Modulformen I

Sommersemester 2018
Vorlesung von Prof. Dr. Winfried Kohnen

Vorlesungsmitschrieb von
Patrick Arras
Jonas Müller

Heidelberg, den 26. April 2018

Vorwort

Dies ist ein nicht offizielles Skript der Vorlesung Modulformen 1 aus dem Sommersemester 2018 gehalten von Professor Winfried Kohnen an der Universität Heidelberg. Das Skript wurde in der Vorlesung mitgetext und mit pdflatex kompiliert. Deshalb kann es Fehler enthalten und wir übernehmen keine Garantie für die Richtigkeit.

Bei Fehlern, kann ich unter folgender Mailadresse erreicht werden:

jj@mathphys.stura.uni-heidelberg.de

Die aktuellste Version des Skriptes befindet sich immer unter

https://github.com/jenuk/modulformen/blob/master/script.pdf

Die LaTeX-Source Dateien findet man hier, auf Fehler kann hier alternativ über neues Issue aufmerksam gemacht werden:

https://github.com/jenuk/modulformen/tree/master

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Tatsachen

1.1 Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Errinnerung)

1.1.1 Fundamentalbereich

Wie üblich sei

$$\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$$

die obere Halbebene und

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \} .$$

Dann operiert $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ z = \frac{az+b}{cz+d},$$

das heißt $E \circ z = z$ und $(M_1 M_2) \circ z = M_1 \circ (M_2 \circ z)$. Hierbei beachte man, dass

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} .$$

$\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist eine diskrete Untergruppe, spezielle Matrizen in $\Gamma(1)$ sind

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Translation $T \circ z = z + 1$ und Stürzung $S \circ z = -\frac{1}{z}$.

Man interessiert sich für die Operation von diskreten Untergruppen $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ insbesondere $\Gamma = \Gamma(1)$.

Definition 1.1.1. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ heißt Fundamentalbereich für die Operationen von $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$, falls:

(i) $\mathcal{F}$ ist offen,

(ii) zu jedem $z \in \mathbb{H}$ existiert ein $M \in \Gamma$ mit $M \circ z \in \overline{\mathcal{F}}$,

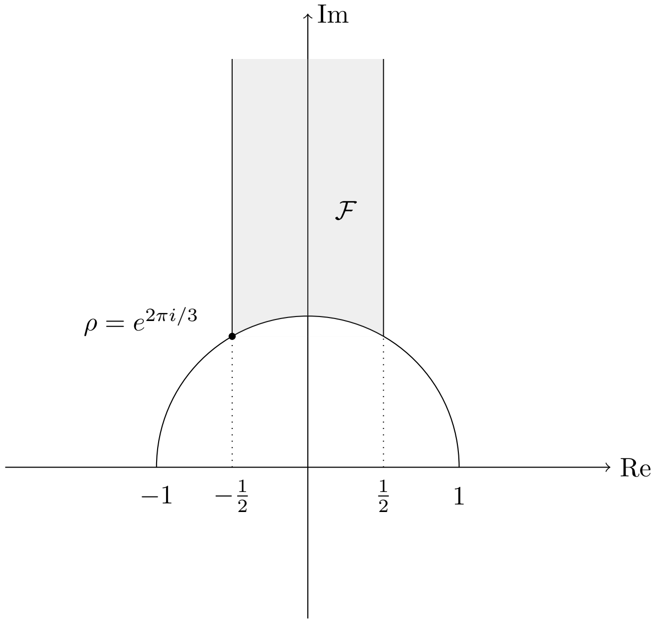

Abbildung 1.1: Der Fundamentalbereich $\mathcal{F}_1$ der vollen Modulgruppe.

(iii) Sind $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$ und $z_2 = M \circ z_1$ mit $M \in \Gamma$, dann gilt $M = \pm E$ und somit $z_1 = z_2$.

Beispiel 1.1.2. Die Menge $\mathcal{F}_1 := \left\{ z = x + iy \mid |x| < \frac{1}{2},\ |z| > 1 \right\}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\Gamma(1)$ auf $\mathbb{H}$, dieser wird auch MODULFIGUR genannt. Siehe Abbildung 1.1.

Bemerkung 1.1.3. Identifikationen in $\overline{\mathcal{F}_1}$ finden nur auf dem Rand statt. (Die Geraden $x = \pm\frac{1}{2}$ werden miteinander identifiziert unter T bzw T^{-1}, Punkte auf den Kreisbögen rechts oder links von i werden unter S identifiziert.

Satz 1.1.4. Die Gruppe $\Gamma(1)$ wird erzeugt von S und T.

1.1.2 Modulform

Definition 1.1.5. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt MODULFUNKTION vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ für $\Gamma(1)$, falls gilt:

(i) f ist auf $\mathbb{H}$ meromorph,

(ii) $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$,

(iii) f ist meromorph in ∞.

Bedeutung von (iii): Wendet man (ii) an mit $M = T$, so erhält man $f(z+1) = f(z)$. Sei $\mathcal{R} = \{\, q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1 \,\}$. Die Abbildung $z \mapsto q = e^{2\pi iz}$ bildet $\mathbb{H}$ auf $\mathcal{R}$ ab und $F(q) := f(z)$ ist wohldefiniert und holomorph bis auf mögliche Polstellen, die sich prinzipiell gegen $q = 0$ häufen könnten. Bedingung (iii) fordert nun, dass $q = 0$ eine unwesentliche isolierte Singularität[1] von F ist. Nach Funktionentheorie 1 hat dann F eine Laurententwicklung

$$F(q) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n q^n \qquad \text{für } 0 < |q| < |q_0|$$

wobei $n_0 \in \mathbb{Z}$ fest. Damit erhalten wir also

$$f(z) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n e^{2\pi inz} \qquad \text{für } 0 < y_0 < y$$

Definition 1.1.6. Ein solches f heißt MODULFORM falls f auf $\mathbb{H}$ und in ∞ holomorph ist (letzteres bedeutet, dass F in $q = 0$ hebbar ist, also $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n e^{2\pi inz}$ für alle $z \in \mathbb{H}$). Eine Modulform heißt Spitzenform, falls $a_0 = 0$.

Bemerkung 1.1.7. Die Fourierkoeffizienten a_n sind im Allgemeinen wichtige und interessante Größen (z. B. Darstellungsanzahlen von natürlichen ahlen durch quadratische Formen, etwa $r_4(n) = \#\left\{\, (x,y,z,w) \in \mathbb{Z}^4 \mid n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \,\right\}$ oder die Anzahl von Punkten auf elliptischen Kurven über $\mathbb{F}_p$).

Definition 1.1.8. Sei $: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Man setzt

$$(f|_k M)(z) := (cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)$$

für $z \in \mathbb{H}$, dies ist der PETERSSONSCHER STRICHOPERATOR.

Dann gilt $f|_k E = f$ und $f|_k (M_1 M_2) = (f|_k M_1)|_k M_2$ für alle M_1, $M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Es folgt:

(i) Es gilt $(f|_k M)(z) = (cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d}) = f(z)$ für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$ genau dann, wenn dies für S und T gilt, d. h. $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$ und $f(z+1) = f(z)$, da S und T $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugen.

[1] Das heißt es handelt sich um eine hebbare Singularität oder eine Polstelle.

(ii) Eine Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist genau dann eine Modulform vom Gewicht k, wenn f eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n e^{2\pi i n z} \qquad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

hat und zusätzlich gilt

$$f\Big(-\frac{1}{z}\Big) = z^k f(z)$$

1.1.3 Beispiele für Modulformen

Thetareihen

Definition 1.1.9. Sei $A \in M_m(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann heißt

$$\vartheta_A(z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g] z} \qquad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

eine Thetareihe, wobei $A[g] := g^t A g$ für $g \in \mathbb{Z}^m \cong M_{m,1}(\mathbb{Z})$.

Satz 1.1.10.

(i) $\vartheta_A(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf $y \geqslant y_0 > 0$. Insbesondere ist $\vartheta_A(z)$ auf $\mathbb{H}$ holomorph.

(ii) Es gilt die Theta-Transformationsformel: $\vartheta_{A^{-1}} = \sqrt{\det A} \cdot (\frac{z}{i})^{\frac{m}{2}} \vartheta_A(z)$.

Satz 1.1.11. Sei $A \in M_m(\mathbb{Z})$ symmetrisch, positiv definit, gerade[2] und $\det A = 1$. Dann gilt $8|m$ und $\vartheta_A(z)$ ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{m}{2}$ für $\Gamma(1)$.

Beachte $\vartheta_A(z) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} r_A(n) q^n$ wobei $r_A(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n durch die ganzzahlige, positive definite quadratische Form $x \mapsto \frac{1}{2} x^t A x$ auf $\mathbb{R}^m$ ist.

Eisensteinreihen

Definition 1.1.12. Sei $k \in \mathbb{Z}$, k gerade und $k \geqslant 4$. Dann heißt

$$G_k(z) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz+n)^k} \qquad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

[2] Das heißt für alle $\mu \in \{1, \dots, m\}$ gilt $a_{\mu\mu}$ ist gerade

EISENSTEINREIHE vom Gewicht k.[3]

Satz 1.1.13.

(i) $G_k(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf $D_\varepsilon = \left\{ z = x + iy \mid y \geqslant \varepsilon,\ x^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \right\}$, insbesondere also holomorph auf $\mathbb{H}$.

(ii) G_k ist Modulform vom Gewicht k für $\Gamma(1)$.

(iii) Es gilt

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.

Setze $E_k := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$ die NORMALISIERTE EISENSTEINREIHE. Benutze nun

$$\zeta(k) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}-1} 2^{k-1} B_k}{k!} \pi^k$$

für k gerade und $k \geqslant 2$. Damit folgt

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei alle B_k rationale Zahlen sind. Speziell gilt

$$B_4 = -\frac{1}{30} \qquad \Longrightarrow \qquad E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geqslant 1} \sigma_3(n) q^n \,,$$

$$B_6 = \frac{1}{42} \qquad \Longrightarrow \qquad E_6 = 1 - 504 \sum_{n \geqslant 1} \sigma_5(n) q^n \,.$$

1.1.4 Valenzformel und Anwendungen

Satz 1.1.14 (VALENZFORMEL). Sei f eine Modulfunktion vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$, $f \not\equiv 0$. Dann gilt

$$\operatorname{ord}_\infty f + \frac{1}{2} \operatorname{ord}_i f + \frac{1}{3} \operatorname{ord}_\rho f + \sum_{\substack{z \in \Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \\ z \not\sim i, \rho}} \operatorname{ord}_z f = \frac{k}{12} \,.$$

[3] $\sum_{m,n}' := \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}}$

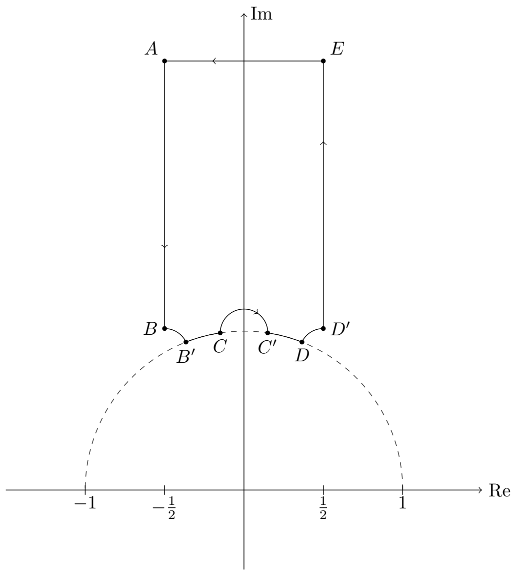

Abbildung 1.2: Die Kurve $\mathcal{C}$ wobei A und E so gewählt sind, dass $\mathcal{C}$ alle Null- und Polstellen enthält.

Hierbei ist $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und

$$\operatorname{ord}_\infty f := \operatorname{ord}_{q=0} F(q)$$

mit $F(q) = f(z)$ für $q = e^{2\pi i z}$.

Beweis. Zum Nachweis reduziert man auf den Fall, dass f außer in $z = \rho, -\overline{\rho}, i$ keine Null- oder Polstellen auf $\partial\overline{F_1}$ hat und berechnet

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z\,.$$

Wobei die Kurve $\mathcal{C}$ wie in Abbildung 1.2 gewählt ist.

q.e.d.

Definition 1.1.15. Sei

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728}\left(E_4^3(z) - E_6^2(z)\right)$$

die Diskriminantenfunktion. Dann ist Δ eine Spitzenform vom Gewicht $k = 12$ mit $\Delta(z) \neq 0\,\forall z \in \mathbb{H}$ und $\operatorname{ord}_\infty \Delta = 1$, d. h. $\Delta = q + \ldots$

Bemerkung 1.1.16. Δ ist in gewisser Weise die „erste“ von 0 verschiedene Spitzenform und wurde von vielen Mathematikern studiert.

Beispiel 1.1.17.

(i) Schreibe $\Delta(z) = \sum_{n\geqslant 1} \tau(n)q^n$, dann heißt $n \mapsto \tau(n)$ RAMANUJAN-FUNKTION. Es gilt: $\tau(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \geqslant 1$. Ferner lässt sich zeigen, dass $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \mod 691$, mithilfe von $B_{12} = -\frac{691}{2730}$.

(ii) Vermutung: $\tau(n) \neq 0$ für alle $n \geqslant 1$ (Lehner)

Sei M_k der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ und $S_k \subseteq M_k$ der Unterraum der Spitzenformen.

Bemerkung 1.1.18. $M_k = \{0\}$ für k ungerade, da $f((-E) \circ z) = f(z) = (-1)^k f(z)$.

Satz 1.1.19. Sei $k \in \mathbb{Z}$ gerade. Dann gilt:

(i) $M_k = \{0\}$ für $k < 0$ und $M_2 = \{0\}$.

(ii) $M_0 = \mathbb{C}$.

(iii) $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$, falls $k \geqslant 4$.

(iv) Die Abbildung $f \mapsto f \cdot \Delta$ gibt einen Isomorphismus von M_{k-12} auf S_k.

(v) $\dim M_k < \infty$.

Satz 1.1.20. Sei $k \geqslant 0$ gerade. Dann gilt:

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls } k \equiv 2 \mod 12 \\ 1 + \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls } k \not\equiv 2 \mod 12 \end{cases}$$

Beispiel 1.1.21.

(i) $M_4 = \mathbb{C}E_4$.

(ii) $M_6 = \mathbb{C}E_6$.

(iii) $M_8 = \mathbb{C}E_8 = \mathbb{C}E_4^2$.

(iv) $M_{10} = \mathbb{C}E_{10} = \mathbb{C}E_4E_6$.

(v) $M_{12} = \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}\Delta$.

(vi) $M_{14} = \mathbb{C}E_{14}$.

Satz 1.1.22. Sei $k \geqslant 0$ gerade. Dann bilden $E_4^\alpha E_6^\beta$ mit $4\alpha + 6\beta = k$ eine Basis von M_k, insbesondere gilt also

$$M_k = \bigoplus_{\substack{\alpha,\beta\geqslant 0\\ 4\alpha+6\beta=k}} \mathbb{C}E_4^\alpha E_6^\beta$$

.

Beweis. Wir zeigen zunächst induktiv, dass die Monome M_k erzeugen. Für $k \leqslant 10$ ist dies nach Beispiel 1.1.21 klar. Sei also $k \geqslant 12$. Man bestimme eine beliebige Kombination $\alpha, \beta \geqslant 0$ mit $4\alpha + 6\beta = k$ und setze $g := E_4^\alpha E_6^\beta \in M_k$ mit konstantem Term gleich 1.

Sei nun $f \in M_k$ beliebig mit konstantem Term a_0. Dann ist $f - a_0 \cdot g \in S_k$. Nach Satz 1.1.19, iv) gilt daher $f - a_0 \cdot g = \Delta \cdot h$ mit $h \in M_{k-12}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist h eine Linearkombination von Monomen $E_4^\gamma E_6^\delta$ mit $4\gamma + 6\delta = k - 12$. Aber $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ und daher ist $f - a_0 \cdot g$ Linearkombination von Monomen $E_4^{\gamma+3} E_6^\delta$ und $E_4^\gamma E_6^{\delta+2}$. Wegen

$$4(\gamma + 3) + 6\delta = k - 12 + 12 = k$$

$$4\gamma + 6(\delta + 2) = k - 12 + 12 = k$$

ist also auch f als Linearkombination von Monomen der behaupteten Form schreibbar. Somit erzeugen die Monome tatsächlich M_k.

Noch zu zeigen ist, dass die Monome über $\mathbb{C}$ linear unabhängig sind. Beweis durch Widerspruch: *Angenommen*, es existiere eine nicht-triviale lineare Relation

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\geqslant 0\\ 4\alpha+6\beta=k}} \lambda_{\alpha,\beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0\,.$$

Fall 1: Sei $k \equiv 0 \mod 4$. Dann sind alle β gerade, also schreibe jeweils $\beta = 2\beta'$ mit $\beta' \geqslant 0$. Es folgt $\alpha = \frac{k}{4} - 3\beta'$ und somit

$$E_4^\alpha E_6^\beta = E_4^{\frac{k}{4}-3\beta'} E_6^{2\beta'} = E_4^{\frac{k}{4}} \left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^{\beta'}\,.$$

Da $E_4^{\frac{k}{4}}$ nicht die Nullfunktion ist, ergibt sich eine nicht-triviale Polynom-Relation für $\frac{E_6^2}{E_4^3}$, d. h. die meromorphe Funktion $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ ist Nullstelle eines nicht-trivialen Polynoms über $\mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist (jedes nicht-konstante Polynom über $\mathbb{C}$ zerfällt vollständig über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren), ist $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ somit konstant.

Wir zeigen $\frac{E_6^2}{E_4^3} \equiv 0$ mit einem *Trick*: Es gilt $E_6(-\frac{1}{z}) = z^6 E_6(z)$, denn $E_6 \in M_6$. Auswerten in $z = i = -\frac{1}{i}$ liefert $E_6(i) = 0$. Ferner gilt

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n \geqslant 1} \sigma_3(n) e^{2\pi i n z} \quad \Longrightarrow \quad E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n \geqslant 1} \sigma_3(n) e^{-2\pi n}\,.$$

Da alle Summanden positiv sind, folgt $E_4(i) \neq 0$ und somit $\frac{E_6^2(i)}{E_4^3(i)} = 0$. Dies impliziert jedoch da $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ konstant ist bereits $E_6 \equiv 0$. ↯

Fall 2: Sei $k \equiv 2 \mod 4$, dann sind alle β ungerade. Analoges Vorgehen zum ersten Fall liefert ebenfalls einen Widerspruch.

Somit sind die Monome über $\mathbb{C}$ linear unabhängig. *q.e.d.*

Bemerkung 1.1.23. Der Satz impliziert additive Faltungsformeln für die multiplikativen Funktionen $\sigma_{k-1}(n)$ (weiterhin $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 4$ gerade). „Multiplikativ" bedeutet hier

$$\mathrm{ggT}(m, n) = 1 \Longrightarrow \sigma_{k-1}(m \cdot n) = \sigma_{k-1}(m) \cdot \sigma_{k-1}(n)\,.$$

Beispiel 1.1.24. $E_8 = E_4^2$, ferner $E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geqslant 1} \sigma_3(n) q^n$, also $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(n-m)\sigma_3(m)$.

Allgemeiner kann man E_k ausdrücken als Linearkombination von Monomen der Form $E_4^\alpha E_6^\beta$ und erhält hieraus Formeln für $\sigma_{k-1}(n)$.

1.2 Die Modulinvariante j

Definition 1.2.1. Sei $j := \frac{E_4^3}{\Delta}$.

Satz 1.2.2.

(i) j ist holomorph auf $\mathbb{H}$ und hat einen einfachen Pol in ∞.

(ii) j ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.

(iii) j liefert eine Bijektion $_{\Gamma(1)}\backslash^{\mathbb{H}} \cong \mathbb{C}$.

Beweis.

(i) Da $\Delta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$, ist $j(z)$ holomorph auf $\mathbb{H}$. Ferner gilt

$$\mathrm{ord}_\infty j = \mathrm{ord}_\infty E_4^3 - \mathrm{ord}_\infty \Delta = 0 - 1 = -1\,.$$

(ii) Da E_4^3, $\Delta \in M_{12}$ folgt die Aussage.

(iii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist zu zeigen, dass die Modulfunktion $j_\lambda := j - \lambda$ vom Gewicht Null eine modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eindeutig bestimmte Nullstelle hat. Man wendet auf j_λ die Valenzformel an! Es gilt $\mathrm{ord}_z\, j_\lambda \geqslant 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ und $\mathrm{ord}_\infty\, j_\lambda = -1$. Da $k = 0$ folgt mit der Valenzformel

$$-1 + n + \frac{n'}{2} + \frac{n''}{3} = 0$$

mit n, n', $n'' \in \mathbb{N}_0$. Also

$$n + \frac{n'}{2} + \frac{n''}{3} = 1 \tag{1.1}$$

Man prüft nach: die einzigen Lösungen $(n, n', n'') \in \mathbb{N}_0^3$ von (1.1) sind $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ und $(0,0,3)$. Dies impliziert die Behauptung. *q.e.d.*

Satz 1.2.3. Sei $f\colon \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.

(ii) f ist Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts.

(iii) f ist eine rationale Funktion in j.

Beweis.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sei $f = \frac{P(j)}{Q(j)}$ wobei $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$ mit $a_\nu \in \mathbb{C}$, $a_m \neq 0$ und $Q(X) = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n$ mit $b_\nu \in \mathbb{C}$, $b_n \neq 0$ mit $Q \not\equiv 0$, insbesondere also auch $Q(j) \not\equiv 0$. Wegen $j = \frac{E_4^3}{\Delta}$ folgt

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_0 + a_1\frac{E_4^3}{\Delta} + \ldots + a_m\left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^m}{b_0 + b_1\frac{E_4^3}{\Delta} + \ldots + b_n\left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^n} \\ &= \frac{(a_0\Delta^m + a_1E_4^3\Delta^{m-1} + \ldots + a_m(E_4^3)^m)\cdot\Delta^n}{(b_0\Delta^n + b_1E_4^3\Delta^{n-1} + \ldots + b_n(E_4^3)^n)\cdot\Delta^m}\,. \end{aligned}$$

Hier sind Zähler und Nenner Modulformen vom Gewicht $12(m+n)$. Also folgt die Behauptung.

(ii) $\Rightarrow$ (i) klar

(i) ⇒ (iii) Sei f eine Modulfunktion vom Gewicht Null und $f \not\equiv 0$. Seien $z_1, \dots z_r$ die modulo $\Gamma(1)$ verschiedenen Polstellen von f und $m_1, \dots m_r$ deren Ordnungen. Sei

$$P(z) := \prod_{\nu=1}^{r} \big(j(z) - j(z_\nu)\big)^{m_\nu} .$$

Dann gilt

$$\operatorname{ord}_{z_\nu} P = \operatorname{ord}_{z_\nu} \big(j(z) - j(z_\nu)\big)^{m_\nu} = m_\nu \operatorname{ord}_{z_\nu} \big(j(z) - j(z_\nu)\big) \geqslant m_\nu .$$

Dann ist $P(z)f(z)$ eine Modulfunktion vom Gewicht Null und holomorph auf $\mathbb{H}$. Da $P(z)$ ein Polynom in j ist, genügt es die Behauptung für $P(z)f(z)$ zu zeigen. Insbesondere kann man voraussetzen, dass f holomorph auf $\mathbb{H}$ ist. Da $\operatorname{ord}_\infty \Delta = 1$, gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ so dass $g := \Delta^n f$ in unendlich holomorph ist. Dann ist $f = \frac{g}{\Delta^n}$ und g ist eine Modulform vom Gewicht $12n$. Nach Satz 1.1.22 ist g eine Linearkombination von Monomen $E_4^\alpha E_6^\beta$ mit $4\alpha + 6\beta = 12n$. Es genügt somit die Behauptung für $\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^n}$ zu zeigen. Insbesondere gilt $3|\alpha$ und $2|\beta$, schreibe $\alpha = 3p$ und $\beta = 2q$. Dann gilt

$$\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^n} = \frac{(E_4^3)^p (E_6^2)^q}{\Delta^{p+q}} = j^p (j - 1728)^q ,$$

denn $j - 1728 = j - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} = \frac{E_4^3}{\Delta} - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} = \frac{E_6^2}{\Delta}$. *q.e.d.*

Bemerkung 1.2.4.

(i) Der Quotient $\Gamma(1)\backslash\mathbb{H}$ besitzt in natürlicher Weise die Struktur einer Riemannschen Fläche isomorph zu $S^2 \setminus \{\,\text{Punkt}\,\}$ indem man die Ränder in $\overline{\mathcal{F}_1}$ identifiziert. Fügt man den Punkt ∞ hinzu, so erhält an $\overline{\Gamma(1)\backslash\mathbb{H}} := \Gamma(1)\backslash\mathbb{H} \cup \{\,\infty\,\} \cong S^2$ (die Sphäre in $\mathbb{R}^3$). Satz 1.2.2 (iii) besagt dann, dass j ein Isomorphismus von $\overline{\Gamma(1)\backslash\mathbb{H}} \cong S^2 \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$ ist. Satz 1.2.3 entspricht dann der Tatsache, dass die einzigen meromorphen Funktionen auf S^2 die rationalen Funktionen sind.

(ii) Man kann zeigen (schwer!)

$$\Delta(z) = q \prod_{n \geqslant 1} (1 - q^n)^{24} .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} j = \frac{E_4^3}{\Delta} &= \frac{1}{q} \Big(1 + 240 \sum_{n \geqslant 1} \sigma_3(n) q^n\Big)^3 \frac{1}{\prod_{n \geqslant 1} (1 - q^n)^{24}} \\ &= \frac{1}{q} \Big(1 + 240 \sum_{n \geqslant 1} \sigma_3(n) q^n\Big)^3 \prod_{n \geqslant 1} \Big(\sum_{m \geqslant 0} q^{mn}\Big)^{24} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n\geqslant 1} c(n)q^n \qquad \text{mit } c(n) \in \mathbb{N}\,.$$

Also hat die j-Funktion eine Fourierentwicklung in q, wobei die Koeffizienten positive ganzen Zahlen sind.

(iii) Man zeigt leicht: $\frac{1}{\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)} = 1+\sum_{n\geqslant 1} p(n)q^n$ wobei $p(n)$ die Anzahl der Partionen von n ist, d. h. die Anzahl der Zerlegungen von n als Summe positiver, ganzer Zahlen (Beispielsweise $p(4) = 5$, denn $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$). Man sagt: die erzeugende Reihe von $p(n)$ wird durch $\frac{1}{\prod_{m\geqslant 1}(1-q^n)}$ gegeben.

Beachte $1 + \sum_{n\geqslant 1} p(n)q^n = \frac{e^{\pi i \frac{z}{12}}}{\eta(z)}$ wobei $\eta(z) = e^{\pi i \frac{z}{12}} \prod_{n\geqslant 1}(1 - q^n)$ die sogenannte Dedekindische η-Funktion ist. Beachte $\eta^{24} = \Delta$. η sollte also eine Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ sein. Mit Hilfe der Theorie der Modulformen kann man zeigen $p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} \cdot e^{\pi\sqrt{\frac{3}{2}n}}$ für $n \to \infty$ (hier $a(n) \sim b(n)$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 1$).

Index

Liste der Sätze