
Modulformen I

Sommersemester 2018
Vorlesung von Prof. Dr. Winfried Kohnen

Vorlesungsmitschrieb von
Patrick Arras
Jonas Müller

Heidelberg, den 26. April 2018

Vorwort

Dies ist ein nicht offizielles Skript der Vorlesung Modulformen 1 aus dem Sommersemester 2018 gehalten von Professor Winfried Kohnen an der Universität Heidelberg. Das Skript wurde in der Vorlesung mitgetext und mit pdf_latex kompiliert. Deshalb kann es Fehler enthalten und wir übernehmen keine Garantie für die Richtigkeit.

Bei Fehlern, kann ich unter folgender Mailadresse erreicht werden:

jj@mathphys.stura.uni-heidelberg.de

Die aktuellste Version des Skriptes befindet sich immer unter

<https://github.com/jenuk/modulformen/blob/master/script.pdf>

Die L^AT_EX-Source Dateien findet man hier, auf Fehler kann hier alternativ über neues Issue aufmerksam gemacht werden:

<https://github.com/jenuk/modulformen/tree/master>

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iv
1 Grundlegende Tatsachen	1
1.1 Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)	1
1.1.1 Fundamentalbereich	1
1.1.2 Modulform	2
1.1.3 Beispiele für Modulformen	4
1.1.4 Valenzformel und Anwendungen	5
1.2 Die Modulnvariante j	9
Index	11
Liste der Sätze	13

1 Grundlegende Tatsachen

1.1 Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

1.1.1 Fundamentalbereich

Wie üblich sei

$$\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$$

die obere Halbebene und

$$\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}.$$

Dann operiert $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ z = \frac{az + b}{cz + d},$$

das heißt $E \circ z = z$ und $(M_1 M_2) \circ z = M_1 \circ (M_2 \circ z)$. Hierbei beachte man, dass

$$\operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

$\Gamma(1) = \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ ist eine diskrete Untergruppe, spezielle Matrizen in $\Gamma(1)$ sind

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Translation $T \circ z = z + 1$ und Stürzung $S \circ z = -\frac{1}{z}$.

Man interessiert sich für die Operation von diskreten Untergruppen $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ insbesondere $\Gamma = \Gamma(1)$.

Definition 1.1.1. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ heißt FUNDAMENTALBEREICH für die Operationen von $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{H} , falls:

- (i) \mathcal{F} ist offen,
- (ii) zu jedem $z \in \mathbb{H}$ existiert ein $M \in \Gamma$ mit $M \circ z \in \overline{\mathcal{F}}$,

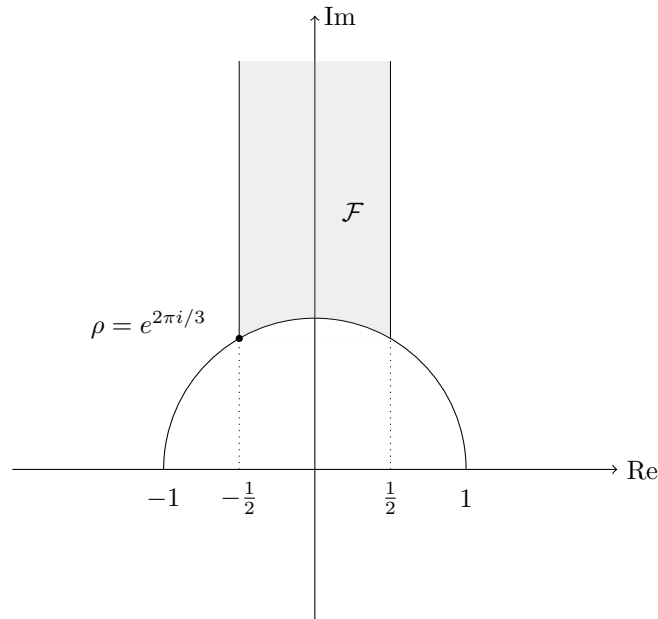


Abbildung 1.1: Der Fundamentalbereich \mathcal{F}_1 der vollen Modulgruppe.

(iii) Sind $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$ und $z_2 = M \circ z_1$ mit $M \in \Gamma$, dann gilt $M = \pm E$ und somit $z_1 = z_2$.

Beispiel 1.1.2. Die Menge $\mathcal{F}_1 := \{z = x + iy \mid |x| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\Gamma(1)$ auf \mathbb{H} , dieser wird auch MODULFIGUR genannt. Siehe [Abbildung 1.1](#).

Bemerkung 1.1.3. Identifikationen in $\overline{\mathcal{F}_1}$ finden nur auf dem Rand statt. (Die Geraden $x = \pm \frac{1}{2}$ werden miteinander identifiziert unter T bzw T^{-1} , Punkte auf den Kreisbögen rechts oder links von i werden unter S identifiziert.

Satz 1.1.4. Die Gruppe $\Gamma(1)$ wird erzeugt von S und T .

1.1.2 Modulform

Definition 1.1.5. Eine Abbildung $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt MODULFUNKTION vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ für $\Gamma(1)$, falls gilt:

- (i) f ist auf \mathbb{H} meromorph,
- (ii) $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$,
- (iii) f ist meromorph in ∞ .

Bedeutung von (iii): Wendet man (ii) an mit $M = T$, so erhält man $f(z+1) = f(z)$. Sei $\mathcal{R} = \{q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1\}$. Die Abbildung $z \mapsto q = e^{2\pi iz}$ bildet \mathbb{H} auf \mathcal{R} ab und $F(q) := f(z)$ ist wohldefiniert und holomorph bis auf mögliche Polstellen, die sich prinzipiell gegen $q = 0$ häufen könnten. Bedingung (iii) fordert nun, dass $q = 0$ eine unwesentliche isolierte Singularität¹ von F ist. Nach Funktionentheorie 1 hat dann F eine Laurententwicklung

$$F(q) = \sum_{n \geq n_0} a_n q^n \quad \text{für } 0 < |q| < |q_0|$$

wobei $n_0 \in \mathbb{Z}$ fest. Damit erhalten wir also

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n e^{2\pi i n z} \quad \text{für } 0 < y_0 < y$$

Definition 1.1.6. Ein solches f heißt MODULFORM falls f auf \mathbb{H} und in ∞ holomorph ist (letzteres bedeutet, dass F in $q = 0$ hebbbar ist, also $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z}$ für alle $z \in \mathbb{H}$). Eine Modulform heißt Spitzenform, falls $a_0 = 0$.

Bemerkung 1.1.7. Die Fourierkoeffizienten a_n sind im Allgemeinen wichtige und interessante Größen (z. B. Darstellungsanzahlen von natürlichen Zahlen durch quadratische Formen, etwa $r_4(n) = \#\{(x, y, z, w) \in \mathbb{Z}^4 \mid n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2\}$ oder die Anzahl von Punkten auf elliptischen Kurven über \mathbb{F}_p).

Definition 1.1.8. Sei $\gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$. Man setzt

$$(f|_k M)(z) := (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

für $z \in \mathbb{H}$, dies ist der PETERSSONSCHER STRICHOPERATOR.

Dann gilt $f|_k E = f$ und $f|_k(M_1 M_2) = (f|_k M_1)|_k M_2$ für alle $M_1, M_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$. Es folgt:

- (i) Es gilt $(f|_k M)(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z)$ für alle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ genau dann, wenn dies für S und T gilt, d. h. $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$ und $f(z+1) = f(z)$, da S und T $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugen.

¹Das heißt es handelt sich um eine hebbare Singularität oder eine Polstelle.

1.1. Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

- (ii) Eine Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann eine Modulform vom Gewicht k , wenn f eine Fourierreiheentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

hat und zusätzlich gilt

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$$

1.1.3 Beispiele für Modulformen

Thetareihen

Definition 1.1.9. Sei $A \in M_m(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann heißt

$$\vartheta_A(z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g]z} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

eine THETAREIHE, wobei $A[g] := g^t A g$ für $g \in \mathbb{Z}^m \cong M_{m,1}(\mathbb{Z})$.

Satz 1.1.10.

- (i) $\vartheta_A(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf $y \geq y_0 > 0$. Insbesondere ist $\vartheta_A(z)$ auf \mathbb{H} holomorph.
- (ii) Es gilt die Theta-Transformationsformel: $\vartheta_{A^{-1}} = \sqrt{\det A} \cdot \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{m}{2}} \vartheta_A(z)$.

Satz 1.1.11. Sei $A \in M_m(\mathbb{Z})$ symmetrisch, positiv definit, gerade² und $\det A = 1$. Dann gilt $8|m$ und $\vartheta_A(z)$ ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{m}{2}$ für $\Gamma(1)$.

Beachte $\vartheta_A(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} r_A(n) q^n$ wobei $r_A(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n durch die ganzzahlige, positive definite quadratische Form $x \mapsto \frac{1}{2} x^t A x$ auf \mathbb{R}^m ist.

Eisensteinreihen

Definition 1.1.12. Sei $k \in \mathbb{Z}$, k gerade und $k \geq 4$. Dann heißt

$$G_k(z) = \sum'_{m,n} \frac{1}{(mz+n)^k} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

²Das heißt für alle $\mu \in \{1, \dots, m\}$ gilt $a_{\mu\mu}$ ist gerade

EISENSTEINREIHE vom Gewicht k .³

Satz 1.1.13.

- (i) $G_k(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf $D_\varepsilon = \{z = x + iy \mid y \geq \varepsilon, x^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$, insbesondere also holomorph auf \mathbb{H} .
- (ii) G_k ist Modulform vom Gewicht k für $\Gamma(1)$.
- (iii) Es gilt

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.

Setze $E_k := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$ die NORMALISIERTE EISENSTEINREIHE. Benutze nun

$$\zeta(k) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}-1} 2^{k-1} B_k}{k!} \pi^k$$

für k gerade und $k \geq 2$. Damit folgt

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei alle B_k rationale Zahlen sind. Speziell gilt

$$B_4 = -\frac{1}{30} \quad \implies \quad E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n,$$

$$B_6 = \frac{1}{42} \quad \implies \quad E_6 = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n) q^n.$$

1.1.4 Valenzformel und Anwendungen

Satz 1.1.14 (VALENZFORMEL). Sei f eine Modulfunktion vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$, $f \neq 0$. Dann gilt

$$\text{ord}_\infty f + \frac{1}{2} \text{ord}_i f + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho f + \sum_{\substack{z \in \Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \\ z \neq i, \rho}} \text{ord}_z f = \frac{k}{12}.$$

$$^3 \sum'_{m,n} := \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}}$$

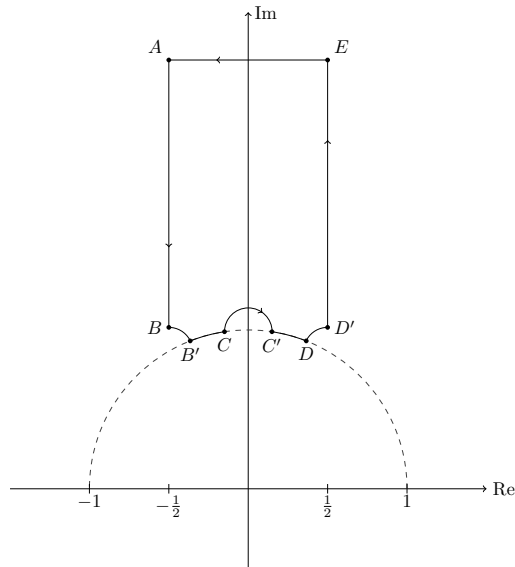


Abbildung 1.2: Die Kurve \mathcal{C} wobei A und E so gewählt sind, dass \mathcal{C} alle Null- und Polstellen enthält.

Hierbei ist $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und

$$\text{ord}_{\infty} f := \text{ord}_{q=0} F(q)$$

mit $F(q) = f(z)$ für $q = e^{2\pi i z}$.

Beweis. Zum Nachweis reduziert man auf den Fall, dass f außer in $z = \rho, -\bar{\rho}, i$ keine Null- oder Polstellen auf $\partial\overline{F_1}$ hat und berechnet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Wobei die Kurve \mathcal{C} wie in [Abbildung 1.2](#) gewählt ist.

g.e.d.

Definition 1.1.15. Sei

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728} (E_4^3(z) - E_6^2(z))$$

die DISKRIMINANTENFUNKTION. Dann ist Δ eine Spitzenform vom Gewicht $k = 12$ mit $\Delta(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{H}$ und $\text{ord}_{\infty} \Delta = 1$, d. h. $\Delta = q + \dots$

Bemerkung 1.1.16. Δ ist in gewisser Weise die „erste“ von 0 verschiedene Spitzenform und wurde von vielen Mathematikern studiert.

Beispiel 1.1.17.

- (i) Schreibe $\Delta(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n)q^n$, dann heißt $n \mapsto \tau(n)$ RAMANUJAN-FUNKTION. Es gilt: $\tau(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \geq 1$. Ferner lässt sich zeigen, dass $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$, mithilfe von $B_{12} = -\frac{691}{2730}$.
- (ii) Vermutung: $\tau(n) \neq 0$ für alle $n \geq 1$ (Lehner)

Sei M_k der \mathbb{C} -Vektorraum der Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ und $S_k \subseteq M_k$ der Unterraum der Spitzenformen.

Bemerkung 1.1.18. $M_k = \{0\}$ für k ungerade, da $f((-E) \circ z) = f(z) = (-1)^k f(z)$.

Satz 1.1.19. Sei $k \in \mathbb{Z}$ gerade. Dann gilt:

- (i) $M_k = \{0\}$ für $k < 0$ und $M_2 = \{0\}$.
- (ii) $M_0 = \mathbb{C}$.
- (iii) $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$, falls $k \geq 4$.
- (iv) Die Abbildung $f \mapsto f \cdot \Delta$ gibt einen Isomorphismus von M_{k-12} auf S_k .
- (v) $\dim M_k < \infty$.

Satz 1.1.20. Sei $k \geq 0$ gerade. Dann gilt:

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12} \\ 1 + \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Beispiel 1.1.21.

- (i) $M_4 = \mathbb{C}E_4$.
- (ii) $M_6 = \mathbb{C}E_6$.
- (iii) $M_8 = \mathbb{C}E_8 = \mathbb{C}E_4^2$.
- (iv) $M_{10} = \mathbb{C}E_{10} = \mathbb{C}E_4E_6$.
- (v) $M_{12} = \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}\Delta$.

1.1. Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Erinnerung)

(vi) $M_{14} = \mathbb{C}E_{14}$.

Satz 1.1.22. Sei $k \geq 0$ gerade. Dann bilden $E_4^\alpha E_6^\beta$ mit $4\alpha + 6\beta = k$ eine Basis von M_k , insbesondere gilt also

$$M_k = \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta \geq 0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \mathbb{C}E_4^\alpha E_6^\beta$$

.

Beweis. Wir zeigen zunächst induktiv, dass die Monome M_k erzeugen. Für $k \leq 10$ ist dies nach Beispiel 1.1.21 klar. Sei also $k \geq 12$. Man bestimme eine beliebige Kombination $\alpha, \beta \geq 0$ mit $4\alpha + 6\beta = k$ und setze $g := E_4^\alpha E_6^\beta \in M_k$ mit konstantem Term gleich 1.

Sei nun $f \in M_k$ beliebig mit konstantem Term a_0 . Dann ist $f - a_0 \cdot g \in S_k$. Nach Satz 1.1.19, iv) gilt daher $f - a_0 \cdot g = \Delta \cdot h$ mit $h \in M_{k-12}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist h eine Linearkombination von Monomen $E_4^\gamma E_6^\delta$ mit $4\gamma + 6\delta = k - 12$. Aber $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ und daher ist $f - a_0 \cdot g$ Linearkombination von Monomen $E_4^{\gamma+3} E_6^\delta$ und $E_4^\gamma E_6^{\delta+2}$. Wegen

$$4(\gamma + 3) + 6\delta = k - 12 + 12 = k$$

$$4\gamma + 6(\delta + 2) = k - 12 + 12 = k$$

ist also auch f als Linearkombination von Monomen der behaupteten Form schreibbar. Somit erzeugen die Monome tatsächlich M_k .

Noch zu zeigen ist, dass die Monome über \mathbb{C} linear unabhängig sind. Beweis durch Widerspruch: *Angenommen*, es existiere eine nicht-triviale lineare Relation

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \geq 0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \lambda_{\alpha, \beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0.$$

Fall 1: Sei $k \equiv 0 \pmod{4}$. Dann sind alle β gerade, also schreibe jeweils $\beta = 2\beta'$ mit $\beta' \geq 0$. Es folgt $\alpha = \frac{k}{4} - 3\beta'$ und somit

$$E_4^\alpha E_6^\beta = E_4^{\frac{k}{4} - 3\beta'} E_6^{2\beta'} = E_4^{\frac{k}{4}} \left(\frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'}.$$

Da $E_4^{\frac{k}{4}}$ nicht die Nullfunktion ist, ergibt sich eine nicht-triviale Polynom-Relation für $\frac{E_6^2}{E_4^3}$, d. h. die meromorphe Funktion $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ ist Nullstelle eines nicht-trivialen Polynoms über \mathbb{C} . Da \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist (jedes nicht-konstante Polynom über \mathbb{C} zerfällt vollständig über \mathbb{C} in Linearfaktoren), ist $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ somit konstant.

Wir zeigen $\frac{E_6^2}{E_4^3} \equiv 0$ mit einem *Trick*: Es gilt $E_6(-\frac{1}{z}) = z^6 E_6(z)$, denn $E_6 \in M_6$. Auswerten in $z = i = -\frac{1}{i}$ liefert $E_6(i) = 0$. Ferner gilt

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{2\pi i n z} \implies E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{-2\pi n}.$$

Da alle Summanden positiv sind, folgt $E_4(i) \neq 0$ und somit $\frac{E_6^2(i)}{E_4^3(i)} = 0$. Dies impliziert jedoch da $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ konstant ist bereits $E_6 \equiv 0$. \nmid

Fall 2: Sei $k \equiv 2 \pmod{4}$, dann sind alle β ungerade. Analoges Vorgehen zum ersten Fall liefert ebenfalls einen Widerspruch.

Somit sind die Monome über \mathbb{C} linear unabhängig.

q.e.d.

Bemerkung 1.1.23. Der Satz impliziert additive Faltungsformeln für die multiplikativen Funktionen $\sigma_{k-1}(n)$ (weiterhin $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 4$ gerade). „Multiplikativ“ bedeutet hier

$$\text{ggT}(m, n) = 1 \implies \sigma_{k-1}(m \cdot n) = \sigma_{k-1}(m) \cdot \sigma_{k-1}(n).$$

Beispiel 1.1.24. $E_8 = E_4^2$, ferner $E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n$, also $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(n-m) \sigma_3(m)$.

Allgemeiner kann man E_k ausdrücken als Linearkombination von Monomen der Form $E_4^\alpha E_6^\beta$ und erhält hieraus Formeln für $\sigma_{k-1}(n)$.

1.2 Die Modulvariante j

Definition 1.2.1. Sei $j := \frac{E_4^3}{\Delta}$.

Satz 1.2.2.

- (i) j ist holomorph auf \mathbb{H} und hat einen einfachen Pol in ∞ .
- (ii) j ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.
- (iii) j liefert eine Bijektion $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$.

Satz 1.2.3. Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.2. Die Modulinvariante j

- (i) f ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.
- (ii) f ist Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts.
- (iii) f ist eine rationale Funktion in j .

Index

Diskriminantenfunktion, 6

Eisensteinreihe, 5

Fundamentalebene, 1

Modulfigur, 2

Modulform, 3

Modulfunktion, 2

normalisierte Eisensteinreihe, 5

Peterssonsscher Strichoperator, 3

Ramanujan-Funktion, 7

Thetareihe, 4

Liste der Sätze

1.1.1 Satz (Valenzformel)	5
-------------------------------------	---