Reihen

*Motivation:* Die Abbildung  $S_k \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \mapsto a_f(n) = n$ -ter Fourierkoeffizient von  $f$  ist ein lineares Funktional. Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz existiert ein eindeutig bestimmtes  $\tilde{P}_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$a_f(n) = \langle f, \tilde{P}_n \rangle \quad \text{für alle } f \in S_k.$$

*Frage:* Kann man  $\tilde{P}_n$  explizit angeben? Antwort: ja!

**Definition 4.0.1.** Sei  $k \in 2\mathbb{Z}$ ,  $k \geq 4$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann heißt die formale Reihe

$$P_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

die  $n$ -te Poincaré Reihe vom Gewicht  $k$  für  $\Gamma(1)$ . Summiert wird über alle  $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$  mit  $\text{ggT}(c,d) = 1$  und zu jedem solchen Paar ist  $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$  zu bestimmen, so dass  $ad-bc = 1$ , d.h.  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ . Dies ist unabhängig von der Auswahl von  $a, b$ , denn ist auch  $a', b'$  ein solches Paar, so gilt  $a' = a + mc$ ,  $b' = b + md$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$  und somit

$$\frac{a'z + b'}{cz + d} = \frac{az + b}{cz + d} + m$$

mit  $m \in \mathbb{Z}$  und  $e^{2\pi i n m} = 1$ .

### 4.1 Anwendungen

**Bemerkung 4.1.1.** Es gilt  $P_0 = E_k$ , wie man durch Vergleich mit [Lemma 3.2.3](#) leicht einsieht.

**Satz 4.1.2.**

- (i) Die Reihe  $P_n$  konvergiert auf Kompakta in  $\mathbb{H}$  gleichmäßig absolut, stellt also dort eine holomorphe Funktion dar. Es gilt  $P_n \in S_k$  für  $n \geq 1$ .

## 4.1. Anwendungen

(ii) Es gilt

$$\langle f, P_n \rangle = \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}} a_f(n).$$

für alle  $f \in S_k$  mit  $f = \sum_{m \geq 1} a_f(m) q^m$ .

**Beweis.**

(i) Wegen  $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$  ist

$$\left| e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \right| \leq 1$$

und daher

$$\sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} |cz+d|^{-k} \cdot \left| e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \right| \leq \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} |cz+d|^{-k},$$

sodass die Reihe der Absolutbeträge nach [Lemma 3.2.3](#) durch die Eisensteinreihe von Gewicht  $k$  majorisiert wird. Letztere konvergiert nach FT 2 auf Kompakta in  $\mathbb{H}$  gleichmäßig absolut.

Zeige noch  $P_n \in S_k$  für  $n \geq 1$ . Schreibe zunächst

$$P_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \setminus \Gamma(1)} (e^n |_k M)(z),$$

mit  $e^n(z) := e^{2\pi i n z}$  und beachte, dass  $e^n |_k M = e^n$  für  $M \in \Gamma(1)_\infty$ . Hierbei ist wie in [Lemma 3.2.3](#)

$$\Gamma(1)_\infty := \left\{ M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}.$$

Für  $P_n \in S_k$  müssen wir zeigen, dass  $P_n |_k M = P_n$  für alle  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  und zudem in  $z = i\infty$  verschwindet. Wie im Fall der Eisensteinreihen ist hierfür zu zeigen, dass

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} P_n(z) = 0,$$

also

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_n(z_\nu) = 0$$

für jede Folge von  $z_\nu \in \mathbb{H}$  mit  $z_\nu \rightarrow i\infty$ . Wegen gleichmäßiger Konvergenz gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_n(z_\nu) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} \lim_{\nu \rightarrow \infty} (cz_\nu + d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az_\nu+b}{cz_\nu+d}}$$

und alle Grenzwerte unter der Summe sind 0. In der Tat ist der Exponentialterm wegen  $\frac{az_\nu+b}{cz_\nu+d} \in \mathbb{H}$  beschränkt und für  $c \neq 0$  strebt  $(cz_\nu + d)^{-k}$  gegen 0. Andererseits ist für  $c = 0$  der vordere Term gleich  $d^{-k}$  und somit beschränkt, während

$$\frac{az_\nu+b}{d} \rightarrow i\infty \implies e^{2\pi i n \frac{az_\nu+b}{d}} \rightarrow 0.$$

Damit ist alles gezeigt.

(ii) Unter Benutzung der Darstellung

$$P_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \setminus \Gamma(1)} (e^n|_k M)(z)$$

zeigt man mit dem gleichen „Konvolutionstrick“ wie im Beweis von [Satz 3.2.1](#), dass

$$\langle f, P_n \rangle = \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(z) e^{\overline{2\pi i n z}} y^{k-2} dx dy.$$

Man stelle sich hierzu vor, dass  $\mathbb{H}$  als disjunkte Vereinigung von Bildern des exakten Fundamentalbereichs unter Linksmultiplikation mit  $M \in \Gamma(1)$  entsteht. Teilt man nun  $\Gamma(1)_\infty$  heraus, also alle Translationen, so verbleibt noch der Streifen  $|x| < \frac{1}{2}, y > 0$ .

Es gilt weiter für beliebiges  $f \in S_k$  mit Darstellung  $f(z) = \sum_{m \geq 1} a(m) q^m$ , wie üblich  $q = \exp(2\pi i z)$  und  $z = x + iy$ , dass

$$\begin{aligned} \langle f, P_n \rangle &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{m \geq 1} a(m) e^{2\pi i m x} e^{-2\pi m y} e^{-2\pi i n x} e^{-2\pi n y} y^{k-2} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{m \geq 1} a(m) e^{2\pi i (m-n)x} e^{-2\pi (n+m)y} y^{k-2} dx dy. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i r x} dx = \delta_{r,0} := \begin{cases} 1, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases} \quad (\text{Kronecker-Delta})$$

für beliebiges  $r \in \mathbb{Z}$  folgt

$$\begin{aligned} \langle f, P_n \rangle &= \int_0^\infty \sum_{m \geq 1} a(m) \delta_{m,n} e^{-2\pi (n+m)y} y^{k-2} dy \\ &= a(n) \int_0^\infty e^{-4\pi n y} y^{k-2} dy \\ &= a(n) \frac{1}{(4\pi n)^{k-1}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-y} y^{k-2} dy}_{=\Gamma(k-1)} \\ &= a(n) \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}}. \end{aligned}$$

*g.e.d.*

## 4.1. Anwendungen

**Korollar 4.1.3.** Die Poincaré-Reihen  $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  zu einem festen Gewicht  $k \geq 4$  mit  $k$  gerade, erzeugen den Raum  $S_k$ .

**Beweis.** Angenommen die  $P_n$  erzeugen nicht ganz  $S_k$ , dann existiert ein  $f \in S_k$  mit  $\langle f, P_n \rangle = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mit [Satz 4.1.2](#), ii) folgt hieraus aber  $a(n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit  $f \equiv 0$ . *g.e.d.*

**Satz 4.1.4.** Die Reihe  $P_n$  hat die Fourier-Entwicklung

$$P_n(z) = \sum_{m \geq 1} g_n(m) q^m$$

mit

$$g_n(m) := \delta_{m,n} + 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sum_{c \geq 1} \left[ \frac{1}{c} \cdot K(m, n, c) \cdot J_{k-1} \left( \frac{4\pi\sqrt{mn}}{c} \right) \right].$$

Hierbei ist die Kloosterman-Summe  $K$  definiert als

$$K(m, n, c) := \sum_{\substack{d \pmod{c} \\ (c,d)=1}} e^{2\pi i \frac{md+n\bar{d}}{c}},$$

wobei  $\bar{d} \in \mathbb{Z}$  mit  $\bar{d}d \equiv 1 \pmod{c}$  ist, und die Besselfunktion  $J_{k-1}$  definiert als

$$J_{k-1}(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \sum_{\ell \geq 0} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^\ell}{\ell!(k-1+\ell)!}.$$

**Beweis.** Nach Definition ist

$$P_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}}.$$

Ist  $c = 0$ , so folgt aus  $\text{ggT}(c, d) = 1$  bereits  $d = a = \pm 1$  und unabhängig von  $b \in \mathbb{Z}$  ergibt sich zweimal der Term

$$\frac{1}{2}(\pm 1)^{-k} e^{2\pi i n \frac{\pm z+b}{\pm 1}} = \frac{1}{2} e^{2\pi i n z} e^{\pm 2\pi i n b} = \frac{1}{2} e^{2\pi i n z},$$

zusammengenommen also  $e^{2\pi i n z}$ . Die übrigen Terme ergeben den Beitrag

$$\sum_{\substack{c \geq 1, d \in \mathbb{Z} \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} = \sum_{c \geq 1} \sum_{\substack{d' \pmod{c} \\ \text{ggT}(c,d')=1 \\ ad'-b'c=1}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (c(z+\nu)+d')^{-k} e^{2\pi i n \frac{a(z+\nu)+b'}{c(z+\nu)+d'}}.$$

Die rechte Seite entsteht aus der linken, indem man für festes  $c \geq 1$  und ein festes Vertretersystem  $d'(\bmod c)$  jedes  $d \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}(c, d) = 1$  in der Form  $d = d' + c\nu$  mit  $\nu \in \mathbb{Z}$  und  $d'$  im vorgegebenen Vertretersystem schreibt. Schreibt man zudem mit geeignetem  $b' \in \mathbb{Z}$  auch  $b = b' + a\nu$ , so wird die Bedingung  $ad - bc = 1$  zu

$$1 = ad - bc = a(d' + c\nu) - (b' + a\nu)c = ad' - b'c$$

und die obige Darstellung folgt durch Ausklammern von  $c$  und  $a$ . Im Folgenden schreiben wir wieder  $d$  und  $b$  statt  $d'$  und  $b'$ .

**Lemma 4.1.5.** Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  mit  $c > 0$ . Sei  $\gamma > 0$  beliebig (insbesondere nicht unbedingt ganzzahlig). Dann gilt

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (c(z + \nu) + d)^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a(z+\nu)+b}{c(z+\nu)+d}} = \frac{2\pi(-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\gamma}}{c}\right) e^{\frac{2\pi i}{c}(\gamma a + md)} e^{2\pi i m z}.$$

**Beweis.** Es genügt, diese Aussage nur für den Fall  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  zu zeigen, d.h.

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (z + \nu)^{-k} e^{-2\pi i \gamma \frac{1}{z+\nu}} = 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(4\pi\sqrt{m\gamma}) e^{2\pi i m z}.$$

In der Tat: Ersetzt man in dieser Gleichung  $z$  durch  $z + \frac{d}{c}$  und  $\gamma$  durch  $\frac{\gamma}{c^2}$  und multipliziert dann mit  $c^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a}{c}}$ , so wird die linke Seite zu

$$\begin{aligned} c^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a}{c}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (z + \frac{d}{c} + \nu)^{-k} e^{-2\pi i \frac{\gamma}{c^2} \frac{1}{z+\frac{d}{c}+\nu}} &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (cz + d + c\nu)^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a}{c} - 2\pi i \frac{\gamma}{c} \frac{1}{cz+d+c\nu}} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (c(z + \nu) + d)^{-k} e^{\frac{2\pi i \gamma}{c} \left(a - \frac{1}{c(z+\nu)+d}\right)} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (c(z + \nu) + d)^{-k} e^{\frac{2\pi i \gamma}{c} \frac{ac(z+\nu)+ad-1}{c(z+\nu)+d}} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (c(z + \nu) + d)^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a(z+\nu)+b}{c(z+\nu)+d}} \end{aligned}$$

sowie die rechte Seite zu

$$c^{-k} e^{2\pi i \gamma \frac{a}{c}} 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{mc^2}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(4\pi\sqrt{\frac{m\gamma}{c^2}}\right) e^{2\pi i m(z+\frac{d}{c})} \quad (4.1)$$

## 4.1. Anwendungen

$$\begin{aligned}
&= c^{-k+2\frac{k-1}{2}} 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\gamma}}{c}\right) e^{2\pi i \gamma \frac{a}{c} + 2\pi i m z + 2\pi i m \frac{d}{c}} \\
&= \frac{2\pi(-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\gamma}}{c}\right) e^{\frac{2\pi i}{c}(\gamma a + md)} e^{2\pi i m z}.
\end{aligned}$$

Die linke Seite von (4.1) konvergiert gleichmäßig absolut auf kompakten Mengen in  $\mathbb{H}$  und hat den Limes 0 für  $q \rightarrow \infty$  (gleicher Beweis wie in Satz 4.1.2). Sie hat daher eine Fourierreentwicklung  $\sum_{m \geq 1} c(m)q^m$  mit

$$c(m) = \int_{ic}^{ic+1} \left( \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (z + \nu)^{-k} e^{-2\pi\gamma \frac{1}{z+\nu}} \right) e^{-2\pi i m z} dz \stackrel{z \mapsto is}{=} -i^{-k+1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-k} e^{-2\pi \frac{\gamma}{s}} e^{2\pi m s} ds$$

Es gilt nach „Abramowitz-Stegun“, Seite 1026, Formel 29.3.80:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-k} e^{-\frac{\alpha}{s}} e^{ts} ds = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(2\sqrt{\alpha t})$$

Setzt man  $\alpha = 2\pi\gamma$ ,  $t = 2\pi m$ , so folgt

$$c(m) = -i^{-k+1} \cdot 2\pi i \left(\frac{2\pi m}{2\pi\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(2\sqrt{2\pi\gamma - 2\pi m}) = (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot 2\pi \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(2\pi\sqrt{m\gamma})$$

wie behauptet.

*g.e.d.*

Nach dem Lemma folgt nun

$$P_n(z) = e^{2\pi n z} + \sum_{c \geq 1} \sum_{\substack{d \bmod c \\ \text{ggT}(d,c)=1}} \frac{2\pi(-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{m-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(na+md)} e^{2\pi i m z}$$

und die Behauptung folgt nach Vertauschung der Summation über  $c$  und  $m$  (absolute Konvergenz). Beachte  $ad \equiv 1 \pmod{c}$ .

*g.e.d.*

### 4.1.1 Die Ramanujan $\tau$ -Funktion

**Satz 4.1.6.** Sei  $\Delta(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n)q^n \in S_{12}$  ( $\tau(1) = 1$ ,  $\tau(2) = -24, \dots$ ). Dann gilt

$$\tau(n) \neq 0 \iff P_{n,12} \neq 0$$

$$\iff g_n(n) \neq 0$$

wobei  $g_n(n)$  der  $n$ -te Fourier-Koeffizient von  $P_{n,12}$  ist (siehe Satz 4.1.4).

**Beweis.** Es gilt  $P_n = c_n \cdot \Delta$  mit  $c_n \in \mathbb{C}$ . Durch Vergleich des ersten Fourier-Koeffizienten folgt  $c_n \in \mathbb{R}$ . Aus  $\langle \Delta, P_n \rangle \sim \tau(n)$  (siehe Satz 4.1.2 (ii)) folgt  $c_n \langle \Delta, \Delta \rangle \sim \tau(n)$ , also gilt  $\tau(n) = 0$  genau dann, wenn  $c_n = 0$ . Aber  $c_n = 0$  genau dann, wenn  $P_n \equiv 0$  genau dann, wenn  $g_n(n) \sim \langle P_n, P_n \rangle = 0$ . Hieraus folgt die Behauptung. Wobei  $x \sim y \iff x = ky$ . g.e.d.

**Bemerkung 4.1.7.** Es wird vermutet, dass  $\tau(n) \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (Lehmer).

#### 4.1.2 Die Petersson'schen Formeln und Abschätzungen für Fourier-Koeffizienten

Sei  $\{f_1, f_2, \dots, f_g\}$  irgendeine orthogonale Basis von  $S_k$  (nach dem Gram-Schmidt-Verfahren kann man z. B. jedes  $f \in S_k \setminus \{0\}$  zu irgendeiner orthogonalen Basis  $\{f, \dots, f_g\}$  ergänzen). Dann gilt nach Satz 4.1.2 (ii) für jedes  $n \in \mathbb{N}$ :

$$P_n = \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}} \sum_{\nu=0}^g \frac{\overline{a_\nu(n)} f_\nu}{\langle f_\nu, f_\nu \rangle}$$

wenn  $f_\nu = \sum_{m \geq 1} a_\nu(m) q^m$ . Nimmt man auf beiden Seiten den  $m$ -ten Fourier-Koeffizienten so erhält man

$$g_n(m) = \frac{(k-2)!}{(2\pi n)^{k-1}} \sum_{\nu=1}^g \frac{a_\nu(m) \overline{a_\nu(m)}}{\langle f_\nu, f_\nu \rangle}$$

Damit folgt

$$g_n(n) = \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}} \sum_{\nu=1}^g \frac{|a_\nu(n)|^2}{\langle f_\nu, f_\nu \rangle}$$

Speziell ist

$$|a_\nu(n)|^2 \leq \|f\|^2 \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} g_n(n)$$

Für  $g_n(n)$  substituiert man aus Satz 4.1.4 explizite Formeln. Benutzt man  $J_n(x) = \mathcal{O}(\min\{x^{-\frac{1}{2}}, x^n\})$  (einfach) und  $k(n, n, c) = \mathcal{O}_\varepsilon((n, c)^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$  (Weilsche Abschätzung, tiefliegend) so erhält man nach einigen Rechnungen

$$g_n(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

also folgt

$$a_\nu(n) = \mathcal{O}_\varepsilon(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon}).$$

**Satz 4.1.8.** Sei  $f \in S_k$ . Dann gilt  $a(n) = \mathcal{O}_\varepsilon(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon})$ , für  $\varepsilon > 0$ .

## 4.1. Anwendungen

---

### Bemerkung 4.1.9.

- (i) Man kann leicht zeigen, dass  $a(n) \ll_f n^{\frac{k}{2}}$  (siehe später)
- (ii) Mit der Theorie der L-Reihen zu Modulformen kann man

$$a(n) \ll_{f,\varepsilon} n^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4} + \varepsilon}$$

zeigen

- (iii) Nach Deligne (sehr tieflegend) gilt sogar  $a(n) \ll_{f,\varepsilon} n^{\frac{k}{2} - \frac{1}{2} + \varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$  (Ramanujan-Petersson-Vermutung). Dies ist bestmöglich, denn nach Rankin gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_f(n)|^2}{n^{k-1}} = \infty$$

### 4.1.3 Hecke-Operatoren sind hermitesch

**Satz 4.1.10.** Sei  $P_m$  für  $m \in \mathbb{N}$  die  $m$ -te Poincaré-Reihe in  $S_k$ . Dann

$$P_m | T(n) = \sum_{d|(m,n)} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} P_{\frac{mn}{d^2}}.$$

**Beweis.** Nach Definition ist

$$P_m = \frac{1}{2} \sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \backslash \Gamma(1)} e^m |_k M$$

unabhängig vom Vertretersystem von  $\Gamma(1)_\infty \backslash \Gamma(1)$ . Es gilt

$$2P_m | T(n) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{M \in \Gamma(1)_\infty \backslash \Gamma(1) \\ N \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(n)}} e^m |_k M N = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{R \in \Gamma(1)_\infty \backslash \mathcal{M}(n)} e^m | R$$

Wir behaupten nun, dass die Menge

$$\{ MN \mid N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : ad = n, d > 0, b \bmod d, \}$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2 : \text{ggT}(\gamma, \delta) = 1 \text{ und } (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \text{ fixiert s. d. } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \}$$

ein Vertretersystem für  $\Gamma(1)_\infty \backslash \mathcal{M}(n)$  ist.

Wir zeigen zunächst, dass die gesamten Matrizen inäquivalent modulo  $\Gamma(1)_\infty$  sind. Angenommen

$$\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} NM = N' M'$$



mit  $\nu \in \mathbb{Z}$  und  $N$ ,  $N'$  und  $M$ ,  $M'$  wie oben. Daraus folgt

$$N'^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} N = M' M^{-1}$$

also

$$\begin{pmatrix} \frac{d'}{d} & \frac{d'b-b'd+\nu d'd}{n} \\ 0 & \frac{d}{d'} \end{pmatrix} = M' M^{-1}$$

Da  $M' M^{-1}$  Komponenten in  $\mathbb{Z}$  hat, folgt  $\frac{d}{d'}, \frac{d'}{d} \in \mathbb{Z}$ , also  $d = \pm d'$ , also  $d = d'$  und  $a' = a$  und somit

$$M' M^{-1} \in \Gamma(1)_\infty$$

d. h.  $M' = M$ , da Vertretersystem modulo  $\Gamma(1)_\infty$ . Dann folgt aber  $\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} N = N'$ , bzw.  $b' = b + \nu d$ , also  $b = b'$  und damit  $N' = N$ . Die Matrizen in der oben angegebenen Menge sind also tatsächlich inäquivalent modulo  $\Gamma(1)_\infty$ .

Es verbleibt noch zu zeigen, dass sich jedes  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n)$  schreiben lässt als

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

mit  $\nu \in \mathbb{Z}$  und  $ad = n, d > 0, b \pmod{d}$  und  $(\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2, \text{ggT}(\gamma, \delta) = 1, \alpha\delta - \beta\gamma = 1$ . Man bestimmt zunächst  $(\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2$  mit  $\text{ggT}(\gamma, \delta) = 1$ , sodass  $C\delta - D\gamma = 0$ , dann ist

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n),$$

also

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \tilde{b} \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

mit  $\tilde{b} \in \mathbb{Z}, ad = n$ . Indem man gegebenenfalls mit  $-E$  multipliziert, d. h.  $(\gamma, \delta)$  durch  $(-\gamma, -\delta)$  ersetzt, kann man auch  $d > 0$  erreichen. Wähle nun  $\nu \in \mathbb{Z}$ , sodass  $b = b + \nu d$ . Dies zeigt die Behauptung, dass die oben angegebene Menge ein Vertretersystem für  $\Gamma(1)_\infty \backslash \mathcal{M}(n)$  ist.

Es gilt nun

$$2P_m | T(n) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{M \in \Gamma(1)_\infty \backslash \Gamma(1)} \left( \sum_{\substack{ad=n, d>0 \\ b \pmod{d}}} e^m |_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) |_k M.$$

Die innere Summe ist gleich

$$\sum_{d|n} n^{\frac{k}{2}} d^{-n} e^{2\pi i m \left( \frac{n}{d^2} z + \frac{b}{d} \right)} = n^{\frac{k}{2}} \sum_{d|(m,n)} d^{1-k} e^{2\pi i \frac{mn}{d^2} z},$$

## 4.1. Anwendungen

---

wegen

$$\sum_{b \pmod{d}} e^{2\pi i \frac{b}{d} m} = \begin{cases} d, & d|m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

*g.e.d.*

**Satz 4.1.11.** Die Operatoren  $T(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  eingeschränkt auf  $S_k$  sind hermitesch bezüglich des Petersson-Skalarproduktes, d.h.

$$\langle f|T(n), g \rangle = \langle f, g|T(n) \rangle \quad \forall f, g \in S_k.$$

**Beweis.** Man zeigt dies normalerweise, indem man Modulformen zu sogenannten Kongruenzuntergruppen von  $\Gamma(1)$  und deren Skalarprodukt definiert und dann gewisse Invarianzeigenschaften des Skalarproduktes (beim Übergang von einer Untergruppe zur anderen) beachtet. Wir werden hier die Behauptung unter Benutzung von [Satz 4.1.10](#) beweisen. Da die  $P_m$  mit  $m \in \mathbb{N}$  den Raum  $S_k$  erzeugen, genügt es zu zeigen, dass

$$\langle f|T(n), P_m \rangle = \langle f, P_m|T(n) \rangle.$$

Man schreibe  $f = \sum_{l \geq 1} a(l)q^l$  und  $f|T(n) = \sum_{l \geq 1} b(l)q^l$ . Nach [Satz 4.1.2](#), ii) ist

$$\begin{aligned} \langle f|T(n), P_m \rangle &= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} b(m) \\ &= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right). \end{aligned}$$

Andererseits ist nach [Satz 4.1.10](#):

$$\begin{aligned} \langle f, P_m|T(n) \rangle &= \sum_{d|(m,n)} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \langle f, P_{\frac{mn}{d^2}} \rangle \\ &= \sum_{d|(m,n)} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \frac{(k-2)!}{(4\pi \frac{mn}{d^2})^{k-1}} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) \\ &= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right). \end{aligned}$$

*g.e.d.*

**Korollar 4.1.12.** Die Eigenwerte von  $T(n)$  sind reell.

**Beweis.** Ist nach Satz 4.1.11 und LA 1 klar.

*g.e.d.*

**Korollar 4.1.13.** Seien  $f, g$  normalisierte Eigenformen in  $S_k$ . Dann ist entweder  $f = g$  oder  $\langle f, g \rangle = 0$ .

**Beweis.** Seien  $f = \sum_{n \geq 1} a(n)q^n$  und  $g = \sum_{n \geq 1} b(n)q^n$ . Wegen  $a(1) = b(1) = 1$  ist dann  $f|T(n) = a(n)f$  und  $g|T(n) = b(n)g$ . Daher gilt mit Satz 4.1.11

$$a(n)\langle f, g \rangle = \langle f|T(n), g \rangle = \langle f, g|T(n) \rangle = \overline{b(n)}\langle f, g \rangle = b(n)\langle f, g \rangle.$$

Aus  $\langle f, g \rangle \neq 0$  folgt damit  $a(n) = b(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also  $f = g$ .

*g.e.d.*

**Lemma 4.1.14.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und sei  $\{T_\mu\}_{\mu \in I}$  eine Familie von hermiteschen, miteinander kommutierenden Endomorphismen von  $V$ . Dann besitzt  $V$  eine orthogonale Basis bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren aller Operatoren  $T_\mu$  mit  $\mu \in I$ .

**Beweis.** Sei  $W$  die Menge der  $\mathbb{C}$ -linearen Endomorphismen von  $V$ , aufgefasst als reeller Vektorraum. Wegen  $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$  ist auch  $\dim_{\mathbb{R}} W < \infty$ . Die  $T_\mu$  erzeugen daher einen endlich-dimensionalen Unterraum von  $W$ , sodass es genügt, die Aussage für endlich viele Operatoren  $T_1, \dots, T_m$  zu zeigen.

Wir zeigen zunächst durch Induktion nach  $m$ , dass  $V$  einen gemeinsamen nichttrivialen Eigenvektor von  $T_1, \dots, T_m$  enthält. Für  $m = 1$  ist dies klar, da  $V$  wegen  $T_1$  hermitesch einen nichttrivialen Eigenvektor von  $T_1$  enthält. Sei nun  $m \geq 2$  und  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T_1$  mit zugehörigem Eigenraum  $V_\lambda := \{v \in V \mid T_1 v = \lambda v\}$ . Für alle  $\mu \in \{2, \dots, m\}$  besteht nach Voraussetzung die Kommutativität  $T_\mu T_1 = T_1 T_\mu$  und daher gilt  $T_\mu V_\lambda \subseteq V_\lambda$ . Nach Induktionsvoraussetzung besitzt nun  $V_\lambda$  einen nichttrivialen gemeinsamen Eigenvektor von  $T_2, \dots, T_m$ . Dieser ist nach Definition von  $V_\lambda$  auch Eigenvektor von  $T_1$ .

Wir zeigen abschließend die Aussage des Lemmas durch Induktion nach  $\dim_{\mathbb{C}} V$ . Für  $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$  ist die Aussage klar. Sei also  $m = \dim_{\mathbb{C}} V \geq 2$ . Man schreibe  $V = \mathbb{C}v \oplus (\mathbb{C}v)^\perp$ , wobei  $v$  ein Eigenvektor aller  $T_\mu$  mit  $\mu \in \{1, \dots, m\}$  ist. Da die  $T_\mu$  hermitesch sind und  $\mathbb{C}v$  invariant lassen, lassen sie auch  $(\mathbb{C}v)^\perp$  invariant. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt  $(\mathbb{C}v)^\perp$  bereits eine orthogonale Basis von Eigenvektoren für alle  $T_\mu$ . Hieraus folgt die Behauptung.

*g.e.d.*

**Korollar 4.1.15.** Der Raum  $S_k$  besitzt eine orthogonale Basis von gemeinsamen Eigenfunktionen für alle  $T(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis.** Folgt direkt aus dem obigen Lemma mit  $V = S_k$  und  $\{T_\mu\}_{\mu \in I} = \{T(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*g.e.d.*

## 4.1. Anwendungen

---

**Bemerkung 4.1.16.** Nach [Korollar 4.1.13](#) ist diese orthogonale Basis bis auf Permutation und Multiplikation mit Skalaren in  $\mathbb{C}^\times$  eindeutig bestimmt.

## 5 Die Eichler-Selberg-Spurformel auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Sei von nun an stets  $k \geq 4$  gerade und wie üblich  $T(m)$  mit  $m \geq 1$  der  $m$ -te Hecke-Operator auf  $M_k(\Gamma(1))$ . Wir wissen bereits, dass wir  $T(m)$  zu einem Endomorphismus auf  $S_k$  einschränken können.

*Ziel:* Bestimmung einer analytischen (einfach) und arithmetischen (schwer) Formel für die Spur  $\mathrm{Tr} T(m)$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .

Sei  $\mathbb{H}$  wie üblich die obere Halbebene und  $h$  eine Funktion  $h : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(z, z') \mapsto h(z, z')$ , welche in beiden Variablen eine Spitzenform von Gewicht  $k$  darstellt, d.h.

$$h(\cdot, z') \in S_k \quad \forall z' \in \mathbb{H} \quad \text{und} \quad h(z, \cdot) \in S_k \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Für  $f \in S_k$  definieren wir dann  $f * h$  als die Funktion

$$f * h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, z' \mapsto (f * h)(z') := \int_{\mathcal{F}} f(z) \overline{h(z, -z')} y^{k-2} dx dy \quad (z = x + iy). \quad (5.1)$$

Dies ist im Wesentlichen das Petersson-Skalarprodukt  $\langle f, h(\cdot, -z') \rangle$ . Wir wollen zunächst zeigen, dass  $T(m) : S_k \rightarrow S_k$  als ein Integral dieses Typs geschrieben werden kann mit einem bestimmten Kern  $h = h_m$  (bis auf eine Konstante). Aus diesen Überlegungen folgt dann auch sogleich eine analytische Formel für  $\mathrm{Tr} T(m)$ .

Sei  $f_1, \dots, f_r$  eine Basis von normierten, simultanen, orthogonalen Eigenformen für die  $T(m)$ , d.h.

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i q^n$$

$$a_1^i = 1$$

$$T(m)f_i = a_m^i f_i$$

$$\langle f_i, f_j \rangle = 0 \iff i \neq j.$$

Für  $m \geq 1$  definieren wir

$$h_m(z, z') = \sum_{ad-bc=m} (cz z' + dz' + az + b)^{-k},$$

dabei erstreckt sich die Summe über alle ganzzahligen Matrizen  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit Determinante  $m$ . Offenbar gilt ebenso

$$h_m(z, z') = \sum_{ad-bc=m} (cz + d)^{-k} \left( z' + \frac{az + b}{cz + d} \right)^{-k} = \sum_{M \in \mathcal{M}(m)} (z' + z)^{-k}|_{k,z} M$$

Man zeigt schnell wegen  $k \geq 4$ , dass die Reihe auf kompakten Teilmengen  $K \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{H}$  absolut und gleichmäßig konvergiert und dort in beiden Variablen holomorphe Funktionen darstellt. Da  $\mathcal{M}(m) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(m)$ ,  $M \mapsto ML$  mit  $L \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , folgt  $h(z, z')|_{k,z} L = h(z, z')$ .

Da weiter

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} \sum_{M \in \mathcal{M}(m)} (z + z')^{-k}|_{k,z} M = \sum_{M \in \mathcal{M}(m)} \lim_{z \rightarrow i\infty} (z' + z)^{-k}|_{k,z} M = 0,$$

folgt  $h_m(-, z') \in S_k$  und  $h_m(z, -) \in S_k$  aus Symmetriegründen.

**Satz 5.0.1.** Sei

$$C_k = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} \pi}{2^{(k-3)}(k-1)}. \quad (5.2)$$

Dann gilt

- (i) Die Funktion  $C_k^{-1} m^{k-1} h_m(z, z')$  ist ein Kern für den Operator  $T(m): S_k \rightarrow S_k$ , das heißt:

$$(f * h_m)(z') = C_k m^{-k+1} (T(m)f)(z') \quad (5.3)$$

- (ii) Es gilt die Identität

$$C_k^{-1} m^{k-1} h_m(z, z') = \sum_{i=1}^r a_m^i \frac{f_i(z) \cdot f_i(z')}{\langle f_i, f_i \rangle} \quad (5.4)$$

- (iii) Die Spur  $\mathrm{Tr} T(m)$  ist gegeben durch

$$\mathrm{Tr} T(m) = C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} h_m(z, -\bar{z}) y^{k-2} dx dy \quad (5.5)$$

**Beweis.** Sei zunächst  $m = 1$ . Falls  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , dann gilt

$$(c\bar{z} + d)^{-k} f(z) y^k = f(\gamma z) \cdot \mathrm{Im}(\gamma z)^k$$

Aus der Definition von  $h_m$  erhalten wir demnach

$$f(z)\overline{h_1(z, z')}y^k = \sum_{\gamma \in \Gamma(1)} (\overline{z'} + \gamma\overline{z})^{-k} f(\gamma z) \mathrm{Im}(\gamma z)^k$$

und demnach

$$\begin{aligned} (f * h_1)(z') &= \int_{\mathcal{F}} \sum_{\gamma \in \Gamma(1)} (-z' + \gamma\overline{z})^{-k} f(\gamma z) \mathrm{Im}(\gamma z)^k \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\partial \mathcal{F}} (-z' + \overline{z})^{-k} f(z) y^{k-2} dx dy \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (x - iy - z')^{-k} f(x + iy) y^{k-2} dx dy \end{aligned} \tag{5.6}$$

Nach Cauchy's Formel (und da  $f$  Spitzenform) gilt

$$\int_{-\infty}^\infty (x - iy - z')^{-k} f(x + iy) dx = \frac{2\pi i}{(k-1)!} f^{(k-1)}(2iy + z')$$

Daraus folgt, dass die rechte Seite von (5.6) wie folgt umgeformt werden kann

$$\begin{aligned} (f * h_1)(z') &= \frac{4\pi i}{(k-1)!} \int_0^\infty y^{k-2} f^{(k-1)}(2iy + z') dy \\ &= \frac{4\pi i}{(k-1)!} \int_0^\infty \frac{1}{(2i)^{k-2}} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} f'(2ity + z') \Big|_{t=1} dy \\ &= \frac{4\pi i}{(k-1)!} \frac{1}{(2i)^{k-2}} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \int_0^\infty f'(2ity + z') dy \Big|_{t=1} \\ &= \frac{4\pi i}{(k-1)!} \frac{1}{(2i)^{k-2}} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \left( 0 - \frac{f(z')}{2it} \right) \Big|_{t=1} \\ &= C_k f(z') \end{aligned}$$

Das beweist (5.3) im Fall  $m = 1$ . Für den allgemeinen Fall beachte

$$\begin{aligned}
T(m)h_1(z, z') &= T(m) \sum_{\gamma \in \Gamma(1)} (z' + z)^{-k}|_{k, z} \gamma \\
&= m^{k-1} \sum_{\substack{M \in \Gamma(1) \backslash \mathcal{M}(m) \\ \gamma \in \Gamma(1)}} (z' + z)^{-k}|_{k, z} \gamma M \\
&= m^{k-1} \sum_{R \in \mathcal{M}(m)} (z' + z)^{-k}|_{k, z} R \\
&= m^{k-1} h_m
\end{aligned}$$

Damit folgt (i).

Für (ii) beachte, dass wir  $h_m$  schreiben können mit  $z_1, \dots, z_r$  paarweise verschieden und  $z_\nu \not\equiv i, \rho \pmod{\Gamma(1)}$  als

$$h_m(z, z') = \sum_{i,j=1}^r c_{ij} f_i(z) f_j(z')$$

Denn wir können  $h_m(z, z') = h_1(z) f_1(z') + \dots + h_r(z) f_r(z')$ , da  $f_1, \dots, f_r$  eine Basis der Spitzenformen sind, mit Funktionen  $h_j: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ . Diese sind auch Spitzenformen, denn die Matrix in

$$\begin{pmatrix} h_1(z, z_1) \\ \vdots \\ h_m(z, z_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(z_1) & \dots & f_r(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(z_r) & \dots & f_r(z_r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1(z) \\ \vdots \\ h_r(z) \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, sonst würden  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$  existieren, so dass  $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r = 0$  ist und dies steht im Widerspruch dazu, dass die  $f_j$  eine Basis bilden. Somit sind die  $h_j$  Linearkombination von Spitzenformen und somit selbst Spitzenformen und als Linearkombination von den  $f_j$  darstellbar.

Wende nun (5.1) auf die Funktion  $f = f_\mu$  mit  $1 \leq \mu \leq r$ , an:

$$\begin{aligned}
(f_\mu * h_m)(z') &= \int_{\mathcal{F}} f_\mu(z) \sum_{i,j}^r \overline{c_{ij} f_i(z) f_j(-\overline{z'})} y^{k-2} dx dy \\
&= \sum_{i,j}^r \overline{c_{ij} f_j(z')} \int_{\mathcal{F}} f_\mu(z) \overline{f_i(z)} dx dy \\
&= \sum_{j=1}^r \overline{c_{\mu j} f_j(z')} \langle f_\mu, f_j \rangle \stackrel{(i)}{=} C_k m^{1-k} a_m^\mu f_\mu(z')
\end{aligned}$$



Da  $f_1, \dots, f_r$  eine Basis, folgt

$$c_{\mu j} = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \neq \mu \\ C_k m^{1-k} \langle f_\mu, f_\mu \rangle^{-1} & \text{falls } j = \mu \end{cases}$$

Damit folgt (ii).

Für (iii) beachte

$$\begin{aligned} C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} h_m(z, -\bar{z}) y^{k-2} dx dy &= \int_{\mathcal{F}} \sum_{i=1}^r a_m^i \frac{f_i(z) f_i(-\bar{z})}{\langle f_i, f_i \rangle} y^{k-2} dx dy \\ &= \sum_{i=1}^r a_m^i \int_F \frac{f_i(z) \overline{f_i(z)}}{\langle f_i, f_i \rangle} y^{k-2} dx dy \\ &= \sum_{i=1}^r a_m^i = \text{Tr } T(m) \end{aligned}$$

*g.e.s.*

Die zweite arithmetische Darstellung liefert eine explizite Beschreibung der Spur. Dafür müssen wir etwas ausholen.

**Definition 5.0.2.** Ein Polynom  $q \in \mathbb{Z}[X, Y]$  mit  $q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$  heißt ganze, binäre QUADRATISCHE FORM. Diese ist induziert von der Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

via  $q(x, y) = (x, y) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

$q$  heißt positiv definit, falls  $q(x, y) > 0$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Wir bezeichnen  $D = b^2 - 4ac$  als die DISKRIMINANTE von  $q$ .

Zwei quadratische Formen  $q$  und  $q'$  heißen äquivalent, falls es eine Matrix  $U \in SL_2(\mathbb{Z})$  gibt mit  $Q' = U^t Q U$ , man kann zeigen, dass  $Q$  eine Klasseninvariante ist. Die Rückrichtung ist im Allgemeinen falsch.

Definiere eine Abbildung

$$H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

durch

- (i)  $H(n) = 0$  für  $n > 0$ ,
- (ii)  $H(0) = -\frac{1}{12}$ ,

- (iii)  $H(n)$  ist für  $n > 0$  die Zahl der Äquivalenzklassen positiv definiter binärer ganzer quadratischen Formen mit Diskriminante  $D = b^2 - 4ac = -n < 0$ , wobei Klassen mit Repräsentanten der Form  $d \cdot (X^2 + Y^2)$  respektive  $e \cdot (X^2 + XY + Y^2)$  mit Vielfachheit  $\frac{1}{2}$  beziehungsweise  $\frac{1}{3}$  gezählt werden sollen.

Man kann zeigen, dass  $H(n)$  wohldefiniert ist. Definiere zudem Polynome via

$$(1 - tx + Nx^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+2}(t, N)x^k$$

Mit diesen Werkzeugen gilt nun

**Theorem 5.0.3 (SPURFORMEL, EICHLER-SELBERG).** Sei  $k \geq 4$  gerade und  $m > 0$  beliebig. Dann gilt

$$\mathrm{Tr} T(m) = -\frac{1}{2} \sum_{t=-\infty}^{\infty} P_k(t, m) H(4m - t^2) - \frac{1}{2} \sum_{d|m} \min\left(d, \frac{m}{d}\right)^{k-1}. \quad (5.7)$$

**Beweis.** Wir werden den Beweis im Folgenden skizzieren, jedoch stellenweise auf Serge Lang: „Introduction to Modular Forms“ verweisen. Für eine Einführung in die Theorie der quadratischen Formen, welche im Beweis eine wichtige Rolle spielt, verweisen wir auf Don Zagier: „Zetafunktionen und quadratische Körper“. Natürlich ist dieses Hintergrundwissen nicht klausurrelevant.

In [Satz 5.0.1](#) haben wir die Identität

$$\mathrm{Tr} T(m) = C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} \sum_{ad-bc=m} \frac{y^k}{(c|z|^2 + d\bar{z} - az - b)^k} \frac{dx dy}{y^2}$$

gezeigt. Die innere Summe ist hierbei invariant unter  $\Gamma(1)$ , da das Integral ansonsten nicht unabhängig von der Wahl des Fundamentalbereiches  $\mathcal{F}$  wäre. Genauer behaupten wir: Ersetzt man  $z$  durch  $\gamma z$  mit  $\gamma \in \Gamma(1)$  in den Summanden, so ist dies äquivalent dazu, die Matrix  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  in der Summation durch  $\gamma^{-1} M \gamma$  zu ersetzen. Denn:

Sei  $\gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$  und  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(m)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} M \gamma &= \begin{pmatrix} \varepsilon & -\beta \\ -\delta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon a - \beta c & \varepsilon b - \beta d \\ -\delta a + \alpha c & -\delta b + \alpha d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon a \alpha - \beta c \alpha + \varepsilon b \delta - \beta d \delta & \varepsilon a \beta - \beta^2 c + \varepsilon^2 b - \beta d \varepsilon \\ -\delta a \alpha + \alpha^2 c - \delta^2 b + \alpha d \delta & -\delta a \beta + \alpha c \beta - \delta b \varepsilon + \alpha d \varepsilon \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mathrm{Im}(\gamma \circ z)}{c|\gamma \circ z|^2 + d \cdot (\overline{\gamma \circ z}) - a \cdot (\gamma \circ z) - b} \\
 &= \frac{\frac{\mathrm{Im} z}{|\delta z + \varepsilon|^2}}{c \left| \frac{\alpha z + \beta}{\delta z + \varepsilon} \right|^2 + d \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\delta \bar{z} + \varepsilon} - a \frac{\alpha z + \beta}{\delta z + \varepsilon} - b} \\
 &= \frac{\mathrm{Im} z}{c(\alpha \bar{z} + \beta)(\alpha z + \beta) + d(\alpha \bar{z} + \beta)(\delta z + \varepsilon) - a(\alpha z + \beta)(\delta \bar{z} + \varepsilon) - b(\delta \bar{z} + \varepsilon)(\delta z + \varepsilon)} \\
 &= \frac{\mathrm{Im} z}{|z|^2(c\alpha^2 + d\alpha\delta - a\alpha\delta - b\delta^2) + \bar{z}(c\alpha\beta + d\alpha\varepsilon - a\beta\delta - b\delta\varepsilon) + z(\dots) + \dots}.
 \end{aligned}$$

Multipliziert man, wie im letzten Schritt angedeutet, den Nenner vollständig aus, sortiert die Summanden nach dem Auftreten von  $z, \bar{z}$  und vergleicht abschließend die Koeffizienten mit den Einträgen von  $\gamma^{-1}M\gamma$ , so ist die Behauptung klar.

Da die Matrizen  $M$  und  $\gamma^{-1}M\gamma$  nicht nur dieselbe Determinante, sondern auch dieselbe Spur haben (rechne nach und beachte  $\alpha\varepsilon - \beta\delta = 1$ ), lässt sich die Summe sogar nach der Spur der Matrizen in  $\Gamma(1)$ -invariante Teile der Form

$$I(m, t) := C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} \sum_{\substack{ad-bc=m \\ a+d=t}} \frac{y^k}{\left(c|z|^2 + d\bar{z} - az - b\right)^k} \frac{dx dy}{y^2}$$

zerlegen, sodass

$$\mathrm{Tr} T(m) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} I(m, t).$$

Wir werden im Folgenden beweisen:

$$\frac{1}{2}(I(m, t) + I(m, -t)) = \begin{cases} -\frac{1}{2}P_k(t, m)H(4m - t^2) & , \text{ falls } t^2 - 4m < 0 \\ \frac{k-1}{24}m^{\frac{k-2}{2}} - \frac{1}{4}m^{\frac{k-1}{2}} & , \text{ falls } t^2 - 4m = 0 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{|t|-u}{2}\right)^{k-1} & , \text{ falls } t^2 - 4m = u^2, u \in \mathbb{N} \\ 0 & , \text{ falls } t^2 - 4m > 0 \text{ kein Quadrat.} \end{cases} \quad (5.8)$$

Wie man durch eine Rechnung einsieht, impliziert dies die Aussage des Theorems: Hierbei nutzt man aus, dass  $H$  für negative Argumente verschwindet und  $H(0) := -\frac{1}{12}$  ist, um die linke Summe in (5.7) von solchen  $t$  mit  $t^2 - 4m < 0$  auf alle  $t \in \mathbb{Z}$  auszudehnen. Die rechte Summe kommt durch die Fälle  $t^2 - 4m = u^2$  mit  $u \in \mathbb{N}$  zustande, denn: Es gilt

$$m = \frac{t^2 - u^2}{4} = \frac{t+u}{2} \cdot \frac{t-u}{2} = \left| \frac{t+u}{2} \right| \cdot \left| \frac{t-u}{2} \right|,$$

wobei  $t, u$  wegen  $t^2 - 4m = u^2$  entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Damit sind die beiden Faktoren rechts immer ganzzahlig und wegen des Absolutbetrages positiv. Da über alle  $t \in \mathbb{Z}$  summiert wird, trifft  $\left\lfloor \frac{t+u}{2} \right\rfloor$  irgendwann jeden Teiler  $d$  von  $m$ . Gleichzeitig trifft  $\left\lfloor \frac{t-u}{2} \right\rfloor$  den Teiler  $\frac{m}{d}$ . Und wie man sich leicht überzeugt, ist

$$\frac{|t| - u}{2} = \min \left( \left\lfloor \frac{t+u}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t-u}{2} \right\rfloor \right) = \min \left( d, \frac{m}{d} \right).$$

Wir müssen im Folgenden also „nur“ noch das Integral  $I(m, t)$  studieren. Dazu bemerken wir zunächst folgendes Lemma:

**Lemma 5.0.4.** Es sei  $\mathcal{M}_t(m)$  die Menge der ganzzahligen Matrizen mit Determinante  $m$  und Spur  $t$  und sei  $Q_D$  die Menge der binären quadratischen Formen mit Diskriminante  $D = t^2 - 4m$ . Dann sind die beiden Mengen gleichmächtig.

**Beweis.** Wir konstruieren eine konkrete Bijektion

$$\varphi: \mathcal{M}_t(m) \rightarrow Q_D, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto g(u, v) = cu^2 + (d-a)uv - bv^2.$$

Diese ist wegen

$$D_g = (d-a)^2 + 4bc = d^2 - 2ad + a^2 + 4ad + 4(bc - ad) = (d+a)^2 - 4(ad-bc) = t^2 - 4m$$

wohldefiniert. Betrachte nun einen Kandidaten für die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: Q_D \rightarrow \mathcal{M}_t(m), g(u, v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t-\beta) & -\gamma \\ \alpha & \frac{1}{2}(t+\beta) \end{pmatrix}.$$

Für die Wohldefiniertheit dieser Abbildung rechnet man nach, dass die angegebene Matrix Determinante  $\frac{1}{4}(t^2 - \beta^2) + \alpha\gamma = \frac{1}{4}(t^2 - D_g) = m$ , Spur  $t$  sowie ganzzahlige Einträge besitzt. Letzteres folgt aus  $\alpha, \gamma, \beta, t$  ganzzahlig und

$$D_g = t^2 - 4m = \beta^2 - 4\alpha\gamma \implies t^2 \equiv \beta^2 \pmod{2} \implies t \equiv \beta \pmod{2}.$$

Wendet man nun auf  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_t(m)$  die Abbildungen  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  an, so erhält man mit  $\alpha = c$ ,  $\beta = d - a$  und  $\gamma = -b$  nach Definition von  $\varphi$  sowie mit  $t = a + d$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t-\beta) & -\gamma \\ \alpha & \frac{1}{2}(t+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a+d-(d-a)) & b \\ c & \frac{1}{2}(a+d+(d-a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und es folgt  $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{\mathcal{M}_t(m)}$ . Analog lässt sich auch  $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{Q_D}$  zeigen. Damit ist das Lemma bewiesen. *g. e. d.*

Für jede binäre quadratische Form  $g(u, v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2$  und  $z = x + iy \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$  beliebig definieren wir nun

$$R_g(z, t) := \frac{y^k}{(\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma - ity)^k}.$$

Beachte, dass  $g$  von der Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  herrührt via der Bijektion  $\varphi$  aus Lemma 5.0.4 durch  $\alpha = c$ ,  $\beta = d - a$  und  $\gamma = -b$ . Damit gilt

$$I(m, t) = C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} \sum_{g, D_g = D} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2},$$

wobei sich die Summe über alle binären quadratischen Formen  $g \in Q_D$ , also mit Diskriminante  $D_g = D := t^2 - 4m$ , erstreckt.

Ein beliebiges Element  $\gamma \in \Gamma(1)$  liefert, angewendet auf  $g$  durch

$$\gamma g(u, v) := g\left(\gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right),$$

wieder eine quadratische Form  $\gamma g$ . Es gilt zudem  $R_{\gamma g}(z, t) = R_g(\gamma z, t)$ . Daher können wir für jede Diskriminante  $D = t^2 - 4m$  die Summe über alle quadratischen Formen mit dieser Diskriminante wie folgt aufteilen:

$$\sum_{g, D_g = D} R_g(z, t) = \sum_{\substack{g, D_g = D \\ g(\bmod \Gamma(1))}} \sum_{\gamma \in \Gamma(1)/\Gamma_g} R_{\gamma g}(z, t) = \sum_{\substack{g, D_g = D \\ g(\bmod \Gamma(1))}} \sum_{\gamma \in \Gamma(1)/\Gamma_g} R_g(\gamma z, t).$$

Hierbei erstreckt sich die erste Summe nur noch über ein Vertretersystem aller Klassen modulo  $\Gamma(1)$  von binären quadratischen Formen  $g$  mit Diskriminante  $D_g = D$ . Die zweite Summe erstreckt sich über alle Nebenklassen  $\Gamma(1)/\Gamma_g$ , wobei  $\Gamma_g$  die Fixgruppe von  $g$  ist.

Für  $D \neq 0$  gibt es nur endlich viele Klassen modulo  $\Gamma(1)$ , sodass die erste Summe endlich ist und wir schreiben können:

$$\int_{\mathcal{F}} \sum_{g, D_g = D} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} = \sum_{\substack{g, D_g = D \\ g(\bmod \Gamma(1))}} \int_{\mathcal{F}_g} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} \quad (5.9)$$

mit

$$\mathcal{F}_g = \bigcup_{\gamma \in \Gamma(1)/\Gamma_g} \gamma \mathcal{F}$$

einem Fundamentalbereich für die Operation von  $\Gamma_g$  auf  $\mathbb{H}$ .

Für  $D = 0$  ist dagegen ein (unendliches) System von Repräsentanten gegeben durch die Formen  $\{g_r(u, v) = rv^2 \mid r \in \mathbb{Z}\}$ . Die Fixgruppe eines solchen  $g_r$  ist gegeben durch

$$\Gamma_{g_r} = \begin{cases} \Gamma(1) & , \text{ falls } r = 0 \\ \Gamma(1)_{\infty} & , \text{ falls } r \neq 0. \end{cases}$$

Damit finden wir

$$\int_{\mathcal{F}} \sum_{g, D_g=D} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\mathcal{F}} R_{g_0}(z, t) \frac{dx dy}{y^2} + \int_{\mathcal{F}_\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \neq 0}} R_{g_r}(z, t) \frac{dx dy}{y^2}, \quad (5.10)$$

wobei  $\mathcal{F}_\infty$  ein Fundamentalbereich für die Operation von  $\Gamma(1)_\infty$  auf  $\mathbb{H}$  ist. Ein Beispiel hierfür ist der Vertikalstreifen  $\{z \in \mathbb{H} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ .

Wir zeigen nun die in (5.8) behaupteten Formeln für den Mittelwert der Integrale

$$\frac{1}{2} (I(m, t) + I(m, -t))$$

abhängig von  $D := t^2 - 4m$  und unterscheiden dieselben vier Fälle:

*Fall 1:*  $D < 0$ . In diesem Fall ist  $\Gamma_g$  endlich (genau genommen von Ordnung  $1 \leq |\Gamma_g| \leq 3$ , Beweis entfällt aus Zeitgründen). Für eine quadratische Form  $g(u, v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2$  mit Diskriminante  $D_g = D = t^2 - 4m$  erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}_g} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} &= \frac{1}{|\Gamma_g|} \int_{\mathbb{H}} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \frac{1}{|\Gamma_g|} \int_{\mathbb{H}} \frac{y^{k-2}}{(\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma - ity)^k} dx dy. \end{aligned}$$

Fasse nun die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  auf und nutze den Diffeomorphismus

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, (x, y) \mapsto \left( \frac{2x - \beta}{2\alpha}, \frac{y}{\alpha} \right)$$

mit Jacobi-Matrix

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \implies \det D\Phi = \frac{1}{\alpha^2}$$

zur Substitution per Transformationssatz:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}_g} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} &= \frac{1}{|\Gamma_g|} \int_{\mathbb{H}} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{k-2}}{\left(\alpha \left(\left(\frac{2x-\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2\right) + \beta \left(\frac{2x-\beta}{2\alpha}\right) + \gamma - it\frac{y}{\alpha}\right)^k} dx dy \\ &= \frac{1}{|\Gamma_g|} \int_{\mathbb{H}} \frac{y^{k-2}}{\left((x^2 + y^2) - \frac{\beta^2}{4} + \gamma\alpha - ity\right)^k} dx dy \\ &= \frac{1}{|\Gamma_g|} \int_{\mathbb{H}} \frac{y^{k-2}}{\left(|z|^2 - \frac{1}{4}D_g - ity\right)^k} dx dy. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt geht hierbei ein, dass  $D_g = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ , also  $-\frac{\beta^2}{4} + \alpha\gamma = -\frac{1}{4}D_g$ . Das Integral hängt somit nicht von den konkreten Parametern  $\alpha, \beta, \gamma$  der Form  $g$  ab, sondern nur von ihrer Diskriminante  $D_g$ . Da wir nur Formen  $g$  mit Diskriminante  $D_g = D = t^2 - 4m$  betrachten, können wir mit

$$I(D, t) := \int_{\mathbb{H}} \frac{y^{k-2}}{\left(|z|^2 - \frac{1}{4}D - ity\right)^k} dx dy$$

schreiben:

$$\sum_{\substack{g, D_g=D \\ g(\bmod \Gamma(1))}} \int_{\mathcal{F}_g} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} = \sum_{\substack{g, D_g=D \\ g(\bmod \Gamma(1))}} \frac{1}{|\Gamma_g|} I(D, t) = 2H(-D)I(D, t)$$

Die letzte Umformung liefert einen derart einfachen Term, da die Definition von  $H$  wegen

$$|\Gamma_g| = \begin{cases} 2 & , \text{ falls } g \sim e(x^2 + y^2) \text{ für ein } e \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 3 & , \text{ falls } g \sim e(x^2 + xy + y^2) \text{ für ein } e \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 1 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

bereits den Vorfaktor  $\frac{1}{|\Gamma_g|}$  beinhaltet. Der Faktor 2 rührt von der Tatsache her, dass in der Definition von  $H$  nur Klassen positiv definiter quadratischer Formen gezählt werden. Die obige Summe berücksichtigt jedoch Klassen aller Formen  $g$  mit geeigneter Diskriminante  $D_g = D$ . Da alle diese Formen wegen  $D_g = D < 0$  definit (also entweder positiv oder negativ definit) sind, besteht die Summe aus genau doppelt so vielen Summanden wie durch  $H$  angegeben (zu jeder positiv definiten Form erhält man eine negativ definite Form gleicher Diskriminante durch Multiplikation mit  $-1$  und umgekehrt).

Nutzt man nun die für beliebiges  $A \in \mathbb{R}_{>0}$  gültige Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + A)^{-k} dx = \frac{\pi}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdot A^{\frac{1}{2}-k},$$

erhält man schließlich

$$\begin{aligned} I(D, t) &= \int_{\mathbb{H}} \frac{y^{k-2}}{\left(|z|^2 - \frac{1}{4}D - ity\right)^k} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} y^{k-2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 + y^2 - ity - \frac{1}{4}D\right)^{-k} dx dy && \left| \text{siehe oben} \right. \\ &= \frac{\pi}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left(k - \frac{3}{2}\right) \int_0^{\infty} \left(y^2 - ity - \frac{1}{4}D\right)^{\frac{1}{2}-k} y^{k-2} dy && \left| \text{Leibniz} \right. \\ &= \frac{\pi}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{i^{k-2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-2} \int_0^{\infty} \left(y^2 - ity - \frac{1}{4}D\right)^{-\frac{3}{2}} dy \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi i^{k-2}}{2(k-1)!} \left( \frac{d}{dt} \right)^{k-2} \left[ \frac{4}{t^2 - D} \cdot \frac{y - \frac{1}{2}it}{\sqrt{y^2 - ity - \frac{1}{4}D}} \right]_0^\infty \quad \left| \text{nachrechnen!} \right. \\
&= \frac{\pi i^{k-2}}{2(k-1)!} \left( \frac{d}{dt} \right)^{k-2} \left( \frac{4}{\sqrt{|D|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|D|} - it} \right) \\
&= \frac{2\pi}{k-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{|D|}} \cdot \frac{i^{k-2}}{(k-2)!} \left( \frac{d}{dt} \right)^{k-2} \left( \frac{1}{\sqrt{|D|} - it} \right) \\
&= \frac{2\pi}{k-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{|D|}} \cdot \frac{1}{\left( \sqrt{|D|} - it \right)^{k-1}}.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also (unter Beachtung von  $D = t^2 - 4m < 0$ ), dass

$$\begin{aligned}
I(m, t) &= C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} \sum_{g, D_g = D} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} \\
&\stackrel{(5.9)}{=} C_k^{-1} m^{k-1} \sum_{\substack{g, D_g = D \\ g \pmod{\Gamma(1)}}} \int_{\mathcal{F}_g} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} \\
&= C_k^{-1} m^{k-1} 2H(-D) I(D, t) \\
&= C_k^{-1} m^{k-1} 2H(4m - t^2) \frac{2\pi}{k-1} \frac{1}{\sqrt{4m - t^2}} \frac{1}{\left( \sqrt{4m - t^2} - it \right)^{k-1}},
\end{aligned}$$

was sich mit  $\rho := \frac{1}{2}(t + i\sqrt{4m - t^2})$  nach kurzer Rechnung vereinfachen lässt zu:

$$I(m, t) = \frac{\bar{\rho}^{k-1}}{\rho - \bar{\rho}} H(4m - t^2).$$

Beachtet man nun, dass

$$\rho + \bar{\rho} = \frac{1}{2} \left( t + i\sqrt{4m - t^2} \right) + \frac{1}{2} \left( t - i\sqrt{4m - t^2} \right) = t$$

und

$$\rho \bar{\rho} = |\rho|^2 = \frac{1}{4} |t^2 + 4m - t^2| = m,$$

so kann man für die per

$$(1 - tx + Nx^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+2}(t, N) x^k = P_2(t, N) + P_3(t, N)x + P_4(t, N)x^2 + \dots$$



definierten Polynome  $P_k(t, N)$  mithilfe von Partialbruchzerlegung und der geometrischen Reihe die Beziehung

$$P_k(t, m) = \frac{\rho^{k-1} - \bar{\rho}^{k-1}}{\rho - \bar{\rho}}$$

zeigen.

Daraus folgt in der Tat wie in (5.8) behauptet

$$\frac{1}{2} (I(m, t) + I(m, -t)) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\rho^{k-1}}{\rho - \bar{\rho}} + \frac{-\bar{\rho}^{k-1}}{\rho - \bar{\rho}} \right) H(4m - t^2) = -\frac{1}{2} P_k(t, m) H(4m - t^2).$$

Fall 2:  $D = 0$ . Wir benutzen hierfür die oben hergeleitete Formel (5.10)

$$\int_{\mathcal{F}} \sum_{g, D_g=D} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\mathcal{F}} R_{g_0}(z, t) \frac{dx dy}{y^2} + \int_{\mathcal{F}_\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \neq 0}} R_{g_r}(z, t) \frac{dx dy}{y^2}.$$

Wegen  $g_0(u, v) \equiv 0$  sind alle Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$  der quadratischen Form  $g_0$  gleich 0, sodass sich  $R_{g_0}$  und damit der erste Summand leicht berechnen lassen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} R_{g_0}(z, t) \frac{dx dy}{y^2} &= \int_{\mathcal{F}} \left( \frac{y}{-ity} \right)^k \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\mathcal{F}} \left( \frac{i}{t} \right)^k \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \left( \frac{i}{t} \right)^k \int_{\mathcal{F}} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{t^k} \cdot \frac{\pi}{3} = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{\pi}{3t^k}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Term finden wir mit  $g_r(u, v) = rv^2$  und der Partialbruchzerlegung des Kotangens:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}_\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \neq 0}} R_{g_r}(z, t) \frac{dx dy}{y^2} &= \int_0^\infty \int_0^1 y^{k-2} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \neq 0}} (r - ity)^{-k} dx dy \\ &= \frac{i^{k-2}}{(k-2)!} \left( \frac{d}{dt} \right)^{k-2} \int_0^\infty \frac{1}{t^2 y^2} - \frac{\pi^2}{\sinh^2(\pi ty)} dy \\ &= \frac{i^{k-2}}{(k-1)!} \left( \frac{d}{dt} \right)^{k-2} \frac{\pi}{|t|} \\ &= (-1)^{\frac{k-2}{2}} \frac{\pi}{k-1} |t|^{-k+1}. \end{aligned}$$

Für  $t = \pm 2\sqrt{m}$  (da  $D := t^2 - 4m = 0$ ) bekommen wir damit nach kurzer Rechnung

$$I(m, t) = C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} \sum_{g, D_g=0} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^{k-2}}$$

$$\begin{aligned}
&= C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} R_{g_0}(z, t) \frac{dx dy}{y^2} + C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}_\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \neq 0}} R_{g_r}(z, t) \frac{dx dy}{y^2} \\
&= C_k^{-1} m^{k-1} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{\pi}{3t^k} + C_k^{-1} m^{k-1} (-1)^{\frac{k-2}{2}} \frac{\pi}{k-1} |t|^{-k+1} \\
&= \frac{k-1}{24} m^{\frac{k-2}{2}} - \frac{1}{4} m^{\frac{k-1}{2}}
\end{aligned}$$

*Fall 3:*  $D = u^2$  mit  $u \in \mathbb{N}$ . Wie im Fall  $D < 0$  gibt es hier nur eine endliche Anzahl von Klassen mit Diskriminante  $D$  und  $\Gamma_g$  ist eine endliche Gruppe. Es folgt damit analog zu Fall 1

$$\int_{\mathcal{F}} \sum_{g, D_g=D} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} = H_D \cdot I(D, t)$$

mit

$$H_D := \sum_{\substack{g, D_g=D \\ g \pmod{\Gamma(1)}}} \frac{1}{|\Gamma_g|}$$

und (vergleiche Fall 1)

$$I(D, t) := \int_{\mathbb{H}} \frac{y^{k-2}}{\left(|z|^2 - \frac{1}{4}D - ity\right)^k} dx dy.$$

Man kann nun zeigen, dass in Fall 3 alle  $\Gamma_g$  trivial sind (d.h.  $|\Gamma_g| = 1$ ) und es darüber hinaus genau  $u$  Klassen quadratischer Formen  $g$  mit Diskriminante  $D_g = u^2$  gibt. Hieraus folgt  $H_D = u$ .

Analog zu Fall 1 können wir zudem wieder das Integral umformen zu

$$I(D, t) = \frac{\pi i^{k-2}}{2(k-1)!} \left( \frac{d}{dt} \right)^{k-2} \left[ \frac{4}{t^2 - D} \frac{y - \frac{1}{2}it}{\sqrt{y^2 - ity - \frac{1}{4}D}} \right]_0^\infty,$$

wobei der ausgewertete Term rechts diesmal unter Beachtung von  $D = t^2 - 4m > 0$  zu

$$\frac{-4}{\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{D} + |t|}$$

wird. Es folgt wegen  $\sqrt{D} = \sqrt{u^2} = u$ , dass

$$I(D, t) = (-1)^{\frac{k-2}{2}} \frac{2\pi}{k-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{D} + |t|)^{k-1}} = (-1)^{\frac{k-2}{2}} \frac{2\pi}{k-1} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{(u + |t|)^{k-1}},$$

und somit nach kurzer Rechnung

$$I(m, t) = C_k^{-1} m^{k-1} \int_{\mathcal{F}} \sum_{g, D_g=D} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= C_k^{-1} m^{k-1} H_D \cdot I(D, t) \\
 &= C_k^{-1} m^{k-1} (-1)^{\frac{k-2}{2}} \frac{2\pi}{k-1} \cdot \frac{1}{(u+|t|)^{k-1}} \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{|t|-u}{2} \right)^{k-1}.
 \end{aligned}$$

Fall 4:  $D > 0$ , aber keine Quadratzahl. Wir zeigen in diesem Fall wie in (5.8) behauptet, dass

$$I(m, t) + I(m, -t) = \int_{\mathcal{F}_g} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} + \int_{\mathcal{F}_g} R_g(z, -t) \frac{dx dy}{y^2} = 0.$$

Sei hierfür  $g(u, v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2$  eine quadratische Form mit Diskriminante  $D > 0$  kein Quadrat und seien außerdem  $w > w'$  die Lösungen der Gleichung  $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$  (wegen  $D_g = D > 0$  gibt es zwei verschiedene reelle Lösungen). Dann transformiert die Matrix

$$M = (w - w')^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} w' & w \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

$g$  in  $Mg$  mit

$$Mg(u, v) = \sqrt{D}uv.$$

In der Tat: Ist  $T = \sqrt{w - w'}$ , so gilt

$$\begin{aligned}
 M^t \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix} M &= \frac{1}{T^2} \begin{pmatrix} w' & 1 \\ w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w' & w \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{T^2} \begin{pmatrix} w'\alpha + \frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{2}w' + \gamma \\ w\alpha + \frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{2}w + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w' & w \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{T^2} \begin{pmatrix} \alpha w'^2 + \frac{\beta}{2}w' + \frac{\beta}{2}w' + \gamma & \alpha ww' + \frac{\beta}{2}w + \frac{\beta}{2}w' + \gamma \\ \alpha ww' + \frac{\beta}{2}w' + \frac{\beta}{2}w + \gamma & \alpha w^2 + \frac{\beta}{2}w + \frac{\beta}{2}w + \gamma \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{T^2} \begin{pmatrix} \alpha w'^2 + \beta w' + \gamma & \alpha ww' + \frac{\beta}{2}(w + w') + \gamma \\ \alpha ww' + \frac{\beta}{2}(w' + w) + \gamma & \alpha w^2 + \beta w + \gamma \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Wegen  $\det M = \det M^t = \pm 1$  bleibt die Determinante der Matrix (und somit auch die Diskriminante der von der Matrix induzierten quadratischen Form) trotz Transformation unverändert. Da sowohl  $w$  als auch  $w'$  die Gleichung  $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$  lösen, verschwinden beide Diagonaleinträge und die Form  $Mg$  lässt sich schreiben als  $Mg(u, v) = buv$  für ein  $b \in \mathbb{R}$ . Hieraus erhält man nach kurzer Rechnung wie behauptet  $Mg(u, v) = \sqrt{D}uv$ .

Nach nichttrivialen Überlegungen weiß man: Die Gruppe  $M^{-1}\Gamma_g M$  ist zyklisch und kann durch  $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$  erzeugt werden, wobei  $\varepsilon > 1$  die Fundamenteleinheit des Ganzheitsrings  $R$

in  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$  ist (hier geht auch ein, dass  $D$  keine Quadratzahl ist, sonst wäre  $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \mathbb{Q}$ ). Daher können wir den Fundamentalbereich  $\mathcal{F}_g$  so wählen, dass  $M^{-1}\mathcal{F}_g$  ein Kreisring  $M^{-1}\mathcal{F}_g = \{z \in \mathbb{H} \mid r_0 \leq |z| \leq \varepsilon^2 r_0\}$  ist. Es gilt somit

$$\begin{aligned} I(m, t) &= \int_{\mathcal{F}_g} R_g(z, t) \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \int_{\mathcal{F}_g} R_{Mg}(M^{-1}z, t) \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \int_{M^{-1}\mathcal{F}_g} R_{Mg}(z, t) \frac{dx dy}{y^2} \quad \left| Mg(u, v) = \sqrt{D}uv \right. \\ &= \int_{\substack{y>0 \\ r_0 \leq |z| \leq \varepsilon^2 r_0}} \left( \sqrt{D}x - ity \right)^{-k} y^{k-2} dx dy. \end{aligned}$$

Erhalte nun mit Polarkoordinaten  $z = x + iy = re^{i\vartheta}$ , dass

$$\begin{aligned} I(m, t) &= \int_0^\pi \int_{r_0}^{r_0 \varepsilon^2} \left( \sqrt{D} \cos \vartheta - it \sin \vartheta \right)^{-k} (\sin \vartheta)^{k-2} \frac{dr d\vartheta}{r} \\ &= \log(\varepsilon^2) \int_0^\pi \left( \sqrt{D} \cos \vartheta - it \sin \vartheta \right)^{-k} (\sin \vartheta)^{k-2} dr d\vartheta \end{aligned}$$

und wegen der Symmetrieeigenschaften von  $\sin$  und  $\cos$  analog

$$\begin{aligned} I(m, -t) &= \log(\varepsilon^2) \int_0^\pi \left( \sqrt{D} \cos \vartheta + it \sin \vartheta \right)^{-k} (\sin \vartheta)^{k-2} dr d\vartheta \\ &= \log(\varepsilon^2) \int_{-\pi}^0 \left( \sqrt{D} \cos \vartheta - it \sin \vartheta \right)^{-k} (\sin \vartheta)^{k-2} dr d\vartheta. \end{aligned}$$

Wir sind also fertig, wenn wir

$$I := \int_{-\pi}^\pi \left( \sqrt{D} \cos \vartheta - it \sin \vartheta \right)^{-k} (\sin \vartheta)^{k-2} dr d\vartheta = 0$$

zeigen können. Schreibe hierfür das Integral um zum Kurvenintegral

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^\pi \left( \sqrt{D} \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} - it \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \right)^{-k} \left( \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \right)^{k-2} d\vartheta \\ &= \int_{-\pi}^\pi \left( \sqrt{D} i \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}} - it \right)^{-k} \left( \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \right)^{-2} d\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sqrt{D}i \frac{e^{2i\vartheta} + 1}{e^{2i\vartheta} - 1} - it \right)^{-k} \left( \frac{e^{2i\vartheta} - 1}{2i} \cdot e^{-i\vartheta} \right)^{-2} d\vartheta \\
 &= \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sqrt{D}i \frac{e^{2i\vartheta} + 1}{e^{2i\vartheta} - 1} - it \right)^{-k} \left( \frac{e^{2i\vartheta} - 1}{2i} \right)^{-2} 2ie^{2i\vartheta} d\vartheta \\
 &= \frac{1}{2i} \int_{\mathcal{C}} \left( \sqrt{D}i \frac{z+1}{z-1} - it \right)^{-k} \left( \frac{z-1}{2i} \right)^{-2} dz
 \end{aligned}$$

mit  $\mathcal{C}: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \vartheta \mapsto e^{2i\vartheta}$  geschlossen. Wegen  $k \geq 4 > 2$  hebt der linke Faktor die Polstelle des rechten Faktors bei  $z = 1$ . Die Polstelle des linken Terms liegt bei

$$\sqrt{D}i \frac{z+1}{z-1} - it \stackrel{!}{=} 0 \quad \implies \quad z = \frac{\frac{t}{\sqrt{D}} + 1}{\frac{t}{\sqrt{D}} - 1} > 1,$$

sodass der Integrand für  $\delta > 0$  klein genug auf der Kreisscheibe  $U_{1+\delta}(0) \supset \overline{\mathbb{E}}$  holomorph ist. Nach dem Residuensatz ist das Integral entlang  $\mathcal{C} = \partial\mathbb{E}$  daher 0. Damit folgt für  $D = t^2 - 4m > 0$  kein Quadrat, dass tatsächlich  $\frac{1}{2} (I(m, t) + I(m, -t)) = 0$  gilt.

Hiermit haben wir (5.9) vollständig verifiziert und damit die in (5.7) behauptete arithmetische Spurformel bewiesen.

*g. e. d.*



# Index

Dedekindische  $\eta$ -Funktion, 12

Diskriminantenfunktion, 6

Eisensteinreihe, 5

Fundamentalebene, 1

Hecke-Eigenform, 22

Hecke-Operator, 16

Modulfigur, 2

Modulform, 3

Modulfunktion, 2

normalisierte Eisensteinreihe, 5

Peterssonsscher Strichoperator, 3

quadratische Form, 51

Diskriminante einer quadratischen  
Form, 51

Ramanujan-Funktion, 7

Thetareihe, 4





# Liste der Sätze

1.1.1 Satz (Valenzformel) . . . . .	5
-------------------------------------	---