Modulformen I

Sommersemester 2018
Vorlesung von Prof. Dr. Winfried Kohnen

Vorlesungsmitschrieb von
Patrick Arras
Jonas Müller

Heidelberg, den 19. April 2018

Vorwort

Dies ist ein nicht offizielles Skript der Vorlesung Modulformen 1 aus dem Sommersemester 2018 gehalten von Professor Winfried Kohnen an der Universität Heidelberg. Das Skript wurde in der Vorlesung mitgetext und mit pdflatex kompiliert. Deshalb kann es Fehler enthalten und wir übernehmen keine Garantie für die Richtigkeit.

Bei Fehlern, kann ich unter folgender Mailadresse erreicht werden:

jj@mathphys.stura.uni-heidelberg.de

Die aktuellste Version des Skriptes befindet sich immer unter

https://github.com/jenuk/modulformen/blob/master/script.pdf

Die LaTeX-Source Dateien findet man hier, auf Fehler kann hier alternativ über neues Issue aufmerksam gemacht werden:

https://github.com/jenuk/modulformen/tree/master

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Tatsachen

1.1 Ergebnisse aus Funktionentheorie 2 (Errinnerung)

1.1.1 Fundamentalbereich

Wie üblich sei

$$\mathbb{H} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \,\}$$

die obere Halbebene und

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\, M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \,\} \;.$$

Dann operiert $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ z = \frac{az+b}{cz+d} \,,$$

das heißt $E \circ z = z$ und $(M_1 M_2) \circ z = M_1 \circ (M_2 \circ z)$. Hierbei beachte man, dass

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} \;.$$

$\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist eine diskrete Untergruppe, spezielle Matrizen in $\Gamma(1)$ sind

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Translation $T \circ z = z + 1$ und Stürzung $S \circ z = -\frac{1}{z}$.

Man interessiert sich für die Operation von diskreten Untergruppen $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ insbesondere $\Gamma = \Gamma(1)$.

Definition 1.1.1. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ heißt Fundamentalbereich für die Operationen von $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$, falls:

(i) $\mathcal{F}$ ist offen,

(ii) zu jedem $z \in \mathbb{H}$ existiert ein $M \in \Gamma$ mit $M \circ z \in \overline{\mathcal{F}}$,

(iii) Sind $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$ und $z_2 = M \circ z_1$ mit $M \in \Gamma$, dann gilt $M = \pm E$ und somit $z_1 = z_2$.

Beispiel 1.1.2. Die Menge $\mathcal{F}_1 := \left\{ z = x + iy \mid |x| < \frac{1}{2},\ |z| > 1 \right\}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\Gamma(1)$ auf $\mathbb{H}$, dieser wird auch MODULFIGUR genannt.

Bemerkung 1.1.3. Identifikationen in $\overline{\mathcal{F}_1}$ finden nur auf dem Rand statt. (Die Geraden $x = \pm\frac{1}{2}$ werden miteinander identifiziert unter T bzw T^{-1}, Punkte auf den Kreisbögen rechts oder links von i werden unter S identifiziert.

Satz 1.1.4. Die Gruppe $\Gamma(1)$ wird erzeugt von S und T.

1.1.2 Modulform

Definition 1.1.5. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt MODULFUNKTION vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ für $\Gamma(1)$, falls gilt:

(i) f ist auf $\mathbb{H}$ meromorph,

(ii) $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$,

(iii) f ist meromorph in ∞.

Bedeutung von (iii): Wendet man (ii) an mit $M = T$, so erhält man $f(z+1) = f(z)$. Sei $\mathcal{R} = \{ q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1 \}$. Die Abbildung $z \mapsto q = e^{2\pi i z}$ bildet $\mathbb{H}$ auf $\mathcal{R}$ ab und $F(q) := f(z)$ ist wohldefiniert und holomorph bis auf mögliche Polstellen, die sich prinzipiell gegen $q = 0$ häufen könnten. Bedingung (iii) fordert nun, dass $q = 0$ eine unwesentliche isolierte Singularität[1] von F ist. Nach Funktionentheorie 1 hat dann F eine Laurententwicklung

$$F(q) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n q^n \qquad \text{für } 0 < |q| < |q_0|$$

wobei $n_0 \in \mathbb{Z}$ fest. Damit erhalten wir also

$$f(z) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n e^{2\pi i n z} \qquad \text{für } 0 < y_0 < y$$

Definition 1.1.6. Ein solches f heißt MODULFORM falls f auf $\mathbb{H}$ und in ∞ holomorph ist (letzteres bedeutet, dass F in $q = 0$ hebbar ist, also $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n e^{2\pi i n z}$ für alle $z \in \mathbb{H}$). Eine Modulform heißt Spitzenform, falls $a_0 = 0$.

[1] Das heißt es handelt sich um eine hebbare Singularität oder eine Polstelle.

Bemerkung 1.1.7. Die Fourierkoeffizienten a_n sind im Allgemeinen wichtige und interessante Größen (z. B. Darstellungsanzahlen von natürlichen ahlen durch quadratische Formen, etwa $r_4(n) = \#\left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{Z}^4 \mid n = x^2+y^2+z^2+w^2 \right\}$ oder die Anzahl von Punkten auf elliptischen Kurven über $\mathbb{F}_p$).

Definition 1.1.8. Sei $: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Man setzt

$$(f|_k M)(z) := (cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)$$

für $z \in \mathbb{H}$, dies ist der Peterssonscher Strichoperator.

Dann gilt $f|_k E = f$ und $f|_k(M_1M_2) = (f|_kM_1)|_kM_2$ für alle M_1, $M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Es folgt:

(i) Es gilt $(f|_kM)(z) = (cz+d)^{-k}f(\frac{az+b}{cz+d}) = f(z)$ für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$ genau dann, wenn dies für S und T gilt, d. h. $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$ und $f(z+1) = f(z)$, da S und T $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugen.

(ii) Eine Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist genau dann eine Modulform vom Gewicht k, wenn f eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n e^{2\pi i n z} \qquad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

hat und zusätzlich gilt

$$f\Big(-\frac{1}{z}\Big) = z^k f(z)$$

1.1.3 Beispiele für Modulformen

Thetareihen

Definition 1.1.9. Sei $A \in M_m(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann heißt

$$\vartheta_A(z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g] z} \qquad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

eine Thetareihe, wobei $A[g] := g^t A g$ für $g \in \mathbb{Z}^m \cong M_{m,1}(\mathbb{Z})$.

Satz 1.1.10.

(i) $\vartheta_A(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf $y \geqslant y_0 > 0$. Insbesondere ist $\vartheta_A(z)$ auf $\mathbb{H}$ holomorph.

(ii) Es gilt die Theta-Transformationsformel: $\vartheta_{A^{-1}} = \sqrt{\det A} \cdot (\frac{z}{i})^{\frac{m}{2}} \vartheta_A(z)$.

Satz 1.1.11. Sei $A \in M_m(\mathbb{Z})$ symmetrisch, positiv definit, gerade[2] und $\det A = 1$. Dann gilt $8|m$ und $\vartheta_A(z)$ ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{m}{2}$ für $\Gamma(1)$.

Beachte $\vartheta_A(z) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} r_A(n) q^n$ wobei $r_A(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n durch die ganzzahlige, positive definite quadratische Form $x \mapsto \frac{1}{2} x^t A x$ auf $\mathbb{R}^m$ ist.

Eisensteinreihen

Definition 1.1.12. Sei $k \in \mathbb{Z}$, k gerade und $k \geqslant 4$. Dann heißt

$$G_k(z) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz+n)^k} \qquad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

Eisensteinreihe vom Gewicht k.[3]

Satz 1.1.13.

(i) $G_k(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf $D_\varepsilon = \{ z = x + iy \mid y \geqslant \varepsilon,\ x^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \}$, insbesondere also holomorph auf $\mathbb{H}$.

(ii) G_k ist Modulform vom Gewicht k für $\Gamma(1)$.

(iii) Es gilt

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.

Setze $E_k := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$ die normalisierte Eisensteinreihe. Benutze nun

$$\zeta(k) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}-1} 2^{k-1} B_k}{k!} \pi^k$$

für k gerade und $k \geqslant 2$. Damit folgt

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

---

[2] Das heißt für alle $\mu \in \{ 1, \ldots, m \}$ gilt $a_{\mu\mu}$ ist gerade

[3] $\sum_{m,n}{}' := \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}}$

Index

Liste der Sätze